



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ. СЕМИНАРЫ

ОШЕМКОВ
АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Оглавление

Семинар 1. Графы. Комбинаторные задачи, вложения графов.....	3
1. Комбинаторные задачи	3
Задача 1.....	3
Задача 2.....	3
Задача 3.....	4
Задача 4.....	4
Задача 5.....	5
Задача 6.....	6
2. Вложения (отображения) графов.....	8
Задача (равносильность определений непрерывности)	9
Задача 7.....	10
Задача 8.....	10
Семинар 2. Графы. Формула Эйлера, теорема Понтрягина-Куратовского.	12
Формула Эйлера для плоских графов	12
Задача 9.....	12
Задача 10 (теорема о 5 красках)	14
Задача 11.....	14
Теорема (Понтрягин-Куратовский)	16
Задача 12.....	16
Задача 13.....	17
Задача 14.....	18
Задача 15.....	18
Семинар 3. Многогранники.	20
Задача	20
Задача	20
Формула Эйлера для выпуклых многогранников	21
Задача	21
Задача	22
Сферическая геометрия	23
Теорема косинусов	24
Теорема синусов.....	26
Неравенство треугольника	28



Семинар 4. Площадь и объем (третья проблема Гильберта).....	30
Теорема (Бойяи-Герман).....	30
Инвариант Дена	32
Теорема (Хадвигер).....	32
Задача	33
Теорема (Сидлер)	34
Задача	35
Задача	36
Семинар 5. Топология и двумерные поверхности.	40
Задача	40
Задача	42
Задача	44
Задача	46
Семинар 6. Двумерные поверхности.	47
Задача	47
Задача	48
Ориентация поверхностей.....	50
Задача	51
Задача	53
Задача	54
Задача	55
Семинар 7. Теорема Уитни (классификация замкнутых регулярных кривых).....	56
Теорема Уитни.....	56
Задача 1.....	57
Задача 2.....	58
Задача 3.....	60

Семинар 1. Графы. Комбинаторные задачи, вложения графов.

1. Комбинаторные задачи.

На лекциях описывалось два подхода к графам – комбинаторный и топологический. Рассмотрим задачи, для решения которых достаточно комбинаторного описания графов как множества пар (V, E) вершин и ребер, их соединяющих.

Задача 1. Доказать, что сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному количеству ребер.

Доказательство.

При сложении степеней вершин каждое ребро учитывается дважды: по разу для каждой из вершин, которые оно соединяет.

$$\sum_{i=1}^B \deg v_i = 2P$$

Обозначения: B – количество вершин, P – количество ребер.

Определение. Дерево – связный граф без циклов.

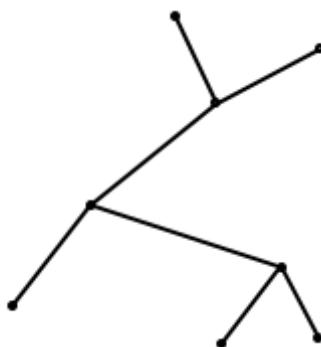


Рис. 1.1. Дерево

Определение. Граф называется связным, если для любой пары вершин существует путь, их соединяющий.

Определение. Цикл в графе – замкнутый путь, у которого все точки самопересечения находятся в вершинах (постоянный путь не считаем циклом).

Задача 2. Доказать, что у дерева, содержащего хотя бы одно ребро, существует вершина степени 1.

Доказательство.

Выберем произвольную вершину и перейдем по ребру в соседнюю вершину. Будем двигаться так, чтобы не проходить дважды по одному и тому же ребру. Так как число ребер конечное, движение по ребрам рано или поздно закончится. Что может помешать нам сделать следующий шаг? Прийти в вершину, в которой мы уже были, мы не можем (это означало бы, что в графе есть цикл, а в дереве нет циклов), значит, мы пришли в вершину степени 1.

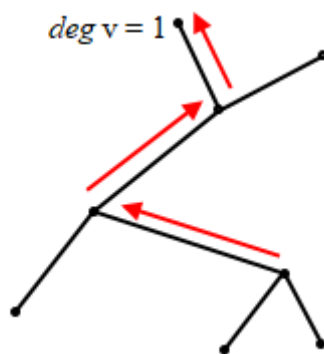


Рис. 1.2. Вершина степени 1 в дереве

Задача 3. Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда $B - P = 1$ (число $\chi(G) = B - P$ называется эйлеровой характеристикой графа G).

Доказательство.

Необходимость. Пусть граф – дерево. Как мы знаем из предыдущей задачи, у него есть вершина степени 1. Удалим эту вершину вместе с ребром, которое из него выходит – получим новый граф (очевидно, связный), у которого число вершин и ребер на 1 меньше. Таким образом, эйлерова характеристика полученного графа останется такой же, как и у исходного. Повторяя эту операцию, рано или поздно получим дерево, состоящее из одной вершины, для которого утверждение задачи верно (у него $B = 1, P = 0$). Значит, оно верно и для исходного дерева.

Достаточность. Пусть $B - P = 1$. Так как граф связный, осталось доказать, что в нем нет циклов. Докажем это от противного. Допустим, цикл существует, тогда после удаления произвольного ребра из этого цикла, граф останется связным. При удалении ребра количество вершин не меняется, а количество ребер уменьшается на 1, то есть, эйлерова характеристика увеличивается на 1. Если в получившемся графе существует цикл, снова удалим из него ребро, и так далее – пока циклов не останется, то есть, пока не получим дерево. Как мы доказали выше, для дерева верно равенство $B - P = 1$. Таким образом, мы пришли к противоречию – ведь на каждом шаге эйлерова характеристика возрастала.

Задача 4. Доказать, что максимальное количество ребер, которое можно удалить из связного графа так, чтобы он остался связным, равно $1 - \chi(G) = 1 - B + P$.

Доказательство.

Используем ту же идею, что и в предыдущей задаче – если в графе существует цикл, то из этого цикла можно удалить любое ребро так, что граф останется связным. Осуществив эту операцию некоторое количество раз, получим дерево, для которого верно равенство $B - P = 1$. При каждом удалении ребра эйлерова характеристика увеличивалась на 1, откуда следует утверждение задачи.

Определение. Цикл в графе называется эйлеровым, если он содержит все ребра графа.

Задача 5. Доказать, что в связном графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин четные.

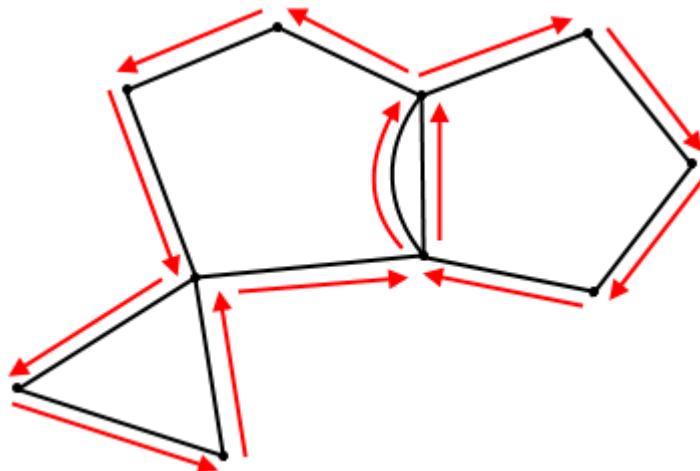


Рис. 1.3. Эйлеров цикл

Доказательство.

Необходимость. Пусть в графе существует эйлеров цикл. Пройдя по эйлерову циклу, мы зайдем в каждую вершину столько же раз, сколько и выйдем из нее. Так как мы попадаем в вершину каждый раз по разным ребрам, то степень каждой вершины будет четной.

Достаточность. Пусть степени всех вершин графа четные. Выберем произвольную вершину и будем двигаться по ребрам графа так, чтобы не проходить по одному и тому же ребру дважды. Мысленно стирая ребра, по которым мы прошли, на каждом шаге мы будем получать граф, у которого степени всех вершин четные, поэтому мы сможем выйти из каждой вершины, в которую пришли до тех пор, пока не придем в вершину, из которой начали движение – получили цикл.

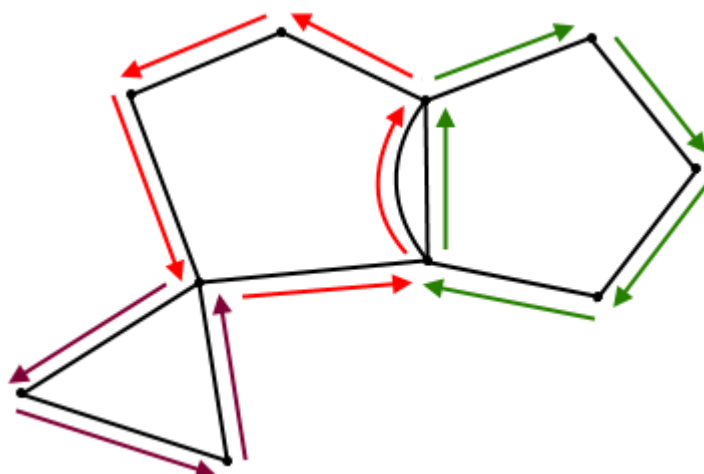


Рис. 1.4. Построение эйлерова цикла

Если мы прошли по всем ребрам, то получили эйлеров цикл, если нет – то в получившемся графе (без стертых ребер) снова двигаемся от вершины к вершине, пока не получим цикл, и так далее, пока не обойдем все ребра.

Таким образом, если степени всех вершин графа четные, то граф представляется в виде объединения циклов, не имеющих общих ребер (например, граф на рис. 1.4 можно представить в виде объединения трех циклов, выделенных разным цветом).

Теперь объединим получившиеся циклы. Рассмотрим произвольный цикл. Так как граф связный, то существует цикл, имеющий общую вершину с выбранным. Объединим эти два цикла в один, пройдя по первому циклу, начиная от общей вершины, а затем по второму циклу, начиная от общей вершины.

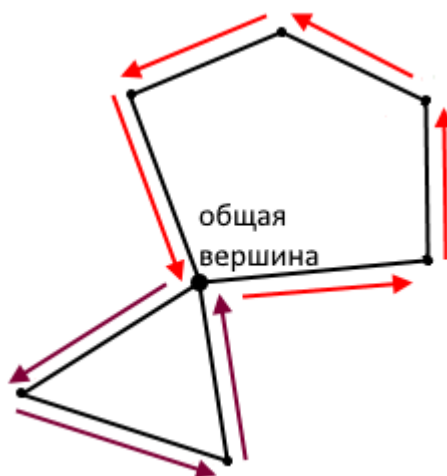


Рис. 1.5. Объединение циклов

Так попарно объединяя циклы, объединим все циклы в один – это и будет эйлеров цикл.

Задача 6. Доказать, что вершины графа можно правильно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда граф не содержит циклов нечетной длины (раскраска называется правильной, если любые две вершины, соединенные ребром, раскрашены в разные цвета).

Доказательство.

Замечание: с комбинаторной точки зрения путь в графе – это последовательность вершин и ребер, длина пути – это количество ребер в этой последовательности.

Необходимость. Пусть граф содержит цикл нечетной длины. Раскрасим произвольную вершину, принадлежащую этому циклу в цвет 1, далее будем раскрашивать вершины этого цикла, например, по часовой стрелке – получим последовательность цветов 1, 2, 1, 2, ... и т.д. – в конце цикла непременно получим две вершины, окрашенные в один цвет.

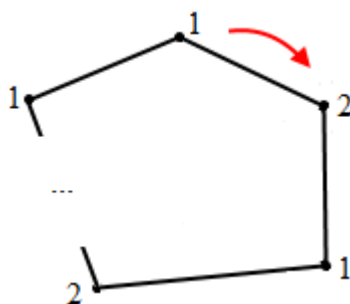


Рис. 1.6. Раскраска цикла нечетной длины

Таким образом, цикл нечетной длины нельзя раскрасить правильно в два цвета.

Достаточность. Пусть в графе нет циклов нечетной длины. Рассмотрим следующий алгоритм раскраски графа: выберем произвольную вершину h и раскрасим ее в цвет 1. Далее произвольную вершину v раскрашиваем в цвет 1, если путь, соединяющий h и v , четной длины, либо раскрашиваем в цвет 2, если путь, соединяющий h и v , нечетной длины (предполагаем, что граф связный, иначе повторяем рассуждения для каждой компоненты связности).

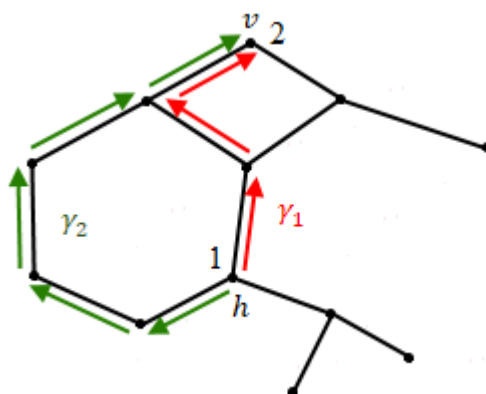


Рис. 1.7. Раскраска графа в два цвета

Проверим, что такой алгоритм корректен – может оказаться, что существует два пути γ_1 и γ_2 разной четности, соединяющие h и v . Тогда рассмотрим $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$ – это замкнутый путь нечетной длины. Если у γ_1 и γ_2 нет общих ребер, тогда $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$ – цикл нечетной длины – противоречие. Если у γ_1 и γ_2 есть общие ребра, тогда схематично $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$ выглядит следующим образом:

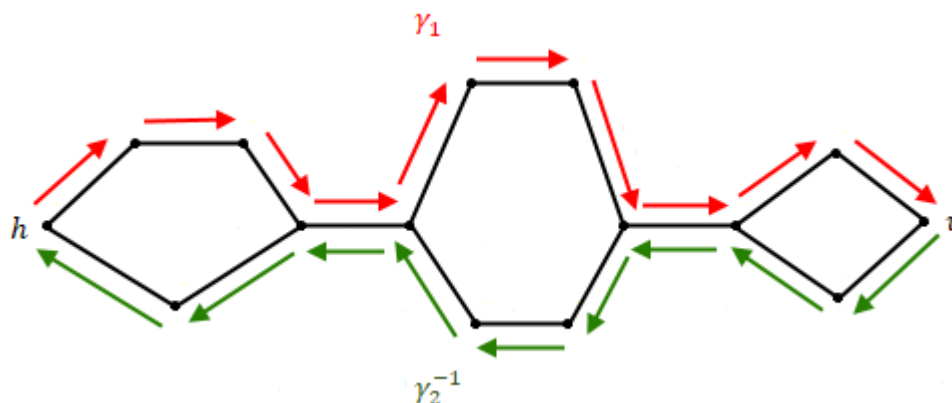


Рис. 1.8. Объединение путей γ_1 и γ_2 в замкнутый путь $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$

- путь $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$ состоит из циклов и общих ребер для γ_1 и γ_2 . Сложив длину путей γ_1 и γ_2 , мы учтем общие ребра дважды, поэтому сумма длин циклов, которые содержатся в пути $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$, будет нечетной (так как сумма длин путей γ_1 и γ_2 нечетна), откуда следует, что хотя бы один из этих циклов будет нечетной длины – противоречие. Значит, алгоритм раскраски корректен.

2. Вложения (отображения) графов.

Рассмотрим задачи, связанные с непрерывными отображениями графов. Пусть есть отображение из X в Y , причем для каждой точки из этих множеств определено понятие окрестности (также требуем, чтобы для любых двух окрестностей точки существовала окрестность, лежащая в их пересечении). Тогда можно дать определение непрерывного отображения.

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $P \in X$, если для любой окрестности V_Q точки $Q = f(P)$ существует окрестность U_P точки P такая, что $f(U_P) \subset V_Q$.

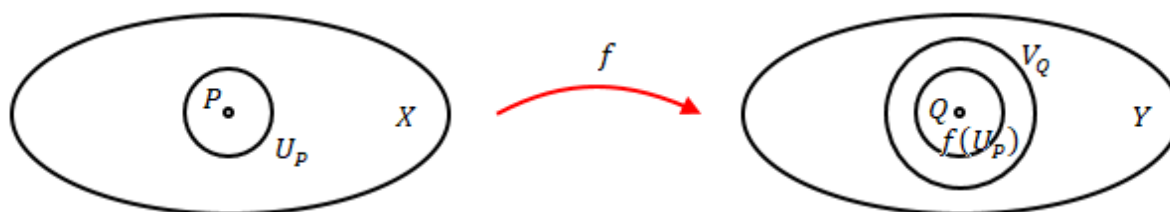


Рис. 1.9. Непрерывное отображение

Определение непрерывности отображения в точке можно дать и для графов, если определить окрестности точек графа. Точками графа являются вершины графа и внутренние точки отрезков (ребер), их соединяющих. Для любой внутренней точки отрезка окрестность – это интервал с центром в этой точке, а окрестность вершины – это сама вершина и окрестности концов отрезков, входящих в нее.

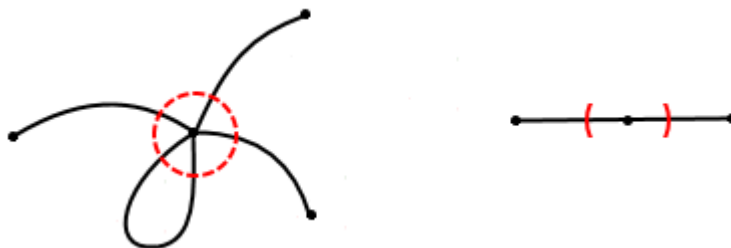


Рис. 1.10. Окрестности точек графа

Задача (равносильность определений непрерывности). Определим непрерывную кривую как непрерывное отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ отрезка $[a, b]$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ – каждой точке $t \in [a, b]$ сопоставим точку $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ плоскости. Доказать, что непрерывность отображения $\gamma(t)$ равносильна непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на $[a, b]$.

Доказательство.

Непрерывность отображения γ означает, что для любого круга с центром в точке $\gamma(t) = (x_0, y_0)$ найдется интервал A с центром в точке t , такой, что $\gamma(A)$ содержится в этом круге.

Непрерывность функции $x(t)$:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 \text{ такое, что } x((t - \delta_1, t + \delta_1)) \subset (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$$

Непрерывность функции $y(t)$:

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \text{ такое, что } y((t - \delta_2, t + \delta_2)) \subset (y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2)$$

Выбрав из δ_1 и δ_2 наименьшее, можно сказать, что для любого прямоугольника с центром в точке $\gamma(t) = (x_0, y_0)$ найдется интервал A с центром в точке t , такой, что $\gamma(A)$ содержится в этом прямоугольнике.

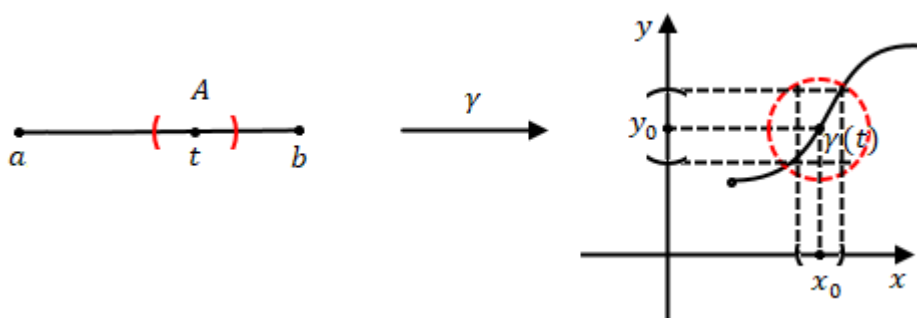


Рис. 1.11. Непрерывность отображения γ

Таким образом, первое и второе определение непрерывности отличаются тем, что в первом $\gamma(A)$ содержится в круге, а во втором $\gamma(A)$ содержится в прямоугольнике.

Понятно, что эти определения равносильны, так как в любом круге содержится прямоугольник, и в любом прямоугольнике содержится круг.

Задача 7. Доказать, что любой граф можно вложить в $\mathbb{R}^3$.

Доказательство.

Пусть граф G без петель и кратных ребер. Тогда можно G вложить в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы ребра изображались отрезками. Нужно так расположить вершины графа в пространстве, чтобы никакие два ребра не пересекались – для этого достаточно расположить вершины так, чтобы никакие 4 не лежали в одной плоскости. Очевидно, что это можно сделать (построим три вершины графа в произвольных точках $\mathbb{R}^3$, четвертую вершину построим вне плоскости, содержащей построенные три вершины, пятую вершину построим вне плоскостей, содержащих все возможные построенные тройки вершин и т.д.).

Отметим, что в плоскость вложим не любой граф. Например, K_5 и $K_{3,3}$ не вложимы в плоскость:



Рис. 1.12. Графы K_5 и $K_{3,3}$

Определение. K_n – полный граф на n вершинах, т.е. граф, каждые две вершины которого соединены ребром.

Определение. $K_{m,n}$ – двудольный граф, т.е. граф, все вершины которого можно разбить на две группы так, что каждое ребро графа соединяет вершину из первой группы с вершиной из второй группы, при этом вершины из одной группы не имеют общих ребер.

Невложимость $K_{3,3}$ в плоскость обсуждалась на лекциях, аналогично можно доказать невложимость в плоскость K_5 .

Задача 8. Доказать с помощью леммы о четырех точках, что K_5 не вложим в плоскость.

Доказательство.

Напомним лемму о четырех точках:

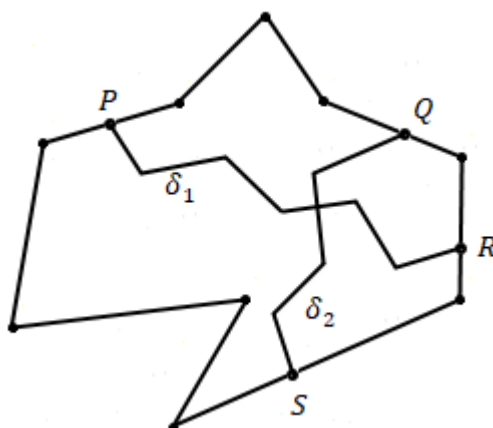


Рис. 1.13. Лемма о четырех точках

Пусть есть замкнутая ломаная L на плоскости и на ней выбраны 4 точки (обозначим их в порядке обхода ломаной по часовой стрелке P, Q, R, S). По теореме Жордана, L делит плоскость на две части. Рассмотрим ломаную δ_1 , содержащую точки P и R , и ломаную δ_2 , содержащую точки Q и S , такие, что δ_1 и δ_2 находятся в одной из частей, на которые L делит плоскость. Утверждается, что δ_1 и δ_2 пересекаются.

Предположим, что K_5 можно вложить в плоскость так, что ребра можно изобразить ломаными. Рассмотрим ломаную, L содержащую вершины K_5 :

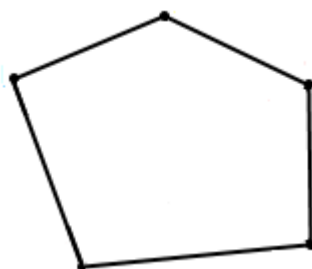


Рис. 1.14. Ломаная L , содержащая все вершины K_5

Осталось построить еще 5 ребер. Из этих 5 ребер по крайней мере 3 лежат в одной из частей, на которые L делит плоскость (не умаляя общности, будем считать, что они лежат во внутренней области L). Далее заметим, что, какие бы 3 ребра во внутренней области мы ни выбрали, среди них всегда найдутся два, не имеющие общих вершин – по лемме о четырех точках, они обязательно пересекутся.

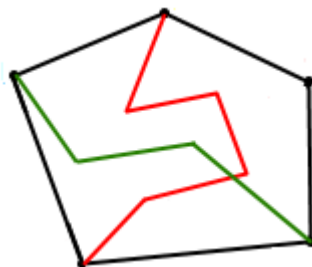


Рис. 1.15. Невозможность вложения K_5 в плоскость

Семинар 2. Графы. Формула Эйлера, теорема Понтрягина-Куратовского.

На прошлом семинаре мы доказали, что K_5 не вложим в плоскость, с помощью леммы о 4 точках. Докажем этот факт с помощью формулы Эйлера.

Формула Эйлера для плоских графов.

Определение. Пара (G, f) – плоский граф, где G – граф, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – вложение в плоскость (вложение – непрерывное инъективное отображение графа в плоскость).

Пусть B – количество вершин графа, P – количество ребер графа, Γ – количество компонент (линейной связности) $\mathbb{R}^2 \setminus f(G)$. Тогда для связного плоского графа верна формула Эйлера:

$$B - P + \Gamma = 2$$

Задача 9. Доказать с помощью формулы Эйлера, что K_5 не вложим в плоскость.

Доказательство.

Предположим, что K_5 можно вложить в плоскость. Для K_5 $B = 5$, $P = 10$. Из формулы Эйлера

$$\Gamma = 2 - B + P = 7$$

Подсчитаем количество ребер, ограничивающее каждую из компонент связности. Пусть (для произвольного связного плоского графа) $\gamma_1, \dots, \gamma_\Gamma$ – количество ребер, ограничивающих соответствующие компоненты. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\Gamma} \gamma_i = 2P$$

- каждое ребро при обходе компонент связности мы посчитаем дважды. В нашем случае

$$\sum_{i=1}^7 \gamma_i = 2P$$

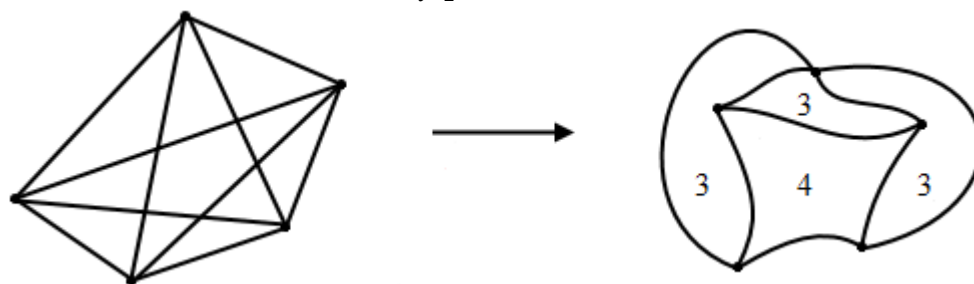


Рис. 2.1. Количество ребер, ограничивающих компоненты связности

Так как в K_5 нет петель и кратных ребер (для которых $\gamma_i = 1$ и 2 соответственно), то $\gamma_i \geq 3$. Тогда

$$\sum_{i=1}^7 \gamma_i = 2P \geq 3 \cdot 7 = 21$$

Но $2P = 2 \cdot 10 = 20$ – противоречие. Таким образом, K_5 нельзя вложить в плоскость.

С помощью формулы Эйлера можно доказать теорему о 5 красках (ослабленную версию знаменитой теоремы о 4 красках): любую карту можно покрасить в пять цветов так, чтобы любые две соседние страны (имеющие кусок общей границы) были окрашены в разный цвет.

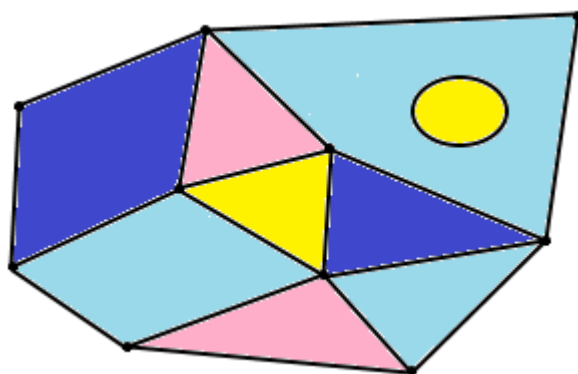


Рис. 2.2. Пример раскраски карты 5 красками

Переформулируем условие теоремы с помощью двойственного графа (на рис. 2.3 выделен красным):

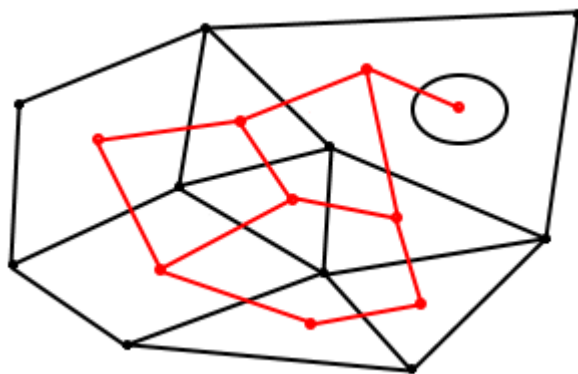


Рис. 2.3. Двойственный граф

- выберем в каждой стране по точке (вершине двойственного графа), далее, если две страны имеют общую границу, соединим соответствующие вершины ребрами – получим двойственный граф.

Таким образом, раскраска стран на карте сводится к правильной раскраске вершин двойственного графа.

Задача 10 (теорема о 5 красках). Доказать, что для правильной раскраски вершин планарного графа без петель и кратных ребер достаточно 5 красок.

Доказательство.

Обратите внимание на требование планарности графа – если граф нельзя вложить в плоскость, теорема неверна – например, для правильной раскраски K_n необходимо n красок.

Для доказательства теоремы нам понадобится доказать вспомогательное утверждение:

Задача 11. Доказать, что в планарном графе без петель и кратных ребер найдется вершина, степень которой не превышает 5.

Доказательство.

От противного. Предположим, что степени всех вершин ≥ 6 . Тогда (см. задачу 1):

$$\sum_{i=1}^B \deg v_i = 2P,$$

откуда следует, что $2P \geq 6B \Leftrightarrow \frac{1}{3}P \geq B$.

Также (см. задачу 9):

$$\sum_{i=1}^{\Gamma} \gamma_i = 2P,$$

откуда следует (так как граф без петель и кратных ребер $\Rightarrow \gamma_i \geq 3$), что

$$2P \geq 3\Gamma \Leftrightarrow \frac{2}{3}P \geq \Gamma$$

Складывая полученные неравенства, получаем

$$P \geq B + \Gamma$$

Тогда из формулы Эйлера следует, что

$$2 = B - P + \Gamma \leq P - P = 0$$

- противоречие.

Вернемся к доказательству теоремы о 5 красках. Доказательство проведем индукцией по числу вершин.

База индукции очевидна (если вершин в графе не более 5, их можно раскрасить 5 красками).

Шаг индукции: пусть мы можем правильно раскрасить 5 красками все планарные графы с n вершинами. Рассмотрим произвольный планарный граф с $n + 1$ вершиной.

Если в графе есть вершина степени не более 4, мысленно удалим ее из графа и правильно раскрасим оставшиеся n вершин (это можно сделать по предположению индукции).

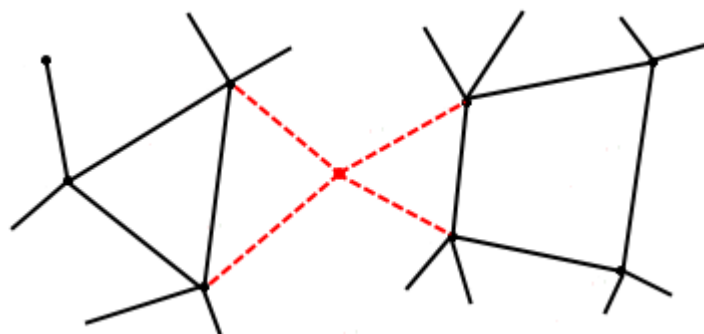


Рис. 2.4. Вершина степени 4

Так как из удаленной вершины выходило не более 4 ребер, найдется цвет, в который ее можно правильно покрасить.

Если в графе нет вершин степени не более 4, то обязательно найдется вершина степени 5 (см. задачу 11). Удалим (вместе с ребрами, выходящими из нее) эту вершину из графа и докажем, что 5 вершин, с которыми она соединялась, можно раскрасить, используя не более 4 цветов.

Из непланарности графа K_5 (см. задачи 8 и 9) следует, что среди этих 5 вершин найдутся две, не соединенные ребром. Стянем эти две вершины в одну (вместе с ребрами, выходящими из них).

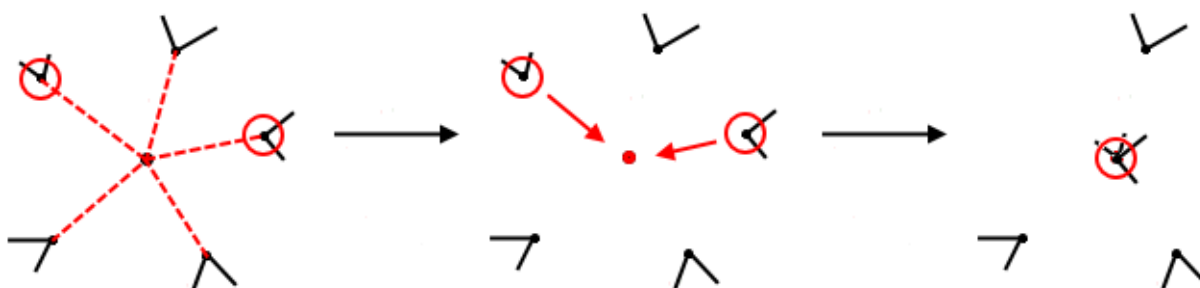


Рис. 2.5. Преобразование графа

У получившегося графа на две вершины меньше, чем у исходного – по предположению индукции для его раскраски достаточно 5 красок. Повторим эту раскраску для исходного графа, раскрасив две вершины, которые мы стягивали в одну, тем же цветом, что и вершину, которая получилась в результате их объединения (раскраска останется правильной, так как эти две вершины в исходном графе не были соединены ребром). Таким образом, мы получили, что 5 вершин, с которыми соединена вершина степени 5, раскрашены в не более чем 4 цвета, поэтому найдется цвет, в который можно раскрасить вершину степени 5 так, что раскраска исходного графа будет правильной.

На лекциях был доказан критерий планарности графов (теорема Понтрягина-Куратовского).

Теорема (Понтрягин-Куратовский). Граф G является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Остановимся поподробнее на понятии гомеоморфизма.

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, если f – биекция, f непрерывно, f^{-1} непрерывно.

Если X и Y – графы, то непрерывность f^{-1} следует из непрерывности и биективности f .

Почему в формулировке теоремы Понтрягина-Куратовского присутствует гомеоморфизм, а не изоморфизм?

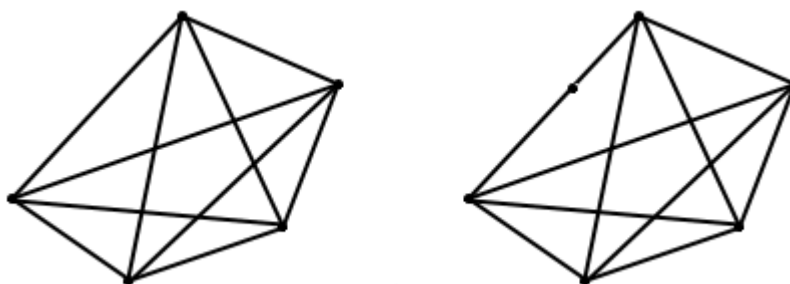
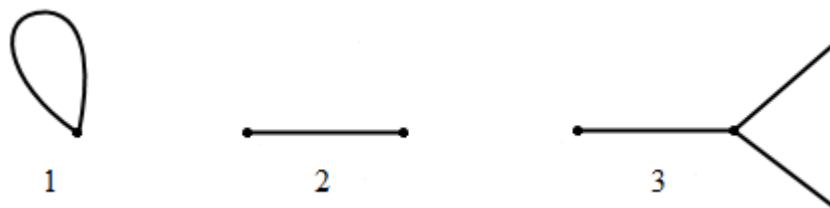


Рис. 2.6. Добавление вершины в графе K_5

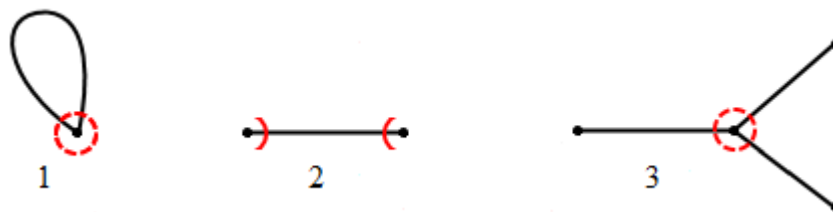
- если мы добавим в графе K_5 новую вершину на ребре, то получим, очевидно, непланарный граф, который, однако, не содержит подграфа, изоморфного K_5 .

Задача 12. Доказать, что следующие графы попарно негомеоморфны:



Доказательство.

Окрестности внутренних точек данных графов совпадают с окрестностями точек на прямой, а окрестности вершин устроены по-разному:

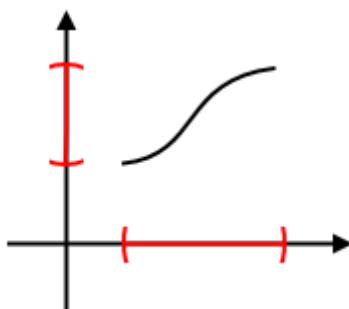


- у первого графа вершина степени 2, ее окрестность состоит из двух полуинтервалов;
- у второго графа вершины степени 1, их окрестности состоят из полуинтервалов;
- у третьего графа центральная вершина степени 3, ее окрестность состоит из трех полуинтервалов.

Предположим, что существует гомеоморфизм, например, между третьим и вторым графом (остальные случаи рассматриваются аналогично). Удалим вершину степени 3 из третьего графа и ее образ из второго графа, получим гомеоморфизм между следующими множествами (окрестностью вершины степени 3 и окрестностью ее образа):



- то есть, непрерывное биективное отображение трех интервалов в два интервала, что невозможно, так как образ каждого интервала должен целиком содержаться в другом интервале (можно считать, что отображение интервала в интервал – это непрерывная функция):



Можно доказать более общее утверждение, связанное с гомеоморфизмом графов.

Задача 13. Доказать, что при гомеоморфизме графов вершина степени k переходит в вершину степени k при $k \neq 2$.

Доказательство.

Доказательство такое же, как в задаче 12 – рассмотрим интервалы, на которые распадается окрестность вершины степени k после удаления вершины (их k штук) и образ окрестности после удаления образа вершины – между этими множествами можно построить гомеоморфизм только в том случае, если образ вершины степени k тоже является вершиной степени k (т.е. после удаления образа вершины окрестность образа распадается на k интервалов).

При $k = 2$ вершина может перейти во внутреннюю точку ребра – графы на рис. 2.7 гомеоморфны:



Рис. 2.7. Гомеоморфные графы

Теперь понятно, что в формулировке теоремы Понтрягина-Куратовского гомеоморфизм используется в следующем смысле: граф G является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов K_5 или $K_{3,3}$ с точностью до добавления/удаления на ребре вершины степени 2.

Задача 14. Доказать с помощью теоремы Понтрягина-Куратовского, что следующий граф не планарный:

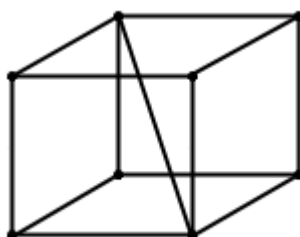


Рис. 2.8. К задаче 14

Доказательство.

Несложно понять, что в данном графе нет подграфа, гомеоморфного K_5 (так как только две вершины имеют степень 4), однако есть подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

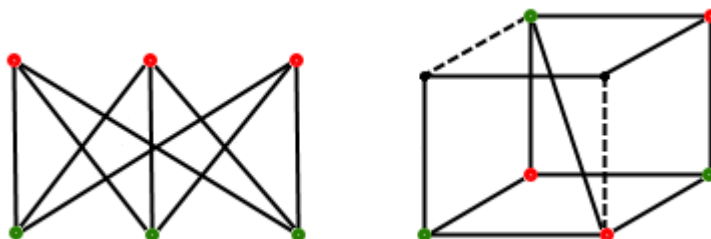


Рис. 2.9. Подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$

- удалив ребра, выделенные пунктиром, получим подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$. Поэтому исходный граф не планарный (следует из теоремы Понтрягина-Куратовского).

Теперь вернемся к формуле Эйлера для плоских графов – ее можно обобщить на случай несвязных графов.

Задача 15. Доказать, что для любого плоского графа G верна формула

$$B - P + \Gamma = 1 + k,$$

где k – число компонент (линейной связности) графа G .

Доказательство.

Докажем (индукцией по k) данное утверждение для графов, ребра которых можно изобразить ломаными.

База индукции: $k = 1$ – это формула Эйлера для связных графов.

Шаг индукции: рассмотрим две компоненты связности графа G :

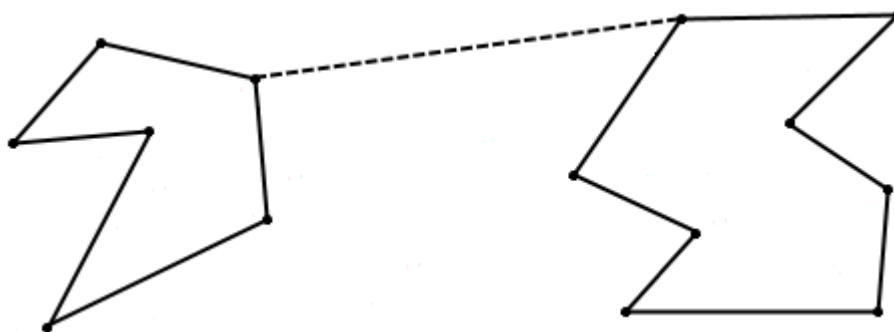


Рис. 2.10. Компоненты связности графа G

Достаточно доказать, что после соединения их отрезком (ломаной) для полученного графа верна исходная формула. Получаем:

$B' = B$ – количество вершин не изменится – очевидно,

$P' = P + 1$ – количество ребер увеличится на 1 – очевидно,

$k' = k - 1$ – количество компонент уменьшится на 1 – очевидно,

$\Gamma' = \Gamma$ – количество компонент $\mathbb{R}^2 \setminus f(G)$ не изменится.

Последнее утверждение верно, так как существует непрерывная кривая, соединяющая точки, расположенные по разные стороны отрезка (обойдем компоненту связности вдоль границы и подойдем к отрезку с другой стороны):

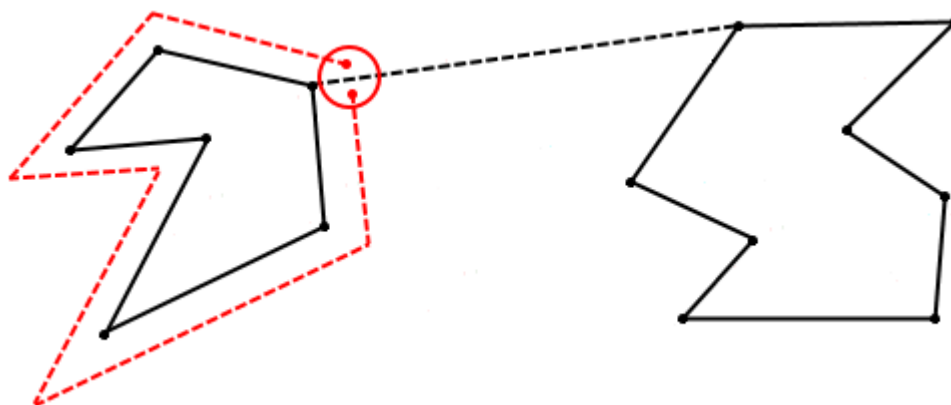


Рис. 2.11. Добавленный отрезок не меняет количество компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus f(G)$

Таким образом, для полученного графа верна формула

$$B' - P' + \Gamma' = 1 + k'$$

Семинар 3. Многогранники.

Определение. Выпуклый многогранник – многогранник, являющийся выпуклым множеством (т.е. выпуклый многогранник содержит любой отрезок, соединяющий две точки, принадлежащие многограннику).

Определение. Строго выпуклый многогранник – выпуклый многогранник, у которого:

- 1) нет ребер, при которых двугранный угол равен 180^0 ;
- 2) нет вершин, в которых сумма плоских углов равна 360^0 .

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих различия между выпуклыми и строго выпуклыми многогранниками.

Задача. Доказать, что в строго выпуклом многограннике всегда есть хотя бы две грани с одинаковым числом сторон.

Доказательство.

Рассмотрим грань с максимальным числом сторон n . По каждому ребру с этой гранью граничит грань с числом сторон от 3 до n . Всего таких граней n штук, поэтому найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

При решении этой задачи мы неявно использовали строгую выпуклость многогранника. Для выпуклого многогранника граней, граничащих с гранью с максимальным количеством сторон, может оказаться меньше n . Рассмотрим пример (тетраэдр с добавленными вершинами на ребрах):

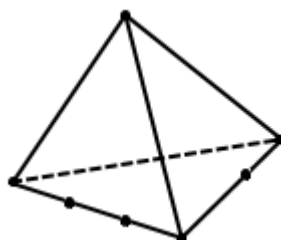


Рис. 3.1. Тетраэдр с вершинами на ребрах

- как легко заметить, у граней этого многогранника 3, 4, 5, 6 сторон.

Задача. Доказать, что в строго выпуклом многограннике не может быть ровно 7 ребер.

Данная задача оставляется читателю для самостоятельного решения. Отметим, что условие строгой выпуклости является важным – добавив фальшивую вершину на ребро тетраэдра, получим выпуклый многогранник, у которого ровно 7 ребер.

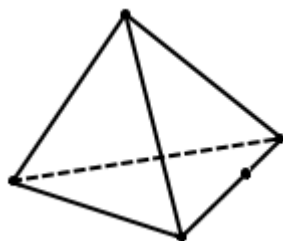


Рис. 3.2. Выпуклый многогранник, у которого ровно 7 ребер

Теперь обсудим класс задач, связанных с формулой Эйлера для многогранников.

Формула Эйлера для выпуклых многогранников

Пусть B – количество вершин, P – количество ребер, Γ – количество граней многогранника. Тогда для выпуклого многогранника верна формула Эйлера:

$$B - P + \Gamma = 2$$

Задача. Доказать, что если в каждой вершине выпуклого многогранника сходится не менее 4 ребер, то у него есть треугольная грань.

Доказательство.

Многогранник можно рассматривать как граф. Воспользуемся задачей 11:

$$\sum_{i=1}^B \deg v_i = 2P$$

- сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству ребер. По условию $\deg v_i \geq 4$, откуда следует, что

$$2P \geq 4B \Leftrightarrow \frac{1}{2}P \geq B.$$

Также

$$\sum_{i=1}^{\Gamma} \gamma_i = 2P$$

- сумма ребер всех граней равна удвоенному количеству ребер многогранника (так как для каждого ребра есть ровно две грани, которым оно принадлежит).

Предположим, что у многогранника нет треугольной грани, тогда $\gamma_i \geq 4$, откуда следует, что

$$2P \geq 4\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}P \geq \Gamma.$$

Сложим полученные неравенства:

$$P \geq B + \Gamma$$

Но из формулы Эйлера следует, что

$$B + \Gamma = 2 + P > P$$

- противоречие, значит, у многогранника есть треугольная грань.

Задача. Пусть у выпуклого многогранника все грани – правильные 5- или 6-угольники. Сколько у него 5-угольных граней?

Решение.

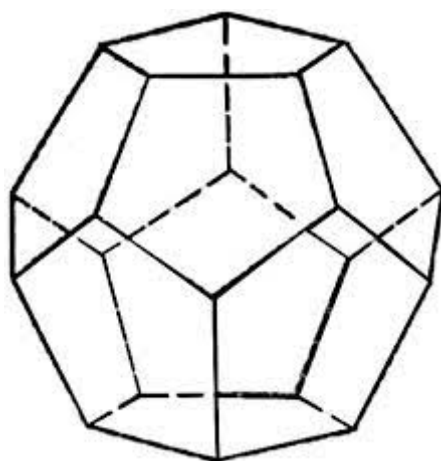


Рис. 3.3. Додекаэдр

Пусть k – число 5-угольников, m – число 6-угольников.
Подсчитаем количество граней:

$$\Gamma = k + m$$

Подсчитаем количество вершин: заметим, что в каждой вершине сходится ровно три грани (больше быть не может, так как сумма плоских углов при вершине не может больше 360°), то есть, $\deg v_i = 3$. Снова воспользуемся формулой (см. задачу 1):

$$\sum_{i=1}^B \deg v_i = 2P,$$

Откуда

$$3B = 2P$$

Подсчитаем количество ребер: снова воспользуемся формулой (см. задачу 9):

$$\sum_{i=1}^{\Gamma} \gamma_i = 2P$$

- сумма ребер всех граней равна удвоенному количеству ребер многогранника, откуда

$$5k + 6m = 2P \Leftrightarrow P = \frac{5k + 6m}{2}$$

Подставляя найденное значение P в формулу для количества вершин, получаем

$$B = \frac{5k + 6m}{3}$$

Теперь поставим найденные значения для B, P и Γ в формулу Эйлера:

$$B - P + \Gamma = 2 \Leftrightarrow \frac{5k + 6m}{3} - \frac{5k + 6m}{2} + k + m = 2 \Leftrightarrow k = 12$$

- то есть, в таком многограннике будет ровно 12 пятиугольников. Такие многогранники связаны с молекулярными соединениями специального вида – фуллеренами.

Ответ: 12.

Сферическая геометрия.

Перейдем к сферической геометрии. Рассмотрим окрестность вершины многогранника (то есть, пересечение сферы с центром в вершине многогранника с ребрами и гранями многогранника):

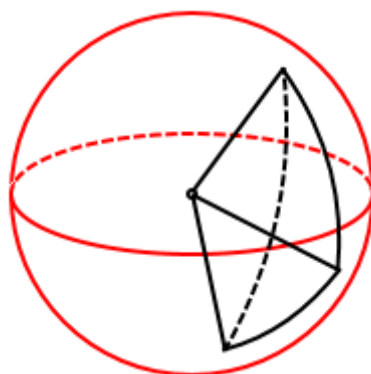


Рис. 3.4. Окрестность вершины многогранника

Пересечения граней многогранника со сферой – дуги больших окружностей, которые образуют сферический многоугольник.

Рассмотрим трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ . Его пересечение со сферой (для простоты примем радиус сферы за 1) – сферический треугольник со сторонами a, b, c :

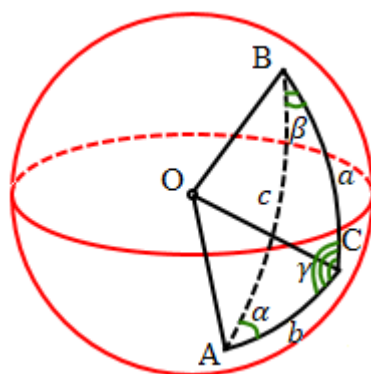


Рис. 3.5. Сферический треугольник

Длины сторон сферического треугольника равны величинам соответствующих плоских углов трехгранного угла (как дуги окружностей, стягивающих углы), а углы сферического треугольника равны соответствующим двугранным углам трехгранного угла (так как угол между кривыми – это угол между касательными к кривым, проведенными в точке пересечения, а радиус сферы перпендикулярен касательной плоскости).

Докажем некоторые теоремы сферической геометрии.

Теорема косинусов.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

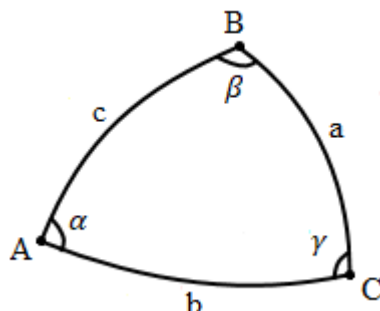


Рис. 3.6. К теореме косинусов

Рассмотрим трехгранный угол, образованный лучами OA , OB , OC :

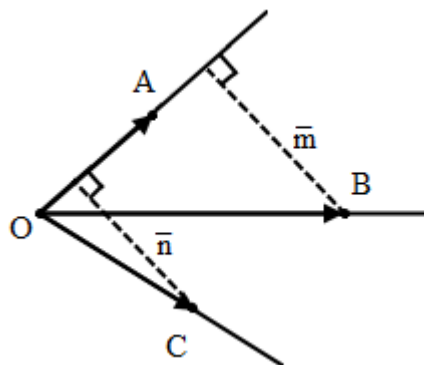


Рис. 3.7. К теореме косинусов

Так как сфера единичного радиуса, выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) &= 1, \\(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB}) &= 1, \\(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC}) &= 1, \\(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= \cos c, \\(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) &= \cos b, \\(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) &= \cos a.\end{aligned}$$

Представим вектор $\overrightarrow{OB}$ в виде суммы:

$$\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} + \vec{m},$$

где $\vec{m} \perp \overrightarrow{OA}$ (опустим в плоскости OAB перпендикуляр из точки B на прямую OA).

Скалярно умножим данное равенство на $\overrightarrow{OA}$, получим

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \lambda(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{m}, \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \cos c = \lambda.$$

Аналогично представим вектор $\overrightarrow{OC}$ в виде суммы:

$$\overrightarrow{OC} = \mu \overrightarrow{OA} + \vec{n},$$

Скалярно умножим данное равенство на $\overrightarrow{OA}$, получим

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{n}, \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \cos b = \mu.$$

Теперь скалярно умножим $\overrightarrow{OB}$ на $\overrightarrow{OC}$:

$$\cos a = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\lambda \overrightarrow{OA} + \vec{m}, \mu \overrightarrow{OA} + \vec{n}) = \lambda \mu (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{m}, \vec{n}) = \lambda \mu + |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha$$

(здесь α (двугранный угол при ребре OA) – угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$). Получаем

$$\cos a = \cos b \cos c + |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha.$$

Осталось найти длины $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Так как $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} + \vec{m}$, то

$$\vec{m} = \overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \cos c \overrightarrow{OA}.$$

Тогда

$$(\vec{m}, \vec{m}) = (\vec{OB} - \cos c \vec{OA}, \vec{OB} - \cos c \vec{OA}) = 1 - \cos^2 c = \sin^2 c$$

Таким образом,

$$|\vec{m}| = \sin c$$

Аналогично

$$|\vec{n}| = \sin b$$

Получаем

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

Отметим, что аналогичная формула верна и для геометрии Лобачевского:

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha$$

Доказательство такое же, как и у теоремы косинусов для сферической геометрии, только немного изменятся соотношения:

$$\begin{aligned}(\vec{OA}, \vec{OA}) &= -1, \\(\vec{OB}, \vec{OB}) &= -1, \\(\vec{OC}, \vec{OC}) &= -1, \\(\vec{OA}, \vec{OB}) &= -\operatorname{ch} c, \\(\vec{OA}, \vec{OC}) &= -\operatorname{ch} b, \\(\vec{OB}, \vec{OC}) &= -\operatorname{ch} a.\end{aligned}$$

Также для сферической геометрии можно вывести аналог теоремы синусов:

Теорема синусов.

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = k$$

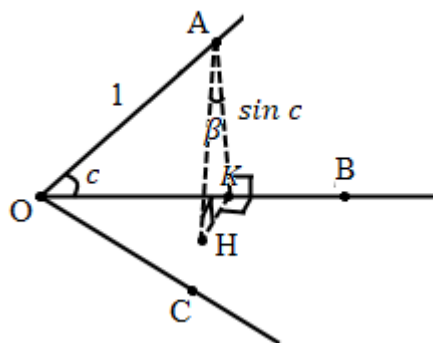


Рис. 3.8. К теореме синусов

Опустим из точки A перпендикуляр AH на плоскость OBC и перпендикуляр AK на грань OB . По теореме о трех перпендикулярах, $KH \perp OB$.

В прямоугольном треугольнике OAK гипотенуза OA равна 1, поэтому катет AK равен $\sin c$.

Треугольник ANK – тоже прямоугольный, с гипотенузой $AK = \sin c$, а угол против катета OH – это двугранный угол при ребре AB (т.е. β). Поэтому

$$AH = \sin c \sin \beta.$$

Проделав аналогичные рассуждения для луча OC , получим

$$AH = \sin b \sin \gamma.$$

Приравнявая полученные выражения для AH , получим

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Аналогично можно получить равенство

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta},$$

откуда следует утверждение теоремы:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Также для сферической геометрии верно неравенство треугольника:

Неравенство треугольника.

$$a \leq b + c$$

(соответственно $b \leq a + c$, $c \leq a + b$).

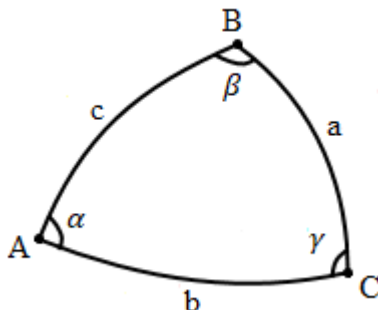


Рис. 3.9. Неравенство треугольника

Можно доказать неравенство треугольника следующим образом: рассмотрим точки A и B на сфере. Прямая (на сфере), проходящая через них – это пересечение плоскости OAB и сферы, т.е. большая окружность. Отрезок с концами A и B на сфере – меньшая дуга большой окружности.

Таким образом, можно доказать, что среди всех кривых, соединяющих точки A и B , наименьшую длину будет иметь отрезок AB – из этого будет следовать неравенство треугольника (отрезок прямой AB короче $AC + BC$).

Мы выведем неравенство треугольника из теоремы косинусов – найдем $\cos a$ и $\cos(b + c)$ и поймем, каким неравенством они связаны.

Функция $\cos x$ убывает от 0 до π , поэтому если $a < \pi$ и $b + c < \pi$, то

$$a \leq b + c \Leftrightarrow \cos a \geq \cos(b + c)$$

Теперь подставим в левую часть полученного неравенства выражение для $\cos a$ из теоремы косинусов, а правую часть раскроем по формуле косинуса суммы, получим

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \geq \cos b \cos c - \sin b \sin c \Leftrightarrow \sin b \sin c (1 - \cos \alpha) \geq 0$$

- верное неравенство (каждый из сомножителей неотрицательный).

Если же условие $a < \pi$ и $b + c < \pi$ не выполнено (т.е., если $b + c \geq \pi$), то и так очевидно, что $a \leq b + c$.

Отметим, что в сферическом треугольнике (так же, как и в плоском) против большего угла лежит большая сторона:

$$a \geq b \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$$

По теореме косинусов,

$$\begin{aligned} \cos a - \cos b &= (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha) - (\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = \sin c (\sin b \cos \alpha - \sin a \cos \beta) \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся теоремой синусов (преобразуем выражение в скобках в правой части), получим

$$\begin{aligned} (\cos a - \cos b)(1 + \cos c) &= k \sin c (\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = k \sin c \sin(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Так как $1 + \cos c > 0$ и $k \sin c > 0$ (рассматриваем невырожденный случай), то выражения $\sin(\beta - \alpha)$ и $\cos a - \cos b$ имеют одинаковый знак. Но функция $\cos x$ монотонно убывает от 0 до π , поэтому $\cos a - \cos b > 0$, если $b > a$ и $\sin(\beta - \alpha) > 0$, если $\beta > \alpha$ (и наоборот). Поэтому

$$a \geq b \Leftrightarrow \alpha \geq \beta.$$

Семинар 4. Площадь и объем (третья проблема Гильберта).

Эта тема была рассмотрена ранее на лекциях. Целью было описать инвариант, который позволяет доказать неравносоставленность некоторых многогранников.

Сначала обсудим равносоставленность многоугольников.

Определение. Два многоугольника называются равносоставленными, если их можно конечным числом отрезков разрезать на одинаковые (конгруэнтные) части.

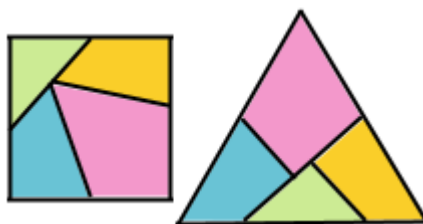


Рис. 4.1. Равносоставленные многоугольники

Очевидно, что равенство площадей многоугольников является необходимым условием их равносоставленности. Оказывается, оно является и достаточным.

Теорема (Бойяи-Герман). Любые два многоугольника одинаковой площади равносоставлены.

Доказательство.

Замечание. Отношение равносоставленности является отношением эквивалентности – рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность: пусть $M_1 \sim M_2$ и $M_2 \sim M_3$, тогда $M_1 \sim M_3$ – разрежем M_2 по всем отрезкам, определяющим его разбиение для M_1 и M_3 .

- Разрежем многоугольник на треугольники.

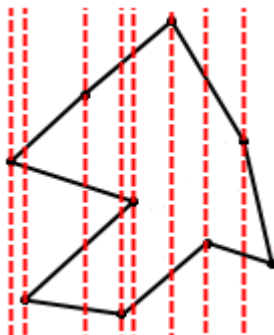


Рис. 4.2. Разрезание невыпуклого многоугольника на треугольники

Очевидно, выпуклый многоугольник можно разрезать на треугольники. Если многоугольник невыпуклый, то можно провести через вершины параллельные прямые с направляющим вектором, непараллельным ни одной из сторон многоугольника (см. рис.

4.2). При разрезании по этим прямым многоугольник распадется на треугольники и выпуклые четырехугольники, которые по диагонали можно разрезать на треугольники.

- Любой треугольник равносоставлен с параллелограммом.

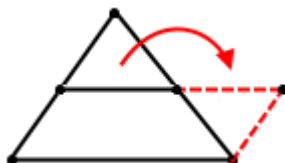


Рис. 4.3. Равносоставленность треугольника и параллелограмма

- проведем среднюю линию.

- Два параллелограмма равной площади и с равным основанием равносоставлены. Любой параллелограмм равносоставлен с прямоугольником:

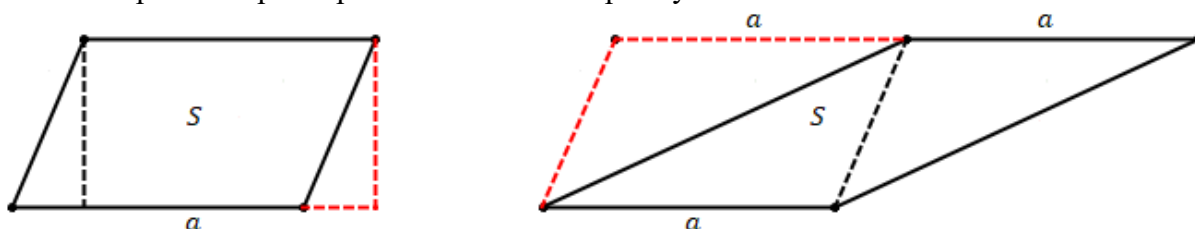


Рис. 4.4. Равносоставленность параллелограмма и прямоугольника

Поэтому (в силу транзитивности равносоставленности) любые два параллелограмма равной площади и с равным основанием равносоставлены.

- Два прямоугольника равной площади равносоставлены.

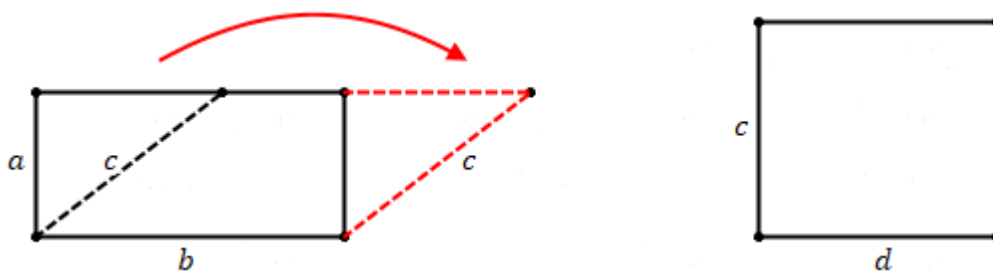


Рис. 4.5. Равносоставленность прямоугольников равной площади

Сведем этот пункт к предыдущему – выберем самую маленькую сторону a из сторон прямоугольников a, b, c, d . Прямоугольник со сторонами a и b равносоставлен с параллелограммом со сторонами c и b (см. рис. 4.5).

В частности, отсюда следует, что прямоугольник площади S равносоставлен с прямоугольником со сторонами 1 и S .

Возьмем теперь каждый из прямоугольников, которые получились при разрезании многоугольника и разрежем каждый из них, чтобы сложить прямоугольник со стороной

1. Таким образом, произвольный многоугольник площади S равносоставлен прямоугольнику со сторонами 1 и S . Таким образом, любые два многоугольника одинаковой площади будут равносоставлены такому прямоугольнику, а значит, они будут равносоставлены друг другу.

Инвариант Дена.

В пространстве уже не любые два многогранника являются равносоставленными. Примеры многогранников одинакового объема, но не являющихся равносоставленными, можно привести с помощью инварианта Дена.

Определение. f – аддитивная функция, если из равенства $n_1x_1 + \dots + n_mx_m = 0$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in$ области определения f следует, что

$$n_1f(x_1) + \dots + n_nf(x_m) = 0$$

Определение. Пусть A – многогранник с N ребрами, l_i – длина i -го ребра многогранника, α_i – двугранный угол при i -ом ребре, f – аддитивная функция, $f(\pi) = 0$. Тогда инвариантом Дена многогранника A называется число $f(A)$:

$$f(A) = l_1f(\alpha_1) + \dots + l_Nf(\alpha_N)$$

Теорема (Хадвигер) (была доказана на лекциях). Если у двух многогранников для некоторой аддитивной функции инварианты Дена разные, то они не являются равносоставленными.

Замечание. Если f – непрерывная аддитивная функция на $\mathbb{R}$, то f – линейна: $f(x) = kx$. В самом деле, из аддитивности следует, что $f(0) = 0$. Пусть $f(x_0) = c$. Тогда по аддитивности

$$f\left(\frac{p}{q}x_0\right) = \frac{p}{q}c, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

- во всех рациональных точках f имеет вид $f(x) = kx$. Тогда $f(x) = kx$ на $\mathbb{R}$ (так как f непрерывна на $\mathbb{R}$).

На самом деле, справедливо даже более сильное утверждение: $f(x) = kx$, если f непрерывна хотя бы в одной точке.

Таким образом, если мы хотим построить содержательную аддитивную функцию, определенную на $\mathbb{R}$, то она должна быть разрывной во всех точках $\mathbb{R}$ (например, можно рассматривать $\mathbb{R}$ как линейное пространство над $\mathbb{Q}$ - выбирая в $\mathbb{R}$ базис, и задавая значения f на элементах этого базиса, получим различные аддитивные функции, разрывные в каждой точке $\mathbb{R}$).

Но для наших целей нам достаточно рассматривать только такие аддитивные функции, у которых область определения конечна – необходимо только, чтобы в нее входили все двугранные углы рассматриваемых многогранников и число π .

Рассмотрим несколько простых примеров, в которых можно вычислить инвариант Дена не обсуждая, какую конкретно аддитивную функцию мы рассматриваем.

Задача. Доказать, что инвариант Дена для призмы равен 0 (т.е. для любой аддитивной функции f , такой, что $f(\pi) = 0$, выполнено $f(A) = 0$).

Доказательство.

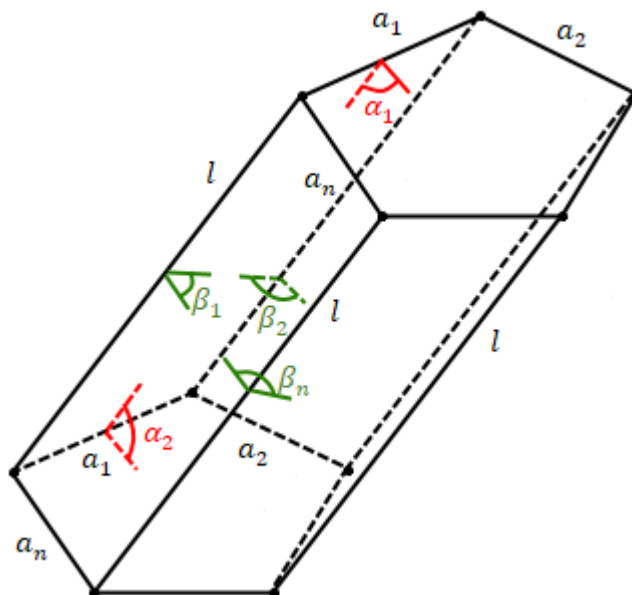


Рис. 4.6. Призма

Ребро может быть либо боковым (длины l), либо ребром основания (длины $a_1, \dots, a_n$). Рассмотрим ребра основания длины a_1 и двугранные углы при этих ребрах α_1 и α_2 . Так как основания призмы параллельны, то выполнено $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$. Тогда

$$a_1 f(\alpha_1) + a_1 f(\alpha_2) = a_1 f(\alpha_1 + \alpha_2) = a_1 f(\pi) = 0$$

- т.е. сумма слагаемых в инварианте Дена, связанных с ребрами основания, будет равна нулю.

Рассмотрим боковые ребра: пусть $\beta_1, \dots, \beta_n$ – двугранные углы при боковых ребрах. Тогда

$$lf(\beta_1) + \dots + lf(\beta_n) = lf(\beta_1 + \dots + \beta_n)$$

Сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам – n -угольник, углы которого равны величинам двугранных углов при боковых ребрах. Сумма углов n -угольника равна $\pi(n - 2)$, поэтому

$$lf(\beta_1 + \dots + \beta_n) = lf(\pi(n-2)) = l(n-2)f(\pi) = 0$$

Таким образом, для любой аддитивной функции f соответствующая сумма равна нулю.

Также верна теорема, обратная теореме Хадвигера:

Теорема (Сидлер). Если для любой аддитивной функции f инварианты Дена для двух многогранников равного объема совпадают, то они равноставлены.

Из теоремы Сидлера и предыдущей задачи следует, что любые две призмы равного объема равноставлены. Отметим, что этот факт можно доказать, используя теорему Бойяи-Германа.

Действительно, любая призма равноставлена с прямой призмой:

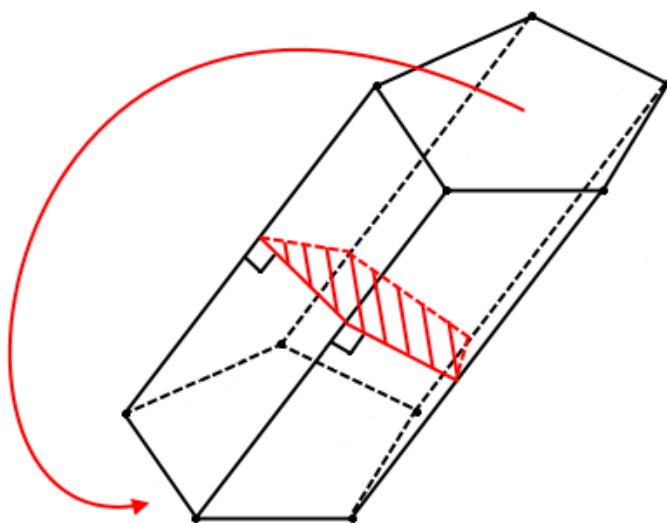


Рис. 4.7. Равноставленность призмы и прямой призмы

- проведем плоскость, перпендикулярную боковым ребрам, и верхнюю часть призмы переставим вниз – получим прямую призму.

Далее разрежем прямую призму плоскостями, параллельными боковому ребру:

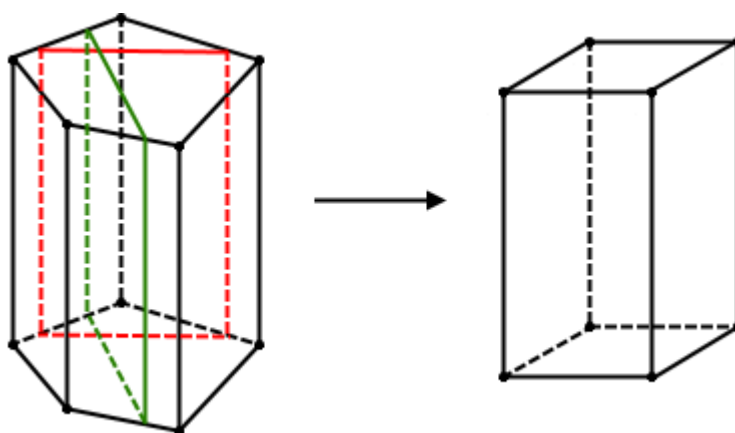


Рис. 4.8. Равноставленность прямой призмы и параллелепипеда

В силу теоремы Бойяи-Германа, мы можем так разрезать основание призмы прямыми, что из полученных кусочков можно сложить параллелограмм. Значит, из призмы можно сложить параллелепипед.

Таким образом, мы доказали, что любая призма равносоставлена с параллелепипедом. Осталось доказать, что любые два параллелепипеда равносоставлены – доказательство абсолютно аналогично доказательству того, что любые два параллелограмма равносоставлены (см. теорему Бойяи-Германа).

Задача. Привести пример тетраэдра, не равносоставленного с правильным.

Решение.

Построим тетраэдр с двугранными углами вида $\frac{p}{q}\pi$ (цветом выделены величины двугранных углов при соответствующей грани):

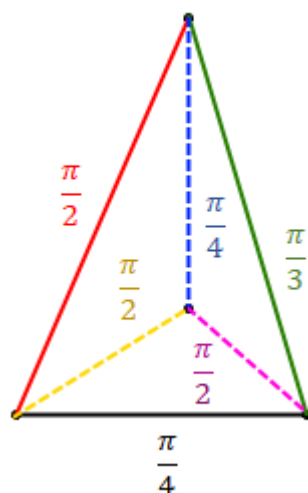


Рис. 4.9. Тетраэдр с двугранными углами вида $\frac{p}{q}\pi$

Данный тетраэдр можно построить следующим образом:

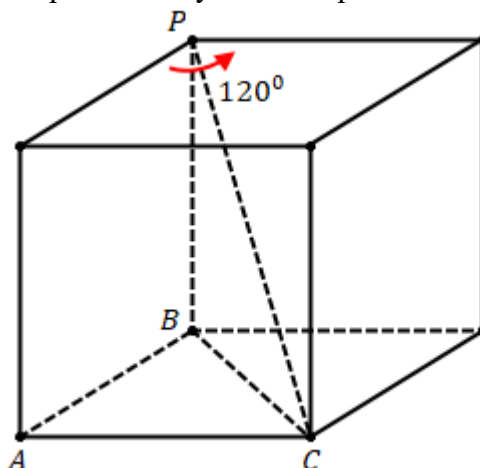


Рис. 4.10. Разбиение куба на три пирамиды

Разобьем куб на три пирамиды с вершиной в точке P , основаниями которых являются передняя, боковая и нижняя грани тетраэдра. При вращении куба на 120° вокруг диагонали PC куб переходит в себя, а пирамиды – друг в друга. Если разрезать каждую из трех пирамид, проведя диагональ основания, то получим тетраэдр, изображенный на рис. 4.9 (например, проведем диагональ PA – получим тетраэдр $PABC$).

Такой тетраэдр не равносоставлен, в частности, с правильным тетраэдром (на лекциях рассматривалась аддитивная функция, для которой инвариант Дена для правильного тетраэдра не равен нулю, а для рассматриваемого тетраэдра инвариант Дена равен нулю для любой аддитивной функции, так как $f(\pi) = 0$).

Отметим, что тот факт, что данный тетраэдр не равносоставлен с правильным, можно заметить и без вычисления двугранных углов – заметим, что куб разрезается на 6 одинаковых тетраэдров, равных данному. Согласно теореме Хадвигера, инвариант Дена для куба (равный 0), равен инварианту Дена для данного тетраэдра, умноженному на 6, поэтому инвариант Дена для данного тетраэдра также равен нулю.

Задача. Доказать аналог теоремы Бойяи-Германа для многоугольников на сфере (любые два многоугольника равной площади на сфере равносоставлены).

Доказательство.

Воспользуемся той же идеей, что и для плоского случая – разрежем многоугольник на треугольники и сложим из них что-то стандартное.

На сфере сумма углов треугольника зависит от его площади:

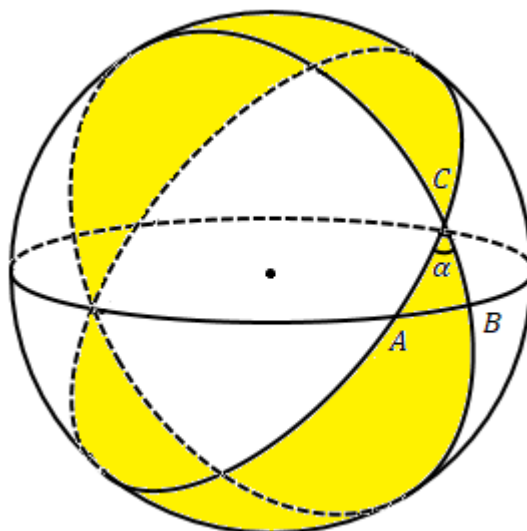


Рис. 4.11. Сферический треугольник ABC

Вершины сферического треугольника – точки пересечения трех окружностей, центр которых совпадает с центром сферы, его стороны – дуги этих окружностей. Площадь сферы единичного радиуса равна 4π , площадь части сферы, заключенной между двумя меридианами, угол между которыми равен α , равна 2α . Тогда площадь “долек”, заключенных между двумя меридианами, равна 4α (на рис. 4.11 выделена желтым

цветом). Объединение шести таких долек, образованных тремя окружностями, дает нам сферу (при этом мы посчитаем треугольник ABC и сферически симметричный равный ему треугольник трижды), поэтому

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 4S_{ABC} = 4\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi + S_{ABC},$$

где α, β, γ – углы треугольника ABC .

Отсюда легко можно вывести формулу для суммы углов четырехугольника на сфере:

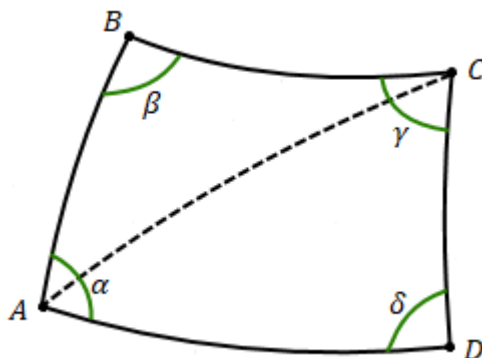


Рис. 4.12. Четырехугольник на сфере

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi + S_{ABCD}$$

Как мы видим, на сфере сумма углов многоугольника зависит от его площади, поэтому не получится (как в доказательстве теоремы Бойяи-Германа) свести все к прямоугольникам. Однако, как и на плоскости, на сфере верно следующее утверждение:

Утверждение. Если верно, что любые два треугольника, имеющие одинаковые площади и равные основания, равносоставлены, то любые два многоугольника одинаковой площади равносоставлены.

Доказательство.

1) Пусть два многоугольника одинаковой площади разрезаны на n и m треугольников соответственно. Индукцией по $n + m$ докажем, что если любые два треугольника равной площади равносоставлены, то и два многоугольника равной площади равносоставлены.

База индукции: $n = 1, m = 1$ – верно.

Рассмотрим треугольник наименьшей площади (пусть он будет в первом наборе). Если во втором наборе есть треугольник такой же площади, то удалим их из наборов – получим наборы из $n - 1$ и $m - 1$ треугольников, для которых доказываемое утверждение верно (по предположению индукции). Если все треугольники во втором наборе имеют большую площадь, то выберем среди них произвольный треугольник и разрежем его на два треугольника, один из которых имеет такую же площадь, что и самый маленький треугольник из первого набора. Удалив из наборов эти два

треугольника с наименьшей площадью, получим наборы из $n - 1$ и m треугольников, для которых доказываемое утверждение верно (по предположению индукции).

Таким образом, вопрос о равносоставленности многоугольников свелся к вопросу о равносоставленности треугольников одинаковой площади. Эту задачу можно свести к равносоставленности треугольников равной площади с равными основаниями.

2) Допустим, что любые два треугольника, имеющие одинаковые площади и равные основания, равносоставлены. Рассмотрим два треугольника одинаковой площади S . Пусть a – наименьшая из сторон треугольников. Отложим на продолжении этой стороны одну из сторон второго треугольника (обозначим ее b) и проведем окружность радиуса b :

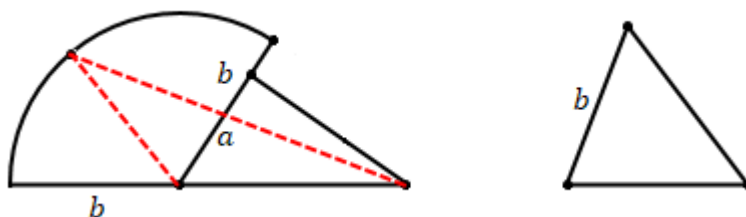


Рис. 4.13. Равносоставленность треугольников одинаковой площади

Пусть третья вершина треугольника пробегает эту окружность. Из соображений непрерывности ясно, что на окружности найдется такая точка, что площадь треугольника с вершиной в этой точке будет равна S (на рис. 4.13 выделен красным пунктиром). Так как одна из сторон этого треугольника равна b (радиус окружности), то он равносоставлен с исходным треугольником со стороной b , также он равносоставлен с треугольником со стороной a (у них одинаковые основания). Таким образом (в силу транзитивности равносоставленности), два треугольника одинаковой площади S будут равносоставлены.

Данные рассуждения справедливы для треугольников и на плоскости, и на сфере, поэтому для сферы достаточно научиться сводиться к треугольнику с заданными площадью S и основанием (а задать площадь означает задать сумму углов). Опустим перпендикуляры на прямую, проходящую через середины сторон треугольника, как показано на рис. 4.14:

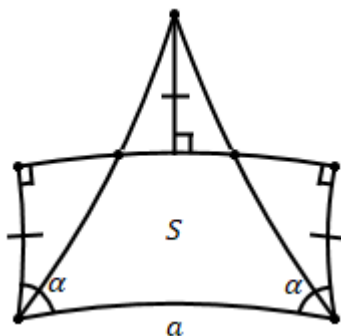


Рис. 4.14. Треугольник и четырехугольник одинаковой площади на сфере

Получим четырехугольник площади S , два угла которого прямые, а два других равны $\alpha = \frac{S+\pi}{2}$ – такой четырехугольник строится на сфере однозначно.

Таким образом, любой треугольник на сфере равносоставлен с таким четырехугольником, поэтому любые два треугольника одинаковой площади на сфере равносоставлены друг с другом.



Семинар 5. Топология и двумерные поверхности.

Определение. Пусть X – множество, T – некоторый набор подмножеств X (множества, принадлежащие T , называются открытыми), для которого выполнены следующие условия:

- 1) $\emptyset, X \in T$,
- 2) $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$ (это условие можно обобщить на конечное число множеств:
 $A_1, \dots, A_n \in T \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n \in T$),
- 3) $A_\alpha \in T \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in T$ (это условие распространяется и на объединение бесконечного числа множеств).

Выделение такого набора открытых множеств T называется топологией на X , пара (X, T) называется топологическим пространством.

Для приложений интересны более естественные топологии (похожие, например, на топологию числовой прямой, где открытые множества – всевозможные объединения интервалов). Чтобы поближе познакомиться с понятием топологии, рассмотрим два в некотором смысле крайних примера:

- Дискретная топология на X : $T =$ все подмножества X ,
- Антидискретная топология на X : $T = \{\emptyset, X\}$.

Задача. Описать все: а) непрерывные функции, б) непрерывные кривые для X с дискретной и антидискретной топологией.

Решение.

Непрерывная функция (на любом топологическом пространстве X) – это непрерывное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ в числовую прямую, на которой задана обычная топология (открытые множества – всевозможные объединения интервалов).

Непрерывная кривая – это непрерывное отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ из отрезка $[a, b]$ в топологическое пространство X .

Воспользуемся следующим свойством непрерывных отображений:

Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества $V \subset Y$ является открытым (в X).

- Дискретная топология, функции.

Прообраз любого открытого подмножества прямой должен быть открытым подмножеством в X . В случае дискретной топологии все подмножества X являются открытыми, поэтому все функции будут непрерывными.

- Антидискретная топология, функции.

Несмотря на то, что в X всего два открытых подмножества, непрерывные отображения все-таки будут существовать. Действительно, рассмотрим постоянную функцию:

$$f(x) \equiv c \quad \forall x \in X.$$

Любое подмножество $V \subset \mathbb{R}$ или содержит, или не содержит точку c . Если V не содержит c , то его прообразом будет являться пустое множество $\emptyset$, если V содержит c , то его прообразом будет являться все пространство X .

Так как $\emptyset, X \in T$, получаем, что постоянные функции будут непрерывными на любом топологическом пространстве (в частности, с антидискретной топологией).

Однако, для пространства X с антидискретной топологией не существует непрерывных функций, кроме постоянных. Действительно, пусть функция принимает хотя бы два значения:

$$\exists x_1 \in X: f(x_1) = c_1 \text{ и } \exists x_2 \in X: f(x_2) = c_2$$

Рассмотрим на прямой интервал V , содержащий c_1 , и не содержащий c_2 . Тогда прообраз V будет содержать x_1 , но не содержать x_2 . То есть, V – непустое подмножество X , не совпадающее с X , поэтому оно не будет открытым в антидискретной топологии, а значит, f не является непрерывной функцией.

- Антидискретная топология, кривые.

Нужно проверить, что при отображении γ прообраз открытого множества будет являться открытым множеством. В антидискретной топологии всего два открытых множества: $\emptyset$ и X . Прообраз пустого множества – пустое множество, прообраз X – отрезок $[a, b]$. Таким образом, в антидискретной топологии все кривые непрерывны (отметим, что рассуждения не изменятся, если вместо отрезка $[a, b]$ рассматривать произвольное топологическое пространство Y).

- Дискретная топология, кривые.

В этом случае только постоянные кривые (т.е. такие кривые $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, что $\gamma(t) = x_0 \in X$ для любого $t \in [a, b]$) будут являться непрерывными.

Действительно, любое открытое подмножество $V \subset X$ или содержит, или не содержит точку x_0 . Если V не содержит x_0 , то его прообразом будет являться пустое множество $\emptyset$, если V содержит x_0 , то его прообразом будет являться весь отрезок $[a, b]$.

Других непрерывных кривых нет: действительно, предположим, что существует непрерывная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, не являющаяся постоянной. Пусть $f(b) = x_2$.

Рассмотрим прообраз $f^{-1}(x_2) = U$. Так как кривая не является постоянной, то $U \neq [a, b]$.

Рассмотрим $f^{-1}(X \setminus \{x_2\}) = W$. Тогда:

- $U \cap W = \emptyset$
- $U \cup W = [a, b]$
- U и W – открытые множества (так как их прообразы x_2 и $X \setminus \{x_2\}$ являются открытыми в дискретной топологии)

То есть, отрезок $[a, b]$ можно представить в виде двух открытых непересекающихся подмножеств, что невозможно (так как это означало бы, что отрезок не является связным множеством).

Определение. Топологическое пространство X называется n -мерным многообразием, если у каждой его точки существует окрестность, гомеоморфная открытому диску в $\mathbb{R}^n$ ($D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$).

Задача. Доказать, что открытый диск D^n гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Доказательство.

Напоминание: отображение $f: X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, если f – биекция, f непрерывно, f^{-1} непрерывно.

$n = 1$: интервал гомеоморфен числовой прямой – в качестве f можно рассмотреть, например, $f(x) = \tan x$:

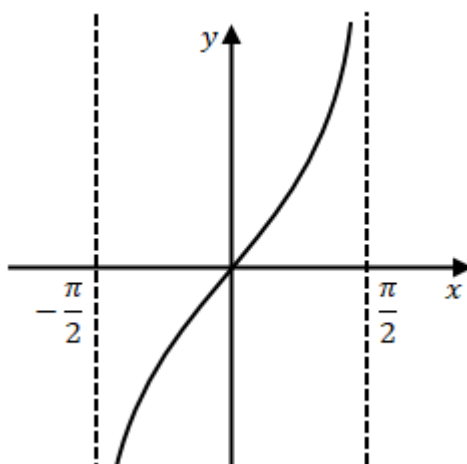


Рис. 5.1. График $f(x) = \tan x$

Строго говоря, мы доказали, что только интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ гомеоморфен $\mathbb{R}$, но очевидно, что все интервалы гомеоморфны друг другу – гомеоморфизм можно осуществить, например, с помощью линейной функции:

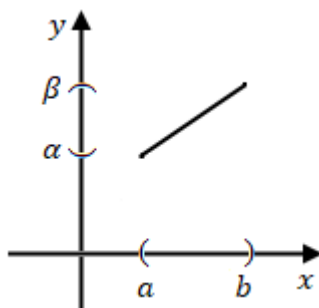


Рис. 5.2. Гомеоморфизм интервалов

$n \geq 2$: обобщим доказательство для случая $n = 1$ на n -мерный случай.

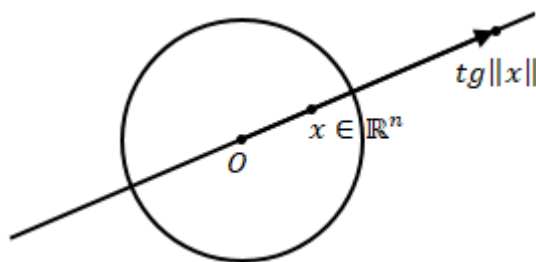


Рис. 5.3. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \frac{\pi}{2}\}$

Построим для каждой прямой, проходящей через центр диска, гомеоморфизм:

$$f(x) = \begin{cases} tg(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

То есть, каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ сопоставим точку, лежащую на прямой, проходящей через центр диска и точку x , по правилу, приведенному выше.

Замечание. Гомеоморфизм – отношение эквивалентности на множестве пространств. Действительно, рефлексивность и симметричность очевидны (тождественное отображение непрерывно и биективно), а транзитивность следует из того, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

Теперь коротко напомним некоторые топологические свойства пространств, обсуждавшиеся на лекциях.

Определение. X связно $\Leftrightarrow X$ нельзя представить в виде объединения двух подмножеств

$$X = A \cup B,$$

где

- 1) $A, B \neq \emptyset$,
- 2) $A \cap B = \emptyset$,
- 3) A, B – открытые

Определение. X линейно связно $\Leftrightarrow \forall P, Q \in X$ существует непрерывная кривая

$$\gamma: [a, b] \rightarrow X$$

такая, что $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = Q$ (иными словами, любые две точки можно соединить непрерывной кривой).

Определение. X компактно $\Leftrightarrow$ из любого открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

Посмотрим, обладают ли этими свойствами пространства X с дискретной топологией:

- Связность: вообще говоря, нет (кроме случая, когда пространство X состоит из одной точки),
- Линейная связность: нет (ранее обсуждалось, что в пространствах с дискретной топологией только постоянные кривые будут непрерывными), также на лекциях было доказано, что из линейной связности следует связность,
- Компактность: если X состоит из конечного числа точек, то X компактно (очевидно, в этом случае из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие), если же X бесконечно, то оно не является компактным (рассмотрим покрытие, элементами которого являются все подмножества X – очевидно, что из него нельзя выделить конечное подпокрытие).

Аналогичная проверка этих свойств для пространств с антидискретной топологией оставляется читателю в качестве упражнения.

Задача. Привести пример связного, но не линейно связного топологического пространства.

Решение.

Рассмотрим множество $X \in \mathbb{R}^2$ – объединение отрезка $[0,1]$ и графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$ с индуцированной из $\mathbb{R}^2$ топологией:

$$X = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$$

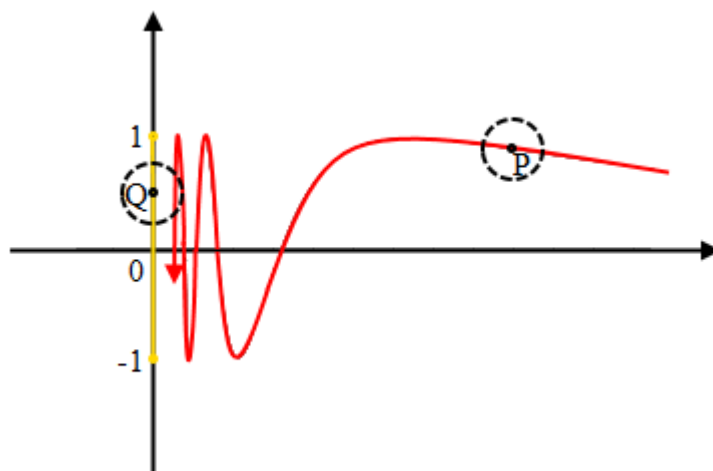


Рис. 5.4. Множество X

Определение. Пусть X – подмножество топологического пространства Y . Тогда индуцированной топологией на X называется следующий набор открытых множеств: U открыто в X , если $U = V \cap X$, где V – открытое множество в Y .

В нашем случае окрестности точек X – это пересечения окрестностей точек плоскости с множеством X .

1) Докажем, что X связно:

Допустим, X не является связным. Тогда $X = A \cup B$, где A, B – непустые открытые множества, $A \cap B = \emptyset$.

Обозначим $M = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\}$ – отрезок, $N = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ – график. M и N – линейно связные множества (так как любые две точки отрезка соединяются отрезком и любые две точки графика соединяются графиком), поэтому M и N целиком содержатся во множестве A , либо во множестве B . Так как A, B – непустые множества, то получаем, что $A = M$ и $B = N$.

Но отрезок M не является открытым подмножеством в X : любое открытое подмножество X , содержащее точку отрезка, должно быть пересечением открытого подмножества плоскости с отрезком $[0, 1]$ (по определению индуцированной топологии), но пересечение открытого подмножества плоскости с отрезком $[0, 1]$ всегда будет содержать точки графика $y = \sin \frac{1}{x}$ (очевидно из свойств графика $y = \sin \frac{1}{x}$).

Таким образом, X нельзя представить в виде $X = A \cup B$, где A, B – непустые открытые множества, $A \cap B = \emptyset$, поэтому X связно.

2) Докажем, что X не является линейно связным:

Предположим, что существует непрерывная кривая γ , соединяющая точку P на графике с точкой Q на отрезке (см. рис. 5.4):

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \gamma(a) = P, \quad \gamma(b) = Q$$

Рассмотрим на этой кривой первую точку, принадлежащую отрезку:

$$t_0 = \min\{t \mid \gamma(t) \in M\}$$

- это можно сделать (на лекциях была доказана лемма: на точках непрерывной кривой, один конец принадлежит замкнутому множеству, а второй конец не принадлежит, всегда достигается инфимум пересечения этой кривой с замкнутым множеством).

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0) &= 0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Так как $\gamma(t)$ непрерывна, то и $x(t), y(t)$ тоже непрерывны, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= x(t_0) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow t_0} x(t) &= y(t_0) = y_0 \end{aligned}$$

Но при $t < t_0$ $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ – противоречие, значит, такой кривой не существует.

Замечание. Любые топологические свойства для гомеоморфных пространств одинаковы, так как гомеоморфизм между пространствами осуществляет биекцию не только между

точками, но и между открытыми множествами. Поэтому используя топологические свойства пространств можно доказывать их негомеоморфность.

Задача. Доказать, что следующие пространства попарно негомеоморфны:

- интервал
- отрезок
- окружность
- плоскость
- сфера

Решение.

Используем следующий критерий (был доказан в курсе математического анализа): подмножество в евклидовом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Отсюда следует, что интервал и плоскость не компактны, а отрезок, окружность и сфера компактны.

Теперь используем связность: рассмотрим отрезок и окружность. Допустим, между отрезком и окружностью существует гомеоморфизм f . Рассмотрим произвольную точку отрезка a , отличную от концов отрезка.

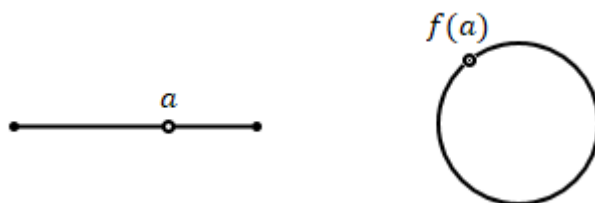


Рис. 5.5. Отрезок и окружность негомеоморфны

Тогда существует гомеоморфизм между отрезком с выкинутой точкой a и окружностью с выкинутой точкой $f(a)$. Но окружность без точки – связное множество, а отрезок без точки – несвязное множество. Получили противоречие, значит, отрезок и окружность негомеоморфны.

Аналогично доказывается негомеоморфность окружности и сферы: выбросив из окружности две точки, получим несвязное множество, а выбросив из сферы две точки, получим связное множество. Значит, окружность и сфера не гомеоморфны.

Абсолютно аналогично доказывается негомеоморфность интервала и плоскости.

Семинар 6. Двумерные поверхности.

На лекциях обсуждалась теорема классификации гладких компактных связных замкнутых двумерных многообразий. Эта теорема доказывалась с помощью триангуляции.

Определение. Триангуляция – это разбиение поверхности на топологические треугольники таким образом, что любые два треугольника пересекаются либо по вершине, либо по ребру, либо не пересекаются.

В частности, с помощью триангуляции определялась эйлерова характеристика поверхности M :

$$\chi(M) = B - P + \Gamma$$

Где B – число вершин треугольников, P – число ребер треугольников, Γ – число треугольников.

Эйлерова характеристика $\chi(M)$ не зависит от триангуляции.

Задача. Найти эйлерову характеристику тора.

Решение.

Разобьем тор на треугольники так, как показано на рисунке 6.1:

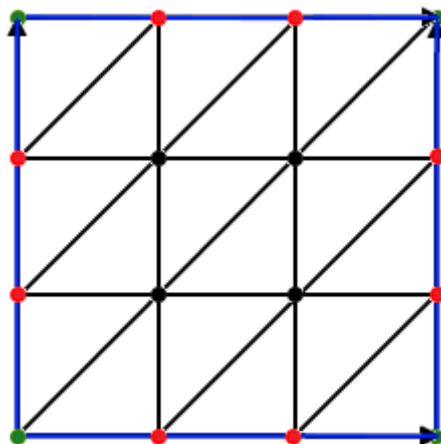


Рис. 6.1. Триангуляция тора

Противоположные ребра (отмечены синим) попарно склеятся друг с другом, при этом противоположные вершины (отмечены красным) также склеятся друг с другом, а вершины квадрата (отмечены зеленым) склеятся в одну вершину. Получим

$$B = 9$$

$$P = 27$$

$$\Gamma = 18$$

Тогда эйлерова характеристика тора равна

$$\chi(\mathbb{T}^2) = B - P + \Gamma = 0$$

Можно оценить снизу число вершин, ребер и треугольников при триангуляции поверхности M с заданной эйлеровой характеристикой $\chi(M)$.

Задача. Доказать, что число вершин триангуляции удовлетворяет оценке

$$B \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}.$$

Решение.

Выпишем соотношения, связывающие количество вершин, ребер и треугольников при триангуляции с эйлеровой характеристикой поверхности. Эйлерова характеристика:

$$\chi(M) = B - P + \Gamma$$

Так как при триангуляции каждое ребро принадлежит ровно двум треугольникам, а у каждого треугольника три стороны, то $3\Gamma = 2P$, откуда

$$\Gamma = \frac{2}{3}P$$

Если рассматривать множество вершин и ребер треугольников как граф, то можно заметить, что в этом графе нет кратных ребер. Это означает, что число ребер не больше, чем число пар вершин:

$$P \leq \frac{B(B-1)}{2}$$

Подставляя в формулу для эйлеровой характеристики $\Gamma = \frac{2}{3}P$ и выражая количество ребер через B и $\chi(M)$, получим неравенство:

$$3B - 3\chi(M) \leq \frac{B(B-1)}{2}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем:

$$B^2 - 7B + 6\chi(M) = 0$$

Корни:

$$B_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}$$

Меньший корень:

$$B_1 = \frac{7 - \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2} \leq \frac{7}{2} < 4$$

Но количество вершин триангуляции не может быть меньше 4, поэтому решением неравенства является промежуток

$$B \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}$$

Стоит отметить, что, хотя при выводе неравенства использовалась довольно грубая оценка $P \leq \frac{B(B-1)}{2}$, получившаяся оценка числа вершин триангуляции точна:

при $\chi(M) = 2$ получаем $B \geq 4$,

при $\chi(M) = 1$ получаем $B \geq 6$,

при $\chi(M) = 0$ получаем $B \geq 7$,

– точные оценки для наименьшего количества вершин триангуляции.

Обсудим, как устроены триангуляции с минимальным числом вершин для некоторых поверхностей.

Сфера ($\chi(M) = 2$, минимальное число вершин $B = 4$):

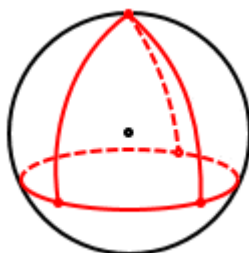


Рис. 6.2. Минимальная триангуляция сферы

Для проективной плоскости ($\chi(M) = 1$, минимальное число вершин $B = 6$) и тора ($\chi(M) = 1$, минимальное число вершин $B = 6$) предъявить триангуляцию с минимальным числом вершин уже сложнее.

Отметим, однако, следующий факт: при выводе оценки числа вершин триангуляции использовалось неравенство

$$P \leq \frac{B(B-1)}{2},$$

означающее, что число ребер не больше, чем число пар вершин. Число вершин будет минимальным, если данное неравенство превратится в равенство:

$$P = \frac{B(B-1)}{2}.$$

Иными словами, триангуляция будет минимальной, если число ребер будет равно числу пар вершин, то есть, каждая пара вершин будет соединена ребром, то есть, граф, вершинами которого являются вершины треугольников, а ребрами – стороны треугольников, будет полным графом.

Например, для тора это K_7 . Построить минимальную триангуляцию для тора $\mathbb{T}^2$ означает то же самое, что и вложить граф K_7 в $\mathbb{T}^2$. На рис. 6.3. Нарисован пример вложения K_5 в $\mathbb{T}^2$ (тор – сфера с ручкой):

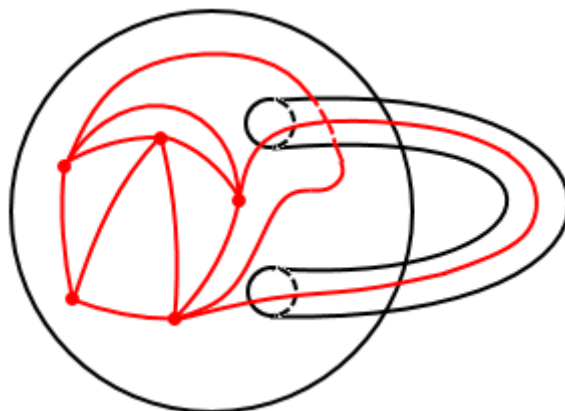


Рис. 6.3. Вложение K_5 в тор

Таким образом, некоторые графы, не вложимые в плоскость, можно вкладывать в двумерные поверхности.

Ориентация поверхностей.

На лекциях (при доказательстве теоремы классификации) мы получили список гладких компактных связных замкнутых двумерных многообразий. Их можно описать двумя способами:

Склейка многоугольника по слову:

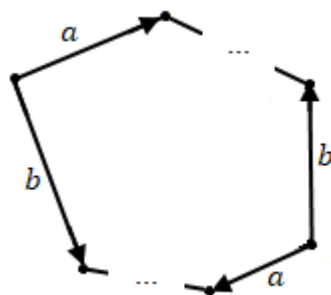


Рис. 6.4. Склейка многоугольника

- обходим многоугольник вдоль границы, выписывая буквы, встречающиеся нам, с учетом знака (если стрелка на стороне многоугольника a совпадает с направлением обхода, пишем в слове букву a , если не совпадает – пишем a^{-1}).

Любое компактное связное замкнутое двумерное многообразие может быть получено склейкой из многоугольника по одному из следующих слов:

- 0) aa^{-1} – сфера, $\chi(M) = 2$,
- 1) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ – ориентируемое многообразие, $\chi(M) = 2 - 2n$,
- 2) $a_1a_1 \dots a_ma_m$ – неориентируемое многообразие, $\chi(M) = 2 - m$.

Еще один способ описания – через связную сумму:

- 1) $\mathbb{S}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ – связная сумма n ($n \geq 0$) торов (добавление сферы $\mathbb{S}^2$ ничего не меняет) – ориентируемое многообразие,
- 2) $\mathbb{S}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ – связная сумма m ($m \geq 1$) проективных плоскостей – неориентируемое многообразие.

Задача. Определить вид двумерного многообразия.

а)

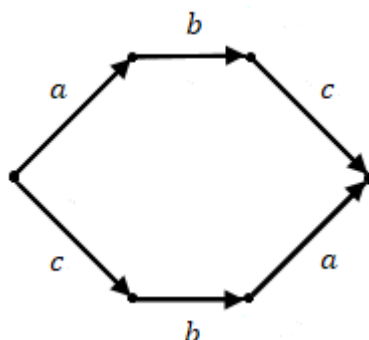


Рис. 6.5. Склейка многоугольника

Решение.

Многоугольник задается словом $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$. Любая поверхность, полученная склейкой из многоугольника, однозначно характеризуется своей эйлеровой характеристикой и ориентируемостью/неориентируемостью.

Эйлерова характеристика.

На лекциях обсуждалось, что эйлерову характеристику можно вычислить, рассмотрев граф, разбивающий поверхность на области, гомеоморфные диску. Этому условию удовлетворяет граф, вершинами которого являются вершины шестиугольника, ребрами – стороны шестиугольника, изображенного на рис. 6.5 (т.е. того многоугольника, который мы склеиваем в поверхность).

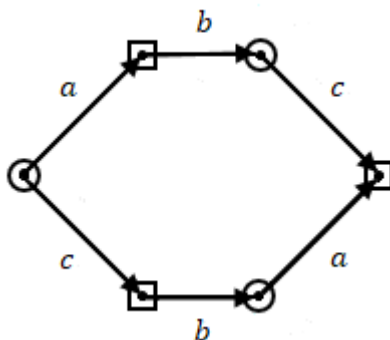


Рис. 6.6. Склейка многоугольника

Для этого графа (с учетом склейки) $\Gamma = 1$, $B = 2$ (вершины, отмеченные на рис. 6.6 кружками, склеятся в одну, отмеченные квадратами – в другую), $P = 3$ (противоположные ребра попарно склеятся), поэтому

$$\chi(M) = B - P + \Gamma = 0$$

Ориентируемость/неориентируемость поверхности.

Пусть задана некоторая триангуляция поверхности. Согласованная ориентация двух треугольников, граничащих по ребру, означает, что заданы разные направления обхода границ этих треугольников:

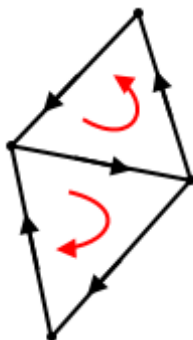


Рис. 6.7. Согласованная ориентация двух треугольников

Чтобы у всех треугольников была согласованная ориентация, достаточно проверить, согласована ли ориентация у треугольников, граничащих по тем ребрам, по которым мы склеиваем многоугольник.

Это соображение приводит к следующему выводу: если в слове, задающем многоугольник, одинаковые буквы встречаются в разных степенях, то ориентация согласована, и поверхность ориентируема, а если одинаковые буквы встречаются в одинаковых степенях, то ориентация не согласована, и поверхность не ориентируема.

В нашем случае у всех одинаковых букв разная степень, поэтому поверхность ориентируема. Учитывая, что эйлерова характеристика равна 0, получаем, что это тор.

б) $T^2 \# \mathbb{RP}^2$

Вначале докажем формулу:

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Для построения связной суммы $M_1 \# M_2$ необходимо вырезать из M_1 и M_2 по открытому диску и склеить границы дисков. Можно считать, что поверхности триангулированы, и в качестве дисков выбраны треугольники триангуляции.

Эйлеровы характеристики M_1 и M_2 :

$$\begin{aligned}\chi(M_1) &= B_1 - P_1 + \Gamma_1 \\ \chi(M_2) &= B_2 - P_2 + \Gamma_2\end{aligned}$$

Можно считать, что связная сумма $M_1 \# M_2$ триангулирована (используем триангуляцию M_1 и M_2), тогда выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}B &= B_1 + B_2 - 3 \\ P &= P_1 + P_2 - 3 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\end{aligned}$$

Получаем

$$\chi(M_1 \# M_2) = B - P + \Gamma = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

В нашем случае

$$\chi(T^2 \# \mathbb{RP}^2) = \chi(T^2) + \chi(\mathbb{RP}^2) - 2 = 0 + 1 - 2 = -1$$

Так как эйлерова характеристика нечетная, то многообразие неориентируемое. Получаем

$$T^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$$

- связная сумма трех проективных плоскостей.

Теперь обсудим, что происходит с ориентируемостью при построении связной суммы.

Задача. Определить, ориентируемо ли многообразие $M_1 \# M_2$, если:

- а) M_1 и M_2 ориентируемы,
- б) M_1 и M_2 не ориентируемы,
- в) M_1 ориентируемо, M_2 не ориентируемо.

Решение.

Можно решать эту задачу, используя триангуляцию поверхностей. Мы решим ее, используя факт, обсуждавшийся на лекциях: многообразие M не ориентируемо тогда и только тогда, когда оно содержит лист Мёбиуса.

В самом деле, как обсуждалось ранее, поверхность не ориентируема, если у многоугольника, который мы склеиваем, есть две стороны, помеченные одинаковыми буквами и направленными одинаково (в смысле обхода границы). Тогда из многоугольника можно вырезать лист Мёбиуса:

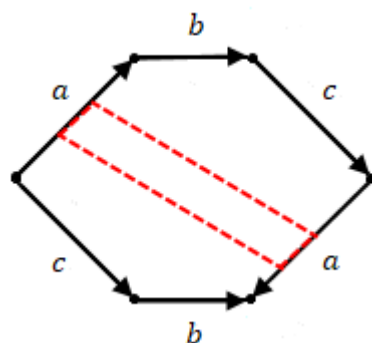


Рис. 6.8. Вырезание листа Мёбиуса

И обратно: если многообразие содержит лист Мёбиуса, то оно не ориентируемо, так как даже лист Мёбиуса не ориентируем.

Тогда получаем следующий ответ:

- а) ориентируемо,
- б) не ориентируемо,
- в) не ориентируемо.

Задача. Доказать, что операция взятия связной суммы не зависит от способа склейки поверхностей (после вырезания дисков из поверхностей можно задать разную ориентацию на границах дисков – получим два существенно разных способа склейки).

Решение.

Несложно понять, что гомеоморфизм многообразий при различных вариантах склейки можно доказать, используя следующий факт:

Задача. Доказать, что для двумерного компактного многообразия M “с дыркой” (то есть, $M \setminus D^2$) существует гомеоморфизм $f: M \setminus D^2 \rightarrow M \setminus D^2$, меняющий направление на границе дырки.

Решение.

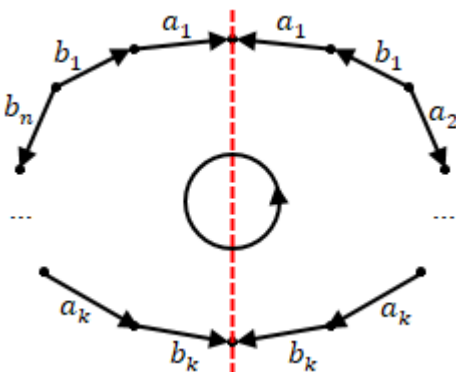


Рис. 6.9. Построение гомеоморфизма $f: M \setminus D^2 \rightarrow M \setminus D^2$

Построим гомеоморфизм на многоугольнике, из которого склеиваем многообразие. Симметрия относительно прямой, проходящей через центр многоугольника (см. рис. 6.9) даст искомый гомеоморфизм (случай нечетного n оставляется читателю в качестве упражнения). Для слова вида $a_1 a_1 \dots a_m a_m$ (неориентируемое многообразие) строим аналогичный гомеоморфизм.

Таким образом, нам неважно, как именно мы приклеиваем поверхности друг к другу – на результат операции связной суммы это не влияет.

До сих пор мы рассматривали только компактные многообразия. Некомпактное многообразие можно построить, например, удалив точку из компактного многообразия. Однако, далеко не все некомпактные многообразия можно получить таким образом. Иными словами, не все дырки в некомпактном многообразии можно заклеить дисками так, чтобы получилось компактное многообразие.

Рассмотрим сферу с бесконечным количеством ручек:



Рис. 6.10. Сфера с бесконечным количеством ручек

- из этого многообразия невозможно получить компактное многообразие с помощью операции заклеивания дырки. Также мы не сможем получить компактное многообразие, если рассмотрим следующую (“бесконечную только в одну сторону”) сферу с бесконечным количеством ручек:



Рис. 6.11. Сфера с бесконечным количеством ручек

Решение следующей задачи предоставляется читателю:

Задача. Доказать, что многообразия, изображенные на рис. 6.10 и 6.11 не гомеоморфны.

Семинар 7. Теорема Уитни (классификация замкнутых регулярных кривых).

Будем рассматривать регулярные кривые $\gamma(t)$ (т.е. кривые, в каждой точке которых вектор скорости не равен нулю). Зафиксируем некоторую декартову систему координат и будем отсчитывать (по модулю 2π) от оси x угол $\varphi(t)$, который образует вектор скорости $\dot{\gamma}(t)$ с направлением оси x . Когда точка проходит по всей кривой и возвращается в исходное положение, угол $\varphi(t)$ получает некоторое приращение (можно считать, что $t \in [0, T]$, разность значений угла в начальной и конечной точке будет кратна 2π). Тогда каждой кривой $\gamma(t)$ можно сопоставить число вращения:

$$\frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{2\pi} = R(\gamma) \in \mathbb{Z}$$

Теорема Уитни. Две кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны ($\gamma_0 \sim \gamma_1$) тогда и только тогда, когда их числа вращения равны: $R(\gamma_0) = R(\gamma_1)$.

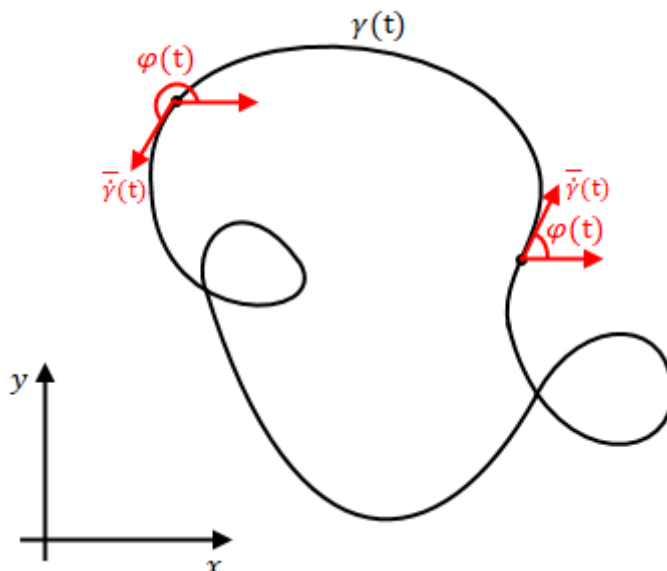


Рис. 7.1. Определение числа вращения

Таким образом, классификация замкнутых регулярных кривых на плоскости задается числом вращения.

Обсудим подробнее несколько моментов, о которых шла речь на лекции.

Определение. Замкнутые регулярные кривые на плоскости $\gamma_0, \gamma_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ называются регулярно гомотопными, если существует отображение F (зависящее от двух параметров – параметра гомотопии $s \in [0, 1]$ и параметра на кривой $t \in [0, T]$) в плоскость:

$$F: [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

такое, что:

- 1) F – гладкое отображение,
- 2) $F(0, t) = \gamma_0(t)$, $F(1, t) = \gamma_1(t)$,
- 3) $\forall s \in [0, 1]$ кривая $\gamma_s(t) = F(s, t)$ замкнута и регулярна.

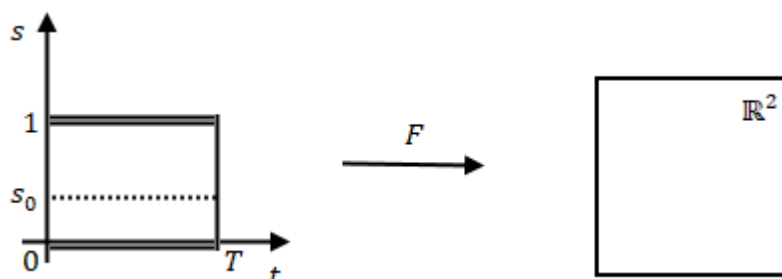


Рис. 7.2. К определению регулярно гомотопных кривых

Ограничение F на отрезок $[0, 1]$ дает кривую γ_0 , ограничение F на отрезок $[0, T]$ дает кривую γ_1 . При каждом фиксированном s мы получаем замкнутую регулярную кривую.

Таким образом, то, что кривые регулярно гомотопны, означает, что их можно соединить некоторым семейством замкнутых регулярных кривых.

Почему мы классифицируем именно замкнутые регулярные кривые? Дело в том, что при отбрасывании условия замкнутости или регулярности классификация кривых становится тривиальной. Проиллюстрируем этот факт несколькими задачами:

Задача 1. Доказать, что любые две замкнутые кривые на плоскости гомотопны (в определении регулярных гомотопных кривых отбросили условие регулярности – в начале и в 3 пункте).

Решение.

Пусть γ_0 и γ_1 – замкнутые кривые. Можно считать, что $\gamma(t)$ – радиус-вектор кривой, задающий положение точки в координатах (x, y) . Рассмотрим выражение

$$(1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) = F(s, t)$$

При $s = 0$ получаем $F(s, t) = \gamma_0(t)$, при $s = 1$ получаем $F(s, t) = \gamma_1(t)$, при произвольном s получаем некую кривую $\gamma_s(t)$. Так как $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ – непрерывные гладкие кривые, то и $F(s, t)$ будет непрерывной гладкой кривой. Замкнутость тоже несложно проверить: если кривые $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ – замкнутые, то выполнено условие $\gamma_0(T) = \gamma_0(0)$ и $\gamma_1(T) = \gamma_1(0)$. Тогда для кривой $\gamma_s(t)$

$$\begin{aligned}\gamma_s(T) &= (1 - s)\gamma_0(T) + s\gamma_1(T), \\ \gamma_s(0) &= (1 - s)\gamma_0(0) + s\gamma_1(0),\end{aligned}$$

откуда следует, что $\gamma_s(T) = \gamma_s(0)$.

Таким образом, если в определении регулярно гомотопных кривых отбросить условие регулярности, то все замкнутые кривые будут гомотопны (это равносильно тому, что каждая кривая гомотопна какой-то фиксированной кривой – например, постоянной $\hat{\gamma}(t) = P$, график которой является точкой).

Посмотрим, что будет, если в определении регулярно гомотопных кривых отбросить условие замкнутости.

Задача 2. Доказать, что любые две регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны (в определении регулярно гомотопных кривых отбросили условие замкнутости – в начале и в 3 пункте).

Решение.

Докажем, что в этом случае любая кривая регулярно гомотопна отрезку γ_0 . Идея: начальную точку кривой зафиксируем, конечная точка будет в процессе гомотопии двигаться к начальной, и кривая будет становиться все короче. В конце концов получим маленький отрезок кривой γ без петель.

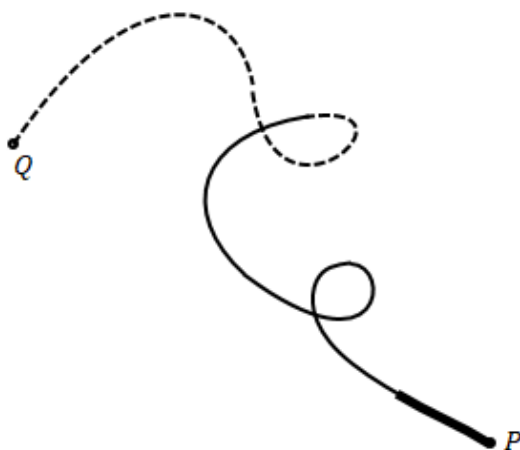


Рис. 7.3. Построении гомотопии между кривой и отрезком

Построим следующее отображение:

$$\gamma(t) \rightarrow \gamma(s, t), \quad s \in [\varepsilon, 1]$$

Для строгости (левый конец отрезка должен быть равен 0), предъявим отображение отрезка $[0, 1]$ в отрезок $[\varepsilon, 1]$:

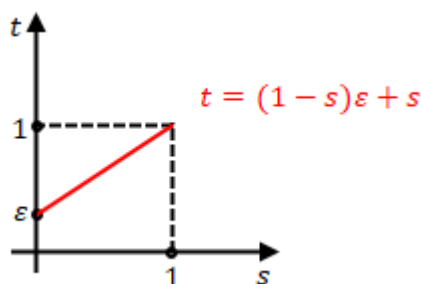


Рис. 7.4. Отображение отрезка $[0, 1]$ в отрезок $[\varepsilon, 1]$

Пусть

$$F(s, t) = \gamma(((1 - s)\varepsilon + s)t)$$

При $s = 1$ получаем кривую $\gamma(t)$, при $s = 0$ получаем $\gamma(\varepsilon t)$. Так как $t \in [0, T]$, то $\varepsilon t \in [0, \varepsilon T]$ – можно всегда подобрать такое ε , чтобы εT было сколь угодно малым. Таким образом, мы получили маленький начальный отрезок кривой $\gamma(t)$. Для достаточно маленького ε он будет выглядеть как гладкая дуга, которая регулярно гомотопна отрезку.

Итак, если мы отбрасываем условие замкнутости или регулярности, то задача становится неинтересной – все кривые регулярно гомотопны. Отметим еще, что в задаче 1 условие нахождения кривых на плоскости было существенным – если заменить плоскость на другую поверхность, то вообще говоря, утверждение задачи будет неверным. Например, если рассматривать кривые на плоскости с дыркой (выброшенной точкой), то кривые, указанные на рисунке 7.5, не будут регулярно гомотопны, так как число оборотов вокруг выброшенной точки – инвариант, сохраняющийся при гомотопии.



Рис. 7.5. Кривые на плоскости с выброшенной точкой, не являющиеся регулярно гомотопными

А вот утверждение задачи 2 верно в любом связном топологическом пространстве (процедура, описанная в решении, никак не учитывает, где мы находимся).

Можно рассмотреть гомотопию с фиксированными концами (в процессе гомотопии начальная и конечная точки кривой остаются на месте). Тогда определение регулярных гомотопных кривых изменится на:

Определение. Пусть $\gamma_0, \gamma_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – регулярные кривые, такие, что $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = P$ и $\gamma_0(T) = \gamma_1(T) = Q$ (т.е. начало и конец кривых совпадают). Они называются регулярно гомотопными с фиксированными концами, если существует отображение F (зависящее от двух параметров – параметра гомотопии $s \in [0, 1]$ и параметра на кривой $t \in [0, T]$) в плоскость:

$$F: [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

такое, что:

- 1) F – гладкое отображение,
- 2) $F(0, t) = \gamma_0(t)$, $F(1, t) = \gamma_1(t)$,
- 3) $\forall s \in [0, 1]$ кривая $\gamma_s(t) = F(s, t)$ регулярна и $\gamma_s(0) = P$, $\gamma_s(T) = Q$.

Задача 3. Доказать, что любые две регулярные кривые на плоскости с началом в точке P и концом в точке Q регулярно гомотопны с фиксированными концами.

Решение.

Не будем выписывать явные формулы, как в задачах 1 и 2, поясним эффект на рисунке – докажем, что любая регулярная кривая γ_1 с началом в точке P и концом в точке Q регулярно гомотопна отрезку γ_0 .

Будем использовать доказательство теоремы Уитни: если бы кривая γ_1 была замкнута (мысленно дополним ее до замкнутой), то мы можем регулярной гомотопией свести ее к одной из кривых, изображенных на рис. 7.6 (из теоремы Уитни следует, что любая замкнутая регулярная кривая регулярно гомотопна окружности с несколькими петельками):

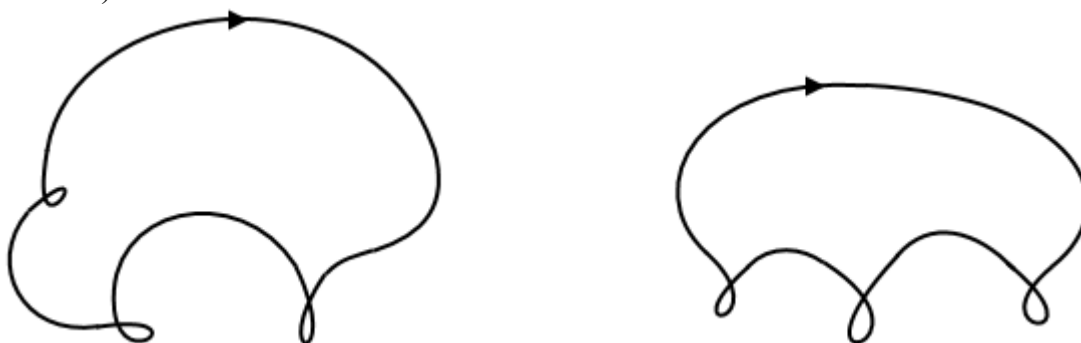


Рис. 7.6. Кривые, к которым можно свести любую замкнутую регулярную кривую

Строго говоря, при доказательстве теоремы Уитни мы не следили за тем, чтобы концы были фиксированными, но это не существенно – можно немного видоизменить доказательство и считать, что в процессе регулярной гомотопии кривая проходит через две фиксированные точки.

Тогда чтобы доказать утверждение задачи 3, нужно доказать, что можно устранять эти петельки – в конце концов получится кривая, которая регулярно гомотопна отрезку.

Процесс устранения петельки показан на рис. 7.7:

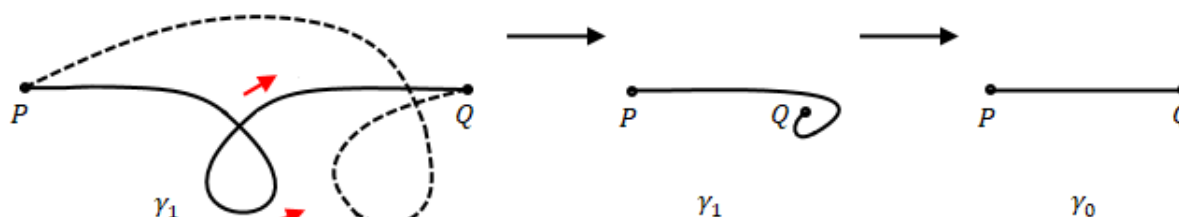


Рис. 7.7. Устранение петли

Таким образом, мы доказали, что любые две регулярные кривые на плоскости с началом в точке P и концом в точке Q регулярно гомотопны с фиксированными концами.

На этом закончим обсуждать различные определения гомотопии и перейдем к обсуждению корректности определения числа вращения. Мы определяли число вращения как

$$\frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{2\pi} = R(\gamma) \in \mathbb{Z}$$

В этом выражении фигурирует однозначная функция $\varphi(t)$, но вообще говоря, $\varphi(t)$ определено с точностью до 2π . То есть, строго говоря, нужно использовать разные обозначения:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}(t) \bmod 2\pi,$$

где $\hat{\varphi}(t)$ – многозначная функция, т.е. множество чисел вида $\hat{\varphi}(t) = \{a(t) + 2\pi k\}$.

Если изображать $\hat{\varphi}(t)$ в виде графика, то каждому числу на отрезке $[0, T]$ соответствует набор чисел, разность между которыми кратна 2π . Утверждается, однако, что мы можем соединить эти точки таким образом, чтобы получилась некая непрерывная функция $\varphi(t) \in \hat{\varphi}(t)$. Эта функция строится однозначно с точностью до добавления числа, кратного 2π . Функция $\varphi(t)$ называется непрерывной ветвью многозначного отображения $\hat{\varphi}(t)$:

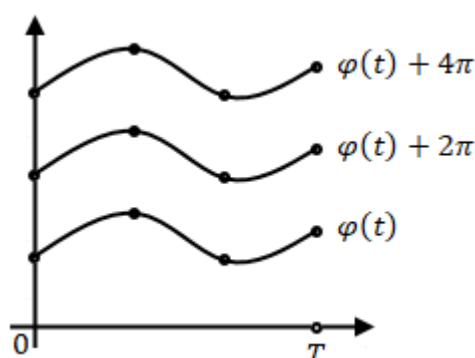


Рис. 7.8. Функция $\varphi(t)$

Действительно, в каждой точке кривой $\gamma(t)$ рассмотрим вектор скорости

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}, \quad \operatorname{ctg} \varphi(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)},$$

поэтому

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} + \pi k,$$

или

$$\varphi(t) = \operatorname{arcctg} \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} + \pi m.$$

- в окрестности любой точки кривой $\gamma(t)$ можно использовать по крайней мере одно из этих выражений.

Чтобы понять, что можно выделить непрерывную ветвь $\varphi(t)$, докажем следующие утверждения:

- 1) у любой точки $t \in [0, T]$ есть окрестность, в которой можно выделить однозначную ветвь (т.е. существует $\varphi(t)$).

Действительно, в точке $t \in [0, T]$ можно выбрать какое-то значение из множества $\hat{\varphi}(t)$ – оно задается формулой (для фиксированного числа k , или m):

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} + \pi k$$

или

$$\varphi(t) = \operatorname{arcctg} \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} + \pi m$$

Выбранное выражение в окрестности точки t будет задавать гладкую функцию.

- 2) Если фиксировать $\varphi(t_0)$ для t_0 , то такая функция (как в пункте 1) $\varphi(t)$ в окрестности t_0 единственна.

Действительно, если можно выбрать две функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, из множества $\hat{\varphi}(t)$, заданные в окрестности t_0 , тогда их разность кратна 2π :

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 2\pi k$$

Т.е. их разность – это константа. Так как $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ принимают в точке t_0 одинаковые значения, то эта константа равна 0.

Итак, получается, что у любой точки мы можем выбрать окрестность, в которой можем однозначно выделить непрерывную ветвь, если однозначно фиксируем значение в данной точке.

Теперь осталось понять, что мы можем эту непрерывную ветвь расширить на весь отрезок.

- 3) Выбрав $\varphi(t)$ на маленьком интервале, мы однозначно можем продолжить эту функцию на весь отрезок $[0, T]$.

Действительно, будем продолжать ее, пока это возможно. Рассмотрим a – супремум правых концов интервалов, на которые продолжается $\varphi(t)$. Для точки a также существует интервал, на котором мы можем построить непрерывную функцию, которая принимает значения из множества $\hat{\varphi}(t)$.

На пересечении интервалов с центрами в точках t_0 и a получим две непрерывные функции, которые отличаются на константу вида $2\pi k$. Выбирая $k = 0$, мы можем склеить функции – это противоречит тому, что a – супремум правых концов интервалов, значит, $\varphi(t)$ однозначно продолжается на весь отрезок $[0, T]$.

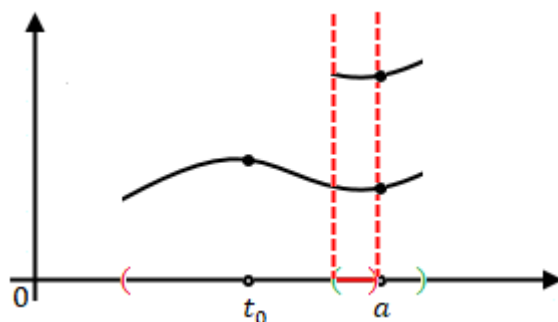


Рис. 7.9. Продолжение функции $\varphi(t)$

Таким образом, число вращения определено корректно.

Обсудим, когда кривые будут регулярно гомотопны, если они находятся на произвольной поверхности. На лекциях обсуждались случаи плоскости, цилиндра и сферы.

Сфера: любая замкнутая регулярная кривая на сфере регулярно гомотопна либо окружности, либо “восьмерке” (направление обхода не важно).

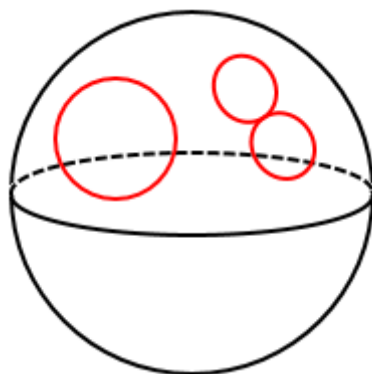


Рис. 7.10. Замкнутые регулярные кривые на сфере

Тор: на лекциях рассматривался цилиндр – помимо числа вращения для цилиндра вводилось число, которое можно назвать числом оборотов вокруг оси цилиндра. Для тора ситуация аналогичная: помимо числа вращения вводятся еще два числа (число

оборотов вокруг параллели и вокруг меридиана). Таким образом, для тора полный набор инвариантов состоит из трех чисел.

Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$: одна из моделей проективной плоскости – двумерный диск, у которого на границе склеены диаметрально противоположные точки. Другая модель – сфера, у которой также склеены диаметрально противоположные точки. Можно рассматривать кривые на проективной плоскости, используя эти модели.

Образом каждой точки $t \in [0, T]$ является точка проективной плоскости, которая изображается двумя точками на сфере. Поэтому в этой модели существует два типа замкнутых регулярных кривых: либо конечная точка кривой совпадает с начальной, либо с диаметрально противоположной.

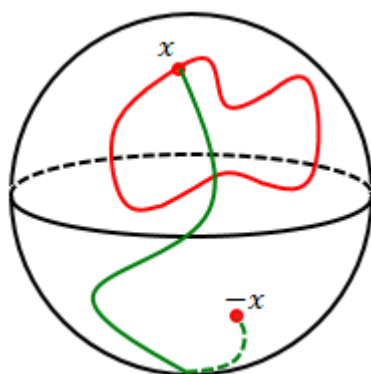


Рис. 7.11. Типы замкнутых регулярных кривых на проективной плоскости (модель сферы)

Кривые, принадлежащие разным типам, не являются регулярно гомотопными. Проще понять это, используя модель диска: для кривой на рис. 7.12, у которой начальная и конечная точка совпадают, окрестность гомеоморфна кольцу, а для кривой на рис. 7.12, у которой начальная и конечная точка диаметрально противоположны, окрестность гомеоморфна листу Мёбиуса. В процессе гомотопии топологический тип окрестности регулярной кривой не меняется.

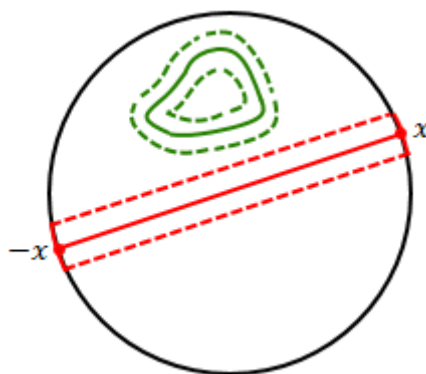


Рис. 7.12. Типы замкнутых регулярных кривых на проективной плоскости (модель диска)

Если кривая устроена более сложно, используем свойство кривых, которое в процессе гомотопии не будет меняться: рассмотрим вектор, линейно независимый с вектором скорости кривой, и будем эти два вектора при движении точки по кривой деформировать таким образом, что второй вектор все время будет оставаться линейно независимым с вектором скорости. Когда мы вернемся в начальную точку, то вектор скорости будет совпадать с начальным положением, а второй вектор будет направлен в ту или иную часть поверхности (в зависимости от типа кривой), на которую маленькая окрестность начальной точки делится кривой.

Это свойство в процессе регулярной гомотопии не меняется (очевидно, что оно не меняется при малых изменениях кривой, но если некоторое свойство сохраняется на любом маленьком интервале, то оно сохраняется и на всем отрезке).

Дальше, рассуждая примерно так же как для сферы, мы приходим на проективной плоскости к четырем случаям: любая замкнутая регулярная кривая регулярно гомотопна одной из четырех кривых, изображенных на рис. 7.13:

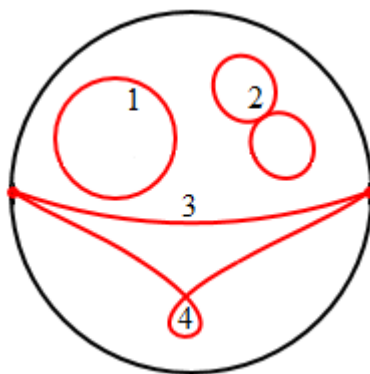


Рис. 7.13. Типы замкнутых регулярных кривых на проективной плоскости

Для кривых 1 и 2 типа рассуждения аналогичны тем, которые мы использовали на лекциях в случае сферы, для кривых 3 и 4 типа рассуждения похожи – сводим все к кривым с петельками, закрученными в разные стороны, затем их взаимно уничтожаем. В случае проективной плоскости (в отличие от плоского случая) взаимно уничтожаются и петельки, закрученные в одну сторону: регулярной гомотопией можно петлю протянуть вдоль кривой и она изменит свое направление – таким образом, получаем кривые 3 и 4 типа (петелька либо одна, либо отсутствует).

Существует общая теорема для двумерных поверхностей, описывающая классы регулярной гомотопности замкнутых регулярных кривых.

Краткое содержание: для любой двумерной поверхности мы можем рассмотреть трехмерное многообразие, которое будет состоять из точек, являющихся парами: точка x двумерной поверхности и единичный вектор v , касательный к этой поверхности (можно считать, что это единичный вектор скорости некой кривой, лежащей на поверхности).

Если $\gamma(t)$ – кривая в M^2 , то по ней можно построить кривую $\hat{\gamma}(t)$, лежащую в $\hat{M}^3$:

$$\hat{\gamma}(t) = \left(\gamma(t), \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right)$$

Утверждение: две замкнутые регулярные кривые на M^2 будут регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда соответствующие им кривые в $\hat{M}^3$ будут гомотопны.

Исследовать, гомотопны ли кривые (без условия регулярности) проще. Более того, оказывается, что классы эквивалентности замкнутых кривых с точностью до обычной гомотопии, образуют группу. Элементы этой группы и задают нам классы замкнутых регулярных кривых на исходной поверхности. Для плоскости это группа $\mathbb{Z}$, для сферы – это группа $\mathbb{Z}_2$, для проективной плоскости – группа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и т.д.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У