



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ. ЛЕКЦИИ

ОШЕМКОВ
АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Оглавление

Лекция 1. Графы. Непрерывные отображения.	5
Графы	5
Комбинаторное описание графов	6
Геометрическое описание графов	6
Задача	10
Лемма (о первой точке)	11
Лекция 2. Графы. Вложение графов в плоскость.	13
Задача	13
Задача	14
Теорема	14
Лекция 3. Теорема Жордана.	20
Теорема Жордана для ломаных	20
Лемма о четырех точках	25
Задача	28
Теорема Жордана	28
Лекция 4. Формула Эйлера для плоских графов. Многогранники.	31
Формула Эйлера для плоских графов	31
Теорема	31
Задача	31
Задача (обобщение формулы Эйлера на случай не связных графов)	34
Теорема (Понтрягина-Куратовского)	35
Задача	35
Многогранники	35
Лекция 5. Многогранники. Выпуклые многогранники.	37
Теорема	38
Задача	40
Теорема (формула Эйлера для выпуклого многогранника)	42
Лекция 6. Правильные многогранники. Теорема Коши.	46
Классификация правильных многогранников	46
Теорема	48
Многоугольники на сфере и многогранные углы	48
Теорема Коши (о жесткости выпуклых многогранников)	51

Теорема Коши.....	52
Лемма Коши.....	53
Лекция 7. Теорема Коши. Теорема Минковского.....	56
Лемма 1.....	56
Лемма 2.....	58
Доказательство (схема) теоремы Коши для нестрогих выпуклых многогранников.....	63
Теорема (Сабитова).....	65
Теорема Минковского.....	68
Лекция 8. Площадь и объем (третья проблема Гильберта).....	69
Случай плоскости.....	69
Теорема (Бойяи-Гервин).....	69
Случай пространства.....	70
Теорема (Ден).....	70
Задача.....	71
Теорема (Хадвигер).....	72
Теорема (Сидлер).....	79
Задача.....	79
Лекция 9. Топологические пространства.....	80
Задача.....	82
Непрерывность отображений.....	82
Задача.....	83
Задача.....	83
Задача.....	84
Задача.....	84
Задача.....	84
Задача.....	85
Лекция 10. Топологические пространства. Двумерные многообразия.....	86
Двумерные многообразия.....	90
Фактор-топология.....	95
Лекция 11. Двумерные многообразия. Теорема классификации.....	97
Теорема.....	98
Эйлерова характеристика.....	104
Теорема.....	105
Лекция 12. Ориентируемость многообразий. Связная сумма многообразий.....	107

Ориентируемость	107
Задача	109
Задача	110
Задача	112
Теорема (“переформулировка” теоремы классификации)	113
Задача	116
Задача	116
Лекция 13. Замкнутые регулярные кривые.	117
Задача	120
Задача	123
Задача	124
Задача	124
Задача	125
Теорема (Уитни)	128
Лекция 14. Замкнутые регулярные кривые на плоскости и на сфере.....	132
Регулярные замкнутые кривые на двумерной сфере	138
Теорема.....	140
Лекция 15. Замкнутые регулярные кривые на цилиндре. Кристаллографические группы.	141
Замкнутые регулярные кривые на цилиндре.....	141
Теорема.....	144
Задача	144
Кристаллографические группы на плоскости	147
Теорема (Шаля)	147
Задача	151
Лекция 16. Кристаллографические группы. Область Дирихле.....	153
Теорема.....	154
Задача	159
Задача	159
Лекция 17. Кристаллографические группы на плоскости.....	163
Теорема.....	167
Теорема.....	170
Лекция 18. Кристаллографические группы на плоскости. Арифметические классы.	173
Теорема.....	176

Список кристаллографических групп на плоскости.....	177
Теорема.....	183

Лекция 1. Графы. Непрерывные отображения.

Наш курс называется “Наглядная геометрия и топология”. Приведем пример задачи, которые мы будем рассматривать.

Рассмотрим компактные двумерные поверхности: сфера, тор, ... Любая замкнутая кривая на сфере стягивается в точку. На других поверхностях (например, на торе) это уже не так. Оказывается, это характеристическое свойство сферы.

Аналогичный вопрос был поставлен для трехмерных многообразий (т.н. гипотеза Пуанкаре): доказать, что если на компактном трехмерном многообразии любая кривая стягивается в точку, то это сфера S^3 .

Доказательство в двухмерном случае достаточно простое, а проблема Пуанкаре была решена российским математиком Григорием Перельманом только в начале 21 века.

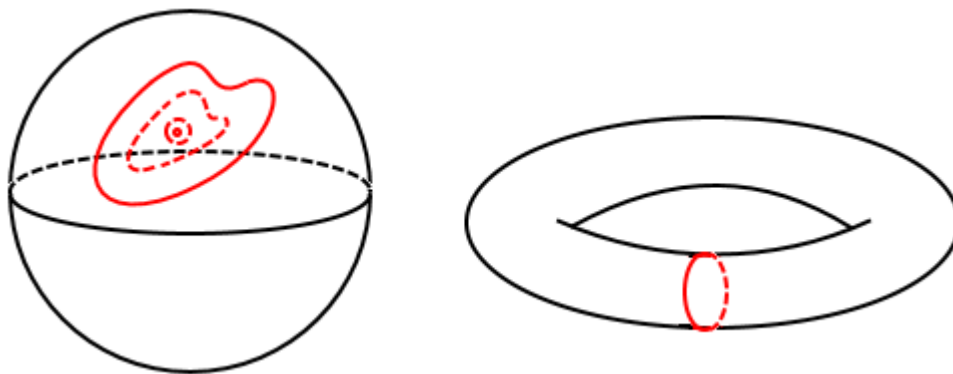


Рис. 1.1. Кривые на сфере и торе

Графы.

Считается, что впервые графы стал изучать Эйлер, решая задачу о кенигсбергских мостах (можно ли прогуляться по всем семи мостам, изображенным на рис. 1.2, пройдя по каждому ровно один раз):

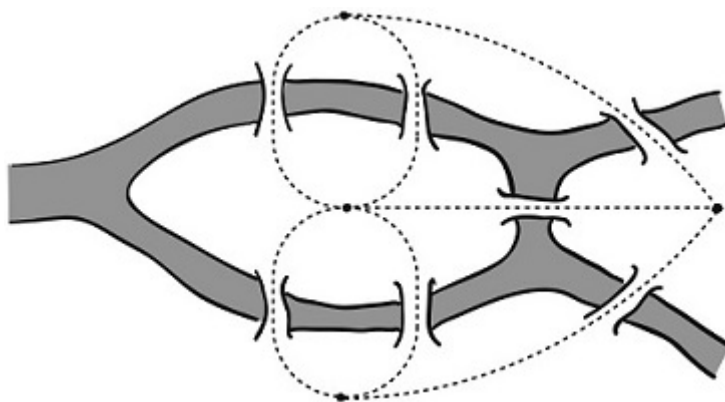


Рис. 1.2. Кёнигсбергские мосты

Решая ее, он рассуждал следующим образом: отметим на каждом куске суши по точке, и соединим отрезками те куски суши, между которыми есть мост. Получится следующее:

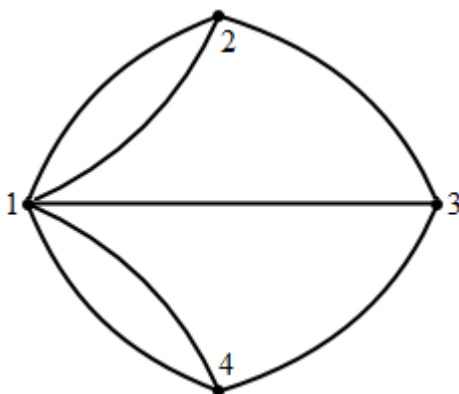


Рис. 1.3. Граф задачи о кёнигсбергских мостах

Позднее такие объекты были названы графами. Вопрос задачи переформулируется следующим образом: можем ли мы, стартуя с какой-то вершины, пройти по всем ребрам графа ровно один раз, и вернуться в исходную точку.

Оказалось, что этого сделать нельзя. Критерий обхода: все вершины графа должны иметь четную степень (степень вершины – это количество ребер, выходящих из нее).

В дальнейшем графы оказались очень полезными в разных областях науки.

Комбинаторное описание графов.

Чтобы описать граф, не обязательно его рисовать, достаточно задать количество вершин, и указать, какие из них соединены ребрами:

V – конечное (непустое) множество, элементы которого будем называть вершинами.

E – конечный набор неупорядоченных пар вершин, элементы которого мы будем называть ребрами (иногда мы будем рассматривать и упорядоченные пары вершин – т.н. ориентированный граф).

Например, для графа на рис. 1.3:

$$V = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$E: (1, 2), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4), (1, 4), (3, 4).$$

Если какой-то элемент в наборе E встречается k раз, то говорят, что это – ребро кратности k . Пара вида (n, n) называется петлей. Степень вершины i – это количество раз, которое i встречается в наборе E .

Геометрическое описание графов.

При комбинаторном подходе мы не рассматриваем точки на ребре графа – мы знаем только, какие вершины соединены ребром. Такой подход не всегда удобен. Например,

если рассмотреть граф, состоящий из одной вершины и одного ребра (петля), то с точки зрения комбинаторики, это – множество V из одного элемента и одна пара, в которой этот элемент два раза встречается.

Если же мы рассматриваем его как геометрический объект, то не совсем понятно, как на комбинаторном языке описать, например, отображение симметрии (рис. 1.4):

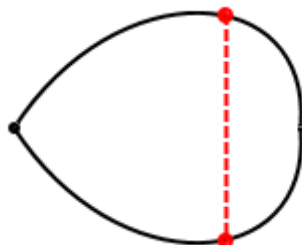


Рис. 1.4. Симметрия графа, состоящего из одной вершины и одного ребра

В дальнейшем мы будем обсуждать возможность вложения графа в плоскость (т.е. можно ли нарисовать граф на плоскости без самопересечений) – в подобных задачах необходимо следить, куда отображаются точки, принадлежащие ребрам графа. Также мы будем рассматривать непрерывные отображения графов, поэтому вначале необходимо строго определить понятие непрерывного отображения.

Определение. Функция f непрерывна в точке x_0 , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

То есть, для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено $f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

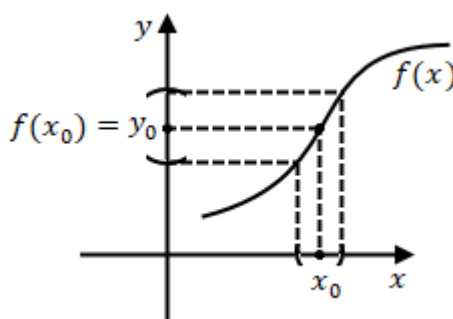


Рис. 1.5. Непрерывность функции в точке

Немного видоизменим определение непрерывности (дадим его в терминах окрестностей).

Определение. Функция f непрерывна в точке x_0 , если для любой окрестности W точки $f(x_0) = y_0$ существует окрестность U точки x_0 , такая, что $f(U) \subset W$.

Приведенные определения равносильны, но второе определение непрерывности более универсально – его можно обобщить на отображение произвольных пространств X и Y , в которых определены окрестности точек.

Если рассматривать граф как множество точек, и для каждой точки графа определить окрестность, то можно говорить о непрерывном отображении графа (например, в плоскость), или рассматривать функции на графе и т.д.

Забегая вперед, отметим, что способ определить, что такое непрерывное отображение – это один из способов задания топологии.

Замечание. Под отрезком мы понимаем множество чисел

$$\{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Далее, когда мы будем говорить про отрезок, во-первых, нам будет неважно, в каких точках расположены его концы, во-вторых, если в рассуждении упоминается несколько отрезков, то будем считать, что каждый из них мы рассматриваем на отдельном экземпляре числовой прямой (т.е. не имеет смысла говорить об их возможном пересечении). Нам будут важны только некоторые топологические свойства отрезка, известные из матанализа (например, что непрерывная функция достигает на отрезке своего максимума и минимума).

Определение. Граф – это набор (V, E, ∂) , где V – непустое конечное множество (вершин), E – конечный набор отрезков, ∂ – отображение из множества концов отрезков из E в множество V (“приклеивание” отрезков).

Таким образом, граф имеет два типа точек:

- вершины (элементы V),
- внутренние точки ребер (отрезки).

При этом:

- окрестность внутренней точки ребра – интервал,
- окрестность вершины v – объединение окрестностей всех точек из $\partial^{-1}(v)$ и самой вершины.

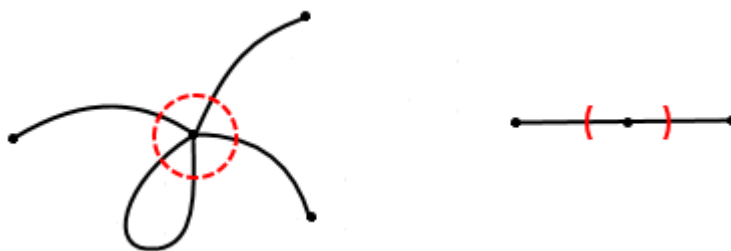


Рис. 1.6. Окрестности точек в графе

Напоминание: в отрезке $[a, b]$ окрестность вершины a – полуинтервал $[a, a + \varepsilon)$. То есть, в отрезке на числовой прямой также есть два типа точек – внутренние и концевые, у которых окрестности выглядят по-разному.

Теперь мы можем определить, что такое непрерывные отображения графов. Мы будем рассматривать отображения графов в прямую, плоскость, пространство.

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с обычной метрикой, т.е. расстояние между точками $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ определим как

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

В качестве окрестности точки P будем рассматривать открытый шар с центром в точке P радиуса ε :

$$B_{P, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(P, x) < \varepsilon\}$$

Если $\rho(P, x) \leq \varepsilon$, то шар называется замкнутым. Аналогично определяется открытый и замкнутый шар в произвольном метрическом пространстве. В частности, открытый шар на прямой – это интервал с центром в точке P длины 2ε .

Итак, мы определили, что такое окрестность на прямой, плоскости, на графе. Теперь дадим определение непрерывного отображения.

Определение. Пусть в пространстве X и Y заданы окрестности точек, причем для любой точки пересечение двух ее окрестностей тоже является ее окрестностью. Тогда отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности W точки $f(x_0) = y_0$ существует окрестность U точки x_0 , такая, что $f(U) \subset W$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке.

Введем еще несколько важных понятий.

Определение. Подмножество A в пространстве X (в котором заданы окрестности точек) называется открытым, если вместе с каждой точкой $a \in A$ оно содержит некоторую ее окрестность, т.е. если $a \in A$, то $\exists$ окрестность U точки a (в X), такая, что $U \subset A$.

Определение. Подмножество A в пространстве X (в котором заданы окрестности точек) называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus A$ открыто в X .

Важно понимать, что является ли какое-то подмножество точек открытым, или замкнутым, зависит от того, в каком объемлющем пространстве мы его рассматриваем.

Пример.

1) $X = \mathbb{R}$, $[a, b] = A$.

В этом примере отрезок $[a, b] = A$ не является открытым в X . Действительно, любая окрестность точки b целиком не содержится в A (но отрезок $[a, b]$ является замкнутым в X – какую бы точку вне отрезка мы ни взяли, всегда можно выбрать интервал с центром в этой точке, не пересекающийся с отрезком).

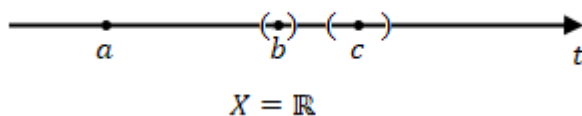


Рис. 1.7 Отрезок $[a, b]$ не является открытым множеством в $\mathbb{R}$

2) $X = [a, b]$, $[a, b] = A$.

В этом примере множество $[a, b] = A$ является открытым в X . Действительно, любая окрестность любой точки будет содержаться в A , потому что $A = X$.

Теперь перейдем к вопросам, связанным с вложением графов в плоскость. Прежде чем рассматривать отображения произвольных графов, рассмотрим отображение отрезка (его можно рассматривать как граф с двумя вершинами и одним ребром) в плоскость – получим кривую.

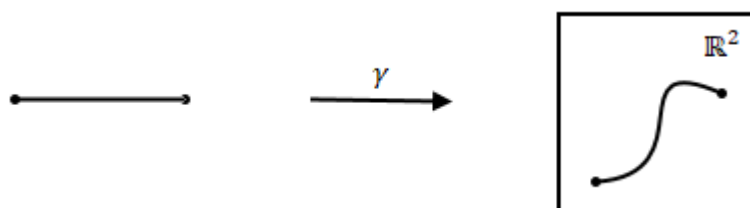


Рис. 1.8. Кривая – отображение отрезка в плоскость

Определение. Непрерывная кривая (на плоскости) – это непрерывное отображение отрезка (в плоскость).

Обычно кривой называют образ такого отображения, но формально, кривая – это отображение, а его образ – это некая линия, которая получилась в результате этого отображения. То есть, выражение “точка лежит на кривой” означает, что точка принадлежит образу этого отображения.

Задача. Рассмотрим кривую $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Доказать, что кривая γ непрерывна тогда и только тогда, когда функции $x(t)$ и $y(t)$, задающие эту кривую, непрерывны на $[a, b]$.

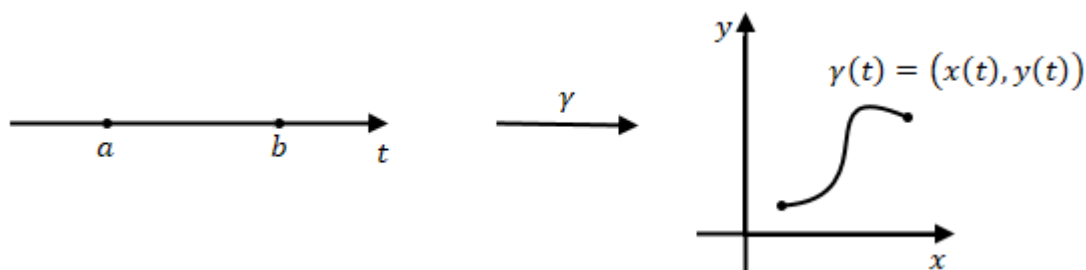


Рис. 1.9. Непрерывность кривой, заданной в координатах

Докажем некоторые свойства непрерывных кривых.

Утверждение. Если $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывная кривая, то ее образ – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^2$.

Доказательство.

Нужно доказать, что для любой точки P , не принадлежащей образу кривой γ , существует окрестность U , которая не пересекается с образом γ .

Рассмотрим функцию f на $[a, b]$ (расстояние от точки до кривой):

$$f(t) = \rho(P, \gamma(t))$$

Эта функция непрерывна на $[a, b]$, а значит, достигает минимума $c = \min_{[a, b]} f > 0$ ($c > 0$, так как точка P не лежит в образе кривой). Рассмотрим круг радиуса, меньшего c , с центром в точке P (например, $U = B_{P, c/2}$) – получим окрестность U , которая не пересекается с образом γ , что и требовалось.

Лемма (о первой точке). Пусть A – замкнутое подмножество плоскости, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывная кривая, такая что $\gamma(a) = P \notin A$, а $\gamma(b) = Q \in A$. Тогда существует “первая точка” на γ , принадлежащая A , то есть, $\exists t_0 \in [a, b]: \gamma(t_0) \in A$ и $\gamma(t) \notin A$ для любого $t < t_0$.

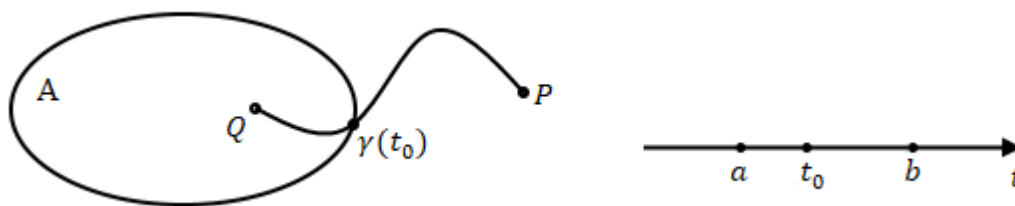


Рис. 1.10. К лемме о первой точке

Доказательство.

Рассмотрим множество

$$T = \{t \mid \gamma(s) \notin A \forall s \in [a, t]\},$$

то есть, рассмотрим такие t , что на всем отрезке $[a, t]$ образы этих точек не лежат в множестве A . Заметим, что:

- T не пусто, так как $a \in T$
- T ограничено

Значит, существует $\sup T = c$ (при этом $c \neq b$, так как $\gamma(b) \in A$). Теперь поймем, принадлежит ли точка $\gamma(c)$ множеству A .

Если $\gamma(c) \notin A$, то (поскольку A замкнутое), существует окрестность U точки $\gamma(c)$, такая что $U \cap A = \emptyset$. Так как кривая γ непрерывна, существует окрестность $V = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

такая что при отображении γ весь этот интервал попадает внутрь окрестности U : $\gamma(V) \subset U$, то есть, $\forall t \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$: $\gamma(t) \notin A$. Это означает, что $c \neq \sup T$ – противоречие, значит, $\gamma(c) \in A$.

В качестве t_0 выберем c . Действительно, по доказанному выше, $\gamma(c) \in A$, также по определению множества T , для всех $t < c$ выполнено $\gamma(t) \notin A$.

Лекция 2. Графы. Вложение графов в плоскость.

Напоминание: V – множество вершин графа, E – набор отрезков, ∂ – отображение из множества концов отрезков из E в множество V .

Определение. Степень вершины – это количество элементов в $\partial^{-1}(v)$.

Определение. Путь в графе – это непрерывное отображение отрезка в граф (непрерывная кривая в графе), начальная и конечная точки которого – вершины графа. Путь в графе называется замкнутым, если его начало и конец совпадают.

Определение. Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить путем.

Определение. Замкнутый путь назовем циклом, если все его точки самопересечения являются вершинами графа (при этом тривиальный путь $\gamma(t) \equiv v \ \forall t$ – когда весь отрезок отображается в вершину, не будем называть циклом).

Определение. Связный граф без циклов называется деревом.

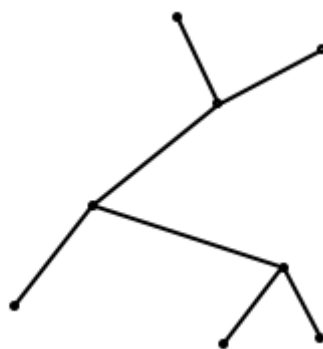


Рис. 2.1. Дерево

Задача. Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда

$$B - P = 1,$$

где B – количество вершин графа, P – количество ребер. Число $B - P$ называется эйлеровой характеристикой графа.

Определение. Непрерывное отображение графа G в плоскость называется вложением, если при этом отображении никакие две различные точки графа не переходят в одну точку плоскости.

Определение. Граф называется планарным, если существует его вложение в плоскость.

Например, графы K_5 и $K_{3,3}$ (изображенные на рис. 2.1 слева и справа соответственно) не являются планарными:



Рис. 2.2. Графы K_5 и $K_{3,3}$

Определение. K_n – полный граф на n вершинах, т.е. граф, каждые две вершины которого соединены ребром.

Определение. $K_{m,n}$ – двудольный граф, т.е. граф, все вершины которого можно разбить на две группы так, что каждое ребро графа соединяет вершину из первой группы с вершиной из второй группы, при этом вершины из одной группы не имеют общих ребер.

Задача. Доказать, что любой граф можно вложить в $\mathbb{R}^3$.

Определение. Плоский граф – это граф, вложенный в плоскость.

Прежде чем дать критерий планарности графа, докажем следующее утверждение:

Теорема. Если существует (непрерывное) вложение графа в плоскость, то существует и такое его вложение в плоскость, что ребра графа изображаются ломаными.

Доказательство.

Отметим, что верно и более сильное утверждение – ребра графа можно изобразить отрезками, но оно доказывается более сложно и останется за рамками нашего курса.

На первый взгляд, можно рассуждать следующим образом: рассмотрим вложение графа, зафиксируем одно из ребер, и не трогая остальные, заменим его на ломаную. Действуя так для каждого ребра, получим граф, все ребра которого являются ломаными.

Однако, так действовать нельзя – существуют такие вложения графов в плоскость, что нельзя заменить выбранное ребро на ломаную, не меняя при этом других ребер.

Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Эта функция непрерывна на любом отрезке $[0, T]$. Тогда кривая, являющаяся ее графиком, будет непрерывной, так как она задается в координатах непрерывными функциями:

$$\gamma(t) = \left(t, t \cdot \sin \frac{1}{t} \right)$$

Если рассмотреть график этой функции на отрезке $[0, T]$ в качестве одного из ребер графа (на рис. 2.3 изображено красной линией), то несложно привести пример второго ребра (на рис. 2.3 изображено зеленой пунктирной линией) так, чтобы не меняя одно из них, нельзя было второе ребро изобразить ломаной с конечным количеством звеньев.

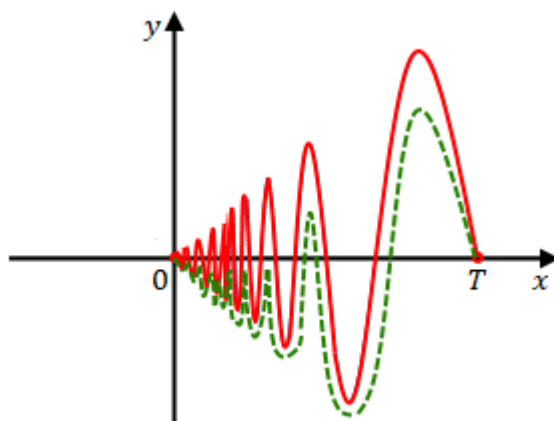


Рис. 2.3. К теореме о изображении ребер графа ломаными

Поэтому доказательство теоремы будет состоять из двух шагов – сначала мы поменяем вложение графа в окрестности вершин, а затем используем идею о последовательном изменении вложения на каждом из ребер.

Пусть граф G не имеет петель.

Шаг 1 (изменение вложения в окрестности вершины).

Рассмотрим вложение графа в плоскость, и для каждой вершины v графа G рассмотрим достаточно маленький замкнутый круг D_v такой что:

- эти круги не пересекаются,
- каждый круг D_v не пересекается с ребрами, не содержащими вершину v .

Это можно сделать, так как образ непрерывной кривой – это замкнутое подмножество плоскости.

Ребро, выходящее из вершины v – это непрерывная кривая, соединяющая некую вершину w с вершиной v . По лемме о первой точке, на этой кривой будет первая точка, принадлежащая замкнутому кругу D_v . Изменим вложение для этого ребра на отрезке после этой первой точки на радиус (соединим первую точку с центром круга D_v , то есть, с вершиной v) – см. рис. 2.4.

Сделаем так для всех ребер.

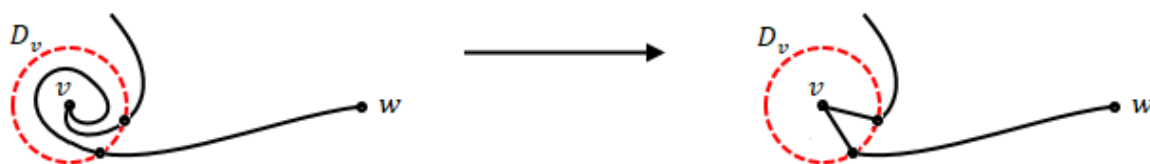


Рис. 2.4. Изменение вложения в окрестности вершины

Шаг 2 (изменение вложения на “средних” частях ребер).

Применим идею, о которой говорилось ранее (ей могло мешать “плохое” поведение ребер в окрестности вершин): если мы для каждого отдельного ребра докажем, что можем поменять вложение, которое было, на ломаную, не трогая остальных ребер, то пройдясь по всем ребрам, докажем теорему.

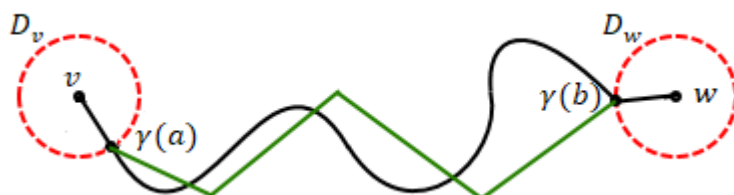


Рис. 2.5. Изменение вложения на “средних” частях ребер

Рассмотрим ребро, соединяющее вершины v и w . “Средняя часть” – это непрерывная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Рассмотрим множество:

$$\{T = t \in [a, b] \mid \gamma(a) \text{ можно соединить ломаной с } \gamma(t) \text{ так, что эта ломаная не имеет самопересечений и не пересекает другие ребра}\}.$$

Для каких-то $t \in [a, b]$ это возможно (например, для $t = a$), поэтому $T \neq \emptyset$. Докажем, что и точка b принадлежит множеству T (идея доказательства: будем понемногу отступать от левого конца отрезка, и в конце концов доберемся в правый конец).

Сначала докажем, что если $t_0 \in T$, то и интервал $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset T$ для некоторого $\varepsilon > 0$ (иными словами, докажем, что множество T является открытым подмножеством отрезка $[a, b]$).

Действительно, рассмотрим на кривой γ точку $\gamma(t_0)$ и замкнутый круг B с центром в этой точке, который не пересекает другие ребра и круги D_v (это возможно, так как образы других ребер – замкнутые подмножества плоскости).

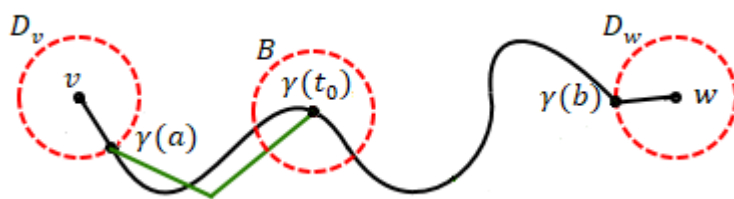


Рис. 2.6. Изменение вложения на “средних” частях ребер

Мы предположили, что $t_0 \in T$, иными словами, существует ломаная, которая идет от точки a до точки t_0 . Тогда мы можем соединить $\gamma(a)$ с любой точкой круга B “хорошей” ломаной (не имеющей самопересечений и не пересекающей других ребер) по ломаной из $\gamma(a)$ в $\gamma(t_0)$ до первой ее точки в круге B и далее по отрезку.

С другой стороны (по определению непрерывности кривой), для круга B существует интервал $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, такой что его образ содержится в этом круге – стало быть, мы доказали, что если $t_0 \in T$, то $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset T$, то есть, T – открытое подмножество в $[a, b]$.

Далее докажем (аналогично), что если $t_0 \notin T$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap T = \emptyset$, то есть, что дополнение $[a, b] \setminus T$ тоже открыто в $[a, b]$.

Предположим, что $\gamma(t_0)$ не принадлежит множеству T (то есть, мы не можем соединить точку $\gamma(a)$ с точкой $\gamma(t_0)$ “хорошей” ломаной). Рассмотрим круг с центром в точке $\gamma(t_0)$, который не пересекается с остальными ребрами, и рассмотрим интервал $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, который при отображении γ целиком попадает в этот круг.

Мы не можем соединить $\gamma(a)$ “хорошей” ломаной с точками из этого интервала, если не можем соединить $\gamma(a)$ с точкой $\gamma(t_0)$ – действительно, иначе дойдем до первой точки круга с центром в точке $\gamma(t_0)$, и далее пройдем до точки $\gamma(t_0)$.

Таким образом, если $t_0 \notin T$, то и $t \notin T$, где $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Тем самым мы доказали, что множества T и $[a, b] \setminus T$ открыты в $[a, b]$. Теперь докажем, что если $T \subset [a, b]$ и $([a, b] \setminus T) \subset [a, b]$ – открытые подмножества в $[a, b]$, то одно из них пусто.

Действительно, рассмотрим

$$\sup\{t \in [a, b] \mid [a, t] \in T\} = c$$

Иными словами, рассмотрим отрезок $[a, b]$, и (поскольку мы знаем, что $a \in T$) будем идти по отрезку, пока мы находимся в множестве T .

Если $c \in T$ и $c \neq b$, то как мы доказали, $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset T$ для $\varepsilon > 0$, а значит, c не является верхней гранью для этого множества. Значит, если $c < b$, то c не может принадлежать T .

Аналогично, если $c \notin T$, т.е. $c \in [a, b] \setminus T$, то $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset [a, b] \setminus T$, то есть, c не является точной верхней гранью, поскольку, например, $c - \varepsilon$ – верхняя грань. Поэтому $c = b$ (так как $[a, b] \setminus T$ открыто и не может состоять только из одной точки – правого конца отрезка).

Завершим доказательство, рассмотрев случай, когда в графе есть петли. Временно забудем про них и рассмотрим граф без петель. Вложим все ребра, которые не являются петлями так, чтобы они изобразились ломаными, а затем в каждой вершине добавим необходимое количество петель, изображенных ломаными (очевидно, это можно сделать).

Можно переформулировать только что доказанную теорему: если не существует вложения графа в плоскость, при котором его ребра изображаются ломаными, то граф не планарный. Таким образом, чтобы доказать, что какой-то граф не планарный, достаточно доказать, что не существует вложения этого графа в плоскость, при котором его ребра изображаются ломаными – мы будем использовать это утверждение в дальнейшем.

Плоский граф G , помимо количества вершин V и количества ребер E , характеризует количество областей, на которые граф разбивает плоскость. Формализуем это понятие.

Для любого подмножества A плоскости отношение:

“точки $P, Q \in A$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в A ”

является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются компонентами линейной связности множества A (или просто компонентами).

В частности, говорят, что множество A линейно связно, если у него одна компонента линейной связности (иными словами, любые две точки в A можно соединить непрерывной кривой, лежащей в A).

Пусть дан плоский граф G . Рассмотрим в качестве множества A плоскость, из которой выброшен граф (вернее, выброшен образ графа при вложении в плоскость): $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Обозначение: Γ – количество компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Количество вершин V , ребер E и компонент Γ связано соотношением, которое мы обсудим позже. Простейший пример соотношения между этими величинами возникает, если рассмотреть граф, состоящий из одной вершины и одного ребра (иначе говоря, если рассмотреть замкнутую непрерывную кривую). Ответ на вопрос, чему равно количество компонент для такого графа (на сколько частей разбивает плоскость такая кривая) дает теорема Жордана (на две компоненты).

Для некоторых простых кривых мы можем доказать этот факт, используя только математический анализ: например, для того, чтобы доказать, что окружность радиуса R разбивает плоскость на две части, достаточно рассмотреть функцию расстояния от точки до центра окружности:

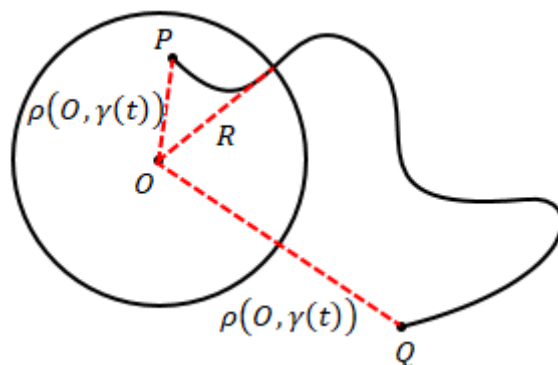


Рис. 2.7. Расстояние от точки кривой до центра окружности

Если $|OP| < R$, то точка P лежит внутри окружности, если $|OQ| > R$, то точка Q лежит вне окружности. Тогда всякая непрерывная кривая, соединяющая точки P и Q , пересечет окружность. Действительно, рассмотрим функцию

$$f(t) = \rho(O, \gamma(t))$$

Эта функция в левом конце отрезка (соответствующем точке P) принимает значение, меньшее R , в правом (соответствующем точке Q) – большее R , значит (это следует из свойств непрерывной функции на отрезке), она принимает все промежуточные значения, поэтому существует точка, в которой $f(t) = R$, а это и означает, что кривая пересекает окружность.

Лекция 3. Теорема Жордана.

Как мы уже выяснили, плоский граф, помимо количества вершин V и количества ребер E , характеризует количество Γ компонент линейной связности $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Для плоского графа эти числа связаны соотношением (формула Эйлера):

$$V - E + \Gamma = 2$$

Вложение в плоскость графа, состоящего из одной вершины и одного ребра – это замкнутая непрерывная кривая.

Из формулы Эйлера (мы докажем ее позже) следует, что $\Gamma = 2$, иными словами, любая замкнутая вложенная непрерывная кривая разбивает плоскость ровно на 2 части – это утверждение носит название теоремы Жордана. Вначале докажем частный случай этой теоремы.

Теорема Жордана для ломаных. Любая замкнутая вложенная ломаная разбивает плоскость ровно на две компоненты.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем, что число компонент ≤ 2 .

Чтобы доказать, что число компонент, на которые замкнутая вложенная ломаная разбивает плоскость, не больше 2, достаточно выбрать нужным образом две точки и доказать, что любую точку плоскости можно соединить с одной из них непрерывной кривой, не пересекающей ломаную.

Выберем на произвольном ребре ломаной точку и рассмотрим круг с центром в этой точке (достаточно маленький, чтобы он пересекался только с внутренними точками ребра, и не пересекался с другими ребрами ломаной). Ребро разбивает круг на две части, в каждой из частей выберем по точке (обозначим их A и B).

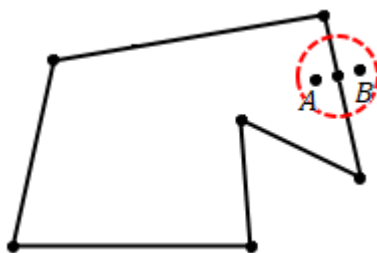


Рис. 3.1. Круг с центром в точке ломаной

Теперь определим понятие “идти вдоль кривой”. Произвольные кривые могут быть устроены достаточно сложно, и для них определить это понятие довольно затруднительно. Для ломаной с конечным числом звеньев это не вызывает проблем.

Для произвольной точки Q на ломаной выберем достаточно маленький круг D_Q (т.е. если Q – точка на ребре, то D_Q пересекается только с внутренними точками ребра, если Q – вершина, то D_Q не пересекается с другими ребрами, кроме двух, выходящих из нее). В каждом таком круге выберем пару точек, лежащих в разных компонентах относительно пары радиусов, на которые они этот круг разбивают.

Здесь мы неявно используем следующий факт: пара радиусов, проведенных в круге, разбивает круг на две части – его можно доказать, не ссылаясь на общую теорему Жордана, например, используя аппарат математического анализа (используя свойства непрерывной функции на отрезке).

Рассмотрим круг, соответствующий вершине, и круг, соответствующий внутренней точке ребра. Несложно понять, что можно выбрать в каждом из кругов пару точек, лежащих в разных частях круга, таким образом, что их можно попарно соединить друг с другом, не пересекая ломаную (выбираем точки достаточно близко к ребру и идем вдоль этого ребра – см. рис. 3.2):

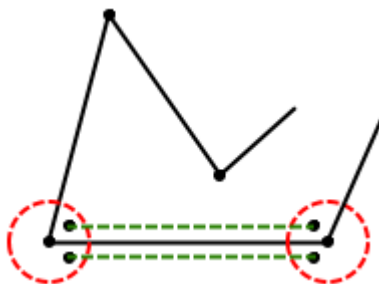


Рис. 3.2. Проход вдоль ребра

Это означает, что если мы сможем соединить произвольную точку P плоскости с одной из точек любого из кругов, соответствующих точкам ломаной, то мы сможем дальше пройти вдоль ломаной (не пересекая ее), и соединить полученную точку либо с точкой A , либо с точкой B – см. рис. 3.3:

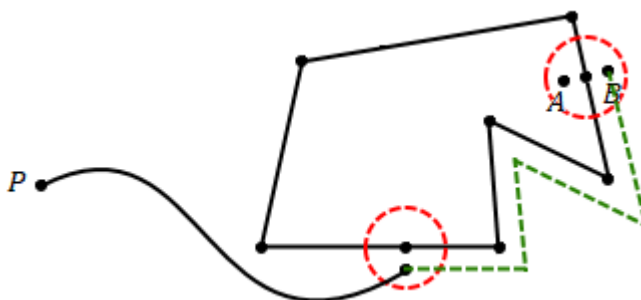


Рис. 3.3. Проход вдоль ломаной

Осталось понять, что точку P можно соединить с какой-то точкой из какого-то круга с центром на ломаной.

Выберем произвольную точку R на ломаной и соединим ее с точкой P отрезком. PR – непрерывная кривая, значит, существует первая точка R' пересечения этой кривой с ломаной (по лемме о первой точке). Рассмотрим круг $D_{R'}$ и на отрезке PR' отступим от точки R' на расстояние ε , меньшее радиуса круга. Из получившейся точки мы можем пойти вдоль ломаной и прийти либо в точку A , либо в точку B – см. рис. 3.4:

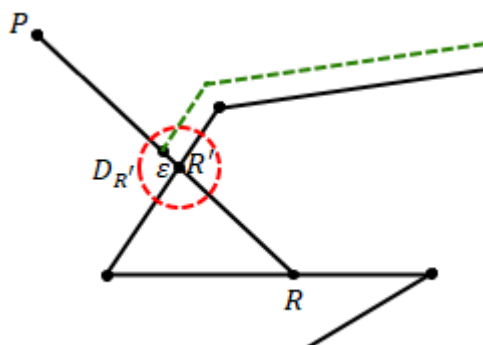


Рис. 3.4. Соединение произвольной точки плоскости с точкой из круга с центром на ломаной

Таким образом, мы доказали, что количество частей, на которые замкнутая ломаная разбивает плоскость, не может быть больше двух. Чтобы доказать, что таких компонент ровно две, осталось понять, что точки A и B , которые мы выбрали, лежат действительно в разных компонентах, то есть, не существует кривой, которая не пересекая ломаную, соединяет точки A и B .

Это утверждение, несмотря на кажущуюся очевидность, существенно использует топологические свойства плоскости – если мы рассмотрим точки A и B на листе Мёбиуса, находящиеся, на первый взгляд, по разные стороны от оси листа Мёбиуса, то пойдя вдоль оси и не пересекая ее, мы сможем прийти из точки A в точку B – см. рис. 3.5:

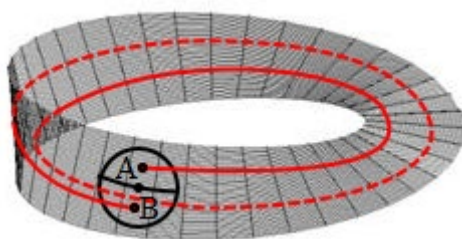


Рис. 3.5. Кривая на ленте Мёбиуса

Шаг 2. Докажем, что число компонент ≥ 2 (есть точки, лежащие в разных компонентах).

Рассмотрим ломаную L и точку $P \notin L$. Возможные варианты пересечения (маленькая окрестность точки пересечения) луча l_P с началом в точке P с ломаной L указаны на рис. 3.6:

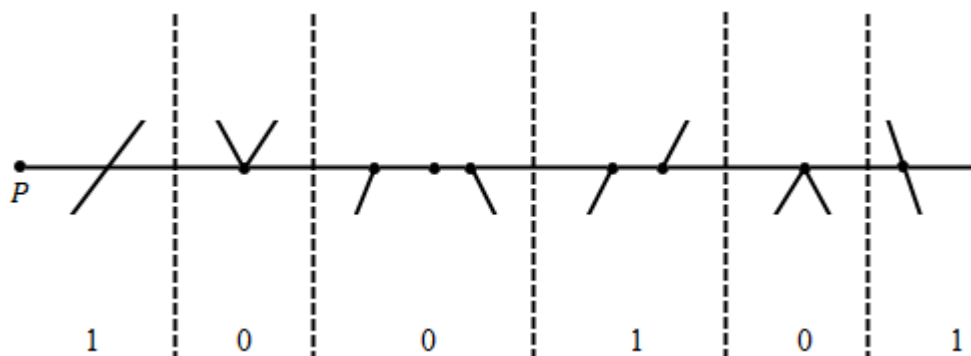


Рис. 3.6. Возможные варианты пересечения луча l_P с ломаной L

Построим инвариант (грубо говоря, посчитаем четность количества пересечений луча l_P с ломаной L , но в случае, когда l_P идет по ребру L , мы получим бесконечное множество точек пересечения, поэтому лучше сказать, что каждому типу пересечения поставим в соответствие 0 или 1, как показано на рис. 3.6).

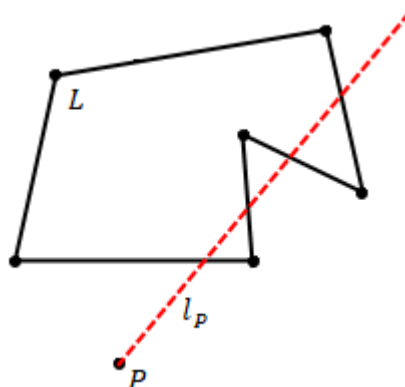


Рис. 3.7. Подсчет пересечений луча l_P с ломаной L

Лучу l_P поставим в соответствие число, которое равно сумме по модулю 2 чисел, соответствующих вариантам пересечения этого луча с ломаной L :

$$\sigma(l_P) = \text{сумма приписанных чисел по модулю 2}$$

Утверждение. $\sigma(l_P)$ не зависит от луча l_P , а только от точки P .

Действительно, при повороте на малый угол φ вокруг точки P число $\sigma(l_P)$ не меняется (видно из рис. 3.7), поэтому функция $\sigma(l_P)$ локально постоянна (если рассматривать ее как функцию от φ).

Но любая локально постоянная функция на отрезке постоянна (доказательство этого несложного утверждения оставляется читателю в качестве упражнения).

Таким образом, мы построили функцию $\sigma(P)$ на $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Эта функция $\sigma(P)$ тоже локально постоянна, то есть, для любой точки $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ существует ее окрестность (круг) U , такая, что $\sigma|_U \equiv \text{const}$.

Значит, функция σ постоянна на каждой компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

Действительно, пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus L$ – произвольная непрерывная кривая, не пересекающая ломаную L . Покажем, что значения функции σ в точках $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ совпадают (это и будет означать, что функция σ постоянна на каждой компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$).

Поскольку кривая γ непрерывна, то (по определению непрерывности) для $\forall t \in [a, b]$ верно следующее: какую бы окрестность W точки $\gamma(t)$ мы ни выбрали, существует интервал $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$, такой что при отображении γ этот интервал целиком попадает в эту окрестность:

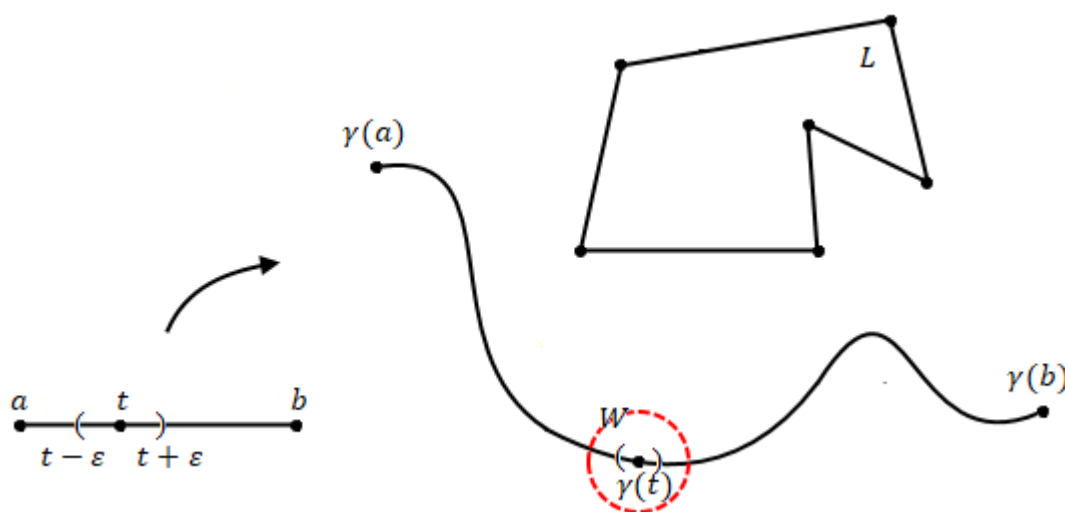


Рис. 3.8. Значения функции σ в точках $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ совпадают

Рассмотрим $f(t)$ – функцию на отрезке $[a, b]$, определяемую равенством

$$f(t) = \sigma(\gamma(t))$$

$f(t)$ локально постоянна (так как значение функции σ в некоторой окрестности точки P постоянно – мы можем вращать луч l_P , а также можем начало луча l_P сдвигать вдоль прямой, содержащей луч – при обеих этих операциях функция $\sigma(P)$ не меняется – действуя таким образом, мы заметем некоторую окрестность точки P на плоскости), поэтому $f(t)$ постоянна на $[a, b]$.

Это означает, что $f(a) = f(b)$, то есть, $\sigma(\gamma(a)) = \sigma(\gamma(b))$.

Итак, мы построили некоторую функцию σ , которая постоянна на каждой компоненте линейной связности. Чтобы доказать, что число компонент, на которые ломаная делит плоскость, не меньше 2, достаточно предъявить две точки, в которых значения этой функции будут разными.

Рассмотрим маленький отрезок P_1P_2 , перпендикулярный ребру ломаной, и не пересекающий другие ребра. Луч с началом в точке P_1 пересекает ломаную ровно на один раз больше, чем луч с началом в точке P_2 , поэтому

$$\sigma(l_{P_1}) \neq \sigma(l_{P_2})$$

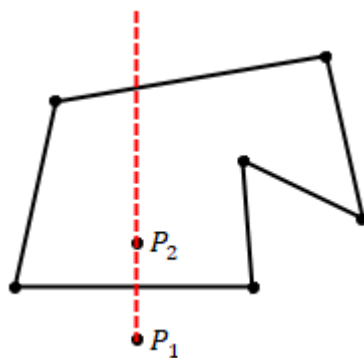


Рис. 3.9. Лучи l_{P_1} и l_{P_2}

Отсюда следует, что число компонент, на которые замкнутая ломаная разбивает плоскость, не меньше 2.

Таким образом, теорема Жордана для ломаных доказана (отметим, что в процессе доказательства мы получили еще и способ различать точки, лежащие в разных компонентах).

Теперь получим следствие из этой теоремы.

Лемма о четырех точках. Пусть L – замкнутая вложенная ломаная, а P, Q, R, S – точки на ней (расположенные в данном порядке). Пусть ломаная δ_1 с концами P и R , и ломаная δ_2 с концами Q и S пересекаются с L только по конечным точкам и расположены в одной из компонент, на которые L разбивает плоскость. Тогда δ_1 и δ_2 пересекаются.

Доказательство.

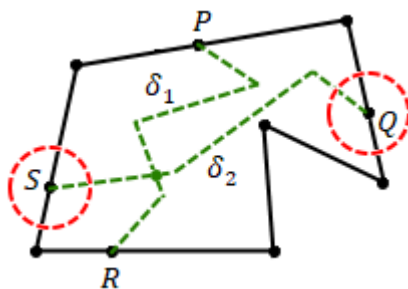


Рис. 3.10. К лемме о четырех точках

Точки P и R разбивают ломаную L на две ломаных: L_1 и L_2 . Пусть $Q \in L_1$. Рассмотрим замкнутую ломаную $\tilde{L}$, образованную L_1 и δ_1 . Выберем точки S', S'' и Q', Q'' в малых

кругах с центрами в S и Q так, как показано на рис. 3.11 (то есть, в разных компонентах, на которые эти круги разбиваются ребрами ломаной).

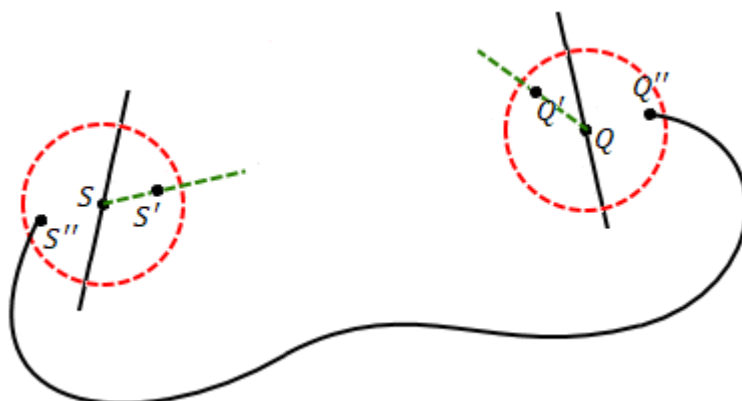


Рис. 3.11. Выбор точек S' , S'' и Q' , Q''

Можно считать, что точки S' и Q' лежат на ломаной δ_2 . Пусть S'' и Q'' расположены в одной компоненте относительно L , не содержащей δ_1 и δ_2 . Тогда:

S'' и Q'' расположены в одной компоненте относительно $\tilde{L}$ (действительно, так как S'' и Q'' расположены в одной компоненте относительно L , значит, их можно соединить какой-то непрерывной кривой, не пересекающей ломаную L , причем эта кривая не пересекает и ломаные δ_1 и δ_2 , поскольку они расположены в другой компоненте. Эта же кривая не пересекает и ломаную $\tilde{L}$, значит, S'' и Q'' расположены в одной компоненте относительно $\tilde{L}$).

Q' и Q'' расположены в разных компонентах относительно $\tilde{L}$ (точки, расположенные по разные стороны от ребра ломаной, лежат в разных компонентах, на которые эта ломаная делит плоскость).

S' и S'' расположены в одной компоненте относительно $\tilde{L}$ (очевидно, их можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей $\tilde{L}$).

Суммируя эти утверждения, получаем, что S' и Q' расположены в разных компонентах относительно $\tilde{L}$.

Итак, S' и Q' расположены в разных компонентах относительно $\tilde{L}$ и соединены ломаной $\widetilde{\delta_2}$ (полученной из ломаной δ_2 выбрасыванием маленьких отрезков SS' и QQ' , то есть, ломаная $\widetilde{\delta_2}$ не пересекается с ломаной L).

Значит, $\widetilde{\delta_2}$ пересекает ломаную $\tilde{L}$, откуда следует, что $\widetilde{\delta_2}$ пересекает ломаную δ_1 (так как $\tilde{L}$ составлена из ломаных $L_1 \in L$ и δ_1 , а с ломаной L она не пересекается).

Но если ломаные $\widetilde{\delta}_2$ и δ_1 пересекаются, то ломаные δ_2 и δ_1 тоже пересекаются, так как $\widetilde{\delta}_2 \in \delta_2$. Лемма доказана.

Из леммы о четырех точках можно вывести следующее утверждение:

Утверждение. Граф $K_{3,3}$ не планарен.

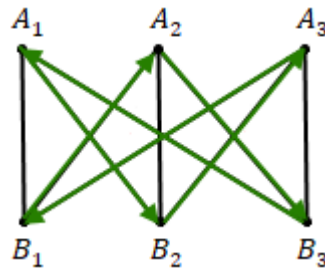


Рис. 3.12. Граф $K_{3,3}$

Доказательство.

Предположим, что нам удалось вложить этот граф в плоскость без самопересечений. Рассмотрим цикл в графе $K_{3,3}$ (см. рис. 3.12):

$$A_1 B_2 A_3 B_1 A_2 B_3 A_1$$

Пусть $K_{3,3}$ вложен в плоскость так, что его ребра являются ломаными. Тогда этот цикл образует замкнутую ломаную, которая делит плоскость на две компоненты.

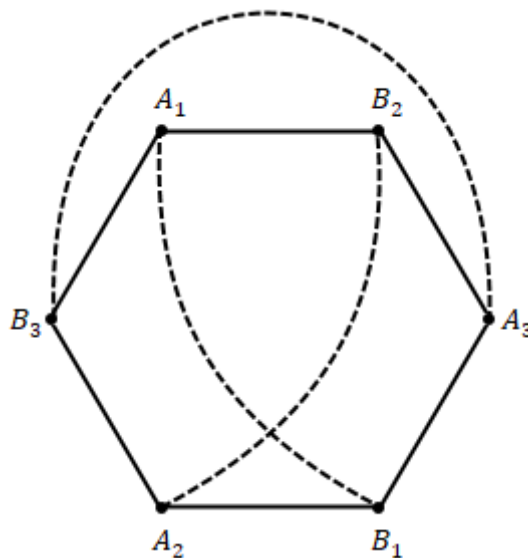


Рис. 3.13. Попытка вложения графа $K_{3,3}$ в плоскость

Из оставшихся трех ребер $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ по крайней мере два расположены в одной компоненте, причем концы этих ребер расположены на цикле в нужном порядке (как в

лемме о 4 точках), поэтому они должны пересекаться, откуда следует, что граф $K_{3,3}$ нельзя вложить в плоскость.

Замечание. То, что граф не планарен, означает, что не существует никакого его вложения в плоскость (а не только такого вложения, при котором его ребра изображаются ломаными). При доказательстве того, что граф $K_{3,3}$ не планарен мы пользовались следующим фактом – если граф планарный, то его можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра изобразились ломаными.

Аналогично доказывается, что граф K_5 не планарен (задача для самостоятельного решения):

Задача. Доказать, что граф K_5 не планарен.

Теперь обсудим теорему Жордана в общей постановке (схематично покажем, что количество компонент не меньше двух).

Теорема Жордана. Любая замкнутая вложенная непрерывная кривая разбивает плоскость ровно на две компоненты.

Доказательство (того, что компонент ≥ 2).

Сведем утверждение теоремы к непланарности графа $K_{3,3}$. Будем считать, что на плоскости введены декартовы координаты.

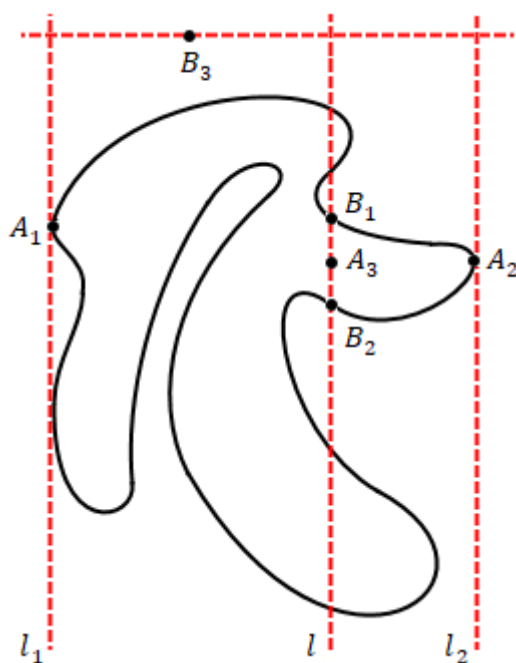


Рис. 3.14. К теореме Жордана

Рассмотрим замкнутую вложенную непрерывную кривую γ на плоскости. Пусть l_1 и l_2 – вертикальные прямые, между которыми расположена кривая γ (то есть, l_1 и l_2 содержат точки кривой, а слева от l_1 и справа от l_2 точек кривой нет) – см. рис.3.14.

Существование таких прямых следует из свойств непрерывной функции на отрезке: функция $x(t)$ достигает своего минимума и максимума, где

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Рассмотрим на прямых l_1 и l_2 “самые верхние” точки, принадлежащие кривой γ (обозначим их A_1 и A_2 соответственно). Существование таких точек следует из того, что образ кривой γ и прямые l_1 и l_2 – это замкнутые подмножества плоскости, значит, их пересечение тоже будет замкнутым подмножеством плоскости (то есть, супремум этого множества ему принадлежит, поэтому “самые верхние” точки принадлежат прямым l_1 и l_2).

Точки A_1 и A_2 разбивают кривую на две части (условно назовем их верхняя и нижняя). Проведем еще одну вертикальную прямую l между прямыми l_1 и l_2 . Из теоремы о промежуточном значении (для функции $x(t)$) следует, что прямая l пересекает кривую γ . Найдем отрезок B_1B_2 на прямой l такой, что:

- B_1 лежит на верхней части кривой,
- B_2 лежит на нижней части кривой,
- между B_1 и B_2 нет точек кривой.

Это можно сделать – действительно, из всех точек пересечения l с верхней частью кривой выберем самую нижнюю точку B_1 , а из всех точек пересечения l с нижней частью кривой, расположенных ниже B_1 , выберем самую верхнюю точку B_2 .

Выберем на отрезке B_1B_2 произвольную точку A_3 , и рассмотрим горизонтальную прямую, расположенную выше, чем кривая γ (существование такой прямой следует из того, что функция $y(t)$ ограничена, как непрерывная на отрезке). На этой прямой выберем произвольную точку B_3 .

Мы почти получили вложение графа $K_{3,3}$ – точки A_i соединены с B_j (кроме A_3B_3), но не соединены между собой. Так как граф $K_{3,3}$ не планарен, то нельзя провести непрерывную кривую, соединяющую B_3 и A_3 , не пересекая уже нарисованных ребер.

Ребра графа $K_{3,3}$, не лежащие на кривой γ – это A_1B_3 и B_3A_2 , а также B_1A_3 и A_3B_2 (составляющие отрезок B_1B_2). Допустим, можно нарисовать кривую A_3B_3 , не пересекая кривую γ , тогда она пересекает какую-то из ломаных $A_1B_3A_2$ или B_1B_2 .

В этом случае рассмотрим последнюю точку кривой B_3A_3 , пересекающуюся с $A_1B_3A_2$ и выберем ее в качестве B_3 . Аналогично рассмотрим первую точку пересечения кривой B_3A_3 с отрезком B_1B_2 и выберем ее в качестве A_3 .

Тогда кривая, соединяющая новые точки A_3 и B_3 , не будет пересекать ломаные $A_1B_3A_2$, B_1B_2 и кривую γ , что противоречит утверждению о том, что граф $K_{3,3}$ не планарен.

Значит, A_3 и B_3 лежат в разных компонентах относительно кривой γ .

Лекция 4. Формула Эйлера для плоских графов. Многогранники.

Формула Эйлера для плоских графов.

Пусть G – плоский граф, B – количество вершин, P – количества ребер, Γ – количество компонент линейной связности $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Теорема. Для любого плоского связного графа выполнено соотношение (формула Эйлера для плоских графов):

$$B - P + \Gamma = 2$$

Замечание. Отметим, что условие связности важно – если рассмотреть граф, состоящий из двух вершин и 0 ребер, формула перестает быть верной.

Замечание. Вложение в плоскость графа, состоящего из одной вершины и одного ребра, можно рассматривать как замкнутую непрерывную кривую – в этом случае формула Эйлера для плоских графов превращается в теорему Жордана, и при доказательстве теоремы возникают сложности, похожие на те, что возникали при доказательстве теоремы Жордана. Поэтому докажем теорему в несколько упрощенной формулировке (для случая, когда ребра являются ломаными).

Идея доказательства: будем следить, что происходит с числом $B - P + \Gamma$ при некоторых операциях над плоским графом, которые его упрощают (т.е. приводят к графу, для которого формула Эйлера очевидна). Существование алгоритма, использующего эти операции, основано на следующем простом утверждении (доказательство которого предоставляется читателю):

Задача. Доказать, что у любого связного графа, имеющего хотя бы одно ребро, есть либо не самопересекающийся цикл, либо вершина степени 1.

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство.

Начав с произвольной вершины, пройдем по ребрам графа, не проходя ни по какому ребру дважды. Мы не сможем сделать следующий шаг только в двух случаях: либо мы вернемся в вершину, где уже были (это будет означать, что в графе есть цикл), либо вернемся в вершину степени 1.

Определим две операции:

- 1) Если в графе есть вершина степени 1, то удалим ее вместе с ребром, которому она принадлежит.
- 2) Если в графе есть цикл, то удалим любое ребро из этого цикла (не удаляя вершин, которым принадлежит это ребро).

Замечание. При этих операциях граф остается связным.

Ясно, что мы можем исполнять эти операции, пока у графа есть ребра (в силу рассмотренной выше задачи). Значит, процесс остановится только тогда, когда граф состоит из одной вершины и не имеет ребер (а для этого графа соотношение $B - P + G = 2$ очевидно, выполнено).

Осталось понять, что при выполнении вышеуказанных операций число $B - P + G$ не меняется.

1 операция:

$$B \rightarrow B - 1$$

$$P \rightarrow P - 1$$

2 операция:

$$B \rightarrow B$$

$$P \rightarrow P - 1$$

Отметим, что при выполнении обеих операций число G не увеличивается (очевидно, что если некоторые точки можно было соединить непрерывной кривой, не пересекая ребра графа, то после удаления ребра их можно будет соединить той же кривой).

Осталось доказать, что для операции 1 число компонент не меняется, а для операции 2 число компонент уменьшается ровно на 1. Доказательство проводится примерно так же, как и доказательство теоремы Жордана для ломаных (шаг 1, где мы описывали процесс хождения вдоль ребер замкнутой ломаной).

Для операции 1: надо проверить, что если для точек $P, Q \notin G$ существует непрерывная кривая γ , соединяющая P с Q и не пересекающая ребра, отличные от e (т.е. от ребра, которое мы удаляем), то существует другая непрерывная кривая $\tilde{\gamma}$, соединяющая P с Q и не пересекающая ребра.

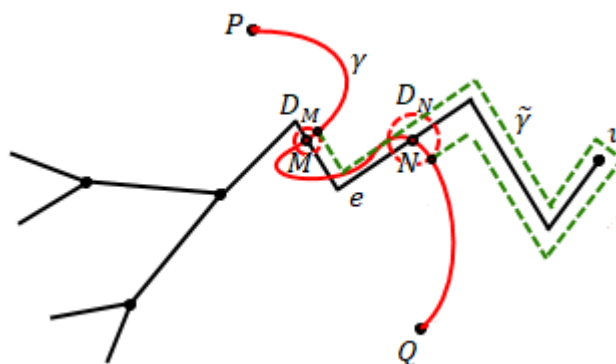


Рис. 4.1. Существование кривой $\tilde{\gamma}$

Рассмотрим M – первую точку на кривой γ , принадлежащую ребру e и N – последнюю точку на кривой γ , пересекающую ребро e (они существуют, так как образ ребра e – замкнутое подмножество плоскости).

Рассмотрим замкнутый круг D_M с центром в точке M , не пересекающий другие ребра и пересекающийся с ребром e по двум радиусам (аналогично для точки N рассмотрим круг D_N). Из точки P пройдем по кривой γ до первой точки, принадлежащей кругу D_M , затем пройдем вдоль ломаной до последней точки на кривой γ , принадлежащей кругу D_N , а из нее по кривой γ пройдем до точки Q – получим непрерывную кривую γ , соединяющую точки P и Q , и не пересекающую ребра, отличные от e .

Для операции 2: поскольку цикл не самопересекающийся, его образ при вложении графа в плоскость можно рассматривать как замкнутую не самопересекающуюся ломаную. По теореме Жордана для ломаных, этот цикл разбивает плоскость на две компоненты.

Рассмотрим замкнутый круг с центром в точке, лежащей на ребре ломаной. Если точки A и B лежат в разных компонентах, на которые ребра ломаной разбивают круг, тогда точки A и B лежат в разных компонентах относительно этой замкнутой ломаной (это следует из доказательства теоремы Жордана для ломаных). Тогда тем более точки A и B лежат в разных компонентах относительно графа G .

После удаления ребра e очевидно, что эти точки можно соединить непрерывной кривой (например, отрезком):

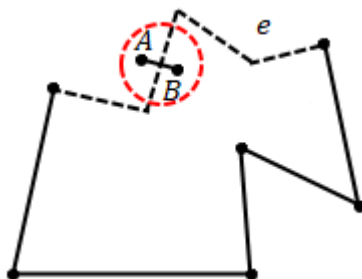


Рис. 4.2. Соединение точек A и B , лежащих в разных компонентах

Таким образом, мы доказали, что после операции 2 число компонент уменьшится. Осталось показать, что оно уменьшится ровно на 1.

Поймем, какие точки, которые были в разных компонентах до удаления ребра, могут оказаться в одной компоненте после удаления ребра. Рассмотрим точки P и Q , такие что до удаления ребра их нельзя было соединить непрерывной кривой, не пересекая ребра графа, а после удаления – можно. Это означает, в частности, что кривая γ , соединяющая P и Q , пересекает только ребро e .

На кривой γ рассмотрим первую и последнюю точку (M и N соответственно) пересечения этой кривой с ребром e . Рассмотрим замкнутые круги D_M и D_N с центрами

в этих точках и докажем, что точки P и Q можно соединить с одной из точек A или B непрерывной кривой, не пересекая ребер графа.

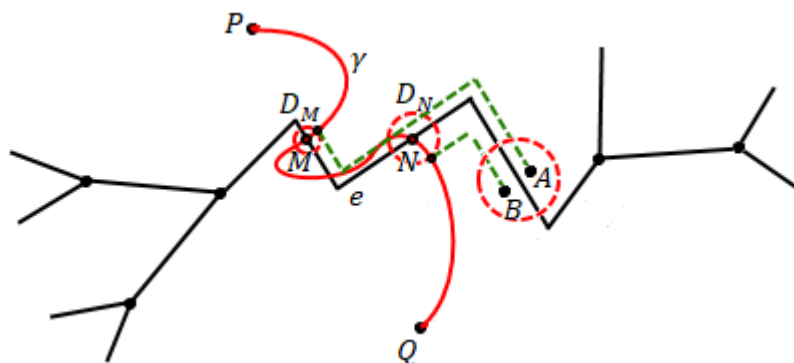


Рис. 4.3. Точки P и Q можно соединить с одной из точек A или B

Из точки P пойдем по кривой γ до первой точки пересечения с кругом D_M , затем пойдем вдоль ребра e и соединим эту точку либо с точкой A , либо с точкой B . Таким образом, кривая, соединяющая точку P либо с точкой A , либо с точкой B , состоит из части кривой γ и некоторого пути вдоль ломаной.

Аналогично для точки Q – пойдем по кривой γ до первой точки пересечения с кругом D_N , затем пойдем вдоль ребра e до точки A или B (см. рис. 4.3).

Мы доказали, что точка P до удаления ребра e лежит в одной из компонент, которой принадлежат либо точка A , либо точка B , а точка Q лежит во второй из этих компонент (так как точки A и B находятся в разных компонентах). Это и означает, что при удалении ребра e сливаются (становятся одной компонентой) только те компоненты, которые задаются выбранными нами точками A и B . Значит, число компонент уменьшится ровно на 1.

Таким образом, при указанных операциях число $B - P + \Gamma$ не меняется, и если в конце процесса (для графа, состоящего из одной точки), оно равно 2, то и для начального графа выполняется соотношение

$$B - P + \Gamma = 2.$$

Следующая задача предлагается читателю для самостоятельного решения:

Задача (обобщение формулы Эйлера на случай не связных графов). Доказать, что для любого плоского графа верна формула

$$B - P + \Gamma = 1 + k,$$

где k – число компонент графа.

В заключение темы “Графы” сформулируем критерий планарности графов.

Теорема (Понтрягина-Куратовского). Граф G является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

В формулировке теоремы встречается понятие гомеоморфизма графов. Гомеоморфизм – одно из основных топологических понятий, мы обсудим его позже, когда речь пойдет о двумерных поверхностях.

Определение. Два графа G_1 и G_2 называются гомеоморфными, если существует непрерывное взаимно-однозначное отображение (гомеоморфизм) $f: G_1 \rightarrow G_2$.

Замечание. Обычно требуют также, чтобы обратное отображение f^{-1} тоже было непрерывным, но для графов это условие можно опустить – оно выполнено автоматически.

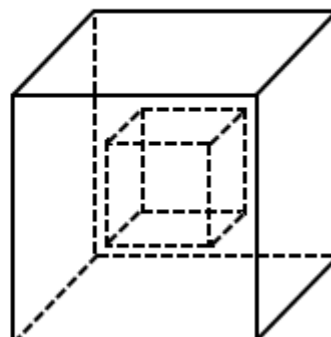
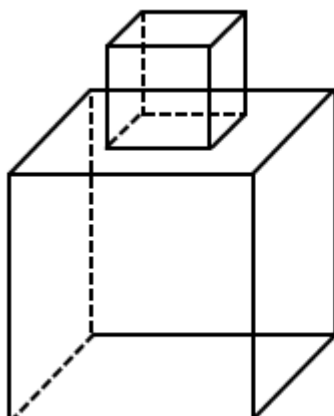
Замечание. Для графов понятие гомеоморфизма отличается от понятия изоморфизма операцией добавления вершины на ребро (удаления вершины с ребра). Сформулируем задачу, из которой следует это утверждение:

Задача. При гомеоморфизме графов вершины степени, отличной от 2, переходят в вершины той же степени.

На этом закончим обсуждение графов и перейдем к многогранникам.

Многогранники.

Интуитивно ясно, что такое многогранник, однако необходимо дать аккуратное определение. Приведем несколько примеров фигур, которые по тем или иным причинам не хочется называть многогранниками:



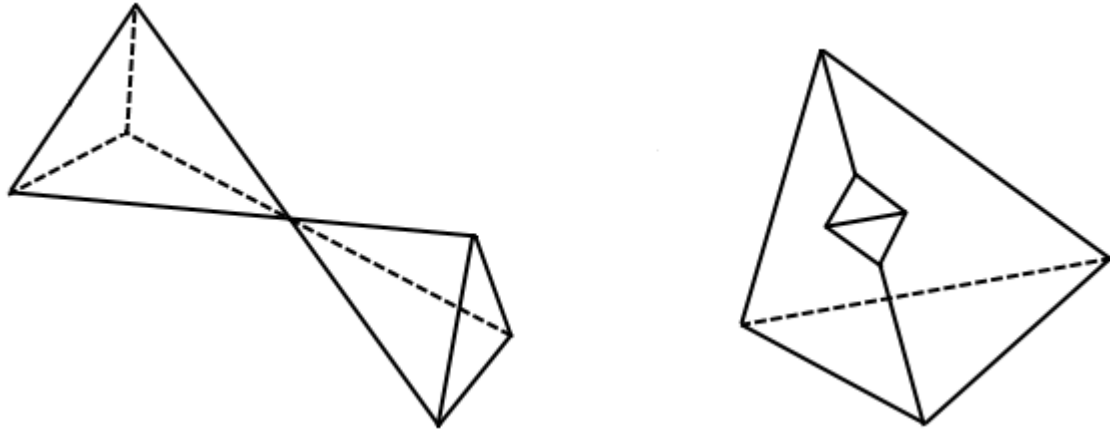


Рис. 4.4. Примеры поверхностей, не являющихся многогранниками

Прежде чем давать определение многогранника, дадим определение многоугольника.

Определение. Пусть L — замкнутая не самопересекающаяся ломаная. По теореме Жордана, она разбивает плоскость на две компоненты (ограниченную и не ограниченную). Многоугольником называется замкнутая не самопересекающаяся ломаная вместе с ограниченной компонентой.

У многоугольника есть 3 типа точек: вершины, внутренние точки ребер, внутренние точки многоугольника.

Чтобы подобным образом дать определение многогранника, сначала нужно определить аналог ломаной (многогранную поверхность), разбивающую пространство на две части.

Лекция 5. Многогранники. Выпуклые многогранники.

Определение. Два плоских многоугольника, расположенных в пространстве, назовем смежными по ребру a , если отрезок a является их общей стороной.

Определение. Многогранной поверхностью называется набор многоугольников, расположенных в пространстве так, что для каждой стороны каждого многоугольника задан ровно один (другой) многоугольник из этого набора, смежный с ним по ребру a , причем это отношение симметрично.

Пояснение: под симметричностью отношения понимается следующее: если многоугольнику k_1 соответствует многоугольник k_2 , то многоугольнику k_2 соответствует многоугольник k_1 (по ребру a могут граничить и другие многоугольники – сопоставление $k_1 \rightarrow k_2$ задает направление обхода многогранной поверхности – очередность многоугольников)

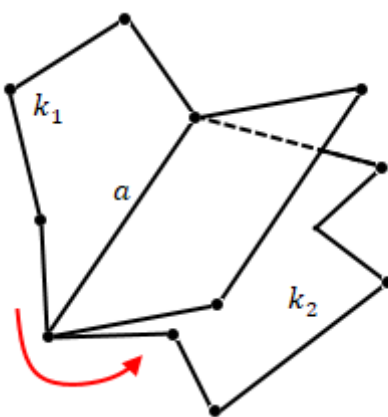


Рис. 5.1. Многоугольнику k_1 соответствует многоугольник k_2

Выделим класс “хороших” многогранных поверхностей. Если многогранная поверхность – аналог замкнутой ломаной, то “хорошая” многогранная поверхность – аналог вложенной ломаной.

Определение. Рассмотрим набор многоугольников, задающих многогранную поверхность. Вершины многоугольников называются вершинами многогранной поверхности, стороны многоугольников – ребрами многогранной поверхности, сами многоугольники – гранями многогранной поверхности.

Определение. Многогранная поверхность называется вложенной, если:

- 1) любая внутренняя точка грани принадлежит только этой грани,
- 2) любая внутренняя точка ребра принадлежит ровно двум граням, смежным по этому ребру,
- 3) для любой вершины все грани, которым она принадлежит, образуют замкнутую цепочку граней, смежных по ребрам, содержащих эту вершину.

Пояснение: условие 3) означает, что если в вершине сходятся несколько граней, то их можно занумеровать таким образом, что:

- во-первых, в получившейся цепочке граней каждая пара соседних граней смежна по ребру, содержащему эту вершину,
- во-вторых, идя по этой цепочке граней, мы, пройдя по всем граням, вернемся в ту, с которой начинали (примеры, когда это можно и нельзя сделать, изображены на рис. 5.2).

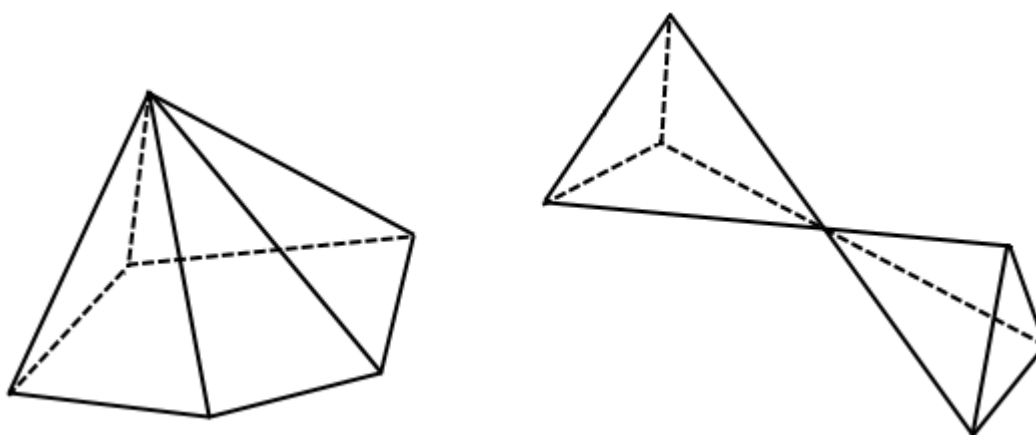


Рис. 5.2. Вложенная и не вложенная многогранная поверхность

Несложно заметить, что условия, определяющие вложенность многогранной поверхности, означают, что окрестность каждой точки этой поверхности устроена так же, как окрестность точки на плоскости.

Определение. Многогранная поверхность называется связной, если для любых двух граней верно следующее: можно перейти от одной грани к другой по цепочке граней, смежных по каким-то ребрам.

В дальнейшем мы будем рассматривать только связные вложенные многогранные поверхности.

Связная многогранная вложенная поверхность – двумерный аналог вложенной ломаной на плоскости, для которой мы ранее доказали теорему Жордана. Аналогом теоремы Жордана в пространстве является следующая теорема:

Теорема. Любая связная вложенная многогранная поверхность разбивает пространство ровно на две компоненты (ограниченную и не ограниченную).

Определение компоненты линейной связности в случае пространства точно такое же, что и для плоскости – две точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

Доказательство этой теоремы также можно провести аналогично доказательству теоремы Жордана для плоскости. Мы не будем этого делать.

Определение. Многогранником назовем связную вложенную многогранную поверхность вместе с одной из двух компонент (на которые она разбивает пространство), которая ограничена.

У многогранника есть 4 типа точек: вершины, внутренние точки ребер, внутренние точки граней, внутренние точки многогранника.

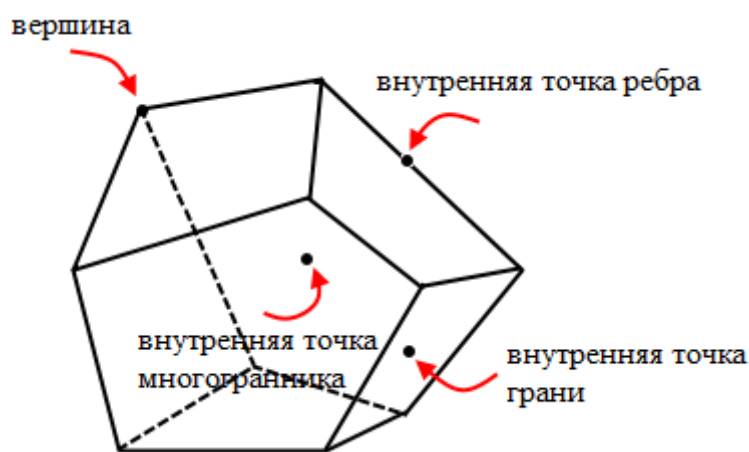


Рис. 5.3. Типы точек многогранника

Задачи, которые мы в дальнейшем будем обсуждать, в основном будут связаны с выпуклыми многогранниками.

Определение. Подмножество A (на плоскости или в пространстве) называется выпуклым, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит весь отрезок, с концами в этих точках:

$$P, Q \in A \Rightarrow [PQ] \subset A$$

Определение (I). Многогранник называется выпуклым, если множество его точек – выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^3$.

Замечание. Многогранник и множество точек многогранника – это разные вещи: множество точек, принадлежащих многограннику – это подмножество в $\mathbb{R}^3$, а многогранник – это объект, имеющий комбинаторную структуру.

Например, у куба 8 вершин, 6 граней, 12 ребер. Если мы одну из граней куба разобьем на два треугольника, то количество граней и ребер увеличится на 1 – получится новый многогранник, но множество точек, принадлежащих многограннику, не изменится.

У многогранника есть плоские углы у граней при вершине, и двугранные углы при ребрах.

Определение. Назовем ребро фиктивным, если двугранный угол при нем равен π (например, ребро, выделенное на рис. 5.4 зеленым – фиктивное). Назовем вершину фиктивной, если сумма плоских углов в ней равна 2π (например, вершины, выделенные красным на рис. 5.4 – фиктивные).

Определение. Выпуклый многогранник называется строго выпуклым, если у него нет фиктивных ребер и вершин.

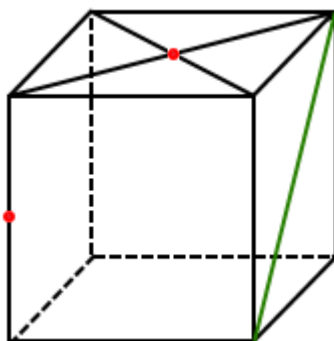


Рис. 5.4. Куб с фиктивными вершинами и ребрами

Несложно показать, что для любого выпуклого многогранника существует строго выпуклый многогранник, совпадающий с ним как подмножество $\mathbb{R}^3$.

Помимо определения (I) можно привести и другие определения выпуклых многогранников.

Определение (II). Выпуклый многогранник – это многогранник, такой что для каждой его грани он лежит в одном из замкнутых полупространств, заданных плоскостью, содержащей эту грань (для каждой плоскости, содержащей грань, он лежит по одну сторону от этой плоскости).

Определение (III). Выпуклый многогранник – это многогранник, совпадающий (как подмножество в $\mathbb{R}^3$) с выпуклой оболочкой своих вершин (выпуклая оболочка множества A – это минимальное выпуклое множество, содержащее A).

Задача. Доказать эквивалентность определений I, II, III выпуклого многогранника.

Доказательство.

Замечание. В определениях II и III выпуклый многогранник определяется через понятие многогранника, которое мы давали ранее.

$\text{III} \Rightarrow \text{I}$. Очевидно, так как выпуклая оболочка множества – это некоторое выпуклое подмножество.

$I \Rightarrow III$. Пусть многогранник M является выпуклым в смысле определения I. Рассмотрим множество W – выпуклую оболочку его вершин. Очевидно, что $W \subset M$. Докажем, что $M \subset W$, т.е., что все точки многогранника будут принадлежать выпуклой оболочке вершин. У многогранника есть 4 типа точек – вершины, внутренние точки ребер, внутренние точки граней, внутренние точки многогранника.

- Вершины (по определению) принадлежат выпуклой оболочке вершин.
- Рассмотрим произвольную внутреннюю точку ребра. Поскольку его концы (как вершины) принадлежат множеству W , то и весь отрезок с концами в этих точках тоже принадлежит W – таким образом, все внутренние точки ребер также принадлежат W .
- Рассмотрим внутреннюю точку грани. Проведем в плоскости, содержащей эту грань, прямую – она пересечет стороны многоугольника, про которые мы уже знаем (поскольку это вершины или внутренние точки ребер), что они принадлежат W , поэтому и весь отрезок с концами в этих точках также принадлежит W . Стало быть, внутренние точки граней также принадлежат W .
- Рассмотрим внутреннюю точку многогранника. Проведем через нее прямую, которая пересечет грани многогранника в точках, про которые мы уже знаем, что они принадлежат W . Стало быть, внутренние точки многогранника также принадлежат W .

Таким образом, множества, задаваемые определениями I и III, совпадают.

$I \Rightarrow II$. Рассмотрим некоторую грань многогранника и плоскость α , содержащую эту грань. Предположим, что многогранник M не содержится целиком в одном из полупространств, на которые плоскость α разбивает пространство, т.е. существуют две точки $P \in M$ и $Q \in M$, расположенные по разные стороны от плоскости α .

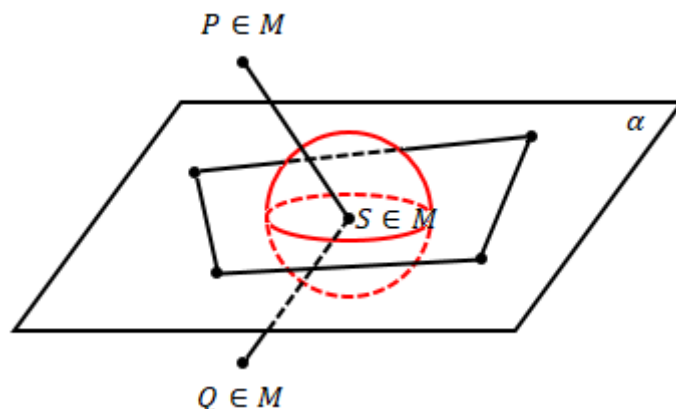


Рис. 5.5. Точки $P \in M$ и $Q \in M$, расположенные по разные стороны от плоскости α

Рассмотрим S – произвольную внутреннюю точку грани, лежащей в плоскости α , и соединим ее с точками P и Q . Так как многогранник M выпуклый, то отрезки PS и QS также принадлежат M .

Рассмотрим маленький шар с центром в точке S . Его пересечение с гранью, в которой лежит точка S – круг, который делит шар на два полушара, причем точки одного полушара не принадлежат M , а точки другого полушара принадлежат M (так как S – внутренняя точка грани).

Тем самым получаем противоречие – отрезки PS и QS целиком принадлежат многограннику, но часть одного из этих отрезков неминуемо попадет в полушарие, точки которого не принадлежат многограннику M .

$\Pi \Rightarrow \text{I}$. Рассмотрим W – пересечение всех полупространств, о которых идет речь в определении Π . Многогранник M лежит в этом пересечении, потому что он лежит по одну сторону от каждой грани в каждом из этих полупространств: $M \subset W$.

W – выпуклое подмножество (как пересечение выпуклых подмножеств пространства). Докажем, что $M = W$, т.е. любая точка пересечения полупространств является точкой многогранника.

Предположим, что это не так, то есть, существуют точки $P \in W$ и $Q \in W$, такие, что $P \in M$, а $Q \notin M$. Тогда отрезок PQ пересечет одну из граней многогранника, а значит, пересечет и плоскость, содержащую эту грань, но мы выбирали точки P и Q так, чтобы они лежали в одном полупространстве для любой плоскости, содержащей одну из граней многогранника – противоречие, значит, $M = W$.

Таким образом, множества, задаваемые определениями I и Π , совпадают, а значит, определения I , Π , III равносильны.

Теорема (формула Эйлера для выпуклого многогранника). Для любого выпуклого многогранника выполнено

$$B - P + G = 2,$$

где B – количество вершин, P – количества ребер, G – количество граней многогранника.

Замечание. Условие выпуклости многогранника в этой теореме можно несколько ослабить. На самом деле, формула Эйлера верна для многогранников, которые получаются из вложенной многогранной поверхности, гомеоморфной сфере. А вот, для многогранника, гомеоморфного, например, тору, формула Эйлера уже не будет верна.

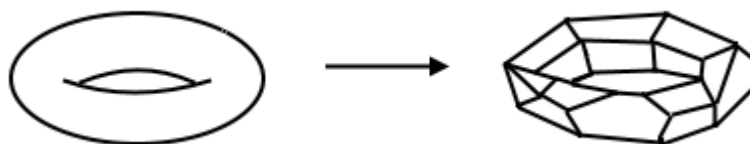


Рис. 5.6. Многогранник, гомеоморфный тору

Доказательство.

Сведем доказательство формулы Эйлера для выпуклых многогранников к доказательству формулы Эйлера для плоских графов.

Сначала рассмотрим неправильное рассуждение, которое иногда предлагается в качестве доказательства: если мы спроектируем многогранник на плоскость, то получим некоторый граф. При проекции вершины многогранника перейдут в вершины графа, ребра – в ребра, каждой грани многогранника будет соответствовать компонента связности на плоскости, поэтому формула Эйлера для многогранника будет верна, поскольку она верна для плоского графа.

Это рассуждение проходит не для всех выпуклых многогранников – например, если подразбить все грани куба на треугольники, как показано на рис. 5.7, то граф, полученный в результате проекции, не будет вложенным.

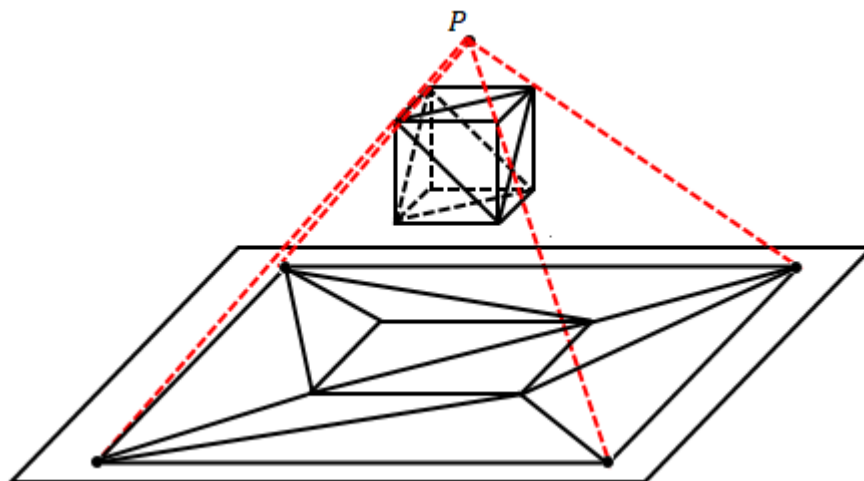


Рис. 5.7. Проекция куба с фиктивными ребрами

Соответственно, возникает идея: нужно так спроектировать многогранник, чтобы граф, получившийся в результате проекции, был плоским. Эту идею можно довести до аккуратного доказательства, если рассматривать строго выпуклый многогранник, но мы поступим по-другому.

Рассмотрим две проекции. Пусть L – многогранная поверхность, задающая многогранник M .

1) $\pi: L \rightarrow S^2$

Спроектируем поверхность многогранника из некоторой внутренней точки многогранника O на сферу с центром в этой точке (выберем сферу достаточно большого радиуса, чтобы многогранник в ней полностью содержался).

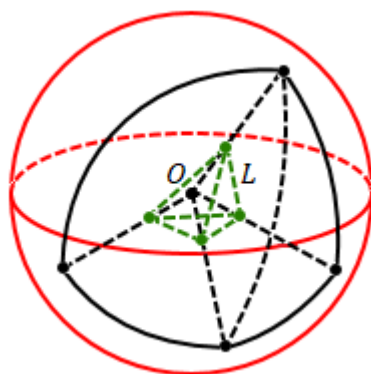


Рис. 5.8. Проекция многогранника на сферу

Докажем, что отображение π будет взаимно-однозначным (для этого нужно понять, что луч с началом в точке O ровно один раз пересечет поверхность многогранника).

Докажем, что луч с началом в точке O пересечет поверхность многогранника. Так как O – внутренняя точка многогранника, то существует шар с центром в точке O (окрестность точки O), целиком лежащий в многограннике, поэтому начало и некоторая окрестность луча принадлежат многограннику. Также на этом луче будут точки, не принадлежащие многограннику, поэтому существует точка на границе многогранника, принадлежащая лучу (супремум множества точек, принадлежащих многограннику).

Докажем, что пересечет ровно один раз: допустим, луч пересекает поверхность многогранника в двух точках A и B . Как отмечалось выше, существует шар с центром в точке O , целиком лежащий внутри многогранника. Рассмотрим конус над этим шаром с вершиной в точке B . Очевидно, что A – внутренняя точка этого конуса, т.е. существует шар с центром в точке A , целиком лежащий внутри этого конуса (если A лежит вне конуса, то рассмотрим конус с вершиной в точке A – в этом случае B будет внутренней точкой конуса).



Рис. 5.9. A – внутренняя точка конуса

Так как многогранник выпуклый, то весь конус принадлежит многограннику, поэтому шар с центром в точке A – это окрестность точки A , целиком состоящая из точек, принадлежащих многограннику, откуда следует, что A – внутренняя точка многогранника – противоречие.

Итак, в результате проекции $\pi: L \rightarrow S^2$ получаем граф на сфере – каждой вершине многогранника будет соответствовать точка на сфере, каждому ребру многогранника –

дуга окружности, являющаяся пересечением плоскости, проходящей через точку O , со сферой.

$$2) p: S^2 \setminus C \rightarrow \mathbb{R}^2$$

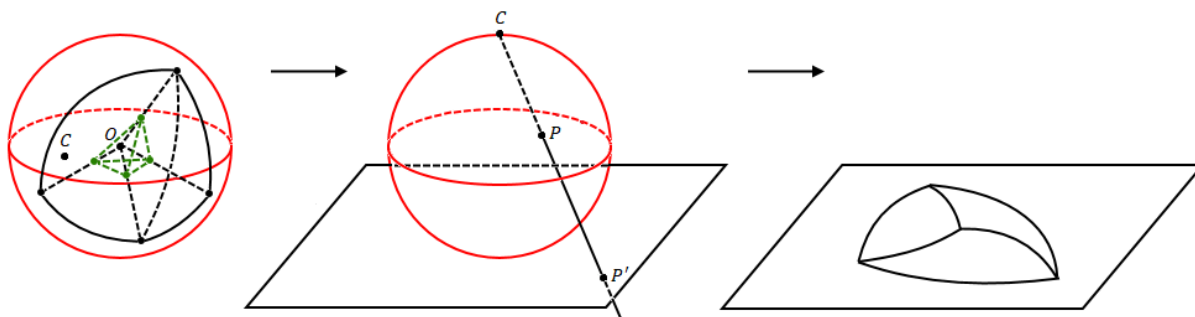


Рис. 5.10. Стереοграфическая проекция

Теперь рассмотрим проекцию сферы на плоскость. Выберем точку C на сфере, не принадлежащую ни одному из ребер, и рассмотрим стереοграфическую проекцию из этой точки – получим некоторый плоский граф, причем каждой вершине графа на сфере будет соответствовать вершина графа на плоскости, каждому ребру – ребро, каждой области на сфере, на которые граф разбивал сферу, будет соответствовать область на плоскости, причем области, содержащей точку C , будет соответствовать неограниченная область на плоскости.

Итак, мы получили взаимно-однозначное соответствие между вершинами и ребрами исходного многогранника и вершинами и ребрами полученного графа, поэтому формула Эйлера для плоских графов верна и для выпуклых многогранников.

Лекция 6. Правильные многогранники. Теорема Коши.

Классификация правильных многогранников.

На прошлой лекции мы доказали формулу Эйлера для выпуклых многогранников. Используя эту формулу, опишем все правильные многогранники.

Определение. Правильный многогранник – многогранник, у которого:

- все грани – правильные n -угольники (одно и то же n для всех граней)
- все двугранные углы равны

Вместо условия равенства двугранных углов будем использовать равносильное ему условие – в каждой вершине сходится одинаковое число ребер (равносильность этих условий следует из теоремы Коши для выпуклых многогранников, которую мы докажем позже).

Список правильных многогранников был известен еще Платону. Выпишем соотношения, которые позволят описать все правильные многогранники.

Во-первых, мы можем рассматривать множество вершин и ребер многогранника как некоторый граф (причем можно считать этот граф сферическим, или плоским – см. доказательство формулы Эйлера для выпуклых многогранников), для которого верно соотношение

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где B – количество вершин, P – количества ребер, Γ – количество граней многогранника.

Теперь используем условие правильности многогранника. Пусть n – количество сторон в каждой грани, k – количество ребер, сходящихся в вершине. Тогда можно двумя способами подсчитать количество ребер. Действительно, в каждую вершину входит k ребер, тогда $B \cdot k$ – удвоенное количество ребер (каждое ребро посчитали дважды), поэтому

$$2P = B \cdot k$$

С другой стороны, у каждой грани n ребер, тогда $\Gamma \cdot n$ – удвоенное количество ребер (каждое ребро принадлежит ровно двум граням), поэтому

$$2P = \Gamma \cdot n$$

Выражая из полученных соотношений число вершин B и число граней Γ и подставляя в формулу Эйлера, получим

$$\frac{2P}{k} - P + \frac{2P}{n} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{P}$$

Так как P, n, k – целые числа, а из геометрических соображений понятно, что $n \geq 3$ и $k \geq 3$, то левая часть равенства при больших k и n меньше 1, а правая часть больше 1. Поэтому задачу можно решить перебором.

$$n = 3 \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{P} \Rightarrow k \leq 5, \text{ то есть, } k = 3, 4, 5$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{P} \Rightarrow k \leq 3, \text{ то есть, } k = 3$$

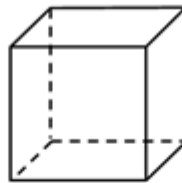
$$n = 5 \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{3}{5} + \frac{2}{P} \Rightarrow k \leq 3, \text{ то есть, } k = 3$$

$$n \geq 6 \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{2}{3} + \frac{2}{P} \Rightarrow k \leq 2 - \text{ решений нет}$$

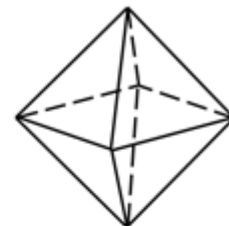
Всего получили 5 вариантов: тетраэдр ($n = 3, k = 3$), октаэдр ($n = 3, k = 4$), икосаэдр ($n = 3, k = 5$), куб ($n = 4, k = 3$), додекаэдр ($n = 5, k = 3$). Они изображены на рис. 6.1:



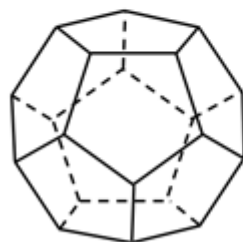
Тетраэдр



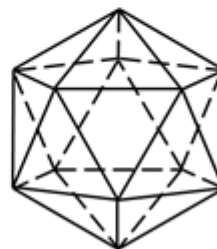
Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Рис. 6.1. Правильные многогранники

Существует естественная двойственность между правильными многогранниками – если соединить ребрами центры граней правильного многогранника, имеющие общее ребро,

то снова получим правильный многогранник. Куб двойственен октаэдру, тетраэдр двойственен сам себе, икосаэдр двойственен додекаэдру.

Итак, мы получили 5 возможных вариантов правильных многогранников. Строго говоря, нужно проверить, что они существуют, но мы не будем этого делать. То, что для каждого варианта пары n и k существует только один выпуклый многогранник, гарантируется теоремой Коши, которую мы докажем чуть позже (условие выпуклости важно: например, если отразить вершину икосаэдра относительно плоскости, проходящей через пять соседних вершин, то получим многогранник с таким же комбинаторным строением, но не выпуклый).

Зафиксируем полученный результат в виде теоремы (доказательство которой мы получили выше).

Теорема. Существует ровно 5 правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр (платоновы тела).

Многоугольники на сфере и многогранные углы.

Перейдем к теореме Коши. Сначала опишем связь между многоугольниками на сфере и многогранными углами.

Многогранный угол состоит из вершины и набора лучей, выходящих из этой вершины. Если рассмотреть сферу с центром в вершине многогранного угла, то пересечение этого многогранного угла со сферой даст нам многоугольник на сфере. На рис. 6.2 зеленым выделены плоский угол α между лучами и двугранный угол α при ребре многогранного угла.

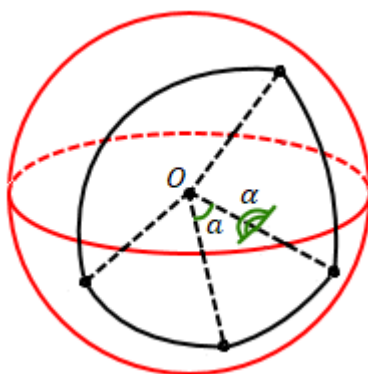


Рис. 6.2. Многогранный угол и многоугольник на сфере

Прежде чем говорить о многоугольнике на сфере, нужно договориться о том, что мы называем прямыми на сфере. “Прямые” на сфере – это большие окружности, то есть, сечения сферы плоскостями, проходящими через центр. Такое название обусловлено свойствами больших окружностей на сфере.

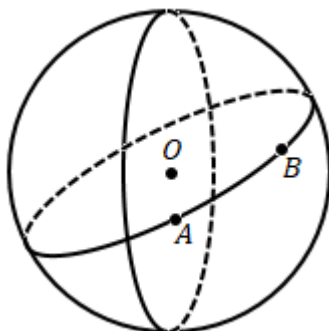


Рис. 6.3. Прямые на сфере, отрезок AB

Прямую на плоскости от всех кривых отличает два свойства:

- среди всех кривых, соединяющих две данные точки, наименьшую длину имеет отрезок прямой с концами в этих точках,
- прямая – это кривая, у которой кривизна равна нулю (определение кривизны кривой будет обсуждаться в курсе классической дифференциальной геометрии, кривизна кривой в точке равна величине вектора ускорения в этой точке, если мы двигаемся по кривой с постоянной по модулю скоростью).

Интересно, что оба этих свойства приводят к одному и тому же классу кривых на любой поверхности – их естественно назвать прямыми на той поверхности, которую мы исследуем. В частности, на сфере такими кривыми будут большие окружности – сечения сферы плоскостями, проходящими через центр. Отрезок AB – меньшая часть прямой, заключенная между двумя точками A и B . В частности, если A и B – диаметрально противоположные точки, то существует бесконечно много прямых, проходящих через эти точки, и бесконечно много отрезков, их соединяющих.

Теперь, когда мы определили, что такое прямая на сфере, можно определить многоугольник на сфере – это замкнутая ломаная, вместе с областью, которую она ограничивает.

Вернемся к многогранному углу: пересечение граней многогранного угла со сферой – это стороны, а пересечение ребер со сферой – это вершины некоторого многоугольника на сфере. Посмотрим, как связаны длины сторон и углы при вершинах сферического многогранника с величинами плоских двугранных углов многогранного угла.

Для сферы единичного радиуса $R = 1$ длина дуги, стягиваемой углом θ , равна θ . Поэтому длина стороны сферического многоугольника будет равна величине соответствующего плоского угла.

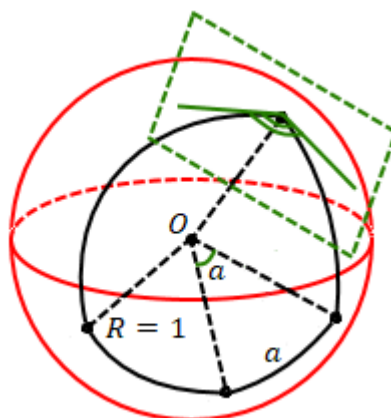


Рис. 6.4. Многоугольник на сфере

Найдем углы сферического многоугольника. По определению, угол между кривыми в точке – это угол между касательными к кривым в этой точке (см. рис. 6.4 – касательные к сторонам сферического многоугольника выделены зеленым). Так как на сфере радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости к сфере, то касательные к сторонам сферического многоугольника, проведенные в его вершине, будут перпендикулярны радиусу, проведенному в вершину (то есть, ребру многогранного угла). Поэтому угол между касательными и есть двугранный угол для этого ребра. Таким образом, угол сферического многоугольника равен соответствующему двугранному углу многогранного угла. Составим таблицу:

Многогранный угол	$\Leftrightarrow$	Многоугольник на сфере ($R=1$)
ребро	$\Leftrightarrow$	вершина
грань	$\Leftrightarrow$	сторона
плоский угол	$\Leftrightarrow$	длина стороны
двугранный угол	$\Leftrightarrow$	угол в многоугольнике

Перечислим (без доказательства) некоторые факты сферической геометрии (задачи для самостоятельного решения):

- 1) Неравенство треугольника: длины сторон треугольника удовлетворяют неравенству $a \leq b + c$,
- 2) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол (и наоборот),
- 3) Теорема косинусов:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

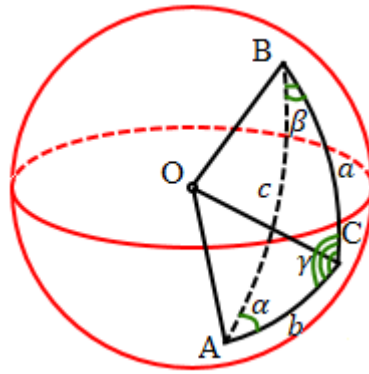


Рис. 6.5. К теореме косинусов

Замечание. Пусть a, b, c малы по сравнению с радиусом сферы. Разложим синус и косинус в ряд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots,$$

$$\sin x = x + \dots$$

Подставляя в теорему косинусов для треугольников на сфере, получаем:

$$1 - \frac{c^2}{2} + \dots = \left(1 - \frac{a^2}{2} + \dots\right) \left(1 - \frac{b^2}{2} + \dots\right) + (a + \dots)(b + \dots) \cos \gamma.$$

Раскрывая скобки и отбрасывая члены, порядок малости которых более двух, получим

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- теорему косинусов для треугольника на плоскости.

4) Теорема синусов

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Теперь перейдем к теореме Коши.

Теорема Коши (о жесткости выпуклых многогранников).

Рассмотрим конструкции из стержней, соединенных шарнирами. Из опыта мы хорошо знаем, что треугольник – жесткая фигура, а если число сторон многоугольника более 3, то многоугольник будет не жестким. Говоря о многогранных поверхностях, несложно понять, что многогранный угол не будет жестким – можно двигать конструкцию так, что

она будет менять свою геометрию. Если же к многогранному углу приклеить еще одну грань, то конструкция станет жесткой.

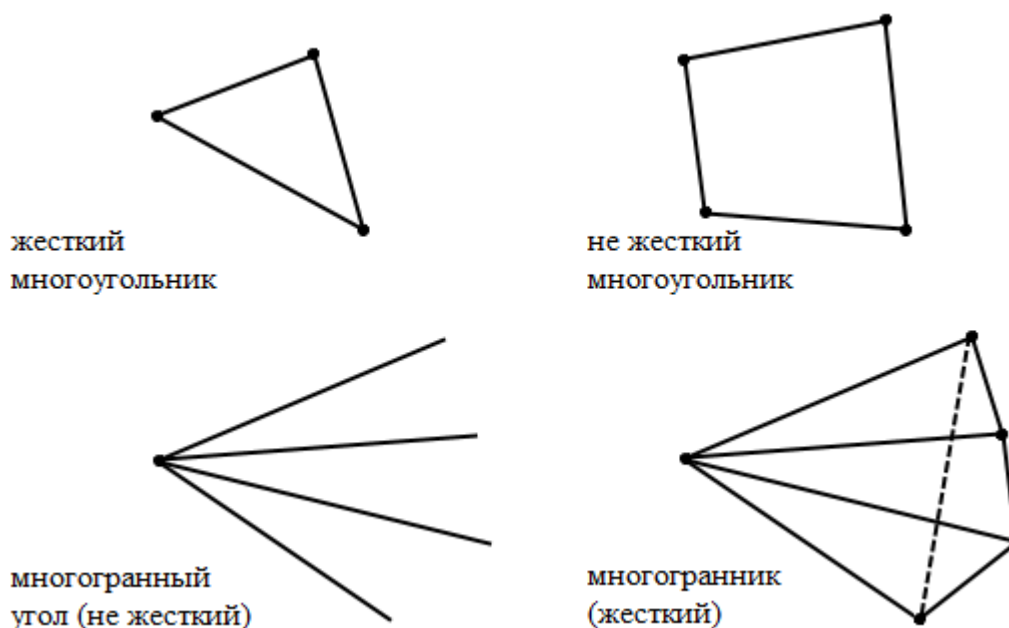


Рис. 6.6. Жесткие и не жесткие многоугольники и многогранники

Теорема Коши, в частности, говорит о том, что выпуклый многогранник – жесткая конструкция.

Теорема Коши. Два выпуклых многогранника, имеющие одинаковое комбинаторное строение и равные соответствующие грани, конгруэнтны (то есть, совмещаются движением пространства).

Определение. Многогранники имеют одинаковое комбинаторное строение, если существует взаимно-однозначное соответствие между вершинами, между ребрами и между гранями, сохраняющее отношение принадлежности.

Условие выпуклости в теореме Коши важно – легко привести пример не конгруэнтных выпуклого и не выпуклого многогранника, имеющих одинаковое комбинаторное строение и равные соответствующие грани:

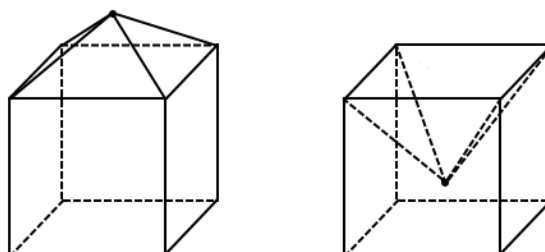


Рис. 6.7. Выпуклый и не выпуклый многогранники, имеющие одинаковое комбинаторное строение

Доказательство теоремы Коши будет основано на нескольких леммах. Сначала докажем лемму Коши.

Лемма Коши. Если некоторые из ребер выпуклого многогранника помечены знаками “+” и “-”, то найдется вершина, к которой подходит хотя бы одно помеченное ребро и в которой число перемен знаков меньше 4.

Подсчет числа перемен знаков в вершине: обходим вершину, подсчитывая число перемен знака ребер, выходящих из этой вершины.

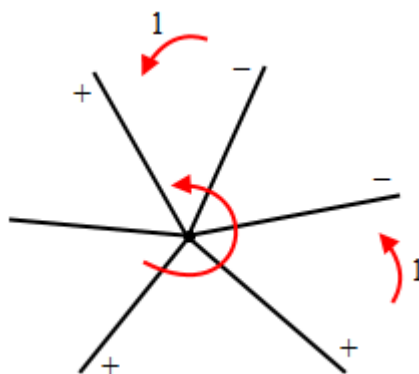


Рис. 6.8. Подсчет числа перемен знаков

Доказательство.

Рассмотрим граф G , составленный из помеченных ребер многогранника. Можно считать, что он плоский (при доказательстве формулы Эйлера для многогранников мы уже рассматривали две проекции многогранника – на сферу, а затем на плоскость).

Теперь двумя способами подсчитаем общее число перемен знаков. Пусть $N(v_i)$ – число перемен знаков при обходе вершины v_i , а $N(\alpha_j)$ – число перемен знаков при обходе грани α_j .

Так как граф из помеченных ребер может иметь не столь хорошую структуру, как исходный выпуклый многогранник, договоримся, как мы считаем $N(\alpha_j)$: под гранью α_j мы понимаем грань относительно графа G (т.е. одну из компонент, на которые граф G разбивает плоскость). При подсчете идем вдоль грани, и считаем количество перемен знаков. Например, для ребра, отмеченного красным на рис. 6.9, мы должны дважды учесть его знак:

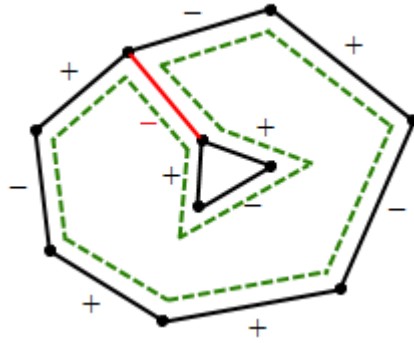


Рис. 6.9. Подсчет числа перемен знаков при обходе грани

Тогда

$$\sum_i N(v_i) = \sum_j N(\alpha_j) = N$$

- действительно, рассмотрим любые два соседних ребра. Знаки, стоящие на этих ребрах, будут давать одинаковый вклад в число перемен знаков как при обходе вершины, из которой эти ребра выходят, так и при обходе грани, которой они принадлежат.

Для того, чтобы доказать, что найдется вершина, в которой число перемен знаков меньше 4, достаточно доказать, что $N < 4V$. Для доказательства этого факта сначала оценим N сверху: заметим, что в треугольнике может быть не больше двух перемен знака, в четырехугольнике может быть не больше 4 перемен знака, в пятиугольнике может быть не больше 4 перемен знака, и т. д. Обозначим Γ_i число граней (компонент, на которые граф разбивает плоскость) с i сторонами. Тогда

$$N \leq 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \dots \leq (3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \dots) - \Gamma_3$$

Обратим внимание на выражение, стоящее в скобках: мы умножаем количество треугольных ребер на 3, четырехугольных ребер на 4 и т.д., то есть, в скобках стоит удвоенное число ребер многогранника (так как каждое ребро посчитали дважды – оно принадлежит ровно двум граням). Поэтому

$$N \leq 2P - \Gamma_3$$

Теперь оценим $2P$ снизу:

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \dots \geq (4\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 4\Gamma_6 + \dots) - \Gamma_3 = 4\Gamma - \Gamma_3$$

откуда

$$4\Gamma - \Gamma_3 \leq 2P$$

Сложим полученные неравенства, получим

$$N + 4\Gamma \leq 4P \Leftrightarrow N \leq 4(P - \Gamma)$$

Теперь воспользуемся тем, что граф плоский (но не обязательно связный). Для него выполнено неравенство (см. задачу на стр. 32 для не связных графов):

$$B - P + \Gamma \geq 2,$$

откуда

$$P - \Gamma \leq B - 2.$$

Тогда

$$N \leq 4(P - \Gamma) \leq 4(B - 2) = 4B - 8 < 4B,$$

откуда следует утверждение леммы Коши.

Лекция 7. Теорема Коши. Теорема Минковского.

Продолжим доказательство теоремы Коши. Сформулируем еще две леммы.

Лемма 1. Пусть у двух строго выпуклых n -угольников (на плоскости или на сфере) соответствующие стороны равны, а среди углов есть не равные. Пометим вершины первого многоугольника знаками “+” или “-” в соответствии с тем, больше или меньше угол при этой вершине, чем соответствующий угол во втором многоугольнике. Тогда число перемен знака при обходе границы этого многоугольника ≥ 4 .

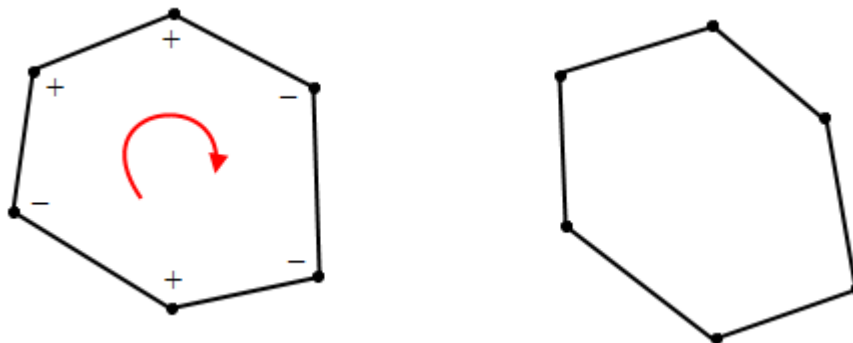


Рис. 7.1. К лемме 1

Напоминание: строго выпуклый многоугольник – многоугольник без фиктивных вершин.

Условие строгой выпуклости важно. Легко привести пример не выпуклых (или не строго выпуклых) многоугольников, для которых лемма 1 не верна:

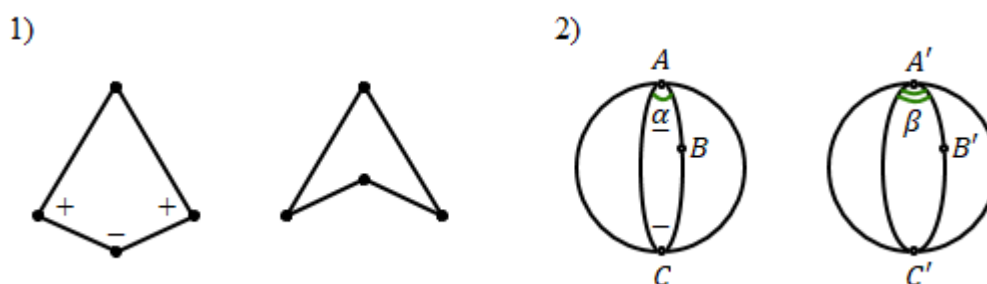


Рис. 7.2. Примеры многоугольников, для которых лемма 1 не верна

Прежде чем доказывать лемму 1, покажем, как следует теорема Коши из леммы Коши и леммы 1.

Доказательство (теоремы Коши для строго выпуклых многогранников).

По условию теоремы, рассматриваемые многогранники равны, их комбинаторное строение одинаково, поэтому соответствующие плоские углы равны (следует из равенства соответствующих граней). Для того, чтобы доказать, что два этих

многогранника совмещаются движением, достаточно проверить, что соответствующие двугранные углы равны (действительно, можно переформулировать условие теоремы Коши следующим образом: если есть какой-то набор граней и правило их склейки, то задав величины двугранных углов, мы однозначно построим выпуклый многогранник).

Предположим, что это не так: существует два многогранника, удовлетворяющие условию теоремы Коши, соответствующие двугранные углы которых не равны. Расставим на ребрах первого многогранника “+” или “-” в соответствии с тем, больше или меньше двугранный угол при этом ребре (по сравнению с соответствующим двугранным углом второго многогранника). Получим какую-то разметку ребер первого многогранника (как в лемме Коши). Тогда, по лемме Коши, найдется вершина, в которой число перемен знака меньше 4:

$$\text{ЧПЗ}(v) < 4$$

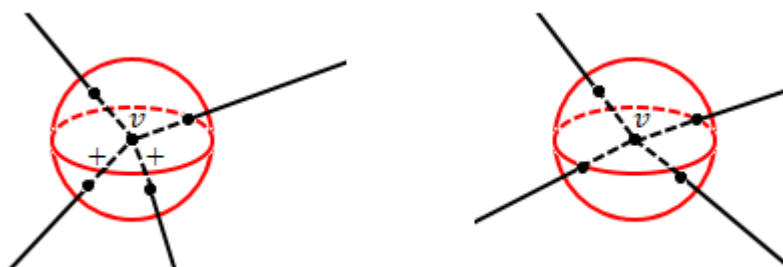


Рис. 7.3. Вершина, которой число перемен знака меньше 4

Рассмотрим соответствующую вершину во втором многограннике и рассмотрим маленькие сферы с центрами в этих вершинах и те многоугольники, которые высекают соответствующие двугранные углы на эти сферах. Так как ребрам многогранного угла соответствуют вершины многоугольников, то знаки “+” и “-”, стоявшие на ребрах, переносятся в вершины сферического многоугольника (величина двугрannого угла при ребре равна величине угла в многоугольнике, который получился при пересечении многогранного угла со сферой).

Таким образом, мы получили два многоугольника на сфере, у которых соответствующие стороны равны (так как плоские углы многоугольников, из которых мы склеиваем многогранник, равны), а вершины помечены “+” и “-” в зависимости от того, больше соответствующий угол в первом многоугольнике, или меньше.



Рис. 7.4. Многоугольники на сфере, соответствующие многогранникам

Тогда число перемен знаков при обходе границы этого многоугольника не меньше 4 (по лемме 1):

$$\text{ЧПЗ}(v) \geq 4$$

Полученное противоречие доказывает, что предположение о неравенстве двугранных углов неверно. Тем самым (в предположении, что верна лемма 1), теорема Коши доказана (для строго выпуклых многогранников).

Для доказательства леммы 1 докажем еще одну лемму:

Лемма 2. Пусть даны два строго выпуклых многоугольника, у которых все стороны, кроме одной, равны:

$$A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Также для всех углов выполнено неравенство:

$$\hat{A}_i \leq \hat{B}_i, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

причем среди этих неравенств есть хотя бы одно строгое.

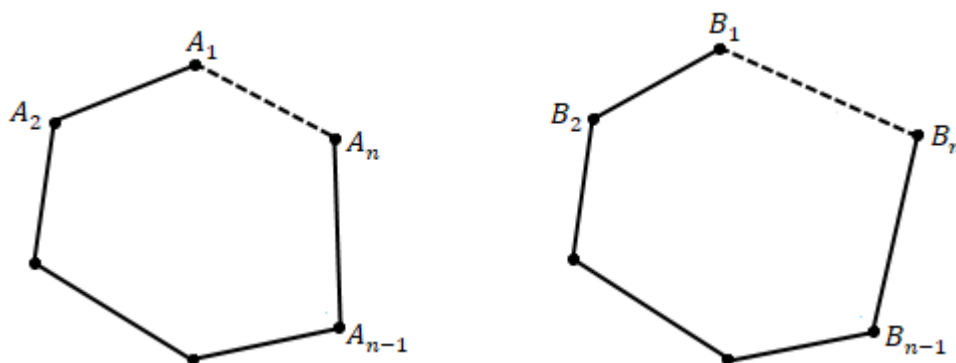


Рис. 7.5. К лемме 2

Тогда

$$A_1 A_n < B_1 B_n$$

Лемму 2 можно понимать так: мы стерли одну из сторон многоугольника, а затем какие-то из углов многоугольника увеличили (не меняя длин сторон), и заново нарисовали стертую сторону. Нужно доказать, что нарисованная сторона больше стертой.

Из леммы 2 следует лемма 1, из которой, в свою очередь, следует теорема Коши для строго выпуклых многогранников. Действительно, если мы докажем лемму 2, то из нее будет следовать, что число перемен знака при обходе многоугольника больше или равно

4 – ясно, что число перемен знака четное (так как мы начинаем и заканчиваем обход в одной и той же точке, то сколько раз знак поменялся с “+” на “-“, столько же раз он поменяется и с “-“ на “+”), значит, утверждение, что число перемен знака больше или равно 4, равносильно тому, что оно не равно 0 и не равно 2.

Если число перемен знака равно 2, то вершины многоугольника разбиваются на две группы: подряд идущие вершины с “+” (и вершины без знака) и подряд идущие вершины с “-” (и вершины без знака):

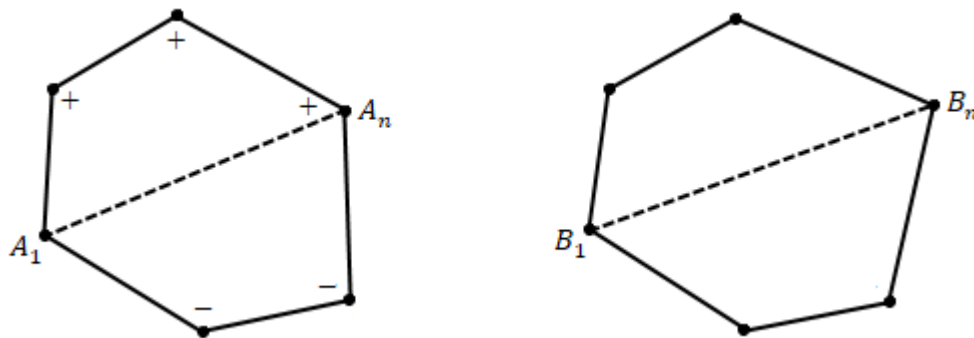


Рис. 7.6. К лемме 2

Рассмотрев нижнюю часть многоугольника (ниже пунктирной линии на рис. 7.6), по лемме 2 получим:

$$A_1A_n < B_1B_n$$

Рассмотрев верхнюю часть многоугольника (выше пунктирной линии на рис. 7.6), по лемме 2 (мысленно поменяв многоугольники местами), получим, что

$$B_1B_n < A_1A_n$$

- противоречие.

Аналогично рассматривается второй случай (число перемен знака равно 0) – приняв произвольную сторону многоугольника за A_1A_n , снова получим противоречие с леммой 2: должно быть выполнено неравенство

$$A_1A_n < B_1B_n,$$

а по условию (лемма 1) все соответствующие стороны равны.

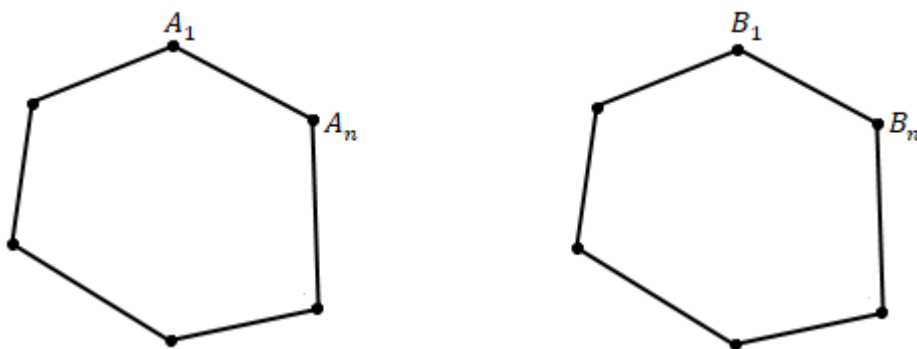


Рис. 7.7. К лемме 2

Таким образом, лемма 1 следует из леммы 2 и доказательство теоремы Коши свелось к доказательству леммы 2.

Лемму 2 сформулировал и доказал Коши, но позднее в его доказательстве была найдена ошибка – приведем рассуждение Коши и укажем на эту ошибку, а затем приведем правильное доказательство.

Доказательство (с ошибкой).

Будем доказывать индукцией по числу вершин многоугольников.

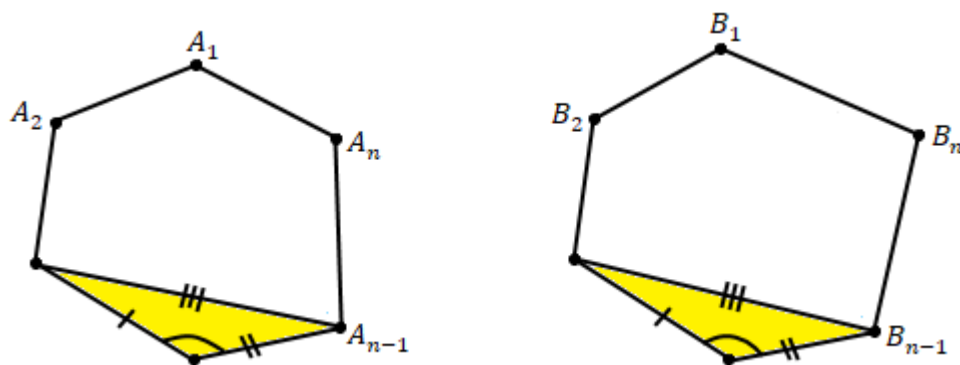


Рис. 7.8. Уменьшение количества вершин многоугольника

Предположим, что среди соответствующих углов многоугольников есть пара равных. Рассмотрим треугольники, содержащий этот угол (на рис. 7.8 выделены желтым) – они равны по двум сторонам и углу между ними (если рассматривать эти треугольники на сфере, равенство третьих сторон следует из теоремы косинусов).

Отрежем эти треугольники – для оставшихся многоугольников выполнены все условия леммы 2, но сторон на одну меньше.

Осталось проверить базу индукции ($n = 3$) – то есть, доказать, что для треугольников, изображенных на рис. 7.9, из неравенства $\alpha < \beta$ следует, что $a < b$:



Рис. 7.9. База индукции

Это следует из теоремы косинусов (и на плоскости, и на сфере, если треугольники строго выпуклые).

Если среди соответствующих углов многоугольников нет пары равных углов, то не умаляя общности, будем считать, что все углы первого многоугольника строго меньше, чем соответствующие углы второго многоугольника.

Выберем некоторый угол в первом многоугольнике (на рис. 7.10 это угол при вершине A_{n-1}), и будем увеличивать его, пока он не станет равным соответствующему углу во втором многоугольнике – при этом вершина A_n заменится на вершину A'_n .

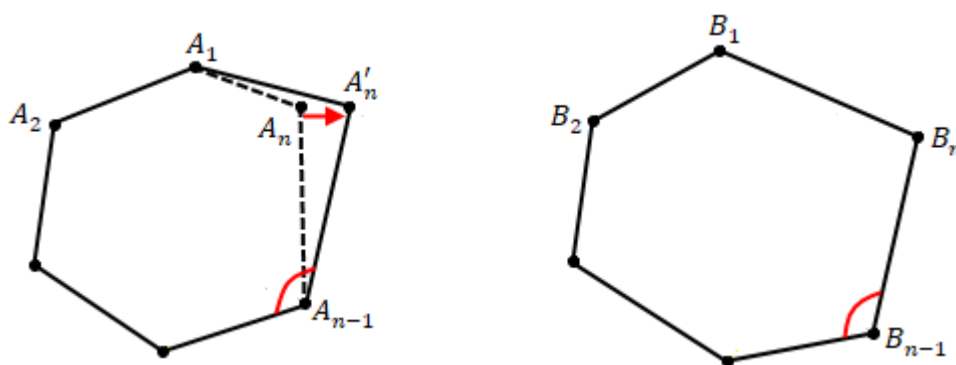


Рис. 7.10. Замена вершины A_n на вершину A'_n

Получили многоугольники, среди соответствующих углов которых есть пара равных – для них лемма 2 верна (мы доказали это выше по индукции), то есть, выполнено:

$$A_1 A'_n < B_1 B_n$$

Но после замены сторона $A_1 A'_n$ будет больше, чем $A_1 A_n$, поэтому тем более выполнено неравенство

$$A_1 A_n < B_1 B_n$$

Почему это доказательство неверно?

Дело в том, что при увеличении угла в вершине A_{n-1} многоугольник $A_1 \dots A_{n-1} A'_n$ может перестать быть выпуклым, и мы не сможем сделать шаг индукции.

Легко понять, что многоугольник $A_1 \dots A_{n-1}A'_n$ может перестать быть выпуклым, если продолжение стороны A_2A_1 пересекает окружность радиуса $A_{n-1}A_n$ с центром в точке A_{n-1} (см. рис. 7.11).

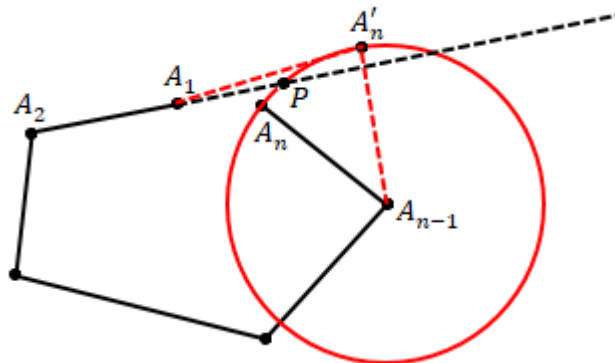


Рис. 7.11. Невыпуклый многоугольник $A_1 \dots A_{n-1}A'_n$

Пусть P – точка первого пересечения этой окружности с лучом A_2A_1 . Будем считать, что мы раздвинули угол при вершине A_{n-1} до вершины P и многоугольник $A_1 \dots A_{n-1}A'_n$ остался выпуклым.

Теперь будем пытаться уменьшить угол при вершине B_{n-1} , чтобы он стал равен углу при вершине A_{n-1} . Если нам это удалось, то мы сможем сделать шаг индукции, и лемма 2 доказана.

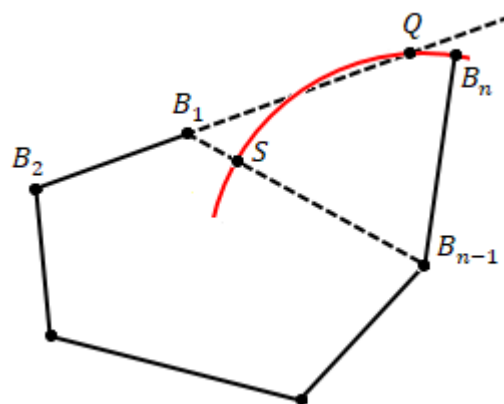


Рис. 7.12. Уменьшение угла при вершине B_{n-1}

Если нам это не удалось, то либо при попытке уменьшения угла мы дошли до луча B_2B_1 (дошли до точки Q – см. рис. 7.12), либо дошли до стороны B_1B_{n-1} (дошли до точки S – см. рис. 7.12), при этом угол при вершине B_{n-1} остался больше, чем соответствующий угол в первом многоугольнике. Рассмотрим оба этих случая (хотим доказать, что $A_1A_n < B_1B_n$.)

1 случай. $B_n \rightarrow Q$.

- 1) Заметим, что $A_1A_n < A_1P$ (это следует, например, из теоремы косинусов).
- 2) Заменяем исходный n -угольник $A_1 \dots A_n$ на $(n-1)$ -угольник $A_2A_3 \dots P$ (то есть, мы заменили точку A_n на точку P , тогда точки A_2, A_1, P оказались на одной прямой – можно считать, что в n -угольнике стало на одну сторону меньше). Аналогично заменим n -угольник $B_1 \dots B_n$ на $(n-1)$ -угольник $B_2B_3 \dots Q$.

Несложно видеть, что после этого преобразования все условия леммы 2 останутся выполнены, поэтому $A_2P < B_2Q$ (по предположению индукции). Так как $A_1A_2 = B_1B_2$, получаем

$$A_1P < B_1Q$$

- 3) Заметим, что $B_1Q < B_1B_n$ (аналогично п.1). Складывая полученные неравенства, получаем

$$A_1A_n < B_1B_n$$

2 случай. $B_n \rightarrow S$.

- 1) Заметим, что $A_1A_n < A_1P$ (как в случае 1).
- 2) Заменяем исходный n -угольник $A_1 \dots A_n$ на $(n-1)$ -угольник $A_2A_3 \dots P$ (как в случае 1). Аналогично заменим n -угольник $B_1 \dots B_n$ на $(n-1)$ -угольник $B_2B_3 \dots S$. Несложно видеть, что после этого преобразования все условия леммы 2 останутся выполнены, поэтому $A_2P < B_2S$ (по предположению индукции). Из неравенства треугольника следует, что

$$B_2S < B_1B_2 + B_1S$$

Так как $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2P = A_1A_2 + A_1P$, получаем

$$A_1P < B_1S$$

- 3) Заметим, что $B_1S < B_1B_n$ (аналогично п.1). Складывая полученные неравенства, получаем

$$A_1A_n < B_1B_n$$

Итак, лемма 2 доказана, а значит, доказана и теорема Коши в случае строго выпуклых многогранников. Случай нестрого выпуклых многогранников не будем рассматривать подробно, приведем лишь схему доказательства.

Доказательство (схема) теоремы Коши для нестрого выпуклых многогранников.

Леммы 1 и 2 формулировались для строго выпуклых многоугольников (если отбросить условие строгой выпуклости, то они неверны). Отдельно разберем случаи, когда у многогранника есть фиктивные вершины или ребра.

Так как плоские углы при соответствующих вершинах многогранников равны, то соответствующие вершины либо обе настоящие, либо обе фальшивые (так как вершина называется фальшивой, если сумма плоских углов в ней равна 2π).

В случае, когда вершина, которая нашлась по лемме Коши, для обоих многогранников настоящая, и при пересечении многоугольника со сферой с центром в этой вершине возникает строго выпуклый многоугольник, рассуждение такое же, как и в случае нестрого выпуклого многогранника.

Если в вершине, которая нашлась по лемме Коши, нарушается условие строгой выпуклости, тогда рассуждение, которое было в случае нестрого выпуклого многогранника, не проходит. Не будем перечислять аккуратно все варианты, нарисуем существенные случаи, которые нужно рассмотреть отдельно.

Пусть в фальшивой вершине v ребра a_1 и a_2 лежат на одной прямой, а двугранный угол при ребрах b_1 и b_2 равен π . Возникает два случая.

- Первый случай: настоящие ребра соответствуют фальшивым, а фальшивые — настоящим (см. рис. 7.13):

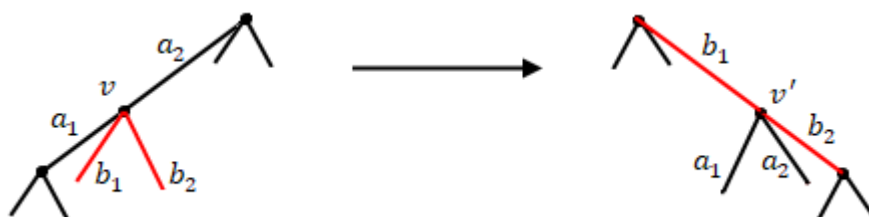


Рис. 7.13. Настоящие ребра соответствуют фальшивым

Знаки на ребрах, сходящихся в этой вершине, выглядят следующим образом:

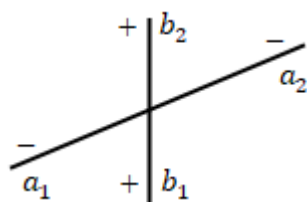


Рис. 7.14. Знаки на ребрах, сходящихся в вершине v

В этом случае число перемен знаков в вершине v равно 4 (из этой вершины могут выходить и другие ребра, на число перемен знаков они не повлияют), а значит, дальше можно применить те же рассуждения, что и в случае нестрого выпуклого многогранника.

- Второй случай: настоящие ребра соответствуют настоящим, а фальшивые – фальшивым (см. рис. 7.15):

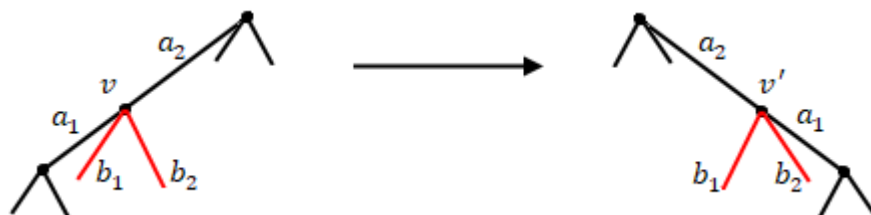


Рис. 7.15. Настоящие ребра соответствуют настоящим

В этом случае при ребрах a_1 и a_2 знаки будут одинаковые (при этих ребрах один и тот же двугранный угол, поэтому будет или два знака “+”, или два знака “-”). Сотрем вершину v , и припишем полученному ребру знак, который стоял при ребрах a_1 и a_2 – у многогранника станет на одну фальшивую вершину меньше, и мы сможем продолжить наши рассуждения.

Аналогично поступаем с фальшивыми вершинами, все ребра, подходящие к которым, лежат в одной плоскости – мы можем стереть их и продолжить рассуждение.

То есть, в случае нестрого выпуклых многогранников можно свести доказательство к случаю строго выпуклых многогранников, рассматривая отдельно фиктивные вершины.

Из теоремы Коши следует, что выпуклые многогранники – жесткие. Возникает вопрос: могут ли быть не жесткими невыпуклые многогранники? Ответ – да, и такие примеры были построены. При этом возникла гипотеза (так называемая гипотеза кузнечных мехов), утверждающая, что объем этих многогранников при изгибании сохраняется. Эта гипотеза была доказана И. Х. Сабитовым в 1996 году.

Теорема (Сабитова). При изгибании многогранника (не выпуклого) его объем сохраняется.

Мы не будем доказывать эту теорему, но приведем идею доказательства. Из школьной геометрии хорошо известна формула Герона, выражающая площадь треугольника через его стороны (p – полупериметр):

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Если рассматривать правую часть данной формулы как многочлен, коэффициенты которого зависят от длин сторон, то корень этого многочлена является квадратом площади треугольника.

Аналогичная формула существует и для тетраэдра: если задать длины всех сторон тетраэдра, то можно предъявить многочлен, коэффициенты которого зависят только от длин сторон, а корнем этого многочлена является объем тетраэдра.

Оказывается, для любого многогранника существует многочлен, коэффициенты которого зависят только от длин сторон многогранника, корнем которого является объем многогранника.

Отсюда следует, что при изгибании многогранника его объем будет сохраняться, так как длины всех ребер сохраняются при изгибании.

В заключение темы, связанной с многогранниками, приведем (без доказательства) теорему Минковского, но сначала обсудим некоторые понятия, необходимые для формулировки этой теоремы.

Рассмотрим произвольный многогранник. Пусть S_i – площадь его i -той грани, $\vec{n}_i$, $|\vec{n}_i| = 1$ – внешняя единичная нормаль к i -той грани.

Утверждение. Для любого строго выпуклого многогранника набор $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k, S_1, \dots, S_k$, где $\vec{n}_i$ – единичные нормали, а S_i – площади граней, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$ не лежат в одном замкнутом полупространстве,
- 2)

$$\sum_{i=1}^k S_i \vec{n}_i = 0$$

Набор данных, удовлетворяющий этим двум условиям, называется ёжом.

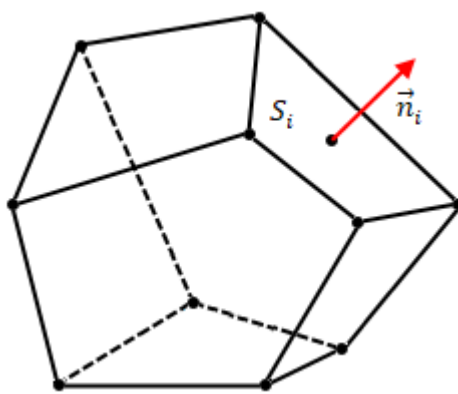


Рис. 7.16. Ёж

Доказательство.

Удобнее начать со второго утверждения. Имеет смысл привести физическое доказательство – если мы надует многогранник, тогда $S_i \vec{n}_i$ – сила давления на i -ую грань, а их сумма – равнодействующая сил, действующих на многогранник, которая равна нулю.

Докажем утверждение более формально. Рассмотрим некоторую внутреннюю точку многогранника O , и в каждой грани выберем внутреннюю точку грани p_i . Разобьем многогранник на пирамиды с вершиной в точке O , основаниями которых являются грани многогранника. Если многогранник выпуклый, то эти пирамиды не пересекаются, а их объединение дает весь многогранник.

Объем пирамиды с вершиной O , и основанием которой является i -ая грань, равен

$$V_{\Pi} = \frac{1}{3} S_i(\overrightarrow{OP_i}, \vec{n}_i)$$

Действительно, $(\overrightarrow{OP_i}, \vec{n}_i)$ – это длина проекции отрезка $\overrightarrow{OP_i}$ на нормаль к грани, то есть, высота пирамиды. Тогда объем многогранника равен

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{1}{3} S_i(\overrightarrow{OP_i}, \vec{n}_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k (\overrightarrow{OP_i}, S_i \vec{n}_i)$$

Для другой точки O' мы получим аналогичную формулу:

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{1}{3} S_i(\overrightarrow{O'P_i}, \vec{n}_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k (\overrightarrow{O'P_i}, S_i \vec{n}_i)$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^k (\overrightarrow{OP_i}, S_i \vec{n}_i) = \sum_{i=1}^k (\overrightarrow{O'P_i}, S_i \vec{n}_i)$$

откуда

$$\sum_{i=1}^k (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{O'P_i}, S_i \vec{n}_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (\overrightarrow{OO'}, S_i \vec{n}_i) = 0$$

Вынося вектор $\overrightarrow{OO'}$ за скобки, получаем

$$\left(\overrightarrow{OO'}, \sum_{i=1}^k S_i \vec{n}_i \right) = 0$$

Так как это верно для любых внутренних точек многогранника O и O' , то

$$\sum_{i=1}^k S_i \vec{n}_i = 0$$

Теперь докажем первое утверждение. Допустим, векторы $S_i \vec{n}_i$ лежат в одном замкнутом полупространстве. Тогда, поскольку их сумма равна 0, они должны лежать в одной плоскости: действительно, так как они лежат в замкнутом полупространстве, то их проекции на ось x будут неотрицательными. С другой стороны, их сумма равна нулю, поэтому их проекции на ось x равны нулю, то есть, они лежат в одной плоскости. Иными словами, все они перпендикулярны некоторой прямой.

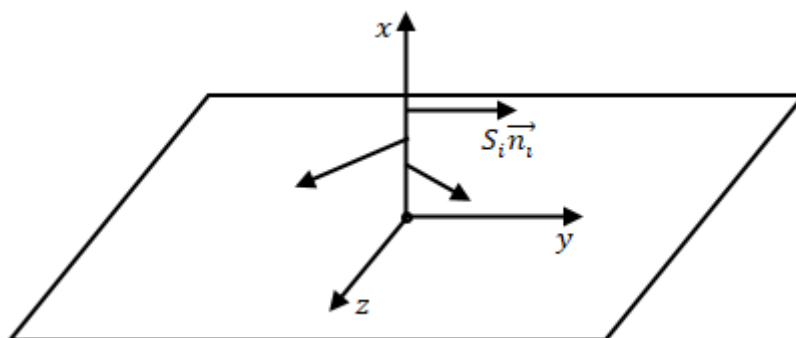


Рис. 7.17. Вектора $S_i \vec{n}_i$ лежат в одной плоскости

Но это невозможно, так как это означает, что все грани параллельны некоторой прямой, откуда следует, что все ребра перпендикулярны некоторой прямой, тогда в любой вершине могут сходиться максимум два ребра.

Тем самым мы доказали, что по многограннику можно построить некоторый еж. Оказывается, верно и обратное.

Теорема Минковского. Для любого ежа (не содержащего сонаправленных векторов) существует ровно один (строго) выпуклый многогранник, для которого этот набор векторов будет его ежом.

Отметим, что если допустить существование сонаправленных векторов, то такой выпуклый многогранник будет существовать, но он не будет единственным. Действительно, если многогранник не строго выпуклый, то разбивая одну из его граней фиктивными вершинами на более мелкие многоугольники нужной площади, мы будем получать новые многогранники (но как множества точек они будут совпадать). Все новые грани будут лежать в одной плоскости, поэтому нормали к ним будут сонаправлены.

Если запретить присутствие в еже сонаправленных векторов, тогда многогранник восстанавливается по ежу однозначно.

Лекция 8. Площадь и объем (третья проблема Гильберта).

Задача, о которой пойдет речь, возникла в связи с аксиоматическим определением площади и объема. Оказывается, что любой многоугольник можно разрезать конечным числом прямых так, чтобы сложить из него, например, квадрат. Поэтому можно постулировать, что площадь квадрата есть квадрат его стороны, и так далее – можно свести определение площади многоугольника к площади квадрата. Аналогичный вопрос о том, можно ли произвольный многогранник разрезать конечным числом плоскостей на многогранники так, чтобы из них можно было сложить, например, куб, поставил Гильберт в 1900 году (на II Международном математическом конгрессе он сформулировал список из 23 вопросов, которые потом стали называть проблемами Гильберта).

Эту задачу решили быстрее всего – уже через год, в 1901 году, отрицательный ответ получил ученик Гильберта Макс Ден. О способе доказательстве Дена и пойдет речь в этой лекции. Начнем с плоскости.

Случай плоскости.

Определение. Два многоугольника называются равносоставленными, если их можно разрезать конечным числом прямых на одинаковые части.

Теорема (Бойяи-Гервин). Любые два многоугольника одинаковой площади равносоставлены.

Есть много способов доказать эту теорему, мы докажем ее на семинарах. Приведем список лемм (оставив их в виде задач), используя которые, можно получить доказательство этого утверждения.

Доказательство (схема).

Лемма 1. Любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

Лемма 2. Любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

Лемма 3. Любые два параллелограмма с одинаковыми основаниями и равными высотами равносоставлены.

Лемма 4. Любые два прямоугольника одинаковой площади равносоставлены.

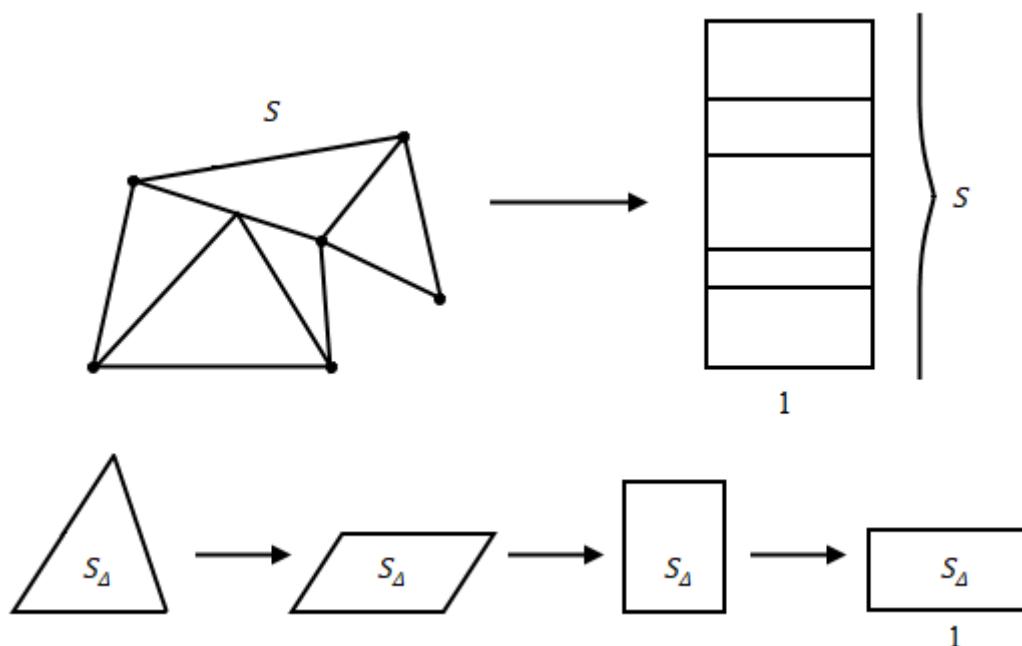


Рис. 8.1. К теореме Бойяи-Германа

Если эти леммы будут доказаны, то доказательство теоремы можно провести так: рассмотрим произвольный многоугольник площади S , разрежем его каким-то образом на треугольники, затем каждый треугольник (обозначим его площадь S_{Δ}) разрежем, складывая из него параллелограмм, затем разрежем параллелограмм и сложим из него прямоугольник, затем разрежем прямоугольник и сложим из него прямоугольник со сторонами 1 и S_{Δ} .

Прделаем эту операцию с каждым из треугольников, на которые мы разрезали исходный многоугольник. Затем сложим из прямоугольников со сторонами 1 и S_{Δ} прямоугольник со сторонами 1 и S .

Таким образом, убедимся, что произвольный многоугольник площади S равносоставлен прямоугольнику со сторонами 1 и S . Отсюда следует, что два многоугольника площади S равносоставлены.

Случай пространства.

Определение. Два многогранника называются равносоставленными, если их можно разрезать конечным числом плоскостей на одинаковые части.

В пространстве не существует аналога теоремы Бойяи-Германа. Чтобы доказать это, достаточно предъявить два многогранника одинакового объема, не являющихся равносоставленными.

Теорема (Ден). Куб и правильный тетраэдр одинакового объема не равносоставлены.

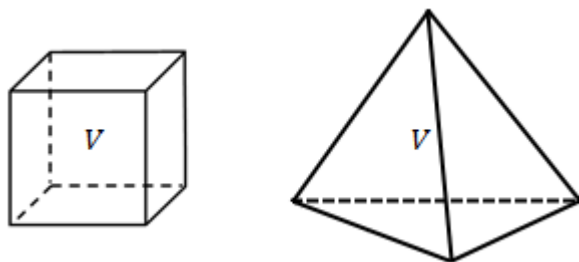


Рис. 8.2. К теореме Дена

Прежде чем доказывать эту теорему, дадим несколько определений, чтобы описать инвариант, который придумал Ден.

Определение. Для набора действительных чисел $x_1, \dots, x_k$ назовем зависимостью выражение вида

$$n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0,$$

где n_i – целые числа.

Определение. Функция f , заданная на множестве $M \subset \mathbb{R}$, называется аддитивной, если для любой зависимости $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$, где $(x_1, \dots, x_k \in M)$, выполнено

$$n_1f(x_1) + \dots + n_kf(x_k) = 0$$

Замечание. Часто аддитивными называют функции, для которых выполнено соотношение

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Это – частный случай нашего определения (соотношение $(x + y) - x - y$ является зависимостью между числами $x + y$, x , и y). Для доказательства теоремы Дена нам будет достаточно рассматривать функции, являющиеся аддитивными для конечного множества M , а не для всей числовой прямой.

Аддитивные функции на $\mathbb{R}$ устроены достаточно сложно (кроме линейных). В частности, они будут разрывными во всех точках.

Задача. Доказать, что функция, аддитивная на $\mathbb{R}$ и непрерывная хотя бы в одной точке, является линейной.

Несложно понять, что, если мы задали значение аддитивной функции в точке: $f(1) = a$, то из аддитивности функции следует, что для любого рационального числа $\frac{p}{q}$ выполнено

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$$

– таким образом, задав значение функции в рациональной точке, мы получаем ее значения во всех рациональных точках.

Если мы зададим значение аддитивной функции в некоторой иррациональной точке:

$$f(\sqrt{2}) = b$$

тогда, в силу аддитивности, мы однозначно зададим значение функции во всех точках вида $\frac{p}{q}\sqrt{2}$, и так далее.

Если рассматривать множество действительных чисел как линейное (бесконечномерное) пространство над полем рациональных чисел, то произвольно задавая на базисных векторах этого пространства значения функции f , получим аддитивную функцию. Однако, мы ограничимся аддитивными функциями, заданными на конечном множестве.

Определение. Пусть A – многогранник, у которого длины ребер равны $l_1, \dots, l_N$, а соответствующие двугранные углы равны $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Тогда для любой аддитивной функции f , заданной на множестве M , содержащем $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ и число π , назовем инвариантом Дена многогранника A число

$$f(A) = l_1 f(\alpha_1) + \dots + l_N f(\alpha_N).$$

Докажем теорему, из которой легко следует теорема Дена.

Теорема (Хадвигер). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ – величины двугранных углов многогранника A , а $\beta_1, \dots, \beta_q$ – величины двугранных углов многогранника B . Если на множестве M , содержащем $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ и число π , задана аддитивная функция f , такая, что $f(\pi) = 0$ и $f(A) \neq f(B)$, то A и B не равноставлены.

Покажем, что из этой теоремы следует теорема Дена. Зададим некоторую аддитивную функцию, содержащую величины всех двугранных углов куба $(\frac{\pi}{2})$ и правильного тетраэдра $(\varphi = \arccos \frac{1}{3})$, то есть, зададим функцию на множестве $M = \{\frac{\pi}{2}, \pi, \arccos \frac{1}{3}\}$.

Так как по условию $f(\pi) = 0$, то и $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Примем $f(\varphi) = 1$. Посчитаем значение инварианта Дена для этой аддитивной функции для куба и правильного тетраэдра:

$$f(\text{куб}) = 12f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f(\text{тетраэдр}) = 6bf(\varphi) = 6b \neq 0$$

Осталось проверить, что функция, которую мы задали, действительно будет аддитивной. Для любой зависимости вида $n_1\pi + n_2\varphi = 0$ должно выполняться соотношение

$$n_1f(\pi) + n_2f(\varphi) = 0.$$

Так как $f(\pi) = 0$, а $f(\varphi) \neq 0$, это соотношение может быть выполнено только при $n_2 = 0$, иными словами, функция будет аддитивной, если не существует зависимостей вида $n_1\pi + n_2\varphi = 0$ при $n_2 \neq 0$. Это равносильно следующему утверждению:

Лемма. Число $\frac{\varphi}{\pi}$ иррационально.

Доказательство.

Пусть

$$\frac{\varphi}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

– несократимая дробь.

Пусть также

$$\cos \varphi = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

– несократимая дробь (в нашем случае $\cos \varphi = \frac{1}{3}$).

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Если $\cos \alpha = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, то

$$\cos 2\alpha = 2 \frac{k^2}{l^2} - 1 = \frac{2k^2 - l^2}{l^2}$$

– НОД числителя и знаменателя равен 1, либо 2. Но при $l > 2$ выполнено $\frac{l^2}{2} > l$. Поэтому в последовательности

$$\cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 4\varphi, \dots, \cos 2^r \varphi, \dots$$

нет повторяющихся чисел (так как знаменатели дробей возрастают).

С другой стороны, в последовательности

$$\varphi, 2\varphi, 4\varphi, \dots, 2^r \varphi, \dots$$

будут углы, равные по модулю 2π : действительно, если $\varphi = \frac{p}{q}\pi$, то в последовательности

$$\frac{p}{q}\pi, 2\frac{p}{q}\pi, 4\frac{p}{q}\pi, \dots, 2^r\frac{p}{q}\pi, \dots$$

может быть всего $2q - 1$ различных числа (по модулю 2π), поэтому достаточно взять $r = 2q$.

Получили противоречие – у чисел, равных по модулю 2π , косинусы должны быть равны, но в последовательности, содержащей косинусы этих чисел, нет одинаковых членов.

Тем самым, лемма доказана, а значит, доказана и аддитивность f . Поэтому (по теореме Хадвигера) куб и правильный тетраэдр не равносоставлены, и теорема Дена доказана. Теперь докажем теорему Хадвигера.

Доказательство (теоремы Хадвигера).

Доказательство разобьем на две леммы.

Лемма (о продолжении аддитивной функции). Пусть f – аддитивная функция, заданная на множестве M . Тогда на множестве $\tilde{M} = M \cup \{\gamma\}$ существует аддитивная функция $\tilde{f}$, такая что $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$ для любого $\alpha \in M$.

Доказательство.

Будем считать, что $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$.

- 1) Если нет зависимости вида $n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + m\gamma = 0$, где $m \neq 0$, то положим $\tilde{f}(\gamma)$ равным любому числу.
- 2) Пусть есть зависимость вида $n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + m\gamma = 0$, где $m \neq 0$. Тогда положим

$$\tilde{f}(\gamma) = -\left(\frac{n_1}{m}\right)f(\alpha_1) - \dots - \left(\frac{n_k}{m}\right)f(\alpha_k)$$

Проверим, что тогда для любой зависимости вида

$$p_1\alpha_1 + \dots + p_k\alpha_k + l\gamma = 0$$

будет выполнено соотношение

$$p_1\tilde{f}(\alpha_1) + \dots + p_k\tilde{f}(\alpha_k) + l\tilde{f}(\gamma) = 0.$$

Получим

$$(n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + m\gamma)l - (p_1\alpha_1 + \dots + p_k\alpha_k + l\gamma)m =$$

$$= (n_1 l - p_1 m) \alpha_1 + \dots + (n_k l - p_k m) \alpha_k = 0$$

– зависимость на M . Так как f -аддитивная функция на M , то получаем, что выполнено соотношение

$$(n_1 l - p_1 m) f(\alpha_1) + \dots + (n_k l - p_k m) f(\alpha_k) = 0,$$

откуда

$$l(n_1 f(\alpha_1) + \dots + n_k f(\alpha_k)) - m(p_1 f(\alpha_1) + \dots + p_k f(\alpha_k)) = 0.$$

Так как

$$n_1 f(\alpha_1) + \dots + n_k f(\alpha_k) = -m \tilde{f}(\gamma),$$

получаем

$$-lm \tilde{f}(\gamma) - m(p_1 f(\alpha_1) + \dots + p_k f(\alpha_k)) = 0.$$

Сокращая на m и меняя знак, получаем

$$p_1 \tilde{f}(\alpha_1) + \dots + p_k \tilde{f}(\alpha_k) + l \tilde{f}(\gamma) = 0,$$

что и требовалось.

Лемма (2). Пусть многогранник A состоит из многогранников $P_1, \dots, P_k$. Пусть M – множество чисел, содержащее π и все двугранные углы многогранников $A, P_1, \dots, P_k$. Если f – аддитивная функция, заданная на M и такая что $f(\pi) = 0$, то

$$f(A) = f(P_1) + \dots + f(P_k).$$

Доказательство.

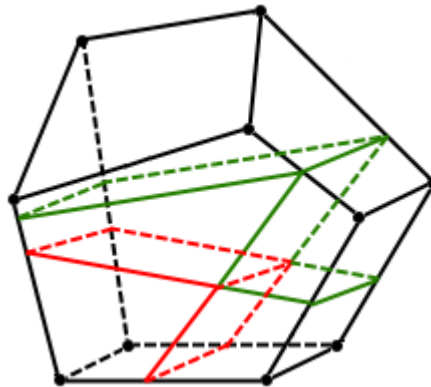


Рис. 8.3. Многогранник A состоит из многогранников $P_1, \dots, P_k$

Рассмотрим разбиение ребер многогранников $P_1, \dots, P_k$ на “звенья”, заданное вершинами этих многогранников и точками пересечения ребер.

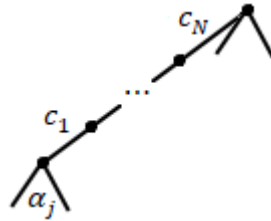


Рис. 8.4. Разбиение ребра на звенья

Рассмотрим сумму

$$\sum_i c_i f(\alpha_j)$$

по всем звеньям, получившимся при разбиении многогранника A на многогранники $P_1, \dots, P_k$, и всем двугранным углам при этих звеньях.

С одной стороны, эта сумма равна сумме инвариантов Дена для всех многогранников $P_1, \dots, P_k$, так как

$$c_1 f(\alpha_j) + \dots + c_N f(\alpha_j) = l f(\alpha_j),$$

где l – длина некоторого ребра какого-то из многогранников $P_1, \dots, P_k$, а α_j – двугранный угол при этом ребре. Суммируя по всем звеньям, принадлежащим этому многограннику, получим значение инварианта Дена для этого многогранника. Поступая так для каждого многогранника $P_1, \dots, P_k$, получим

$$\sum_i c_i f(\alpha_j) = f(P_1) + \dots + f(P_k)$$

С другой стороны, все звенья можно разбить на три класса: а) звено внутри A , б) звено на грани A , в) звено на ребре A .

а) Подсчитаем, какой вклад в сумму будут давать звенья, лежащие внутри A :

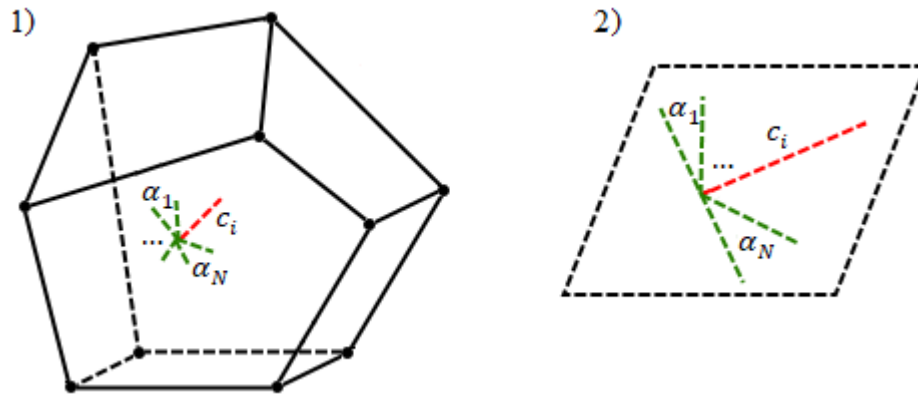


Рис. 8.5. Звено c_i лежит внутри многогранника

Возможны два случая:

1) – когда звено не лежит на грани другого многогранника (см. рис. 8.5). Тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 2\pi$$

2) – когда звено лежит на грани другого многогранника (см. рис. 8.5). Тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \pi$$

Так как $f(\pi) = f(2\pi) = 0$, получаем (из аддитивности функции), что

$$c_i \sum_{j=1}^N f(\alpha_j) = 0$$

б) Подсчитаем, какой вклад в сумму будут давать звенья, лежащие на грани A :

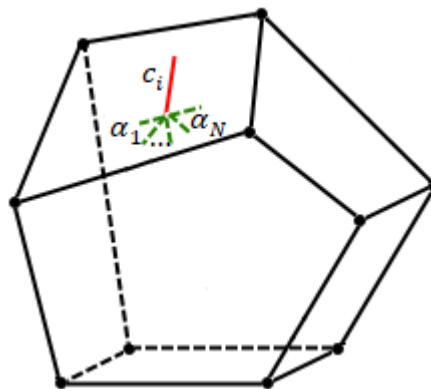


Рис. 8.6. Звено c_i лежит на грани многогранника

В этом случае

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \pi,$$

и (по тем же соображениям, что и в пункте а))

$$c_i \sum_{j=1}^N f(\alpha_j) = 0$$

в) Подсчитаем, какой вклад в сумму будут давать звенья, лежащие на ребре A :

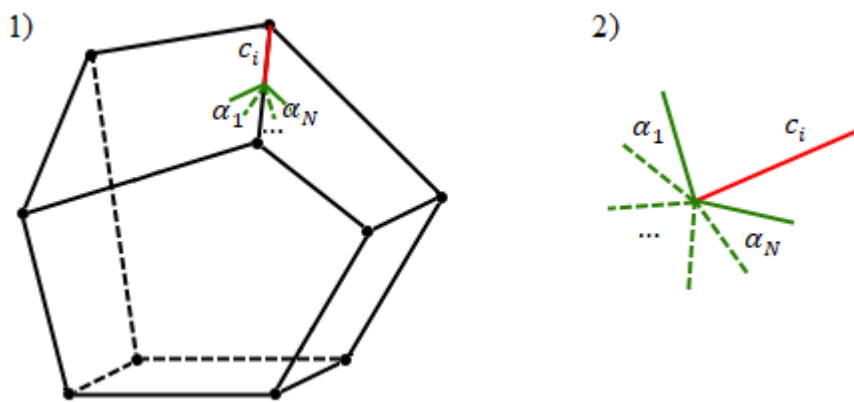


Рис. 8.7. Звено c_i лежит на ребре многогранника

В зависимости от величины двугранного угла β при ребре, на котором лежит рассматриваемое звено, получаем два случая (в зависимости от того, больше или меньше β развернутого угла)

1) $\beta < \pi$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \beta$$

2) $\beta > \pi$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \beta - \pi$$

Из условия $f(\pi) = 0$ и условия аддитивности функции, получаем

$$c_i \sum_{j=1}^N f(\alpha_j) = c_i f(\beta)$$

Суммируя по всем звеньям этого ребра, мы получим $lf(\beta)$, где l – длина ребра:

$$\sum_i c_i f(\beta) = lf(\beta)$$

Суммируя по всем ребрам многогранника A , получим $f(A)$:

$$\sum_i l_i f(\beta_i) = f(A)$$

Таким образом, верно равенство

$$f(A) = f(P_1) + \dots + f(P_k)$$

и лемма доказана.

Легко понять, что из двух доказанных выше лемм следует теорема Хадвигера.

Ответ на вопрос, когда два многогранника равносоставлены, дает следующая теорема (приведем ее без доказательства).

Теорема (Сидлер). Два многогранника A и B равносоставлены, если $f(A) = f(B)$ для любой аддитивной функции f (область определения которой содержит все двугранные углы многогранников A и B и число π , причем $f(\pi) = 0$).

Задача. Доказать, что любые два многоугольника одинаковой площади на сфере равносоставлены.

Замечание. Гильберт формулировал 3-ю проблему немного иначе: он ставил вопрос равносоставленности не двух произвольных многогранников, а двух тетраэдров, имеющих равные основания и равные высоты. Несложно показать, что эти формулировки равносильны.

Лекция 9. Топологические пространства.

Перейдем к топологическим вопросам, связанным с двумерными поверхностями. Прежде чем определить, что такое двумерная поверхность, обсудим поподробнее само понятие топологии и различные свойства топологических пространств.

Топология как раздел математики связана с понятием непрерывности. Мы уже определяли непрерывность отображения, задавая окрестности точек в некотором пространстве – это один из способов введения топологии, далее обсудим разные подходы к заданию топологии, и их связь с понятиями, обсуждавшимися ранее.

Определение. Говорят, что на множестве X задана топология, если в X выделен набор подмножеств T (называемых открытыми) так, что:

- 1) $\emptyset, X \in T$,
- 2) $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$ (это условие можно обобщить на конечное число множеств: $A_1, \dots, A_n \in T \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n \in T$),
- 3) $A_\alpha \in T \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in T$ (это условие распространяется и на объединение бесконечного числа множеств).

Выделение такого набора открытых множеств T называется топологией на X , пара (X, T) называется топологическим пространством.

В математическом анализе открытыми множествами называются подмножества числовой прямой, являющиеся объединением интервалов.

Примеры.

- 1) Дискретная топология на X : $T =$ все подмножества X ,
- 2) Антидискретная топология на X : $T = \{\emptyset, X\}$.

Перейдем к определению понятия непрерывности. Ранее мы определяли непрерывность отображения, используя понятие окрестности: пусть для любой точки $x_0 \in X$ задан непустой набор подмножеств, называемых ее окрестностями так, что если U_1 и U_2 – окрестности точки x_0 , то и $U_1 \cap U_2$ содержит некоторую окрестность точки x_0 . В соответствии с этим определением непрерывность отображения определялась следующим образом:

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$.

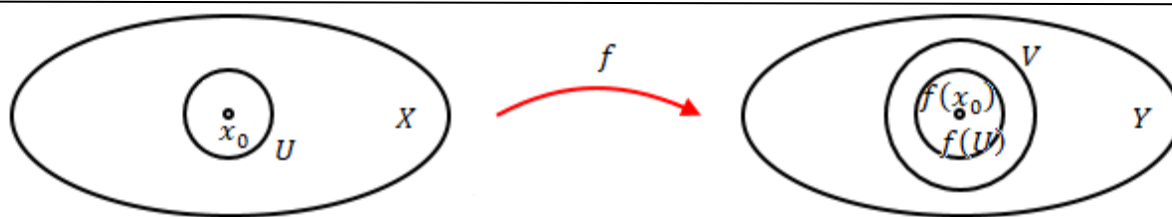


Рис. 9.1. Непрерывное отображение

Открытыми подмножествами топологического пространства (если в нем заданы окрестности точек) мы называли подмножества, которые вместе с каждой точкой содержат некоторую ее окрестность: A открыто в X , если из условия $x_0 \in A$ следует, что существует окрестность U точки x_0 , такая, что $U \in A$.

Термин “открытые множества” присутствует и в определении топологии. Оказывается, что “открытые” множества, определенные через окрестности точек, задают топологию:

- 1) $\emptyset, X \in T$ (очевидно),
- 2) $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$ (следует из условия на пересечение окрестностей),
- 3) $A_\alpha \in T \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in T$ (очевидно).

Более того, оказывается, что любая топология может быть задана путем задания окрестностей точек.

Пусть (X, T) – топологическое пространство. Назовем в нем окрестностью точки x_0 любое открытое подмножество, содержащее точку x_0 . Если мы так определим окрестности в данном топологическом пространстве, то после этого мы можем определить “открытые” подмножества через окрестности точек (будем использовать кавычки, чтобы отличать открытые множества, используемые в определении топологии и открытые множества, которые вместе с каждой точкой содержат некоторую ее окрестность).

Тогда так определенные окрестности порождают топологию $\tilde{T}$ (мы проверили это выше). Для того, чтобы доказать, что $T = \tilde{T}$, проверим, что $T \subset \tilde{T}$ и $\tilde{T} \subset T$.

- 1) Если $A \in T$, то A – это окрестность любой своей точки, то есть, A вместе с любой точкой содержит ее окрестность A . Это и означает, что $T \subset \tilde{T}$.
- 2) Если $A \in \tilde{T}$, то для любой точки $a \in A$ существует ее окрестность U_a , такая что $U_a \subset A$. Тогда $\bigcup_{a \in A} U_a = A \in T$ как объединение $U_a \in T$. Это и означает, что $\tilde{T} \subset T$.

Замечание. Топология на множестве порождается набором окрестностей не однозначным образом (другие наборы окрестностей могут порождать ту же самую топологию).

Пример. Рассмотрим числовую прямую $\mathbb{R}$, тогда:

- 1) окрестностью точки x_0 можно назвать интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$,
- 2) окрестностью точки x_0 можно назвать отрезок $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Задача. Доказать, что оба способа дают одну и ту же “обычную” топологию на прямой.

Непрерывность отображений.

Непрерывность отображения в точке также можно определить, считая что окрестность точки – это любое открытое подмножество, содержащее данную точку. Это определение эквивалентно следующему утверждению:

Утверждение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого подмножества (в Y) является открытым подмножеством (в X).

Доказательство.

1. Пусть прообраз любого открытого подмножества открыт. Тогда в любой точке x_0 отображение будет непрерывно (в смысле определения, использующего понятие окрестности): для любой точки $x_0 \in X$ и любой окрестности V точки $f(x_0)$ в качестве окрестности U точки x_0 , которая отображается в V , можно взять $U = f^{-1}(V)$

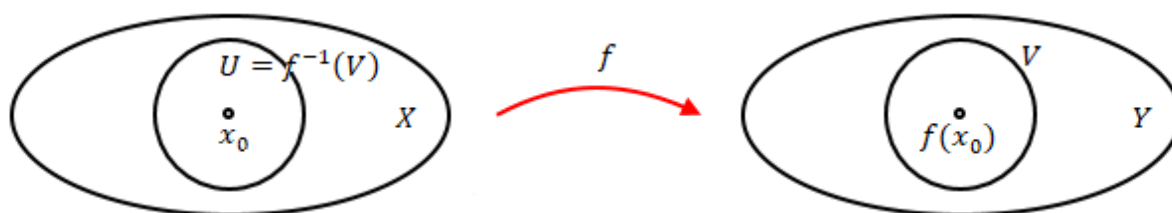


Рис. 9.2. Непрерывность отображения f

2. Пусть f непрерывно. Рассмотрим произвольное открытое подмножество $V \subset Y$ и его прообраз $f^{-1}(V)$. Для любой точки $x \in f^{-1}(V)$ существует ее окрестность U_x (в X), такая что $f(U_x) \subset V$. Тогда рассмотрим

$$\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x = f^{-1}(V).$$

Значит, $f^{-1}(V)$, полученное как объединение открытых в X множеств, будет открытым в X .

Приведем еще один пример топологического пространства.

3) Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, то есть, $\rho(x, y)$ – функция пары точек $x, y \in X$, такая что:

- $\rho(x, y) \geq 0$,
- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция $\rho(x, y)$ называется расстоянием.

В метрическом пространстве можно определить открытый шар с центром в точке P и радиуса ε :

$$B_{P,\varepsilon} = \{x \in X \mid \rho(x, P) < \varepsilon\}$$

Открытыми подмножествами в метрическом пространстве (X, ρ) назовем произвольные объединения открытых шаров (проверьте, что это топология).

Замечание.

1) Если расстояние определить как

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq y \\ 0 & \text{при } x = y \end{cases}$$

то получим дискретную топологию (т.е. пример 1).

2) Антидискретную топологию так получить нельзя.

Часто бывает полезно рассматривать отображение топологического пространства в числовую прямую, то есть, рассматривать функции.

Определение. Функция f на топологическом пространстве X – это отображение

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Задача. Описать непрерывные функции для дискретной и антидискретной топологий.

Решив эту задачу, можно понять, что еще один способ задания топологии – это указание того, какие функции являются непрерывными.

Определение. Кривая γ в топологическом пространстве X – это отображение

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Задача. Описать непрерывные кривые для дискретной и антидискретной топологий.

Сформулируем несколько свойств топологических пространств (каждое свойство будет выделять некий класс топологических пространств).

Определение. Топологическое пространство X называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух подмножеств

$$X = A \cup B,$$

где:

- 1) $A, B \neq \emptyset$,
- 2) $A \cap B = \emptyset$,
- 3) A, B – открытые

Определение. Топологическое пространство X называется линейно связным, если для любых его точек $P, Q \in X$ существует непрерывная кривая

$$\gamma: [a, b] \rightarrow X$$

такая, что $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = Q$ (иными словами, любые две точки можно соединить непрерывной кривой).

Задача. Доказать, что если X линейно связно, то X связно.

Эту задачу удобнее решать с помощью следующей:

Задача. Доказать, что отрезок $[a, b]$ связан.

Задача. Рассмотрим множество $X \in \mathbb{R}^2$ – объединение отрезка $[0, 1]$ и графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$ с индуцированной из $\mathbb{R}^2$ топологией:

$$X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid |y| \leq 1\}$$

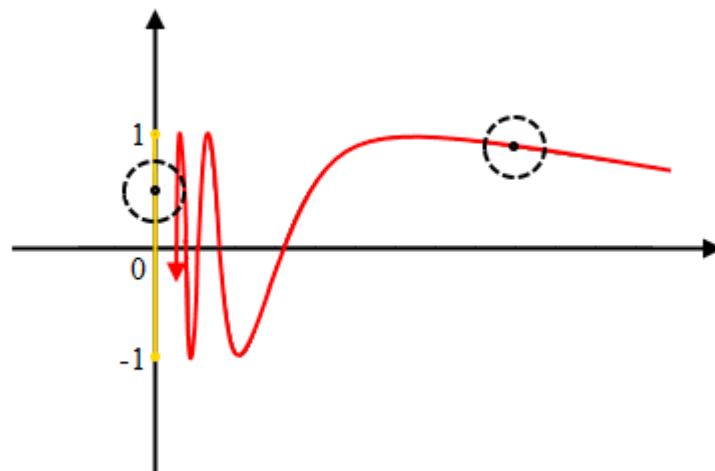


Рис. 9.3. Множество X

Доказать, что X связно, но не линейно связно.

Определение. Пусть X – подмножество топологического пространства Y . Тогда индуцированной топологией на X называется следующий набор открытых множеств: U открыто в X , если $U = V \cap X$, где V – открытое множество в Y .

Определение. Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если для любых двух его точек $P, Q \in X$ существуют их окрестности, которые не пересекаются.

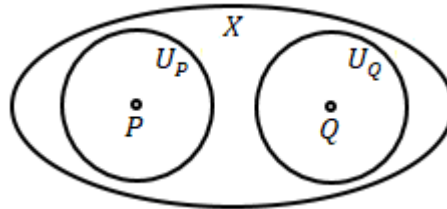


Рис. 9.4. Хаусдорфово пространство

Пример 2 (антидискретная топология) дает пример не хаусдорфова пространства (окрестность любой точки – это все пространство X).

Задача. Доказать, что метрическое пространство с топологией, порожденной шарами (как в примере 3) является хаусдорфовым.

Из этой задачи следует, что пример 2 не может быть порожден какой-то метрикой.

Лекция 10. Топологические пространства. Двумерные многообразия.

На прошлой лекции мы обсудили некоторые топологические понятия (связность, линейная связность, хаусдорфовость), необходимые для определения двумерной поверхности. Рассмотрим еще одно важное свойство топологических пространств – компактность.

Определение. Топологическое пространство X называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$: X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Обсудим некоторые свойства компактных пространств.

Утверждение 1. Пусть X компактно, $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Тогда $f(X)$ – компактное подпространство в Y .

Когда мы рассматриваем некоторое подмножество топологического пространства, то считаем, что на нем задана индуцированная топология.

Доказательство.

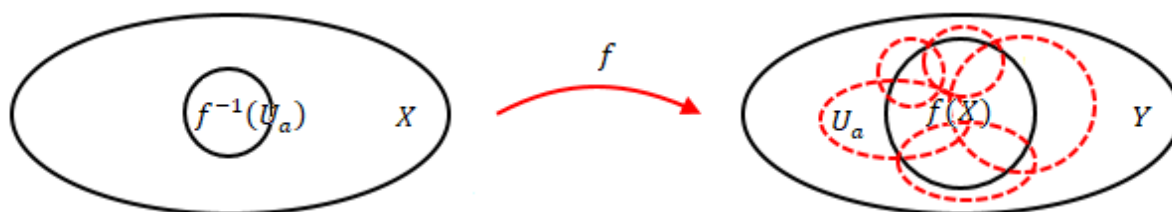


Рис. 10.1. Образ компакта компактен

Пусть $f(X) \subset \bigcup_a U_a$, где U_a – открыты в Y . Докажем, что из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Для каждого U_a рассмотрим его прообраз $f^{-1}(U_a)$. Ранее было доказано, что для топологических пространств отображение непрерывно, если прообраз любого открытого подмножества открыт, значит, $f^{-1}(U_a)$ открыты (в X). Так как $\bigcup_a U_a$ покрывает $f(X)$, то

$$X = \bigcup_a f^{-1}(U_a).$$

Так как X компактно, из этого открытого покрытия X мы можем выделить конечное подпокрытие:

$$X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$$

Тогда, если рассмотреть подмножества U_{α_i} , мы получим конечное подпокрытие для $f(X)$:

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

Утверждение 2. Пусть X компактно, A – замкнутое подмножество в X . Тогда A компактно.

Доказательство.

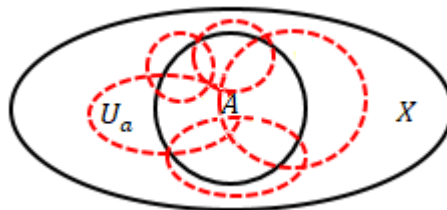


Рис. 10.2. Замкнутое подмножество компакта компактно

Рассмотрим открытое покрытие A : пусть $A \subset \bigcup_a U_a$, где U_a – открыты в X . Докажем, что из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Поскольку (по определению), дополнение к A открыто, то

$$X = \left(\bigcup_a U_a \right) \cup (X \setminus A)$$

- открытое покрытие X .

Поскольку X компактно, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие:

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \right) \cup (X \setminus A)$$

Ясно, что если мы из этого конечного подпокрытия удалим $(X \setminus A)$, то оставшиеся множества будут покрывать A (так как $X \setminus A$ не пересекается с A):

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

Утверждение 3. Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство, A – компактное подпространство в X . Тогда A замкнуто в X .

Доказательство.

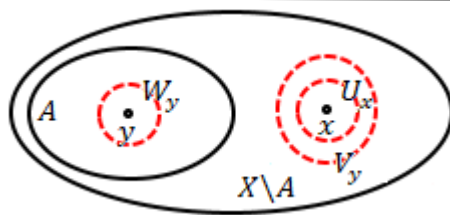


Рис. 10.3. Компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто

Чтобы доказать, что A замкнуто в X , докажем, что $X \setminus A$ открыто в X . Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и попытаемся построить некоторую окрестность этой точки U_x , которая не пересекается с A – если нам это удастся, то объединив такие окрестности по всем $x \in X$, мы получим, что $X \setminus A$ открыто, как объединение открытых множеств.

Для каждой точки $y \in A$ построим (используя, что X – хаусдорфово) пару окрестностей: пусть V_y – окрестность $x \in X \setminus A$, а W_y – окрестность точки $y \in A$, такие что $V_y \cap W_y = \emptyset$.

Если мы рассмотрим пересечение V_y по всем точкам $y \in A$, то получим множество, которое не пересекается с A , но вообще говоря, оно не будет открытым (так как пересечение бесконечного числа открытых множеств не обязано быть открытым).

Используем, что A – компактное подпространство в X :

$$\bigcup_{y \in A} W_y$$

– открытое покрытие A .

Так как A компактно, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N W_{y_i}$$

Тогда, если рассмотреть подмножества V_{y_i} , получим

$$U_x = \bigcap_{i=1}^N V_{y_i}$$

- окрестность точки $x \in X \setminus A$, которая не пересекается с A .

Получаем, что

$$X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$$

Значит, $X \setminus A$ открыто как объединение открытых множеств, поэтому A замкнуто в X .

При обсуждении теоремы Понтрягина-Куратовского нам понадобилось определение гомеоморфизма графов (напоминание: отображение $f: X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, если: 1) f – биекция, 2) f – непрерывно, 3) f^{-1} непрерывно).

Из доказанных выше утверждений следует, что условие 3) в определении гомеоморфизма следует из условий 1) и 2), в частности, для графов (граф является компактным пространством в той топологии, которую мы обсуждали):

Следствие. Если X компактно, а Y хаусдорфово, то для непрерывной биекции $f: X \rightarrow Y$ обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ тоже непрерывно.

Доказательство.

Непрерывность отображения означает, что прообраз любого открытого множества открыт. То есть, для отображения f^{-1} то нужно доказать, что образ любого открытого множества открыт (или, что то же самое, что образ любого замкнутого множества (в X) будет замкнут (в Y)).

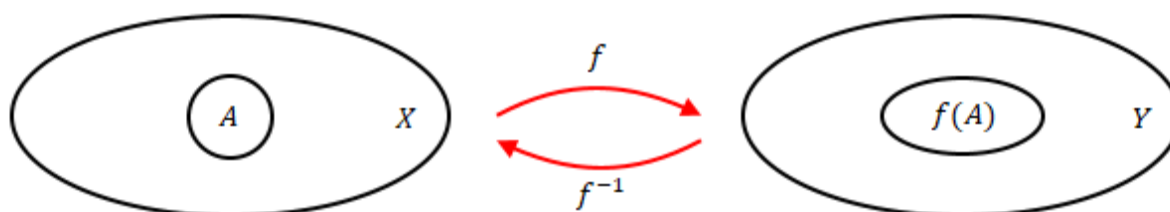


Рис. 10.4. Непрерывность обратного отображения

Пусть A замкнуто в X . Поскольку X – компактно, то A компактно (утверждение 2). Так как непрерывный образ компактного множества компактен (утверждение 1), то $f(A)$ компактно. Поскольку Y хаусдорфово, то $f(A)$ замкнуто в Y (утверждение 3).

Часто топологию удобно задавать, не перечисляя все открытые множества, а выбирая набор открытых множеств, такой что все остальные открытые множества получаются объединением множеств из этого набора.

Определение. База топологии T на пространстве X – это набор подмножеств из T , таких что любое открытое подмножество (= элемент T) есть объединение каких-то элементов базы.

Например, стандартная топология на прямой задается всевозможными объединениями интервалов, т.е. базу топологии на числовой прямой составляют интервалы.

Выбор базы, конечно, неоднозначен, например, можно в качестве базы взять все открытые подмножества в X . Но иногда бывает важно выбрать достаточно маленькое по мощности множество, элементы которого будут базой топологии (например, интервалы с концами в рациональных точках тоже будет базой для числовой прямой, но база будет состоять лишь из счетного числа элементов).

Определение. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, если у него есть счетная база.

На этом закончим описание общих свойств топологических пространств (они будут более подробно обсуждаться в курсе “Введение в топологию”). Свойства связности, компактности, линейной связности топологических пространств мы будем использовать постоянно, а хаусдорфовость и наличие счетной базы понадобятся скорее для строгости изложения (например, мы не будем рассматривать пространства без счетной базы в описании двумерных многообразий, к которым мы сейчас перейдем).

Двумерные многообразия.

Определение. Топологическое пространство X называется двумерным многообразием (2-многообразием, 2-поверхностью), если X – хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности, а у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^2$ (или, что эквивалентно, открытому двумерному диску).

Поясним, почему плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна открытому диску. В самом деле, интервал гомеоморфен $\mathbb{R}$, так как отображение из интервала в $\mathbb{R}$ – это функция, устанавливающая взаимно-однозначное непрерывное соответствие между интервалом и прямой (например, $f(x) = \tan x$):

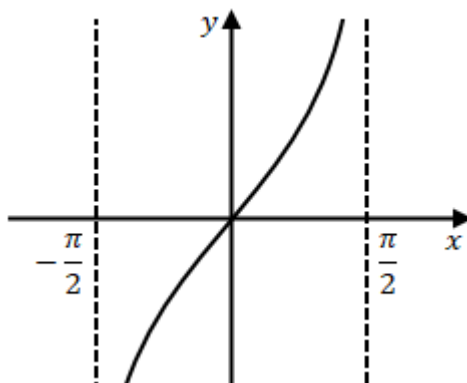


Рис. 10.5. График $f(x) = \tan x$

Для диска можно установить такое соответствие по каждому направлению:

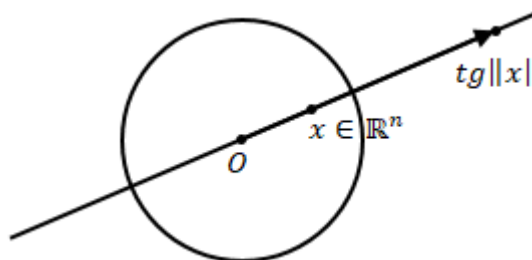


Рис. 10.6. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \frac{\pi}{2}\}$

Построим для каждой прямой, проходящей через центр диска, гомеоморфизм:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

То есть, каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ сопоставим точку, лежащую на прямой, проходящей через центр диска и точку x , по правилу, приведенному выше. Таким образом, плоскость $\mathbb{R}^2$ и открытый диск гомеоморфны.

Итак, локально двумерное многообразие устроено как плоскость. Неформально можно сказать, что двумерное многообразие – это объект, склеенный из двумерных дисков.

Отметим, что если в определении двумерного многообразия везде вместо 2 написать n , то получится определение n -мерного многообразия. В частности, 1-мерное многообразие – это пространство, у каждой точки которого окрестность гомеоморфна интервалу.

В определении многообразия требуется, чтобы пространство было хаусдорфовым и удовлетворяло второй аксиоме счетности. Приведем пример топологического пространства, которое не является многообразием, но у которого окрестность каждой точки гомеоморфна диску: рассмотрим два экземпляра числовой прямой $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ и отождествим все их точки, кроме одной (кроме 0).

Это не хаусдорфово пространство, так как у нулей числовых прямых нет не пересекающихся окрестностей, однако у каждой точки этого пространства окрестность гомеоморфна интервалу:

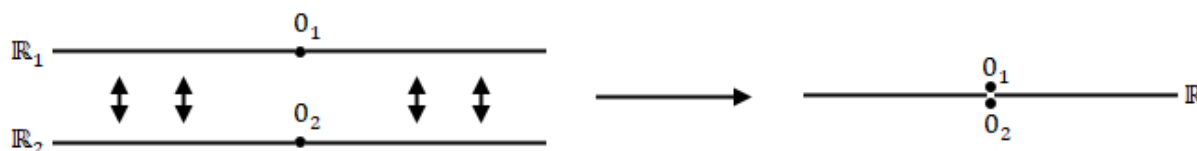


Рис. 10.7. Прямая с раздвоенной точкой

Аналогичный пример можно привести в двумерном случае: если склеить все точки двух плоскостей, кроме одной, получим плоскость с раздвоенной точкой – пример не хаусдорфова двумерного многообразия.

Пример топологического пространства, которое не удовлетворяет второй аксиоме счетности – числовая прямая с дискретной топологией. В этой топологии все подмножества являются открытыми, в частности, все точки прямой являются открытыми множествами, поэтому в базу топологии должны входить все точки прямой (несчетное множество).

Это не является примером пространства, окрестность каждой точки которого гомеоморфна диску. Можно рассмотреть так называемую длинную числовую прямую (числовая прямая с добавленными кардиналами) – получится пример пространства, у которого окрестности гомеоморфны интервалу, но счетной базы нет.

Замечание. Связные одномерные многообразия – прямая $\mathbb{R}^1$ и окружность S^1 .

Можно получить список многообразий в двумерном случае, при $n > 2$ этого сделать нельзя.

Рассмотрим примеры двумерных многообразий.

- 1) Плоскость $\mathbb{R}^2$ (или любое открытое подмножество плоскости)
- 2) Сфера S^2 – несложно доказать, что окрестность любой точки на сфере можно взаимно-однозначно и непрерывно отобразить на двумерный круг.

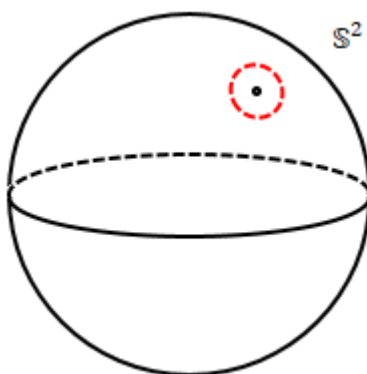


Рис. 10.8. Сфера

- 3) Тор T^2

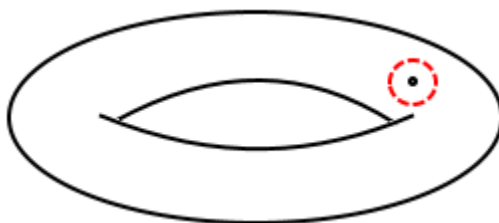


Рис. 10.9. Тор

- 4) Можно считать, что тор мы получили, склеив края цилиндра так, чтобы направления движения на склеивающихся окружностях совпадали. Если склеить края цилиндра так, чтобы направления стрелок на склеенной окружности были противоположными, то получится бутылка Клейна (нельзя изобразить без самопересечений).

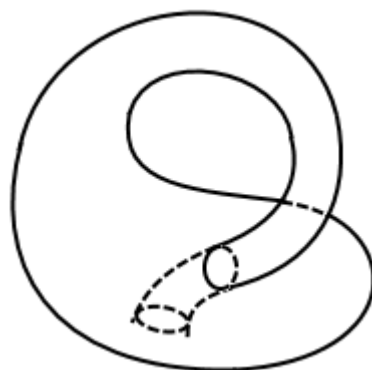


Рис. 10.10. Бутылка Клейна

Существует способ описания двумерных многообразий, как результат склейки каких-то кусочков плоскости. Например, если мы склеим стороны квадрата так, как показано на рис. 10.11 (т.е. склеим стороны, отмеченные одинаковыми буквами так, чтобы совпали направления стрелок на сторонах), то получим тор:

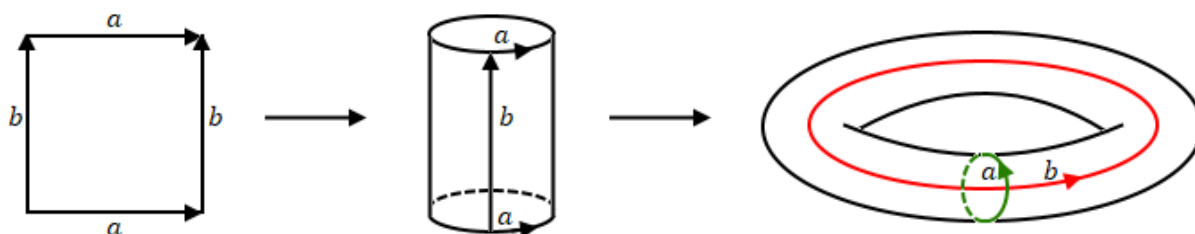


Рис. 10.11. Склейка тора из квадрата

Бутылка Клейна получается из следующей склейки:

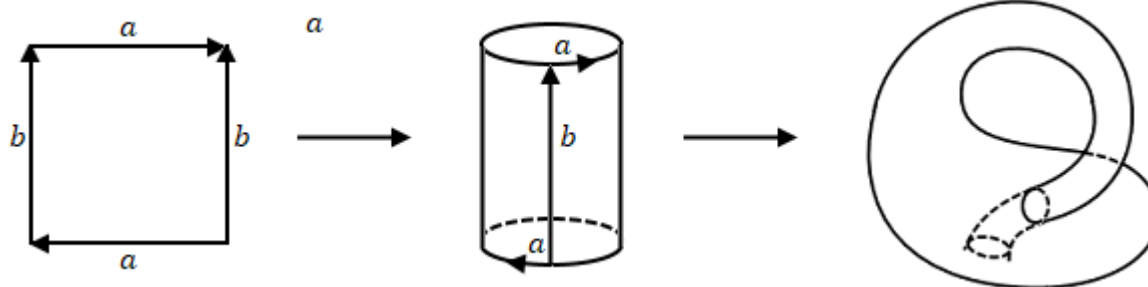


Рис. 10.12. Склейка бутылки Клейна из квадрата

- 5) Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ – получается, если склеить стороны квадрата так, как показано на рис. 10.13:

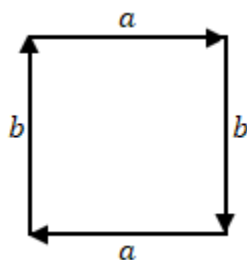


Рис. 10.13. Склейка проективной плоскости из квадрата

Почему это двумерное многообразие называется проективной плоскостью? Рассмотрим модель проективной плоскости, точками в которой являются все прямые в $\mathbb{R}^3$, проходящие через начало координат.

Рассмотрим сферу с центром в начале координат и отождествим точки пересечения прямых со сферой (x и $-x$). Можно сказать, что проективная плоскость – это множество пар диаметрально противоположных точек на сфере.

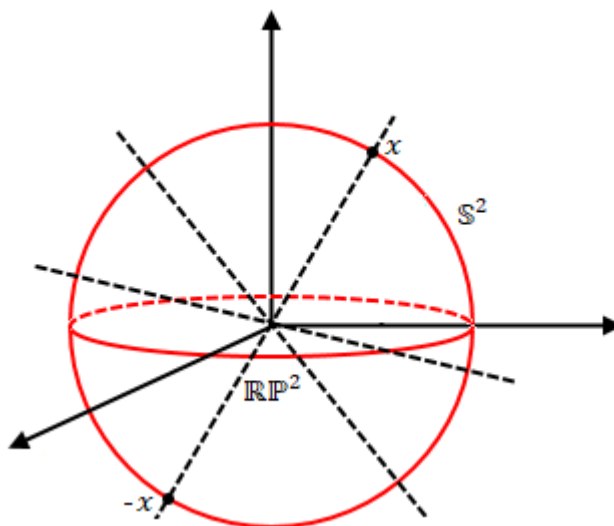


Рис. 10.14. Модель проективной плоскости

Сфера, у которой отождествили диаметрально противоположные точки – это то же самое, что и полусфера, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки на границе. Но с топологической точки зрения такая полусфера и двумерный диск, у которого отождествлены точки на границе – это одно и то же:

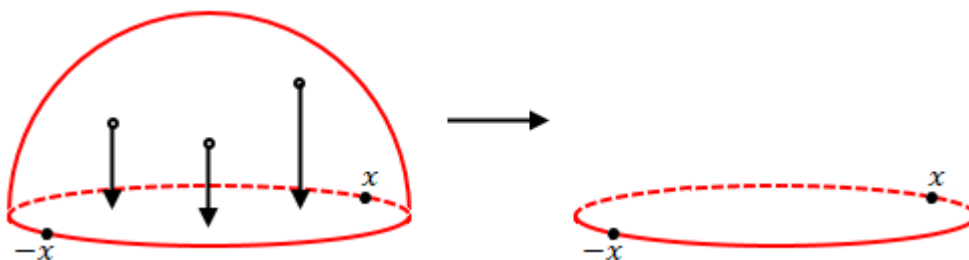


Рис. 10.15. Полусфера соответствует диску

Склейка противоположных точек на границе диска соответствует склейке квадрата, указанной на рис. 10.13.

Таким образом, склейка квадрата, указанная на рис. 10.13 – это другая модель объекта, который в аналитической геометрии назывался проективной плоскостью и определялся как связка прямых.

Сферу тоже можно задать в виде склейки квадрата:

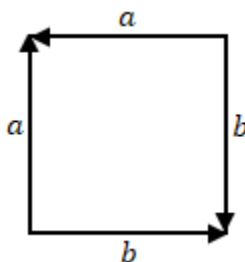


Рис. 10.16. Склейка сферы из квадрата

Определим понятие склейки более формально.

Фактор-топология.

Пусть X – топологическое пространство, на котором задано отношение эквивалентности, $\tilde{X}$ – множество классов эквивалентности. Опишем открытые множества на пространстве, состоящем из классов эквивалентности.

Рассмотрим естественную проекцию

$$\pi: X \rightarrow \tilde{X},$$

т.е. каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие класс эквивалентности $[x] \in \tilde{X}$, которому она принадлежит.

Определим топологию на $\tilde{X}$ так, чтобы отображение π было непрерывным. Это можно сделать многими способами (отображение непрерывно, когда прообраз любого открытого множества открыт). Назовем подмножество U в $\tilde{X}$ открытым, если его прообраз $\pi^{-1}(U)$ – открытое подмножество в X .

Замечание. Индуцированную топологию можно описать в таком же духе: пусть X – топологическое пространство, A – подпространство X . Рассмотрим отображение (вложение) $\alpha: A \rightarrow X$. Определим открытые множества на A так, чтобы отображение α было непрерывным. Так как для непрерывного отображения прообраз открытого множества открыт, то открытыми множествами в A нужно назвать все такие подмножества, прообразы которых при отображении α являются открытыми. Это и есть

пересечения открытых множеств в X с A . То есть, индуцированная топология и фактор-топология могут быть описаны единым образом.

В рассматриваемых примерах классы эквивалентности на двумерном диске следующие: класс эквивалентности внутренней точки состоит только из нее самой, а диаметрально противоположные точки на границе эквивалентны. Задание фактор-топологии на таком множестве (то есть, склейка диаметрально противоположных точек диска) означает следующее: для класса эквивалентности, состоящего из двух диаметрально противоположных точек, окрестность будет состоять из двух полудисков, которые склеиваются по границе:

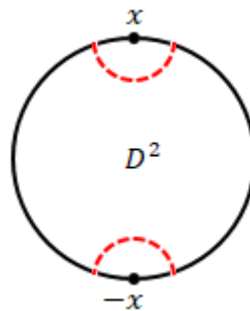


Рис. 10.17. Окрестности граничных точек диска до склейки

Аналогично, когда мы склеиваем стороны квадрата, то вводим отношение эквивалентности на отрезках, помеченных одинаковыми буквами (введя систему координат на отрезках), отождествляя точки с одинаковыми координатами на них.

Лекция 11. Двумерные многообразия. Теорема классификации.

На прошлой лекции были описаны несколько примеров двумерных поверхностей, которые получались с помощью склейки сторон квадрата. Вся информация, которая содержится в рисунке, задающем склейку, можно задать словом – начиная с какой-то точки на границе квадрата будем идти по границе и выписывать встречающиеся буквы, причем если направление стрелки на стороне квадрата совпадает с направлением обхода, то будем писать букву, стоящую на стороне квадрата, а если не совпадает – то букву в минус первой степени. Например, для тора получим слово $aba^{-1}b^{-1}$.

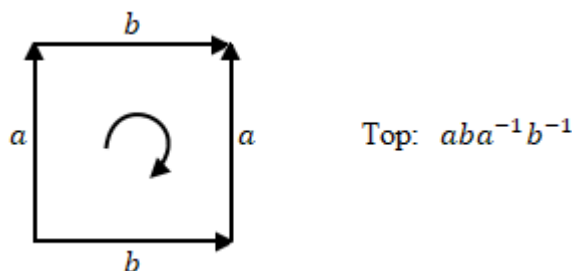


Рис. 11.1. Склейка тора из квадрата

Слово выписывается неоднозначно, тем не менее, по нему можно однозначно восстановить картинку, в результате склейки которой получалась двумерная поверхность.

Этот язык можно распространить на более широкий класс объектов – рассмотрим произвольный $2k$ -угольник, у которого стороны помечены буквами, причем каждая буква встречается ровно два раза, и на каждой стороне стрелкой задано направление.

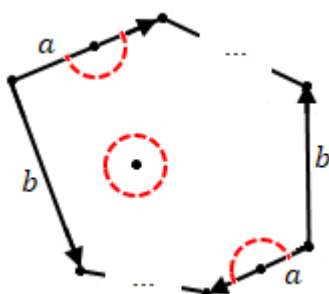


Рис. 11.2. Склейка двумерного многообразия из многоугольника

В результате склейки этого $2k$ -угольника получим двумерное многообразие (действительно, после склейки у каждой точки окрестность будет гомеоморфна диску).

Таким образом, 2-многообразия можно описывать как склейки многоугольников по сторонам, или “словами”.

Дальше речь пойдет о том, чтобы описать все возможные (компактные связные) двумерные многообразия. Это – один из способов описания многообразий из этого списка.

Теорема. Любое связное компактное двумерное многообразие гомеоморфно многообразию, полученному склейкой сторон многоугольника по одному из следующих слов:

- 0) aa^{-1} ,
- 1) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$, $n \geq 1$,
- 2) $a_1a_1a_2a_2 \dots a_ma_m$, $m \geq 1$.

Прежде чем доказывать эту теорему, введем еще одно понятие. Двумерное многообразие удобно разбить правильным образом на топологические треугольники, из которых оно будет склеено (топологическим треугольником в многообразии X назовем некое подмножество, которое гомеоморфно треугольнику на плоскости со структурой вершины-стороны):

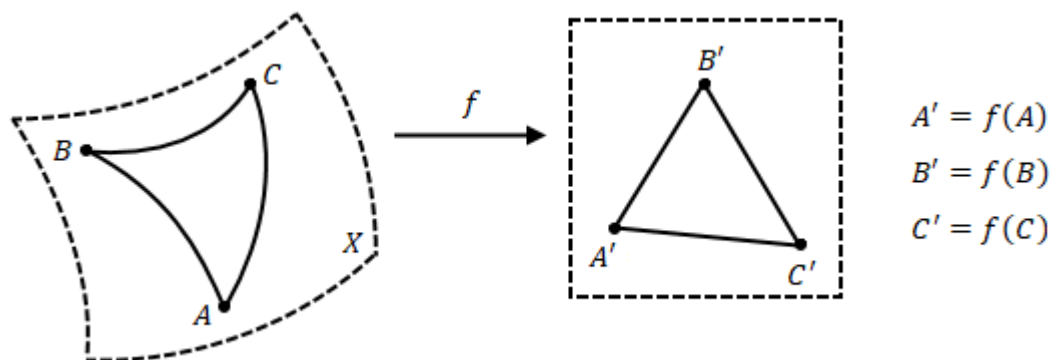


Рис. 11.3. Топологический треугольник

Определение. Триангуляция 2-многообразия X – это представление X в виде объединения топологических треугольников с условием на их пересечение: два топологических треугольника либо не пересекаются, либо пересекаются по вершине, либо пересекаются по стороне.

Утверждение (без доказательства). Для любого связного компактного двумерного многообразия существует его конечная триангуляция:

$$X = \bigcup_{i=1}^N \Delta_i$$

Отметим, что без условия хаусдорфовости и существования счетной базы это утверждение неверно.

Мы будем классифицировать двумерные многообразия (то есть, топологические пространства, в которых каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной диску, которые также являются хаусдорфовыми и обладают счетной базой). Иначе можно сказать, что мы будем классифицировать такие двумерные многообразия, для которых существует конечная триангуляция.

Перейдем к доказательству теоремы. Оно разбивается на два этапа. Первый этап – объяснение того, что для любого компактного связного двумерного многообразия найдется многоугольник (заданный некоторым словом), из которого его можно склеить. Второй этап заключается в том, чтобы с помощью некоторых операций менять это слово так, чтобы привести его к виду, указанному в формулировке теоремы.

Доказательство.

I. Существование многоугольника, задающего многообразие.

Рассмотрим на X конечную триангуляцию. Разрежем X на треугольники, помечая их стороны разными буквами и стрелками. Тем самым, после разрезания мы получим набор треугольников, каждая сторона которых помечена буквой и выбрано направление, причем каждая буква будет встречаться ровно два раза.

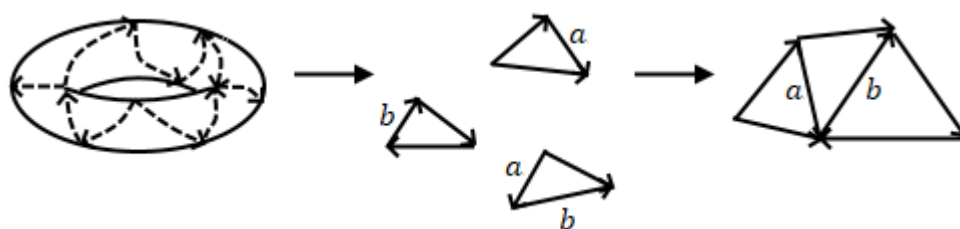


Рис. 11.4. Построение многоугольника из двумерного многообразия

Далее будем собирать треугольники, приклеивая их к уже полученному многоугольнику, пока они не закончатся – это возможно, поскольку X связно (действительно, если мы не можем приклеить треугольник, тогда мы получили многоугольник, на границе которого каждая буква встречается ровно два раза – склеив соответствующие стороны, получим связное двумерное многообразие, а из оставшихся треугольников склеим что-то еще – противоречие с тем, что X связно).

В результате получим многоугольник, результатом склейки сторон которого будет многообразие X .

Теперь будем менять слово, задающее этот многоугольник, чтобы привести его к одному из канонических видов, перечисленных в теореме. Опишем алгоритм.

II. Алгоритм изменения слова до канонического вида.

0) Вычеркивание фрагмента вида $\dots aa^{-1} \dots$

Если в слове есть фрагмент $\dots aa^{-1} \dots$ (причем aa^{-1} – это не все слово), то вычеркиваем его. Действительно, после склейки фрагмент слова aa^{-1} пропадет:

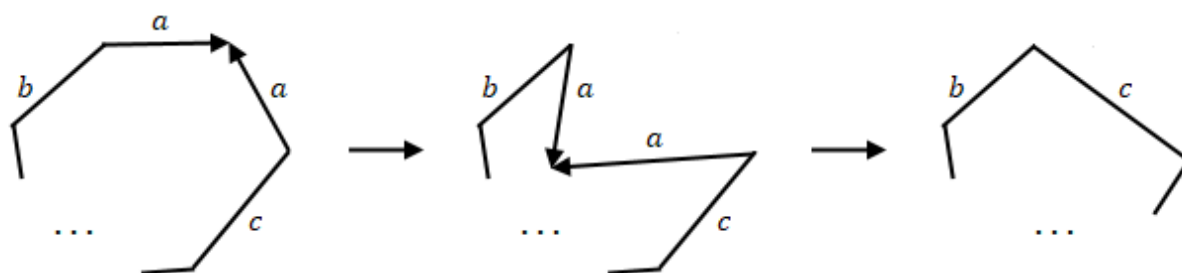


Рис. 11.5. Вычеркивание фрагмента вида $\dots aa^{-1} \dots$

1) Приведение к одной вершине.

Пометим все вершины многоугольника буквами ($A, B, \dots$), которые соответствуют этим вершинам после склейки. Пусть не все вершины многоугольника склеиваются в одну, тогда есть сторона многоугольника, концы которой не склеиваются, т.е. принадлежат разным классам. Пометим эту сторону буквой a . Тогда соседняя сторона может быть помечена буквой $b \neq a$ (действительно, соседняя сторона не может быть помечена буквой a : случай $\dots aa \dots$ невозможен, потому что мы предположили, что вершины A и B не склеиваются, случай $\dots aa^{-1} \dots$ невозможен, потому что мы договорились уничтожать фрагмент $\dots aa^{-1} \dots$).

Найдем в многоугольнике вторую сторону, помеченную буквой b . Теперьотрежем помеченный треугольник и приклеим его к стороне b так, как показано на рис. 11.6:

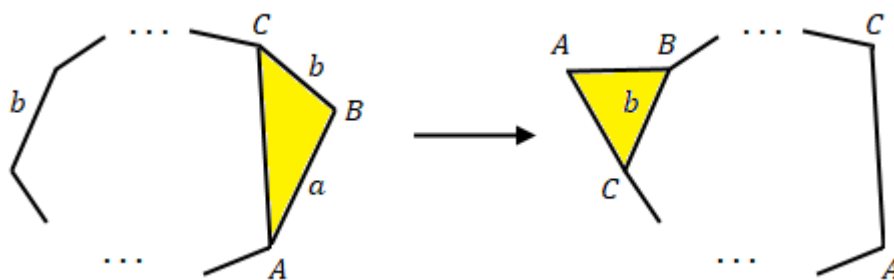


Рис. 11.6. Уменьшение вершин класса B

В результате вершин класса B стало на одну меньше, а вершин класса A на одну больше (несложно понять, что если вершина какого-то класса останется одна, то склеятся ребра, подходящие к этой вершине и она уничтожится). Будем повторять эту операцию до тех пор, пока не останется один класс вершин, т.е. все вершины многогранника будут склеиваться в одну.

2) Собираем вместе пары вида $\dots a \dots a \dots$

Если на границе многоугольника есть две стороны, помеченные одинаковой буквой так, что направление обхода сторон одинаковое относительно обхода границы многоугольника, то разрежем многоугольник так, как показано на рис. 11.7 и склеим по стороне a :

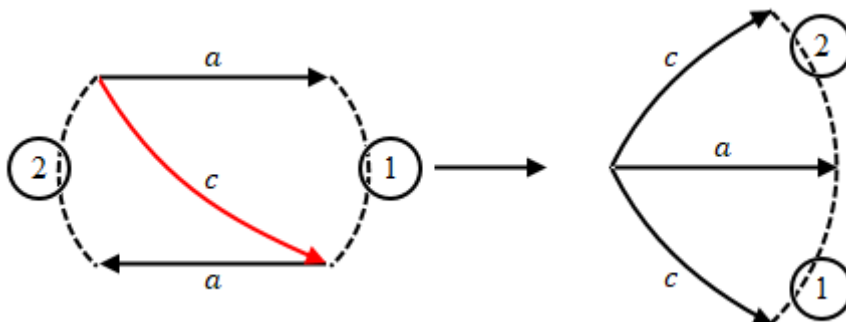


Рис. 11.7. Склейка многоугольника по стороне a

Теперь два ребра, помеченные одной буквой, стоят рядом. Будем совершать эту операцию до тех пор, пока в слове есть две одинаковые буквы (в одинаковых степенях), стоящие не рядом.

Если на этом этапе мы получили слово вида $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_m a_m$, то пришли к одному из канонических видов. Иначе перейдем к 3 этапу.

3) Собираем вместе четверки $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$

Если после шага 2 есть буквы, входящие в слово как $\dots b \dots$ и $\dots b^{-1} \dots$, тогда две стороны, помеченные этими буквами, делят границу многоугольника на две части, и найдутся две стороны, помеченные одинаковой буквой, расположенные так, как показано на рис. 11.8, лежащие в разных частях (т.е. есть еще пара a и a^{-1} , причем в слове они встречаются так: $\dots b \dots a \dots b^{-1} \dots a^{-1} \dots$).

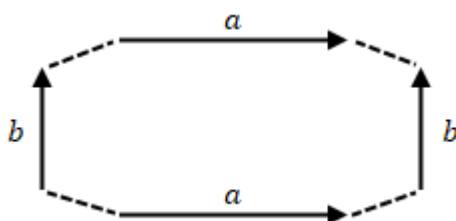


Рис. 11.8. Четверка $bab^{-1}a^{-1}$

Действительно, не может быть так, чтобы стороны из частей, на которые границу многоугольника делят b и b^{-1} , склеивались только между собой – в этом случае вершины из этих частей склеивались бы только между собой, а это противоречит шагу 1 (приведение к одной вершине).

При этом ребра, помеченные буквой a , расположены так как показано на рис. 11.8 – если у одной из стрелок поменять направление, то получим два ребра, которые направлены в одну сторону относительно обхода границы многоугольника, а это противоречит шагу 2 (собираем вместе пары вила $\cdots a \cdots a \cdots$).

Собираем четверки $\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$ вместе следующим образом. Сначала проведем разрез x , как показано на рис. 11.9 и склеим по стороне b :

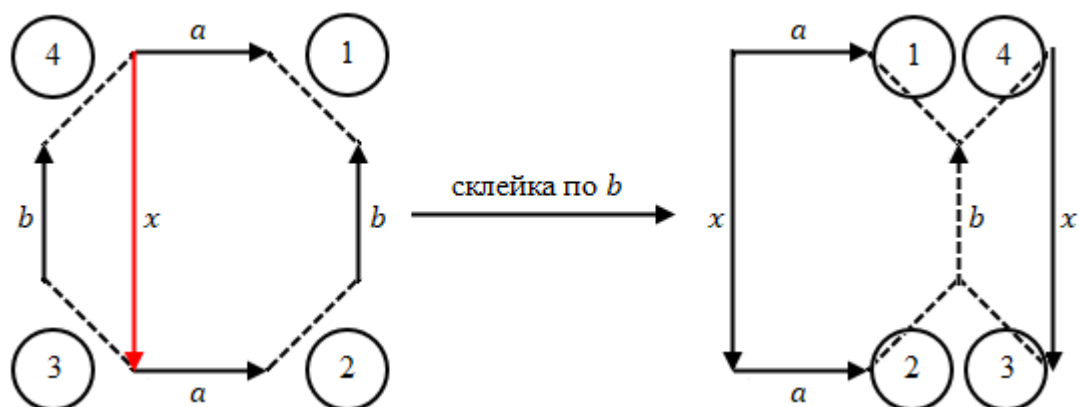


Рис. 11.9. Склейка многоугольника по стороне b

Теперь проведем разрез y и склеим по стороне a :

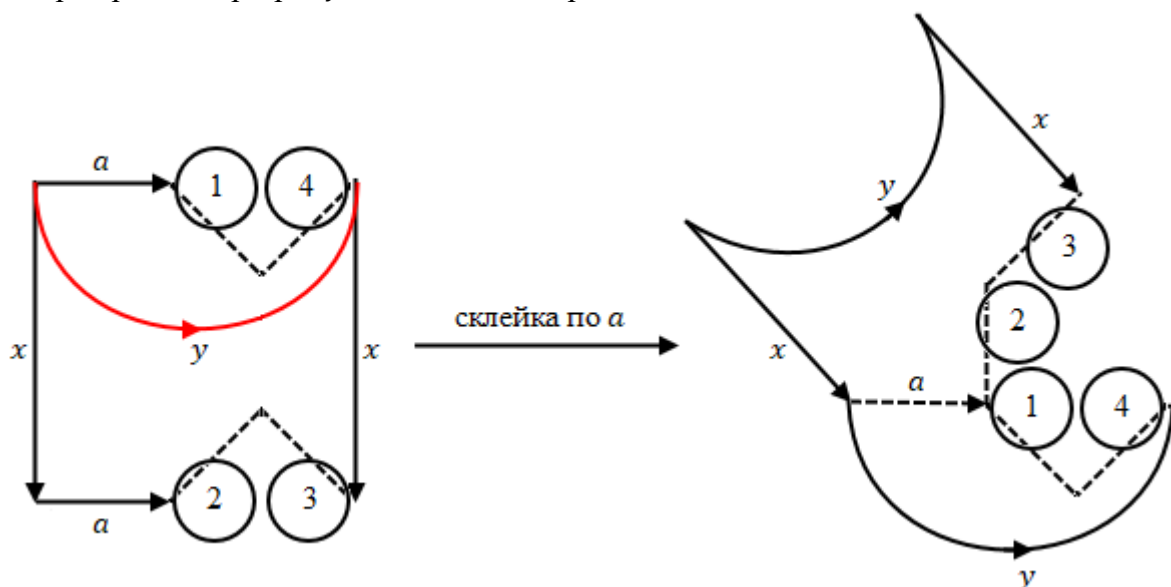


Рис. 11.10. Склейка многоугольника по стороне a

Получаем $y^{-1}x^{-1}yx$ (переобозначая направление стрелок получим что требовалось). Фрагменты 1, 2, 3, 4 направлены так же, как и до переклеек, что гарантирует нам то, что при переклейках мы ничего не испортили (не нужно запускать шаг 2).

После этого шага алгоритма либо мы получили канонический вид $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$, либо в полученном слове есть фрагменты вида $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ и $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_m a_m$, причем они стоят рядом.

4) Если в слове есть фрагменты вида $\dots aa \dots$ и $\dots xux^{-1}y^{-1} \dots$.

Проведем разрез b и склеим по стороне a :

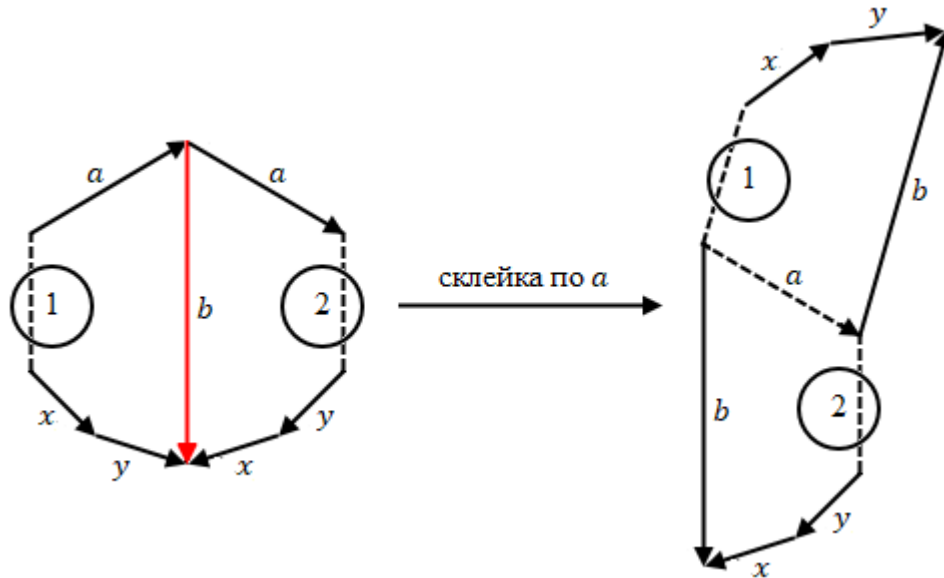


Рис. 11.11. Склейка многоугольника по a

Теперь проведем разрез p и склеим по стороне x :

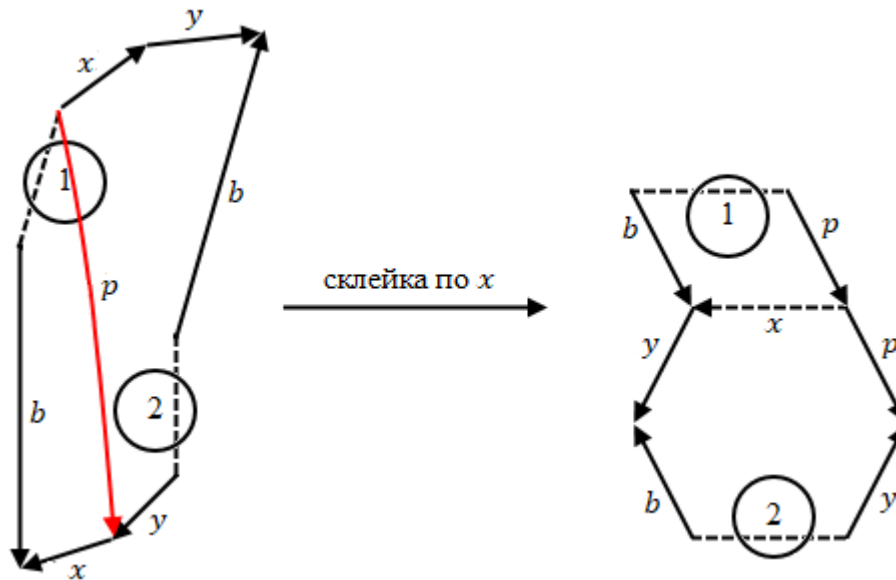


Рис. 11.12. Склейка многоугольника по стороне x

Далее проведем разрез q и склеим по стороне y :

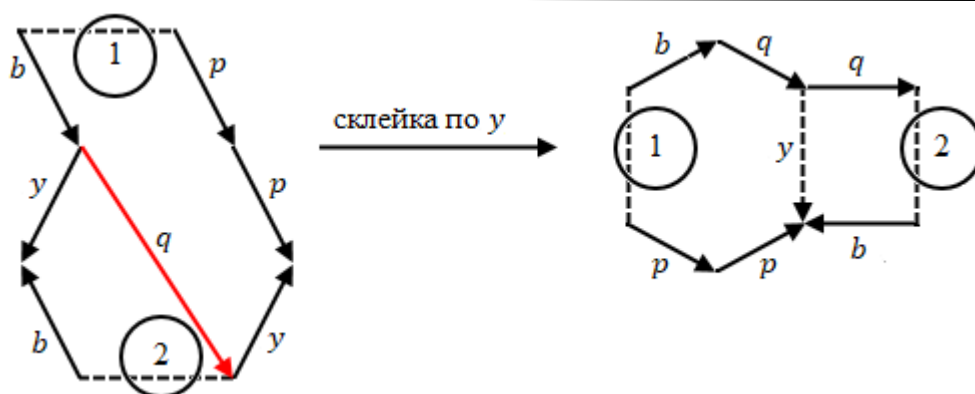


Рис. 11.13. Склейка многоугольника по стороне y

Наконец сделаем разрез z и склеим по стороне b :

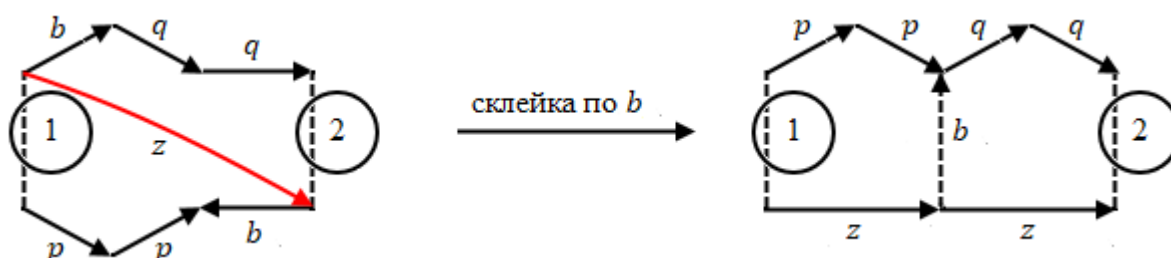


Рис. 11.14. многоугольника по стороне b

Вместо пары фрагментов $\dots aa \dots$ и $\dots xux^{-1}y^{-1} \dots$ возникли фрагменты $\dots zz \dots$ и $\dots prrq \dots$. Таким образом, пока есть пары фрагментов вида $\dots aa \dots$ и $\dots xux^{-1}y^{-1} \dots$, мы можем совершать эту операцию, после которой фрагмент $xux^{-1}y^{-1}$ уничтожается. В результате мы приходим к каноническому слову $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_m a_m$.

Итак, теорема доказана, но теоретически может возникнуть ситуация, когда в списке слов, задающих многообразия, разными словами представлены одни и те же многообразия. Для того, чтобы проверить, что доказанная теорема действительно является теоремой классификации, нужно использовать характеристики, которые одинаковы для гомеоморфных многообразий. Определим их (не доказывая подробно корректность такого определения).

Эйлерова характеристика.

Для 2-многообразия X с данной триангуляцией число

$$B - P + \Gamma = \chi(X)$$

называется эйлеровой характеристикой X , где B – число вершин триангуляции, P – число ребер триангуляции, Γ – число треугольников триангуляции.

Теорема. Число $\chi(X)$ не зависит от триангуляции.

Доказательство этой теоремы довольно сложное, мы не будем его приводить. Нужно доказать, что для любых двух триангуляций многообразия число $B - P + \Gamma$ одинаково.

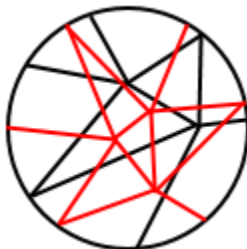


Рис. 11.15. Различные триангуляции многообразия

Для триангуляций, подобных тем, что изображены на рис. 11.15, это сделать несложно – достаточно рассмотреть ребра обеих триангуляций и подразбить, если требуется, треугольники на более мелкие (измельчить триангуляцию) так, чтобы новая триангуляция была измельчением уже существующих.

Однако, если ребра триангуляций – произвольные непрерывные кривые (например, $\sin \frac{1}{x}$ – см. рис. 2.3), такое рассуждение не годится.

Ясно, что если эйлерова характеристика двух многообразий различная, то эти многообразия не гомеоморфны. Вычислим эйлерову характеристику для многообразий из списка в теореме.

Для сферы $\chi(S^2) = 2$ (фактически мы уже вычисляли эйлерову характеристику сферы, так как ребра триангуляции можно рассматривать как граф на сфере. В качестве поверхности, гомеоморфной сфере, можно рассмотреть произвольный выпуклый многогранник, например, тетраэдр).

Рассмотрим триангуляцию поверхности, получающейся склейкой сторон $2k$ -угольника (будем считать, что триангуляция получилась разбиением многоугольника на треугольники, многоугольник приведен к каноническому виду).

Число вершин у триангуляции многоугольника и число вершин у триангуляции поверхности будет разным. Пусть у триангуляции многоугольника B' вершин, P' ребер и Γ' треугольников. Тогда после склейки получим (так как все вершины многоугольника склеиваются в одну, стороны многоугольника склеиваются попарно, количество треугольников триангуляции не изменится):

$$\begin{aligned} B &= B' - (2k - 1) \\ P &= P' - k \\ \Gamma &= \Gamma' \end{aligned}$$

Триангуляцию многоугольника можно рассматривать как плоский граф. Мы знаем, что

$$B' - P' + \Gamma' = 1$$

(так как Γ' - число компонент на 1 больше, чем количество треугольников триангуляции). Отсюда получаем

$$\chi(X) = B - P + \Gamma = B' - (2k - 1) - (P' - k) + \Gamma' = B' - P' + \Gamma' - k + 1 = 2 - k$$

В случае 1 ($k = 2n$) получаем

$$\chi(X) = 2 - 2n$$

В случае 2 ($k = m$) получаем

$$\chi(X) = 2 - m$$

Итак, действительно, эйлерова характеристика оказалась различной для любых двух многообразий из одной серии, но в разных сериях есть многообразия с одинаковой эйлеровой характеристикой. Обсудим этот вопрос на следующей лекции.

Лекция 12. Ориентируемость многообразий. Связная сумма многообразий.

Рассмотрим еще одно свойство двумерных многообразий, называемое ориентируемостью.

Ориентируемость.

Используя триангуляцию, можно эту характеристику поверхности определить следующим образом: будем на каждом треугольнике выбирать некоторую ориентацию (направление обхода его границы), со следующим условием: если треугольники имеют общую сторону, то направление обхода, индуцированное обходом границы треугольника на этой (общей) стороне должно быть разным.



Рис. 12.1. Согласованная ориентация треугольников триангуляции

Такие треугольники будем называть согласованно ориентированными.

Определение. Многообразие M^2 называется ориентируемым, если на треугольниках его триангуляции можно ввести согласованную ориентацию.

Утверждение (без доказательства). Свойство поверхности (2-многообразия) быть ориентируемым или неориентируемым не зависит от триангуляции.

Примером неориентируемого многообразия может служить лист Мёбиуса.

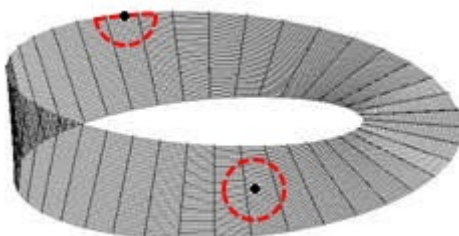


Рис. 12.2. Лист Мёбиуса и окрестности точек на нем

Это многообразие с краем. Отличие многообразия с краем от многообразия без края только в том, что у него есть два типа точек – точки, окрестность которых гомеоморфна двумерному диску и точки, у которых существует окрестность, гомеоморфная полудиску.

Зададим лист Мёбиуса в виде склейки прямоугольника:

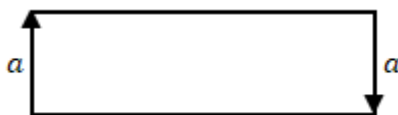


Рис. 12.3. Склейка листа Мёбиуса из прямоугольника

Разобьем каким-либо образом этот прямоугольник на треугольники. После выбора на произвольном треугольнике направления обхода, на соседних треугольниках направление обхода границы задается однозначно:

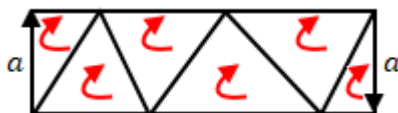


Рис. 12.4. Выбор направления обхода границы треугольников

Как бы мы ни выбирали направление обхода (по или против часовой стрелки) при склейке листа Мёбиуса из прямоугольника по стороне a , нам не удастся согласовать ориентацию на треугольниках, содержащих сторону a .

Аналогичная ситуация и в общем случае – выбрав направление обхода на одном треугольнике, мы однозначно ориентируем все остальные треугольники триангуляции (если поверхность связная). На плоскости (до склейки) это означает, что у всех треугольников будет направление обхода по или против часовой стрелки.

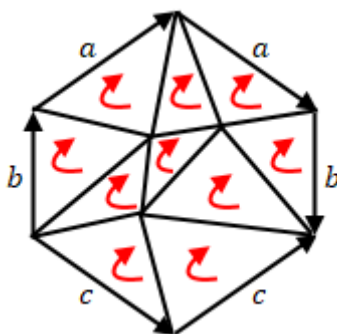


Рис. 12.5. Задание ориентации поверхности

Несложно видеть, что для всех сторон треугольников, находящихся внутри многоугольника, условие согласованности выполнено. Остается проверить (как и в

случае с лентой Мёбиуса), согласована ли ориентация треугольников по сторонам многоугольника.

Например, после склейки сторон, помеченных буквой b (см. рис. 12.5) ориентация треугольников, содержащих эту сторону, будет несогласованной, поэтому поверхность, изображенная на рис. 12.5 будет неориентируемой.

Отсюда следует, что понять, будет ли поверхность ориентируемой, можно по слову, которое ее задает: если в слове есть пара одинаковых букв, встречающихся в одинаковых степенях, то задать ориентацию на поверхности не получится, а если все одинаковые буквы встречаются в разных степенях, то поверхность ориентируемая.

Теперь понятно, что серии многоугольников, которые мы получили в теореме классификации, отличаются ориентируемостью:

- 0) aa^{-1}
- 1) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}, n \geq 1$
- 2) $a_1a_1a_2a_2 \dots a_ma_m, m \geq 1$

– в первой серии все многообразия ориентируемы, а во второй серии все многообразия не ориентируемы.

Приведем еще несколько замечаний, которые оставим в качестве задач.

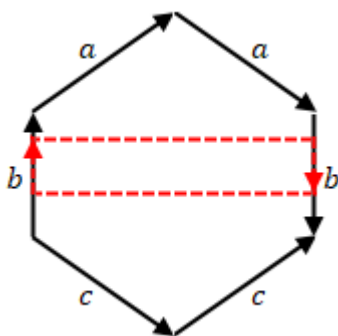


Рис. 12.6.

Рассмотрим многоугольник на рис. 12.6. Несложно понять, что если у многоугольника, задающего склейку поверхности, есть две стороны, помеченные одинаковыми буквами так, что стрелки на этих сторонах направлены в одну и ту же сторону (в смысле направления обхода границы многоугольника), то можно из этой поверхности вырезать лист Мёбиуса. То есть, если поверхность неориентируема, то в ней есть лист Мёбиуса.

Задача. Доказать, что для двумерного многообразия M верно следующее: M неориентируемо тогда и только тогда, когда M содержит лист Мёбиуса.

Мы обсудили определение эйлеровой характеристики и способы ее вычисления:

$$\chi(M^2) = B - P + \Gamma$$

Но на практике количество треугольников триангуляции может быть довольно большим, и вычисление эйлеровой характеристики по определению может быть довольно затруднительным. Можно поступить иначе.

Задача. Пусть в M^2 расположен граф G , который разбивает M^2 на области, гомеоморфные двумерному диску. Тогда

$$\chi(M^2) = B - P + \Gamma,$$

где B – количество вершин G , P – количество ребер G , Γ – количество компонент $M^2 \setminus G$.

Замечание. Условие гомеоморфности областей двумерному диску важно.

Пример. Рассмотрим склейку тора из квадрата.

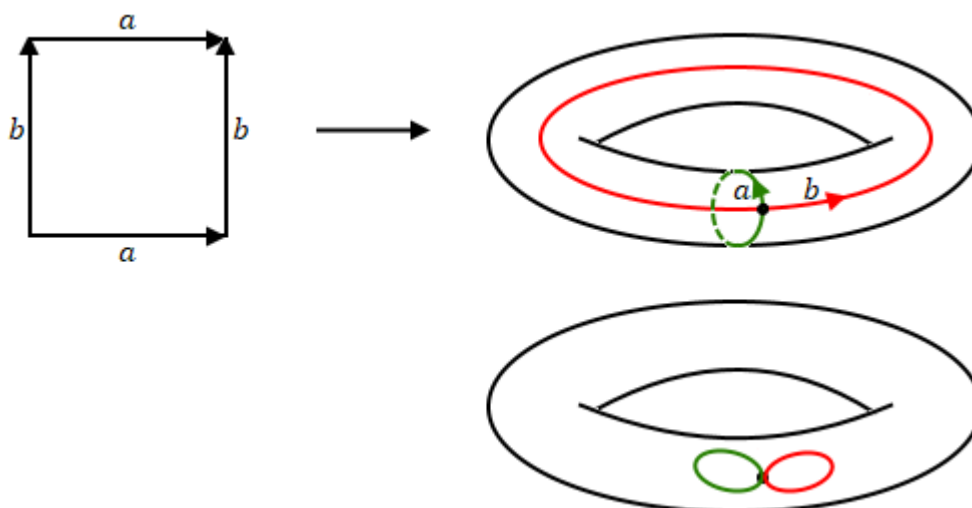


Рис. 12.7. Два варианта расположения графа G

Рассмотрим граф G на торе, образованный сторонами квадрата. Тогда $\mathbb{T}^2 \setminus G$ – область, гомеоморфная диску (после выбрасывания графа G из тора останется квадрат). Для графа G :

$$\begin{aligned} B &= 1, \\ P &= 2, \\ \Gamma &= 1. \end{aligned}$$

Получаем

$$\chi(\mathbb{T}^2) = B - P + \Gamma = 0$$

Если рассмотреть тот же самый граф G , иначе вложенный в тор (см рис. 12.7), то количество вершин и ребер не изменится, а количество областей $\mathbb{T}^2 \setminus G$ станет равным 3,

то есть, получим $\chi(\mathbb{T}^2) = 2$ – неправильный ответ, так как не все области, на которые граф разбивает поверхность, будут гомеоморфны диску.

Несколько замечаний по поводу решения задачи. Для ее решения достаточно доказать следующую лемму:

Лемма. Пусть в M^2 расположена область, гомеоморфная двумерному диску. Тогда триангуляцию этой области можно рассматривать как плоский граф G , для которого

$$B - P + \Gamma = 1,$$

где B – количество вершин G , P – количество ребер G , Γ – количество треугольников триангуляции (следует из формулы Эйлера для плоских графов: $B - P + \Gamma = 2$, с учетом внешней области).

До разбития области на треугольники также верна формула

$$B - P + \Gamma = 1,$$

где B – количество вершин на границе области, P – количество ребер на границе области, Γ – область, которая мы хотим разбить на треугольники. Таким образом, при разбиении областей на треугольники величина $B - P + \Gamma$ не будет меняться.

В заключение этой темы сформулируем теорему классификации несколько в других терминах и введем новую операцию, с помощью которой мы также сможем описать все двумерные поверхности (корректность операции оставим без доказательства).

Определение. Пусть M_1 и M_2 – компактные связные двумерные многообразия. Вырежем диски в многообразии M_1 и в многообразии M_2 , и полученные окружности в M_1 и M_2 склеим по какому-то гомеоморфизму.

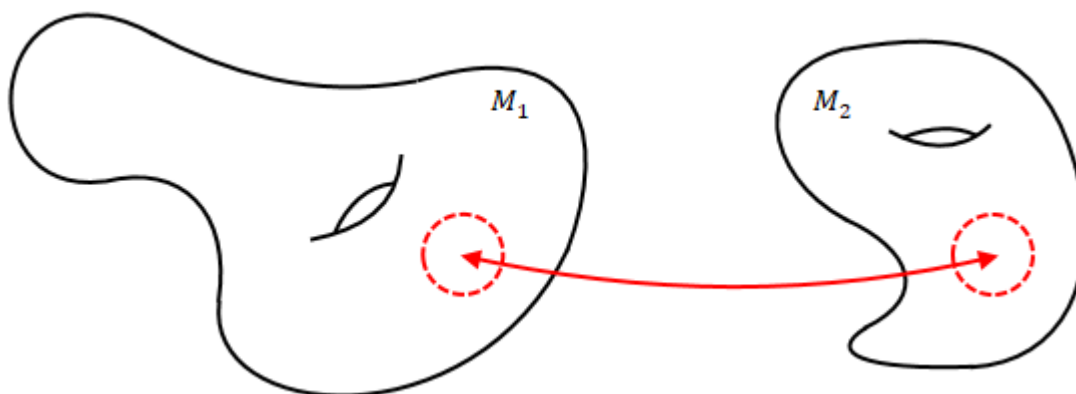


Рис. 12.8. Построение связной суммы двух многообразий

Получим новое многообразие

$$M = M_1 \# M_2$$

- связная сумма многообразий M_1 и M_2 .

Для того, чтобы понять, что операция связной суммы определена корректно, нужно проверить, что после склейки получится двумерное многообразие (то есть, что после склейки окрестность каждой точки будет гомеоморфна двумерному диску). Окрестности точек, далеких от места склейки, не изменятся, нужно проверить окрестности точек, которые принадлежат окружностям, по которым мы склеиваем многообразия:

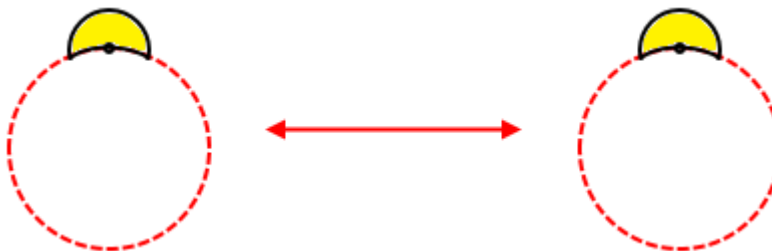


Рис. 12.9. Окрестности граничных точек вырезанных дисков

- действительно, после склейки окрестности точек окружностей будут гомеоморфны двумерному диску.

Также нужно проверять, что результат операции не зависит от выбора вырезаемых дисков.

Утверждение. Операция связной суммы корректно определена, то есть, результат не зависит (с точностью до гомеоморфизма) ни от выбора вырезаемых дисков, ни от выбора ориентаций граничных окружностей, задающих склейку (а также от выбора гомеоморфизма между ними).

В нашем курсе мы рассматриваем только двумерные многообразия. Для многомерных многообразий нет аналога теоремы классификации, но операцию связной суммы определить можно. В многомерном случае (начиная с $n = 3$) результат склейки многообразий не будет зависеть от выбора вырезаемых дисков и от гомеоморфизма, сохраняющего, или меняющего ориентацию на граничных сферах, однако, утверждение следующей задачи в многомерном случае уже неверно (при ее решении нужно существенно использовать, что многообразие является двумерным).

Задача. Для двумерного многообразия M с вырезанным диском существует гомеоморфизм его на себя, меняющий ориентацию на граничной окружности вырезанного диска.

Например, если у сферы вырезать двумерный диск, то несложно придумать отображение сферы с вырезанным диском на себя, которое меняет направление граничной

окружности: рассмотрим симметрию относительно плоскости, содержащей ось z (аналогично для тора): при симметрии поверхность перейдет в себя, а направление на граничной окружности изменится.

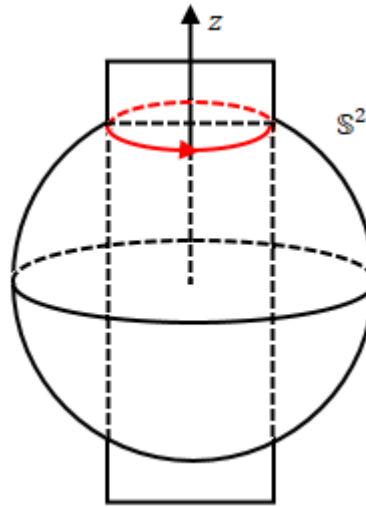


Рис. 12.10. Симметрия сферы относительно плоскости

Теперь с помощью операции связной суммы переформулируем теорему классификации.

Теорема (“переформулировка” теоремы классификации). Любое связное компактное двумерное многообразие гомеоморфно одному из следующих:

- $\mathbb{S}^2$
- $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$
- $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$

Замечание. Для произвольного двумерного многообразия M выполнено:

$$M \# \mathbb{S}^2 = M,$$

поэтому можно сказать, что любое связное компактное двумерное многообразие гомеоморфно одному из следующих:

- $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{S}^2$
- $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$

Доказательство.

Рассмотрим процесс взятия связной суммы для многообразий, представленных в виде склейки многоугольников. Пример (два тора, склеенных из квадрата):

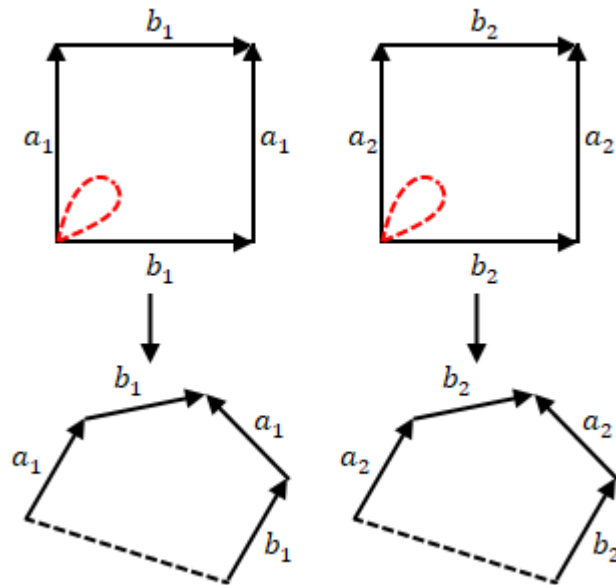


Рис. 12.11. Вырезание диска в торе

Поскольку результат взятия связной суммы не зависит от того, где мы вырежем диск, вырежем его, так, как показано на рис. 12.11 (пунктиром отмечена граница, которая получилась после вырезания диска). Склеив стороны, отмеченные пунктиром, получим восьмиугольник:

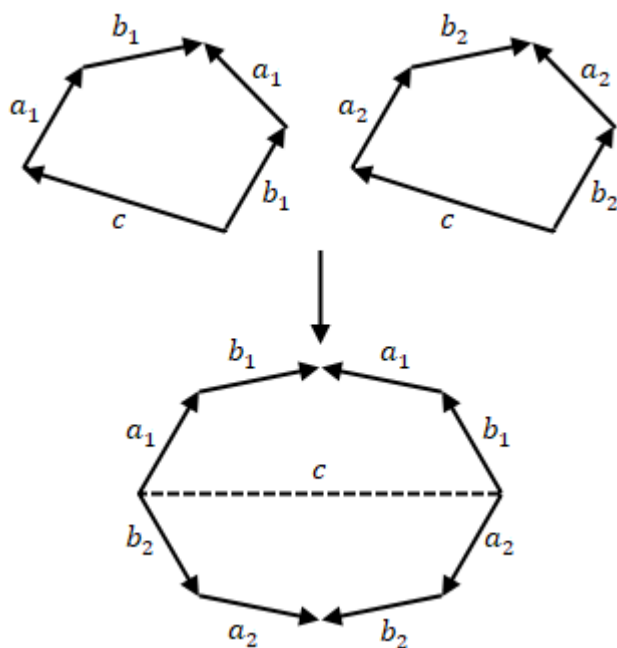


Рис. 12.12. Склейка квадратов с вырезанным диском

Иными словами, связная сумма $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ получается как результат склейки такого восьмиугольника. То есть, слова $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ и $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ склеиваются в слово $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$

Для произвольных двух слов рассуждения совершенно аналогичные – если есть многоугольники $W_1 = a_i b_k \dots$ и $W_2 = c_j d_l \dots$, то вырезая таким образом диски и склеивая многоугольники по границе получившихся разрезов, получим, что многообразие, которое будет соответствовать связной сумме $M_1 \# M_2$, будет задаваться словом $W_1 W_2$, которое получается приписыванием к слову W_1 слова W_2 .

Тогда в первой серии слово состоит из четверок букв, где каждая четверка задает тор, а во второй серии слово состоит из пар букв, где каждая пара задает проективную плоскость.

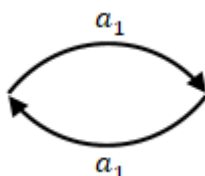


Рис. 12.16. Склейка проективной плоскости из диска

Как и в примере с тором, для взятия связной суммы неориентируемых многообразий, вырезаем диск, как показано на рис. 12.17 и склеиваем:

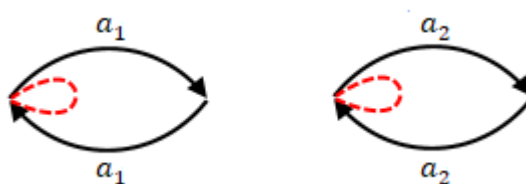


Рис. 12.17. Склейка проективных плоскостей

На языке связных сумм можно пояснить некоторые названия, которые принято приписывать многообразиям из тех серий, которые мы получили.

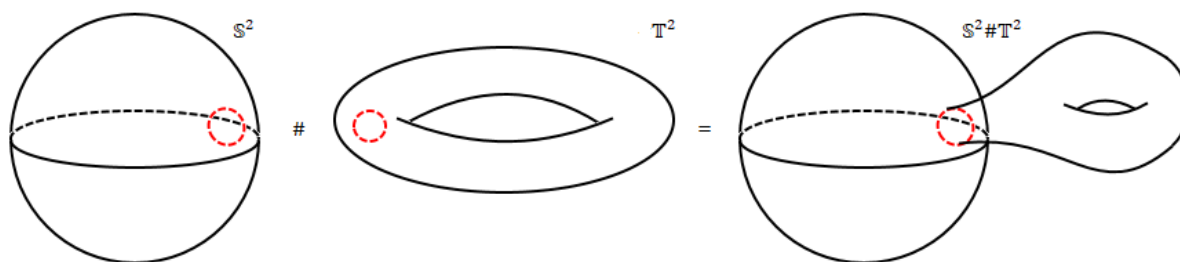


Рис. 12.18. Связная сумма многообразия с тором (“приклейка ручки”)

Процесс взятия связной суммы с тором обычно называют приклейкой ручки. Название для многообразий из серии 1 теоремы классификации – это сфера с n ручками (каждая ручка – операция взятия связной суммы с тором)

Многообразия из серии 2 теоремы классификации называют сферой с m пленками Мёбиуса. На примере сферы посмотрим, что происходит при взятии связной суммы

многообразия с проективной плоскостью (будем для проективной плоскости использовать модель диска, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки на границе).

Вырежем диски на проективной плоскости и на сфере. Проективная плоскость – это объединение листа Мёбиуса с диском D^2 (см. рис. 12.19 – красная полоска – лист Мёбиуса, оставшиеся два полудиска склеиваются по дугам, помеченным буквой b , в диск D^2):

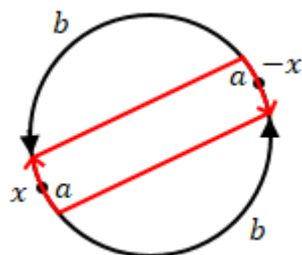


Рис. 12.19. Проективная плоскость – объединение диска и листа Мёбиуса

То есть, можно разрезать проективную плоскость замкнутой кривой (выделена красным) на диск и лист Мёбиуса. Поэтому связная сумма сферы с проективной плоскостью – это приклейка листа Мёбиуса ко сфере:

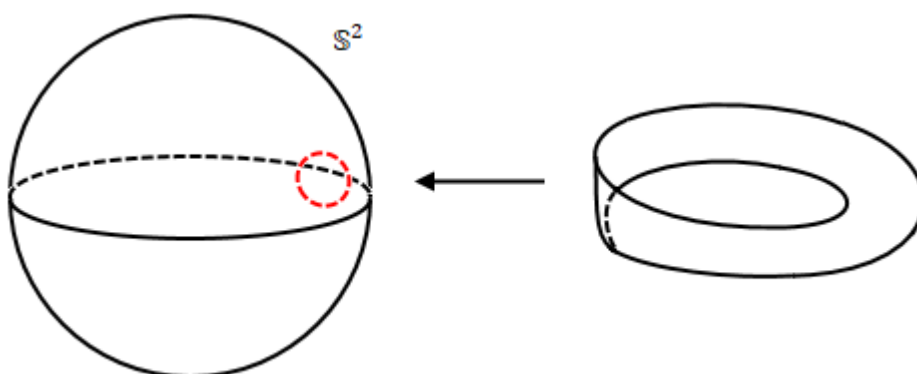


Рис. 12.20. Приклейка листа Мёбиуса ко сфере

Итак, любое связное компактное двумерное многообразие гомеоморфно либо сфере с n ручками, либо сфере с t пленками Мёбиуса.

В заключение приведем несколько задач.

Задача. Доказать, что

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Задача. Доказать, что многообразие $M_1 \# M_2$ ориентируемо, если M_1 и M_2 ориентируемы, и неориентируемо в противном случае.

Лекция 13. Замкнутые регулярные кривые.

В этой теме мы будем рассматривать вопросы, связанные с непрерывными деформациями кривых. Например, рассмотрим две кривые, изображенные на рис. 13.1:

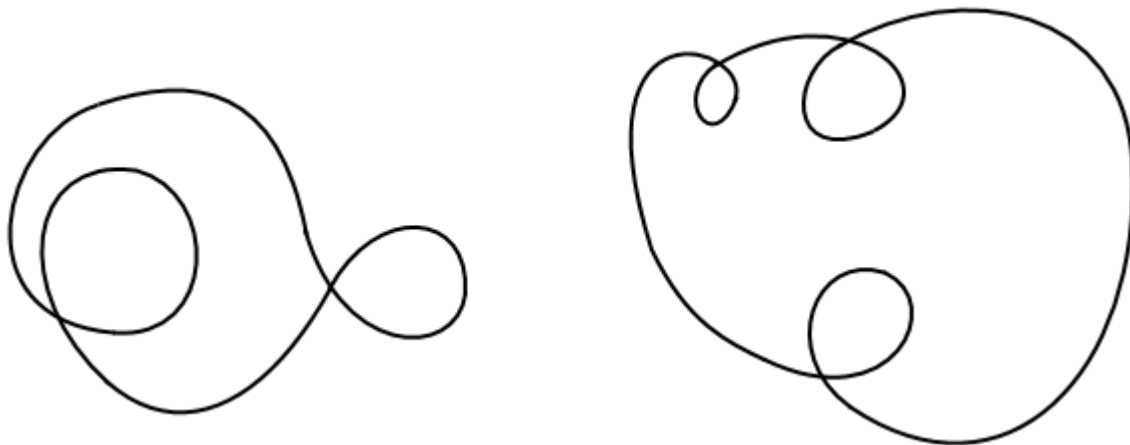


Рис. 13.1. Кривые на плоскости

Можно ли одну из них непрерывной деформацией преобразовать в другую? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно определиться, что мы понимаем под деформацией. Например, если мы рассмотрим часть первой кривой (петля) и разрешим деформацию, показанную на рис. 13.2, то несложно понять, что мы таким образом любую кривую можем превратить, например, в окружность.

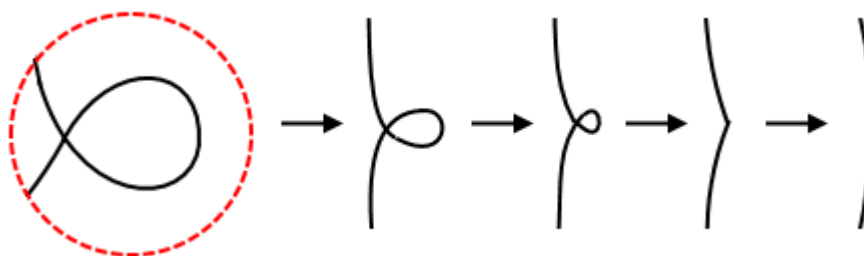


Рис. 13.2. Деформация петли

Если запретить подобные деформации, то уже нельзя, например, окружность превратить в окружность с петлей:

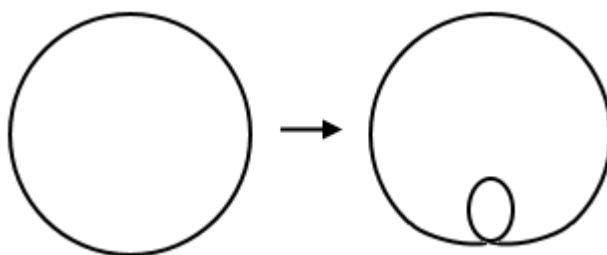


Рис 13.3. Окружность и окружность с петлей

Далее мы будем говорить о гладких кривых (понятие гладкости обсудим чуть позже), которые расположены на плоскости, или на простых двумерных поверхностях.

Теорема Жордана утверждает, что на плоскости любая замкнутая несамопересекающаяся кривая разбивает плоскость ровно на две компоненты. Несложно понять, что на других поверхностях (например, на торе) существуют замкнутые кривые, которые не разбивают поверхность на отдельные компоненты.

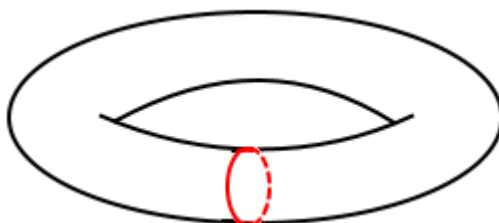


Рис. 13.4. Замкнутая кривая на торе

Обобщение теоремы Жордана для произвольных поверхностей и приводит к понятию эйлеровой характеристики. Топологические свойства непрерывных кривых подробно будут изучаться в курсе “Введение в топологию”, а в нашем курсе мы уделим больше внимания свойствам, которые следуют из гладкости кривых.

Пусть на плоскости в декартовых координатах задана некоторая кривая (напомним, что непрерывная кривая – это непрерывное отображение отрезка в плоскость). Что естественно назвать гладкой кривой?

Есть два подхода: первый – образ кривой должен выглядеть, как гладкая линия, второй – кривая, если ее записать в координатах, должна задаваться гладкими функциями:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Оказывается, это разные вещи – кривая, заданная гладкими функциями, может не выглядеть гладкой линией, и наоборот – кривую, которая выглядит, как гладкая линия, можно задавать не гладкими функциями. Легко привести соответствующие примеры:

1)

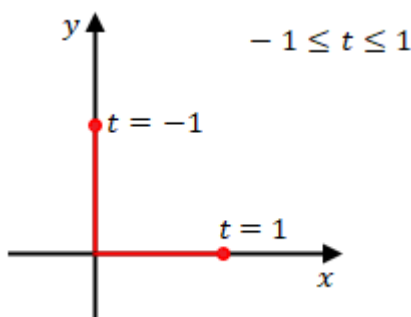


Рис. 13.5. Не гладкая линия, задаваемая гладкими функциями

Кривая, изображенная на рис. 13.5 задается гладкими функциями, графики которых изображены на рис. 13.6:

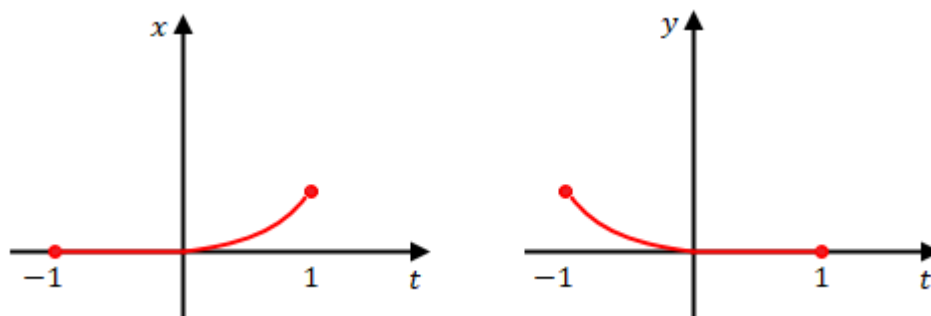


Рис. 13.6. Графики гладких функций

Функции, изображенные на рис. 13.6, могут быть дифференцируемыми сколь угодно много раз, например:

$$x(t) = \begin{cases} 0, t \in [-1, 0] \\ e^{-\frac{1}{t}}, t \in (0, 1] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, t \in [-1, 0) \\ 0, t \in [0, 1] \end{cases}$$

2)

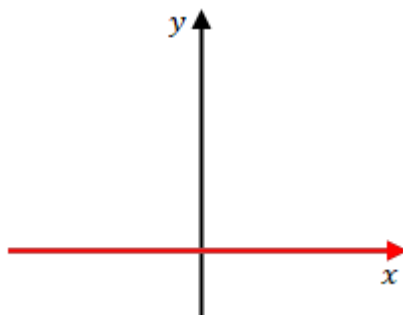


Рис. 13.7. Гладкая линия, задаваемая не гладкими функциями

Прямую $y = 0$, изображенную на рис. 13.7, можно задать не гладкими функциями, например:

$$x(t) = |t| + t$$

$$y(t) = 0$$

Дадим определение регулярной кривой, объединяющее эти представления о гладкости.

Определение. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется гладкой (или непрерывной, или класса C^k , или ...), если функции $x(t), y(t)$, задающие ее в декартовых координатах являются гладкими (или непрерывными, или класса C^k , или ...)

Гладкость означает бесконечную дифференцируемость.

Определение. Для гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ее вектором скорости в точке $t_0 \in [a, b]$ называется вектор

$$\frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}, \frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0} \right)$$

Определение. Гладкая кривая называется регулярной, если ее вектор скорости не равен нулю ни в какой точке.

Отметим, что в примере 1 в точке излома (соответствующей $t = 0$) выполнено:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

Это не случайно – если кривая регулярная, то она в окрестности каждой своей точки будет выглядеть как гладкая линия (то есть, представима как график гладкой функции).

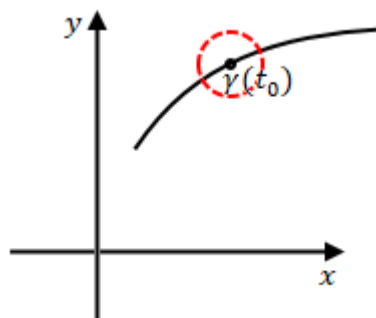


Рис. 13.8. Регулярная кривая

Задача. Доказать, что регулярную кривую $\gamma(t)$ в окрестности любой ее точки $\gamma(t_0)$ можно представить в виде графика гладкой функции $y(x)$ или $x(y)$.

Решение.

Утверждение задачи следует из теоремы о неявной функции. Действительно, если $\frac{dx}{dt} \neq 0$, то локально t можно выразить через x как гладкую функцию. Подставляя затем $t(x)$ в выражение для $y(t)$, получим $y(t(x)) = y(x)$ – гладкую функцию.

Если $\frac{dx}{dt} = 0$, то $\frac{dy}{dt} \neq 0$ (так как кривая регулярна) – аналогично получаем гладкую функцию $x(y)$.

Таким образом, наложив условие регулярности, мы среди всех гладких кривых выделили класс, в котором кривые выглядят как гладкие линии на плоскости.

Иногда говорят, что $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ – параметризованная кривая, чтобы подчеркнуть, что задано отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Кривую можно задать и с помощью уравнения – это не кривая в смысле того определения, которым мы решили пользоваться, но это множество точек можно представить как гладкую параметризованную кривую: например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ можно параметризовать так:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Теперь перейдем к понятию замкнутости кривой. Ранее это понятие встречалось нам в другом контексте (топология), здесь оно имеет другой, очень простой, смысл.

Определение. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется замкнутой, если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то есть, ее начало совпадает с концом.

Образ замкнутой кривой на плоскости выглядит как замкнутая линия:

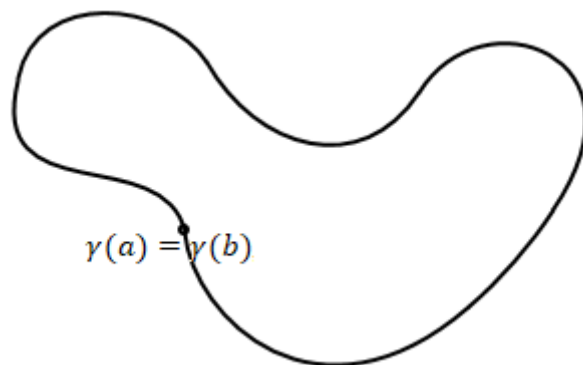


Рис. 13.9. Замкнутая кривая

Чтобы не нарушалась гладкость кривой, можно потребовать, чтобы векторы скорости в начальной и конечной точке совпадали, а можно считать, что функции $x(t)$ и $y(t)$ заданы не на отрезке $[a, b]$, а на всей числовой прямой (как периодические функции) – в этом случае нам неважно, какая из точек отрезка $[a, b]$ выбрана за начальную или конечную.

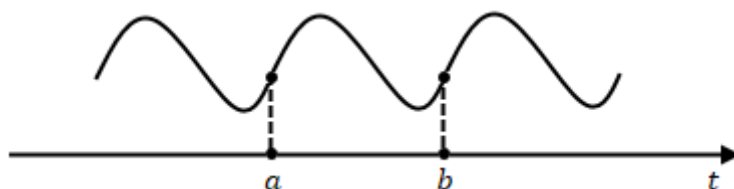


Рис. 13.10. Задание замкнутой кривой

Тогда гладкая замкнутая кривая задается гладкими периодическими функциями.

Теперь перейдем к обсуждению понятия деформации кривой. Деформации регулярных кривых – частный случай понятия гомотопии.

Определение. Две замкнутые регулярные кривые $\gamma_0: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\gamma_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ называются регулярно гомотопными, если существует гладкое отображение F (зависящее от двух параметров – параметра на кривой $t \in [0, T]$ и параметра гомотопии $s \in [0, 1]$) в плоскость:

$$F: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

такое, что:

- 1) $F(t, 0) = \gamma_0(t)$, $F(t, 1) = \gamma_1(t)$,
- 2) $\forall s \in [0, 1]$ кривая $\gamma_s(t) = F(t, s)$ замкнута и регулярна.

Другими словами, кривые $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ называются регулярно гомотопными, если существует семейство кривых $\gamma_s(t)$, такое, что при $s = 0$ мы получаем кривую $\gamma_0(t)$, при $s = 1$ мы получаем кривую $\gamma_1(t)$, и при каждом $s \in [0, 1]$ получаем какую-то замкнутую регулярную кривую $\gamma_s(t)$.

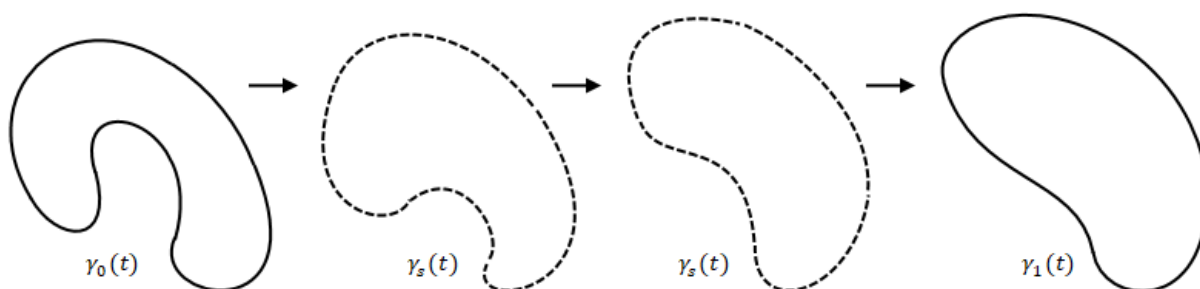


Рис. 13.11. Регулярно гомотопные кривые

Семейство кривых $\gamma_s(t)$ должно гладко зависеть от параметра гомотопии s . Можно сказать, что в пространстве кривых точки γ_0 и γ_1 соединены гладкой кривой γ_s .



Рис. 13.12. Гомотопия как кривая в пространстве кривых

Однако, такое рассуждение требует определения понятия пространства кривых, введения топологии в этом пространстве и т.д., поэтому проще формализовать понятие гомотопии так, как мы сделали в определении – через отображение F прямоугольника $[0, T] \times [0, 1]$ в плоскость.

Ограничение F на отрезок $[0, 1]$ дает кривую γ_0 , ограничение F на отрезок $[0, T]$ дает кривую γ_1 . При каждом фиксированном s мы получаем замкнутую регулярную кривую.

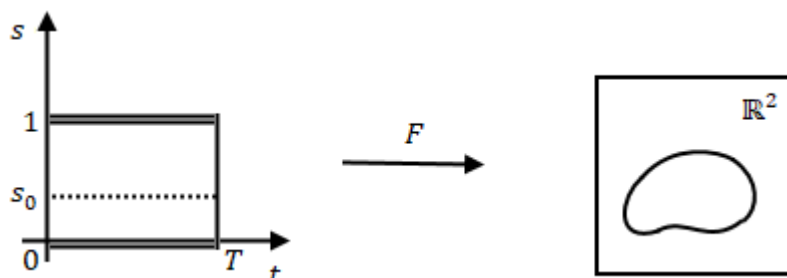


Рис. 13.13. К определению регулярно гомотопных кривых

Поэтому $\gamma_s(t)$ можно рассматривать как семейство кривых.

Задача. Доказать, что отношение регулярной гомотопности для замкнутых регулярных кривых является отношением эквивалентности.

Несколько замечаний.

1) Если в определении гомотопии потребовать не гладкость отображения F , а непрерывность, тогда кривые, которые мы рассматривали в начале лекции (при деформации петли) были бы гомотопными:

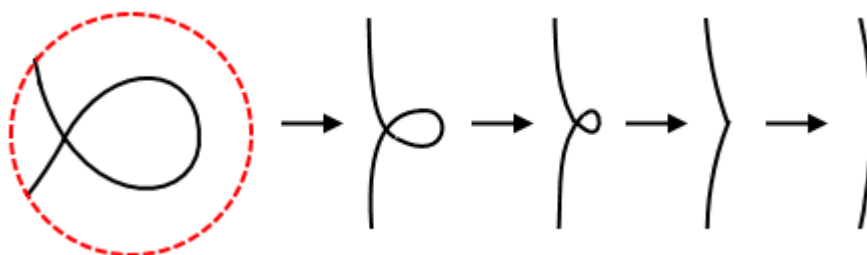


Рис.13.14. Деформация петли

– петлю можно было бы уничтожить, а мы этого не хотим (на рис. 13.14 изображены части замкнутых кривых в процессе деформации).

2) Можно считать, что замкнутые регулярные кривые, которые мы рассматриваем, заданы на одном и то же отрезке. Если кривые заданы на разных отрезках (то есть, у периодических функций, с помощью которых они задаются, разные периоды), сделаем линейную замену параметра.

3) Далее мы будем обсуждать классификацию замкнутых регулярных кривых с точностью до отношения эквивалентности, которое задается регулярной гомотопностью кривых.

Если из определения гомотопии, которое мы дали, убрать, например, условие регулярности, или замкнутости, то мы получим другие отношения эквивалентности на кривых, с помощью которых можно классифицировать кривые. Приведем несколько задач, которые показывают, что такие классификации не интересны – все кривые на плоскости будут гомотопны.

Задача. Доказать, что без условия регулярности любые две замкнутые кривые на плоскости гомотопны (в определении регулярно гомотопных кривых отбросили условие регулярности).

Задача. Доказать, что без условия замкнутости любые две регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны (в определении регулярно гомотопных кривых отбросили условие замкнутости).

Отметим, что в первой задаче условие нахождения кривых на плоскости существенно – если заменить плоскость на другую поверхность, то вообще говоря, утверждение задачи будет неверным. Утверждение второй задачи верно в любом связном топологическом пространстве.

Можно рассмотреть гомотопию с фиксированными концами (в процессе гомотопии начальная и конечная точки кривой остаются на месте). Тогда определение регулярных гомотопных кривых изменится на:

Определение. Две регулярные кривые $\gamma_0: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\gamma_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которых $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = P$ и $\gamma_0(T) = \gamma_1(T) = Q$ (т.е. начало и конец кривых совпадают) называются регулярно гомотопными с фиксированными концами, если существует гладкое отображение F (зависящее от двух параметров – параметра на кривой $t \in [0, T]$ и параметра гомотопии $s \in [0, 1]$) в плоскость:

$$F: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

такое, что:

- 1) $F(t, 0) = \gamma_0(t)$, $F(t, 1) = \gamma_1(t)$,
- 2) $\forall s \in [0, 1]$ кривая $\gamma_s(t) = F(t, s)$ регулярна,
- 3) $\forall s \in [0, 1]$ выполнено $\gamma_s(0) = P$, $\gamma_s(T) = Q$.

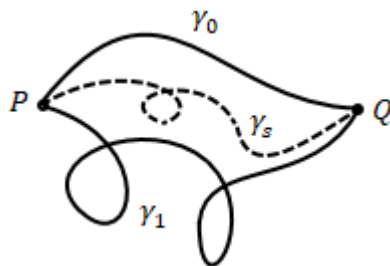


Рис. 13.15. Гомотопия с фиксированными концами

При таком определении гомотопных кривых задача классификации кривых также не будет интересной – любые две кривые, у которых начало и конец совпадают, будут гомотопны.

Задача. Доказать, что любые две регулярные кривые на плоскости с началом в точке P и концом в точке Q регулярно гомотопны с фиксированными концами.

Теперь вернемся к задаче классификации замкнутых регулярных кривых с точностью до регулярной гомотопии. Оказывается, можно определить инвариант, который отвечает за регулярную гомотопность кривых.

Пусть $\gamma(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - замкнутая регулярная кривая. Условие регулярности означает, что вектор скорости кривой не обращается в ноль. Зафиксируем некоторую декартову систему координат и будем отсчитывать (по модулю 2π) от оси x угол $\varphi(t)$, который образует вектор скорости $\frac{d\gamma}{dt}$ с направлением оси x . В координатах вектор скорости можно записать так:

$$\frac{d\gamma}{dt} = (\rho(t) \cos \varphi(t), \rho(t) \sin \varphi(t)),$$

где $\rho(t) > 0$ – длина вектора скорости, $\varphi(t)$ определен по модулю 2π .

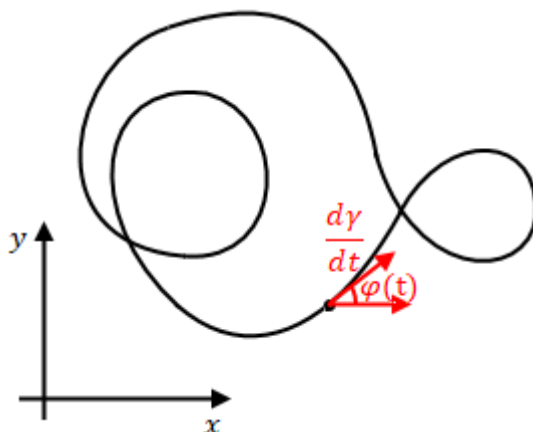


Рис. 13.16. Угол $\varphi(t)$

Если изображать $\varphi(t)$ в виде графика, то каждому числу на отрезке $[0, T]$ соответствует набор чисел, разность между которыми кратна 2π . Но если для какого-то значения $t \in [0, T]$ зафиксировать значение функции $\varphi(t)$, тогда можно однозначно продолжить эту функцию на малый интервал в окрестности точки t так, чтобы эта функция была непрерывной:

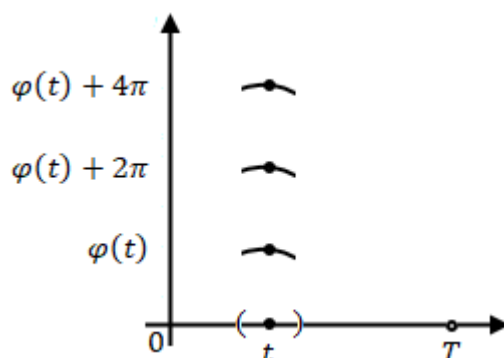


Рис. 13.17. Непрерывность $\varphi(t)$ в точке

Действительно, поскольку кривая в декартовых координатах задается как

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

то

$$\varphi(t) = \arctg \frac{dy}{dx} + \pi k,$$

или

$$\varphi(t) = \operatorname{arccctg} \frac{dx}{dy} + \pi m.$$

Выбранное выражение в окрестности точки t будет задавать гладкую функцию. Далее мы однозначно можем продолжить эту функцию на весь отрезок $[0, T]$ (“выделить непрерывную ветвь”).

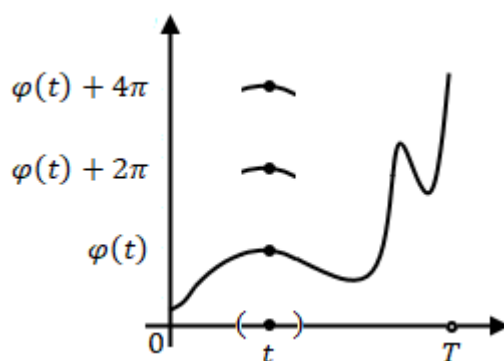


Рис. 13.18. Выделение непрерывной ветви $\varphi(t)$

Если $\varphi(0) = \varphi_0$, то $\varphi(T) = \varphi_0 + 2\pi k$ (так как $\varphi(t)$ в начальной и конечной точке кривой принимает одинаковые значения по модулю 2π).

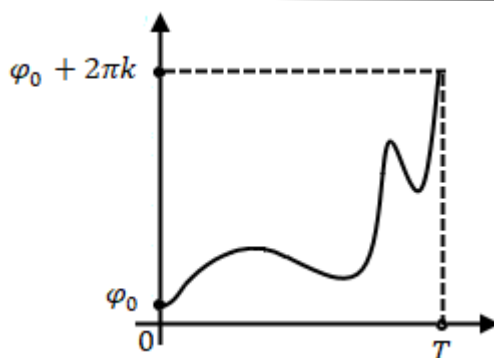


Рис. 13.19. Значение $\varphi(t)$ в начальной и конечной точке кривой

Оказывается, что число k и есть инвариант, отвечающий за регулярную гомотопность кривых (число вращения).

Определение. Числом вращения для замкнутой регулярной кривой γ называется число

$$R(\gamma) = \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Смысл числа вращения понять несложно – это число оборотов, которое совершит вектор скорости при движении точки от начала до конца кривой. Например, для кривой на рис. 13.20 $R(\gamma) = 1$:

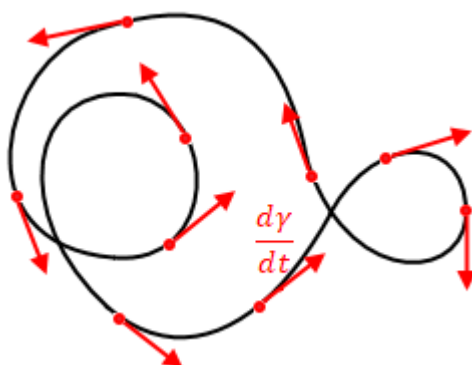


Рис. 13.20. Вычисление числа вращения

Более формально вычисление числа вращения можно описать так: зафиксируем какую-то точку (например, начало координат) и будем откладывать от нее вектор скорости (при движении точки по кривой). Обороты против часовой стрелки считаем со знаком “+”, обороты по часовой стрелке считаем со знаком “-”. Число, которое получилось после обхода всей кривой, и есть число вращения кривой.

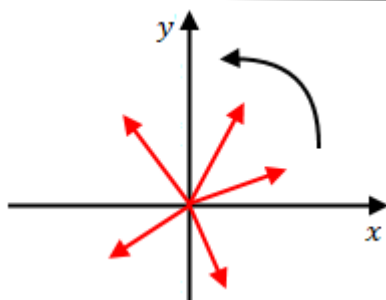


Рис. 13.21. К определению числа вращения

Теорема (Уитни). Две замкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения равны.

Например, окружность и кривая на рис. 13.22 гомотопны, так как у обеих кривых число вращения равно 1:

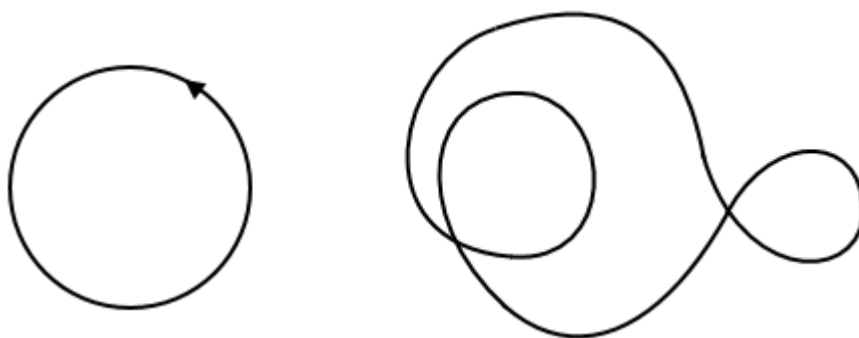


Рис. 13.22. Кривые с одинаковым числом вращения

А вот окружность с петлей продеформировать в окружность нельзя (рис. 13.23) – у этих кривых число вращения не совпадает:

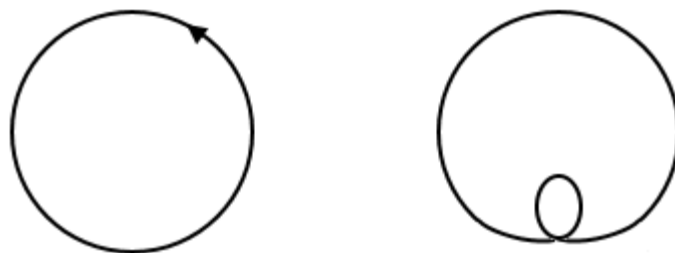


Рис. 13.23. Кривые с разным числом вращения

Доказательство.

1) Если кривые $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ регулярно гомотопны, то число вращения $R(\gamma_s)$ непрерывно зависит от параметра гомотопии s (поскольку $\varphi_s(t)$ непрерывно по s).

Так как $R(\gamma_s) \in \mathbb{Z}$, то оно не меняется в процессе гомотопии, поэтому $R(\gamma_1) = R(\gamma_2)$.

2) Пусть $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ – замкнутые регулярные кривые, $\gamma_i(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, такие что $R(\gamma_0) = R(\gamma_1)$. Вначале приведем неправильное рассуждение. Рассмотрим гомотопию

$$\gamma_s(t) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$$

При $s = 0$ получаем $\gamma_0(t)$, при $s = 1$ получаем $\gamma_1(t)$.

Несложно понять, что все кривые семейства $\gamma_s(t)$ будут замкнутыми ($\gamma_s(0) = \gamma_s(T)$) и гладкими, но, вообще говоря, не обязательно будут регулярными. К тому же, в нашем рассуждении мы никак не использовали, что числа вращения кривых равны. Однако, похожее рассуждение мы применим к функциям $\varphi(t)$, которые задаются углом между осью x и вектором скорости кривой.

Прежде чем его применять, сделаем несколько замечаний.

Замечания.

1) С помощью регулярной гомотопии можно менять параметр на кривой $\gamma(t)$:

Пусть $\tau(t)$ – монотонно возрастающая функция ($\frac{d\tau}{dt} > 0$):

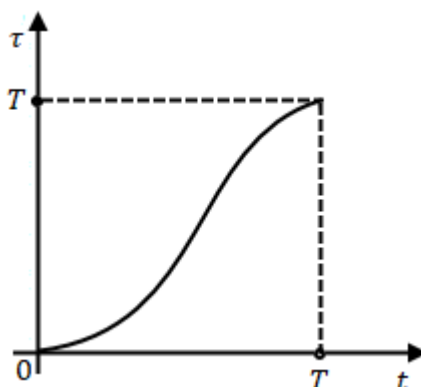


Рис. 13.24. Зависимость $\tau(t)$

Рассмотрим семейство кривых:

$$\gamma_s(t) = \gamma((1-s)t + s\tau(t))$$

При $s = 0$ получаем кривую $\gamma(t)$, при $s = 1$ получаем кривую $\gamma(\tau(t)) = \tilde{\gamma}(t)$.

Формально кривые $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ различны, но линии на плоскости, которые они задают, будут одинаковыми (разница будет только в скорости, с которой точка движется по кривой в той или иной параметризации).

Скорость, с которой точка движется по кривой $\tilde{\gamma}$ (продифференцируем равенство $\gamma(\tau(t)) = \tilde{\gamma}(t)$):

$$\tilde{\gamma}' = \gamma' \frac{d\tau}{dt}$$

Таким образом, вектор скорости кривой $\tilde{\gamma}(t)$ отличается от вектора скорости $\gamma(t)$ умножением на некоторую положительную константу.

Более того, замену параметра (для регулярной кривой) всегда можно сделать так, что длина вектора скорости будет постоянной.

Действительно, для того, чтобы выполнялось равенство

$$|\tilde{\gamma}'| = |\gamma'| \frac{d\tau}{dt} \equiv c$$

нужно, чтобы

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c} |\gamma'|$$

Интегрируя, получаем

$$t(\tau) = \frac{1}{c} \int_0^\tau \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du$$

Отсюда можно выразить $\tau(t)$, для которой после замены параметра мы получим длину вектора скорости, равную константе.

Найдем константу c . Подставляя в интеграл $\tau = T$, получим

$$T = \frac{1}{c} \int_0^T \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du,$$

откуда

$$c = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du$$

2) С помощью регулярной гомотопии можно осуществлять гомотетию, поворот, сдвиг ... данной кривой.

Гомотетия: рассмотрим семейство кривых

$$\gamma_s(t) = (1 - \lambda s)\gamma(t)$$

При $s = 0$ получим исходную кривую $\gamma(t)$, при $s = 1$ получим кривую $(1 - \lambda)\gamma(t)$.

Ясно, что подбирая соответствующим образом λ , мы можем из кривой $\gamma(t)$ сделать гомотетичную с любым коэффициентом.

При гомотетии все векторы умножаются на коэффициент гомотетии, в частности, и вектор скорости. Если мы с помощью замены параметра можем сделать вектор скорости постоянным, то после этого можно применить вышеуказанную регулярную гомотопию, и сделать длину вектора скорости равной 1.

Сдвиг: рассмотрим семейство кривых

$$\gamma_s(t) = \gamma(t) + s\vec{v}$$

При $s = 0$ получим исходную кривую $\gamma(t)$, при $s = 1$ получим кривую $\gamma(t) + \vec{v}$

Поворот: аналогично.

Таким образом, мы можем регулярной гомотопией заменить кривые $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ на кривые, которые расположены так, как нам удобно (их можно поворачивать, сдвигать, растягивать), причем вектор скорости у полученных кривых будет единичной длины.

Лекция 14. Замкнутые регулярные кривые на плоскости и на сфере.

Продолжим доказательство теоремы Уитни.

Считаем, что параметр на кривых натуральный:

$$\left| \frac{d\gamma_0}{dt} \right| \equiv \left| \frac{d\gamma_1}{dt} \right| \equiv 1$$

и кривые заданы на одном и том же отрезке $t \in [0, T]$.

Расположим кривые так, как нам удобно: пусть в начальный момент времени кривые $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ проходят через начало координат: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = (0,0)$, и имеют один и тот же касательный вектор $(1,0)$:

$$\frac{d\gamma_0}{dt}(0) = \frac{d\gamma_1}{dt}(0) = (1,0)$$

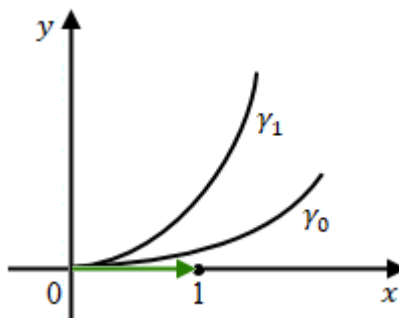


Рис. 14.1. Кривые $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$

Докажем теперь, что кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны, при условии, что их числа вращения равны: $R(\gamma_0) = R(\gamma_1)$.

Поскольку вектор скорости имеет единичную длину, то можно считать, что

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_0}{dt} &= (\cos \varphi_0(t), \sin \varphi_0(t)), \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= (\cos \varphi_1(t), \sin \varphi_1(t)), \end{aligned}$$

где $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ – непрерывные функции.

Так как числа вращения кривых равны, то $\varphi_0(T) = \varphi_1(T) = 2\pi k$, где k – число вращения. Также $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$ (мы так расположили кривые).

Тогда построим гомотопию между функциями $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$:

$$\varphi_s(t) = (1 - s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$$

Будем считать $\varphi_s(t)$ тоже функцией угла, задающей единичный вектор $v_s(t)$:

$$v_s(t) = (\cos \varphi_s(t), \sin \varphi_s(t))$$

Будем считать $v_s(t)$ вектором скорости некоторой кривой $\tilde{\gamma}_s(t)$ – ее нужно немного видоизменить, чтобы получить то семейство кривых, которое мы строим для гомотопии между γ_0 и γ_1 .

Так как $\tilde{\gamma}_s(0) = (0,0)$, то

$$\tilde{\gamma}_s(t) = \int_0^t v_s(\tau) d\tau$$

- построили некоторое семейство кривых. Ясно, что при $s = 0$ мы получим кривую $\gamma_0(t)$, при $s = 1$ получим кривую $\gamma_1(t)$.

Кривая $\tilde{\gamma}_s(t)$, очевидно, регулярна (длина вектора скорости равна 1), но она может быть не замкнутой – равенство функций $\varphi_s(t)$ и $v_s(t)$ при $t = 0$ и $t = T$ означает всего лишь, что в начальной и конечной точке кривой одинаковый вектор скорости:

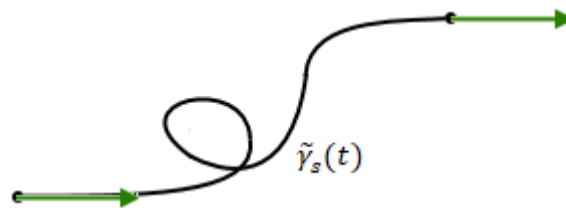


Рис. 14.2. Кривая $\tilde{\gamma}_s(t)$ может быть не замкнутой

Немного изменим кривую $\tilde{\gamma}_s(t)$, чтобы она стала замкнутой. Рассмотрим радиус-вектор новой кривой: пусть его конечная точка пробегает кривую $\tilde{\gamma}_s(t)$, а начальная точка пробегает отрезок, соединяющий начало и конец $\tilde{\gamma}_s(t)$:

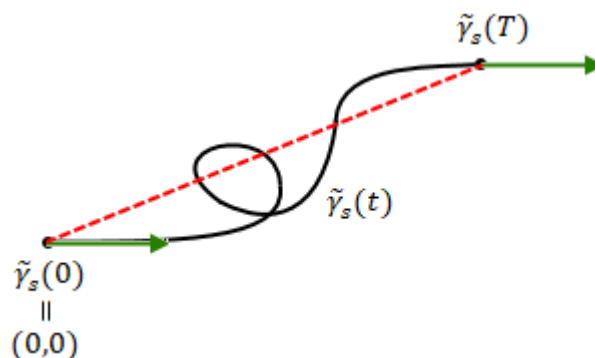


Рис. 14.3. Построение $\gamma_s(t)$

Получим

$$\gamma_s(t) = \tilde{\gamma}_s(t) - \frac{t}{T} \tilde{\gamma}_s(T)$$

Примем эту формулу за определение семейства кривых, связывающих кривые γ_0 и γ_1 (иными словами, за отображение $F(s, t)$ из определения гомотопии).

Действительно, так как γ_0 и γ_1 замкнутые и $\gamma_0(T) = \gamma_1(T) = (0, 0)$, то при $s = 0$ получаем $\gamma_0(t)$, при $s = 1$ получаем $\gamma_1(t)$.

Проверим, что при любом значении параметра s кривая $\gamma_s(t)$ замкнута и регулярна.

Замкнутость: при $t = 0$ получаем $\tilde{\gamma}_s(0) = 0$, при $t = T$ получаем $\tilde{\gamma}_s(T) - \tilde{\gamma}_s(T) = 0$.

Регулярность: проверим, что

$$\frac{d\gamma_s(t)}{dt} \neq 0.$$

В самом деле (учтем, что кривая $\tilde{\gamma}_s(t)$ строилась так, что ее вектор скорости $\frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} = 1$):

$$\left| \frac{d\gamma_s(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} - \frac{1}{T} \tilde{\gamma}_s(T) \right| \geq \left| \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} \right| - \frac{1}{T} |\tilde{\gamma}_s(T)| = 1 - \frac{1}{T} |\tilde{\gamma}_s(T)| = \frac{T - |\tilde{\gamma}_s(T)|}{T} \geq 0$$

Для того, чтобы кривая была регулярной, неравенство должно быть строгим. Вначале поймем, почему нестрогие неравенства выполняются: T – это длина кривой $\tilde{\gamma}_s(t)$ (на ней выбран натуральный параметр), а длина вектора $\tilde{\gamma}_s(T)$ – это длина отрезка, соединяющего начальную и конечную точки кривой $\tilde{\gamma}_s(t)$ (см. рис. 14.3). Поэтому геометрически последнее неравенство выражает тот факт, что длина кривой, соединяющей эти точки, не меньше, чем длина отрезка, соединяющего эти точки.

Более формально неравенство

$$\frac{T - |\tilde{\gamma}_s(T)|}{T} \geq 0$$

можно доказать воспользовавшись тем, что интеграл от модуля функции больше или равен модулю интеграла функции:

$$T = \int_0^T 1 dt = \int_0^T \left| \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} \right| dt \geq \left| \int_0^T \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} dt \right| = |\tilde{\gamma}_s(T) - \tilde{\gamma}_s(0)| = |\tilde{\gamma}_s(T)|$$

Равенство будет достигаться только в случае, когда кривая совпадает с отрезком. Иначе говоря, неравенства “ $\geq$ ” обращаются в равенства только в том случае, когда $\varphi_s(t) \equiv 0$ (действительно, если вектора скорости в любой точке кривой коллинеарны, то $v_s(t) \equiv 0$, откуда следует, что $\varphi_s(t) \equiv 0$).

Иными словами, во всех случаях, кроме случая, когда для некоторого s выполнено $\varphi_s(t) \equiv 0$ теорема доказана, потому что мы явно предъявили гомотопию.

В случае когда для некоторого s выполнено $\varphi_s(t) \equiv 0$, функции $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ имеют специальный вид: они связаны линейной зависимостью

$$\varphi_s(t) = (1 - s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$$

В этом случае мы с помощью регулярной гомотопии можем изменить одну из функций, и линейная зависимость между ними пропадет (пример изображен на рис. 14.4, здесь $s = 1/2$, меняем $\varphi_0(t)$).

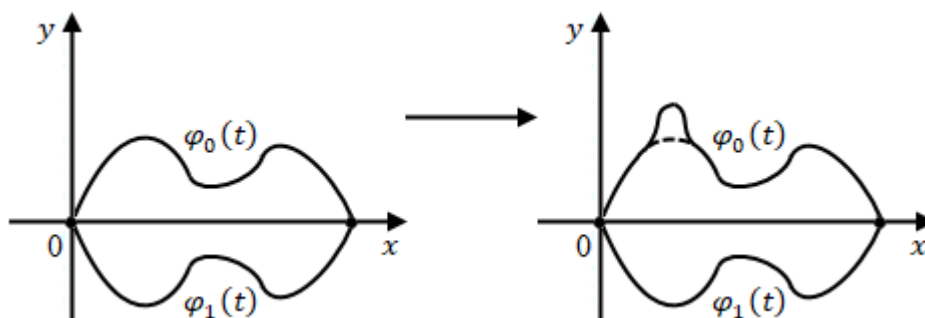


Рис. 14.4. Функции $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ линейно зависимы ($s = 1/2$)

Далее способом, описанным выше, построим регулярную гомотопию между новой (возмущенной) кривой $\varphi_0(t)$ и кривой $\varphi_1(t)$. Таким образом, теорема Уитни доказана.

Приведем также схему другого доказательства теоремы Уитни, позволяющего представить алгоритм построения семейства кривых, связывающих кривые γ_0 и γ_1 , более наглядно.

Схема доказательства.

Вначале избавляемся от “нехороших” особенностей кривой (например, от тройных, четверных и т.д. точек самопересечения, отрезков самопересечения).

Лемма 1. Любая замкнутая регулярная кривая γ регулярно гомотопна кривой $\tilde{\gamma}$, у которой все точки самопересечения двойные (т.е. существуют такие два значения параметра t_1 и t_2 , что $\tilde{\gamma}(t_1) = \tilde{\gamma}(t_2)$).

Точка самопересечения называется двойной, если у нее существует окрестность, пересечение которой с кривой – две трансверсально пересекающихся дуги (т. е. касательные к дугам в точке пересечения не параллельны) – см. рис. 14.5:

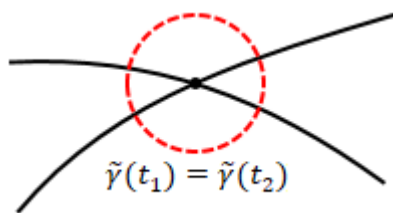


Рис. 14.5. Двойная точка самопересечения

Далее будем считать, что все точки самопересечения двойные.

Лемма 2. Любая замкнутая регулярная кривая “общего положения” либо не имеет точек самопересечения, либо имеет “петлю”.

Петля – это точка самопересечения, соответствующая t_1, t_2 , таким что $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, при этом на отрезке $[t_1, t_2]$ нет точек самопересечения – см. рис. 14.6:

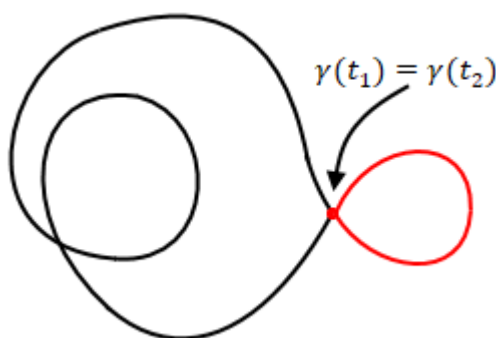


Рис. 14.6. Петля

Далее уменьшаем петлю (точки, соответствующие значениям параметра вне отрезка $[t_1, t_2]$ не трогаем).

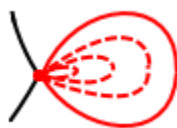


Рис. 14.7. Изменение петли

В результате получим кривую “без самопересечений” – с маленькими петельками, на которых задано направление обхода по или против часовой стрелки (можно считать, что петелька – это точка с отмеченным направлением обхода)

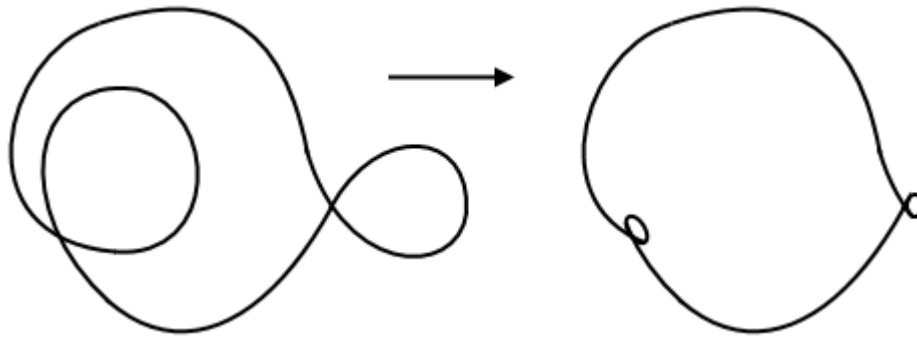


Рис. 14.8. Кривая с “петельками”

Лемма 3. Любая замкнутая регулярная кривая регулярно гомотопна кривой вида рис. 14.8 (вложенная кривая типа окружности и петельки, которые могут смотреть в разные стороны).

Лемма 4. Две соседние петельки, направленные в разные стороны, можно уничтожить:

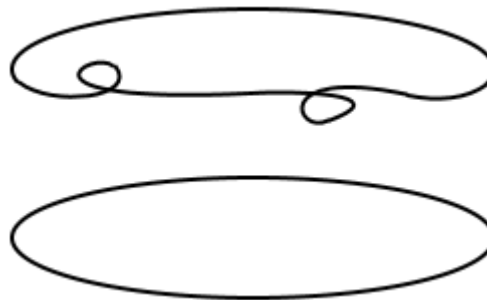


Рис. 14.9. Гомотопные кривые

Процесс уничтожения петелек регулярной гомотопией показан на рис. 14.10:

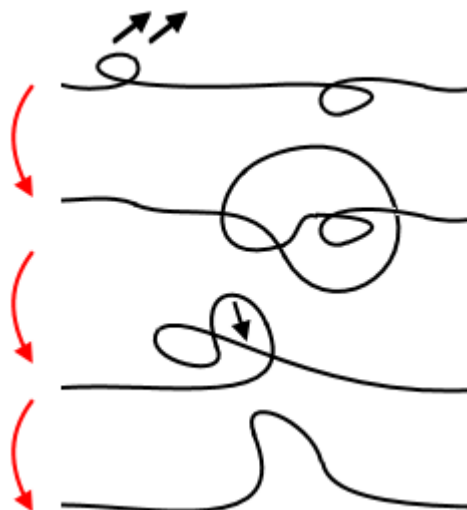


Рис. 14.10. Уничтожение петелек

Отсюда следует вывод: любая замкнутая регулярная кривая (на плоскости) регулярно гомотопна кривой одного из следующих видов (все k петелек направлены в одну сторону):

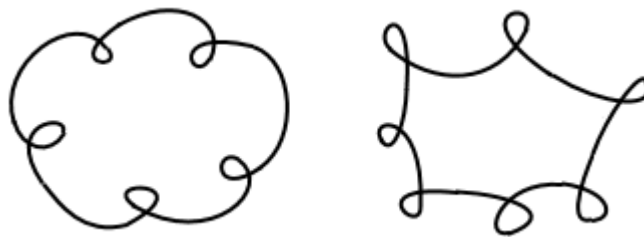


Рис. 14.11. Виды замкнутых регулярных кривых на плоскости

Будем обходить кривые против часовой стрелки: если ни одной петельки нет, то вектор скорости при обходе кривой делает один оборот, каждая петелька добавляет (убавляет) еще один оборот (в зависимости от направления обхода петельки), поэтому числа вращения кривых разных видов будут равны соответственно:

$$R(\gamma) = 1 + k \text{ или } R(\gamma) = 1 - k$$

Таким образом, числа вращения для кривых разных видов будут разными (кроме случая $k = 0$ – окружности).

Итак, если мы сделаем операции, описанные в леммах 1-4 для кривых γ_0 и γ_1 с одинаковыми числами вращения, то получим одинаковые кривые. То есть, мы геометрически описали регулярную гомотопию между γ_0 и γ_1 .

Отсюда следует (т.е. из теоремы Уитни, которую мы строго доказали ранее), что любая замкнутая кривая регулярно гомотопна кривой вида, изображенного на рис. 14.11. Поэтому удобно представлять себе классы регулярно гомотопных кривых как окружности с петельками.

На этом закончим обсуждать замкнутые регулярные кривые на плоскости и перейдем к их классификации на некоторых других двумерных поверхностях.

Регулярные замкнутые кривые на двумерной сфере.

Итак, мы хотим понять, когда две регулярные замкнутые кривые на сфере являются регулярно гомотопными.

Определение замкнутой кривой на сфере не вызывает затруднений (начальная точка совпадает с конечной), дать определение регулярной кривой на сфере уже сложнее (теория гладких многообразий будет обсуждаться в курсе дифференциальной геометрии).

Разберем простые примеры, для которых не обязательно строить общую теорию кривых на многообразиях. Так как сфера без точки гомеоморфна плоскости (пример гомеоморфизма – стереографическая проекция), то гладкие кривые на сфере можно рассматривать как гладкие в координатах, которые получатся при соответствии между точками сферы и точками плоскости (будем считать, что кривые не проходят через северный полюс).

Также можем считать, что замкнутая регулярная кривая расположена на “небольшом” участке сферы и (по теореме Уитни для плоскости) регулярно гомотопна кривой вида, изображенного на рис. 14.12:

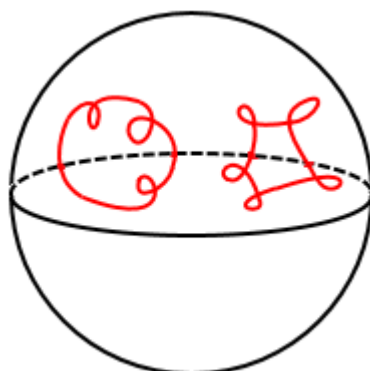


Рис. 14.12. Замкнутые регулярные кривые на сфере

То есть, число классов регулярной гомотопности может только уменьшиться – может оказаться, что кривые, которые на плоскости не были регулярно гомотопными, на сфере окажутся регулярно гомотопными.

Действительно, на сфере нельзя определить число вращения кривой (так как на плоскости мы можем измерить угол между вектором скорости кривой и каким-то фиксированным направлением, например, осью x , а на сфере не существует способа задать фиксированное направление во всех точках сразу).

Но мы всегда можем рассуждать следующим образом: можно считать, что кривая находится на небольшом участке сферы, который гомеоморфен плоскости. Значит, можно вычислить “число вращения”, затем регулярной гомотопией как-то изменить кривую, затем снова перетащить ее на этот участок сферы и опять вычислить “число вращения” – в процессе оно может меняться.

Рассмотрим процесс удаления двух соседних петелек: вытягивая кривую по сфере, приходим к участку кривой, содержащему петельки, “с другой стороны” – см. рис. 14.13:

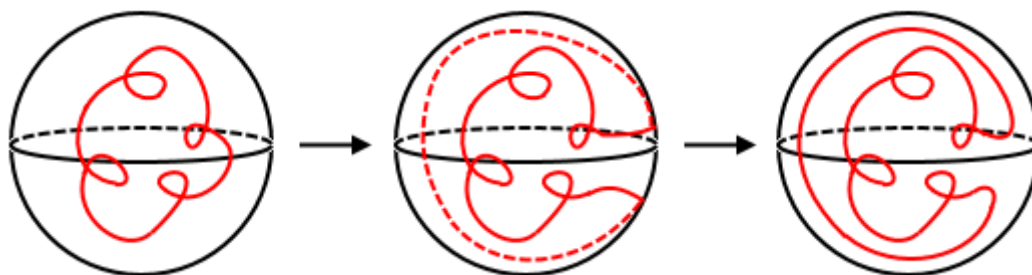


Рис. 14.13. Удаление соседних петелек у кривой на сфере

Если “число вращения” кривой до совершения этой операции было равно $k + 1$, то “число вращения” после совершения операции будет равно $k - 1$ (по определению – посчитаем количество оборотов вектора скорости при движении точки по кривой).

Итак, после такой гомотопии “число вращения” изменится на 2. Отсюда следует, что кривые, у которых “число вращения” отличается на 2, регулярно гомотопны. Поэтому на сфере останется всего 2 класса регулярной гомотопности.

Теорема. Любая замкнутая регулярная кривая на сфере регулярно гомотопна либо “окружности”, либо “восьмерке” (направление обхода неважно):

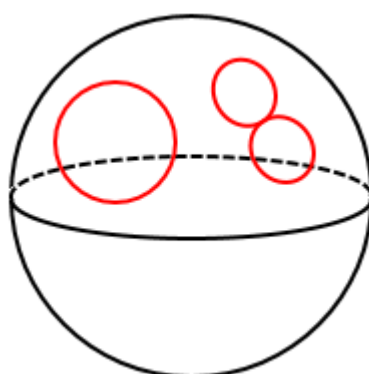


Рис. 14.14. Классы регулярных замкнутых кривых на сфере

Фактически, мы доказали эту теорему выше. Осталось понять, что окружность и восьмерка на сфере не являются регулярно гомотопными.

Приведем идею доказательства этого факта: вычислить “число вращения” кривой можно “протаскивая” кривую через выброшенную точку (северный полюс)– такая операция меняет число вращения на 2.

Также можно показать, что четность количества точек самопересечения – инвариант для замкнутой регулярной кривой на сфере (если считать, что кривые имеют только двойные точки самопересечения).

Лекция 15. Замкнутые регулярные кривые на цилиндре. Кристаллографические группы.

Итак, мы обсудили как устроены классы регулярной гомотопности замкнутых регулярных кривых на плоскости и на сфере. Конечно, можно попытаться классифицировать кривые на произвольной двумерной поверхности, но лучше вернуться к этому вопросу в следующем семестре (когда мы определим, что такое фундаментальная группа). Рассмотрим еще один пример.

Замкнутые регулярные кривые на цилиндре.

Существует несколько моделей цилиндра.

I. Поверхность в трехмерном пространстве, в некоторой системе координат $Oxyz$ задаваемая уравнением

$$x^2 + y^2 = 1$$

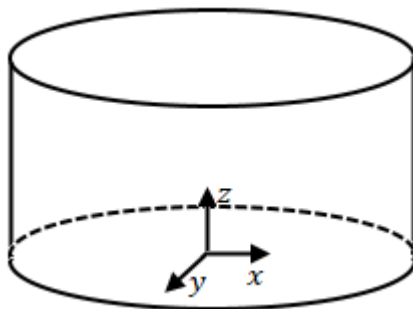


Рис. 15.1. Цилиндр

Или (что то же самое, поскольку прямая и интервал гомеоморфны) цилиндр конечной высоты, но без граничных окружностей.

II. Плоскость со склеенными точками

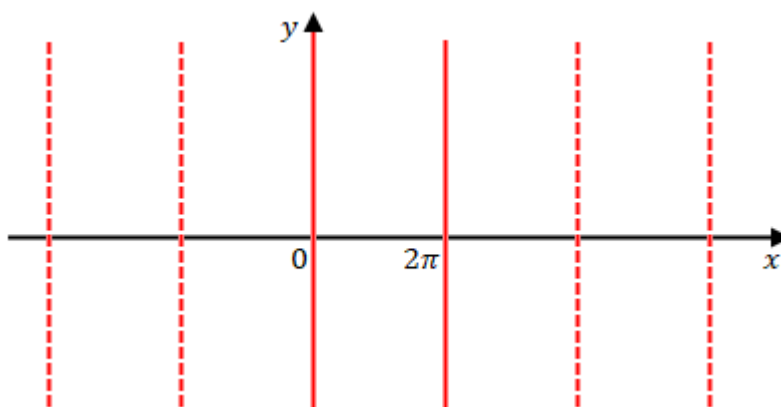


Рис. 15.2. Модель цилиндра на плоскости

Если склеить края полосы шириной 2π , то снова получим цилиндр радиуса 1. Можно считать, что мы вводим отношение эквивалентности – считаем, что точки на прямой $x = 0$ эквивалентны точкам на прямой $x = 2\pi$, при условии, что у них совпадают ординаты. Более того, можно считать, что мы взяли вообще все точки плоскости и отождествили точки с одинаковыми ординатами, у которых абсциссы отличаются на число, кратное 2π . То есть,

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

если

$$y_1 = y_2, \quad \frac{x_1 - x_2}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

III. Плоскость без точки

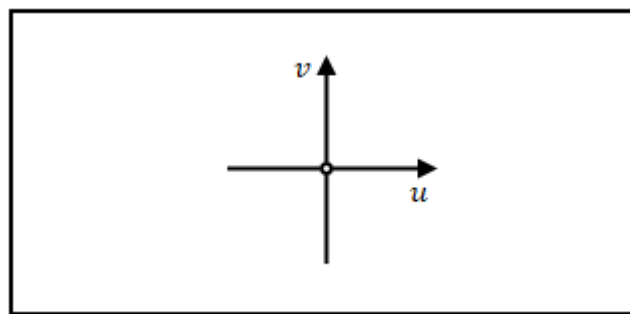


Рис. 15.3. Плоскость без точки

Цилиндр гомеоморфен плоскости без точки. Действительно, несложно построить гомеоморфизм между плоскостью без точки и, например, поверхностью из модели I.

Если считать, что на плоскости без точки введены координаты (u, v) , как показано на рис. 15.3, мы можем с ними связать полярные координаты (в отличие от обычных полярных координат на плоскости, они определены везде):

$$\begin{aligned} u &= \rho \cos \varphi \\ v &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Зададим на поверхности координаты (z, ψ) :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi \\ y &= \rho \sin \psi \end{aligned}$$

Тогда соответствие между точками плоскости с выброшенной точкой и точками поверхности из примера I легко задать, например:

$$\begin{aligned} z &= \ln \rho \\ \psi &= \varphi \end{aligned}$$

обратное соответствие:

$$\begin{aligned}\rho &= e^z \\ \varphi &= \psi\end{aligned}$$

В дальнейшем будем пользоваться всеми тремя моделями. Посмотрим, как устроены замкнутые регулярные кривые на цилиндре.

Определение. Пусть $A \in \mathbb{R}^2$, и γ – замкнутая непрерывная кривая на плоскости, не проходящая через точку A . Тогда радиус-вектор этой кривой $\gamma(t)$ можно записать так:

$$\gamma(t) = (\rho(t) \cos \varphi(t), \rho(t) \sin \varphi(t))$$

(это запись радиус-вектора кривой $\gamma(t)$ в декартовой системе координат, использующая функции, которые задают $\gamma(t)$ в полярной системе координат).

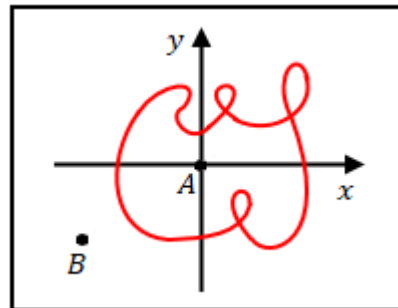


Рис. 15.4. Число оборотов вокруг точки A

Здесь $\rho(t) > 0$, так как кривая не проходит через точку A (примем ее за начало координат), $\varphi(t)$ – функция, определенная по модулю 2π (мы ранее обсуждали, что у этой функции можно выделить непрерывную ветвь), $t \in [0, T]$.

Тогда можно определить, сколько оборотов вокруг точки A делает радиус-вектор кривой:

$$C(\gamma) = \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Итак, для любой замкнутой кривой, не проходящей через точку A , мы определили некоторое целое число. Например, для точки A на рис. 15.4 число оборотов будет равно ± 1 (в зависимости от направления обхода кривой), а для точки B оно равно 0.

Ясно, что число оборотов можно определить для кривой на цилиндре, рассматривая ее как кривую на плоскости с выброшенной точкой и рассматривая число оборотов вокруг выброшенной точки.

Итак, для любой замкнутой (в том числе и для регулярной) кривой γ на цилиндре (который можно рассматривать как плоскость с выброшенной точкой) определены два

целых числа: число вращения $R(\gamma)$ и число оборотов вокруг выброшенной точки $C(\gamma)$. Для кривых на цилиндре верен аналог теоремы Уитни.

Теорема. Две замкнутые регулярные кривые γ_0 и γ_1 на цилиндре регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда $R(\gamma_0) = R(\gamma_1)$ и $C(\gamma_0) = C(\gamma_1)$.

Прежде чем доказывать теорему, приведем несколько комментариев (доказывать будем в модели II).

До этого мы использовали в основном плоскую модель, поймем, что означают числа $R(\gamma)$ и $C(\gamma)$ на цилиндре (поверхности).

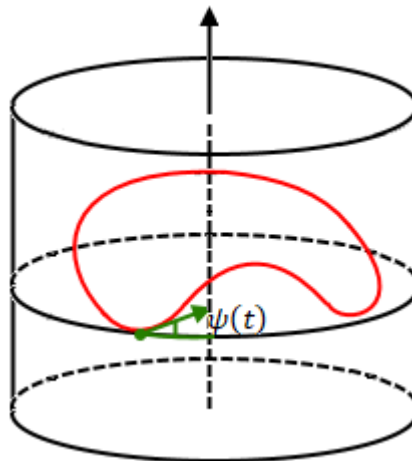


Рис. 15.5. К определению числа вращения на цилиндре

Говоря про сферу, мы отметили, что нельзя определить число вращения кривой, потому что невозможно в каждой точке сферы выбрать одно направление, от которого мы будем отсчитывать угол в процессе движения точки по кривой. На цилиндре такое направление выбрать несложно – например, в каждой точке кривой можно измерить угол $\psi(t)$ между вектором скорости и горизонтальным направлением (см. рис. 15.5).

$\tilde{R}(\gamma)$ – число оборотов (если понимать обороты как приращение угла $\psi(t)$), которое сделал вектор скорости в процессе движения точки по кривой) – отметим, что $\tilde{R}(\gamma) \neq R(\gamma)$. Второе число, которое можно определить в этой модели – количество оборотов вокруг оси цилиндра при движении точки по кривой.

Задача. Найти связь между числами $R(\gamma)$ (число вращения на плоскости без точки), $\tilde{R}(\gamma)$ (число вращения на цилиндре (поверхности)), $C(\gamma)$.

В модели II замкнутые кривые на цилиндре могут выглядеть незамкнутыми (можно считать, что мы плоскость наматываем на цилиндр так, что полоска шириной 2π наматываясь, покрывает весь цилиндр):

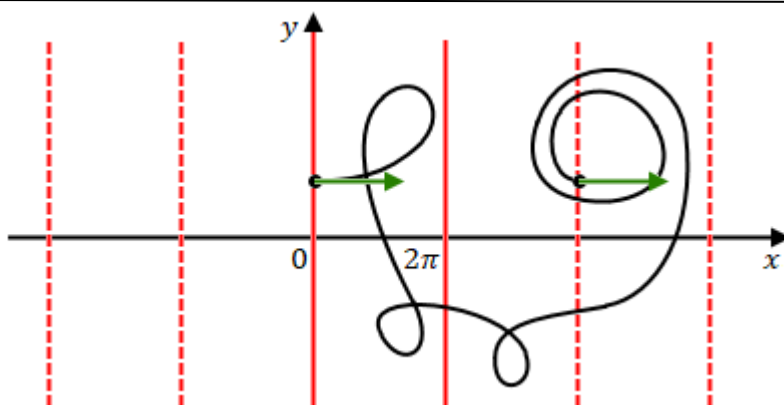


Рис. 15.6. Замкнутая кривая в модели II

В этой модели тоже можно определить число вращения (несмотря на то, что кривая незамкнутая, вектора скорости в начальной и конечной точке кривой совпадают) – это и будет число $\tilde{R}(\gamma)$. Число $C(\gamma)$ здесь выглядит совсем просто – при “наматывании” плоскости на цилиндр, каждая полоска шириной 2π дает один оборот. Если расстояние между начальной и конечной точками кривой в модели II равно $2\pi k$, то точка, двигаясь по поверхности, сделает k оборотов. Иными словами,

$$C(\gamma) = \frac{x(T) - x(0)}{2\pi}$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство.

Идея доказательства простая – приведем кривую регулярной гомотопией к какому-то “хорошему” виду. Для простоты будем считать, что вектор скорости в начальной и конечной точке кривой сонаправлен оси x . Это означает, что участок кривой, принадлежащий некоторой окрестности конечной точки, можно считать прямой линией. Изменим кривую на этом участке как показано на рис. 15.7 (измененный участок выделен красным):

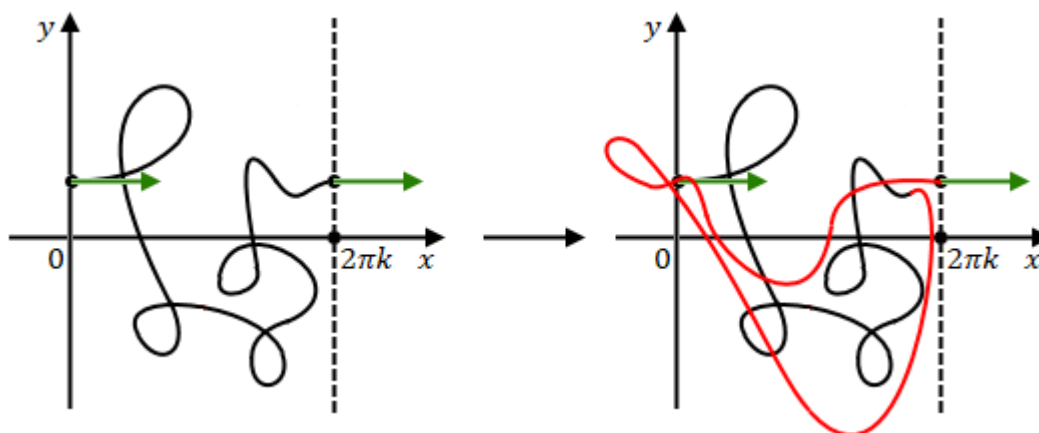


Рис. 15.7. Изменение кривой γ

Дальше приведем кривую к виду, изображенному на рис. 15.8:

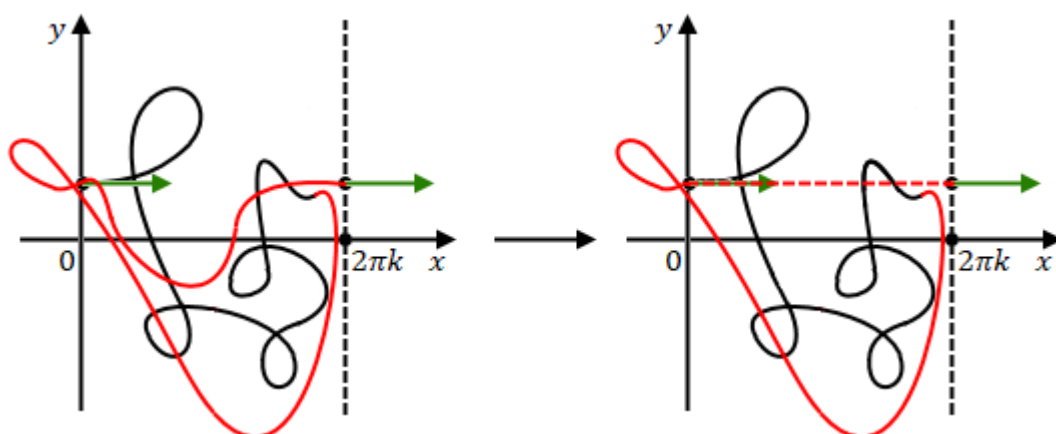


Рис. 15.8. Изменение кривой γ

Это регулярная гомотопия:

$$\gamma \sim (\alpha \cup \beta)$$

где α – “настоящая” замкнутая регулярная кривая на плоскости (часть кривой γ , которая соединяет начальную точку с начальной), β – горизонтальный отрезок, соединяющий начальную и конечную точки кривой.

Осуществив такую гомотопию для γ_0 и γ_1 , получим:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &\sim (\alpha_0 \cup \beta_0) \\ \gamma_1 &\sim (\alpha_1 \cup \beta_1)\end{aligned}$$

где α_0 и α_1 – замкнутые регулярные кривые на плоскости, имеющие одинаковые числа вращения (так как числа вращения γ_0 и α_0 , а также γ_1 и α_1 совпадают, а числа вращения γ_0 и γ_1 были одинаковыми и в процессе регулярной гомотопии не менялись), а β_0 и β_1 – одинаковые горизонтальные отрезки (их длина равна $2\pi k$, где $k = C(\gamma_0) = C(\gamma_1)$).

Теперь мы можем построить регулярную гомотопию между кривыми γ_0 и γ_1 – участки β_0 и β_1 совпадают, а регулярную гомотопию между α_0 и α_1 можно построить в силу теоремы Уитни на плоскости. Теорема доказана.

На цилиндре эти преобразования выглядят так: произвольную замкнутую регулярную кривую мы регулярной гомотопией преобразуем в кривую, состоящую из двух участков – замкнутой кривой, лежащей в “маленьком” участке цилиндра, и кривой, которая делает k оборотов вдоль горизонтальной окружности – см. рис. 15.9:

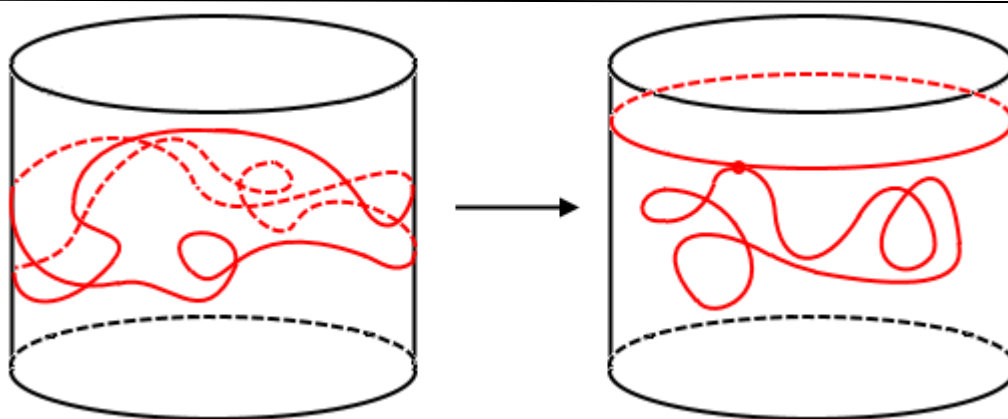


Рис. 15.9. Замкнутая регулярная кривая на цилиндре

На этом закончим обсуждать замкнутые регулярные кривые и перейдем к новой теме.

Кристаллографические группы на плоскости.

Кристаллографические группы – некоторые подгруппы группы движений плоскости. Движение плоскости – это отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние между точками.

Теорема (Шаля). Список движений плоскости исчерпывается следующими случаями:

- 1) Параллельный перенос $T_{\vec{a}}$, где $\vec{a}$ – вектор. Точка X переходит в точку $X' = X + \vec{a}$.
- 2) Поворот R_O^α , где O – центр поворота, α – угол поворота.
- 3) Симметрия (скользящая симметрия) $S_l^{\vec{a}}$, где l – прямая, $\vec{a}$ – вектор, параллельный l . Каждую точку X отражаем относительно прямой l и сдвигаем на вектор $\vec{a}$. Если $\vec{a} = 0$, то преобразование называют осевой симметрией.

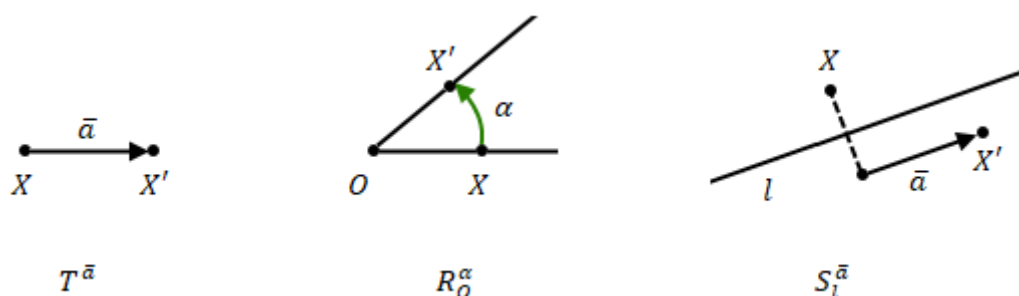


Рис. 15.10. Изометрии плоскости

Замечание. Все движения плоскости образуют группу (относительно композиции) $Iso(\mathbb{R}^2)$. Говорят, что группа действует на плоскость, если каждому элементу группы сопоставляется некое преобразование плоскости.

Рассмотрим подгруппу G в группе $Iso(\mathbb{R}^2)$.

Определение. Орбита точки $x \in \mathbb{R}^2$ при действии группы G – это множество всех образов точки x при применении преобразования из группы G :

$$O_x = \{g(x) \mid g \in G\} \subset \mathbb{R}^2$$

Определение. Стабилизатор точки $x \in \mathbb{R}^2$ при действии группы G – это множество всех элементов группы G , под действием которых точка x остается на месте:

$$St_x = \{g \in G \mid g(x) = x\} \subset G$$

Стабилизатор точки – это подгруппа в G .

Теперь можно перейти к обсуждению кристаллографических групп.

Определение. Кристаллографическая группа на плоскости – это дискретная подгруппа G в $Iso(\mathbb{R}^2)$, обладающая ограниченной фундаментальной областью.

Поясним понятия дискретности и фундаментальной области.

Определение. Подгруппа G в $Iso(\mathbb{R}^2)$ называется дискретной, если орбита любой точки этой подгруппы является дискретным подмножеством плоскости, то есть, если для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ существует окрестность U_x , такая что в этой окрестности нет никаких других точек из орбиты точки x , кроме нее самой:

$$U_x \cap O_x = x$$

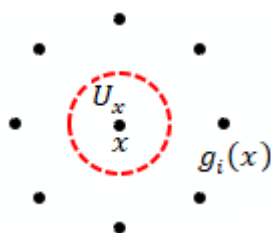


Рис. 15.11. Дискретное подмножество плоскости

Прежде, чем определять понятие фундаментальной области, определим, что такое замощение плоскости.

Определение. Замощением плоскости называется представление ее в виде объединения

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\alpha} K_{\alpha},$$

где:

- 1) K_α - замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^2$,
- 2) K_{α_1} и K_{α_2} не имеют общих внутренних точек,
- 3) Семейство K_α локально конечно, то есть, у любой точки плоскости есть окрестность U_x , пересекающаяся лишь с конечным числом подмножеств K_α .

Пример, когда 3 условие не выполнено: рассмотрим все лучи с началом в некоторой точке O . Их объединение дает всю плоскость, каждый из них является замкнутым подмножеством плоскости, внутренних точек у лучей нет. Но это семейство не является локально конечным – какую бы окрестность точки O мы ни рассмотрели, с ней будет пересекаться бесконечное число лучей.

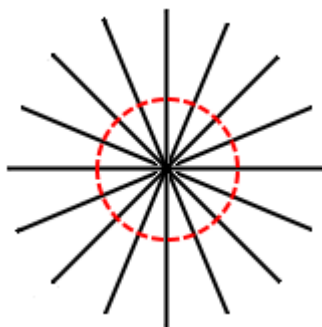


Рис. 15.12. Представление плоскости в виде объединений лучей

Определение. Говорят, что подгруппа G в $Is(\mathbb{R}^2)$ обладает фундаментальной областью D , если с помощью нее получается замощение плоскости $\{g(D) \mid g \in G\}$.



Рис. 15.13. Замощение плоскости

Область D должна быть ограниченной. Пример неограниченной области: рассмотрим группу, состоящую из одной осевой симметрии и тождественного преобразования. У этой группы есть фундаментальная область – в качестве нее можно взять одну из полуплоскостей, но эта группа не является кристаллографической.

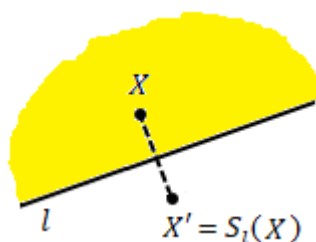


Рис. 15.14. Неограниченная фундаментальная область

Таким образом, при классификации кристаллографических групп можно представлять себе замощение плоскости фундаментальными областями этих групп.

Пример. Зафиксируем на плоскости два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такие что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ и рассмотрим параллельные переносы на всевозможные вектора следующего вида:

$$\{T^{k\vec{a}+l\vec{b}} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$$

В этом случае орбита точки x представляет собой целочисленную решетку (если x – точка $(0,0)$, то ее орбита – все точки с целочисленными координатами). Тогда примером фундаментальной области может служить квадрат (см рис. 15.15):

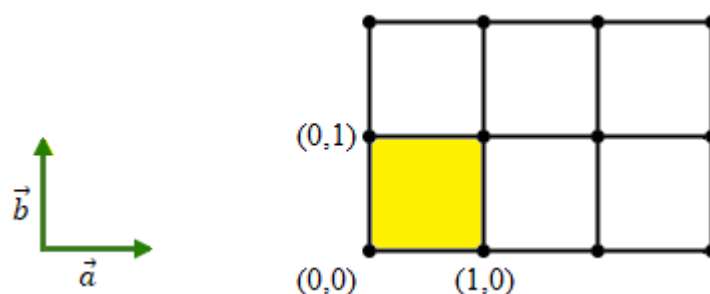


Рис. 15.15. Замощение плоскости квадратами

Получим замощение плоскости квадратами. Фундаментальная область, конечно же, не единственная – см. рис. 15.16:

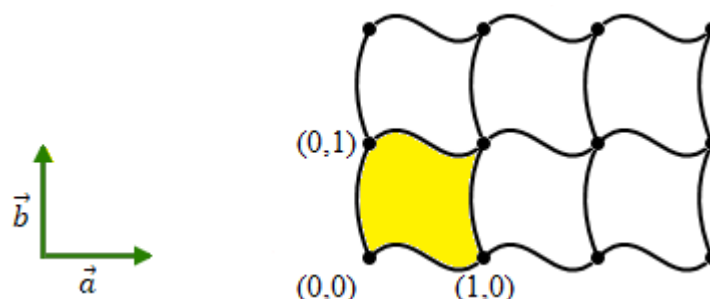


Рис. 15.16. Замощение плоскости

Паркет выглядит по-другому, так как мы выбрали другую фундаментальную область, но кристаллографическая группа та же самая – мы считаем паркеты одинаковыми, если они задаются одной и той же группой движений.

Поэтому удобно договориться о некотором каноническом выборе фундаментальной области. Далее мы покажем, что в качестве фундаментальной области всегда можно выбрать многоугольник.

Приведем еще несколько замечаний. Преобразования плоскости делятся на сохраняющие и меняющие ориентацию (I и II рода). Параллельный перенос $T^{\vec{a}}$ и поворот R_O^α не меняют ориентацию (преобразования I рода). Скользящая симметрия $S_l^{\vec{a}}$ и осевая симметрия S_l меняют ориентацию (преобразования II рода). Несложно понять, что композиция преобразований одинакового рода дает преобразование I рода, композиция преобразований I и II рода дает преобразование II рода. Приведем таблицу с результатами композиции различных движений (разбор всех случаев, указанных в таблице, оставляется читателю):

	T	R	S
T	T	R	S
R	R	T/R	S
S	S	S	T/R

Задача. Уметь вычислять композицию двух движений.

В декартовых координатах (x, y) движения плоскости записываются с помощью матриц:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix},$$

где A – ортогональная матрица, то есть, удовлетворяет соотношению $A^T A = E$.

Часто движения удобно записывать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} A & \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Далее речь пойдет о классификации кристаллографических групп – уточним, с точностью до чего мы хотим эти группы описывать.

Определение. Две кристаллографические группы G_1 и G_2 будем считать эквивалентными, если они сопряжены каким-то аффинным преобразованием

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

то есть,

$$h \circ G_1 \circ h^{-1} = G_2,$$

понимая под этим следующее:

$$\{h \circ g \circ h^{-1} \mid g \in G_1\} = G_2$$

Почему естественно считать, что эти группы одинаковые? Сопряжение групп означает, что они изоморфны, и отличаются только выбором базиса. Ранее мы рассмотрели пример кристаллографической группы, порожденной параллельными переносами на вектора вида $k\vec{a} + l\vec{b}$, где $k, l \in \mathbb{Z}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \perp \vec{b}$. Если вместо векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ рассмотреть некоторые другие вектора $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$, то получим сопряженную группу, причем сопрягающее аффинное преобразование – это преобразование, которое переводит базис $\vec{a}, \vec{b}$ в базис $\vec{a}', \vec{b}'$.

Если считать сопряженные группы эквивалентными, то список всех кристаллографических групп (точнее, классов их эквивалентности) становится конечным.

Отметим, что древние зодчие экспериментально все эти паркеты нашли (например, они встречаются в украшениях старинных храмов, башен и т.д.).

Лекция 16. Кристаллографические группы. Область Дирихле.

Продолжим изучать кристаллографические группы. Исследуем поподробнее вопрос фундаментальной области. Оказывается, для кристаллографической группы фундаментальную область можно всегда выбрать в виде многоугольника.

Рассмотрим фиксированную точку x_0 и рассмотрим множество

$$D(x_0, G) = \{x \mid \rho(x, x_0) \leq \rho(x, g(x_0)) \forall g \in G\}$$

– множество всех точек x , расстояние от которых до точки x_0 не больше, чем расстояние до точки $g(x_0)$ для любого элемента $g \in G$.

Геометрическая интерпретация этого определения выглядит так: области $D(x_0, G)$ принадлежат те точки плоскости x , к которым точка x_0 ближе, чем любая другая точка из орбиты x_0 (то есть, это область, ограниченная серединными перпендикулярами к отрезкам, соединяющим точку x_0 со всеми точками орбиты). Такая область называется областью Дирихле (иногда ее также называют областью Вороного).

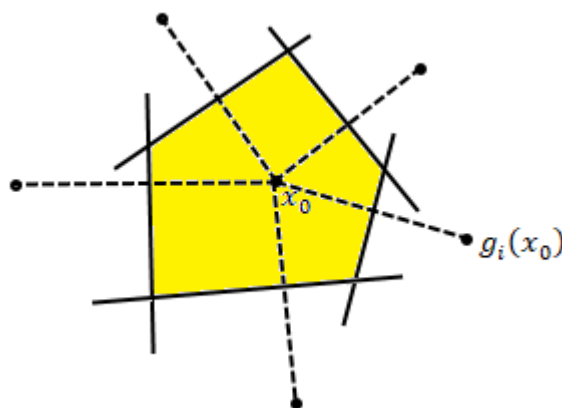


Рис. 16.1. Область Дирихле

Отметим, что эту же область можно задать следующим соотношением:

$$D(x_0, G) = \{x \mid \rho(x, x_0) \leq \rho(g(x), x_0) \forall g \in G\}$$

Оба условия задают одно и то же множество – дело в том, что все преобразования $g \in G$ – это изометрии плоскости, поэтому, если применить преобразование g^{-1} , получим

$$\rho(x, g(x_0)) = \rho(g^{-1}(x), x_0) \quad \forall g \in G.$$

Так как g^{-1} пробегает все элементы группы G , это соотношение равносильно такому:

$$\rho(x, g(x_0)) = \rho(g(x), x_0) \quad \forall g \in G$$

Геометрическая интерпретация второго определения следующая: области D принадлежат те точки плоскости x , которые ближе к точке x_0 , чем любая точка из орбиты x .

Теорема. Пусть G – кристаллографическая группа. Тогда:

- 1) $D(x_0, G)$ – выпуклый многоугольник,
- 2) $D(x_0, G)$ – фундаментальная область для G , если $St_{x_0} = \{e\}$ (т.е. нет преобразований кроме тождественного, оставляющих точку x_0 на месте).

Доказательство.

1) Из геометрической интерпретации области Дирихле следует, что $D(x_0, G)$ – выпуклое множество (как пересечение полуплоскостей). Остается показать, что $D(x_0, G)$ – пересечение конечного числа полуплоскостей.

Пусть $x_0 \in A$, A – фундаментальная область. A ограничена, т.е. содержится в круге радиуса R . Рассмотрим круг радиуса $2R$ с центром в точке x_0 . Поскольку группа G дискретна (так как она кристаллографическая), то орбита точки x_0 – дискретное подмножество плоскости, и в круге радиуса $2R$ будет содержаться лишь конечное число точек из орбиты O_{x_0} точки x_0 .

Это означает, что лишь конечное число серединных перпендикуляров, проведенных к отрезкам с концами в точках x_0 и $g(x_0)$, пересечет круг радиуса R .

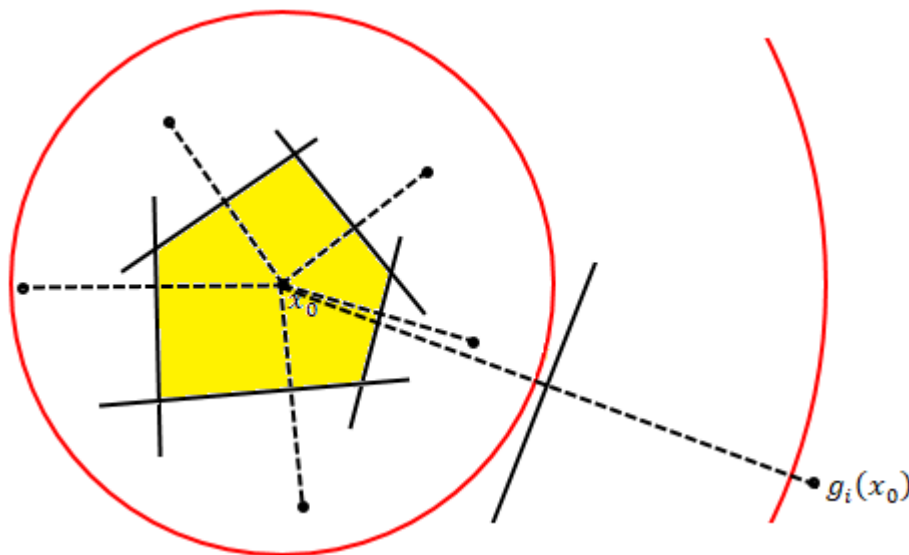


Рис. 16.2. Область Дирихле – выпуклый многоугольник

Ясно, что область Дирихле, построенная для точки x_0 , должна содержаться в круге радиуса R (например, потому что область Дирихле состоит из точек x , которые расположены ближе к точке x_0 , чем любая другая точка из орбиты x , а в круге радиуса

R уже содержится фундаментальная область A , содержащая точки из любой орбиты, получающейся при действии группы G).

Полуплоскости, задаваемые серединными перпендикулярами, содержат этот круг целиком, если точка $g(x_0)$ лежит вне круга радиуса $2R$. Поэтому при рассмотрении пересечения полуплоскостей $\{\rho(x, x_0) \leq \rho(x, g(x_0))\}$ полуплоскости, граница которых не пересекает круг радиуса R с центром в точке x_0 , можно не учитывать. Таким образом, можно рассматривать область Дирихле как пересечение конечного числа полуплоскостей (тех, для которых образы точки x_0 лежат в круге радиуса $2R$), поэтому область Дирихле – это действительно выпуклый многоугольник.

2) Докажем, что $D(x_0, G)$ – фундаментальная область для G , то есть, с ее помощью можно получить замощение плоскости

$$\{g(D(x_0, G)) \mid g \in G\}$$

Должны выполняться условия:

- 1) $\bigcup_{g \in G} g(D(x_0, G)) = \mathbb{R}^2$,
- 2) $g(D(x_0, G))$ – замкнутые в $\mathbb{R}^2$,
- 3) $g_1(D(x_0, G))$ и $g_2(D(x_0, G))$ не имеют общих внутренних точек,
- 4) Локальная конечность – у любой точки плоскости существует окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом множеств $g(D(x_0, G))$.

Так как $D(x_0, G)$ – выпуклый многоугольник, то условия 4) и 2) очевидно, выполнены. Условие 1) выполнено, потому что для любой точки x плоскости найдется ближайшая к ней точка из орбиты точки x_0 , и x попадет в соответствующий образ области Дирихле (образ области Дирихле, построенный для точки x_0 , совпадает с областью Дирихле, построенной для точки $g(x_0)$):

$$g(D(x_0, G)) = D(g(x_0), G)$$

Докажем, что выполняется условие 3. Предположим, что области $g_1(D(x_0, G))$ и $g_2(D(x_0, G))$ имеют общие внутренние точки:

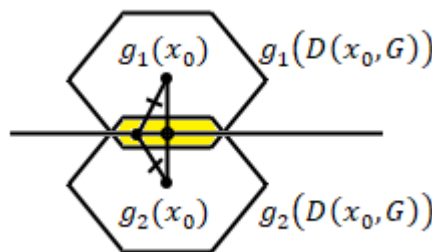


Рис. 16.3. Пересечение областей $g_1(D(x_0, G))$ и $g_2(D(x_0, G))$

Как отмечалось выше, можно считать, что $g_1(D(x_0, G))$ – это область Дирихле, построенная для точки $g_1(x_0)$, а $g_2(D(x_0, G))$ – область Дирихле, построенная для точки $g_2(x_0)$.

Если $x \in g_1(D(x_0, G)) \cap g_2(D(x_0, G))$, то $g_1(x_0)$ и $g_2(x_0)$ – ближайшие к точке x из орбиты O_{x_0} точки x_0 . В частности, расстояния от точки x до точек $g_1(x_0)$ и $g_2(x_0)$ равны. Таким образом, если точка x принадлежит пересечению $g_1(D(x_0, G))$ и $g_2(D(x_0, G))$, то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку с концами $g_1(x_0)$ и $g_2(x_0)$.

Ясно, что никакая точка, являющаяся внутренней для обеих областей Дирихле, не может лежать на этом серединном перпендикуляре (так как ее окрестность должна тоже принадлежать ему). Поэтому области $g_1(D(x_0, G))$ и $g_2(D(x_0, G))$ имеют общие внутренние точки только тогда, когда точки $g_1(x_0)$ и $g_2(x_0)$ совпадают, то есть,

$$g_1(x_0) = g_2(x_0) \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1(x_0) = x_0,$$

откуда

$$g_2^{-1} \circ g_1 \in St_{x_0}.$$

Если $St_{x_0} = \{e\}$, то

$$g_2^{-1} \circ g_1 = e \Leftrightarrow g_1 = g_2$$

- преобразования совпадают, то есть $g_1(D(x_0, G))$ и $g_2(D(x_0, G))$ – одна и та же область. Значит, если стабилизатор тривиальный, то общие внутренние точки невозможны.

Пример. Пусть O_i – точки с целыми координатами на плоскости. Рассмотрим группу, порожденную поворотами на 180° вокруг каждой из таких точек:

$$G = \langle R_{O_i}^{180^\circ} \mid O_i \text{ – точки с целыми координатами} \rangle$$

и рассмотрим области Дирихле для различных точек x_0 .

1) Точка $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Чтобы понять, как устроена орбита точки, достаточно рассмотреть только повороты на 180° вокруг целочисленных точек (так как группа G порождена преобразованиями $R_{O_i}^{180^\circ}$) – орбита точки $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ выделена красным на рис. 16.4:

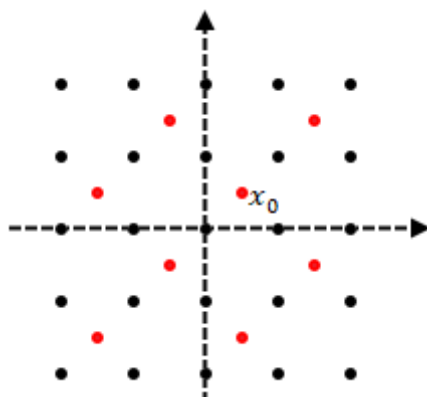


Рис. 16.4. Орбита точки $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Область Дирихле для точки x_0 показана на рис. 16.5:

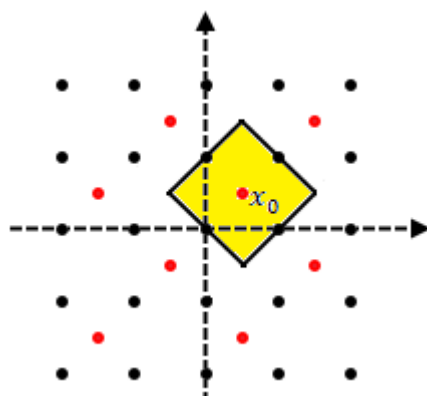


Рис. 16.5. Область Дирихле для точки $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2) Рассмотрим точку $x_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Ее орбита выделена красным на рис. 16.6:

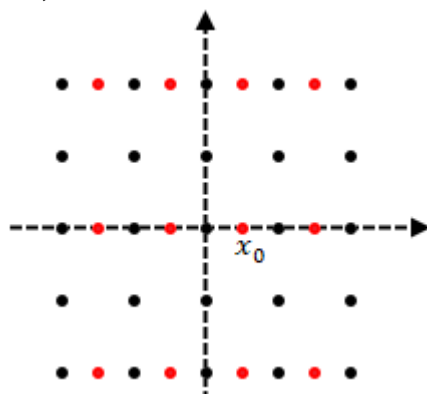


Рис. 16.6. Орбита точки $x_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Область Дирихле для точки x_0 показана на рис. 16.7:

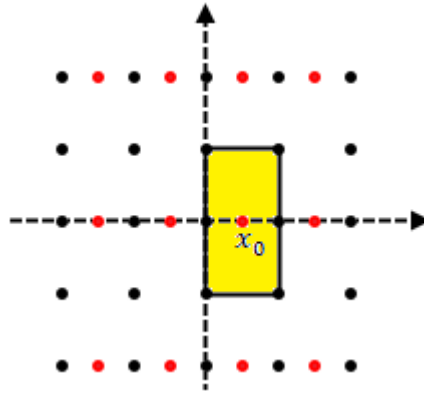


Рис. 16.7. Область Дирихле для точки $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3) Рассмотрим точку $x_0 = (0,0)$. У такой точки заведомо будет нетривиальный стабилизатор, так как она является одним из центров поворота.

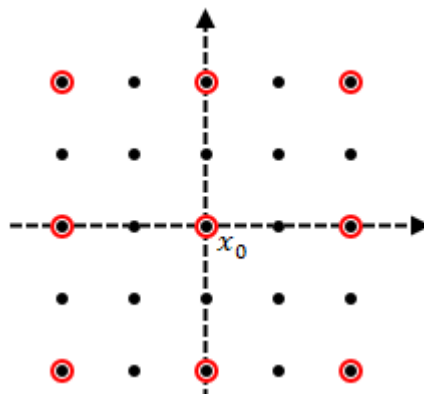


Рис. 16.8. Орбита точки $x_0 = (0,0)$

Проведя серединные перпендикуляры, соединяющие x_0 и $g(x_0)$, получим квадрат, изображенный на рис. 16.9:

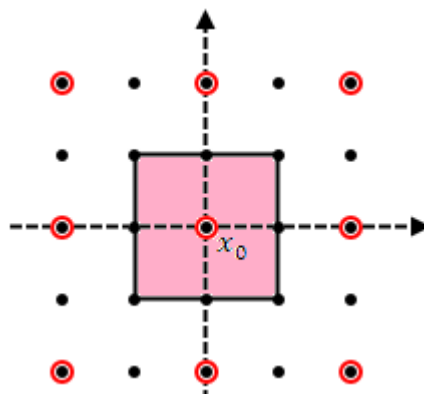


Рис. 16.9. Область Дирихле, не являющаяся фундаментальной

Это не фундаментальная область, потому что при повороте на 180° вокруг точки x_0 квадрат перейдет сам в себя (как и при тождественном преобразовании).

Заметим, что в примерах 1) и 2) площадь области равна 2, а в примере 3) площадь области равна 4. Это не случайно – площадь области Дирихле для точки с нетривиальным стабилизатором будет больше площади области Дирихле для точки с тривиальным стабилизатором во столько раз, сколько элементов находится в стабилизаторе точки x (оставим этот факт без доказательства).

Задача. Описать области Дирихле (при разном выборе точек x_0) для группы

$$G = \langle T^{k\vec{a}+l\vec{b}}, k, l \in \mathbb{Z} \rangle$$

С каждой кристаллографической группой связаны две группы, строение которых ее характеризует. Введем два обозначения. Пусть G – кристаллографическая группа. Тогда

Γ_G – подгруппа параллельных переносов в G ,

dG – подгруппа в ортогональной группе $O(2) = \{A \mid AA^T = E\}$.

Как обсуждалось ранее, любое аффинное преобразование в координатах записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} v^1 \\ v^2 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

Для изометрий матрица A ортогональная: $AA^T = E$.

При композиции аффинных преобразований соответствующие им матрицы перемножаются:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{array}{c|c} B & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AB & A\vec{u} + \vec{v} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

Поэтому можно сказать, что dG – подгруппа в ортогональной группе $O(2) = \{A \mid AA^T = E\}$, образованная линейными частями преобразований $g \in G$ (т.е. матрицами A и B).

Изучим вначале дискретные подгруппы в группе изометрий прямой, чтобы дальнейшие рассуждения для плоскости были более ясными.

Задача. Описать дискретные подгруппы в группе изометрий прямой $Iso(\mathbb{R})$.

Решение.

Рассмотрим изометрии прямой (будем записывать их в координатах, считая, что x — координата на прямой):

- 1) Параллельный перенос T^a : $x \mapsto x + a$,
- 2) Симметрия S_c : $x \mapsto 2c - x$

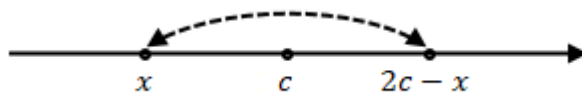


Рис. 16.10. Изометрии прямой

Если в группе $G \subset Iso(\mathbb{R})$ нет параллельных переносов, то либо G состоит только из тождественного преобразования:

$$G = \{e\} = \{T^0\} \quad (1),$$

либо

$$G = \{e, S_c\} \quad (2).$$

(так как композиция двух симметрий с различными c будет давать параллельный перенос):

$$S_{c_1} \circ S_{c_2} = T^{2(c_2 - c_1)}$$

Очевидно, что обе эти группы дискретные — они конечны, поэтому орбита любой точки состоит из конечного числа точек.

Если в группе $G \subset Iso(\mathbb{R})$ есть параллельные переносы: $T^a, T^b \in G$, то $\exists c \in \mathbb{R}$, что $a = kc, b = mc$, где $k, m \in \mathbb{Z}$.

Действительно, рассмотрим

$$\min\{|p| \neq 0 \mid T^p \in G\} = c$$

- минимальное по модулю ненулевое число p , параллельный перенос на которое содержится в группе (оно существует, так как иначе в G будут содержаться параллельные переносы на сколь угодно малое число, а это будет означать, что орбита, например, точки 0 не будет дискретной).

Тогда любой параллельный перенос, который содержится в группе G , будет на число, кратное c . Действительно, если существует перенос на a , не кратное c , то тогда существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $(n - 1)c < a < nc$. Тогда $nc - a > 0$ и $T^{nc-a} \in G$, что противоречит выбору числа c .

Итак, множество всех параллельных переносов имеет вид $\Gamma_G = \{T^{kc}, k \in \mathbb{Z}\}$. Тогда если в G нет симметрий, то

$$G = \Gamma_G = \{T^{kc}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (3)$$

Пусть в G есть и параллельные переносы и симметрии. Как мы уже выяснили, $\Gamma_G = \{T^{kc}, k \in \mathbb{Z}\}$. Разберемся, какие могут быть симметрии в группе с таким множеством параллельных переносов.

Пусть $S_a \in G$. Рассмотрим композицию $T^{kc} \circ S_a$:

$$x \xrightarrow{S_a} 2a - x \xrightarrow{T^{kc}} 2a + kc - x = 2\left(a + k\frac{c}{2}\right) - x$$

- получим симметрию относительно точки $a + k\frac{c}{2}$. То есть,

$$T^{kc} \circ S_a = S_{a+k\frac{c}{2}}$$

Отсюда следует, что если в группе есть симметрия относительно точки a , тогда и все точки, полученные сдвигом из точки a на кратное $\frac{c}{2}$, тоже будут центрами симметрии. Других симметрий быть не может, в силу соотношения:

$$S_{c_2} \circ S_{c_1} = T^{2(c_2 - c_1)}$$

- композиция симметрий относительно точек c_1 и c_2 дает параллельный перенос на число, равное их удвоенной разности, а все параллельные переносы имеют вид T^{kc} . Получаем

$$G = \{T^{kc}, S_{a+k\frac{c}{2}}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (4)$$

Итак, мы описали все дискретные подгруппы в группе изометрий прямой $Iso(\mathbb{R})$. В случаях (1) и (2) подгруппа параллельных переносов тривиальна: $\Gamma_G = \{e\}$, в случаях (3) и (4) подгруппа параллельных переносов не тривиальна: $\Gamma_G = \{T^{kc}, k \in \mathbb{Z}\}$. В случаях (1) и (3) $dG = \{1\}$, а в случаях (2) и (4) $dG = \{\pm 1\}$. Таким образом, в случае прямой группа G однозначно определяется парой Γ_G, dG :

$$(\Gamma_G, dG) \Leftrightarrow G$$

Отметим, что в каждом случае, кроме (1), содержится бесконечное количество групп. Но мы классифицируем группы с точностью до сопряжения аффинным преобразованием. То есть, мы считаем группы одинаковыми: $G_1 \sim G_2$, если существует аффинное преобразование $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такое что $G_2 = hG_1h^{-1}$, т.е.

$$G_2 = \{h \circ g \circ h^{-1} \mid g \in G_1\}$$

Поймем на примере (2), что все подгруппы случая (2) сопряжены. Действительно, пусть например, $G_1 = \{e, S_{c_1}\}$, $G_2 = \{e, S_{c_2}\}$. Тогда в качестве h рассмотрим сдвиг:

$$h: x \rightarrow x + c_1 - c_2.$$

Тогда

$$x \xrightarrow{h^{-1}} x + c_2 - c_1 \xrightarrow{S_{c_2}} 2c_2 - (x + c_2 - c_1) = c_2 - c_1 - x \xrightarrow{h} 2c_1 - x$$

- точка x переходит в точку $2c_1 - x$, то есть, композиция $hS_{c_2}h^{-1}$ дает симметрию относительно c_1 :

$$hS_{c_2}h^{-1} = S_{c_1}$$

Аналогичным образом можно проверить, что например для случая (3)

$$h: x \rightarrow \frac{c_1}{c_2}x,$$

для случая (4) так же можно подобрать коэффициенты α и β :

$$h: x \rightarrow \alpha x + \beta$$

На плоскости такого взаимно-однозначного соответствия $(\Gamma_G, dG) \Leftrightarrow G$ уже нет.

В заключение отметим, что случаи (1) и (2) не обладают ограниченной фундаментальной областью, а случаи (3) и (4) дают полное описание кристаллографических групп на прямой.

Лекция 17. Кристаллографические группы на плоскости.

На прошлой лекции мы рассмотрели дискретные подгруппы группы изометрий прямой. Если на прямой мы получили взаимно-однозначное соответствие между парами (Γ_G, dG) и дискретной подгруппой G , то для плоскости это сделать не удастся. Тем не менее, попытаемся понять, какие группы Γ_G и dG соответствуют кристаллографическим группам на плоскости.

Начнем с Γ_G . Прежде чем обсуждать эту группу, сформулируем несколько вспомогательных утверждений о композиции изометрий (которые полезны сами по себе).

Лемма 1.

$$g \circ T^{\vec{a}} \circ g^{-1} = T^{dg(\vec{a})}$$

Доказательство.

Запишем в координатах. Пусть

$$g = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A – ортогональная матрица 2×2 . Тогда

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параллельный перенос задается матрицей:

$$T^{\vec{a}} = \begin{pmatrix} E & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$\begin{aligned} g \circ T^{\vec{a}} \circ g^{-1} &= \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A\vec{a} + \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E & A\vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- получили требуемое (так как $dg = A$).

Лемма 2.

$$R_{O_1}^{\alpha} \circ R_{O_2}^{\beta} \circ R_{O_1}^{-\alpha} \circ R_{O_2}^{-\beta} = T^{\vec{a}},$$

где $\vec{a} \neq 0$, если $O_1 \neq O_2$ и $\alpha, \beta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Доказательство.

Рассмотрим точку

$$P = R_{O_2}^\beta(O_1)$$

и проследим, что с ней происходит в процессе композиций:

$$P \xrightarrow{R_{O_2}^{-\beta}} O_1 \xrightarrow{R_{O_1}^{-\alpha}} O_1 \xrightarrow{R_{O_2}^\beta} P \xrightarrow{R_{O_1}^\alpha} R_{O_1}^\alpha(P)$$

Композиция $R_{O_1}^\alpha \circ R_{O_2}^\beta \circ R_{O_1}^{-\alpha} \circ R_{O_2}^{-\beta}$ – это преобразование I рода (то есть, либо параллельный перенос, либо поворот). То, что это параллельный перенос, можно понять, аккуратно перемножив матрицы соответствующих преобразований, либо заметив, что все лучи при композиции поворачиваются на $-\beta$, затем на $-\alpha$, затем на β , затем на α , то есть, каждый луч переходит в сонаправленный луч.

Точка P в результате этого преобразования переходит в $R_{O_1}^\alpha(P)$ – если эти точки не совпадают, то эта композиция – действительно параллельный перенос на ненулевой вектор.

$P = R_{O_1}^\alpha(P)$ либо когда $\alpha = 0$, либо когда $P = O_1$, но точка P выбрана таким образом, что это – результат поворота точки O_1 вокруг точки O_2 , поэтому $P = O_1$ либо когда $\beta = 0$, либо когда $O_1 = O_2$. Поэтому в условиях леммы композиция

$$R_{O_1}^\alpha \circ R_{O_2}^\beta \circ R_{O_1}^{-\alpha} \circ R_{O_2}^{-\beta}$$

– действительно параллельный перенос на ненулевой вектор.

Лемма 3.

$$g \circ R_O^\alpha \circ g^{-1} = R_{g(O)}^{\pm\alpha}$$

Доказательство.

Можно (как в доказательстве леммы 1) перемножить матрицы соответствующих преобразований, а можно рассуждать более геометрически: так как g и g^{-1} – преобразования одного рода, то $g \circ R_O^\alpha \circ g^{-1}$ – преобразование I рода, то есть, либо поворот, либо параллельный перенос.

Рассмотрим точку $g(O)$:

$$g(O) \xrightarrow{g^{-1}} O \xrightarrow{R_O^\alpha} O \xrightarrow{g} g(O)$$

- точка $g(O)$ останется на месте, значит, это не параллельный перенос (и не тождественное преобразование Id , так как в этом случае получалось бы, что $R_O^\alpha = Id$). Значит, это поворот вокруг точки $g(O)$.

То, что это поворот на угол $\pm\alpha$, можно понять, рассмотрев, куда переходит произвольный луч в результате композиции этих преобразований, или просто перемножив соответствующие матрицы преобразований.

Теперь получим следствие из этих трех лемм.

Следствие. Для кристаллографической группы G на плоскости ее подгруппа параллельных переносов Γ_G содержит два неколлинеарных вектора.

Доказательство.

Нужно убедиться в невозможности следующих случаев: 1) в Γ_G нет нетривиальных параллельных переносов, 2) в Γ_G все параллельные переносы параллельны одному направлению.

- 1) Пусть $\Gamma_G = \{T^{\vec{0}}\}$, то есть, в Γ_G нет нетривиальных параллельных переносов.
 - Тогда все повороты в G (если они существуют) – вокруг одного центра O (это следует из леммы 2 – если бы в Γ_G существовали два поворота вокруг разных центров, то их композиция давала бы параллельный перенос на ненулевой вектор).
 - Если в G есть симметрия $S_l^{\vec{a}}$, то $\vec{a} = 0$ (так как $S_l^{\vec{a}} \circ S_l^{\vec{a}} = T^{2\vec{a}}$), то есть, это – осевая симметрия, причем прямая l проходит через O (действительно, воспользуемся леммой 3 – рассмотрим композицию $g \circ R_O^\alpha \circ g^{-1}$, в качестве g взяв осевую симметрию S_l – получим поворот относительно точки O_1 , которая симметрична точке O относительно прямой l , что невозможно, как мы выяснили ранее).

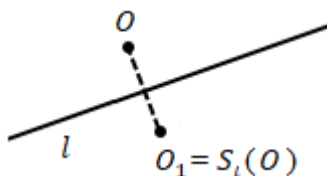


Рис. 17.1. Осевая симметрия S_l

Итак, в случае 1) все преобразования в G устроены следующим образом: параллельных переносов нет, все повороты – вокруг одной точки O , и все симметрии (если они есть) – осевые, причем оси проходят через точку O .

Заметим, что для произвольной точки P , не совпадающей с O , все точки орбиты точки P лежат на окружности с центром в точке O и радиуса OP . Рассмотрим фундаментальную область D (она ограничена, так как группа G – кристаллографическая). Взяв окружность достаточно большого радиуса (не пересекающуюся с областью D), получим, что орбита точки P не пересекается с D – противоречие.

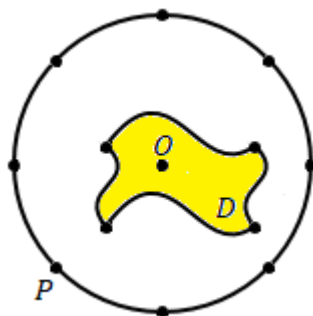


Рис. 17.2. Орбита точки P не пересекается с D

- 2) Пусть $\Gamma_G \subset \{T^{\lambda \vec{a}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, причем $\Gamma_G \neq \{T^{\vec{0}}\}$, то есть, в Γ_G все параллельные переносы параллельны одному направлению. Тогда:
- Все повороты, содержащиеся в G – это повороты на 180 градусов (следует из леммы 1 для $g = R_O^\alpha$ – если вектор $\vec{a}$ содержался в группе параллельных переносов, то и вектор, полученный из вектора $\vec{a}$ поворотом на угол α , тоже будет содержаться в группе).
 - Все симметрии – с осями, параллельными, или перпендикулярными вектору $\vec{a}$ (следует из леммы 1 для $g = S_l$ – вместе с вектором $\vec{a}$ в группе будет содержаться и параллельный перенос на вектор, симметричный вектору $\vec{a}$ относительно прямой l).
 - Симметрии с осями, перпендикулярными вектору $\vec{a}$ – осевые (если существует скользящая симметрия вдоль оси l , перпендикулярной вектору $\vec{a}$ и сдвигом на вектор $\vec{b}$, то композиция таких симметрий – параллельный перенос на удвоенный вектор $\vec{b}$: $S_l^{\vec{b}} \circ S_l^{\vec{b}} = T^{2\vec{b}}$, что противоречит тому, что все параллельные переносы параллельны вектору $\vec{a}$).

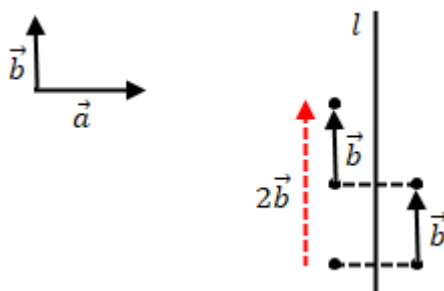


Рис. 17.3. $S_l^{\vec{b}} \circ S_l^{\vec{b}} = T^{2\vec{b}}$

- Симметрия с осью, параллельной вектору $\vec{a}$ (если она существует) – единственная. Действительно, если существует две симметрии S_{l_1} и S_{l_2} с параллельными осями l_1 и l_2 , то их композиция – параллельный перенос: $S_{l_2} \circ S_{l_1} = T^{\vec{c}}$, где $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $|\vec{c}|$ – удвоенное расстояние между l_1 и l_2 (если S_{l_1} и S_{l_2} – скользящие симметрии, все равно получаем параллельный перенос на вектор $\vec{c}$, не параллельный вектору $\vec{a}$).

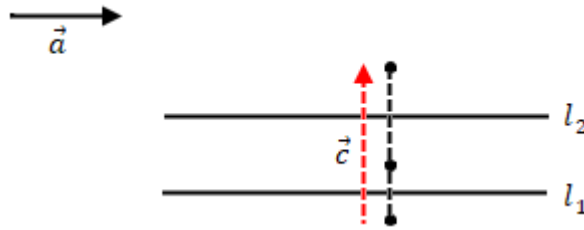


Рис. 17.4. $S_{l_2} \circ S_{l_1} = T^{\vec{c}}$

- Центры поворотов лежат на прямой l .

Замечание. Композиция двух поворотов на 180° вокруг точек O_1 и O_2 – параллельный перенос на удвоенный вектор $\overrightarrow{O_2O_1}$:

$$R_{O_1}^{180^\circ} \circ R_{O_2}^{180^\circ} = T^{2\overrightarrow{O_2O_1}}$$

Отсюда следует, что все центры поворотов лежат на прямой, параллельной l . Из леммы 3 следует, что центры поворотов лежат на l (действительно, беря $g = S_l$, получим два центра поворота такие, что вектор с началом и концом в этих точках не будет параллелен вектору $\vec{a}$).

Таким образом, орбита произвольной точки P лежит на двух прямых: прямой, проходящих через точку P параллельно l и прямой, симметричной ей относительно l (или в одной прямой, параллельной вектору $\vec{a}$, если в группе нет симметрии с осью l , параллельной вектору $\vec{a}$).

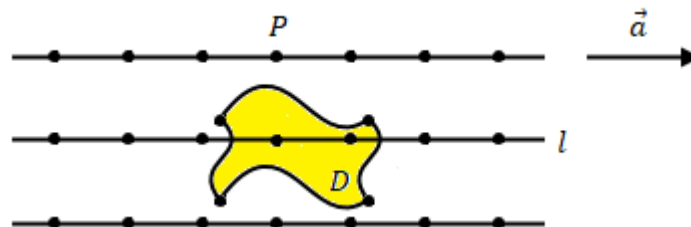


Рис. 17.5. Орбита точки P не пересекается с D

Понятно, что можно выбрать точку P так, чтобы прямая, проходящая через точку P и параллельная вектору $\vec{a}$, не пересекала фундаментальную область D . Получим, что орбита точки P не пересекается с фундаментальной областью D – противоречие.

Итак, мы доказали следствие, но это еще не полное описание Γ_G .

Теорема. Для кристаллографической группы G ее подгруппа параллельных переносов имеет вид

$$\Gamma_G = \{T^{k\vec{a}+l\vec{b}} \mid k, l \in \mathbb{Z}\},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

То есть, в Γ_G можно выбрать базис из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такой что все остальные вектора из Γ_G представляются в виде целочисленной линейной комбинации $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Подгруппу Γ_G часто называют решеткой – орбита любой точки плоскости под действием этой подгруппы действительно напоминает решетку:

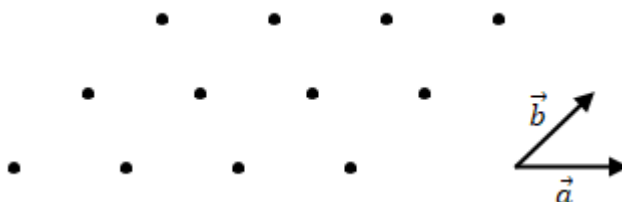


Рис. 17.6. Решетка

Доказательство.

Опишем, как выбрать такой базис из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- 1) Пусть $\vec{a}$ – вектор минимальной (ненулевой) длины среди тех, для которых $T^{\vec{a}} \in \Gamma_G$ (это можно сделать, так как группа G дискретна).
- 2) В качестве вектора $\vec{b}$ выберем вектор, не параллельный $\vec{a}$, для которого расстояние от его конца до прямой, параллельной $\vec{a}$ и проходящей через его начало, минимально. Это можно сделать – действительно, в противном случае для произвольного вектора $\vec{v} \in \Gamma_G$ рассмотрим векторы $\vec{v} - \vec{a}$, $\vec{v} - 2\vec{a}$ и т.д. – заменяя вектор $\vec{v}$ на вектор вида $\vec{v} - k\vec{a}$ в результате получим (так как $T^{\vec{a}} \in \Gamma_G$) вектор, принадлежащий Γ_G , конец которого лежит в полосе, ограниченной прямыми, проходящими через начало и конец вектора $\vec{a}$. Получаем противоречие с дискретностью группы G (так как концы векторов $\vec{v} - k\vec{a}$ – элементы орбиты точки, от которой мы откладываем вектор $\vec{v}$).

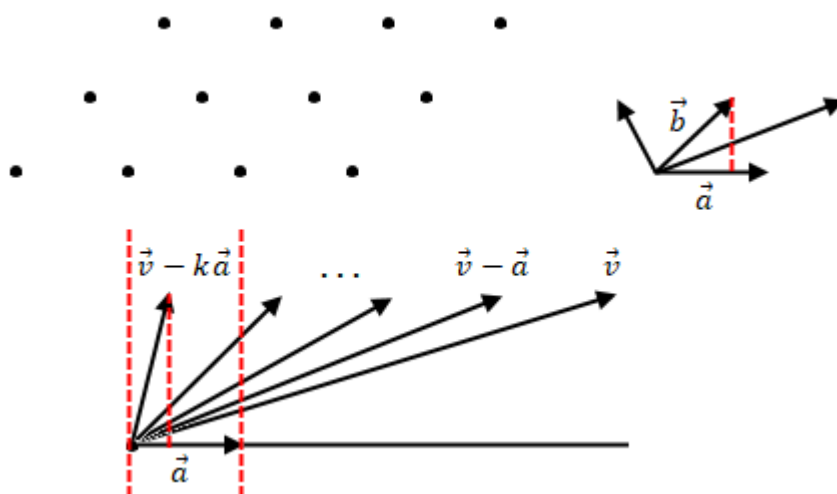


Рис. 17.7. Выбор вектора $\vec{b}$

Теперь осталось понять, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, выбранные таким образом, действительно порождают всю решетку. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{v}$, такой что $T^{\vec{v}} \in \Gamma_G$ и докажем, что его можно представить в виде

$$\vec{v} = k\vec{a} + l\vec{b}, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим вектора вида

$$\vec{v} - \vec{b}, \vec{v} - 2\vec{b}, \dots, \vec{v} - k\vec{b}, \dots \quad k \in \mathbb{Z}$$

Один из таких векторов будет лежать на прямой, параллельной вектору $\vec{a}$ (иначе существуют векторы $\vec{v} - (k-1)\vec{b}$ и $\vec{v} - k\vec{b}$, лежащие по разные стороны от этой прямой – расстояние от их концов до прямой, параллельной вектору $\vec{a}$, будет меньше, чем для вектора $\vec{b}$, так как $\vec{b}$ – вектор, соединяющий концы этих векторов – см. рис. 17.8):

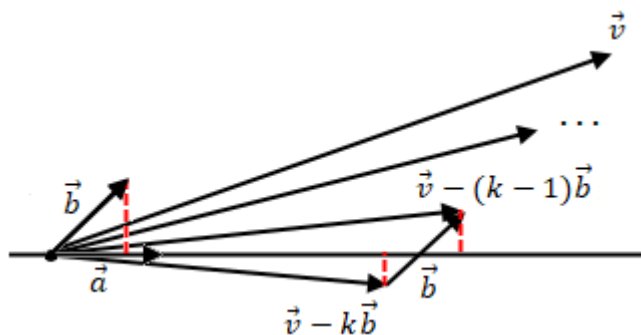


Рис. 17.8. Существует $k \in \mathbb{Z}$, такое что $\vec{v} + k\vec{b} = \lambda\vec{a}$

Итак, существует $k \in \mathbb{Z}$, такое что $\vec{v} + k\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Осталось доказать, что $\lambda \in \mathbb{Z}$. Действительно, вектор $\lambda\vec{a}$ – линейная комбинация векторов $\vec{v}$ и $k\vec{b}$, которые принадлежат решетке, поэтому он тоже принадлежит решетке, то есть, существует параллельный перенос на вектор $\lambda\vec{a}$. Тогда вектора

$$(\lambda - 1)\vec{a}, (\lambda - 2)\vec{a}, \dots, (\lambda - k)\vec{a}, \dots$$

также принадлежат решетке, и среди них содержится нулевой вектор (иначе получим, что в группе существует вектор, длина которого меньше, чем длина вектора $\vec{a}$ – противоречие).

Значит, действительно, выполнено соотношение $\vec{v} = k\vec{a} + l\vec{b}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Теперь перейдем к группе dG . Введем несколько обозначений:

- C_n – подгруппа поворотов на углы $\frac{2\pi k}{n}$, где $k = 1, 2, \dots, n$ в группе $O(2)$ (группа C_n изоморфна $\mathbb{Z}_n$). В частности $C_1 = \{e\}$, $C_2 = \{e, R^{180^\circ}\}$, ...
- D_n – подгруппа, содержащая повороты на углы $\frac{2\pi k}{n}$, где $k = 1, 2, \dots, n$ и n симметрий относительно прямых, расположенных под углами $\frac{\pi}{n}$. (D_n изоморфна группе диэдра – группе симметрий правильного n -угольника).

Можно считать, что это подгруппы в группе ортогональных матриц.

Теорема. Для кристаллографической группы G соответствующая подгруппа dG (в $O(2)$) – одна из следующих: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$.

Доказательство.

1. Если $R_O^\alpha \in G$, то $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$ (иначе орбита точки P всюду плотно заполнит окружность, а это противоречит тому, что группа G кристаллографическая, в частности, дискретная).

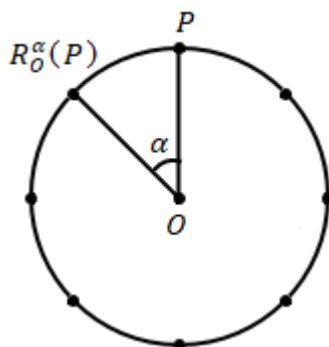


Рис. 17.9. Угол $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$

Таким образом, самый маленький угол поворота в группе имеет вид $\frac{2\pi}{n}$, поэтому линейные части изометрий, являющихся поворотами, действительно имеют вид C_n . Осталось понять, что $n = 1, 2, 3, 4, 6$

2. Пусть P – центр поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$, то есть, $R_P^{\frac{2\pi}{n}} \in G$. Рассмотрим орбиту точки P и выберем в ней точку $Q \neq P$, ближайшую к P (это можно сделать, так как орбита дискретна). Все точки из орбиты точки P тоже будут центрами поворотов на углы вида $\frac{2\pi}{n}$ – это следует из леммы 3:

$$g \circ R_P^{\frac{2\pi}{n}} \circ g^{-1} = R_{g(P)}^{\pm \frac{2\pi}{n}}$$

Рассмотрим точку $P' = R_Q^{\frac{2\pi}{n}}(P)$ – результат поворота точки P вокруг точки Q на угол $\frac{2\pi}{n}$. Если $n > 6$, то $|PP'| < |PQ|$, что противоречит выбору точки Q .

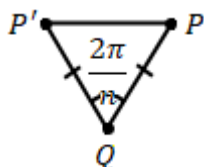


Рис. 17.10. При $n > 6$ выполнено $|PP'| < |PQ|$

$n = 5$ тоже не подходит – рассмотрим точку $Q' = R_{P'}^{\frac{2\pi}{5}}(P)$ – результат поворота точки Q вокруг точки P' на угол $\frac{2\pi}{5}$. Несложно проверить, что в этом случае $|PQ'| < |PQ|$, что противоречит выбору точки Q .

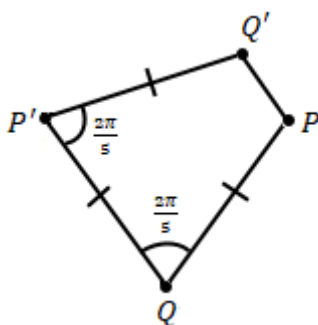


Рис. 17.11. При $n = 5$ выполнено $|PQ'| < |PQ|$

Итак, все углы поворота в группе G кратны $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Осталось разобраться с симметриями.

3. Пусть $S_l \in G$. Рассмотрим композицию этой симметрии и поворота на угол α : $R_O^\alpha \circ S_l$, где $O \in l$. Получившаяся изометрия – симметрия относительно прямой l' , где угол между l и l' равен $\frac{\alpha}{2}$ (например, это можно понять, заметив, что любая точка прямой l' остается на месте):

$$R_O^\alpha \circ S_l = S_{l'}$$

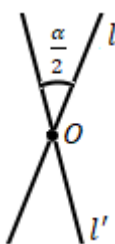


Рис. 17.12. $R_O^\alpha \circ S_l = S_{l'}$

Кроме того, композиция двух симметрий $S_m \circ S_l$ с пересекающимися осями, угол между которыми равен β – это поворот вокруг точки пересечения на угол 2β (это преобразование I рода, точка O неподвижна):

$$S_m \circ S_l = R_O^{2\beta}$$

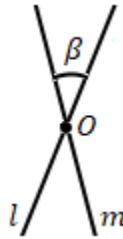


Рис. 17.13. $S_m \circ S_l = R_O^{2\beta}$

Посмотрим, как могут быть расположены оси симметрии. Допустим, в группе dG есть поворот на угол $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 1, 2, 3, 4, 6$ и есть симметрия $S_l \in G$. Тогда, в силу равенства

$$R_O^\alpha \circ S_l = S_{l'}$$

есть и симметрия относительно оси l' , которая образует с осью l угол, равный $\frac{\alpha}{2}$ (половине угла поворота).

И наоборот, если есть две симметрии, то беря их композицию, мы получаем поворот на угол, равный удвоенному углу между прямыми, относительно которых симметрия:

$$S_m \circ S_l = R_O^{2\beta}$$

Из этих двух равенств следует, что имея хотя бы одну симметрию в группе, мы тут же получаем и все остальные симметрии с осями, которые получаются из прямой l поворотами на углы $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

С другой стороны, других осей симметрии быть не может, так как при добавлении еще одной оси возникнет угол поворота между осями, отличный от $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Итак, к поворотам на углы $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 1, 2, 3, 4, 6$ можно добавить только такие оси симметрии, что получаются соответствующие группы D_1, D_2, D_3, D_4, D_6 .

Лекция 18. Кристаллографические группы на плоскости. Арифметические классы.

Продолжим обсуждать, как устроены дискретные подгруппы в группе изометрий плоскости $G \subset Iso(\mathbb{R}^2)$. Как мы выяснили ранее, представление о группе G можно получить, зная, как устроены ее подгруппа параллельных переносов

$$\Gamma_G = \{T^{k\vec{a}+l\vec{b}} \mid k, l \in \mathbb{Z}\},$$

и

$$dG$$

– подгруппа в группе ортогональных линейных преобразований.

Мы доказали, что для кристаллографической группы G соответствующая подгруппа dG (в $O(2)$) – одна из следующих: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$.

Утверждение. Группа dG сохраняет решетку Γ_G .

Доказательство.

Следует из леммы 1, которая была доказана на прошлой лекции:

$$g \circ T^{\vec{a}} \circ g^{-1} = T^{dg(\vec{a})}$$

Таким образом, следующий шаг в приближении к описанию всевозможных кристаллографических групп на плоскости – это понять, какие решетки Γ_G сохраняются соответствующими группами dG .

C_1 . $C_1 = \{id\}$ – состоит только из тождественного преобразования, поэтому любая решетка сохраняется.

C_2 . Состоит из поворота на 180° и тождественного преобразования. При повороте на 180° вектор $\vec{a}$ перейдет в $-\vec{a}$, вектор $\vec{b}$ перейдет в вектор $-\vec{b}$, которые есть в решетке. Поэтому любая решетка сохраняется.

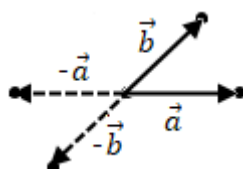


Рис. 18.1. C_2 сохраняет любую решетку

C_3 . Порождена поворотами на 120° . Из утверждения, доказанного выше, следует, что если вектор $\vec{a}$ лежит в решетке, то и вектор, полученный из $\vec{a}$ поворотом на 120° , также

будет лежать в решетке (и их сумма). Получаем треугольную решетку (она порождена векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими равную длину, угол между которыми равен 60°).

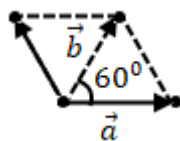


Рис. 18.2. C_3 сохраняет треугольную решетку

C_4 . Аналогично (для C_n из утверждения, доказанного выше, следует, что если вектор $\vec{a}$ лежит в решетке, то и вектор, полученный из $\vec{a}$ поворотом на $\frac{2\pi}{n}$, также будет лежать в решетке). Получаем квадратную решетку (она порождена векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими равную длину, угол между которыми равен 90°).

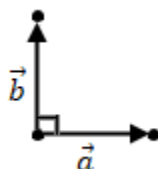


Рис. 18.3. C_4 сохраняет квадратную решетку

C_6 . Группа C_6 содержит в качестве подгруппы группу C_3 , поэтому решетка должна содержать в себе треугольную. Несложно понять, что она выдерживает поворот и на 60° .

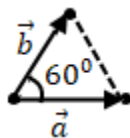


Рис. 18.4. C_6 сохраняет треугольную решетку

Перейдем к рассмотрению групп D_n , $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

D_1 . Состоит из симметрии и тождественного преобразования. Есть два типа решеток, которые выдерживают симметрию – прямоугольная решетка и ромбическая решетка.

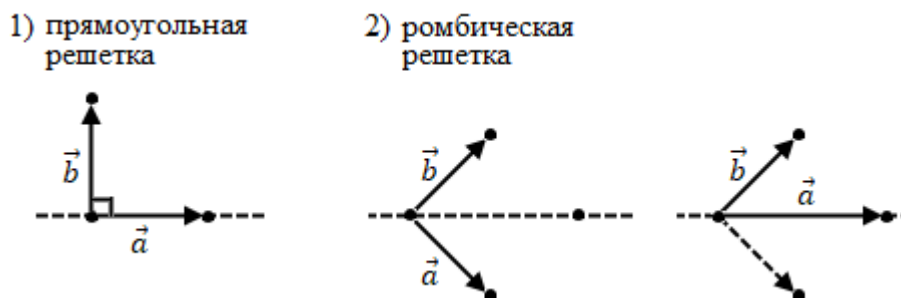


Рис. 18.6. Решетки, которые сохраняет D_1

D_2 . Содержит две симметрии относительно перпендикулярных направлений. Группа D_2 содержит в качестве подгруппы группу D_1 – несложно проверить, что решетки, которые сохраняет D_1 , выдерживают симметрию и относительно второй (перпендикулярной) оси. Поэтому D_2 так же сохраняет прямоугольную и ромбическую решетки.

D_3 . Содержит три симметрии. Группа D_3 содержит в качестве подгруппы группу C_3 , несложно проверить, что D_3 сохраняет треугольную решетку, однако, оси симметрии могут быть расположены по-разному (отмечены пунктиром на рис. 18.7).

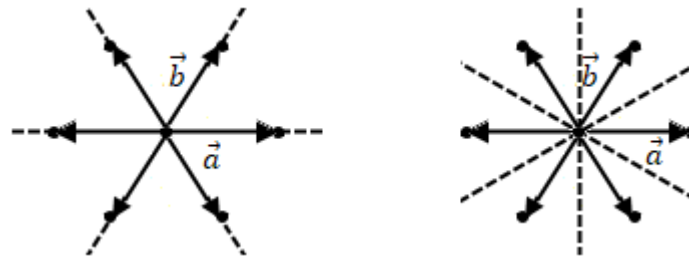


Рис. 18.7. D_3 сохраняет треугольную решетку

D_4 . Содержит в качестве подгруппы группу C_4 , несложно проверить, что D_4 сохраняет квадратную решетку.

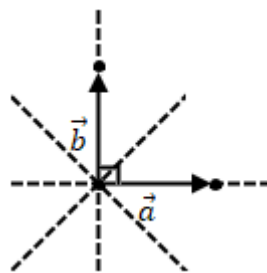


Рис. 18.8. D_4 сохраняет квадратную решетку

D_6 . Содержит в качестве подгруппы группу C_3 , несложно проверить, что D_6 сохраняет треугольную решетку, оси симметрии расположены как показано на рис. 18.9 (объединили случаи для D_3).

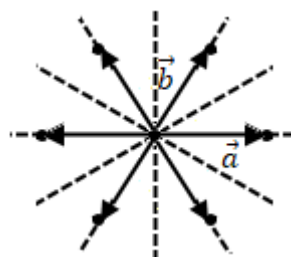


Рис. 18.9. D_6 сохраняет треугольную решетку

Определение. Пусть $H \subset O(2)$, Γ – решетка. Пара (Γ, H) называется арифметическим классом.

Как и кристаллографические группы, мы рассматриваем арифметические классы (Γ, H) с точностью до сопряжения каким-то аффинным преобразованием.

Иными словами, рассмотрим две пары (Γ_1, H_1) и (Γ_2, H_2) , для которых выполнено, что H_1 сохраняет решетку Γ_1 , а H_2 сохраняет решетку Γ_2 . Рассмотрим сопряжение h , переводящее группу Γ_1 в Γ_2 . Фактически, h – замена базиса, и то, что для некоторого преобразования h сопрягаются пары (Γ_1, H_1) и (Γ_2, H_2) , означает, что можно выбрать базисы Γ_1 и Γ_2 в решетках таким образом, что в соответствующих элементах H_1 и H_2 эти преобразования будут записываться одинаковыми матрицами.

Пример. Рассмотрим группу D_1 .

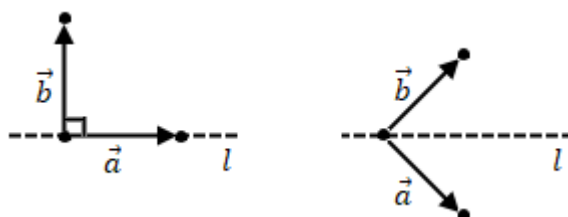


Рис. 18.10. Прямоугольная и ромбическая решетки

Выберем в группе D_1 базис в прямоугольной решетке, как показано на рис. 18.10. Рассмотрим симметрию S_l относительно прямой l . Тогда матрица преобразования S_l :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Если рассмотреть симметрию S_l относительно прямой l в ромбической решетке, то матрица преобразования S_l будет следующей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

На этом примере можно понять, в каком смысле пары (Γ, H) различны (ведь любые две решетки сопряжены некоторым аффинным преобразованием) – группа dG действует на решетку, сохраняя ее, и это действие в разных случаях задается разными матрицами. Несложно понять, что в рассмотренном примере нельзя выбрать базисы в решетках так, чтобы матрицы преобразования S_l , записанные в этих базисах, стали одинаковыми.

Итак, арифметические классы мы рассматриваем с точностью до сопряжения. Несложно проверить, что выше перечислены все возможные арифметические классы. Можно сформулировать это утверждение в виде теоремы.

Теорема. Существует ровно 13 арифметических классов (Γ, H) .

Это еще не полное описание кристаллографических групп, но еще один шаг к их классификации (мы не будем приводить полное доказательство теоремы классификации, а сведем задачу к перебору, который полностью проводить не будем).

Мы описали арифметические классы (Γ, H) , то есть, решетку и линейную часть преобразований, которые являются поворотами и симметриями. Если в группу добавить параллельные переносы, то композиция параллельного переноса и поворота даст поворот на тот же угол, а композиция параллельного переноса и симметрии даст скользящую симметрию. То есть, поворот + сдвиг дает преобразование, сопряженное исходному повороту, а симметрия + сдвиг (вдоль оси симметрии) дает преобразование, которое не сопряжено исходной симметрии и имеет другие свойства (например, у осевой симметрии есть неподвижные точки, а у скользящей симметрии нет).

Разберем, как устроена каждая кристаллографическая группа (то есть, замостив фундаментальной областью группы плоскость, поймем, какой получится узор). Будем перебирать получившиеся варианты арифметических классов, из которых получаются кристаллографические группы.

Список кристаллографических групп на плоскости.

C_1 . Это тривиальная группа, значит, в кристаллографической группе G нет ни поворотов, ни симметрий, а есть только параллельные переносы. Все такие подгруппы в группе движений плоскости сопряжены.

Значит,

$$G = \Gamma = \{T^{k\vec{a}+l\vec{b}} \mid k, l \in \mathbb{Z}, \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ линейно независимы}\}$$

Фундаментальная область:

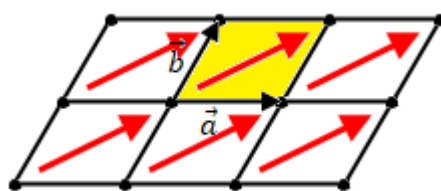


Рис. 18.11. Фундаментальная область группы G

C_2 . Эта группа сохраняет любую решетку и содержит повороты на 180° . Найдем, где находятся O_i – центры поворотов $R_{O_i}^{180^\circ}$.

1) Рассмотрим композицию поворота на 180° вокруг точки O_1 и параллельного переноса:

$$T^{\vec{c}} \circ R_{O_1}^{180^\circ} = R_{O_2}^{180^\circ}$$

- получим поворот вокруг точки O_2 (так как это преобразование первого рода, в результате которого точка O_2 остается на месте).

2) Рассмотрим два центра поворота O_1 и O_2 – композиция поворотов вокруг них есть параллельный перенос на удвоенный вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$:

$$R_{O_2}^{180^\circ} \circ R_{O_1}^{180^\circ} = T^{2\overrightarrow{O_1O_2}}$$

Поэтому центры поворотов тоже будут образовывать “решетку”, которая порождается векторами $\frac{\vec{a}}{2}$ и $\frac{\vec{b}}{2}$:

$$\overrightarrow{O_1O_i} = k_i \frac{\vec{a}}{2} + l_i \frac{\vec{b}}{2}$$

В качестве фундаментальной области выберем треугольник. Получаем картинку, которая полностью описывает преобразования нашей группы:

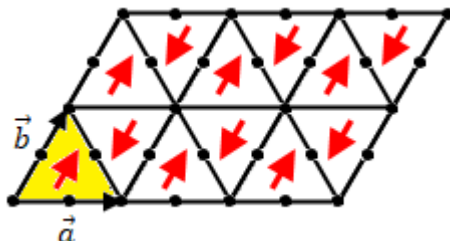


Рис. 18.12. Фундаментальная область группы G

Итак, G состоит из параллельных переносов на вектора, являющиеся целочисленными линейными комбинациями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и поворотов на 180° вокруг точек O_i , заданных условием $\overrightarrow{O_1O_i} = k_i \frac{\vec{a}}{2} + l_i \frac{\vec{b}}{2}$.

C_3 . Эта группа сохраняет треугольную решетку, которая порождена векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими равную длину, угол между которыми равен 60° . Как и в случае C_2 , найдем, где находятся O_i – центры поворотов $R_{O_i}^{120^\circ}$.

1) Рассмотрим композицию поворота на 120° вокруг точки O_1 и параллельного переноса:

$$T^{\vec{c}} \circ R_{O_1}^{120^\circ} = R_{O_2}^{120^\circ}$$

- получим поворот вокруг точки O_2 (так как это преобразование первого рода, в результате которого точка O_2 остается на месте).

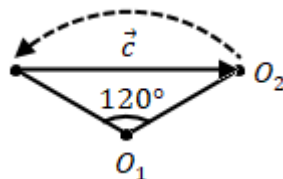


Рис. 18.13. $T^{\vec{c}} \circ R_{O_1}^{120^\circ} = R_{O_2}^{120^\circ}$

Центры поворотов будут образовывать “решетку”, в которую входят точки решетки группы C_3 , а также центры треугольников с вершинами в этих точках:

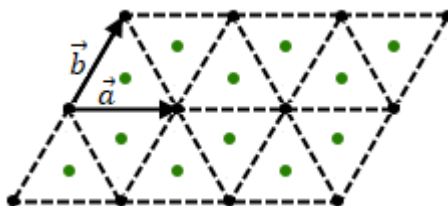


Рис. 18.14. Центры поворотов в группе G

2) Рассмотрим два центра поворота O_1 и O_2 – композиция поворотов вокруг них есть параллельный перенос (см. рис. 18.13) – домножив равенство $T^{\vec{c}} \circ R_{O_1}^{120^\circ} = R_{O_2}^{120^\circ}$ справа на $R_{O_1}^{-120^\circ}$, получим

$$R_{O_2}^{120^\circ} \circ R_{O_1}^{-120^\circ} = T^{\vec{c}}$$

Отсюда следует, что других центров поворота на 120° к уже существующим добавить нельзя, так как в результате такой композиции получится параллельный перенос на вектор, не лежащий в решетке.

Тем самым мы описали все преобразования для случая C_3 . В качестве фундаментальной области можно выбрать, например, ромб с углами 60° и 120° .

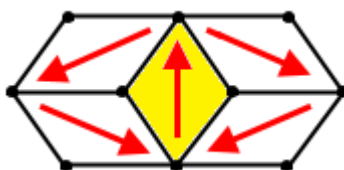


Рис. 18.15. Фундаментальная область группы G

C_4 . Эта группа сохраняет квадратную решетку, которая порождена векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими равную длину, угол между которыми равен 90° .

Рассуждая точно так же, как и в предыдущих случаях, получаем следующее: новые центры поворотов (O_1 на рис. 18.16) возникают в вершинах равнобедренных прямоугольных треугольников, гипотенуза которых – один из векторов решетки:

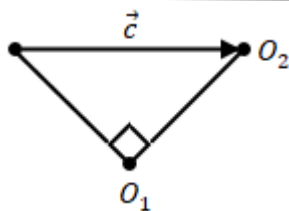


Рис. 18.16. O_1 – центр поворота, не принадлежащий решетке, которую сохраняет C_4

$$T^{\vec{c}} \circ R_{O_1}^{90^\circ} = R_{O_2}^{90^\circ}$$

Также в C_4 есть центры поворота на 180° , которые не являются центром поворота на 90° . Действительно, если рассмотреть композицию поворотов на 90° вокруг рассмотренных выше точек O_1 и O_2 , то получим поворот на 180° относительно точки O (неподвижной относительно этой композиции):

$$R_{O_2}^{90^\circ} \circ R_{O_1}^{90^\circ} = R_O^{180^\circ}$$

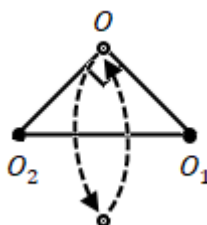


Рис. 18.17. Точка O – центр поворота на 180°

Аналогично предыдущим случаям убеждаемся, что других центров поворота на 90° (выделены черным на рис. 18.18) и 180° (выделены белым на рис. 18.18) нет (иначе в результате композиции поворотов получим параллельный перенос на вектор, не лежащий в решетке).

Тем самым мы описали все преобразования для случая C_4 . В качестве фундаментальной области выберем квадрат (см. рис. 18.18).

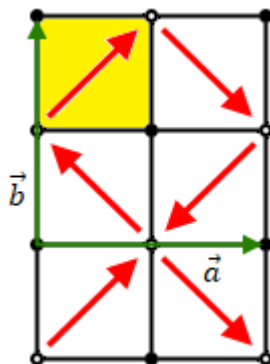


Рис. 18.18. Фундаментальная область группы G

C_6 . Эта группа сохраняет треугольную решетку, которая порождена векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими равную длину, угол между которыми равен 60° .

Рассуждая так же, как и в предыдущих случаях, получаем, что в группе помимо поворотов на 60° (выделены черным кружком на рис. 18.19) есть повороты на 120° (выделены белым кружком) и повороты на 180° (выделены черным квадратом). В качестве фундаментальной области выберем треугольник:

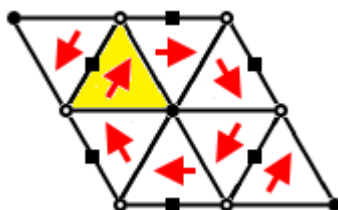


Рис. 18.19. Фундаментальная область группы G

Итак, мы описали все кристаллографические группы, которые не содержат симметрий. Может создаться впечатление, что соответствие между арифметическими классами и кристаллографическими группами взаимно-однозначное. Оказывается, это не так – покажем это на примере D_1 .

Когда мы рассматривали арифметические классы, то учитывали только линейную часть преобразования, то есть, рассматривали преобразования, задаваемые A – ортогональной матрицей 2×2 , не учитывая сдвиг $\vec{b}$.

D_1 сохраняет два типа решеток – ромбическую и прямоугольную. Рассмотрим прямоугольную решетку.

Линейные части всех преобразований из кристаллографической группы G , соответствующей арифметическому классу D_1 , являются симметриями относительно некоторой прямой – это означает, что в G все симметрии имеют параллельные оси (так как в D_1 только один нетривиальный элемент):

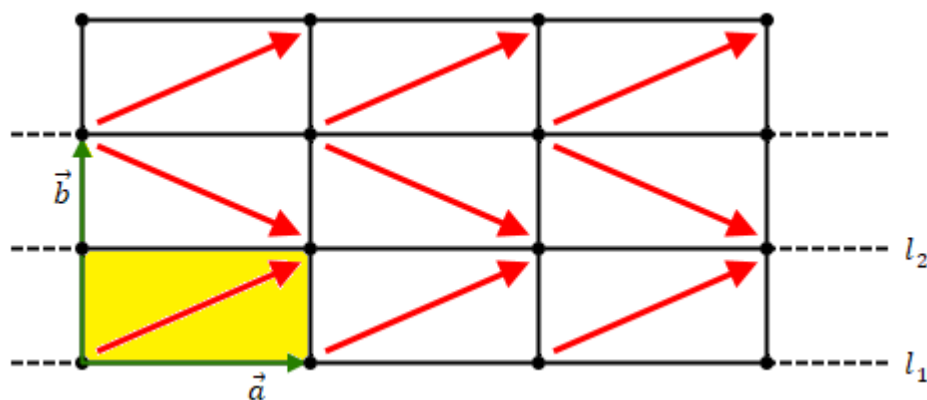


Рис. 18.20. Фундаментальная область группы G

Получаем замощение плоскости, изображенное на рис. 18.20, получаемое из фундаментальной области параллельными переносами на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и симметриями относительно параллельных прямых $l_1, l_2, \dots$ и т. д. Действительно:

1) Рассмотрим симметрию S_l относительно прямой l , параллельной вектору $\vec{a}$ и параллельный перенос $T^{\vec{b}}$ на вектор $\vec{b}$. Тогда их композиция будет симметрией относительно прямой l' , параллельной прямой l и отстоящей от нее на расстояние, равное половине длины вектора $\vec{b}$:

$$T^{\vec{b}} \circ S_l = S_{l'}$$

- получаем оси симметрии – параллельные прямые, расстояние между которыми равно половине длины вектора $\vec{b}$.

2) Композиция двух симметрий с параллельными осями l_1 и l_2 даст параллельный перенос на вектор $\vec{c}$, длина которого равна удвоенному расстоянию между прямыми l_1 и l_2 :

$$S_{l_2} \circ S_{l_1} = T^{\vec{c}}$$

- таким образом, в G нет симметрий, отличных от симметрий относительно прямых, параллельных прямой l .

Однако все эти рассуждения останутся верными, если мы предположим, что все симметрии в D_1 не осевые, а скользящие. Получим следующее замощение плоскости:

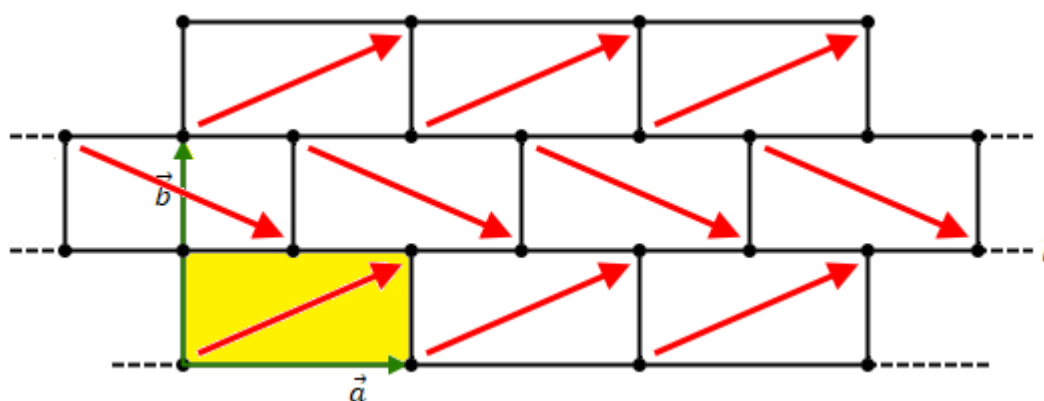


Рис. 18.21. Фундаментальная область группы G

То есть, получаем разные кристаллографические группы, соответствующие D_1 .

Таким образом, за счет скользящих симметрий, из 13 арифметических классов получаются 17 кристаллографических групп (два варианта для D_1 , три варианта для D_2 , два варианта для D_4) – зафиксируем этот результат в виде теоремы (без доказательства).

Теорема. Всего существует 17 кристаллографических групп на плоскости.

Стоит отметить, что все замощения плоскости, соответствующие 17 кристаллографическим группам, были обнаружены экспериментальным путем еще античными строителями (мы можем наблюдать их в виде мозаик, узоров на полах и стенах различных сооружений).

Также стоит отметить, что кристаллографические группы в пространстве связаны со строением кристаллов (откуда и название). Существует 219 трехмерных кристаллографических групп (с точностью до сопряжения аффинным преобразованием), причем если разрешить сопряжения только аффинными преобразованиями, сохраняющими ориентацию пространства, то их будет 230. В четырехмерном пространстве существует 4894 кристаллографических групп с сохранением ориентации, или 4783 без сохранения ориентации.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У