



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

ШАФАРЕВИЧ
АНДРЕЙ ИГОРЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТАГИРОВУ ДЖАННЕТ ДЖАБРАИЛОВНУ



Содержание

Лекция 1. Графы. Задача о железнодорожной сети	4
Введение	4
Элементы теории графов	4
Задача о железнодорожной сети	7
Минимальное число маршрутов в системе	8
Лекция 2. Замкнутые кривые на плоскости	11
Формула Эйлера	11
Замкнутые кривые на плоскости	11
Число вращения	15
Теорема Уитни-Грауштейна	16
Лекция 3. Триангулируемые двумерные поверхности	17
Теорема Уитни-Грауштейна	17
Классификация двумерных поверхностей	20
Лекция 4. Классификация поверхностей	24
Гомеоморфизм поверхностей	24
Классификация ориентируемых поверхностей	25
Классификация неориентируемых поверхностей	29
Эйлерова характеристика поверхности	31
Склейки из квадрата	32
Лекция 5. Кристаллографические группы	33
Кристаллографические группы	33
Лекция 6. Классификация кристаллографических групп	40
Классификация кристаллографических групп	40

Лекция 1. Графы. Задача о железнодорожной сети

Введение

Наш курс, в рамках которого мы будем стараться продемонстрировать и понять какие-то достаточно красивые факты, не требующие особой техники и больших знаний - для большинства материала будет достаточно знаний школьного курса и начал математического анализа - состоит из двух частей - наглядной геометрии и наглядной топологии.

Элементы теории графов

Самый простой элементарный одномерный объект - кусок кривой. Для нас не важны размеры или углы, связанные с этими объектами, поэтому мы можем двигать эти объекты, растягивать их или сжимать. Причем типов таких объектов может быть всего два - отрезок и замкнутая кривая, все остальные объекты к ним сводятся (см. Рис. 1):

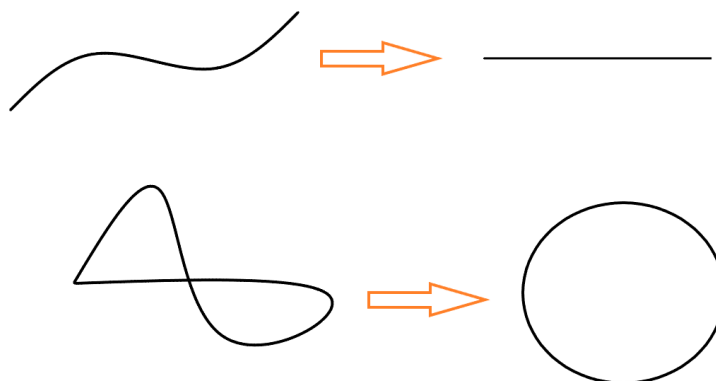


Рис. 1. Типы объектов

Если мы не имеем в виду помещение этого объекта ни в какую плоскость, то всегда можно объект расправить в окружность или в отрезок.

Теперь давайте будем рассматривать такие же криволинейные отрезки, но будем стыковать их друг с другом - будем присоединять конец одного отрезка к концу другого:

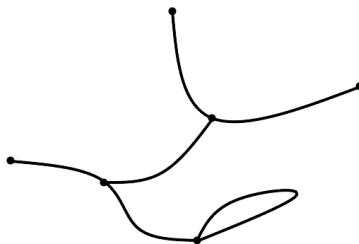


Рис. 2. Пример графа

Такие объекты называются **графами**. И в рамках первого раздела мы будем изучать элементы теории графов. Теперь нужно определить понятие графа. На первом этапе нас будут интересовать только одномерные свойства графа, т.е. нам не важно, куда помещен наш граф. Для простоты поместим наш граф в пространство R^3 с фиксированным ортонормированным базисом, которому соответствуют координаты $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Прежде чем дать формулировку определения графа, нам необходимо дать определение такому элементарному объекту, как участок кривой. Кривые можно задавать разными способами, один из которых - задание кривой параметрическими уравнениями, т.е. кривую мы наглядно представляем себе как движение точки в трехмерном пространстве.

Определение 1.1. *Элементарная гладкая регулярная кривая в трехмерном пространстве R^3 - это множество точек $\gamma \subset R^3$, задаваемое параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(t)$, где $i = 1, 2, 3$ или $x = r(t)$, где r - радиус-вектор соответствующей точки, причем такой, что:*

- $t \in [a; b]$
- $r(t) \in C^\infty([a; b])$
- $\dot{r}(t) \neq 0$ на $[a; b]$
- если $r(t_1) = r(t_2)$, то либо $t_1 = t_2$, либо $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$

Первое условие на функцию $r(t)$ отражает элементарность кривой и время принадлежит конечному отрезку.

Второе условие означает гладкость кривой.

Теперь обсудим третье свойство. Оно характеризует регулярность нашей кривой. Вектор $\dot{r}(t)$ - вектор скорости нашей кривой - не обращается в ноль на нашем отрезке. С точки зрения механики это означает, что при движении по кривой наша точка нигде не останавливается. С геометрической же точки зрения можно сказать, что на нашей кривой нет изломов. Т.к. наша функция бесконечно дифференцируема, то, кажется, что изломов в принципе быть не может, однако это не так. Рассмотрим такой пример:

Пример 1.1

• Рассмотрим в плоскости кривую, которая задается параметрическими уравнениями и у которой выполнены все условия кроме 3го. При этом на такой кривой будет точка излома.

$$x_1 = t^2$$

$$x_2 = t^3$$

$$x_3 = 0$$

$$t \in [-1; 1]$$

Из соотношения на x_2 получаем $t = x_2^{1/3}$ и подставим в соотношение на x_1 :
 $x_1 = x_2^{2/3}$. Графиком такой функции является полукубическая парабола:

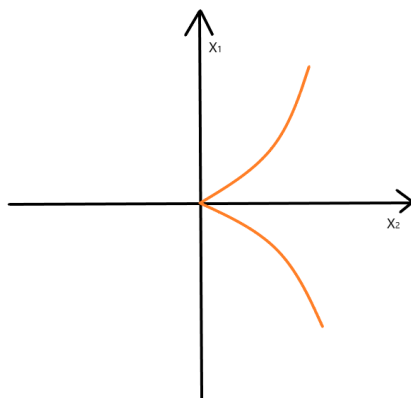


Рис. 3. График функции $x_1 = x_2^{2/3}$

Как видно из графика, у функции есть точка излома в нуле. Наличие такой точки связано с тем, что функция $x_2^{2/3}$ не дифференцируема в нуле - ее производная в этой точке обращается в бесконечность и касательная направлена вдоль оси x_2 . Таким образом, мы привели пример функции, которая является бесконечно дифференцируемой, но у которой есть точки излома. •

Четвертое условие говорит о том, что кривая не пересекается сама с собой: если у нас в какие-то два момента времени положение точек совпало, то либо это один и тот же момент времени, либо эти моменты времени являются начальным и конечным.

Теперь мы можем определить граф в трехмерном пространстве:

Определение 1.2. *Граф в трехмерном пространстве R^3 - это конечный набор точек $v_1, \dots, v_N$, некоторые пары которых соединены конечным набором элементарных кривых, причем эти элементарные кривые могут пересекаться между собой только в точках (v_j) .*

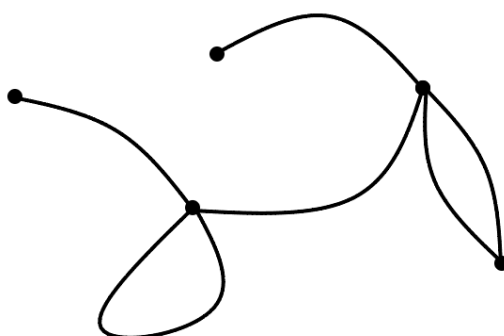


Рис. 4. Граф

Точки v_j называются *вершинами графа*, а элементарные кривые, соединяющие эти точки, называются *ребрами графа*.

Ребро, которое начинается и заканчивается в одной точке, называется *петлей*, а если две вершины соединяют два и более ребра, то такие ребра называют *кратными ребрами*.

Задача о железнодорожной сети

Рассмотрим такую задачу: будем смотреть на наш граф как на железнодорожную сеть, т.е. вершины графа примем за пункты, а ребра - за пути, их соединяющие. Наша задача состоит в том, чтобы составить систему маршрутов так, чтобы все пути обслуживались и по каждому маршруту ходил только один поезд. Т.е. мы хотим минимизировать число поездов и возникает вопрос - каким наименьшим числом маршрутов можно обслужить железнодорожную сеть.

Теперь перейдем к формальной постановке задачи. Нам необходимо определить, что такое маршрут. Для этого необходимо дать определение пути.

Определение 1.3. *Путь в графе - это конечный набор вершин и ребер следующего вида:*

$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k e_k v_{k+1}$, где v_j - вершины, e_j - ребра, причем ребро e_j соединяет вершину v_j с вершиной v_{j+1} . Набор вершин $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ - конечные пункты нашего пути. Если v_1 и v_{k+1} совпадают, то путь будет называться кольцевым.

Теперь определим, что такое маршрут:

Определение 1.4. *Маршрут в графе - путь, т.ч. каждое ребро этого пути встречается в нем только 1 раз.*

Теперь мы можем сформулировать нашу задачу. У нас задан граф, на котором мы хотим определить систему маршрутов так, что

- 1) Ни по какому ребру не ходят два маршрута
- 2) Система маршрута обслуживает весь граф
- 3) Число маршрутов минимальное

Теперь сформулируем такое определение:

Определение 1.5. *Правильная система маршрутов в графе - это набор маршрутов, т.ч. каждое ребро графа принадлежит ровно одному маршруту.*

То, что каждое ребро входит в какой-то маршрут, говорит о том, что мы обслужили весь граф, а то, что каждое ребро принадлежит только одному маршруту, говорит о том, что разные маршруты по одному ребру не проходят.

Итак, задача. Каково минимальное число маршрутов в правильной системе?

Минимальное число маршрутов в системе

Определение 1.6. *Пусть v - вершина графа Γ . Обозначим через $\hat{\Gamma}$ пересечение графа Γ с шаром достаточно малого радиуса с центром в точке v . Число k ребер, исходящих из вершины v графа и лежащих на границе шара, называется степенью вершины v .*

Ответ на вопрос нашей задачи такой: если мы посчитаем число вершин нечетной степени, то минимальное число маршрутов в правильной системе - это число вершин нечетной степени, поделенное на 2. С точностью до двух деталей, это верно и в общем случае. Сейчас мы сформулируем соответствующую теорему.

Две детали состоят в следующем. Во-первых, наш граф может состоять из многих не связанных между собой кусков и это может внести некоторую путаницу в подсчет числа маршрутов, поэтому такую ситуацию мы рассматривать не будем.

Определение 1.7. Граф Γ является связным, если любые две вершины можно соединить путем.

Вторая деталь состоит в том, что вершин нечетной степени может не быть вообще.

Теорема 1.1. Пусть Γ - связный граф, k - число вершин нечетной степени в Γ , m - минимальное число маршрутов в правильной системе. Тогда

$$m = \begin{cases} \frac{k}{2}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть v - вершина нечетной степени. И пусть на графе задана правильная система маршрутов. Тогда в этой вершине будет конечный пункт хотя бы одного маршрута.

Предположим, что это не так и рассмотрим вершину, из которой исходит нечетное число ребер. Тогда, если мы рассмотрим любое ребро, входящее в эту вершину, то по нему в эту вершину обязательно приходит какой-то маршрут и этот маршрут обязан выйти по какому-то другому ребру, т.е. каждое ребро является входящим для какого-то маршрута и есть какое-то исходящее ребро для каждого маршрута. Т.е. в каждой вершине нечетной степени обязательно будет конечный пункт какого-то маршрута.

Обозначим через q количество конечных пунктов. Тогда имеет место такое соотношение: $k \leq q \leq 2m \Rightarrow m \geq \frac{k}{2}$

Докажем, что таким числом маршрутов всегда можно обойтись. Рассмотрим наш граф Γ , рассмотрим всевозможные правильные системы маршрутов на этом графе и выберем из них систему с наименьшим числом маршрутов - такую систему назовем минимальной. Попробуем выяснить некоторые свойства такой системы.

Во-первых, в каждой вершине нечетной степени имеется конечный пункт. Но минимальность системы накладывает такие дополнительные свойства:

1) В каждой вершине нечетной степени не более 1 конечного пункта

Докажем это. Предположим, что у нас есть вершина нечетной степени, в которой имеются конечные пункты каких-то двух маршрутов. Тогда мы можем эти два маршрута объединить в один и, тем самым, уменьшить число маршрутов на 1, что невозможно, т.к. система минимальна.

2) Если число маршрутов $m > 1$, то кольцевых маршрутов нет.

Предположим, что это не так. Тогда заметим, что если число маршрутов $m > 1$,

то те ребра, по которым идет кольцевой маршрут, - это не все ребра графа. В этом случае кольцевой маршрут обязан пересекаться с каким-либо еще маршрутом, т.к. иначе наш граф не был бы связным. Тогда мы можем включить наш кольцевой маршрут с каким-либо еще, что невозможно, т.к. мы уменьшим число маршрутов на 1. что невозможно, т.к. система минимальна.

3) Если число маршрутов $m > 1$, то в вершинах четной степени нет конечных пунктов.

Доказательство аналогично предыдущим пунктам.

Итак, если $m > 1$, то наше неравенство $k \leq q \leq 2m$ превращается в равенство $m = \frac{k}{2}$. ■

Следствие 1.1 Если число маршрутов $m = 1$, то число вершин нечетной степени $k = 0$ или $k = 2$.

Определение 1.8. Граф Γ является *уникурсальным*, если $m = 1$

Из нашей теоремы следует, что для уникурсальных графов число вершин нечетной степени равно либо 0 либо 2. С этим обстоятельством связана известная задача, которая называется задачей Эйлера о мостах.

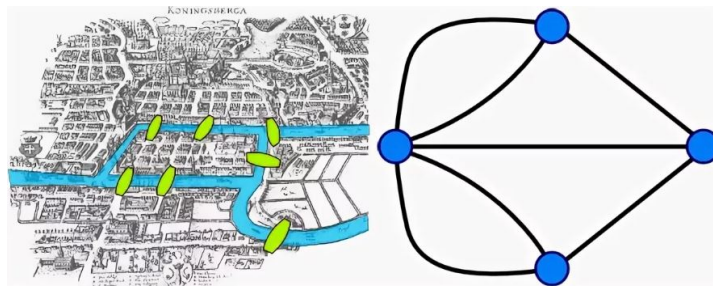


Рис. 5. Задача Эйлера о семи мостах

Вопрос задачи состоит в том, возможно ли вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно 1 раз.

Сопоставим участкам суши вершины графа, как показано на картинке, а мостам сопоставим ребра. Тогда мы получаем граф, у которого все вершины нечетных степеней. Тогда, согласно нашей теореме, вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно 1 раз, невозможно.

Лекция 2. Замкнутые кривые на плоскости

Формула Эйлера

Если мы рассмотрим граф, нарисованный на какой-либо поверхности, то для этого графа $v + f - e = 2$, где v - число вершин, f - число областей, на которые этот граф разбивает поверхность, e - число ребер.

Определение 2.1. Формула $v + f - e = 2$, где v - число вершин, f - число областей, на которые этот граф разбивает поверхность, e - число ребер, называется формулой Эйлера, а число $\chi = v + f - e$ - эйлеровой характеристикой поверхности.

Замкнутые кривые на плоскости

Эта тема сочетает в себе геометрии размерностей 1 и 2 - с одной стороны, мы будем иметь дело с кривыми, но, с другой стороны, для нас будет очень важно, что эти кривые лежат на плоскости.

Предположим, что у нас на плоскости есть замкнутая кривая. Вопрос состоит в том, сколько разных замкнутых кривых можно нарисовать на плоскости. Но данный вопрос требует такого уточнения: какие кривые мы будем считать разными, а какие - одинаковыми. Мы будем разрешать движение кривой по плоскости, при этом данные движения не обязаны сохранять расстояние между точками кривой - она может быть деформируема любым образом, но не должно возникать разрывов и точек излома. Таким образом, вопрос сводится к тому, что если мы можем путем таких деформаций из одной кривой получить другую, то эти кривые мы будем считать одинаковыми. Например, кривая, не имеющая точек самопересечения, легко расправляется в окружность.

Первая возникающая мысль состоит в том, что инвариантом наших кривых с точностью до деформаций - число точек самопересечения, т.е. по этому числу мы можем понять тип кривой. Но это не так, потому что при движении кривой число точек самопересечения можно легко изменить.

Ответ же состоит в том, что если у нас есть кривая на плоскости, то ей можно сопоставить какое-то целое число и две кривые мы будем называть одинаковыми, если эти числа у них будут совпадать.

Определение 2.2. Гладкая регулярная замкнутая плоская кривая - множество точек $\gamma \in \mathbb{R}^3$, задаваемое параметрическими уравнениями $x = r(t)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, причем:

- $t \in \mathbb{R}$

- $r(t)$ - бесконечно дифференцируема
- $\dot{r}(t) \neq 0$
- $\exists T > 0$, т.ч. $r(t + T) = r(t)$

Второе условие обозначает гладкость прямой. В частности, на нашей кривой нет разрывов. Т.е. наши функции x_1, x_2 бесконечно дифференцируемы и непрерывны.

Третье условие - условие отсутствия изломов, в которых движение останавливается.

Условия 1 и 4 обозначают замкнутость нашей кривой - спустя время $t = T$ мы возвращаемся в исходную точку нашей кривой.

Теперь сформулируем определение, связанное с тем, что мы будем понимать под словами, что две кривые на плоскости можно деформировать друг в друга.

Итак, пусть на плоскости имеются две гладкие замкнутые регулярные кривые $\gamma_0 : x = r_0(t); \gamma_1 : x = r_1(t)$

Определение 2.3. Кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны, если $\exists$ векторная функция $r(t, \tau)$, т.ч.

- $\tau \in [0; 1]; t \in R$
- $r(t, \tau) \in C^\infty$ по обоим переменным
- $\forall \tau_0 \in [0; 1]$ уравнение $x = r(t, \tau_0)$ задает гладкую регулярную замкнутую плоскую кривую
- $r(t, 0) = r_0(t); r(t, 1) = r_1(t)$

Теперь сформулируем некий общий вопрос. Итак, пусть на плоскости заданы две кривые γ_0 и γ_1 . При каких условиях γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны?

Ответ на данный вопрос дается теоремой, состоящей в том, что по каждой кривой можно посчитать некое целое число и кривые будут регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда эти числа будут равны.

Уточним сначала некоторые сведения о наших кривых. Пусть есть некоторая кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = r(t)$. Для двух произвольных точек, лежащих на некоторой дуге, определим длину дуги между этими точками.

Определение 2.4. Длина дуги кривой γ между точками t_1 и t_2 определяется следующим соотношением:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$$

Также необходимо отметить следующее: одну и ту же кривую можно задавать разными параметрическими уравнениями. Сделаем такую замену параметра:

$$t = t(t')$$

но эту замену параметра нужно сделать таким образом, чтобы все условия сохранились, т.е. чтобы были выполнены условия гладкости и регулярности нашей кривой. Это означает, что функцию $t(t')$ мы должны выбирать бесконечно дифференцируемой и чтобы $\frac{dt}{dt'} \neq 0$.

После того, как мы определили длину, мы можем посмотреть на различные параметризации этой кривой и легко понять, что среди них есть одна выделенная - в качестве параметра мы можем взять саму длину. Физически это означает, что у нас имеется равномерное движение по кривой. Такая параметризация называется натуральной - определим ее.

Рассмотрим кривую, задающуюся параметрическими уравнениями $x = r(t)$. Зафиксируем на нашей кривой точку, отвечающую параметру t_0 и введем новый параметр s - длина дуги:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{r}(t_1)| dt_1$$

$$\dot{s} = |\dot{r}(t)| > 0$$

Таким образом, наша функция s бесконечно дифференцируема и строго монотонна. Поэтому у нее существует обратная функция $t(s)$, которую мы можем подставить в уравнение кривой и получить новые уравнения:

$$x = r(s) = r(t(s))$$

где в качестве параметра выбрана длина дуги. Такая параметризация кривой называется натуральной, а параметр s - натуральным параметром.

Вспомним теперь некоторые сведения о периодических функциях.

Пусть у нас есть функция $f(t)$, такая, что $t \in R$. И пусть фиксировано некоторое положительное число $T > 0$.

Определение 2.5. Функция $f(t)$ называется T -периодической, если $f(t + T) = f(t)$. Число T называется периодом этой функции.

Утверждение 2.1 Свойства периодических функций:

- 1) Линейная комбинация T -периодических функций T -периодична.
- 2) Если функция f - T -периодическая, то $\dot{f}$ также T -периодическая.
- 3) $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Доказательство.

Доказательство первых двух свойств встречалось в рамках курса математического анализа, поэтому мы докажем только третье свойство.

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$$

Сделаем замену параметра $x = t - T$. Тогда:

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_0^a f(x + T)dx$$

Т.к. функция f - периодическая, то:

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_0^a f(x + T)dx = \int_a^T f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(t)dt$$

Далее сформулируем следующее определение.

Определение 2.6. Среднее значение периодической функции $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$

Теперь мы можем дополнить утверждение 2.1 таким свойством:

Утверждение 2.1 (продолжение) Дополним список свойств периодических функций таким свойством:

- 4) Пусть $F(t)$ - первообразная функции $f(t)$. Тогда $F(t) = t \langle f \rangle + F_0(t)$, где F_0 - T -периодична.

Доказательство.

Т.к. все первообразные отличаются только на константу, то нам достаточно доказать утверждение только для одной первообразной. Возьмем в качестве нее $F(t) = \int_0^t f(t_1)dt_1$.

$F_0(t) = \int_0^t f(t_1)dt_1 - t \langle f \rangle$ - нам нужно доказать, что эта функция периодическая. Для этого нам нужно убедиться в том, что такое соотношение верно:

$$F_0(t + T) - F_0(t) = 0$$

$$F_0(t+T) - F_0(t) = \int_0^{t+T} f(t_1) dt_1 - \frac{t+T}{T} \int_0^T f(t) dt - \int_0^t f(t_1) dt_1 + \frac{t}{T} \int_0^T f(t) dt =$$

$$= \int_t^{t+T} f(t_1) dt_1 - \int_0^T f(t) dt = 0 \text{ по свойству 3.} \quad \blacksquare$$

Теперь мы можем вернуться к ответу на наш вопрос. Число, о котором мы уже упоминали, называется числом вращения кривой.

Число вращения

Пусть у нас задана гладкая регулярная замкнутая кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = r(s)$. Рассмотрим вектор скорости этой кривой. Будем двигаться вдоль нашей кривой, считая, что вектор в каждый момент времени отложен от начала координат, - наш вектор будет каким-то образом вращаться. Причем если наш вектор совершит оборот против часовой стрелки, то мы будем считать этот оборот со знаком «+», а если по часовой - со знаком «-».

Определение 2.7. Число вращения кривой $m(\gamma)$ - число оборотов вектора скорости.

Рассмотрим наш единичный вектор скорости $v(s)$. Если мы обозначим через $\alpha(s)$ угол между этим вектором и фиксированным направлением (например, положительным направлением оси Ox), то в соответствующих декартовых координатах наш вектор будет выглядеть так:

$$v(s) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s)) \\ \sin(\alpha(s)) \end{pmatrix}$$

Функция $\alpha(s)$ называется угловой функцией кривой. Эту функцию можно выбрать так, чтобы она была бесконечно дифференцируема. В таком случае эта функция и будет определять число вращения. Обозначим L за период в параметризации s . Тогда $r(s+L) = r(s)$. Тогда:

$$\alpha(s+L) = \alpha(s) + 2\pi m, \text{ где } m - \text{число вращения.}$$

$$m = \frac{1}{2\pi}(\alpha(s+L) - \alpha(s)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \alpha'(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^L (v', n) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^L (-v'_1 v_2 + v'_2 v_1),$$

где v_1 и v_2 - компоненты вектора скорости v .

Теорема Уитни-Грауштейна

Теорема 2.1. *Две гладкие регулярные замкнутые кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают $m(\gamma_0) = m(\gamma_1)$.*

Доказательство.

Необходимость.

Пусть у нас имеются две регулярно гомотопные кривые, т.е. у нас имеется семейство кривых $x = r(t, \tau)$, т.ч. при $\tau = 0$ у нас имеется кривая γ_0 , а при $\tau = 1$ у нас имеется кривая γ_1 . Давайте посчитаем при каждом τ число вращений кривой. Рассмотрим функцию $m(\tau) = m(\gamma_\tau)$. Эта функция определена на $[0; 1]$. Она непрерывная и принимает только целые значения - значит, эта функция является константой. В частности, в точках 0 и 1 она принимает одно и то же значение, т.е. $m(\gamma_0) = m(\gamma_1)$.

■

Лекция 3. Триангулируемые двумерные поверхности

Теорема Уитни-Грауштейна

Теорема 3.1. *Две гладкие регулярные замкнутые кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают $m(\gamma_0) = m(\gamma_1)$.*

Доказательство.

Достаточность.

Рассмотрим параметрические уравнения наших кривых:

$$x = r_0(s)$$

$$x = r_1(s)$$

Рассмотрим сначала угловые функции этих кривых. Как известно из предыдущей лекции

$$\alpha_0(s + L) - \alpha_0(s) = 2\pi m_0$$

$$\alpha_1(s + L) - \alpha_1(s) = 2\pi m_1$$

Теперь соединим эти функции линейным образом и рассмотрим такую функцию:

$$\alpha(s, \tau) = (1 - \tau)\alpha_0(s) + \tau\alpha_1(s)$$

Эта функция бесконечно дифференцируема. Кроме того, эта функция также удовлетворяет нашему соотношению:

$\alpha(s + L, \tau) - \alpha(s, \tau) = 2\pi m$. Это соотношение можно получить из соотношений на α_0 и α_1 :

$(1 - \tau)\alpha_0(s + L) - 2\pi m_0(1 - \tau) + \tau\alpha_1(s + L) - 2\pi m_1\tau$. Тогда получаем следующее:

$$2\pi m = 2\pi(m_0(1 - \tau) + m_1\tau) = 2\pi m_0, \text{ т.к. } m_0 = m_1.$$

Теперь мы получили функцию α и можем восстановить по ней гомотопию, т.е. восстановить замкнутые кривые при всех значениях τ . Для начала восстановим вектор скорости:

$$v(s, \tau) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s, \tau)) \\ \sin(\alpha(s, \tau)) \end{pmatrix}$$

Эта функция бесконечно дифференцируема и L -периодична по s :

$$v(s, 0) = v_0(s)$$

$$v(s, 1) = v_1(s)$$

$$v(s + L, \tau) = v(s, \tau)$$

Следующий шаг состоит в восстановлении параметрических уравнений кривой по вектору скорости:

$\int_0^s v(s_1, \tau) ds_1$ - функция первообразной от v . Она также является бесконечно дифференцируемой, но она может быть не периодической.

Для того, чтобы сделать ее периодической, необходимо сделать следующее:

$$r(s, t) = \int_0^s v(s_1, \tau) ds_1 - s \langle v \rangle, \text{ где } \langle v \rangle - \text{среднее значение } v \text{ по } s.$$

Теперь рассмотрим параметрические уравнения $x = r(s, \tau)$ - это и есть нужная нам гомотопия, т.к. эта функция является бесконечно дифференцируемой и периодической. ■

Оказывается, если точки самопересечения считать с правильными знаками, получится число, близкое к числу вращения. Именно: пусть γ - замкнутая кривая; будем считать, что на этой кривой конечное число точек самопересечения, причем все они двойные (т.е. степени всех вершин соответствующего графа равны четырем) и в каждой точке векторы скорости к пересекающимся дугам образуют ненулевой и не равный π угол. Будем двигаться вдоль кривой, стартуя с точки x_0 , и каждый раз, встречая точку самопересечения, отметим в этой точке направление вектора скорости. После обхода кривой в каждой точке самопересечения возникнет репер e_1, e_2 : вектор e_1 соответствует первому посещению точки, а e_2 - второму. Если это вращение от вектора к вектору происходит по часовой стрелке, припишем точке самопересечения число $\varepsilon = +1$, если против часовой стрелки - число $\varepsilon = -1$.

Определение 3.1. Числом Уитни $W(x_0)$ кривой γ называется сумма по всем точкам самопересечения чисел ε_j :

$$W = \sum_j \varepsilon_j$$

Теорема 3.2. Пусть n - число вращения, а W - число Уитни кривой γ . Тогда $n = W1$.

Доказательство.

Будем двигаться вдоль кривой, стартуя с точки x_0 до тех пор, пока дважды не

встретим точку самопересечения x_j . Изменим кривую так, как показано на рис. 6; получим кривую γ_1 и несамопересекающуюся кривую γ_2 . Ясно, что число вращения $n(\gamma)$ исходной кривой равно сумме $n(\gamma_1) + n(\gamma_2)$ (при помощи гомотопии можно добиться, чтобы векторы скорости в точке x_j были почти параллельны). Далее, число Уитни

$$W(x_0, \gamma) = W(x_j, \gamma_1) + \varepsilon_j + m,$$

где ε_j – число ± 1 , сопоставляемое точке самопересечения x_j , m – суммарный вклад от точек пересечения γ_2 с γ_1 . Последнее число равно нулю – действительно, кривая γ_2 делит плоскость на две области и каждой точке пересечения, соответствующей входу γ_1 во внутреннюю область, отвечает точка, соответствующая выходу, причем суммарный вклад в число Уитни от каждой пары равен нулю. Таким образом:

$$n(\gamma)W(x_0, \gamma) = n(\gamma_1)W(x_j, \gamma_1) + n(\gamma_2)\varepsilon_j$$

Оба числа γ_2 и ε_j равны ± 1 (γ_2 – по теореме Хопфа).

Из рис. 6 видно, что они совпадают, следовательно

$$n(\gamma)W(x_0, \gamma) = n(\gamma_1)W(x_j, \gamma_1).$$

Убирая таким образом точки самопересечения, получим в результате несамопересекающуюся кривую, для которой эта разность равна ± 1 ■

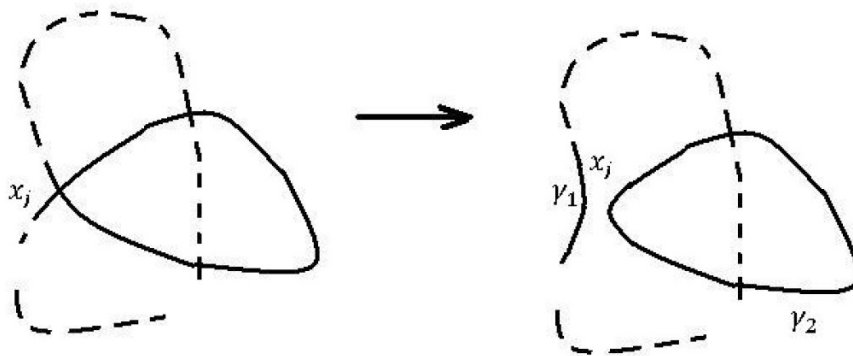


Рис. 6. Перестройка кривых

Классификация двумерных поверхностей

Далее рассматриваются двумерные поверхности в евклидовом пространстве; наша цель — классификация таких поверхностей с точностью до “непрерывной деформации”. Прежде всего, надо определить, что мы понимаем под двумерной поверхностью; существует два разных подхода к этому определению. В любом случае, сперва необходимо описать ситуацию локально, т.е. в малой окрестности произвольной точки. То обстоятельство, что поверхность двумерна, означает, что любой достаточно малый ее кусок может быть задан параметрическими уравнениями $x = r(u)$ где $u = (u_1, u_2)$ — параметры (координаты на поверхности), меняющиеся в некоторой области на плоскости. Один из подходов к определению поверхности состоит в том, что она представляется как объединение кусков, каждый из которых задается такими уравнениями, причем считается, что координаты u меняются в открытом множестве (например, круге). В пересечении двух таких кусков возникают две системы координат; требуется, чтобы одни координаты выражались через другие посредством непрерывных (или гладких) функций.

Такой подход — “наложение кусков друг на друга” — лежит в основе определения топологического (или гладкого) многообразия; на нем основана, в частности, классическая дифференциальная геометрия многообразий.

Для нас удобнее будет представлять поверхность как объединение стандартных кусков, стыкующихся друг с другом по участку границы. Начнем с определения стандартного куска; сперва опишем множество, в котором меняются координаты.

Определение 3.2. *Стандартным двумерным симплексом называется (замкнутый) треугольник на плоскости.*

Ясно, что для всякого симплекса можно так выбрать систему координат на плоскости, что симплекс будет задаваться следующими соотношениями:

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1$$

Для этого достаточно поместить начало координат в одну из рассматриваемых точек (вершин симплекса) и направить базисные векторы из нее в остальные вершины.

У каждого симплекса есть одномерные грани — стороны треугольника и нульмерные — его вершины. Стороны задаются одним из уравнений вида $u_j = 0$ или $\sum_j u_j = 1$

Определение 3.3. *Криволинейным двумерным симплексом в евклидовом пространстве называется множество, которое можно задать параметрически:*

$$x = r(u_1, u_2),$$

где координаты $u = (u_1, u_2)$ пробегают стандартный симплекс, а все координаты $x_i(u)$ вектора $r(u)$ — гладкие (т.е. бесконечно дифференцируемые) функции в этом стандартном симплексе, причем векторы $\frac{\partial r}{\partial u_i}$ линейно независимы во всех его точках. Требуется, кроме того, чтобы заданное такой формулой отображение между точками стандартного и криволинейного симплексов было взаимнооднозначным, т.е. из равенства

$$r(u) = r(v)$$

должно следовать, что $u = v$ (последнее условие, очевидно, означает, что криволинейный симплекс не имеет точек самопересечения).

Теперь мы можем определить наш основной геометрический объект — триангулируемую поверхность. Это — множество, правильным образом составленное из криволинейных симплексов.

Определение 3.4. *Стандартным двумерным симплексом называется (замкнутый) треугольник на плоскости.*

Ясно, что для всякого симплекса можно так выбрать систему координат на плоскости, что симплекс будет задаваться следующими соотношениями:

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1$$

Для этого достаточно поместить начало координат в одну из рассматриваемых точек (вершин симплекса) и направить базисные векторы из нее в остальные вершины.

У каждого симплекса есть одномерные грани — стороны треугольника и нульмерные — его вершины. Стороны задаются одним из уравнений вида $u_j = 0$ или $\sum_j u_j = 1$

Определение 3.5. *Триангулируемая двумерная поверхность в евклидовом пространстве — это множество, представимое в виде объединения конечного числа криволинейных симплексов. При этом требуется, чтобы пересечение любых двух входящих в это множество симплексов было либо пустым множеством, либо ровно одной целой гранью (размерности 0 или 1) для обоих пересекающихся симплексов. Кроме того, по каждой одномерной грани может пересекаться не более двух симплексов.*

Триангуляцией поверхности называется ее представление в виде такого объединения криволинейных симплексов.

Таким образом, триангулируемая поверхность состоит из конечного числа криволинейных треугольников, причем пересечение треугольников возможно либо по одной целой стороне, либо по одной вершине.

Определенные выше поверхности имеют край и ориентацию. Определим эти понятия.

Определение 3.6. Краем стандартного симплекса называется объединение его одномерных граней (граница треугольника); аналогично, краем криволинейного симплекса называется объединение образов этих граней при соответствующем отображении, т.е. множество, заданное параметрическими уравнениями $x = r(u)$, в которых координаты u пробегает край стандартного симплекса.

Край криволинейного симплекса - это замкнутая цепочка из трех криволинейных отрезков.

Наконец, определим край триангулируемой поверхности. Для этого рассмотрим края всех входящих в нее криволинейных симплексов. Все вместе они составляют набор конечного числа криволинейных отрезков (граней симплексов). Для каждой такой грани возможны две ситуации: либо она принадлежит двум разным симплексам (являясь их пересечением), либо только одному. В первом случае назовем криволинейный отрезок *внутренним*, а во втором - *внешним*.

Определение 3.7. Краем триангулируемой k -поверхности называется объединение ее краевых одномерных граней.

Для произвольных поверхностей край является объединением нескольких замкнутых цепочек криволинейных отрезков. Каждая такая цепочка называется компонентой края

Теперь рассмотрим все понятия, связанные с ориентируемостью поверхностей.

Определение 3.8. Стандартный симплекс называется ориентированным, если задано направление обхода его края. Другими словами, на каждой стороне треугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направления.

Фактически, задание ориентации — это выбор одного из двух направлений вращения — “по часовой стрелке” или “против часовой стрелки”.

Определение 3.9. Криволинейный симплекс называется ориентированным, если задана ориентация соответствующего стандартного симплекса. Другими словами, на крае криволинейного симплекса должно быть задано направление обхода.

Рассмотрим теперь триангулируемую поверхность. Ее ориентация получается из ориентации входящих в нее симплексов, при условии правильного согласования ориентаций на их пересечениях.

Определение 3.10. *Триангулируемая поверхность называется ориентированной, если на каждом входящем в нее криволинейном симплексе задана ориентация, причем если два симплекса пересекаются по одномерной грани, то два направления, индуцированные на этой грани ориентациями двух пересекающихся симплексов, должны быть противоположными.*

Легко понять, что условие противоположности ориентаций, индуцированных на грани двумя пересекающимися по этой грани симплексами, означает “непрерывность” ориентации при переходе через грань из одного симплекса в другой.

Определение 3.11. *Поверхность называется ориентируемой, если на ней существует ориентация.*

Нетрудно убедиться, что ориентируемость двумерной поверхности в трехмерном пространстве эквивалентна следующему свойству. Пусть γ — произвольная замкнутая кривая на поверхности; будем говорить, что кривая сохраняет ориентацию, если в каждой точке этой кривой существует единичный вектор нормали к поверхности (т.е. вектор, перпендикулярный векторам $\frac{\partial r}{\partial u_j}$ — касательным векторам к координатным линиям) и непрерывно зависящий от точки (другими словами, кривая сохраняет ориентацию, если при непрерывном переносе вектора нормали вдоль этой кривой он переходит в себя, а не в противоположный вектор).

Лекция 4. Классификация поверхностей

Гомеоморфизм поверхностей

Наша цель – классифицировать двумерные поверхности; для этого надо выяснить, какие из них мы будем считать одинаковыми. Нас не будут интересовать ни размеры, ни форма поверхности; таким образом, допускаются любые деформации без разрывов. Это означает, что поверхности считаются одинаковыми, если они преобразуются друг в друга непрерывными взаимно однозначными отображениями. Определение непрерывности ничем не отличается от соответствующего понятия анализа.

Определение 4.1. Пусть $f : M \mapsto Q$ – отображение триангулируемой поверхности M в триангулируемую поверхность Q . Отображение f называется непрерывным в точке $P \in M$, если для любой окрестности V точки $f(P) \in Q$ найдется окрестность U точки P , для которой $f(U \cap M) \subset V$. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке.

Определение 4.2. Отображение $f : M \mapsto Q$ называется гомеоморфным, если f взаимно-однозначно (тогда существует обратное отображение f^{-1}) и f и f^{-1} непрерывны. Поверхности M и Q называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм $f : M \mapsto Q$

Для классификации двумерных поверхностей нам понадобится ряд операций с поверхностями, которые мы сейчас опишем.

Вырезание и заклейка дырки

Удалим из поверхности ее пересечение с шаром достаточно малого радиуса, центр которого — точка поверхности, не принадлежащая краю. Получим новую поверхность, край которой содержит на одну окружность больше, чем край исходной поверхности. Эта операция называется вырезанием дырки, а обратная к ней — заклежкой дырки диском.

Вырезание дырки эквивалентно удалению из поверхности одного внутреннего симплекса (т.е. симплекса, не пересекающегося с краем); заклейка дырки – присоединение к поверхности многоугольника, стороны которого отождествляются с гранями симплексов, лежащими на некоторой выделенной компоненте края.

Вклейка ручки

Ручкой называется поверхность, полученная из тора вырезанием дырки. Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края (край вырезанного

диска) с краем ручки. Такая операция называется вклейкой ручки.

Вклейка пленки Мебиуса

Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края с краем пленки Мебиуса (напомним, что он состоит из одной окружности). Такая операция называется вклейкой пленки Мебиуса.

Классификация ориентируемых поверхностей

Наша цель – классифицировать двумерные поверхности с точностью до гомеоморфизма. Прежде всего отметим, что достаточно ограничиться поверхностями, “состоящими из одного куска”; такие поверхности называются связными.

Определение 4.3. Поверхность M называется связной, если любые две точки M можно соединить непрерывной кривой, лежащей на M .

Ясно, что на каждой связной поверхности существует связный граф, разбивающий ее на куски, гомеоморфные диску.

Начнем с классификации ориентируемых поверхностей без края. Обозначим через M_g поверхность, полученную из сферы приклейкой g ручек.

Теорема 4.1. Каждая связная ориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей M_g .

Доказательство.

Рассмотрим на Q связный граф Γ , разбивающий ее на конечное число областей, каждая из которых гомеоморфна диску. Окружим каждую вершину графа маленьким “кружком”, а каждое ребро заключим в узкую полоску, соединяющую построенные “кружки” (рис. 7). Другими словами, рассмотрим поверхность Q_ε , состоящую из точек $P \in Q$, находящихся от Γ на расстоянии, не большем ε . Здесь $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Вырежем теперь из поверхности Q все оставшиеся куски областей (внутренности); каждый кусок гомеоморфен диску, так что эта процедура сводится к вырезанию в поверхности нескольких дырок, а обратная к ней — к заклеиванию дырок дисками.

Рассмотрим теперь получившуюся после такого удаления поверхность Q_ε — она состоит из кружков, окружающих вершины графа, соединенных ленточками, содержащими ребра. Рассмотрим в графе максимальное дерево и соответствующие

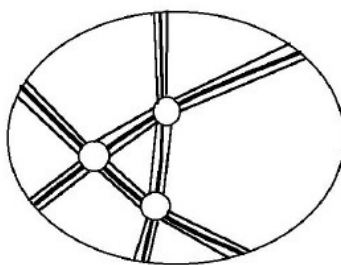


Рис. 7. Шаг 1

перемычки. Каждую полосу, соответствующую перемычкам, разрежем поперек; в результате получится новая поверхность $\hat{Q}$ (рис. 8).

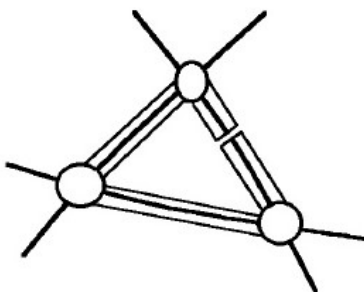


Рис. 8. Шаг 2

Убедимся в том, что эта поверхность гомеоморфна диску. Действительно, рассмотрим максимальное дерево рассматриваемого графа. Это дерево можно строить, начиная с одного ребра, соединяющего две вершины и добавляя каждый раз по одному ребру и одной вершине так, чтобы все время получалось дерево. Два кружка, соединенных полоской, очевидно, гомеоморфны диску. Добавление полоски с кружком эквивалентно приклеиванию к диску прямоугольника по одной его стороне. В результате снова получается поверхность, гомеоморфная диску. Таким образом, получая на каждом шаге поверхность, гомеоморфную диску, мы построим максимальное дерево, окруженное полосками и кружками. Для того, чтобы получить поверхность $\hat{Q}$, осталось приклеить куски, образовавшиеся при разрезании перемычек. Каждый такой кусок гомеоморфен прямоугольнику, который приклеивается по одной стороне. При этом снова получается поверхность, гомеоморфная диску.

Итак, вырезав внутренности областей и разрезав полоски, соответствующие перемычкам, мы получили из Q поверхность, гомеоморфную диску. Посмотрим теперь, к чему приводит разрезание полосок и, главное, что представляет собой обратная

процедура их склейки. Рассмотрим произвольную полосу; пусть, разрезая ее, мы соединяем точки a и b на разных сторонах. Ясно, что эти точки лежат на крае поверхности Q_ϵ (край Q_ϵ состоит из границ полосок и кружков); при этом a и b могут лежать как на разных окружностях, образующих край, так и на одной.

Если они лежат на разных окружностях, разрезание по соединяющей две окружности дуге приводит к уменьшению на единицу числа дырок в поверхности (рис. 3); значит, обратный процесс склейки должен приводить к вырезанию одной дырки.

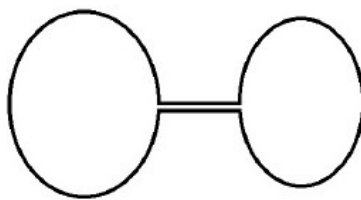


Рис. 9. Шаг 3

Если точки a и b лежат на одной окружности, процесс разрезания можно представить себе следующим образом. Прежде всего, сдвинем точки a и b в одну точку на крае; тогда разрезать придется по замкнутой кривой, начинающейся и заканчивающейся на крае. Такую процедуру можно разбить на два этапа: сперва мы разрежем поверхность по замкнутой кривой q , не пересекающейся с краем, а затем соединим этот разрез с краем по дуге (рис. 10). На втором этапе мы соединяем разрезом две точки, лежащие на разных окружностях, образующих край (одна из этих окружностей возникла при разрезании по замкнутой кривой); как мы видели выше, эта процедура сводится к заклеиванию дырки диском, а обратная — к вырезанию диска.

Наконец, осталось рассмотреть процедуру разрезания поверхности вдоль замкнутой кривой q , не пересекающейся с краем. Если мы заключим эту кривую в узкую полосу и вырежем эту полосу из нашей поверхности, вырезанный кусок будет гомеоморфен цилиндру. Действительно, если такую полосу разрезать поперек, ее можно будет распрямить в прямоугольник. При склеивании прямоугольника по двум противоположным сторонам получается либо цилиндр, либо лента Мебиуса; последняя содержит цепочку симплексов, обращающую ориентацию, а таких в нашей поверхности быть не может (напомним, что Q предполагается ориентируемой). Итак, полоска, содержащая рассматриваемую замкнутую кривую q , гомеоморфна

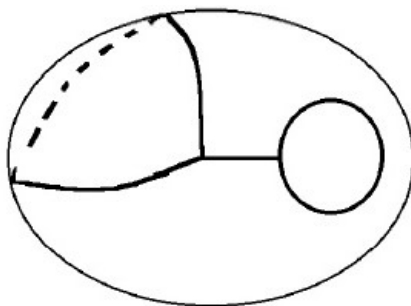


Рис. 10. Шаг 4

цилиндру, а ее разрезание по нашей кривой — разрезанию цилиндра по средней окружности, в результате чего он распадается на два (рис. 11).

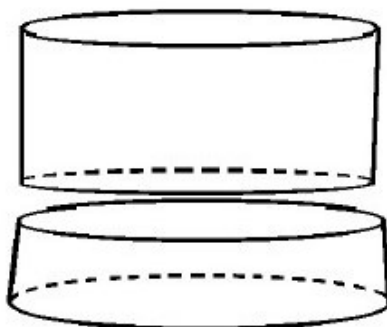


Рис. 11. Шаг 5

После такого разрезания на поверхности образуется две новых окружности, входящих в край; склеивание вдоль нашей замкнутой кривой q эквивалентно склейке двух таких окружностей. Если при склейке направление обхода “против часовой стрелки” на одной окружности перейдет в такое же направление на другой, узкая полоска, соединяющая окружности, склеится в ленту Мебиуса (рис. 12), что запрещено условием ориентируемости поверхности.

Итак, исходная поверхность Q получается из поверхности $\hat{Q}$, гомеоморфной диску, при помощи серии операций (склейка полосок, соответствующих перемычкам в графе, и приклейка внутренностей областей), каждая из которых эквивалентна одной из следующих:

- а) вырезание дырки;
- б) заклеивание дырки диском;
- в) вклейка ручки.

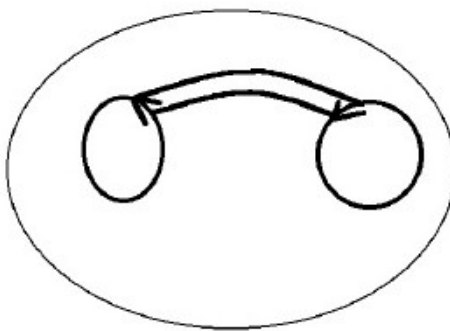


Рис. 12. Шаг 6

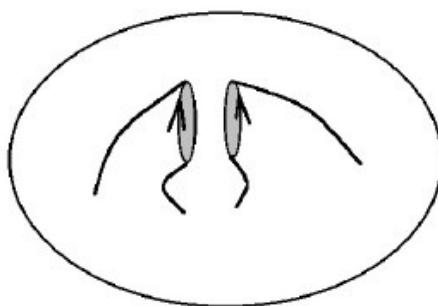


Рис. 13. Шаг 7

Значит, поверхность Q гомеоморфна сфере с некоторым количеством дырок и некоторым количеством ручек. Отсутствие края гарантирует отсутствие дырок, поэтому Q гомеоморфна одной из поверхностей M_g ■

Обозначим через M_g^m поверхность, полученную из M_g вырезанием m дырок (сфера с ручками и дырками). Любая связная ориентируемая триангулируемая поверхность с краем гомеоморфна одной из поверхностей M_g^m

Классификация неориентируемых поверхностей

Из доказательства предыдущей теоремы видно, что, если отказаться от требования ориентируемости, в поверхности могут появиться куски, гомеоморфные пленке Мебиуса. Прежде всего, приведем новое удобное описание этой операции. Прежде, чем вклеивать пленку Мебиуса в поверхность, разрежем ее по средней линии; получим поверхность, гомеоморфную цилиндру. Обратную склейку средней линии можно представлять себе как отождествление диаметрально противоположных точек одного из оснований цилиндра (рис. 8; на рисунке одинаковыми буквами обозначены

ны точки, которые требуется отождествить). Тем самым, вклейку пленки Мебиуса в поверхность можно представлять себе следующим образом: сперва в поверхности вырезается дырка и в нее вклеивается цилиндр (одно из его оснований приклеивается к краю дырки), а затем на оставшемся основании цилиндра отождествляются диаметрально противоположные точки.

Теперь мы можем описать неориентируемые поверхности. Обозначим через N_k поверхность, полученную из сферы вклейкой k пленок Мебиуса.

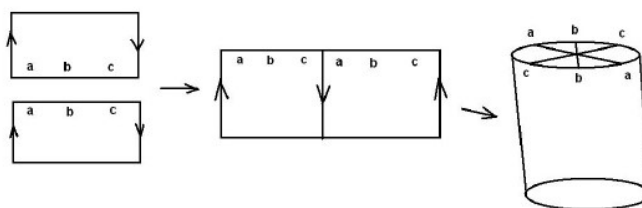


Рис. 14. Лента Мебиуса

Теорема 4.2. *Каждая связная неориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей N_k*

Доказательство.

Легко понять, что ориентируемость поверхности в этом доказательстве используется в двух местах, причем оба относятся к операции вырезания из поверхности ленточной окрестности замкнутой кривой (и к обратной операции вклейки).

Во-первых, сама вырезаемая ленточка может быть гомеоморфна либо цилиндру, либо пленке Мебиуса; в ориентируемом случае возможен только первый вариант, тогда как сейчас мы должны допустить и второй. Тем самым, к перечисленным выше операциям (вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки), при помощи которых из сферы получается исходная поверхность Q , добавляется еще одна — вклейка пленки Мебиуса.

Во-вторых, если ленточка все же гомеоморфна цилиндру, вклейка этого цилиндра в поверхность эквивалентна склейке краев двух дырок; эта склейка может осуществляться двумя различными способами, причем, если направление обхода “против часовой стрелки” на одной окружности переходит в такое же направление на второй, получается неориентируемая поверхность. Нам осталось выяснить, что именно происходит при такой операции. Рассмотрим поверхность, в которой вырезаны две дырки, а затем края этих дырок склеены с учетом одинаковой ориентации на них. Представим эту процедуру следующим образом. Сперва разрежем поверхность по двум отрезкам, соединяющим края дырок; при этом из поверхности выпадет связный кусок. Вклеим этот кусок назад поверхность, склеив сперва края дырок по

нужному правилу (для этого кусок придется “вывернуть наизнанку”); в результате снова получим поверхность с двумя дырками (край каждой дырки – вновь проведенный разрез), но теперь требуется склеить диаметрально противоположные точки на краях дырок. Выше мы видели, что такая операция эквивалентна вклейке пленки Мебиуса; таким образом, вклейка в поверхность нашего цилиндра эквивалентна приклеиванию к ней двух пленок Мебиуса.

Итак, любая поверхность получается из сферы при помощи четырех операций: вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки и вклейка пленки Мебиуса. В результате получится сфера с некоторым количеством дырок, ручек и пленок Мебиуса. Поскольку мы рассматриваем поверхности без края, дырок быть не может; кроме того, поскольку поверхность неориентируема, хотя бы одна пленка Мебиуса присутствует. Таким образом, наша поверхность гомеоморфна сфере с $g \geq 0$ ручками и $s \geq 1$ пленками Мебиуса. Оказывается, такая поверхность гомеоморфна сфере, к которой приклеено $s + 2g$ пленок Мебиуса (ручки приклеивать не надо). Другими словами, в присутствии хотя бы одной пленки Мебиуса, любая ручка на поверхности эквивалентна двум пленкам Мебиуса. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим на поверхности ручку и пленку Мебиуса; напомним, что приклейка ручки эквивалентна вырезанию двух дырок и последующей склейке их краев с учетом противоположной ориентации, а приклейка пленки Мебиуса — вырезанию дырки и последующему отождествлению диаметрально противоположных точек ее края. Вырежем сперва все три дырки и затем разрежем поверхность по кривой, соединяющей точки на краю дырки, отвечающей пленке Мебиуса; при этом кривая должна охватывать одну из двух дырок, отвечающих ручке и (вместе с куском края дырки) ограничивать область, гомеоморфную диску. Из поверхности выпадет связный кусок; вклеим его назад так, чтобы совпали диаметрально противоположные точки на крае дырки, соответствующей пленке Мебиуса (для этого вырезанный кусок надо “вывернуть наизнанку”). В результате на поверхности образуются три дырки – две были изначально и соответствовали ручке, а третья образовалась из вновь проведенного разреза. Края этих дырок надо склеить следующим образом: две бывшие ранее дырки склеить по краю с учетом одинаковой ориентации (направление изменилось в результате переворачивания вырезанного куска) и на крае третьей отождествить диаметрально противоположные точки. ■

Эйлерова характеристика поверхности

Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. Эйлеровой характеристикой такой карты называется число $\chi = f + v - e$, где f – число областей, e – число ребер, и v – число вершин.

Склейки из квадрата

Простейшие примеры двумерных поверхностей можно получить, склеивая по различным правилам стороны квадрата. На рисунках 15 - 17 изображены склейки цилиндра, тора и бутылки Клейна соответственно.

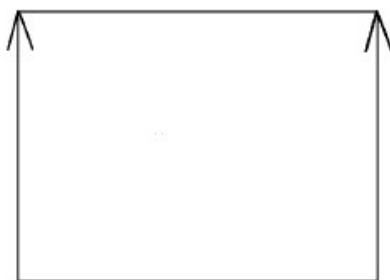


Рис. 15. Цилиндр

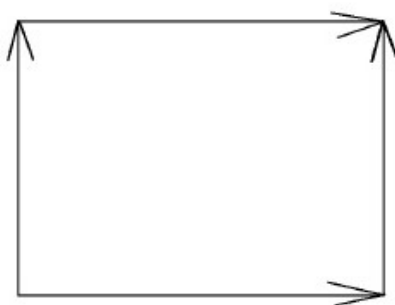


Рис. 16. Тор

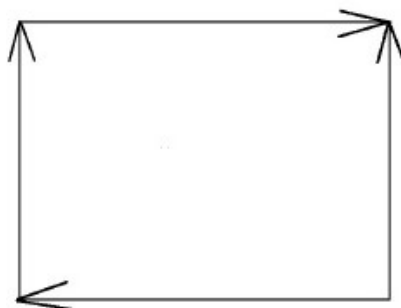


Рис. 17. Бутылка Клейна

Лекция 5. Кристаллографические группы

Кристаллографические группы

В данном разделе лекций мы будем изучать кристаллические вещества.

Пусть G — группа движений плоскости.

Определение 5.1. Точки A и $B \in R^2$ называются эквивалентными относительно группы G , если существует элемент $g \in G : g(A) = B$.

Теперь нам необходимо наложить некоторые свойства на нашу группу.

Определение 5.2. G дискретна, если $\forall A \in R^2 \exists$ круг с центром в точке A , в котором нет других (кроме A) точек, эквивалентных A .

Определение 5.3. $D \subset R^2$ — фундаментальная область группы G , если $\forall A \in R^2 \exists$ точка $B \in D$, эквивалентная A .

Нам необходимо свойство периодичности кристалла. Мы можем получить его, потребовав, чтобы фундаментальная область группы была ограничена. Теперь мы можем определить группы, с которыми будем дальше работать.

Определение 5.4. Сведения о движениях плоскости.

- Сдвиги (параллельный перенос) на вектор a ;
- Поворот вокруг точки A на угол φ
- Осевая симметрия (отражение) относительно прямой l
- Скользящая симметрия — отражение относительно l со сдвигом на вектор a , параллельный l .

Других движений нет. Теперь сформулируем теорему.

Теорема 5.1. Любое движение плоскости — это поворот, сдвиг или скользящая симметрия.

Доказательство.

Докажем некоторое вспомогательное утверждение.

Утверждение 5.1 Пусть $A, B, A', B' \in R^2 : |AB| = |A'B'| \neq 0$. Рассмотрим прямые AB и $A'B'$. Так вот: существует не более одного движения плоскости $g : g(A) = A', g(B) = B'$ и $g(\alpha) = \alpha'$ (аналогично $\exists! g : g(A) = A', g(B) = B'$ и $g(\beta) = \beta'$)

Доказательство

Утверждение говорит, что по этим четырём точкам получаем всё движение g , а значит, образы вообще всех точек. Найдём образ Q .

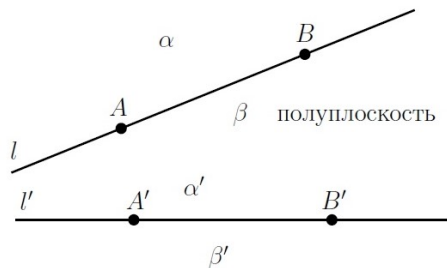


Рис. 18. Движения плоскости

Пусть g — движение. Зафиксируем $A, B \in R^2 : A \neq B$. Через A' обозначим $g(A')$, через B' — $g(B)$. Тогда $|A'B'| = |AB|$.

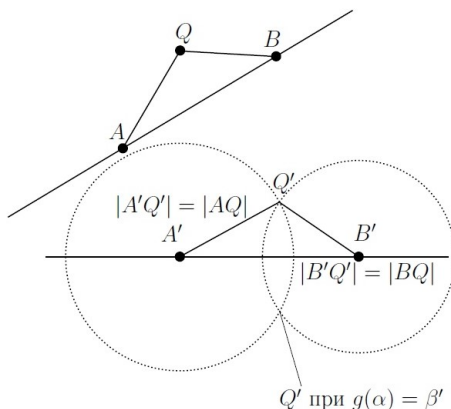


Рис. 19. Отсутствие параллельности прямых

Рассмотрим случай, когда прямые не параллельны. Тогда можем соорудить поворот. Измеряем угол φ между прямыми. Соединяем A и A' отрезком. Через середину отрезка AA' проводим перпендикуляр. Находим точку на этом перпендикуляре: $\angle APA' = \varphi$.

■

Следствие 5.1 Зафиксируем точку O , которую будем считать началом координат, и декартову систему координат. Тогда любое движение описывается формулой

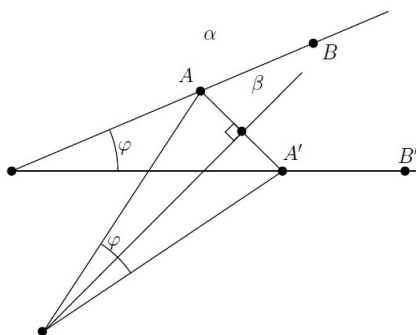


Рис. 20. Поворот

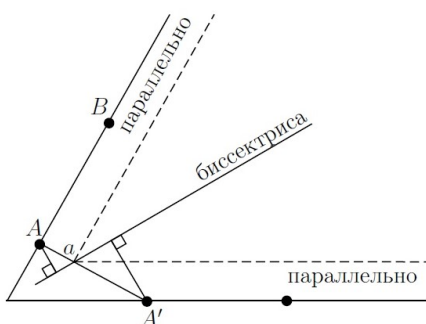


Рис. 21. Отражение

$g(x) = Ax + a$,
где a - вектор, A - ортогональная матрица.

Перейдём непосредственно к кристаллографическим группам. Пусть G - кристаллографическая группа. Обозначим через Γ множество сдвигов в G (Γ — подгруппа в G).

Утверждение 5.2 Γ - нормальная подгруппа, то есть $\forall \gamma \in \Gamma, \forall g \in G : g\gamma g \in \Gamma$.

Доказательство.

Пусть γ — сдвиг на вектор b , распишем образ произвольной точки x :

$$g\gamma g(x) = A(A^{-1}(x - a) + b) + a = E(x - a) + Ab + a = x + Ab. \quad \blacksquare$$

Обозначим через $H = G/\Gamma$ фактор-группу—группу ортогональных матриц. Пусть есть два движения

$$\begin{aligned} g_1 &= A_1x + a_1 \\ g_2 &= A_2x + a_2 \end{aligned}$$

Тогда $g_1 g_2(x) = A_1(A_2 x + a_2) + a_1 = A_1 A_2 x + A_1 a_1 + a_2$. Итого получим:

$$G/\Gamma = \{A : AA^T = E\}.$$

Утверждение 5.3 H - конечная группа.

Доказательство.

Ортогональные преобразования—движения с неподвижной точкой. Рассмотрим повороты, содержащиеся в H . Доказываем от противного. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ в H содержится поворот на $\alpha : 0 < \alpha \varepsilon$. Тогда такой же поворот есть в G . Мы хотим получить противоречие с условиями кристаллографичности. Вспомним их:

- $\forall B \in R^2 : \exists r : \text{в круге } |PB| \leq r \text{ нет точек, эквивалентных } B;$
- $\exists R : \text{круг радиуса } R \text{ - фундаментальная область в } G.$

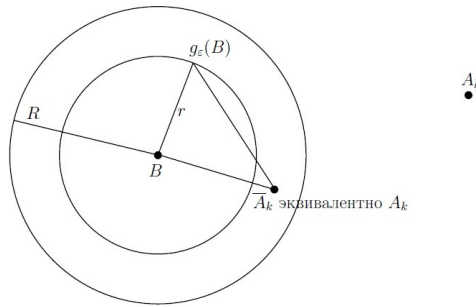


Рис. 22. Фундаментальная область

Проверим для $\varepsilon = \frac{r}{kR}, k \in N$. Тогда могут возникнуть такие случаи:

- $\exists k : \tilde{A}_k \neq B;$
- $\forall k : \tilde{A}_k = B$

Значит, имеется поворот на минимальный угол $n\alpha_0$. А ещё значит, есть куча поворотов на $n\alpha_0$. Когда-нибудь должны получить тождественный $\alpha_k = \frac{2\pi}{n}k$, иначе противоречие с тем, что группа конечная. Для каждой группы H есть число n , то есть H — циклическая группа порядка n .

Теперь рассмотрим операцию отражения.

На самом деле, композиция отражений $S_1 S_2$ — это поворот на угол 2φ .

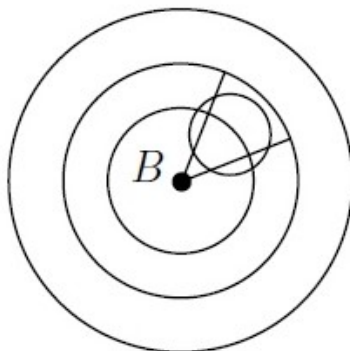


Рис. 23. Противоречие

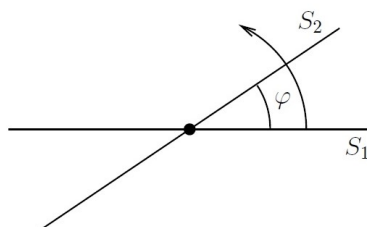


Рис. 24. Отражение относительно прямой

Таким образом, мы доказали, что H — конечная группа. ■

Будем говорить, что Γ - нормальная группа конечного индекса, что означает конечность фактор-группы по ней.

Утверждение 5.4 Γ - кристаллографическая группа.

Доказательство.

Нетривиальным является только ограниченность фундаментальной области. Будем рассматривать объединение смежных классов:

$$G = \bigcup_{j=1}^N g_j \Gamma$$

Пусть D - фундаментальная область группы G . Она ограничена. Обозначим через

$$\tilde{D} = \bigcup_{k=1}^N g_k^{-1}(D)$$

ограниченную область. Покажем, что это и есть фундаментальная область Γ .
 $\forall A \in R^2 : \exists g \in G : g(A) \in D$.

Зафиксировав произвольную точку A в плоскости, обозначим $g(A) = B$. Теперь из того, что $G = \bigcup_{j=1}^N g_j \Gamma$ получим:

$$g = g_k \gamma \Rightarrow g_k \gamma(A) = B; \gamma(A) = g_k^{-1}(B) \in g_k^{-1}(D) \quad \blacksquare$$

Теорема 5.2. У любой кристаллографической группы G подгруппа Γ состоит из сдвигов на векторы $\{ta + nb\}$, где a, b — линейно независимые векторы плоскости R^2 .

Доказательство.

Начнём с предположения, что все векторы лежат на одной прямой. Обозначим через a вектор минимальной длины из Γ (он есть, так как Γ — подмножество конечной группы). А так как Γ — подгруппа конечной группы G , $ta \in \Gamma$.

Сдвигом $\gamma - ka$ положим вектор b , если он ненулевой и меньше 0, то a не минимальный. Противоречие. Если других векторов нет, то фундаментальная область не ограничена. Значит, есть ещё векторы, не лежащие на этой прямой. Пусть вектор γ — ближайший к нашей прямой.

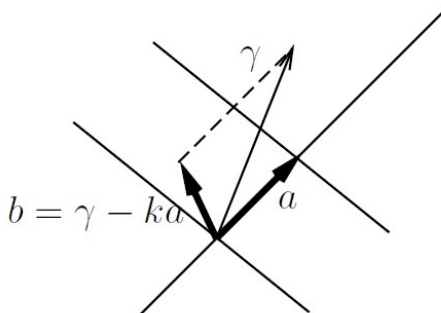


Рис. 25. Рассмотрим разность

Попробуем положить вектор в полосу ширины $a : b = \gamma - ka$ — других векторов нет. ■

Определение 5.5. Решётка l — множество векторов вида $ta + nb$.

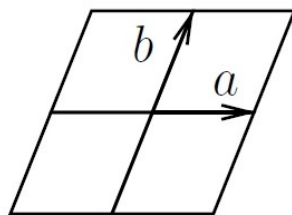


Рис. 26. Решетка

Теперь мы можем сформулировать ключевое свойство группы H , которое состоит в следующем.

Утверждение 5.5 Пусть $A \in H, \gamma \in L$. Это означает, что (сдвиг на γ) $\in G$ и $g(x) = Ax + a \in G$. Посмотрим на $g\gamma g^{-1}$ — сдвиг на $A\gamma$. То есть $A\gamma \in L$.

Лекция 6. Классификация кристаллографических групп

Классификация кристаллографических групп

Группа G состоит из движений плоскости, она дискретна и имеет ограниченную фундаментальную область. В G есть подгруппа сдвигов Γ . Мы доказали, что Γ — нормальная подгруппа конечного индекса, то есть фактор-группа $H = G/\Gamma$ конечна. А ещё сама подгруппа Γ кристаллографическая: $\{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}\}$, а векторы a, b линейно независимы. Такое множество называется решёткой L , все такие решётки изоморфны, иными словами, L инвариантна относительно H . Ещё у нас есть описание любого движения:

$$g(x) = Ax + a$$

Пусть H — конечная группа ортогональных преобразований, пусть α — минимальный угол поворота. Он должен быть делителем 2π , то есть $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Все остальные повороты можно описать, как $\frac{2\pi}{n}k$, где $k = 0, \dots, n-1$. Обозначим через C_n группу поворотов порядка n .

Если у нас имеется отражение S и поворот T на угол α , то TS — отражение.

Таким образом, повороты $\frac{\pi}{n}k$ — всё, что нам нужно. Будем изучать теперь типы групп, которые состоят

- только из поворотов C_n ;
- из поворотов C_n и n отражений.

Будем показывать, что такие группы исчерпывают все случаи ортогональных преобразований.

Теорема 6.1. *Существует не более десяти различных групп H . Это группы:*

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6 \\ D_1, D_2, D_3, D_4, D_6.$$

Доказательство.

Покажем, что если есть поворот на $\frac{2\pi}{n}$, то $n \leq 6$. Действительно, возьмём минимальный вектор решётки a и повернём его на $\frac{2\pi}{n}$, образ обозначим через a' . Разность $a' - a \in L$ — это третья стороны треугольника, она не может быть меньше a . Значит, $\frac{2\pi}{n} \geq \frac{\pi}{3} \Rightarrow n \leq 6$.

Теперь разберёмся с $n = 5$. Пусть в H есть $\alpha = 72^\circ$, L — решётка, она инвариантна

относительно поворота на 180° , это просто $-a$. Значит, решётка инвариантна относительно 144° (дважды 72°). Следовательно, инвариантна относительно разности $180^\circ - 72^\circ = 36^\circ < 60^\circ$, мы только доказали, что такого не может быть. Можно ли выкинуть ещё что-нибудь? Будем рассуждать уже в рамках конкретных решёток. Для любых двух линейно независимых векторов получается решётка, инвариантная относительно C_1 и C_2 .

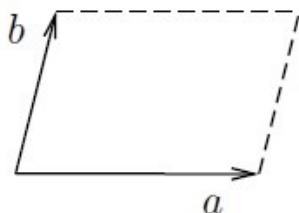


Рис. 27. C_1, C_2

Что можно придумать для каких-нибудь отражений? Прямоугольники инвариантны относительно двух отражений, два поворота сохраняются:

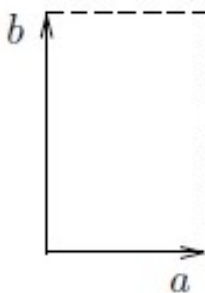


Рис. 28. C_1, C_2, D_1, D_2

Кроме того, в ромбической решётке можно найти оси симметрии:

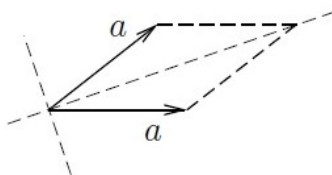


Рис. 29. C_1, C_2, D_1, D_2

Если мы хотим взять группу побольше, уже нужна квадратная решётка:

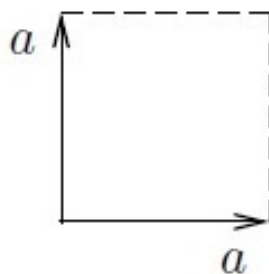


Рис. 30. $C_1, C_2, C_4, D_1, D_2, D_4$

Последняя решётка совсем симметричная. Векторы равны и под углом 60° друг к другу:

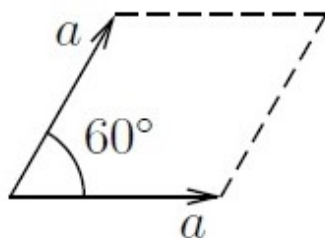


Рис. 31. $C_1, C_2, C_3, C_6, D_1, D_2, D_3, D_6$

Получили пять типов решёток - других типов нет. ■

Определение 6.1. Будем говорить, что кристаллографическая группа G принадлежит классу H , если $G/\Gamma = H$. Решёток всего получилось пять типов. Эти пять типов решёток называются решётками Браве. Для каждой решётки есть максимальная группа симметрий—сингонии.

Тип Браве — это пара (решётка, сингония). Их всего пять. Сингоний получилось ровно четыре. Любая решётка изоморфна $Z \oplus Z$. Рассмотрим нашу группу H и решётку L , причём L предполагаем инвариантной относительно H . Рассмотрим пару H, L . Есть особый случай, когда векторы прямоугольной решётки — собственные векторы оператора отражения. Один с собственным значением $\lambda_1 = 1$, другой $\lambda_2 = -1$. Для сингонии D_2 в общем случае такое бывает не всегда. В ромбической

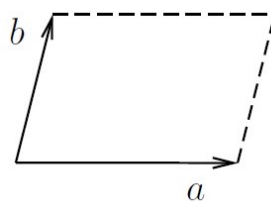


Рис. 32. C_2

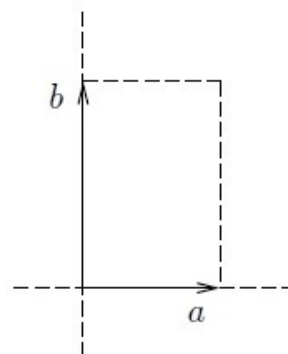


Рис. 33. D_2

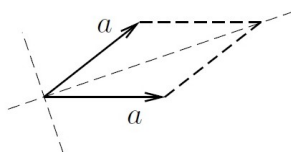


Рис. 34. D_2

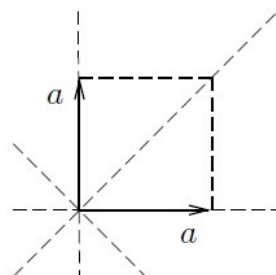


Рис. 35. D_4

решётке такие векторы взять не получится. Так что одной сингонии могут соответствовать принципиально разные типы. Оказывается, что разных типов ровно тринадцать.

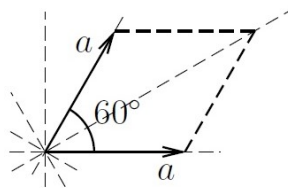


Рис. 36. D_6

Теорема 6.2. Существует ровно 13 различных пар H, L , где H — кристаллографический класс, L — решётка, инвариантная относительно H .

Решётка представляется в виде $L = \{ma + nb\}$. Зафиксируем для такого представления a, b — базис в L . Условия теоремы опишем через целочисленную матрицу:

$$H \ni A = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

Чтобы эта матрица действительно лежала в H , необходимо и достаточно, чтобы $|A| = \pm 1$. Инвариантность относительно L гарантирована для всех целых m_1, m_2, n_1, n_2 . Значит, нам надо рассмотреть группу целочисленных матриц $GL(2, \mathbb{Z})$, у которых обратные тоже целочисленны. Если бы мы зафиксировали другой базис, рассматриваемые матрицы преобразовались бы по формуле $T^{-1}AT$. Свели задачу перечисления наших пар к перечислению элементов группы $GL(2, \mathbb{Z})$ с точностью до $T^{-1}AT$.

Доказательство.

Начнём с поворотов:

C_1 : Как базис ни выбирай, есть только одна матрица: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

C_2 : Снова E и ещё $-E$;

C_4 : Это же повороты только на 90° (и степени этого поворота). Вот если выбрать стандартный ортонормированный базис, получим $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

C_3 : Выберем a, b — базис такой, что $a\hat{b} = \frac{\pi}{3}$. Смотрим, куда при повороте на 120° перейдут базисные векторы: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$C_6 : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D_4 : Композицией двух отражений можно соорудить поворот на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D_6 : Всё задаётся двумя отражениями: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D_1 : Для прямоугольных и ромбических решёток соответственно: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D_2 : Опять либо прямоугольная, либо ромбическая решётка. Добавка к предыдущим двум: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

D_3 : Тут только 120° и его степени, решётка гексогональная. Случаи, когда существует базис на осях отражения: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; случай, когда не существует такого базиса: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■

Кристаллографических классов ровно десять, арифметических классов ровно тринадцать. Нам осталось сами кристаллографические группы описать.

Пусть нам известен арифметический класс группы G . Как можно построить саму группу G ? Во-первых, устроим так, чтобы $H \subseteq G$, то есть в качестве G возьмём группу, порождённую из H с фиксированным началом координат и сдвигами на векторы из L . Так мы имеем 13 групп. Но ситуация не исчерпывается, есть примеры.

Пусть $H = D_1$ — простейшая группа с одним отражением. Пусть также решётка L прямоугольная.

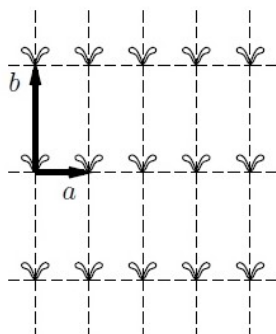


Рис. 37. Кристаллографическая решётка

А теперь посмотрим на другой пример: скользящая симметрия S с осью l и сдвигом на $\frac{b}{2}$. Имеем всю ту же формулу

$$S(x) = Ax + \frac{b}{2}$$

но такая группа порождена уже сдвигами и скользящей симметрией. Тут движения из H в группе G вообще не содержатся.

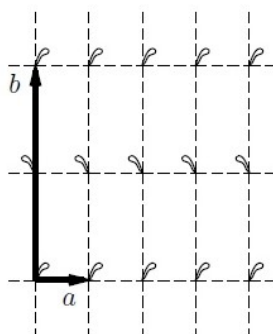


Рис. 38. Сдвиг и скользящая симметрия

Определение 6.2. Кристаллографическая группа G называется симморфной (или расщепляемой) если содержит H .

Теперь уже можем сформулировать окончательный ответ.

Теорема 6.3. Существует ровно 17 кристаллографических групп:

- Группы, соответствующие кристаллографическим классам $C_1, C_2, C_3, C_4, D_3, D_6$ всегда симморфны;
- Кроме того, группы, соответствующие D_1, D_2 с ромбической решёткой тоже симморфны. То есть несимморфными могут быть только группы прямоугольными решётками:
- D_1 с прямоугольной решёткой—две кристаллографические группы;
- D_2 с прямоугольной решёткой—три кристаллографические группы;
- D_3 с прямоугольной решёткой—две кристаллографические группы.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У