



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 2

БАДЫН
АНДРЕЙ ВАЛЕНТИНОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
БЕЛОВА МИХАИЛА АНАТОЛЬЕВИЧА



Содержание

Лекция 1. Аффинная связность в точке на гладком квазимногообразии. Тензор кручения.....	6
Оператор производной над тензорным полем.....	6
Аффинная связность.....	7
Построение аффинной связности. Примеры.....	9
Тензор аффинной деформации. Тензор кручения.....	10
Лекция 2. Ковариантная производная тензорного поля.....	12
Гладкая числовая функция.....	12
Гладкое поле.....	12
Аффинная связность.....	12
Достаточное условие гладкости для аффинной связности.....	12
Построение гладкой аффинной связности на всем пространстве.....	13
Кванторы. Производная.....	13
Ковариантная производная тензорного поля.....	14
Теорема о ковариантной производной тензорного поля.....	15
Теорема о понижении степени гладкости при ковариантном дифференцировании тензорного поля.....	16
Лекция 3. Свойства ковариантной производной тензорного поля.....	17
Сумма, умножение на константу, произведение, свертка, транспонирование поля ...	17
Доказательство свойства о ковариантной производной прямого произведения.....	18
Доказательство свойства о ковариантной производной свертки.....	20
Лекция 4. Ковариантная производная тензорного поля.....	21
Продолжение. Доказательство свойств.....	21
Сингулярная поверхность. Поле геометрических объектов на сингулярной поверхности.....	23
Ковариантная производная тензорного поля на сингулярной поверхности.....	24
Лекция 5. Физический смысл аффинной связности.....	25
Продолжение. Ковариантная производная на сингулярной поверхности.....	25
Алгебраические свойства ковариантных производных.....	25
Физический пример использования ковариантной производной.....	26
Определение локально конечного подмножества.....	30
Лекция 6. Абсолютно параллельное тензорное поле.....	31
Аксиома отделимости.....	31
Локально конечное подмножество: свойства и доказательства.....	31
Обобщенное абсолютно параллельное поле.....	34
Лекция 7. Теоремы о повышении гладкости.....	36

Повторение: обобщенное абсолютно параллельное поле. Переход от обобщенной абсолютной параллельности к обычной.....	36
Задачи Коши для абсолютно параллельного поля. «Начальные» теоремы.....	38
Теорема о повышении гладкости.....	39
Глобальные теоремы единственности.....	39
Параллельный перенос: определение и свойства.....	40
Лекция 8. Свойства параллельного переноса тензора.....	42
Усиленный вариант теоремы о повышении гладкости.....	42
Свойства параллельного переноса.....	42
Геодезическая кривая.....	44
Коэффициенты аффинной связности. Выбор системы координат.....	44
Лекция 9. Коэффициенты аффинной связности.....	48
Теорема о равенстве нулю аффинной связности в определенной точке.....	48
Тензор кривизны.....	52
Лекция 10. Тензор кривизны: свойства и закон преобразования.....	54
Тензор кривизны и его свойства.....	54
Доказательство для частного случая.....	54
Коммутатор ковариантной производной по параметру сингулярной поверхности....	55
Теорема Фробениуса (подготовка к формулировке).....	56
Лекция 11. Теорема о локально тривиальной аффинной связности.....	58
Теорема Фробениуса (формулировка).....	58
Локально тривиальная аффинная связность.....	58
Необходимые условия локальной тривиальности.....	58
Доказательство теоремы о необходимых условиях локальной тривиальности.....	61
Физические следствия.....	62
Псевдориманова метрика. Введение: матричная алгебра.....	62
Лекция 12. Скалярное и псевдоскалярное произведения.....	64
Продолжение: матричная алгебра.....	64
Ориентация базисов. Знак базиса.....	65
Параметры Ламэ. Псевдотензор. Псевдоскалярное произведение.....	66
Тензор Леви-Чивита.....	66
Смешанное произведение. Векторное произведение.....	67
Согласование координатных карт.....	68
Ориентированное квазимногообразие. Ориентированное многообразие.....	69
Лекция 13. Риманова аффинная связность.....	70
Ориентированное многообразие.....	70
Псевдориманова метрика.....	70

Риманова метрика	70
Аффинная связность, согласованная с метрикой g	71
Риманова аффинная связность: свойства, существование	71
Формула для свертки компонент аффинной связности.....	73
Лекция 14. Связь ковариантной производной с grad, rot и div	74
Доказательство формулы для свертки компонент аффинной связности.....	74
Связь ковариантной производной с операторами grad , rot , div	74

Лекция 1. Аффинная связность в точке на гладком квазимногообразии. Тензор кручения

Оператор производной над тензорным полем

Вспомним из прошлого семестра, что такое гладкая числовая функция на гладком многообразии.

Гладкая функция – это любая функция, у которой все координатные представления являются гладкими функциями.

Также было введено понятие частной производной. Мы брали вместо функции её координатное представление и уже от него считали частную производную. В результате мы получили, что частная производная зависит от выбора координатной карты. Был также найден закон преобразования частной производной при смене координатной карты.

Гладкое тензорное поле – такое поле, у которого все компоненты являются гладкими функциями.

Частная производная от компонент тензорного поля – это уже не тензорное поле. На этот счет была доказана следующая теорема.

Утверждение 1.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое многообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ) .

Квазимногообразие – это нестандартный термин. Обычно пользуются **многообразиями**. Это тоже упорядоченные пары (M, μ) , где M – это множество точек, а μ – координатный атлас, но предполагается, что в указанной гладкости этот атлас является максимальным.

Мы владеем процедурой расширения любого атласа до максимального. Становится удобно работать просто с атласами. То есть в квазимногообразии уже лежит необязательно максимальный атлас.

Информация в Утверждении 1 о том, что $N \in \mathbb{N}$ является излишней, так как мы строим теорию так, что размерность многообразия может быть только натуральным числом. Указание о том, что $A - C^1$ – гладкое тензорное поле, характеризует компоненты этого поля как гладкие функции, а также область определения самого поля. То есть область определения поля A обязательно должно быть **регулярным множеством** – таким непустым множеством, которое лежит в замыкании своей внутренней части. К любой его точке можно подойти сколь угодно близко в топологическом смысле, ступая по внутренним точкам области определения.

Пусть: $p_0 \in D(A)$, $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$, то есть h_1 и h_2 являются координатной картой. Они принадлежат нашему атласу μ и их носители содержат точку p_0 . Также заданы числа $i'_1, \dots, i'_{s_1}, j'_1, \dots, j'_{s_2}, k' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$D_k(p, h_1) A_{i'_1 \dots i'_{s_1}}^{j'_1 \dots j'_{s_2}}(p, h_1)|_{p=p_0}$$

Это производная компоненты поля в системе координат h_1 . Насильственно подвергнем эту компоненту тензорному закону преобразования

$$D_k(p, h_1) \left(A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h_1) |_{p=p_0} \right) D_{j_1}(p, h_1) h_2^{j'_1}(p) |_{p=p_0}$$

По повторяющемуся индексу j_1 здесь идет суммирование, то есть j_1 исчезает, а вместо него возникает j'_1

$$\begin{aligned} & D_k(p, h_1) \left(A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h_1) |_{p=p_0} \right) D_{j_1}(p, h_1) h_2^{j'_1}(p) |_{p=p_0} \dots D_{j_{s_2}}(p, h_1) h_2^{j'_{s_2}}(p) |_{p=p_0} \\ & \times D_{i'_1}(p, h_2) h_1^{i'_1}(p) |_{p=p_0} \dots D_{i'_{s_1}}(p, h_2) h_1^{i'_{s_1}}(p) |_{p=p_0} \times D_{k'}(p, h_2) h_1^{k'}(p) |_{p=p_0} \\ & = D_{k'} A_{i'_1 \dots i'_{s_1}}^{j'_1 \dots j'_{s_2}} + D_{k', m'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'_1} A_{i'_1 \dots i'_{s_1}}^{m' j'_2 \dots j'_{s_2}} + \dots \\ & + D_{k', m'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'_{s_2}} A_{i'_1 \dots i'_{s_1}}^{j'_1 \dots j'_{s_2-1} m'} - D_{k', i'_1}^2 h_1^n D_n h_2^{m'} A_{m' i'_2 \dots i'_{s_1}}^{j'_1 \dots j'_{s_2}} - \dots \\ & - D_{k', i'_{s_1}}^2 h_1^n D_n h_2^{m'} A_{i'_1 \dots i'_{s_1-1} m'}^{j'_1 \dots j'_{s_2}} \end{aligned}$$

Видно, что частная производная тензорного поля сама тензорным полем не является, то есть нужно искать другие дифференциальные операторы над тензорными полями.

Давайте с самого начала введем оператор, состоящий из частной производной и их некоторых линейных выражений от компонент поля A . Коэффициенты для этих линейных выражений придется задать, то есть ввести на многообразии некий вспомогательный геометрический объект. И возможно нам удастся подобрать закон преобразования этого геометрического объекта так, чтобы каждый раз при переходе от карты h_1 к карте h_2 все «паразитные» слагаемые утилизировались с помощью законов преобразования дополнительных линейных членов.

Пока докажем частный случай.

Доказательство:

Пусть: $s_1 = 1, s_2 = 1$. $p_0 \in D(A), h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$, $i', j', k' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} D_k(A_i^j) D_j h_2^{j'} D_{i'} h_1^i D_{k'} h_1^k &= D_{k'}(A_i^j) D_j h_2^{j'} D_{i'} h_1^i = D_{k'}(A_{i'}^{j'} D_j h_1^i D_i h_2^{j'}) D_j h_2^{j'} D_{i'} h_1^i \\ &= D_{k'}(A_{i'}^{j'} D_j h_1^i D_i h_2^{j'}) D_j h_2^{j'} - A_{i'}^{j'} D_j h_1^i D_i h_2^{j'} D_{k', i'}^2 h_1^i D_j h_2^{j'} = \end{aligned}$$

$$D_{i'} h_1^i D_i h_2^{j'} = D_{i'} h_2^{j'} = \delta_{i'}^{j'}$$

$$\begin{aligned} &= D_{k'}(A_{i'}^{j'} D_j h_1^i) D_j h_2^{j'} - D_{k', i'}^2 h_1^i D_i h_2^{j'} A_{i'}^{j'} \\ &= D_{k'}(A_{i'}^{j'}) D_j h_1^i D_j h_2^{j'} + A_{i'}^{j'} D_{k', j'}^2 h_1^i D_j h_2^{j'} - D_{k', i'}^2 h_1^i D_i h_2^{j'} A_{i'}^{j'} \\ &= D_{k'}(A_{i'}^{j'}) + D_{k', m'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} A_{i'}^{m'} - D_{k', i'}^2 h_1^n D_n h_2^{m'} A_{m'}^{j'}, \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Аффинная связность

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N, p_0 \in M$

Будем говорить, что Γ – аффинная связность в точке p_0 если выполнены условия:

1. Γ – геометрический объект степени 3 в точке p_0 .

Когда у нас не было гладких многообразий, а были линейные пространства натуральной размерности, в этих ЛП появились базисы. Мы вводили понятие геометрического объекта следующим образом: геометрический объект заданной степени – это отображение, которое каждому базису ставит в соответствие числовой набор заданной степени.

При переходе на гладкие многообразия в каждой точке возникала касательная пространства. При этом в разных точках касательные и базисы были разные. Пусть теперь геометрический объект зависит не только от базиса в данной точке p_0 , но и от базисов в соседних точках. Тогда можно ввести базисные поля и потом уже определять геометрические объекты как функции этих полей. Современная геометрия основана именно на таком подходе.

Если задана координатная карта, то с ней автоматически будет связано некоторое базисное поле. Можно выбрать промежуточный вариант, а именно определить геометрический объект как функцию координатной окрестности точки p_0 . Степень геометрического объекта, равная 3, означает, что числовой набор будет с тремя индексами.

$$2. \Gamma_{k',m'}^{j'}(h_2) = \Gamma_{k,m}^j(h_1) D_j(p, h_1) h_2^{j'}(p)|_{p=p_0} D_{m'}(p, h_2) h_1^m(p)|_{p=p_0} + \\ D_{k',m'}^2(p, h_2) h_1^n(p)|_{p=p_0} D_n(p, h_1) h_2^{j'}(p)|_{p=p_0} \\ \text{при условии, что } h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu), k', j', m' \in \overline{1, N}$$

Этот закон преобразования нелинейный, второе слагаемое никак не зависит от компонент геометрического объекта. В физике можно провести аналогию с силами инерции, которые отсутствуют в инерциальной системе отчета и появляются в неинерциальной.

Еще одна странность заключается в том, что здесь учитываются вторые производные координатной карты, то есть геометрический объект будет «чувствовать» ситуацию не только в касательном пространстве точки p_0 , но и в малой окрестности данной точки, то есть он связывает касательные пространства в разных точках.

Далее рассмотрим некоторые свойства аффинной связности.

Свойство 1.

Несмотря на то, что компоненты аффинной связности в точке в разных системах координат могут быть равны или не равны нулю, зная компоненты аффинной связности в одной системе координат, можно определить их в другой системе координат. То есть если в одной точке заданы две аффинные связности и если в какой-то координатной карте они совпадают, то и во всех координатных картах они тоже будут совпадать.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $p_0 \in M, h_0 \in Q(p_0, \mu)$.

Пусть: Γ_1, Γ_2 – аффинные связности в точке p_0 , причем $\Gamma_1(h_0) = \Gamma_2(h_0)$.

Тогда $\Gamma_1 = \Gamma_2$

Доказательство:

Пусть $h \in Q(p_0, \mu)$, $k, m, j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{aligned} (\Gamma_2)^j_{k,m} &= (\Gamma_2)^{j^0}_{k^0,m^0} D_{j^0} h^j D_k h_0^{k^0} D_m h_0^{m^0} + D_{k,m}^2 h_0^{n^0} D_{n^0} h^j \\ &= (\Gamma_1)^{j^0}_{k^0,m^0} D_{j^0} h^j D_k h_0^{k^0} D_m h_0^{m^0} + D_{k,m}^2 h_0^{n^0} D_{n^0} h^j = (\Gamma_1)^j_{k,m} \end{aligned}$$

Следовательно $\Gamma_2(h) = \Gamma_1(h)$. Тогда $\Gamma_2 = \Gamma_1$.

Свойство единственности доказано, далее докажем свойство существования такой связности. Из самого определения никак не следует, что существует хотя бы один пример аффинной связности. Предложим метод, который позволяет строить в фиксированной точке аффинную связность.

Построение аффинной связности. Примеры

Сформулируем следующее утверждение

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 $p_0 \in M$, $h_0 \in Q(p_0, \mu)$, $\Gamma_0 \in \mathbb{R}^{(N,3)}$.

Обозначим:

$$(\Gamma)^j_{k,m}(h) = (\Gamma_0)^{j^0}_{k^0,m^0} D_{j^0} h^j D_k h_0^{k^0} D_m h_0^{m^0} + D_{k,m}^2 h_0^{n^0} D_{n^0} h^j$$

при условии, что $h \in Q(p_0, \mu)$, $k, m, j = \overline{1, N}$.

Мы отталкиваемся от фиксированной координатной карты и числового набора и строим геометрический объект, пользуясь законом преобразования компонент аффинной связности.

Тогда: Γ – аффинная связность в точке p_0 , $\Gamma(h_0) = \Gamma_0$.

Стоит отметить, что мы не пользовались законом преобразования в полном объеме, а лишь воспользовались переходом от фиксированной карты h_0 к произвольной карте h . Но это не означает, что закон будет работать при переходе от произвольной карты h_1 к карте h_2 , поэтому необходимо доказать теорему перехода. Кроме того, понятно, что если в исходной карте задан данный набор компонент, то существует одна единственная аффинная связность, которая в карте h_0 имеет указанные компоненты.

Доказательство:

Очевидно, что Γ – геометрический объект степени 3 в точке p_0 .

Пусть: $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$, $k', m', j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{k,m}^j D_j h_2^{j'} D_{k'} h_1^{k'} D_{m'} h_1^{m'} + D_{k',m'}^2 h_1^{n'} D_{n'} h_2^{j'} \\ &= \left((\Gamma_0)^{j^0}_{k^0,m^0} D_{j^0} h_1^j D_k h_0^{k^0} D_m h_0^{m^0} + D_{k,m}^2 h_0^{n^0} D_{n^0} h_1^j \right) D_j h_2^{j'} D_{k'} h_1^{k'} D_{m'} h_1^{m'} \\ &+ D_{k',m'}^2 h_1^{n'} D_{n'} h_2^{j'} = \end{aligned}$$

$$D_{j^0} h_1^j D_j h_2^{j'} = D_{j^0} h_2^{j'}$$

$$D_{k,m}^2 h_0^{n^0} = D_k(D_m h_0^{n^0})$$

$$\begin{aligned} &= (\Gamma_0)^{j^0}_{k^0, m^0} D_{j^0} h_2^{j'} D_{k'} h_0^{k^0} D_{m'} h_0^{m^0} + D_{k'}(D_m h_0^{n^0}) D_{n^0} h_2^{j'} D_{m'} h_1^m + D_{k', m'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} \\ &= (\Gamma_0)^{j^0}_{k^0, m^0} D_{j^0} h_2^{j'} D_{k'} h_0^{k^0} D_{m'} h_0^{m^0} + D_{k'}(D_m h_0^{n^0} D_{m'} h_1^m) D_{n^0} h_2^{j'} \\ &\quad - D_m h_0^{n^0} D_{k', m'}^2 h_1^m D_{n^0} h_2^{j'} + D_{k', m'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} \\ &= (\Gamma_0)^{j^0}_{k^0, m^0} D_{j^0} h_2^{j'} D_{k'} h_0^{k^0} D_{m'} h_0^{m^0} + D_{k', m'}^2 h_0^{n^0} D_{n^0} h_2^{j'} - D_{k', m'}^2 h_1^m D_m h_2^{j'} \\ &\quad + D_{k', m'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} = (\Gamma_0)^{j^0}_{k^0, m^0} D_{j^0} h_2^{j'} D_{k'} h_0^{k^0} D_{m'} h_0^{m^0} + D_{k', m'}^2 h_0^{n^0} D_{n^0} h_2^{j'} \\ &= \Gamma_{k', m'}^{j'} \end{aligned}$$

Итак, Γ – это аффинная связность в точке p_0 .

Пусть: $k^0, m^0, j^0 = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\Gamma_{k^0, m^0}^{j^0}(h_0) = (\Gamma_0)^{j^0}_{\tilde{k}^0, \tilde{m}^0} D_{j^0} h_0^{j^0} D_{k^0} h_0^{k^0} D_{m^0} h_0^{m^0} + D_{k^0, m^0}^2 h_0^{n^0} D_{n^0} h_0^{j^0} = (\Gamma_0)^{j^0}_{k^0, m^0}$$

Индексы были выбраны произвольно, следовательно $\Gamma(h_0) = \Gamma_0$.

Тензор аффинной деформации. Тензор кручения

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

$p_0 \in M, \Gamma_1, \Gamma_2$ – аффинные связности в точке p_0 .

Обозначим, $P = \Gamma_2 - \Gamma_1$.

Тогда $P \in (T_{p_0} M)_2^1$ – тензор аффинной деформации от связности Γ_1 к связности Γ_2 .

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

$p_0 \in M, \Gamma_0$ – аффинная связность в точке $p_0, P \in (T_{p_0} M)_2^1$

Обозначим, $\Gamma = \Gamma_0 + P$

Тогда Γ – это аффинная связность в точке p_0 .

Получается, что все связности можно перечислить следующим образом: взять одну связность и добавлять к ней все возможные тензоры.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

$p_0 \in M, \Gamma_1$ – аффинная связность в точке p_0 .

Обозначим, $(\Gamma_2)_{k, m}^j(h) = (\Gamma_1)_{m, k}^j(h)$ при $h \in Q(p_0, \mu), k, m, j = \overline{1, N}$.

Тогда Γ_2 – аффинная связность в точке p_0 .

Доказательство:

Пусть: $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu), k', m', j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} (\Gamma_2)_{k', m'}^{j'} &= (\Gamma_1)_{m', k'}^{j'} = (\Gamma_1)_{m, k}^j D_j h_2^{j'} D_{m'} h_1^m D_{k'} h_1^k + D_{m', k'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} \\ &= (\Gamma_2)_{k, m}^j D_j h_2^{j'} D_{k'} h_1^k D_{m'} h_1^m + D_{k', m'}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} \end{aligned}$$

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $p_0 \in M, \Gamma_1$ – аффинная связность в точке p_0 .

Обозначим:

$$S_{k, m}^j(h) = \Gamma_{k, m}^j(h) - \Gamma_{k, m}^j(h)$$

при условии, что $h \in Q(p_0, \mu), k, m, j = \overline{1, N}$.

Тогда $S \in (T_{p_0} M)_2^1$ – тензор кручения аффинной связности Γ .

Если компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они равны нулю во всех системах координат. Если компоненты этого тензора равны нулю, то связность симметрична по двум нижним индексам. Другими словами, если связность симметрична по нижним индексам в одной системе координат, то она симметрична по нижним индексам в любой системе координат, причем такая связность называется **связностью без кручения**.

Лекция 2. Ковариантная производная тензорного поля

Гладкая числовая функция

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $A: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $r \in \bar{\mathbb{N}}$. Будем говорить, что $A - C^r$ – **гладкая функция**, если выполнены следующие условия:

1. $D(A)$ – регулярное множество в пространстве (M, μ) .
2. $\forall p_0 \in D(A) \forall h \in Q(p_0, \mu) \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } p_0) : (\omega \subseteq D(h) \wedge \{A(h^{-1}(x))\} x \in h[D(A) \cap \omega] \in C^r(h[D(A) \cap \omega]; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}))$

Гладкое поле

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $s \in \mathbb{Z}_+, A$ – поле геометрических объектов степени s в пространстве (M, μ) .

Пусть $z \in \bar{\mathbb{N}}$. Будем говорить, что $A - C^r$ – **гладкое поле**, если

1. $D(A)$ – регулярное множество в пространстве (M, μ) .
2. $\forall p_0 \in D(A) \forall h \in Q(p_0, \mu) \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } p_0) : (\omega \subseteq D(h) \wedge \forall i_1 = \overline{1, N} \dots \forall i_s = \overline{1, N} (\{A_{i_1 \dots i_s}(p, h)\} p \in D(A) \cap \omega \in C^r(D(A) \cap \omega; M, \mathbb{R}))$.

Аффинная связность

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
Будем говорить, что Γ – **аффинная связность** в пространстве (M, μ) , если

1. Γ – некоторая функция.
2. $D(\Gamma) = M$
3. $\forall p_0 \in M (\Gamma(p) - \text{аффинная связность в } p)$.

Достаточное условие гладкости для аффинной связности

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+; (M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$,
 $\dim((M, \mu)) = N; \Gamma$ – аффинная связность в (M, μ) .

Пусть:

$$\begin{aligned} & \forall p_0 \in M \exists h_1 \in Q(p_0, \mu) \exists h_2 \in Q(p_0, \mu) \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } p_0) \\ & : \left(\omega \subseteq D(h_1) \wedge \omega \subseteq D(h_2) \wedge \forall i = \overline{1, N} \forall j = \overline{1, N} \forall k = \right. \\ & \left. = \overline{1, N} \left(\{ \Gamma_{k,i}^j(h_2^{-1}(x), h_1) \}_{x \in h_2[\omega]} \in C^r(h[\omega]; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \right) \right) \end{aligned}$$

Тогда $\Gamma - C^r$ – гладкая аффинная связность.

Бывают ли в природе аффинные связности? Мы уже умеем в каждой точке строить аффинную связность, однако не понятно, будет ли построенный объект гладким. Можно на примере элементарных многообразий доказать наличие гладкой аффинной связности.

Элементарное многообразие – это такое многообразие, которое накрывается одной картой. Вся специальная теория относительности работает именно с элементарным многообразием.

Построение гладкой аффинной связности на всем пространстве

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$; $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$; $h_0 \in \mu$, $D(h_0) = M$

Пусть $\Gamma_0 \in C^r(R(h_0); \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{(N,3)})$.

Обозначим:

$$\Gamma_{k,m}^j(p, h) = (\Gamma_0)_{k^0, m^0}^{j^0}(h_0(p)) D_{j^0}(\tilde{p}, h_0) h^j(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_k(\tilde{p}, h) h_0^{k^0}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} \times \\ \times D_m(\tilde{p}, h) h_0^{m^0}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} + D_{k,m}^2(\tilde{p}, h) h_0^{n^0}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{n^0}(\tilde{p}, h) h^j(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p}$$

при условии, что $p \in M$, $h \in Q(p, \mu)$, $k, m, j = \overline{1, N}$.

Тогда $\Gamma - C^r$ – гладкая аффинная связность.

Причем Γ_0 можно задавать произвольно, важно только, чтобы эта связность была гладкой. Например, при $\Gamma_0 = 0$ получается такая аффинная связность, которая в координатной карте h_0 равна нулю, то есть компоненты незаметны, но при этом связность есть, так как в других картах компоненты уже не равны нулю. Более того, если применять аффинные преобразование для построения из карты h_0 новых карт, то вторые производные будут равны нулю, и компоненты связности будут оставаться равными нулю.

Кванторы. Производная

Студенты на младших курсах уверены, что существует всего два квантора: общности – $\forall$ и существования – $\exists$, однако самый обычный определенный интеграл – это тоже квантор.

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx$$

С точки зрения логики, **квантор** – значок, который превращает свободную переменную в связную. С содержательной точки зрения, **квантор** – значок, который говорит о том, что переменная должна быть не фиксирована, а должна пробегать некоторый диапазон значений. Например, чтобы вычислить интеграл, мало знать значение функции в одной точке, нужно заставить «пробежать» переменную от одного предела до другого.

Обычная сумма тоже является квантором

$$\sum_{k=\overline{k_1, k_2}} a_k = a_{k_1} + a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}$$

И даже производная это тоже квантор. Для нее есть два обозначения:

$$F'(x) \text{ or } \widehat{D}(F)(x)$$

Это запись в виде оператора. Но также есть следующее обозначение

$$\frac{d}{d\tilde{x}} F(\tilde{x})|_{\tilde{x}=x}$$

Здесь переменная пробегает значения в маленькой окрестности точки x .

В случае ковариантной производной ситуация будет сложнее, так как там точка p будет связанной, координатная карта h и индексы тензорного поля тоже будут связанными. Это происходит из-за того, что при вычислении одной единственной компоненты ковариантной производной при одном единственном наборе значений индексов необходимо знать все компоненты тензорного поля.

Ковариантная производная тензорного поля

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность в пространстве (M, μ) ; $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$; $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ) .

1. Пусть: $p \in D(A), h \in Q(p, \mu), i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}, k = \overline{1, N}$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\substack{\tilde{p}=p, \\ \tilde{h}=h}} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] = \\ = D_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\tilde{p}=p} + \Gamma_{k,m}^{j_1}(p, h) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{m, j_2 \dots j_{s_2}}(p, h) + \dots + \\ + \Gamma_{k,m}^{j_{s_2}}(p, h) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2-1}, m}(p, h) - \Gamma_{k,i_1}^m(p, h) A_{m, i_2 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h) - \dots - \\ - \Gamma_{k,i_{s_1}}^m(p, h) A_{i_1 \dots i_{s_1-1}, m}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h) \end{aligned}$$

Данное выражение можно записать через суммы следующим образом:

$$\begin{aligned} D_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\tilde{p}=p} + \sum_{\beta=\overline{1, s_2}} \Gamma_{k,m}^{j_\beta}(p, h) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2}}(p, h) - \\ - \sum_{\alpha=\overline{1, s_1}} \Gamma_{k,i_\alpha}^m(p, h) A_{i_1 \dots i_{\alpha-1}, m, i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h). \end{aligned}$$

Теперь запишем частный случай, при котором у нас есть один нижний и один верхний индексы:

$$\begin{aligned} \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_i^j(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\substack{\tilde{p}=p, \\ \tilde{h}=h}} [\tilde{i}, \tilde{j}; i, j] = D_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_i^j(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\tilde{p}=p} + \Gamma_{k,m}^j(p, h) A_i^m(p, h) - \\ - \Gamma_{k,i}^m(p, h) A_m^j(p, h) = D_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_i^j(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\tilde{p}=p} + \Gamma_{k,1}^j(p, h) A_i^1(p, h) + \dots + \\ + \Gamma_{k,N}^j(p, h) A_i^N(p, h) - \Gamma_{k,i}^1(p, h) A_1^j(p, h) - \dots - \Gamma_{k,i}^N(p, h) A_N^j(p, h) \end{aligned}$$

2. Пусть: $p \in D(A), h \in Q(p, \mu), k = \overline{1, N}$

Обозначим:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p} \right)_{\tilde{h}=h}^{j_1 \dots j_{s_2}} = \\ & = \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] \end{aligned}$$

при условии, что $i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2} = \overline{1, N}$.

3. Пусть: $p \in D(A), h \in Q(p, \mu)$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla(\tilde{p}, \tilde{h}) A(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p} \right)_{\tilde{h}=h}^{j_1 \dots j_{s_2}} = \\ & = \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] \end{aligned}$$

4. Пусть: $p \in D(A)$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} & (\nabla(\tilde{p}) A(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p})_{i_1 \dots i_{s_1} k}^{j_1 \dots j_{s_2}}(h) = \\ & = \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] \end{aligned}$$

при условии, что $h \in Q(p, \mu), i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}, k = \overline{1, N}$

5. Обозначим:

$$\begin{aligned} & \nabla(A)_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h) = \\ & = \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] \end{aligned}$$

при условии, что $p \in D(A), h \in Q(p, \mu), i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}, k = \overline{1, N}$

Теорема о ковариантной производной тензорного поля

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

Γ – аффинная связность в пространстве (M, μ) , $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+, A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1}$ в пространстве (M, μ) .

Тогда $\nabla(A)$ – тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1+1}$ в пространстве (M, μ) , причем

$$D(\nabla(A)) = D(A).$$

Доказательство:

Пусть $s_1 = 1, s_2 = 1$. Очевидно, что $\nabla(A)$ – есть поле геометрических объектов степени $s_2 + (s_1 + 1)$ в пространстве (M, μ) и $D(\nabla(A)) = D(A)$.

Пусть: $p \in D(A), h_1, h_2 \in Q(p, \mu), i', j', k' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned}
 & \nabla(A)_{i,k}^j(p, h_1) D_j(\tilde{p}, h_1) h_2^{j'}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{i'}(\tilde{p}, h_2) h_1^i(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{k'}(\tilde{p}, h_2) h_1^k(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} = \\
 & = \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_i^j(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\tilde{p}=p} [\tilde{i}, \tilde{j}; i, j] D_j(\tilde{p}, h_1) h_2^{j'}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{i'}(\tilde{p}, h_2) h_1^i(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} \times \\
 & \quad \times D_{k'}(\tilde{p}, h_2) h_1^k(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} = \\
 & = \left(D_k(\tilde{p}, h_1) A_i^j(\tilde{p}, h_1)|_{\tilde{p}=p} + \Gamma_{k,m}^j(p, h_1) A_i^m(p, h_1) - \Gamma_{k,i}^m(p, h_1) A_m^j(p, h_1) \right) \times \\
 & \quad \times D_j(\tilde{p}, h_1) h_2^{j'}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{i'}(\tilde{p}, h_2) h_1^i(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{k'}(\tilde{p}, h_2) h_1^k(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} = \\
 & = [D_k(\tilde{p}, h_1) A_i^j(\tilde{p}, h_1)|_{\tilde{p}=p} + \Gamma_{k,m}^j(p, h_1) A_i^{m'}(p, h_2) D_{m'}(\tilde{p}, h_2) h_1^m(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} \times \\
 & \quad \times D_i(\tilde{p}, h_1) h_2^{i'}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} - \Gamma_{k,i}^m(p, h_1) A_m^{j'}(p, h_2) D_{j'}(\tilde{p}, h_2) h_1^j(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} \times \\
 & \quad \times D_m(\tilde{p}, h_1) h_2^{m'}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p}] D_j(\tilde{p}, h_1) h_2^{j'}(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{i'}(\tilde{p}, h_2) h_1^i(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} D_{k'}(\tilde{p}, h_2) h_1^k(\tilde{p})|_{\tilde{p}=p} = \\
 & = D_{k'}(\tilde{p}, h_2) A_{i'}^{j'}(\tilde{p}, h_2)|_{\tilde{p}=p} + D_{k',m}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} A_{i'}^{m'} - D_{k',i}^2 h_1^n D_n h_2^{m'} A_{m'}^{j'} + \\
 & \quad + \Gamma_{k,m}^j D_j h_2^{j'} D_{k'} h_1^k D_{m'} h_1^m A_{i'}^{m'} - \Gamma_{k,i}^m D_m h_2^{m'} D_{k'} h_1^k D_{i'} h_1^i A_{m'}^{j'} = \\
 & = D_{k'} A_{i'}^{j'} + \left(\Gamma_{k,m}^j D_j h_2^{j'} D_{k'} h_1^k D_{i'} h_1^i + D_{k',i}^2 h_1^n D_n h_2^{j'} \right) A_{i'}^{m'} - \\
 & \quad - \left(\Gamma_{k,i}^m D_m h_2^{m'} D_{k'} h_1^k D_{i'} h_1^i + D_{k',i}^2 h_1^n D_n h_2^{m'} \right) A_{m'}^{j'} = \\
 & = D_{k'} A_{i'}^{j'} + \Gamma_{k',m}^{j'} A_{i'}^{m'} - \Gamma_{k',i}^{m'} A_{m'}^{j'} = \nabla_{k'}(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{i'}^{j'}(\tilde{p}, \tilde{h})|_{\tilde{p}=p} [\tilde{i}, \tilde{j}; i, j] = \\
 & \quad \quad \quad \tilde{h}=h \\
 & = \nabla(A)_{i',k'}^{j'}(p, h_2)
 \end{aligned}$$

Итак, $\nabla(A)$ – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1+1 \end{pmatrix}$, $D(\nabla(A)) = D(A)$.

Теорема о понижении степени гладкости при ковариантном дифференцировании тензорного поля

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$; $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^r$ – гладкая аффинная связность, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^{r+1}$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ) .

Тогда: $\nabla(A) - C^r$ -тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1+1 \end{pmatrix}$, $D(\nabla(A)) = D(A)$.

Данное равенство следует из предыдущего утверждения, когда мы использовали знания о тензорном поле заданного порядка и области определения этого поля. По условию A имело гладкость C^{r+1} . Кроме того, у нас есть частная производная по A . Отсюда следует, что и компоненты поля, и все выражение будут иметь гладкость C^r .

Лекция 3. Свойства ковариантной производной тензорного поля

Сумма, умножение на константу, произведение, свертка, транспонирование поля

Замечание.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность в пространстве (M, μ) , $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ) .

Пусть: $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}, k = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} & \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p, \tilde{h}=h} [\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] = \\ & = \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p, \tilde{h}=h} [\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] \\ & \nabla_k(\tilde{p}, \tilde{h}) A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, \tilde{h}) \Big|_{\tilde{p}=p, \tilde{h}=h} [\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; \tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}] [\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] \\ & = (D_k(\tilde{p}, h) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{p}, h) \Big|_{\tilde{p}=p} + \sum_{\beta=1, s_2} \Gamma_{k, m}^{\tilde{j}_\beta} A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta-1} m \tilde{j}_{\beta+1} \dots \tilde{j}_{s_2}} - \\ & - \sum_{\alpha=1, s_1} \Gamma_{k, \tilde{i}_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha-1} m, \tilde{i}_{\alpha+1}, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}) [\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] \end{aligned}$$

Такого рода преобразование можно применять не только к ковариантным производным, но и к сумме тензоров, умножению тензора на число, прямому произведению тензоров, свертке и перестановке индексов.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность в пространстве (M, μ) .

1. Пусть $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A, B - C^1$ – гладкие тензорные поля порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ) и пусть $D(A) \cap D(B)$ – регулярное множество.

Тогда $\nabla(A + B) = \nabla(A) + \nabla(B)$.

Требование о регулярном множестве пересечения областей определения здесь неслучайно. Это необходимо для утверждения того, что $A + B$ есть также C^1 – гладкое поле.

2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ)

Тогда $\nabla(\lambda A) = \lambda \nabla(A)$.

Первые два свойства не означают линейности оператора ковариантного дифференцирования, так как сам тензорный оператор применяется к любым полям с разной размерностью, областью определения и порядком. Поэтому правильнее сказать, что если мы зафиксируем конкретное многообразие, на нем зафиксируем конкретное

регулярное множество и будем рассматривать поля порядка $\binom{s_2}{s_1}$, а потом ограничим ∇ на выбранный класс тензорных полей, то получится линейный оператор.

3. Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1}$ в пространстве (M, μ) , $s_3, s_4 \in \mathbb{Z}_+$, $B - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_4}{s_3}$ в пространстве (M, μ) и пусть $D(A) \cap D(B)$ – регулярное множество.

Тогда:

$$\begin{aligned} \nabla_k(p, h)(A(p, h) \otimes B(p, h)) &= \\ &= \nabla_k(p, h)(A(p, h)) \otimes B(p, h) + A(p, h) \otimes \nabla_k(p, h)(B(p, h)) \end{aligned}$$

при условии, что $p \in D(A) \cap D(B)$, $h \in Q(p, \mu)$, $k = \overline{1, N}$.

4. Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1}$ в пространстве (M, μ) , $\alpha_0 = \overline{1, s_1}$, $\beta_0 = \overline{1, s_2}$

Тогда:

$$\nabla \left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right) = \langle \nabla(A) \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0}$$

Ковариантная производная от свертки равна свертке от ковариантной производной.

5. Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1}$ в пространстве (M, μ) , $\sigma_1 \in S_{s_1}$

Здесь σ_1 – это перестановка из группы S_{s_1} . Сама группа образуется путем взятия целых чисел в диапазоне $\{1, \dots, s_1\}$, причем мы рассматриваем всевозможные взаимно-однозначные отображения этого множества на себя, которые называются **перестановками**.

Пусть также $\sigma_2 \in S_{s_2}$

Тогда:

$$\nabla_k(p, h)([A(p, h)]_{\sigma_1}^{\sigma_2}) = [\nabla_k(p, h)(A(p, h))]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$$

Здесь уже производится перестановка индексов не у тензорного поля, а у числового набора. Все это справедливо при условии, что

$$p \in D(A), h \in Q(p, \mu), k = \overline{1, N}.$$

Доказательство свойства о ковариантной производной прямого произведения

Доказательство:

Пусть: $\beta = \overline{1, s_2}$; $p \in D(A) \cap D(B)$, $h \in Q(p, \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1} = \overline{1, N}$,
 $j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2} = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$(A(p, h) \otimes B(p, h))_{i_1 \dots i_{s_1+s_3}}^{j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2+s_4}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (A(p, h) \otimes B(p, h))_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1+s_3}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2+s_4}} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1+s_3}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2+s_4}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1} \dots j_{s_2+s_4}] = \\
 &= A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}}(p, h) B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{\tilde{j}_{s_2+1} \dots \tilde{j}_{s_2+s_4}}(p, h) [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1+s_3}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2+s_4}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1} \dots j_{s_2+s_4}] \\
 &= A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta-1}, \tilde{j}_{\beta}, \tilde{j}_{\beta+1}, \dots, \tilde{j}_{s_2+s_4}}(p, h) B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{\tilde{j}_{s_2+1} \dots \tilde{j}_{s_2+s_4}}(p, h) [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1+s_3}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta-1}, \tilde{j}_{\beta}, \tilde{j}_{\beta+1}, \dots, \tilde{j}_{s_2+s_4}; \\
 &\quad i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1} \dots j_{s_2+s_4}] = A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2+s_4}}(p, h) B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}}(p, h)
 \end{aligned}$$

Пусть: $p \in D(A) \cap D(B)$, $h \in Q(p, \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1+s_3}, j_1 \dots j_{s_2+s_4}, k = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \nabla_k(p, h)(A(p, h) \otimes B(p, h))_{i_1 \dots i_{s_1+s_3}}^{j_1 \dots j_{s_2+s_4}} &= \nabla_k(p, h) \left((A(p, h) \otimes B(p, h))_{i_1 \dots i_{s_1+s_3}}^{j_1 \dots j_{s_2+s_4}} \right) = \\
 &= D_k(p, h)(A(p, h) \otimes B(p, h))_{i_1 \dots i_{s_1+s_3}}^{j_1 \dots j_{s_2+s_4}} + \\
 &+ \sum_{\beta=\overline{1, s_2+s_4}} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} (A(p, h) \otimes B(p, h))_{i_1 \dots i_{s_1+s_3}}^{j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2+s_4}} - \\
 &- \sum_{\alpha=\overline{1, s_1+s_3}} \Gamma_{k, i_\alpha}^m (A(p, h) \otimes B(p, h))_{i_1 \dots i_{\alpha-1}, m, i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1+s_3}}^{j_1 \dots j_{s_2+s_4}} = \\
 &= D_k(p, h) \left(A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h) \right) B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}}(p, h) + A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(p, h) D_k(p, h) \left(B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}}(p, h) \right) \\
 &+ \sum_{\beta=\overline{1, s_2}} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2}} B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} + \\
 &+ \sum_{\beta=\overline{s_2+1, s_2+s_4}} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2+s_4}} - \\
 &- \sum_{\alpha=\overline{1, s_1}} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha-1}, m, i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} - \\
 &- \sum_{\alpha=\overline{s_1+1, s_1+s_3}} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} B_{i_{s_1+1} \dots i_{\alpha-1}, m, i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} = \\
 &= \left(D_k(p, h) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} + \sum_{\beta=\overline{1, s_2}} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2}} - \sum_{\alpha=\overline{1, s_1}} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha-1}, m, i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} \right) \times \\
 &\quad \times B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} + A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} \times \\
 &\quad \times \left(D_k(p, h) B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} + \sum_{\beta=\overline{s_2+1, s_2+s_4}} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2+s_4}} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\alpha=\overline{s_1+1, s_1+s_3}} \Gamma_{k, i_\alpha}^m B_{i_{s_1+1} \dots i_{\alpha-1}, m, i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \nabla_k(p, h) \left(A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} + A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} \nabla_k(p, h) \left(B_{i_{s_1+1} \dots i_{s_1+s_3}}^{j_{s_2+1} \dots j_{s_2+s_4}} \right) \right) = \\
 &= (\nabla_k(p, h) \left(A(p, h) \otimes B(p, h) + A(p, h) \otimes \nabla_k(p, h) (B(p, h)) \right))_{i_1 \dots i_{s_1+s_3}}^{j_1 \dots j_{s_2+s_4}}
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство свойства о ковариантной производной свертки

Доказательство:

Пусть: $\beta = \overline{1, \beta_0 - 1}$; $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1-1} = \overline{1, N}$
 $j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2-1} = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned}
 & \left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right)_{i_1 \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2-1}}(p, h) = \left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right)_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1-1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2-1}}(p, h) \\
 & \left[\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1-1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2-1}; i_1 \dots i_{s_1-1}, j_1 \dots j_{\beta-1}, m, j_{\beta+1} \dots j_{s_2-1} \right] = \\
 & = A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta_0-1} n \tilde{j}_{\beta_0}, \dots, \tilde{j}_{s_2-1}}[\dots] = A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta-1} \tilde{j}_{\beta} \tilde{j}_{\beta+1}, \dots, \tilde{j}_{\beta_0-1} n \tilde{j}_{\beta_0}, \dots, \tilde{j}_{s_2-1}}[\dots] = \\
 & = A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1} m j_{\beta+1}, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}}
 \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть искомого равенства

Пусть: $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1-1}, j_1 \dots j_{s_2-1}, k = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned}
 & \left(\nabla \left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right) \right)_{i_1 \dots i_{s_1-1}, k}^{j_1 \dots j_{s_2-1}} = \nabla_k(p, h) \left(\left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right)_{i_1 \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{s_2-1}}(p, h) \right) = \\
 & = D_k(p, h) \left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right)_{i_1 \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{s_2-1}} + \sum_{\beta=\overline{1, s_2-1}} \Gamma_{k, m}^{j_{\beta}} \left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right)_{i_1 \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1} m j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2-1}} - \\
 & \quad - \sum_{\alpha=\overline{1, s_1-1}} \Gamma_{k, i_{\alpha}}^m \left(\langle A \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right)_{i_1 \dots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{s_2-1}} = \\
 & = D_k(p, h) A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}}^{j_1, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}} + \sum_{\beta=\overline{1, \beta_0-1}} \Gamma_{k, m}^{j_{\beta}} A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}}^{j_1, \dots, j_{\beta-1} m j_{\beta+1}, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}} + \\
 & \quad + \sum_{\beta=\overline{\beta_0, s_2-1}} \Gamma_{k, m}^{j_{\beta}} A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}}^{j_1, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{\beta-1} m j_{\beta+1}, \dots, j_{s_2-1}} - \\
 & \quad - \sum_{\alpha=\overline{1, \alpha_0-1}} \Gamma_{k, i_{\alpha}}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1}, \dots, i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}}^{j_1, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}} - \\
 & \quad - \sum_{\alpha=\overline{\alpha_0, s_1-1}} \Gamma_{k, i_{\alpha}}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1}, \dots, i_{s_1-1}}^{j_1, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}}
 \end{aligned}$$

Продолжение преобразований будет приведено в следующей лекции.

Лекция 4. Ковариантная производная тензорного поля

Продолжение. Доказательство свойств

Мы остановились на том, что провели преобразование левой части выражения. Теперь перейдем к правой части.

Пусть: $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1-1}, j_1 \dots j_{s_2-1}, k = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \left(\langle \nabla(A) \rangle_{\alpha_0}^{\beta_0} \right)_{i_1 \dots i_{s_1-1}, k}^{j_1 \dots j_{s_2-1}}(p, h) &= \sum_{n=1, N} \nabla(A)_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}, k}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}}(p, h) = \\ &= \sum_{n=1, N} \nabla(A)_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}, k}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}}(p, h) [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}, j_1, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}] \\ &= \sum_{n=1, N} \nabla_k(p, h) \left(A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}}(p, h) \right) [\dots] = \\ &= \sum_{n=1, N} \left(D_k(p, h) \left(A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}}(p, h) \right) + \sum_{\beta=1, s_2} \Gamma_{k, m}^{\tilde{j}_\beta} A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta-1} m \tilde{j}_{\beta+1}, \dots, \tilde{j}_{s_2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha=1, s_1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{\alpha-1} m \tilde{i}_{\alpha+1}, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}} \right) [\dots] \end{aligned}$$

Далее проведем следующую процедуру: берем сумму по β , разбиваем ее на сумму трех слагаемых от 1, до $\beta_0 - 1$, единичное слагаемое при $\beta = \beta_0$ и сумму, в которой β меняется от $\beta_0 + 1$ до s_2 .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, N} \left(D_k(p, h) \left(A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}}(p, h) \right) + \sum_{\beta=1, \beta_0-1} \Gamma_{k, m}^{\tilde{j}_\beta} A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta-1} m \tilde{j}_{\beta+1}, \dots, \tilde{j}_{\beta_0-1} \tilde{j}_{\beta_0+1}, \dots, \tilde{j}_{s_2}} \right. \\ \left. + \Gamma_{k, m}^{\tilde{j}_{\beta_0}} A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{\beta_0-1} m \tilde{j}_{\beta_0+1}, \dots, \tilde{j}_{s_2}} + \sum_{\beta=\beta_0+1, s_2} \Gamma_{k, m}^{\tilde{j}_\beta} A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{\beta_0-1} \tilde{j}_{\beta_0} \tilde{j}_{\beta_0+1}, \dots, \tilde{j}_{\beta-1} m \tilde{j}_{\beta+1}, \dots, \tilde{j}_{s_2}} \right. \\ \left. - \sum_{\alpha=1, \alpha_0-1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{\alpha-1} m \tilde{i}_{\alpha+1}, \dots, \tilde{i}_{\alpha_0-1} \tilde{i}_{\alpha_0+1}, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}} - \Gamma_{k, i_{\alpha_0}}^m A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{\alpha_0-1} m \tilde{i}_{\alpha_0+1}, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}} \right. \\ \left. - \sum_{\alpha=\alpha_0+1, s_1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{\alpha_0-1} \tilde{i}_{\alpha_0} \tilde{i}_{\alpha_0+1}, \dots, \tilde{i}_{\alpha-1} m \tilde{i}_{\alpha+1}, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}} \right) \times \\ \times [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0}, \dots, i_{s_1-1}, j_1, \dots, j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0}, \dots, j_{s_2-1}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \sum_{n=1, N} \left(D_k \left(A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \right) + \sum_{\beta=1, \beta_0-1} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1} m j_{\beta+1} \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \right. \\
 & + \Gamma_{k, m}^n A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} m j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} + \sum_{\beta=\beta_0+1, s_2} \Gamma_{k, m}^{j_{\beta-1}} A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{\beta-2} m j_{\beta} \dots j_{s_2-1}} \\
 & - \sum_{\alpha=1, \alpha_0-1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1} \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} - \Gamma_{k, n}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} m i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \\
 & \left. - \sum_{\alpha=\alpha_0+1, s_1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{\alpha-2} m i_\alpha \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

Опишем кратко только что произведенные действия. Сначала мы расписали свертку, затем применили оператор подстановки и добились стандартной нумерации индексов. Далее перешли к кванторной форме записи ковариантной производной, а потом расписали выражение для самой ковариантной производной.

Теперь приведем подобные слагаемые и сделаем сдвиг переменной суммирования.

$$\begin{aligned}
 \dots = & \sum_{n=1, N} \left(D_k \left(A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \right) + \sum_{\beta=1, \beta_0-1} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1} m j_{\beta+1} \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \right. \\
 & + \sum_{\beta=\beta_0, s_2-1} \Gamma_{k, m}^{j_\beta} A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{\beta-2} m j_{\beta} \dots j_{s_2-1}} \\
 & - \sum_{\alpha=1, \alpha_0-1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1} \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \\
 & \left. - \sum_{\alpha=\alpha_0, s_1-1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m A_{i_1 \dots i_{\alpha_0-1} n i_{\alpha_0} \dots i_{\alpha-2} m i_\alpha \dots i_{s_1-1}}^{j_1 \dots j_{\beta_0-1} n j_{\beta_0} \dots j_{s_2-1}} \right)
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Свойство 5 доказывается аналогичным образом. Это рекомендуется сделать самостоятельно.

В современной геометрии точка зрения на ковариантную производную отличается от описанной выше. В этом курсе рассматривается ковариантная производная как прямой аналог обычной частной производной, дифференцирование производится по координате гладкого многообразия. Такой точки зрения придерживается теоретическая физика. Но в книжках по современной дифференциальной геометрии ковариантная производная рассматривается как аналог производной по направлению. То есть чтобы получить такую ковариантную производную, нужно взять некоторое векторное поле β , вычислить ковариантную производную по принятой в курсе методике и произвести свертку по индексу k .

$$\nabla(A_i^j) = \beta^k \nabla_k(A_i^j)$$

Допустим, что нам нужно записать второй закон Ньютона в произвольной системе координат, используя ковариантное дифференцирование. Мы бы не смогли это

сделать, так как там есть материальная точка, а её закон движения – мировая линия. В этом случае дифференцирование будет вестись по параметру мировой линии, а не по координате пространства.

Поэтому неплохо было бы ввести понятие поверхности, параметрически заданной на гладком многообразии, и координатную производную по параметру поверхности, в частности по параметру мировой линии частицы.

Сингулярная поверхность. Поле геометрических объектов на сингулярной поверхности

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $r \in \mathbb{Z}_+, N_1 \in \mathbb{N}, \varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M, \varphi - C^r$ – гладкая функция.

Напомним, что такое координатное представление

$$h \cdot \varphi$$

$$h(\varphi(u))$$

При постоянной функции гладкость данной композиции не будет зависеть от координатной карты.

Будем говорить, что $\varphi - C^r$ – **гладкая сингулярная поверхность размерности N_1 в пространстве (M, μ)** .

Сингулярность здесь появляется из-за отсутствия строгого требования на максимально возможный ранг матрицы Якоби или линейную независимость всех касательных векторов, полученных дифференцированием по функции u .

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $N_1 \in \mathbb{N}, \varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M, \varphi - C^0$ – гладкая функция, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что A – **поле геометрических объектов степени s на поверхности φ** , если выполнены условия:

1. A – функция
2. $D(A) \subseteq D(\varphi)$
3. $\forall u \in D(A) \left(A(u) \in (G_{\varphi(u)}M)_s \right)$

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $N_1 \in \mathbb{N}, \varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M, \varphi - C^0$ – гладкая функция, $s \in \mathbb{Z}_+, A$ – поле геометрических объектов степени s на поверхности φ

Пусть $z \in \bar{\mathbb{N}}$. Будем говорить, что $A - C^r$ – **гладкое поле**, если

1. $D(A)$ – регулярное множество
2. $\forall u_0 \in D(A) \forall h \in Q(\varphi(u_0), \mu) \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } u_0):$

$$\left(\varphi[\omega] \subseteq D(h) \wedge \left(\{A(u, h)\}_{u \in \omega} \in C^r(\omega; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{(N, s)}) \right) \right)$$

Ковариантная производная тензорного поля на сингулярной поверхности

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M$, $\varphi - C^1$ – гладкая функция, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$,
 $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1}$ на поверхности φ .

1. Пусть: $u \in D(A)$, $h \in Q(\varphi(u), \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2} = \overline{1, N}$, $\gamma = \overline{1, N_1}$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} \left(A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{u}, \tilde{h}) \right) \Big|_{\substack{\tilde{u}=u, \\ \tilde{h}=h}} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}] = \\ & = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \left(A_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(\tilde{u}, h) \right) \Big|_{\tilde{u}=u} + \sum_{\beta=1, s_2} \Gamma_{k, m}^{j_\beta}(\varphi(u), h) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \left(h^k(\varphi(\tilde{u})) \right) \Big|_{\tilde{u}=u} A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1} m j_{\beta+1} \dots j_{s_2}} \\ & \quad - \sum_{\alpha=1, s_1} \Gamma_{k, i_\alpha}^m(\varphi(u), h) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \left(h^k(\varphi(\tilde{u})) \right) \Big|_{\tilde{u}=u} A_{i_1 \dots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1} \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}}(u, h) \end{aligned}$$

Продолжение определения будет дано на следующей лекции.

Лекция 5. Физический смысл аффинной связности

Продолжение. Ковариантная производная на сингулярной поверхности

2. Пусть: $u \in D(A)$, $h \in Q(\varphi(u), \mu)$, $\gamma = \overline{1, N_1}$.

Обозначим:

$$\left(\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u}, \tilde{h})) \right) \Big|_{\substack{\tilde{u}=u, \\ \tilde{h}=h}}^{j_1 \dots j_{s_2}}_{i_1 \dots i_{s_1}} = \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} \left(A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{u}, \tilde{h}) \right) \Big|_{\substack{\tilde{u}=u, \\ \tilde{h}=h}} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}]$$

при $i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2} = \overline{1, N}$.

3. Пусть: $u \in D(A)$, $\gamma = \overline{1, N_1}$.

Обозначим:

$$\left(\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u})) \right) \Big|_{\tilde{u}=u}^{j_1 \dots j_{s_2}}_{i_1 \dots i_{s_1}}(h) = \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} \left(A_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{s_1}}^{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{s_2}}(\tilde{u}, \tilde{h}) \right) \Big|_{\substack{\tilde{u}=u, \\ \tilde{h}=h}} [\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{s_1}, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{s_2}; i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2}]$$

при $h \in Q(\varphi(u), \mu)$, $i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2} = \overline{1, N}$.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M$, $\varphi - C^1$ – гладкая функция, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$,
 $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1}$ на поверхности φ .

Тогда:

$$\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u})) \Big|_{\tilde{u}=u} \in (T_{\varphi(u)} M)_{s_1}^{s_2}$$

при $\gamma = \overline{1, N_1}$, $u \in D(A)$.

Алгебраические свойства ковариантных производных

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность.

1. Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A, B - C^1$ – гладкие тензорные поля порядка $\binom{s_2}{s_1}$ на поверхности φ и $D(A) \cap D(B)$ – регулярное множество

Тогда:

$$\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u}) + B(\tilde{u})) \Big|_{\tilde{u}=u} = \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u})) \Big|_{\tilde{u}=u} + \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (B(\tilde{u})) \Big|_{\tilde{u}=u}$$

при $\gamma = \overline{1, N_1}$, $u \in D(A) \cap D(B)$.

2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\binom{s_2}{s_1}$.

Тогда:

$$\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (\lambda A(\tilde{u})) \Big|_{\tilde{u}=u} = \lambda \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u})) \Big|_{\tilde{u}=u}$$

при $u \in D(A), \gamma = \overline{1, N_1}$.

3. Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+, A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}, s_3, s_4 \in \mathbb{Z}_+, B - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u}) \otimes B(\tilde{u}))|_{\tilde{u}=u} = \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (A(\tilde{u}))|_{\tilde{u}=u} \otimes B(u) + A(u) \otimes \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} (B(\tilde{u}))|_{\tilde{u}=u}$$

при $\gamma = \overline{1, N_1}, u \in D(A) \cap D(B)$.

4. Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{N}, A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}, \alpha_0 = \overline{1, s_1}, \beta_0 = \overline{1, s_2}$.

Тогда:

$$\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} A(\tilde{u})|_{\tilde{u}=u}^{\beta_0} = \frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} A(\tilde{u})|_{\tilde{u}=u}^{\beta_0}$$

при $\gamma = \overline{1, N_1}, u \in D(A)$.

5. Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+, A - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}, \sigma_1 \in S_{s_1}, \sigma_2 \in S_{s_2}$.

Тогда:

$$\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} [A(\tilde{u})]_{\sigma_1}^{\sigma_2}|_{\tilde{u}=u} = \left[\frac{\nabla}{\partial \tilde{u}^\gamma} A(\tilde{u})|_{\tilde{u}=u} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$$

при $\gamma = \overline{1, N_1}, u \in D(A)$.

Физический пример использования ковариантной производной

Сначала необходимо рассмотреть теоретическое введение для физического примера. Мы будем рассматривать материальную точку, которая движется в силовом поле. Для этого мы запишем второй закон Ньютона в произвольной системе координат.

Каким может быть поле? Всего есть четыре типа взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. Гравитационное мы сразу отбрасываем, так как оно будет связано с кривизной пространства. Сильное и слабое поля – это квантовые взаимодействия, а удовлетворительного совмещения теории относительности и квантовой механики, как известно, пока не существует. Поэтому для нас остается только электромагнитное взаимодействие.

Сила Лоренца включает в себя четырехмерную скорость материальной точки. Поле должно быть гладкой функцией этой четырехмерной скорости. В прошлом семестре было введено понятие **касательного многообразия**, на котором нужные нам касательные векторы (векторы скорости) появляются.

Начнем с того, что определим следующие понятия:

Определение.

Пусть: $(M_1, \mu_1) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N_1 \in \mathbb{N}, \dim((M_1, \mu_1)) = N_1$, $(M_2, \mu_2) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N_2 \in \mathbb{N}, \dim((M_2, \mu_2)) = N_2$,

Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, $\varphi - C^r$ – гладкая функция.

Будем говорить, что $\varphi - C^r$ – гладкая сингулярная поверхность в пространствах (M_1, μ_1) и (M_2, μ_2) .

Определение.

Пусть: $(M_1, \mu_1) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_1, \mu_1)) = N_1$,
 $(M_2, \mu_2) - C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_2, \mu_2)) = N_2$,

Пусть: $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, $\varphi - C^0$ – гладкая функция, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что A – поле геометрических объектов степени s на поверхности φ , если

1. A – функция
2. $D(A) \subseteq D(\varphi)$
3. $\forall p \in D(A) (A(p) \in G_{\varphi(p)} M_2)$.

Определение.

Пусть: $(M_1, \mu_1) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_1, \mu_1)) = N_1$,
 $(M_2, \mu_2) - C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_2, \mu_2)) = N_2$,
 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, $\varphi - C^0$ – гладкая функция, $s \in \mathbb{Z}_+$, A – поле геометрических объектов степени s на поверхности φ .

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Будем говорить, что $A - C^r$ – гладкое поле, если

1. $D(A)$ – регулярное множество
2. $\forall p_0 \in D(A) \forall H \in Q(\varphi(p_0), \mu_2) \exists \omega(\omega - \text{окрестн. } p_0) :$
$$(\varphi[\omega] \subseteq D(H) \wedge (\{A(p, H)\}_{p \in D(A) \cap \omega} - C^r))$$

Утверждение.

Пусть: $r \in \overline{\mathbb{N}}$, $r_1 = \overline{0, r}$, $(M_1, \mu_1) - C^r$ – гладкое квазимногообразие,
 $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_1, \mu_1)) = N_1$, $(M_2, \mu_2) - C^{r+1}$ – гладкое квазимногообразие,
 $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_2, \mu_2)) = N_2$, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, $\varphi - C^0$ – гладкая функция,
 $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$.

Пусть: $D(A)$ – регулярное множество и

$$\forall p_0 \in D(A) \exists h \in Q(p_0, \mu_1) \exists H \in Q(\varphi(p_0), \mu_2) \exists \omega(\omega - \text{окрестн. } p_0) : \\ (\omega \subseteq D(h) \wedge \varphi[\omega] \subseteq D(H) \wedge (\{A(h^{-1}(x), H)\}_{x \in h[D(A) \cap \omega]} - C^{r_1}))$$

Тогда A – поле гладкости C^{r_1} .

Замечание.

Пусть: $(M, \mu) - C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,

Тогда:

$$(M, \mu) - C^{r_*(\mu)} - \text{гладкое квазимногообразие, } r_*(\mu) \geq 1$$

Обозначим:

$$TM = \{(p, \xi) : p \in M \wedge \xi \in T_p M\} = \{u : \exists p \exists \xi (p \in M \wedge \xi \in T_p M \wedge u = (p, \xi))\}$$

Тогда:

TM – непустое множество.

Пусть $h \in \mu$. Обозначим:

$$(Th)(p, \xi) = (h^1(p), \dots, h^N(p), [\xi]^1(e(p, h)), \dots, [\xi]^N(e(p, h)))^T$$

при $p \in D(h), \xi \in T_p M$.

Тогда Th – координатная карта на множестве TM , причем $\dim(Th) = 2N$,

Обозначим:

$$\tilde{T}\mu = \{Th : h \in \mu\} = \{u : \exists h (h \in \mu \wedge u = Th)\}.$$

Тогда: $\tilde{T}\mu - C^{r_*(\mu)-1}$ – гладкий координатный атлас на TM , причем $\dim(\tilde{T}\mu) = 2N$.

Обозначим:

$$\tilde{T}(M, \mu) = (TM, \tilde{T}\mu).$$

Тогда: $\tilde{T}(M, \mu) - C^{r_*(\mu)-1}$ – гладкое квазимногообразие, $\dim(\tilde{T}(M, \mu)) = 2N$.

Оно называется **касательным квазимногообразием**.

Обозначим:

$$T\mu = MA(\tilde{T}\mu, r_*(\mu) - 1).$$

Тогда: $T\mu - C^{r_*(\mu)-1}$ – максимальный атлас на TM , причем $\dim(T\mu) = 2N$.

Обозначим:

$$T(M, \mu) = (TM, T\mu).$$

Тогда: $T(M, \mu) - C^{r_*(\mu)-1}$ – гладкое многообразие, $\dim(T(M, \mu)) = 2N$.

Обозначим:

$$\pi(p, \xi) = p$$

при $p \in M, \xi \in T_p M$.

Тогда: $\pi : TM \rightarrow M, \pi - C^{r_*(\mu)-1}$.

Замечание.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое многообразие, $\dim((M, \mu)) = 4$, $h_0 \in \mu$,
 $D(h_0) = M$.

Тогда: $T(M, \mu) - C^1$ – гладкое многообразие, $\dim(T(M, \mu)) = 8$,
 $\pi : TM \rightarrow M, \pi - C^1$ – гладкое отображение.

Пусть: $m_0 \in (0, +\infty), F - C^1$ – гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ на поверхности π .

Теоретическая механика изучает C^2 – гладкие кривые, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям механики.

Пусть: I – промежуток на $\mathbb{R}$, $\varphi: I \rightarrow M$, $\varphi - C^2$ – гладкая функция,

$$m_0 \frac{d^2}{d\tau^2} h_0^{j^0}(\varphi(\tau)) = F^{j^0} \left(\varphi(\tau), \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau), h_0 \right)$$

при $\tau \in I, j^0 = \overline{0,3}$.

$$m_0 \frac{d}{d\tau} \frac{d}{d\tau} h_0^{j^0}(\varphi(\tau)) = F^{j^0} \left(\varphi(\tau), \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau), h_0 \right)$$

при $\tau \in I, j^0 = \overline{0,3}$.

Теперь перепишем это выражение в произвольной системе координат. Здесь наши преобразования сталкиваются с проблемой того, что справа стоит тензор, а слева – не тензор. Для решения этой проблемы введем вспомогательную аффинную связность.

Пусть: Γ – аффинная связность в пространстве (M, μ) , $\Gamma(p, h_0) = \theta$,

при всех $p \in M$.

Тогда $\Gamma - C^0$.

Очевидно:

$$\begin{aligned} m_0 \left(\frac{d}{d\tau} \frac{d}{d\tau} h_0^{j^0}(\varphi(\tau)) + \Gamma_{k^0, m^0}^{j^0}(\varphi(\tau), h_0) \frac{d}{d\tau} h_0^{k^0}(\varphi(\tau)) \frac{d}{d\tau} h_0^{m^0}(\varphi(\tau)) \right) = \\ = F^{j^0} \left(\varphi(\tau), \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau), h_0 \right) \end{aligned}$$

при $\tau \in I, j^0 = \overline{0,3}$.

Тогда все уравнения переписываются как

$$m_0 \frac{\nabla}{d\tau} \frac{d}{d\tau} h_0^{j^0}(\varphi(\tau)) = F^{j^0} \left(\varphi(\tau), \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau), h_0 \right)$$

при $\tau \in I, j^0 = \overline{0,3}$.

Теперь можно взять произвольную карту, так как выражение слева тоже является тензором.

$$m_0 \frac{\nabla}{d\tau} \frac{d}{d\tau} h^j(\varphi(\tau)) = F^j \left(\varphi(\tau), \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau), h \right)$$

при $\tau \in I, h \in Q(\varphi(\tau), \mu), j = \overline{0,3}$.

$$\begin{aligned} m_0 \left(\frac{d}{d\tau} \frac{d}{d\tau} h^j(\varphi(\tau)) + \Gamma_{k, m}^j(\varphi(\tau), h_0) \frac{d}{d\tau} h^k(\varphi(\tau)) \frac{d}{d\tau} h^m(\varphi(\tau)) \right) = \\ = F^j \left(\varphi(\tau), \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau), h \right) \end{aligned}$$

при $\tau \in I, h \in Q(\varphi(\tau), \mu), j = \overline{0,3}$.

$$m_0 \frac{d^2}{d\tau^2} h^j(\varphi(\tau)) = F^j \left(\varphi(\tau), \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau), h \right) - m_0 \Gamma_{k, m}^j(\varphi(\tau), h_0) \frac{d}{d\tau} h^k(\varphi(\tau)) \frac{d}{d\tau} h^m(\varphi(\tau))$$

при $\tau \in I, h \in Q(\varphi(\tau), \mu), j = \overline{0,3}$.

Мы видим, что в произвольной системе координат закон Ньютона очень похож на закон в лабораторной системе отчета, за исключением слагаемого со знаком минус.

В аффинной системе координат компоненты связности равны нулю, и этого члена нет, а в остальных системах он появляется. Как уже можно догадаться, это слагаемое связано с **силой инерции**. Причем ее появление с физикой никак не связано, а имеет оно чисто геометрическую природу.

Определение локально конечного подмножества

Определение.

Пусть (M, μ) – топологическое пространство, $Q \subseteq M$.

Будем говорить, что Q_0 – **локальное конечное подмножество** множества Q , если

1. $Q_0 \subseteq Q$
2. $\forall p_0 \in Q \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } p_0) (Q_0 \cap \omega - \text{конечное множество})$

Лекция 6. Абсолютно параллельное тензорное поле

Аксиома отделимости

Определение.

Пусть (M, τ) – топологическое пространство. Будем говорить, что (M, τ) удовлетворяет 1-й аксиоме отделимости, если

$$\forall x_1 \in M \forall x_2 \in M (x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } x_1) (x_2 \notin \omega)).$$

Локально конечное подмножество: свойства и доказательства

Определение.

Пусть: (M, τ) – топологическое пространство, $Q \subseteq M$. Будем говорить, что Q_0 – локально конечное подмножество множества Q , если

1. $Q_0 \subseteq Q$
2. $\forall x_0 \in Q \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } x_0) (Q_0 \cap \omega - \text{конечное множество}).$

Утверждение.

Пусть: (M, τ) – топологическое пространство, $Q \subseteq M$, Q – компактное множество, Q_0 – локально конечное подмножество множества Q .

Тогда Q_0 – конечное множество.

Утверждение.

Пусть: (M, τ) – топологическое пространство, (M, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости, $Q \subseteq M$, Q_0 – локально конечное подмножество множества Q .

Пусть $x_0 \in Q \setminus Q_0$

Тогда $\exists$ окрестность ω точки x_0 :

$$Q_0 \cap \omega = \emptyset.$$

Утверждение.

Пусть: (M, τ) – топологическое пространство, (M, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости, $Q \subseteq M$, Q_0 – локально конечное подмножество множества Q .

Пусть $x_0 \in Q_0$

Тогда $\exists$ окрестность ω точки x_0 :

$$Q_0 \cap \omega = \{x_0\}$$

Утверждение.

Пусть: (M, τ) – топологическое пространство, (M, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости, Q – регулярное множество в пространстве (M, τ) , Q_0 – локально конечное подмножество множества Q .

Тогда $Q \setminus Q_0$ – регулярное множество в пространстве (M, τ) .

Утверждение.

Пусть: (M_1, ρ_1) – метрическое пространство, (M_2, τ_2) – топологическое пространство, $F: M_1 \rightarrow M_2$, $D(F)$ – компактное множество, $D(F) \neq \emptyset$, F – непрерывная функция на множестве $D(F)$, μ – открытое покрытие множества $R(F)$.

Тогда существует число δ , удовлетворяющие условиям:

1. $\delta \in (0, +\infty)$
2. $\forall Q \subseteq D(F) \left(\text{diam}(Q) \leq \delta \Rightarrow \exists \omega \in \mu \left(F[Q] \subseteq \omega \right) \right)$

Доказательство:

Пусть $x \in D(F)$.

Тогда $F(x) \in R(F)$. Так как μ – открытое покрытие $R(F)$ (в дополнение к вышесказанному), то существует множество $\omega_0(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\omega_0(x) \in \mu, \quad F(x) \in \omega_0(x).$$

Так как F – непрерывная функция в точке x , $\omega_0(x)$ – окрестность точки $F(x)$, то существует число $\delta_1(x)$, удовлетворяющие условию

$$\delta_1(x) \in (0, +\infty), F[B_{\delta_1(x)}(x)] \subseteq \omega_0(x)$$

Так как $\delta_1(x) \in (0, +\infty)$, то существует число $\delta_2(x)$, удовлетворяющие условию

$$\delta_2(x) \in (0, \delta_1(x))$$

Очевидно, что $\{B_{\delta_2(x)}(x); x \in D(F)\}$ – открытое покрытие множества $D(F)$. Так как $D(F)$ – компактное множество, $D(F) \neq \emptyset$, (в дополнение к вышесказанному), то существует число N , точки $x_1, \dots, x_N$, удовлетворяющие условиям:

$$x_1, \dots, x_N \in D(F), \quad \{B_{\delta_2(x_k)}(x_k); k = \overline{1, N}\}$$

- открытое покрытие множества $D(F)$.

Обозначим $\delta = \min_{k=\overline{1, N}} (\delta_1(x_k) - \delta_2(x_k))$.

Тогда $\delta(x) \in (0, +\infty)$.

Пусть: $Q \subseteq D(F), \text{diam}(Q) \leq \delta, Q \neq \emptyset$.

Тогда:

$$F[Q] = F[\emptyset] = \emptyset \subseteq \omega_0(x_1)$$

Пусть: $Q \subseteq D(F), \text{diam}(Q) \leq \delta, Q \neq \emptyset$.

Так как $\{B_{\delta_2(x_k)}(x_k); k = \overline{1, N}\}$ – открытое покрытие $D(F)$, $Q \subseteq D(F)$, $Q \neq \emptyset$, то существует число k_0 , удовлетворяющие условиям:

$$k_0 = \overline{1, N}, Q \cap B_{\delta_2(x_{k_0})}(x_{k_0}) = \emptyset.$$

С другой стороны, так как $\text{diam}(Q) \leq \delta \leq \delta_1(x_0) - \delta_2(x_0)$ (в дополнение к вышесказанному), то $Q \subseteq B_{\delta_1(x_{k_0})}(x_{k_0})$.

$$\text{Тогда } F(Q) \subseteq F[B_{\delta_1(x_{k_0})}(x_{k_0})] \subseteq \omega_0(x_{k_0})$$

Что и требовалось доказать.

Определение.

Пусть: (M, μ) – C^2 – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

Γ – аффинная связность, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+, A$ – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ) .

Будем говорить, что A – абсолютно параллельное поле (ковариантно постоянное поле), если:

1. $A - C^1$ – гладкое поле
2. $\nabla(p)A(p) = \theta(T_p M)_{s_1+1}^{s_2}$ при $p \in D(A)$.

Утверждение.

Пусть: $r = \overline{1, +\infty}$, $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие,
 $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^r$ – гладкая аффинная связность в пространстве (M, μ) .

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – абсолютно параллельное тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в пространстве (M, μ) .

Тогда $A - C^{r+1}$.

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность в пространстве (M, μ) , $N_1 \in \mathbb{N}$, $\varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M$, $\varphi - C^1$.

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ .

Будем говорить, что A – абсолютно параллельное поле, если:

1. $A - C^1$ – гладкое поле
2. $\frac{\nabla}{\partial u^\gamma} A(u) = \theta(T_{\varphi(u)} M)_{s_1}^{s_2}$
при $\gamma = \overline{1, N_1}$, $u \in D(A)$.

Утверждение.

Пусть: $r = \overline{1, +\infty}$, $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие,
 $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^r$ – гладкая аффинная связность в пространстве (M, μ) ,
 $N_1 \in \mathbb{N}$, $\varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M$, $\varphi - C^{r+1}$

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – абсолютно параллельное тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на поверхности φ .

Тогда $A - C^{r+1}$.

Замечание.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi - C^1$.

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $t \in D(\varphi)$, $h \in Q(\varphi(t), \mu)$, $B \in \mathbb{R}^{(N, s_2+s_1)}$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{s_1}^{s_2}(t, h, B) \right)_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}} &= \sum_{\beta=\overline{1, s_2}} \Gamma_{k, m}^{j\beta}(\varphi(t), h) \frac{d}{dt} h^k(\varphi(t)) B_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1} m j_{\beta+1} \dots j_{s_2}} - \\ &- \sum_{\alpha=\overline{1, s_1}} \Gamma_{k, i_\alpha}^m(\varphi(t), h) \frac{d}{dt} h^k(\varphi(t)) B_{i_1 \dots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1} \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} \end{aligned}$$

при $i_1 \dots i_{s_1}, j_1 \dots j_{s_2} = \overline{1, N}$.

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$.

Пусть $z \in \bar{\mathbb{N}}$.

Будем говорить, что φ – кусочно C^r – гладкая функция, если выполнены условия:

1. $D(\varphi)$ – промежуток.
2. $\varphi - C^0$ – гладкая функция
3. $\exists Q_0$, удовлетворяющие условиям:
 - Q_0 – локально конечное подмножество $D(\varphi)$
 - Для любых чисел α, β , удовлетворяющих условиям: $\alpha, \beta \in D(F), \alpha < \beta$,
 $(\alpha, \beta) \cap Q_0 = \emptyset$ справедливо утверждение: $\varphi|_{[\alpha, \beta]} - C^r$ -гладкая функция.

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^0$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$.

Пусть $z \in \bar{\mathbb{N}}$.

Будем говорить, что φ – обобщенная C^r -гладкая функция, если:

1. $D(\varphi)$ – регулярное множество
2. $\varphi - C^0$ – гладкая функция
3. $\exists Q_0$, удовлетворяющие условиям:
 - Q_0 – локально конечное подмножество $D(\varphi)$
 - $\varphi|_{D(\varphi) \setminus Q_0} - C^r$

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M, \varphi - C^0$ – гладкая функция, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+, A$ – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$.

Пусть $r \in \bar{\mathbb{N}}$

Будем говорить, что A – обобщенное C^r – гладкое поле, если:

1. $D(A)$ – регулярное множество
2. $A - C^0$
3. $\exists Q_0$, удовлетворяющие условиям:
 - Q_0 – локально конечное подмножество $D(A)$
 - $A|_{D(A) \setminus Q_0} - C^r$

Обобщенное абсолютно параллельное поле

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

Γ – аффинная связность, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, φ – обобщенная C^1 – гладкая функция,
 $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ .

Будем говорить, что A – обобщенное абсолютно параллельное поле, если:

1. $D(A)$ – регулярное множество
2. $A \in C^0$
3. $\exists Q_0$, удовлетворяющие условиям:
 - Q_0 – локально конечное подмножество $D(A)$
 - $\varphi|_{D(A) \setminus Q_0} \in C^1$
 - $A|_{D(A) \setminus Q_0} \in C^1$
 - $\frac{\nabla}{dt} A(t) = \theta(T_{\varphi(t)} M)_{s_1}^{s_2}$ при $t \in D(A) \setminus Q_0$

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) \in C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,

$\Gamma \in C^0$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi \in C^1$ – гладкая функция.

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ , $D(A)$ – промежуток,

A – обобщенное абсолютно параллельное поле.

Тогда $A \in C^1$.

Доказательство:

Так как A – обобщенное абсолютно параллельное поле, то:

1. $A \in C^0$
2. Существует Q_0 , удовлетворяющие условиям:
 - Q_0 – локально конечное подмножество $D(A)$
 - $A|_{D(A) \setminus Q_0}$ – абсолютно параллельное поле

Пусть $t_0 \in D(A) \setminus Q_0$. Так как $t_0 \in D(A) \subseteq D(\varphi)$, то $\varphi(t_0) \in M$.

Так как $\mu \in C^2$ – гладкий координатный атлас на M (в дополнение к вышесказанному), то существует карта h , удовлетворяющая условию: $h \in Q(\varphi(t_0), \mu)$.

Лекция 7. Теоремы о повышении гладкости

Повторение: обобщенное абсолютно параллельное поле. Переход от обобщенной абсолютной параллельности к обычной

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi - C^0$ – гладкая функция,
 $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ .

Будем говорить, что A – обобщенное абсолютно параллельное поле, если:

1. $D(A)$ – регулярное множество
2. $A - C^0$
3. $\exists Q_0$, удовлетворяющие условиям:
 - Q_0 – локально конечное подмножество $D(A)$
 - $\varphi|_{D(A) \setminus Q_0} - C^1$
 - $A|_{D(A) \setminus Q_0} - C^1$
 - $\frac{\nabla}{dt} A(t) = \theta(T_{\varphi(t)} M)_{s_1}^{s_2}$ при $t \in D(A) \setminus Q_0$

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 $\Gamma - C^0$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi - C^1$ – гладкая функция.

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ , $D(A)$ – промежуток,
 A – обобщенное абсолютно параллельное поле.

Тогда $A - C^1$ - абсолютно параллельное поле.

Доказательство:

Так как A – обобщенное абсолютно параллельное поле, то:

1. Существует Q_0 , удовлетворяющие условиям:
 - Q_0 – локально конечное подмножество $D(A)$
 - $A|_{D(A) \setminus Q_0} - C^1$ гладкое поле
 - $\frac{\nabla}{dt} A(t) = \theta(T_{\varphi(t)} M)_{s_1}^{s_2}$ при $t \in D(A) \setminus Q_0$

Пусть $t_0 \in D(A) \setminus Q_0$. Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $t_0 \in D(A) \subseteq D(\varphi)$, то $\varphi(t_0) \in M$.

Так как $\mu - C^2$ – гладкий координатный атлас на M (в дополнение к вышесказанному), то существует карта h , удовлетворяющая условию: $h \in Q(\varphi(t_0), \mu)$.

Так как φ – непрерывная функция в t_0 , $D(h)$ – окрестность $\varphi(t_0)$, Q_0 – локально конечное подмножество $D(A)$, $t_0 \in D(A) \setminus Q_0$, то существует I_0 , удовлетворяющие условиям:

1. I_0 – интервал на $\mathbb{R}$
2. $t_0 \in I_0$

$$3. \varphi[I_0] \subseteq D(h)$$

$$4. I_0 \cap Q_0 = \emptyset$$

$$\text{Тогда: } A|_{I_0} = C^1, \frac{\nabla}{dt} A(t) = \theta(T_{\varphi(t)} M)_{s_1}^{s_2} \text{ при } t \in D(A) \cap I_0$$

Обозначим:

$$\tilde{A}(t) = A(t, h),$$

$$\text{при } t \in D(A) \cap I_0$$

Тогда:

$$\tilde{A} \in C^1(D(A) \cap I_0; \mathbb{R}, \mathbb{R}^{(N, s_2 + s_1)}), \frac{d}{dt} \tilde{A}(t) + \Phi_{s_1}^{s_2}(t, h, \tilde{A}(t)) = 0$$

$$\text{при } t \in D(A) \cap I_0.$$

Далее рассмотрим немного другой случай.

Пусть $t \in Q_0$. Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $t_0 \in Q_0 \subseteq D(A) \subseteq D(\varphi)$, то $\varphi(t_0) \in M$.

Так как $\mu - C^2$ – гладкий координатный атлас на M (в дополнение к вышесказанному), то существует карта h , удовлетворяющая условию: $h \in Q(\varphi(t_0), \mu)$.

Так как φ – непрерывная функция в t_0 , $D(h)$ – окрестность $\varphi(t_0)$, Q_0 – локально конечное подмножество $D(A)$, $t_0 \in Q_0$, то существует I_0 , удовлетворяющие условиям:

$$1. I_0 - \text{интервал на } \mathbb{R}$$

$$2. t_0 \in I_0$$

$$3. \varphi[I_0] \subseteq D(h)$$

$$4. I_0 \cap Q_0 = \{t_0\}$$

$$\text{Тогда: } A|_{I_0 \setminus \{t_0\}} = C^1, \frac{\nabla}{dt} A(t) = \theta(T_{\varphi(t)} M)_{s_1}^{s_2} \text{ при } t \in (D(A) \cap I_0) \setminus \{t_0\}.$$

Обозначим:

$$\tilde{A}(t) = A(t, h),$$

$$\text{при } t \in D(A) \cap I_0$$

Тогда:

$$\tilde{A} \in C^1((D(A) \cap I_0) \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}, \mathbb{R}^{(N, s_2 + s_1)}), \frac{d}{dt} \tilde{A}(t) + \Phi_{s_1}^{s_2}(t, h, \tilde{A}(t)) = 0$$

$$\text{при } t \in (D(A) \cap I_0) \setminus \{t_0\}.$$

Очевидно:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d}{dt} \tilde{A}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(-\Phi_{s_1}^{s_2}(t, h, \tilde{A}(t)) \right) = -\Phi_{s_1}^{s_2}(t_0, h, \tilde{A}(t_0))$$

Тогда:

$$\tilde{A} \in C^1(D(A) \cap I_0; \mathbb{R}, \mathbb{R}^{(N, s_2 + s_1)}), \frac{d}{dt} \tilde{A}(t) + \Phi_{s_1}^{s_2}(t, h, \tilde{A}(t)) = 0$$

$$\text{при } t \in D(A) \cap I_0.$$

Итак:

$$1. A - C^0$$

$$2. \quad \frac{\nabla}{\partial t} A(t) = \theta \text{ при } t \in D(A)$$

Тогда A – абсолютно параллельное поле.

Что и требовалось доказать.

Задачи Коши для абсолютно параллельного поля. «Начальные» теоремы

Замечание.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M, \varphi - C^1$ – гладкая функция, $t_0 \in D(\varphi), s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$,
 $A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Рассмотрим следующую начальную задачу (Задача 1):

$$\begin{cases} A - \text{тензорное поле порядка } \binom{s_2}{s_1} \text{ на } \varphi \\ D(A) = D(\varphi) \\ A(t_0) = A_0 \\ A - \text{абсолютно параллельное поле} \end{cases}$$

Так или иначе у нас выйдет топологическая карта h . Таким образом, у нас не будет системы уравнений первого порядка.

Замечание.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M, \varphi$ – обобщенная C^1 – гладкая кривая, $t_0 \in D(\varphi)$,
 $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+, A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Рассмотрим следующую задачу (Задача 2):

$$\begin{cases} A - \text{тензорное поле порядка } \binom{s_2}{s_1} \text{ на } \varphi \\ D(A) = D(\varphi) \\ A(t_0) = A_0 \\ A - \text{обобщенное абсолютно параллельное поле} \end{cases}$$

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+, (M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$,
 $\dim((M, \mu)) = N, \Gamma - C^r, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow M, D(\varphi) - \text{промежуток}, \varphi - C^{r+1}$ – гладкая функция,
 $t_0 \in D(\varphi), s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+, A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Пусть $h_0 \in \mu, R(\varphi) \subseteq D(h_0)$.

Тогда существует функция A , удовлетворяющая условиям:

1. A – решение задачи 1.
2. $A - C^{r+1}$

Идея в том, что мы расписываем уравнение в координатах, далее подставляем карту h_0 . Рассматриваем систему уравнений для функции $\tilde{A}(t)$. Потом по классическим

теоремам находим это поле $\tilde{A}$. Далее восстанавливаем по функции $\tilde{A}$ тензорную функцию A .

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^0$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi) -$ промежуток, $\varphi - C^1$ – гладкая функция, $t_0 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Пусть $h_0 \in \mu$, $R(\varphi) \subseteq D(h_0)$.

Пусть $A_1, A_2 -$ решение задачи 1.

Тогда:

$$A_1 = A_2$$

Теорема о повышении гладкости

Утверждение.

Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^r$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi) -$ промежуток, $\varphi -$ кусочно C^{r+1} гладкая функция, $t_0 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Тогда существует функция A , удовлетворяющая условиям:

1. $A -$ решение задачи 2.
2. $A -$ обобщенное C^{r+1} – гладкое поле.

Доказывается это следующим образом: мы разрезаем на сегменты функцию φ , на каждом из которых, включая концы, функция является гладкости C^{r+1} . То есть каждый сегмент будет покрываться одной координатной картой. Мы получим непрерывное поле гладкое внутри этих сегментов, а на местах стыков будут сохраняться особые точки.

Глобальные теоремы единственности

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^0$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi) -$ промежуток, $\varphi -$ кусочно C^1 – гладкая функция, $t_0 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Пусть $A_1, A_2 -$ решение задачи 2.

Тогда:

$$A_1 = A_2$$

Утверждение.

Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^r$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi) -$ промежуток, $\varphi - C^{r+1}$ гладкая функция, $t_0 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Тогда существует функция A , удовлетворяющая условиям:

1. $A -$ решение задачи 1.

2. $A - C^{r+1}$ – гладкое поле.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^0$,
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi) -$ промежуток, $\varphi - C^1$ – гладкая функция, $t_0 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$,
 $A_0 \in (T_{\varphi(t_0)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Пусть A_1, A_2 – решение задачи 1.

Тогда:

$$A_1 = A_2$$

Параллельный перенос: определение и свойства

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^0$,
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi) -$ промежуток, $\varphi -$ кусочно C^1 – гладкая функция.

Пусть $t_1, t_2 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (T_{\varphi(t_1)}M)_{s_1}^{s_2}$.

Обозначим через $\tilde{A}$ – решение задачи 2 при замене:

$$t_0 \rightarrow t_1, A_0 \rightarrow A$$

Обозначим

$$P_{t_2, t_1}^\varphi(A) = \tilde{A}(t_2)$$

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^0$,
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi) -$ промежуток, $\varphi -$ кусочно C^1 – гладкая функция

1. Пусть $t_1, t_2 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A, B \in (T_{\varphi(t_1)}M)_{s_1}^{s_2}$

Тогда

$$P_{t_2, t_1}^\varphi(A + B) = P_{t_2, t_1}^\varphi(A) + P_{t_2, t_1}^\varphi(B)$$

2. Пусть $t_1, t_2 \in D(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (T_{\varphi(t_1)}M)_{s_1}^{s_2}$

Тогда

$$P_{t_2, t_1}^\varphi(\lambda A) = \lambda P_{t_2, t_1}^\varphi(A)$$

3. Пусть $t_1 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (T_{\varphi(t_1)}M)_{s_1}^{s_2}$

Тогда

$$P_{t_1, t_1}^\varphi(A) = A$$

4. Пусть $t_1, t_2, t_3 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (T_{\varphi(t_1)}M)_{s_1}^{s_2}$

Тогда

$$P_{t_3, t_2}^\varphi(P_{t_2, t_1}^\varphi(A)) = P_{t_3, t_1}^\varphi(A)$$

5. Пусть $t_1, t_2 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (T_{\varphi(t_1)}M)_{s_1}^{s_2}$

Тогда

$$P_{t_1, t_2}^{\varphi} \left(P_{t_2, t_1}^{\varphi} (A) \right) = A$$

Лекция 8. Свойства параллельного переноса тензора

Усиленный вариант теоремы о повышении гладкости

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$, $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$,
 $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^r$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi - C^{r+1}$ гладкая функция, $t_0 \in D(\varphi)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$,
 A – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ ,

Пусть: $D(A)$ – промежуток, A – обобщенное абсолютно параллельное поле.

Тогда: A – абсолютное параллельное поле, $A - C^{r+1}$.

Доказательство:

Пусть $t_0 \in D(A)$. Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $t_0 \in D(A) \subseteq D(\varphi)$, то $\varphi(t_0) \in M$. Так как μ – координатный атлас на M (в дополнение к вышесказанному), то существует карта h_0 , удовлетворяющая условию: $h_0 \in Q(\varphi(t_0), \mu)$.

Так как φ – непрерывная функция в t_0 , $D(h_0)$ – окрестность $\varphi(t_0)$, то существует I_0 , удовлетворяющие условиям:

1. I_0 – интервал на $\mathbb{R}$
2. $t_0 \in I_0$
3. $\varphi[I_0] \subseteq D(h_0)$

Согласно теореме 1 существует функция $\tilde{A}$, удовлетворяющая условиям:

1. $\tilde{A}$ – решение задачи 1 при замене: $\varphi \rightarrow \varphi|_{D(A) \cap I_0}, A_0 \rightarrow A(t_0)$
2. $\tilde{A}$ – поле гладкости C^{r+1}

Тогда $\tilde{A}$ – решение задачи 2 при замене: $\varphi \rightarrow \varphi|_{D(A) \cap I_0}, A_0 \rightarrow A(t_0)$

Очевидно, $A|_{D(A) \cap I_0}$ – решение задачи 2 при замене $\varphi \rightarrow \varphi|_{D(A) \cap I_0}, A_0 \rightarrow A(t_0)$.

Согласно теореме о единственности:

$$A|_{D(A) \cap I_0} = \tilde{A}$$

Тогда $A|_{D(A) \cap I_0}$ – абсолютно параллельное поле, $A|_{D(A) \cap I_0} - C^{r+1}$.

В силу произвольности выбора точки t_0 получаем, что

1. A – абсолютно параллельное поле
2. $A - C^{r+1}$

Свойства параллельного переноса

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^0$,
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $D(\varphi)$ – промежуток, $\varphi - C^1$ – гладкая функция.

Пусть $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^1$ тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ .

Пусть: $t_0 \in D(A)$, $h_0 \in Q(\varphi(t_0), \mu)$

Тогда:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(A(t, h_0) - P_{t, t_0}^\varphi(A(t_0))(h_0) \right) = \frac{\nabla}{dt} A(t, h) \Big|_{\substack{t=t_0 \\ h=h_0}}$$

Доказательство:

Обозначим через $\tilde{A}$ решение задачи 1 при замене:

$$A_0 \rightarrow A(t_0)$$

Тогда:

1. $\tilde{A}$ – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ
2. $D(\tilde{A}) = D(\varphi)$
3. $\tilde{A}(t_0) = A(t_0)$
4. $\tilde{A} \in C^1$
5. $\frac{\nabla}{dt} A(t) = \theta(T_{\varphi(t_0)} M)_{s_1}^{s_2}$ при $t \in D(\varphi)$

Так как φ – непрерывная функция в точке t_0 , $D(h_0)$ – окрестность $\varphi(t_0)$, то существует множество I_0 , удовлетворяющие условиям

1. I_0 – интервал на $\mathbb{R}$
2. $t_0 \in I_0$
3. $\varphi[I_0] \subseteq D(h_0)$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}(t) = \tilde{A}(t, h_0)$$

при $t \in D(\varphi) \cap I_0$.

Тогда $\tilde{\tilde{A}} \in C^1(D(\varphi) \cap I_0; \mathbb{R}, \mathbb{R}^{(N, s_2 + s_1)})$;

$$\frac{d}{dt} \tilde{\tilde{A}}(t) + \Phi_{s_1}^{s_2}(t, h, \tilde{\tilde{A}}(t)) = \theta_{\mathbb{R}^{(N, s_1 + s_2)}}$$

при $t \in D(\varphi) \cap I_0$.

$$\tilde{\tilde{A}}(t_0) = A(t_0, h_0)$$

Следовательно:

$$\tilde{\tilde{A}}(t) = A(t_0, h_0) - \int_{t_0}^t \Phi_{s_1}^{s_2}(\tilde{t}, h, \tilde{\tilde{A}}(\tilde{t})) d\tilde{t}$$

при $t \in D(\varphi) \cap I_0$.

Очевидно:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(A(t, h_0) - P_{t, t_0}^\varphi(A(t_0))(h_0) \right) &= \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in D(A) \cap I_0}} \frac{1}{t - t_0} \left(A(t, h_0) - \tilde{\tilde{A}}(t, h_0) \right) = \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in D(A) \cap I_0}} \frac{1}{t - t_0} \left(A(t, h_0) - \tilde{\tilde{A}}(t) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(A(t, h_0) - A(t_0, h_0) + \int_{t_0}^t \Phi_{s_1}^{s_2}(\tilde{t}, h, \tilde{A}(\tilde{t})) d\tilde{t} \right) = \\
 &= \frac{d}{dt} A(t, h_0)|_{t=t_0} + \Phi_{s_1}^{s_2}(t_0, h_0, \tilde{A}(t_0)) = \\
 &= \frac{d}{dt} A(t, h_0)|_{t=t_0} + \Phi_{s_1}^{s_2}(t_0, h_0, A(t_0, h_0)) = \frac{\nabla}{dt} A(t, h)|_{\substack{t=t_0 \\ h=h_0}}
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Геодезическая кривая

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M, D(\varphi)$ – промежуток, $\varphi - C^2$ – гладкая функция.

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{d}{dt} \varphi(t) = \theta(T_{\varphi(t)} M)_0^1$$

при $t \in D(\varphi)$.

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{d}{dt} h^j(\varphi(t)) = 0,$$

при $t \in D(\varphi), h \in Q(\varphi(t), \mu), j = \overline{1, N}$

$$\frac{d^2}{dt^2} h^j(\varphi(t)) + \Gamma_{k,m}^j(\varphi(t), h) \frac{d}{dt} h^k(\varphi(t)) \frac{d}{dt} h^m(\varphi(t)) = 0$$

С точки зрения физики можно понять, что в случае 2-го закона Ньютона, когда сила равна нулю, получится предыдущее уравнение. То есть **геодезическая кривая** – это мировая линия свободно движущейся материальной точки в поле силы инерции.

Коэффициенты аффинной связности. Выбор системы координат

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $p_0 \in M$.

Пусть: $h_0 \in Q(p_0, \mu), \Gamma(p_0, h_0) = \theta$

Тогда:

$$S(p_0) = \theta$$

Значит, если удастся обнулить компоненты связности, то кручения нет.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность, $p_0 \in M, h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$.

1. Пусть $\Gamma(p_0, h_2) = \theta$.

Тогда:

$$D_{k,m}^2(p, h_1) h_2^{j'}(p)|_{p=p_0} = \Gamma_{k,m}^j(p_0, h_1) D_j(p, h_1) h_2^{j'}(p)|_{p=p_0}$$

при $k, m, j' = \overline{1, N}$.

2. Пусть:

$$D_{k,m}^2(p, h_1)h_2^{j'}(p)|_{p=p_0} = \Gamma_{k,m}^j(p_0, h_1)D_j(p, h_1)h_2^{j'}(p)|_{p=p_0}$$

при $k, m, j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\Gamma(p_0, h_2) = \theta.$$

Доказательство:

1. Пусть $k, m, j', k', m' = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,m}^j(p_0, h_1) &= \Gamma_{\tilde{k}', \tilde{m}'}^{j'}(p_0, h_2) D_{j'}h_1^j(p)|_{p=p_0} D_k h_2^{\tilde{k}'}(p)|_{p=p_0} D_m h_2^{\tilde{m}'}(p)|_{p=p_0} + \\ &\quad + D_{k,m}^2 h_2^{j'}(p)|_{p=p_0} D_{j'} h_1^j \\ D_{k,m}^2 h_2^{j'} D_{j'} h_1^j &= \Gamma_{k,m}^j \\ D_{k,m}^2 h_2^{j'} &= \Gamma_{k,m}^j D_{j'} h_2^{j'}\end{aligned}$$

2. Пусть $k, m, j', k', m' = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,m}^j &= \Gamma_{\tilde{k}', \tilde{m}'}^{j'} D_{j'} h_1^j D_k h_2^{\tilde{k}'} D_m h_2^{\tilde{m}'} + D_{k,m}^2 h_2^{j'} D_{j'} h_1^j \\ \Gamma_{\tilde{k}', \tilde{m}'}^{j'} D_k h_2^{\tilde{k}'} D_m h_2^{\tilde{m}'} + D_{k,m}^2 h_2^{j'} &= \Gamma_{k,m}^j D_{j'} h_2^{j'} \\ \Gamma_{\tilde{k}', \tilde{m}'}^{j'} D_k h_2^{\tilde{k}'} D_m h_2^{\tilde{m}'} &= 0 \\ \Gamma_{\tilde{k}', \tilde{m}'}^{j'} &= 0\end{aligned}$$

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$, $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$,
 $\dim((M, \mu)) = N$, Γ – аффинная связность, $p_0 \in M$, $S(p_0) = \theta$.

Тогда существует функция h_0 , удовлетворяющая условиям:

1. $h_0 \in Q(p_0, MA(\mu, r))$
2. $\Gamma(p_0, h_0) = \theta$

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $(M, \mu) - C^r$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$,
 $\dim((M, \mu)) = N$, Γ – аффинная связность, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi - C^r$ – гладкая функция.
 $t_0 \in \text{int}(D(\varphi))$, $\frac{d}{dt} \varphi(t)|_{t=t_0} \neq 0$.

Тогда существуют объекты h_0, I_0 , удовлетворяющие условиям:

1. $h_0 \in Q(\varphi(t_0), MA(\mu, r))$
2. I_0 – интервал на множестве $\mathbb{R}$
3. $t_0 \in I_0$

4. $I_0 \subseteq D(\varphi)$
5. $\varphi[I_0] \subseteq D(h_0)$
6. $h_0(\varphi(t)) = (t, 0, \dots, 0)^T$
при $t \in I_0$.

Доказательство:

Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $t_0 \in \text{int}(D(\varphi)) \subseteq D(\varphi)$, то $\varphi(t_0) \in M$.

Так как μ – координатный атлас на M (в дополнение к вышесказанному), то существует карта h_1 , удовлетворяющая условию: $h_1 \in Q(\varphi(t_0), \mu)$.

Так как $\frac{d}{dt} \varphi(t)|_{t=t_0} \neq 0$, то $\frac{d}{dt} h_1(\varphi(t))|_{t=t_0} \neq \theta$

Тогда существует число k_0 , удовлетворяющее условиям:

1. $k_0 = \overline{1, N}$
2. $\frac{d}{dt} h_1^{k_0}(\varphi(t))|_{t=t_0} \neq 0$

Без ограничения общности можно считать, что $k_0 = 1$.

Так как φ – непрерывная функция в t_0 , $D(h_1)$ – окрестность $\varphi(t_0)$, $t_0 \in \text{int}(D(\varphi))$, то существует I_1 , удовлетворяющее условиям:

1. I_1 – интервал на $\mathbb{R}$
2. $t_0 \in I_1$
3. $\varphi[I_1] \subseteq D(h_1)$

Обозначим:

$$x_0 = h_1(\varphi(t_0)), y_0 = (t_0, 0, \dots, 0)^T, \bar{\varphi}(t) = h_1(\varphi(t)),$$

при $t \in I_1$.

Тогда:

$$\begin{aligned} x_0 &\in R(h_1), & y_0 &\in \mathbb{R}^N, & \bar{\varphi}(t) &\in R(h_1) \text{ при } t \in I_1 \\ \bar{\varphi} &- C^2, & \bar{\varphi}(t_0) &= x_0, & \frac{d}{dt} \bar{\varphi}^1(t)|_{t=t_0} &\neq 0. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1(y) &= \bar{\varphi}^1(y^1), \\ \bar{x}^2(y) &= \bar{\varphi}^2(y^1) + y^2 \\ \bar{x}^3(y) &= \bar{\varphi}^3(y^1) + y^3 \\ &\dots \\ \bar{x}^N(y) &= \bar{\varphi}^N(y^1) + y^N \end{aligned}$$

при $y^1 \in I_1, y^2, \dots, y^N \in \mathbb{R}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \bar{x} &\in C^r(I_1 \times \mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \bar{x}(t, 0, \dots, 0) &= \bar{\varphi}(t) \end{aligned}$$

при $t \in I_1$.

$$\bar{x}(y_0) = \bar{x}(t, 0, \dots, 0) = \bar{\varphi}(t) = x_0$$

Лекция 9. Коэффициенты аффинной связности

Теорема о равенстве нулю аффинной связности в определенной точке

Обозначим:

$$\begin{aligned}\bar{x}^1(y) &= \bar{\varphi}^1(y^1), \\ \bar{x}^2(y) &= \bar{\varphi}^2(y^1) + y^2 \\ \bar{x}^3(y) &= \bar{\varphi}^3(y^1) + y^3 \\ &\dots \\ \bar{x}^N(y) &= \bar{\varphi}^N(y^1) + y^N\end{aligned}$$

при $y^1 \in I_1, y^2, \dots, y^N \in \mathbb{R}$.

Тогда:

$$\begin{aligned}\bar{x} &\in C^r(I_1 \times \mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \bar{x}(t, 0, \dots, 0) &= \bar{\varphi}(t)\end{aligned}$$

при $t \in I_1$.

$$\begin{aligned}\bar{x}(y_0) &= \bar{x}(t, 0, \dots, 0) = \bar{\varphi}(t) = x_0 \\ \frac{D}{Dy} \bar{x}(y)|_{y=y_0} &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt} \bar{\varphi}^1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d}{dt} \bar{\varphi}^2(t) & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dt} \bar{\varphi}^N(t) & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{d}{dt} \bar{\varphi}^1(t)|_{t=t_0} \neq 0\end{aligned}$$

Так как $I_1 \times \mathbb{R}^{N-1} \in \tau_{\mathbb{R}^N}, I_1 \times \mathbb{R}^{N-1} \neq \emptyset$,

$\pi \in C^r(I_1 \times \mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$; $\frac{D}{Dy} \bar{x}(y)|_{y=y_0} \neq 0$, то существует множество ω_2 , удовлетворяющее условиям:

1. ω_2 – окрестность точки y_0
2. $\omega_2 \subseteq I_1 \times \mathbb{R}^{N-1}$
3. $\bar{x}|_{\omega_2} - C^r$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$.

Обозначим:

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x}|_{\omega_2}$$

Тогда $\bar{\bar{x}} - C^r$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$, $D(\bar{\bar{x}}) = \omega_2, y_0 \in \omega_2, \bar{\bar{x}}(y_0) = x_0$.

Обозначим:

$$\omega_1 = R(\bar{\bar{x}})$$

Тогда ω_1 – окрестность x_0 .

Обозначим:

$$\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}}^{-1}.$$

Тогда $\bar{\bar{y}} - C^r$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$, $D(\bar{\bar{y}}) = \omega_2, x_0 \in \omega_1, \bar{\bar{y}}(x_0) = y_0$.

Так как I_1 – интервал на $\mathbb{R}$, $t_0 \in I_1, y_0 = (t_0, 0, \dots, 0)^T$, ω_2 – окрестность y_0 , то существует множество I_2 , удовлетворяющее условиям:

1. I_2 – интервал на $\mathbb{R}$
2. $I_2 \subseteq I_1$
3. $t_0 \in I_2$
4. $(t_0, 0, \dots, 0)^T \in \omega_2$ при $t \in I_2$.

Тогда:

$$\bar{\bar{x}}(t, 0, \dots, 0) = \bar{\varphi}(t)$$

при $t \in I_2$.

Следовательно,

$$\bar{\bar{y}}(\bar{\varphi}(t)) = (t, 0, \dots, 0)^T$$

при $t \in I_2$.

Обозначим:

$$h_2(p) = \bar{\bar{y}}(h_1(p))$$

при $p \in D(h_1), h_1(p) \in \omega_1$.

Тогда:

$$h_2 \in Q(\varphi(t_0), MA(\mu, r)), \\ \varphi[I_2] \subseteq D(h_2), \quad h_2(\varphi(t)) = (t, 0, \dots, 0)^T$$

при $t \in I_2$.

Утверждение.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}, r \geq 2, (M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$, $\dim((M, \mu)) = N$, Γ – аффинная связность гладкости C^r , $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi - C^{r+2}$ – гладкая функция, $t_0 \in \text{int}(D(\varphi)), \frac{d}{dt}\varphi(t)|_{t=t_0} \neq 0, S(\varphi(t)) = 0$,
при $t \in D(\varphi)$.

Тогда существуют объекты I_0, h_0 , удовлетворяющие условиям:

1. $h_0 \in Q(\varphi(t_0), MA(\mu, r))$
2. I_0 – интервал на $\mathbb{R}$
3. $t_0 \in I_0$
4. $I_0 \subseteq D(\varphi)$
5. $\varphi[I_0] \subseteq D(h_0)$
6. $\Gamma(\varphi(t), h_0) = \theta_{\mathbb{R}(N,3)}$ при $t \in I_0$

Доказательство:

Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M, \varphi - C^{r+2}$ – гладкая функция, $t_0 \in \text{int}(D(\varphi)) \subseteq D(\varphi)$, $\frac{d}{dt}\varphi(t)|_{t=t_0} \neq 0$, то существуют объекты I_1, h_1 , удовлетворяющие условиям:

1. $h_1 \in Q(\varphi(t_0), MA(\mu, r+2))$
2. I_1 – интервал на $\mathbb{R}$

3. $t_0 \in I_1$
4. $I_1 \subseteq D(\varphi)$
5. $\varphi[I_1] \subseteq D(h_1)$
6. $h_1(\varphi(t)) = (t, 0, \dots, 0)^T$ при $t \in I_1$.

Обозначим:

$$x_0 = h_1(\varphi(t_0)), \quad \bar{\varphi}(t) = h_1(\varphi(t))$$

при $t \in I_1$, $\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(h_1^{-1}(x), h_1)$ при $x \in R(h_1)$.

Тогда:

$$x_0 = (t_0, 0, \dots, 0)^T, \bar{\varphi}(t) \in C^{r+2}(I_1; \mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$$

$$\bar{\varphi}(t) = (t, 0, \dots, 0)$$

при $t \in I_1$, $\bar{\Gamma} \in C^r(R(h_1); \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{(N,3)})$.

Пусть:

$$y_0 \in \mathbb{R}^N, \quad A_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \det(A_0) \neq 0$$

Рассмотрим следующую вспомогательную начальную задачу 1:

$$\begin{cases} \bar{A} \in C^1(I_1; \mathbb{R}, \mathbb{R}^{N \times N}) \\ \bar{A}(t_0) = A_0 \\ \frac{d}{dt} \bar{A}_k^{j'}(t) = \bar{\Gamma}_{1,k}^j(t, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'} \end{cases}$$

при $t \in I_1, k, j' = \overline{1, N}$.

Пусть $\bar{A}$ – решение задачи 1. Тогда $\bar{A} \in C^{r+1}(I_1; \mathbb{R}, \mathbb{R}^{N \times N})$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \bar{y}^{j'}(x) &= \bar{y}_0^{j'} + \int_{x_0^1}^{x^1} \bar{A}_1^{j'}(\tilde{x}^1) d\tilde{x}^1 + \sum_{\tilde{k}=\overline{2, N}} \bar{A}_{\tilde{k}}^{j'}(x^1) x^{\tilde{k}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\tilde{k}, \tilde{m}=\overline{2, N}} \Gamma_{\tilde{k}, \tilde{m}}^{j'}(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) x^{\tilde{k}} x^{\tilde{m}} \end{aligned}$$

при $x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N \in \mathbb{R}, j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\bar{y} \in C^r(I_1 \times \mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

$$\bar{y}(x_0) = y_0$$

Пусть:

$$x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N \in \mathbb{R}, j' = \overline{1, N}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{A}_1^{j'}(x^1) + \sum_{\tilde{k}=\overline{2, N}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\bar{A}_{\tilde{k}}^{j'}(x^1)) x^{\tilde{k}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\tilde{k}, \tilde{m}=\overline{2, N}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\Gamma_{\tilde{k}, \tilde{m}}^{j'}(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) \right) x^{\tilde{k}} x^{\tilde{m}}.$$

Пусть $x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N \in \mathbb{R}, k, m = \overline{2, N}, j' = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) &= \bar{A}_k^{j'}(x^1) + \frac{1}{2} \sum_{\tilde{m}=\overline{2, N}} \Gamma_{k, \tilde{m}}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) x^{\tilde{m}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\tilde{k}=\overline{2, N}} \Gamma_{\tilde{k}, k}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) x^{\tilde{k}} = \bar{A}_k^{j'}(x^1) + \sum_{\tilde{m}=\overline{2, N}} \Gamma_{k, \tilde{m}}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) x^{\tilde{m}}. \end{aligned}$$

Пусть $x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N = 0, k, m = \overline{1, N}, j' = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{A}_k^{j'}(x^1)$$

Пусть $x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N \in \mathbb{R}, j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \bar{y}^{j'}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \bar{A}_k^{j'}(x^1) + \sum_{\tilde{k}=\overline{2, N}} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \left(\bar{A}_{\tilde{k}}^{j'}(x^1) \right) x^{\tilde{k}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\tilde{k}, \tilde{m}=\overline{2, N}} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \left(\Gamma_{\tilde{k}, \tilde{m}}^{j'}(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) \right) x^{\tilde{k}} x^{\tilde{m}}. \end{aligned}$$

Пусть $x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N \in \mathbb{R}, k, m = \overline{2, N}, j' = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \bar{A}_k^{j'}(x^1) + \sum_{\tilde{m}=\overline{2, N}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\bar{\Gamma}_{k, \tilde{m}}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) \right) x^{\tilde{m}} = \\ &= \bar{\Gamma}_{1, k}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) + \sum_{\tilde{m}=\overline{2, N}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\bar{\Gamma}_{k, \tilde{m}}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) \right) x^{\tilde{m}} \end{aligned}$$

Пусть $x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N \in \mathbb{R}, k, m = \overline{2, N}, j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{\Gamma}_{m, k}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) = \bar{\Gamma}_{k, m}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1)$$

Пусть $x^1 \in I_1, x^2, \dots, x^N = 0, k, m = \overline{1, N}, j' = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{\Gamma}_{k, m}^j(x^1, 0, \dots, 0) \bar{A}_j^{j'}(x^1) = \bar{\Gamma}_{k, m}^j(x^1, 0, \dots, 0) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{y}^{j'}(x)$$

Так как $I_1 \times \mathbb{R}^{N-1} \in \tau_{\mathbb{R}^N}, I_1 \times \mathbb{R}^{N-1} \neq \emptyset, \quad \bar{y} \in C^r(I_1 \times \mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N);$
 $\frac{D}{Dx} \bar{y}(x)|_{x=x_0} = \det(\bar{A}(x_0^1)) \neq 0$, то существует множество ω_1 , удовлетворяющие условиям:

1. ω_1 – окрестность точки x_0
2. $\omega_1 \subseteq I_1 \times \mathbb{R}^{N-1}$
3. $\bar{y}|_{\omega_1} - C^r$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$.

Обозначим,

$$\bar{\bar{y}} = \bar{y}|_{\omega_1}$$

Тогда: $\bar{\bar{y}} - C^r$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$, $D(\bar{\bar{y}}) = \omega_1, x_0 \in \omega_1, y_0 = \bar{\bar{y}}(x_0)$.

Так как I_1 – интервал на $\mathbb{R}$, $t_0 \in I_1, x_0 = (t_0, 0, \dots, 0)^T$, ω_1 – окрестность x_0 , то существует I_2 , удовлетворяющие условием:

1. I_2 – интервал на $\mathbb{R}$
2. $t_0 \in I_2$
3. $I_2 \subseteq I_1$
4. $(t, 0, \dots, 0)^T \in \omega_1$ при $t \in I_2$

Тогда:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} \bar{\bar{y}}^{j'}(x) = \bar{\Gamma}_{m,k}^j(x^1, 0, \dots, 0) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{\bar{y}}^{j'}(x)$$

при $x^1 \in I_2, x^2, \dots, x^N = 0, k, m = \overline{1, N}, j' = \overline{1, N}$

Обозначим:

$$h_2(p) = \bar{\bar{y}}(h_1(p))$$

при $p \in D(h_1), h_1(p) \in \omega_1$.

Тогда:

$$h_2 \in Q(\varphi(t_0), MA(\mu, r))$$

$$\varphi[I_2] \subseteq D(h_2)$$

$$D_{k,m}^2(p, h_1) h_2^{j'}(p) \Big|_{p=\varphi(t)} = \Gamma_{m,k}^j(\varphi(t), h_1) D_j(p, h_1) h_2^{j'}(p) \Big|_{p=\varphi(t)}$$

при $t \in I_2, k, m, j' = \overline{1, N}$.

Следовательно,

$$\Gamma(\varphi(t), h_2) = \theta,$$

при $t \in I_2$.

Обнуление происходит на мировой линии, то есть значение всегда равно нулю в одной точке на ней.

Тензор кривизны

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^3$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

Γ – аффинная связность гладкости C^1 .

Обозначим:

$$R_{k,m,n}^j(p, h) = D_k(p, h)\Gamma_{m,n}^j(p, h) + \Gamma_{k,l}^j(p, h)\Gamma_{m,n}^l(p, h) - \\ - \left(D_m(p, h)\Gamma_{k,n}^j(p, h) + \Gamma_{m,l}^j(p, h)\Gamma_{k,n}^l(p, h) \right)$$

при $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, n, j = \overline{1, N}$.

Лекция 10. Тензор кривизны: свойства и закон преобразования

Тензор кривизны и его свойства

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^3$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 Γ – аффинная связность гладкости C^1 .

Обозначим:

$$R_{k,m,n,\cdot}^j(p, h) = D_k(p, h)\Gamma_{m,n}^j(p, h) + \Gamma_{k,l}^j(p, h)\Gamma_{m,n}^l(p, h) - \\ - \left(D_m(p, h)\Gamma_{k,n}^j(p, h) + \Gamma_{m,l}^j(p, h)\Gamma_{k,n}^l(p, h) \right)$$

при $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, n, j = \overline{1, N}$.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^3$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 $\Gamma - C^1$ гладкая аффинная связность, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^2$ гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в (M, μ) .

Тогда:

$$\nabla_k(p, h)\nabla_m(p, h)A_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(p, h) - \nabla_m(p, h)\nabla_k(p, h)A_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(p, h) = \\ = \sum_{\beta=1, s_2} R_{k,m,n,\cdot}^j(p, h) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\beta-1} n j_{\beta+1} \dots j_{s_2}} - \sum_{\alpha=1, s_1} R_{k,m,i_\alpha,\cdot}^n(p, h) A_{i_1 \dots i_{\alpha-1} n i_{\alpha+1} \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} - \\ - S_{k,m}^n(p, h)\nabla_n(p, h)A_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(p, h)$$

при $p \in D(A), h \in Q(p, \mu), i_1, \dots, i_{s_1}, j_1, \dots, j_{s_2}, k, m = \overline{1, N}$.

Доказательство для частного случая

Доказательство:

Пусть $s_1, s_2 = 1$. Пусть $p \in D(A), h \in Q(p, \mu), i, j, k, m = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_m A_i^j &= D_k \nabla_m A_i^j + \Gamma_{k,l}^j \nabla_m A_i^l - \Gamma_{k,i}^l \nabla_m A_l^j - \Gamma_{k,m}^l \nabla_l A_i^j = \\ &= D_k (D_m A_i^j + \Gamma_{m,n}^j A_i^n - \Gamma_{m,i}^n A_n^j) + \Gamma_{k,l}^j (D_m A_i^l + \Gamma_{m,n}^l A_i^n - \Gamma_{m,i}^n A_n^l) - \\ &\quad - \Gamma_{k,i}^l (D_m A_l^j + \Gamma_{m,n}^j A_l^n - \Gamma_{m,l}^n A_n^j) - \Gamma_{k,m}^n \nabla_n A_i^j = \\ &= D_k D_m A_i^j + D_k (\Gamma_{m,n}^j) A_i^n + \Gamma_{m,n}^j D_k A_i^n - D_k (\Gamma_{m,i}^n) A_n^j - \Gamma_{m,i}^n D_k A_n^j + \\ &\quad + \Gamma_{k,l}^j D_m A_i^l + \Gamma_{k,l}^j \Gamma_{m,n}^l A_i^n - \Gamma_{k,l}^j \Gamma_{m,i}^n A_n^l - \Gamma_{k,i}^l D_m A_l^j - \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{m,n}^j A_l^n + \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{m,l}^n A_n^j - \Gamma_{k,m}^n \nabla_n A_i^j = \\ &= D_k D_m A_i^j + \Gamma_{m,n}^j D_k A_i^n - \Gamma_{m,i}^n D_k A_n^j + \Gamma_{k,l}^j D_m A_i^l - \Gamma_{k,i}^l D_m A_l^j + D_k (\Gamma_{m,n}^j) A_i^n - D_k (\Gamma_{m,i}^n) A_n^j + \\ &\quad + \Gamma_{k,l}^j \Gamma_{m,n}^l A_i^n - \Gamma_{k,l}^j \Gamma_{m,i}^n A_n^l - \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{m,n}^j A_l^n + \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{m,l}^n A_n^j - \Gamma_{k,m}^n \nabla_n A_i^j; \\ \nabla_m \nabla_k A_i^j &= D_m D_k A_i^j + \Gamma_{k,n}^j D_m A_i^n - \Gamma_{k,i}^n D_m A_n^j + \Gamma_{m,l}^j D_k A_i^l - \Gamma_{m,i}^l D_k A_l^j + D_m (\Gamma_{k,n}^j) A_i^n - \\ &\quad - D_m (\Gamma_{k,i}^n) A_n^j + \Gamma_{m,l}^j \Gamma_{k,n}^l A_i^n - \Gamma_{m,l}^j \Gamma_{k,i}^n A_n^l - \Gamma_{m,i}^l \Gamma_{k,n}^j A_l^n + \Gamma_{m,i}^l \Gamma_{k,l}^n A_n^j - \Gamma_{m,k}^n \nabla_n A_i^j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_m A_i^j - \nabla_m \nabla_k A_i^j &= (D_k \Gamma_{m,n}^j + \Gamma_{k,l}^j \Gamma_{m,n}^l - D_m \Gamma_{k,n}^j - \Gamma_{m,l}^j \Gamma_{k,n}^l) A_i^n - \\ &- (D_k \Gamma_{m,i}^n + \Gamma_{k,l}^n \Gamma_{m,i}^l - D_m \Gamma_{k,i}^n - \Gamma_{m,l}^n \Gamma_{k,i}^l) A_n^j - (\Gamma_{k,m}^n - \Gamma_{m,k}^n) \nabla_n A_i^j = \\ &= R_{k,m,n}^j A_i^n - R_{k,m,i}^n A_n^j - S_{k,m}^n \nabla_n A_i^j \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Коммутатор ковариантной производной по параметру сингулярной поверхности

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^3$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 $\Gamma - C^1$ гладкая аффинная связность, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\varphi: \mathbb{R}^{N_1} \rightarrow M$, $\varphi - C^2$ – гладкая функция,
 $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A - C^2$ гладкое тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ на φ .

Тогда:

$$\begin{aligned} &\frac{\nabla}{\partial u^\alpha} \frac{\nabla}{\partial u^\beta} A_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(u, h) - \frac{\nabla}{\partial u^\beta} \frac{\nabla}{\partial u^\alpha} A_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(u, h) = \\ &= \sum_{\bar{\beta}=1, s_2} R_{k,m,n}^{j_{\bar{\beta}}}(\varphi(u), h) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} h^k(\varphi(u)) \frac{\partial}{\partial u^\beta} h^m(\varphi(u)) A_{i_1 \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{\bar{\beta}-1} n j_{\bar{\beta}+1} \dots j_{s_2}} - \\ &- \sum_{\bar{\alpha}=1, s_1} R_{k,m,i_{\bar{\alpha}}}^n(\varphi(u), h) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} h^k(\varphi(u)) \frac{\partial}{\partial u^\beta} h^m(\varphi(u)) A_{i_1 \dots i_{\bar{\alpha}-1} n i_{\bar{\alpha}+1} \dots i_{s_1}}^{j_1 \dots j_{s_2}} \end{aligned}$$

при условии, что $u \in D(A)$, $h \in Q(\varphi(u), \mu)$, $i_1, \dots, i_{s_1}, j_1, \dots, j_{s_2} = \overline{1, N}$, $\alpha, \beta = \overline{1, N_1}$.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^3$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,
 $\Gamma - C^1$ гладкая аффинная связность.

Тогда:

$$R(p) \in (T_p M)_3^1$$

при $p \in M$.

Доказательство:

Пусть $p_0 \in M$. Очевидно, что $R(p_0)$ – геометрический объект степени 4 в точке p_0 . Пусть $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$.

Пусть $k', m', n', j' = \overline{1, N}$.

Пусть A – тензорное поле порядка $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в (M, μ) , причем $D(A) = D(h_2)$,

$$A^{\tilde{n}'}(p, h_2) = \delta_{n'}^{\tilde{n}'}$$

при $p \in D(h_2)$, $\tilde{n}' = \overline{1, N}$.

Тогда $A - C^2$ гладкое тензорное поле,

$$\begin{aligned} A^n(p, h_1) &= A^{\tilde{n}'}(p, h_2) D_{\tilde{n}'}(p, h_2) h_1^n(p) = \delta_{n'}^{\tilde{n}'} D_{\tilde{n}'}(p, h_2) h_1^n(p) = \\ &= D_{n'}(p, h_2) h_1^n(p) \end{aligned}$$

при $p \in D(h_1) \cap D(h_2)$, $n = \overline{1, N}$.

Следовательно:

$$\begin{aligned}
 & R_{k,m,n,.}^j(p_0, h_1) D_j(p, h_1) h_2^{j'}(p) \Big|_{p=p_0} D_{k'}(p, h_2) h_1^k(p) \Big|_{p=p_0} D_{m'}(p, h_2) h_1^m(p) \Big|_{p=p_0} \times \\
 & \times D_{n'}(p, h_2) h_1^n(p) \Big|_{p=p_0} = (R_{k,m,n,.}^j A^n) D_j h_2^{j'} D_{k'} h_1^k D_{m'} h_1^m = \\
 & = (\nabla_k \nabla_m A^j - \nabla_m \nabla_k A^j + S_{k,m}^n \nabla_n A^j) D_j h_2^{j'} D_{k'} h_1^k D_{m'} h_1^m = \\
 & = \nabla_{k'} \nabla_{m'} A^{j'} - \nabla_{m'} \nabla_{k'} A^{j'} + S_{k',m'}^{\tilde{n}'} \nabla_{\tilde{n}'} A^{j'} = R_{k',m',\tilde{n}',.}^{j'} A^{\tilde{n}'} = \\
 & = R_{k',m',\tilde{n}',.}^{j'} \delta_{n'}^{\tilde{n}'} = R_{k',m',\tilde{n}',.}^{j'}
 \end{aligned}$$

Теорема Фробениуса (подготовка к формулировке)

Замечание.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1+N_2}}$, $D(F) \neq \emptyset$,
 $F - C^0$ гладкая функция.

Пусть $\omega \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1}}$, $\omega \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующие уравнения I:

$$\begin{cases} \bar{y} \in C^1(\omega; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}) \\ (x, \bar{y}(x)) \in D(F) \text{ при } x \in \omega \\ \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = F_k^{j'}(x, \bar{y}(x)) \text{ при } x \in \omega \end{cases}$$

Утверждение.

Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1+N_2}}$, $D(F) \neq \emptyset$,
 $r = \overline{0, +\infty}$, $F - C^r$ гладкое отображение.

Пусть $\omega \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1}}$, $\omega \neq \emptyset$, $\bar{y}$ – решение уравнений I.

Тогда $\bar{y} - C^{r+1}$.

Замечание.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1+N_2}}$, $D(F) \neq \emptyset$,
 $F - C^1$ гладкая функция.

Пусть $\omega \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1}}$, $\omega \neq \emptyset$, $\bar{y}$ – решение уравнений I.

Тогда $\bar{y} - C^2$.

Пусть $x \in \omega$, $m = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$.

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) = F_m^{j'}(x, \bar{y}(x))$$

Пусть $x \in \omega$, $m = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$

Тогда:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} F_m^{j'}(x, \bar{y}(x)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} F_m^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} + \frac{\partial}{\partial y^{k'}} F_m^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{y}^{k'}(x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} F_m^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} + F_k^{k'}(x, \bar{y}(x)) \frac{\partial}{\partial y^{k'}} F_m^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} ;\end{aligned}$$

Запишем производные в другом порядке:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^m} F_k^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} + F_m^m(x, \bar{y}(x)) \frac{\partial}{\partial y^{m'}} F_k^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} ; \\ 0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} F_m^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} + F_k^{k'}(x, \bar{y}(x)) \frac{\partial}{\partial y^{k'}} F_m^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} - \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial x^m} F_k^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} + F_m^m(x, \bar{y}(x)) \frac{\partial}{\partial y^{m'}} F_k^{j'}(x, y) \Big|_{y=\bar{y}(x)} \right).\end{aligned}$$

Такого рода заключения не являются достаточными для данного утверждения. Далее будет сформулирован общий вариант теоремы Фробениуса, но сначала необходимо поставить задачу Коши.

Замечание.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1+N_2}}$, $D(F) \neq \emptyset$,
 $F - C^0$ гладкая функция, $x_0 \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{N_2}$, $(x_0, y_0) \in D(F)$.

Пусть ω – окрестность точки x_0 . Рассмотрим начальную задачу 2:

$$\begin{cases} \bar{y} \in C^1(\omega; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}) \\ (x, \bar{y}(x)) \in D(F) \text{ при } x \in \omega \\ \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = F_k^{j'}(x, \bar{y}(x)) \text{ при } x \in \omega \\ \bar{y}(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Лекция 11. Теорема о локально тривиальной аффинной связности

Теорема Фробениуса (формулировка)

Теорема Фробениуса:

Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_1+N_2}}$, $D(F) \neq \emptyset$,
 $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $F - C^r$ гладкая функция, $x_0 \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{N_2}$, $(x_0, y_0) \in D(F)$.

Пусть:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F_m^{j'}(x, y) + F_k^{k'}(x, y) \frac{\partial}{\partial x^{k'}} F_m^{j'}(x, y) - \left(\frac{\partial}{\partial x^m} F_k^{j'}(x, y) + F_m^{m'}(x, y) \frac{\partial}{\partial x^{m'}} F_k^{j'}(x, y) \right) = 0$$

при $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$, $(x, y) \in D(F)$, $k, m, j' = \overline{1, N}$.

Тогда существует объекты $\omega, \bar{y}$, удовлетворяющие условиям:

1. ω – окрестность точки x_0 ;
2. $\bar{y}$ – решение задачи 2
3. $\bar{y} - C^{r+1}$

Локально тривиальная аффинная связность

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,

Γ – аффинная связность.

Пусть: $\mu_0 \subseteq MA(\mu, 2)$, $\cup_{h \in \mu_0} D(h) = M$.

Будем говорить, что Γ – локально тривиальная аффинная связность относительно атласа μ_0 , если:

$$\forall p_0 \in M \exists h \in Q(p_0, \mu_0) \exists \omega (\omega - \text{окрестн. } p_0) : \forall p \in D(h) \cap \omega (\Gamma(p, h) = \theta).$$

Локальная тривиальная связность не означает, что мы можем выбрать одну карту, накрывающую все пространство, в которой компоненты связности равны нулю. Мы берем точку и говорим, что можно указать окрестность, в которой компоненты аффинной связности будут равны нулю.

Необходимые условия локальной тривиальности

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^3$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,

$\Gamma - C^1$ гладкая аффинная связность.

Пусть: Γ – локально тривиальная аффинная связность относительно $MA(\mu, 3)$.

Тогда:

$$\forall p \in M (S(p) = \theta), \quad \forall p \in M (R(p) = \theta).$$

Замечание.

Пусть $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$,

$\Gamma - C^0$ гладкая аффинная связность, $h \in \mu$.

Пусть: $\omega \subseteq R(h), \omega \in \tau_{\mathbb{R}^N}, \omega \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующую систему уравнений (Задача 3):

$$\begin{cases} \bar{y} \in C^1(\omega; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \bar{A} \in C^1(\omega; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N \times N}) \\ \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{A}_k^{j'}(x) \text{ при } x \in \omega \\ \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{A}_m^{j'}(x) = \bar{\Gamma}_{k,m}^j(x) \bar{A}_j^{j'}(x) \text{ при } x \in \omega \end{cases}$$

где $\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(h^{-1}(x), h)$ при $x \in R(h)$.

Замечание.

Пусть $(M, \mu) - C^3$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

$\Gamma - C^1$ гладкая аффинная связность, $h \in \mu$.

Пусть: $\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(h^{-1}(x), h)$ при $x \in R(h), \omega \in \tau_{\mathbb{R}^N}, \omega \neq \emptyset, \omega \subseteq R(h)$,

$\bar{y}, \bar{A}$ – решения задачи 3.

Тогда $\bar{y}, \bar{A} - C^2$.

Пусть: $x \in \omega, k, m, j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \bar{y}^{j'}(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{A}_m^{j'}(x) = \\ &= \bar{\Gamma}_{k,m}^j(x) \bar{A}_j^{j'}(x); \\ \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) &= \bar{\Gamma}_{m,k}^j(x) \bar{A}_j^{j'}(x) \\ \bar{S}_{k,m}^j(x) \bar{A}_j^{j'}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Пусть $x \in \omega, k, m, n, j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m} \bar{A}_n^{j'}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \bar{A}_n^{j'}(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\bar{\Gamma}_{m,n}^j(x) \bar{A}_j^{j'}(x) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\bar{\Gamma}_{m,n}^j(x) \right) \bar{A}_j^{j'}(x) + \bar{\Gamma}_{m,n}^j(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{A}_j^{j'}(x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\bar{\Gamma}_{m,n}^j(x) \right) \bar{A}_j^{j'}(x) + \bar{\Gamma}_{m,n}^j(x) \bar{\Gamma}_{k,j}^l(x) \bar{A}_l^{j'}(x) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\Gamma}_{m,n}^j(x) + \bar{\Gamma}_{k,j}^l(x) \bar{\Gamma}_{m,n}^j(x) \right) \bar{A}_l^{j'}(x); \\ \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^k} \bar{A}_n^{j'}(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \bar{\Gamma}_{k,n}^j(x) + \bar{\Gamma}_{m,l}^j(x) \bar{\Gamma}_{k,n}^l(x) \right) \bar{A}_l^{j'}(x); \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{k,m,n}^j(x) \bar{A}_l^{j'}(x) = 0.$$

Замечание.

Пусть $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $\Gamma - C^0$ гладкая аффинная связность, $p_0 \in M, h \in Q(p_0, \mu)$.

Пусть $\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(h^{-1}(x), h)$ при $x \in R(h), x_0 = h(p_0), y_0 \in \mathbb{R}^N, A_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}$.
 $\omega \subseteq R(h), \omega$ – окрестность точки x_0 .

Рассмотрим следующую задачу 4:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y} \in C^1(\omega; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \bar{A} \in C^1(\omega; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N \times N}) \\ \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{A}_k^{j'}(x) \text{ при } x \in \omega \\ \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{A}_m^{j'}(x) = \bar{\Gamma}_{k,m}^j(x) \bar{A}_j^{j'}(x) \text{ при } x \in \omega \\ \bar{y}(x_0) = y_0 \\ \bar{A}(x_0) = A_0 \end{array} \right.$$

Замечание.

Пусть $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $\Gamma - C^0$ гладкая аффинная связность, $h \in \mu$.

Пусть: $\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(h^{-1}(x), h)$ при $x \in R(h), \omega \subseteq R(h), \omega \in \tau_{\mathbb{R}^N}, \omega \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующую систему уравнений 5:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y} \in C^2(\omega; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{\Gamma}_{k,m}^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{y}^{j'}(x) \text{ при } x \in \omega \end{array} \right.$$

Замечание.

Пусть $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $\Gamma - C^0$ гладкая аффинная связность, $p_0 \in M, h \in Q(p_0, \mu)$.

Пусть: $\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(h^{-1}(x), h)$ при $x \in R(h), x_0 = h(p_0), y_0 \in \mathbb{R}^N, A_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}$,
 $\omega \subseteq R(h), \omega$ – окрестность точки x_0 .

Рассмотрим следующую задачу 6:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y} \in C^2(\omega; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^k} \bar{y}^{j'}(x) = \bar{\Gamma}_{k,m}^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{y}^{j'}(x) \text{ при } x \in \omega \\ \bar{y}(x_0) = y_0 \\ D_x \bar{y}(x)|_{x=x_0} = A_0 \end{array} \right.$$

Утверждение.

Пусть: $r \in \bar{\mathbb{N}}$, $(M, \mu) - C^{r+2}$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$,
 $\dim((M, \mu)) = N$, $\Gamma - C^r$ гладкая аффинная связность.

Пусть:

$$\forall p \in M (S(p) = \theta), \quad \forall p \in M (R(p) = \theta)$$

Тогда Γ – локально тривиальная аффинная связность относительно $MA(\mu, r+2)$

Доказательство теоремы о необходимых условиях локальной тривиальности

Доказательство:

Пусть $p_0 \in M$. Так как $\mu - C^{r+2}$ гладкий координатный атлас на M , то существует функция h_1 , удовлетворяющая условию:

$$h_1 \in Q(p_0, \mu).$$

Обозначим:

$$\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(h_1^{-1}(x), h_1) \text{ при } x \in R(h_1)$$

$$\bar{S}(x) = S(h_1^{-1}(x), h_1) \text{ при } x \in R(h_1)$$

$$\bar{R}(x) = R(h_1^{-1}(x), h_1) \text{ при } x \in R(h_1)$$

$$x_0 = h_1(p_0).$$

Тогда:

$$\bar{\Gamma} \in C^2(R(h_1); \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{(N,3)})$$

$$\bar{S}(x) = \theta \text{ при } x \in R(h_1)$$

$$\bar{R}(x) = \theta \text{ при } x \in R(h_1)$$

$$x_0 \in R(h_1).$$

Выберем объекты y_0, A_0 , удовлетворяющие условиям:

1. $y_0 \in \mathbb{R}^N$
2. $A_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \det(A_0) \neq 0$.

Пусть: $x \in R(h_1), y \in \mathbb{R}^N, A \in \mathbb{R}^{N \times N}, k, m, n, j' = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\bar{S}_{k,m}^j(x) \bar{A}_j^{j'} = 0;$$

$$\bar{R}_{k,m,n}^j(x) \bar{A}_j^{j'} = 0.$$

Согласно теореме Фробениуса существуют объекты $\omega, \bar{y}, \bar{A}$, удовлетворяющие условиям:

1. $\omega \subseteq R(h_1)$, ω – окрестность точки x_0 .
2. $\bar{y}, \bar{A}$ – решение задачи 4
3. $\bar{y}, \bar{A} - C^{r+1}$

Тогда:

1. $\bar{y}$ – решение задачи 6
2. $\bar{y} - C^{r+2}$

Так как $\omega \in \tau_{\mathbb{R}^N}$, $\omega \neq \emptyset$, $\bar{y} \in C^{r+2}(\omega; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $x_0 \in \omega$,
 $\frac{D}{Dx} \bar{y}(x)_{x=x_0} = \det(Dx \bar{y}(x)_{x=x_0}) = \det(A_0) \neq 0$, то (в силу теоремы о
 диффеоморфизме) существует ω_1 , удовлетворяющие условиям $\omega_1 \subseteq \omega$,
 ω_1 – окрестность точки x_0 , $\bar{y}|_{\omega_1} \in C^{r+2}$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$.

Обозначим:

$$\bar{\bar{y}} = \bar{y}|_{\omega_1}$$

Тогда:

1. $\bar{\bar{y}} \in C^{r+2}$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$.
2. $\bar{\bar{y}}$ – решение задачи б при замене $\omega \rightarrow \omega_1$.

Обозначим:

$$h_2(p) = \bar{\bar{y}}(h_1(p))$$

при $p \in D(h_1)$, $h_1(p) \in \omega_1$.

Тогда:

1. $h_2 \in Q(p_0, MA(\mu, r+2))$
2. $D_{k,m}^2(p, h_1) h_2^{j'}(p) = \Gamma_{k,m}^j(p, h_1) D_j(p, h_1) h_2^{j'}(p)$ при $p \in D(h_2)$, $k, m, j' = \overline{1, N}$

Следовательно:

$$h_2 \in Q(p_0, MA(\mu, r+2))$$

$$\Gamma(p, h_2) = \theta \text{ при } p \in D(h_2)$$

Физические следствия

Прежде всего поговорим о принципе эквивалентности. Не существует такого эксперимента, который позволяет определить, есть ли чистое поле сил инерции, или существует только сумма сил инерции и сил гравитации. Здесь имеется в виду локальный результат наблюдения, то есть для любой точки p_0 существует такая окрестность ω этой точки, внутри которой не существует такого эксперимента.

Самое главное свойство у поля сил инерций заключается в том, что при выборе системы отчета его можно «уничтожить». Тогда такое же свойство должно быть и у поля сил гравитации. Если учесть, что силы инерции и гравитации должны описываться аффинной связностью, то получается, что принцип эквивалентности будет означать локально тривиальную аффинную связность. А по ранее доказанному видно, что в этом случае происходит обнуление тензора кручения и тензора кривизны, то есть в мире нет ни кручения, ни кривизны. Но это противоречит идеям Эйнштейна. Дело в том, что принцип эквивалентности выполняется приближенно. Точно он выполняется для полей, у которых кривизна тождественно равна нулю – это однородные поля.

Псевдориманова метрика. Введение: матричная алгебра

Замечание.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$

Обозначим:

$$\tilde{\epsilon}_{k_1, \dots, k_N} = \det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N})$$

при $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$.

Тогда:

1. $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{K}^{(N, N)}$
2. $\tilde{\varepsilon}$ – антисимметричный

Пусть: $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$, $k_1, \dots, k_N$ – попарно различные числа.

Тогда:

$$\tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_N).$$

Пусть: $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$, $k_1, \dots, k_N$ – не являются попарно различными числами.

$$\tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = 0.$$

Пусть $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$

Тогда:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A_1, \dots, A_N) = \det(A_1^{k_1} I_{k_1}, \dots, A_N^{k_N} I_{k_N}) = \\ &= A_1^{k_1}, \dots, A_N^{k_N} \det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N}) = \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} A_1^{k_1}, \dots, A_N^{k_N} \end{aligned}$$

Лекция 12. Скалярное и псевдоскалярное произведения

Продолжение: матричная алгебра

Утверждение.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}, N \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}^{N \times N}$.

Тогда:

$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A) \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N}$$

при $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$.

Доказательство:

Пусть $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$, $k_1, \dots, k_N$ – не являются попарно различными числами.

Тогда:

$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = 0$$

$$\det(A) \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = 0 \rightarrow$$

$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A) \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N}$$

Пусть $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$, $k_1, \dots, k_N$ – попарно различные числа.

Тогда:

$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_N) \det(A_1, \dots, A_N) = \det(A) \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_N)$$

$$\det(A) \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = \det(A) \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_N)$$

$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A) \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N}$$

Что и требовалось доказать.

Утверждение.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}, N \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}^{N \times N}, \det(A) \neq 0$.

Тогда:

$$(A^{-1})_k^m = \frac{1}{\det(A)} \tilde{\varepsilon}_{i_1, \dots, i_{m-1}, k, i_{m+1}, \dots, i_N} A_1^{i_1}, \dots, A_{m-1}^{i_{m-1}} A_{m+1}^{i_{m+1}}, \dots, A_N^{i_N}$$

при $k, m = \overline{1, N}$.

Доказательство:

Обозначим:

$$B_k^m = \frac{1}{\det(A)} \tilde{\varepsilon}_{i_1, \dots, i_{m-1}, k, i_{m+1}, \dots, i_N} A_1^{i_1}, \dots, A_{m-1}^{i_{m-1}} A_{m+1}^{i_{m+1}}, \dots, A_N^{i_N}$$

при $k, m = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$B \in \mathbb{K}^{N \times N}.$$

Пусть $k, m = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$B_n^m A_k^n = \frac{1}{\det(A)} \tilde{\varepsilon}_{i_1, \dots, i_{m-1}, n, i_{m+1}, \dots, i_N} A_1^{i_1}, \dots, A_{m-1}^{i_{m-1}} A_{m+1}^{i_{m+1}}, \dots, A_N^{i_N} \times A_k^n =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \tilde{\varepsilon}_{i_1, \dots, i_N} A_1^{i_1}, \dots, A_{m-1}^{i_{m-1}} A_k^m A_{m+1}^{i_{m+1}}, \dots, A_N^{i_N} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \det(A_1, \dots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \dots, A_N) = \delta_k^m$$

Следовательно,

$$BA = I$$

Так как

$$A \in \mathbb{K}^{N \times N}, \det(A) \neq 0, B \in \mathbb{K}^{N \times N}, BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$$

Ориентация базисов. Знак базиса

Замечание.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

Пусть e, e' – базисы L . Будем говорить, что e, e' – **одинаково ориентированные базисы** ($e \uparrow\uparrow e'$), если $\det(L(e, e')) > 0$.

Пусть e, e' – базисы L . Будем говорить, что e, e' – **противоположно ориентированные базисы** ($e \uparrow\downarrow e'$), если $\det(L(e, e')) < 0$.

Пусть e, e' – базисы L . Тогда:

$$((e \uparrow\uparrow e') \wedge \neg(e \uparrow\downarrow e')) \vee (\neg(e \uparrow\uparrow e') \wedge (e \uparrow\downarrow e'))$$

Пусть e – базис L .

Тогда $(e \uparrow\uparrow e)$.

Пусть e, e' – базисы L , $(e \uparrow\uparrow e')$, тогда $(e' \uparrow\uparrow e)$.

Пусть e, e', e'' – базисы L , $(e \uparrow\uparrow e')$ и $(e' \uparrow\uparrow e'')$.

Тогда $(e \uparrow\uparrow e'')$.

Пусть e, e', e'' – базисы L , $(e \uparrow\downarrow e')$ и $(e' \uparrow\downarrow e'')$

Тогда $(e \uparrow\uparrow e'')$

Пусть e – базис L . Тогда существует объект e' , удовлетворяющий условиям:

1. e' – базис L ,
2. $(e \uparrow\downarrow e')$.

Замечание.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

Обозначим, через B множество всех базисов пространства L .

Пусть:

1. $B_r \subseteq B$;
2. $B_r \neq \emptyset$;
3. $\forall e \in B_r \forall e' \in B_r (e \uparrow\uparrow e')$;
4. $\forall e \in B_r \forall e' \in (B \setminus B_r) (e \uparrow\downarrow e')$.

Обозначим $B_l = B \setminus B_r$.

Определение.

Пусть $e \in B_r$. Обозначим:

$$\operatorname{sgn}(e) = 1$$

Пусть $e \in B_l$. Обозначим:

$$\operatorname{sgn}(e) = -1$$

Параметры Ламэ. Псевдотензор. Псевдоскалярное произведение

Замечание.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, H – линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

Пусть e – базис H . Обозначим:

$$H_k(e) = \|e_k\|$$

при $k = \overline{1, N}$.

Пусть e – базис H . Обозначим:

$$\tilde{e}_k = \frac{1}{H_k(e)} e_k$$

при $k = \overline{1, N}$.

Тогда $\tilde{e}$ – нормированный базис H .

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TH)_{s_1}^{s_2}$, e – базис H . Обозначим,

$$\tilde{A}(e) = A(\tilde{e}).$$

Тогда:

$$\tilde{A}_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(e) = \frac{H_{j_1}(e), \dots, H_{j_{s_2}}(e)}{H_{i_1}(e), \dots, H_{i_{s_1}}(e)} A_{i_1, \dots, i_{s_1}}^{j_1, \dots, j_{s_2}}(e)$$

при $i_1, \dots, i_{s_1}, j_1, \dots, j_{s_2} = \overline{1, N}$.

Определение.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, L – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

Пусть: F – эрмитово полуторалинейная форма в пространстве L ,
 $\forall e$ (e – базис в L) ($\det([F](e)) \neq 0$).

Будем говорить, что (L, F) – линейное псевдоевклидово пространство над $\mathbb{K}$.

Тензор Леви-Чивиты

Определение.

Пусть H – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

Пусть H – ориентированное пространство, H – псевдоевклидово пространство.

Обозначим:

$$\varepsilon_{k_1, \dots, k_N} = \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \tilde{e}_{k_1, \dots, k_N}$$

при e – базис в H , а $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$.

Утверждение.

Пусть: H – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

Пусть H – ориентированное пространство, H – псевдоевклидово пространство.

Тогда:

$$\varepsilon \in (\Omega H)_N^0$$

Доказательство:

Очевидно, ε – геометрический объект степени N в пространстве H ,

ε – антисимметричный объект.

Пусть e, e' – базисы H , $k'_1, \dots, k'_N = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_1, \dots, k_N}(e) \alpha_{k'_1}^{k_1}(e, e') \dots \alpha_{k'_N}^{k_N}(e, e') &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} \alpha_{k'_1}^{k_1}(e, e') \dots \alpha_{k'_N}^{k_N}(e, e') = \\ &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \det \left(\alpha_{k'_1}(e, e'), \dots, \alpha_{k'_N}(e, e') \right) = \\ &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \det(\alpha(e, e')) \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = \\ &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \operatorname{sgn}(\det(\alpha(e, e'))) |\det \alpha(e, e')| \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = \\ &= \operatorname{sgn}(e') \sqrt{|\det(\alpha(e, e')^T g(e) \alpha(e, e'))|} \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = \\ &= \operatorname{sgn}(e') \sqrt{|\det g(e')|} \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} = \varepsilon_{k'_1, \dots, k'_N}(e') \end{aligned}$$

Итак, $\varepsilon \in (\Omega H)_N^0$.

Смешанное произведение. Векторное произведение

Замечание.

Пусть: H – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 3$,

$\dim(H) = N$, H – ориентированное пространство, H – псевдоевклидово пространство.

Пусть $x_1, \dots, x_N \in H$.

Обозначим:

$$(x_1, \dots, x_N) = \varepsilon_{k_1, \dots, k_N}(e) [x_1]^{k_1}(e) \dots [x_N]^{k_N}(e)$$

при e – базис H .

Пусть: e – базис H , $x_1 \in H$, $\tilde{x}_1 = [x_1](e)$, $\dots$, $x_N \in H$, $\tilde{x}_N = [x_N](e)$

Тогда:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_N) &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} \tilde{x}_1^{k_1} \dots \tilde{x}_N^{k_N} = \\ &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^1 & \dots & \tilde{x}_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_1^N & \dots & \tilde{x}_N^N \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Замечание.

Пусть: H – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}, N \geq 3$,
 $\dim(H) = N$, H – ориентированное пространство, H – псевдоевклидово пространство.

Пусть $x_1, \dots, x_N \in H$.

Обозначим:

$$[x_1, \dots, x_{N-1}] = \varepsilon_{k_1, \dots, k_{N-1}}^j(e) [x_1]^{k_1}(e) \dots [x_{N-1}]^{k_{N-1}}(e) e_j$$

при e – базис H .

Пусть: e – базис H , $x_1 \in H, \tilde{x}_1 = [x_1](e), \dots, x_{N-1} \in H, \tilde{x}_{N-1} = [x_{N-1}](e)$

Тогда:

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{N-1}] &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_{N-1}}^i(e) g^{ij}(e) \tilde{x}_1^{k_1} \dots \tilde{x}_{N-1}^{k_{N-1}} e_j = \\ &= (-1)^{N-1} \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \tilde{\varepsilon}_{i, k_1, \dots, k_{N-1}}(g^{ij} e_j) \tilde{x}_1^{k_1} \dots \tilde{x}_{N-1}^{k_{N-1}} = \\ &= (-1)^{N-1} \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \begin{bmatrix} g^{1j} e_j & \dots & \tilde{x}_{N-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{Nj} e_j & \dots & \tilde{x}_{N-1}^N \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Утверждение.

Пусть: H – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

Пусть H – ориентированное пространство, H – псевдоевклидово пространство.

Тогда:

$$\varepsilon^{m_1, \dots, m_N}(e) = \frac{\operatorname{sgn}(e) \operatorname{sgn}(\det g(e))}{\sqrt{|\det g(e)|}} \tilde{\varepsilon}_{m_1, \dots, m_N}$$

при e – базис $H, m_1, \dots, m_N = \overline{1, N}$.

Доказательство:

Пусть e – базис $H, m_1, \dots, m_N = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{m_1, \dots, m_N}(e) &= \varepsilon_{k_1, \dots, k_N}(e) g^{k_1 m_1}(e) \dots g^{k_N m_N}(e) = \\ &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \tilde{\varepsilon}_{k_1, \dots, k_N} g^{k_1 m_1}(e) \dots g^{k_N m_N}(e) = \\ &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \det((g(e)^{-1})_{m_1} \dots (g(e)^{-1})_{m_N}) = \\ &= \operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|} \det(g(e)^{-1}) \tilde{\varepsilon}_{m_1, \dots, m_N} = \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(e) \sqrt{|\det g(e)|}}{\det(g(e))} \tilde{\varepsilon}_{m_1, \dots, m_N} = \frac{\operatorname{sgn}(e) \operatorname{sgn}(\det g(e))}{\sqrt{|\det g(e)|}} \tilde{\varepsilon}_{m_1, \dots, m_N} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Согласование координатных карт

Определение.

Пусть: M – множество, $M \neq \emptyset, r \in \overline{\mathbb{N}}, h_1, h_2$ – координатные карты на M .

Пусть $D(h_1) \cap D(h_2) = \emptyset$.

Будем говорить, что h_1, h_2 – **положительно C^r согласованы**, если
 $\dim(h_1) = \dim(h_2)$.

Пусть $D(h_1) \cap D(h_2) \neq \emptyset$.

Будем говорить, что h_1, h_2 – **положительно C^r согласованы**, если

$$W_{h_2, h_1} \in \tau_{\mathbb{R}} \dim(h_1), \varphi_{h_2, h_1} \in C^r(W_{h_2, h_1}; \mathbb{R}^{\dim(h_1)}, \mathbb{R}^{\dim(h_2)})$$

$$W_{h_1, h_2} \in \tau_{\mathbb{R}} \dim(h_2), \varphi_{h_1, h_2} \in C^r(W_{h_1, h_2}; \mathbb{R}^{\dim(h_2)}, \mathbb{R}^{\dim(h_1)})$$

$$\forall x \in W_{h_2, h_1} \left(\frac{D}{D} \varphi_{h_2, h_1} > 0 \right).$$

Ориентированное квазимногообразие. Ориентированное многообразие

Определение.

Пусть: $r \in \bar{\mathbb{N}}, M$ – множество, $M \neq \emptyset$, μ – C^r гладкий координатный атлас на множестве M , μ_+ – положительный C^r гладкий координатный атлас на множестве M , причем $\mu_+ \subseteq MA(\mu, r)$.

Будем говорить, что (M, μ, μ_+) – **ориентированное C^r гладкое квазимногообразие**.

Лекция 13. Риманова аффинная связность

Ориентированное многообразие

Определение.

Пусть: $r \in \overline{\mathbb{N}}, M$ – множество, $M \neq \emptyset$, μ – максимальный C^r гладкий координатный атлас на множестве M , μ_+ – максимальный положительный C^r гладкий координатный атлас на множестве M , причем $\mu_+ \subseteq \mu$.

Будем говорить, что (M, μ, μ_+) – **ориентированное C^r гладкое многообразие**.

Определение.

Пусть: $(M, \mu) – C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$, $p_0 \in M, h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$.

Обозначим:

$$\frac{Dh_2}{Dh_1}(p_0) = \det \left(\left\{ D_k(p, h_1) h_2^{k'}(p) \right\}_{p=p_0}^{k'=\overline{1, N}}_{k=\overline{1, N}} \right)$$

Определение.

Пусть: $(M, \mu, \mu_+) – C^1$ – гладкое ориентированное квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu, \mu_+)) = N, p_0 \in M, h_0 \in Q(p_0, \mu)$.

Обозначим:

$$\text{sgn}(p_0, h_0) = \text{sgn} \left(\frac{Dh_0}{Dh}(p_0) \right)$$

при $h \in Q(p_0, \mu_+)$.

Псевдориманова метрика

Определение.

Пусть: $(M, \mu) – C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

Будем говорить, что **g – псевдориманова метрика в (M, μ)** , если:

1. g – тензорное поле порядка $\binom{0}{2}$ в (M, μ) ;
2. $D(g) = M$;
3. g – симметричное поле;
4. $\forall p \in M \forall h \in Q(p, \mu)$

$$(\det(g(p, h)) \neq 0)$$

5. $\forall p_1 \in M \forall p_2 \in M$

$$(sgn(g(p_1)) = sgn(g(p_2)))$$

Риманова метрика

Определение.

Пусть: $(M, \mu) – C^1$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

Будем говорить, что **g – риманова метрика в (M, μ)** , если:

1. g – тензорное поле порядка $\binom{0}{2}$ в (M, μ) ;
2. $D(g) = M$;
3. g – симметричное поле;
4. $\forall p \in M (g(p) > 0)$.

Аффинная связность, согласованная с метрикой g

Определение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $g - C^1$ гладкая псевдориманова метрика в (M, μ) .

Будем говорить, что Γ – аффинная связность, согласованная с метрикой g , если:

1. Γ – аффинная связность в (M, μ) ;
2. $\forall p \in M (S(p) = \theta)$;
3. g – абсолютно параллельное тензорное поле.

Риманова аффинная связность: свойства, существование

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $g - C^1$ гладкая псевдориманова метрика в (M, μ) , Γ – аффинная связность в (M, μ) ,
 g – абсолютно параллельное тензорное поле.

Тогда:

$$D_k(p, h)g_{m,n}(p, h) = \Gamma_{m,k,n}(p, h) + \Gamma_{n,k,m}(p, h)$$

при $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, n = \overline{1, N}$.

Доказательство:

Пусть: $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, n = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \nabla_k(p, h)g_{m,n}(p, h) &= 0 \\ D_k g_{mn} - \Gamma_{k,m}^l g_{l,n} - \Gamma_{k,n}^l g_{m,l} &= 0 \\ D_k g_{mn} &= g_{n,l} \Gamma_{k,m}^l + g_{m,l} \Gamma_{k,n}^l; \\ D_k g_{mn} &= \Gamma_{m,k,n} + \Gamma_{n,k,m} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $g - C^1$ гладкая псевдориманова метрика в (M, μ) , Γ – аффинная связность,
согласованная с g в (M, μ) .

Тогда:

$$1. \quad \Gamma_{k,m,n}(p, h) = \frac{1}{2} (D_m g_{k,n} + D_n g_{k,m} - D_k g_{m,n})$$

при $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, n = \overline{1, N}$.

$$2. \quad \Gamma_{m,n}^j(p, h) = g^{j,k}(p, h) \frac{1}{2} (D_m g_{k,n} + D_n g_{k,m} - D_k g_{m,n})$$

при $p \in M, h \in Q(p, \mu), j, m, n = \overline{1, N}$.

Доказательство:

Пусть: $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, n = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$D_m g_{k,n} = \Gamma_{k,m,n} + \Gamma_{n,m,k};$$

$$D_n g_{k,m} = \Gamma_{k,n,m} + \Gamma_{m,n,k};$$

$$D_k g_{m,n} = \Gamma_{m,k,n} + \Gamma_{n,k,m}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D_m g_{k,n} + D_n g_{k,m} - D_k g_{m,n}) &= \frac{1}{2} (\Gamma_{k,m,n} + \Gamma_{n,m,k} + \Gamma_{k,n,m} + \Gamma_{m,n,k} - \Gamma_{m,k,n} - \Gamma_{n,k,m}) = \\ &= \Gamma_{k,m,n} \end{aligned}$$

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,

$g - C^1$ гладкая псевдориманова метрика в (M, μ) .

Обозначим:

$$\Gamma_{m,n}^j(p, h) = g^{j,k}(p, h) \frac{1}{2} (D_m g_{k,n} + D_n g_{k,m} - D_k g_{m,n})$$

при $p \in M, h \in Q(p, \mu), j, m, n = \overline{1, N}$.

Тогда Γ – аффинная связность, согласованная с g .

Очевидно: Γ – поле геометрических объектов степени 3 в пространстве (M, μ) ,
причем $D(\Gamma) = M$.

Пусть: $p \in M, h_1, h_2 \in Q(p, \mu), j', m', n' = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned} \Gamma_{m',n'}^{j'} &= g^{j',k'} \frac{1}{2} (D_{m'} g_{k',n'} + D_{n'} g_{k',m'} - D_{k'} g_{m',n'}) = \\ &= g^{j',k'} \frac{1}{2} (D_{m'} (g_{\bar{k}n} D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{n'} h_1^n) + D_{n'} (g_{\bar{k}m} D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{m'} h_1^m) - D_{k'} (g_{mn} D_{m'} h_1^m D_{n'} h_1^n)) = \\ &= g^{j',k'} \frac{1}{2} (D_{m'} (g_{\bar{k}n}) D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{n'} h_1^n + g_{\bar{k}n} D_{m',k'}^2 h_1^{\bar{k}} D_{n'} h_1^n + g_{\bar{k}n} D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{m',n'}^2 h_1^n + \\ &\quad + D_{n'} (g_{\bar{k}m}) D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{m'} h_1^m + g_{\bar{k}m} D_{n',k'}^2 h_1^{\bar{k}} D_{m'} h_1^m + g_{\bar{k}m} D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{n',m'}^2 h_1^m - \\ &\quad - D_{k'} (g_{mn}) D_{m'} h_1^m D_{n'} h_1^n - g_{mn} D_{k',m'}^2 h_1^m D_{n'} h_1^n - g_{mn} D_{m'} h_1^m D_{k',n'}^2 h_1^n) = \\ &= g^{j,k} D_j h_2^{j'} D_k h_2^{k'} \frac{1}{2} (D_{m'} h_1^m D_m (g_{\bar{k}n}) D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{n'} h_1^n + g_{\bar{k}n} D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{m',n'}^2 h_1^n + \\ &\quad + D_{n'} h_1^n D_n (g_{\bar{k}m}) D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{m'} h_1^m + g_{\bar{k}m} D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_{n',m'}^2 h_1^m - D_{k'} h_1^{\bar{k}} D_k (g_{mn}) D_{m'} h_1^m D_{n'} h_1^n) = \\ &= g^{j,k} D_j h_2^{j'} \frac{1}{2} (D_m (g_{kn}) D_{m'} h_1^m + g_{kn} D_{m',n'}^2 h_1^n + D_n (g_{km}) D_{n'} h_1^n D_{m'} h_1^m + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +g_{km}D_{m',n}^2 h_1^m - D_k(g_{mn})D_{m'} h_1^m D_n h_1^n = \\
 & = g^{j,k} \frac{1}{2} (D_m(g_{kn}) + D_n(g_{km}) - D_k(g_{mn})) D_j h_2^{j'} D_{m'} h_1^m D_n h_1^n + \\
 & + D_{m',n}^2 h_1^j D_j h_2^{j'} = \Gamma_{m,n}^j D_j h_2^{j'} D_{m'} h_1^m D_n h_1^n + D_{m',n}^2 h_1^j D_j h_2^{j'}.
 \end{aligned}$$

Итак, Γ – аффинная связность в (M, μ) .

Очевидно, $\forall p \in M (S(p) = \theta)$.

Пусть: $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, n = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \nabla_k g_{m,n} &= D_k g_{mn} - \Gamma_{k,m}^l g_{l,n} - \Gamma_{k,n}^l g_{m,l} = \\
 &= D_k g_{mn} - \Gamma_{n,k,m} - \Gamma_{m,k,n} = D_k g_{mn} - \frac{1}{2} (D_k g_{mn} + D_m g_{nk} - D_n g_{km}) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (D_k g_{mn} + D_n g_{mk} - D_m g_{kn}) = 0
 \end{aligned}$$

Итак, Γ – аффинная связность, согласованная с метрикой g .

Формула для свертки компонент аффинной связности

Утверждение.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $g - C^1$ гладкая псевдориманова метрика в (M, μ) .

1. $\Gamma_{k,m}^k(p, h) = \frac{1}{2} g^{ki} D_m g_{ik}$ при $p \in M, h \in Q(p, \mu), m = \overline{1, N}$
2. $\Gamma_{k,m}^k(p, h) = \frac{1}{2 \det(g(p, h))} D_m \det(g(p, h))$ $p \in M, h \in Q(p, \mu), m = \overline{1, N}$
3. $\Gamma_{k,m}^k(p, h) = \frac{1}{2 |\det g|} D_m |\det g|$
4. $\Gamma_{k,m}^k(p, h) = \frac{1}{2} D_m \ln |\det g|$
5. $\Gamma_{k,m}^k(p, h) = D_m \ln \sqrt{|\det g|}$
6. $\Gamma_{k,m}^k(p, h) = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} D_m \sqrt{|\det g|}$

Лекция 14. Связь ковариантной производной с grad, rot и div

Доказательство формулы для свертки компонент аффинной связности

Доказательство:

1. Пусть: $p \in M, h \in Q(p, \mu), k, m, j = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\Gamma_{k,m}^j = g^{ij} \frac{1}{2} (D_k g_{im} + D_m g_{ik} - D_i g_{km});$$

$$\Gamma_{k,m}^k = g^{ki} \frac{1}{2} (D_k g_{im} + D_m g_{ik} - D_i g_{km}) = g^{ki} \frac{1}{2} D_m g_{ik}$$

2. Пусть: $p \in M, h \in Q(p, \mu), m = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,m}^k &= g^{ki} \frac{1}{2} D_m g_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{k,i=\overline{1,N}} (g(p, h)^{-1})^{kj} D_m g_{ik} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,i=\overline{1,N}} \left(\frac{1}{\det(g(p, h))} \sum_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_{k+1}, \dots, n_N = \overline{1, N}} \tilde{\varepsilon}_{n_1 \dots n_{k-1}, i, n_{k+1}, \dots, n_N} \times \right. \\ &\quad \left. \times g_{n_{1,1}} \dots g_{n_{k-1}, k-1}, g_{n_{k+1}, k+1}, \dots, g_{n_{N,N}} \right) D_m g_{ik} = \\ &= \frac{1}{2 \det(g)} \sum_{k=\overline{1,N}} \sum_{n_1, \dots, n_N = \overline{1, N}} \tilde{\varepsilon}_{n_1 \dots n_{k-1}, i, n_{k+1}, \dots, n_N} g_{n_{1,1}} \dots g_{n_{k-1}, k-1} D_m (g_{n_k k}) g_{n_{k+1}, k+1}, \dots, g_{n_{N,N}} \\ &= \frac{1}{2 \det(g)} \sum_{n_1, \dots, n_N = \overline{1, N}} D_m (\tilde{\varepsilon}_{n_1 \dots n_N} g_{n_{1,1}} \dots g_{n_{N,N}}) = \\ &= \frac{1}{2 \det(g)} D_m \det(g) \end{aligned}$$

Связь ковариантной производной с операторами grad, rot, div

Замечание.

Пусть: $(M, \mu) - C^2$ – гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}, \dim((M, \mu)) = N$,
 $g - C^1$ гладкая псевдориманова метрика в (M, μ) .

Пусть $A : M \rightarrow \mathbb{R}, A - C^1$.

Обозначим:

$$\text{grad}(A)(p) = g^{mk} \nabla_k(A) e_m$$

при $p \in M, h \in Q(p, \mu)$.

Пусть: $p \in M, h \in Q(p, \mu)$

Тогда:

$$\text{grad}(A)(p) = g^{mk} D_k(A) e_m$$

Пусть: g – риманова метрика, $p \in M, h \in Q(p, \mu)$, $e(p, h)$ – ортогональный базис.

Тогда:

$$\begin{aligned} \text{grad}(A)(p) &= \sum_{m=1, \bar{N}} \frac{1}{(H_m)^2} D_m(A) e_m = \\ &= \sum_{m=1, \bar{N}} \frac{1}{H_m} D_m(A) \tilde{e}_m \end{aligned}$$

Замечание.

Пусть: (M, μ, μ_+) – C^2 гладкая ориентированное квазимногообразие,
 $\dim(M, \mu, \mu_+) = 3$, g – C^1 гладкая псевдориманова метрика, A – C^1 гладкое векторное поле в (M, μ, μ_+) .

Обозначим:

$$\text{rot}(A)(p) = \varepsilon_{k_1, k_2, \cdot}^{m_3}(p, h) g^{k_1 m_1} \nabla_{m_1} (A^{k_2}) e_{m_3}$$

при $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$.

Пусть: $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \text{rot}(A)(p) &= \varepsilon_{\cdot, k_2, \cdot}^{m_1, \cdot, m_3} \nabla_{m_1} (A^{k_2}) e_{m_3} = \\ &= \varepsilon^{m_1, m_2, m_3} \nabla_{m_1} (A_{m_2}) e_{m_3} = \varepsilon^{m_1, m_2, m_3} (D_{m_1} A_{m_2} - \Gamma_{m_1, m_2}^l A_l) e_{m_3} = \\ &= \varepsilon^{m_1, m_2, m_3} D_{m_1} A_{m_2} e_{m_3} = \varepsilon^{m_3, m_1, m_2} e_{m_3} D_{m_1} A_{m_2} = \\ &= \sum_{m_3, m_1, m_2 = \overline{1, 3}} \text{sgn}(p, h) \text{sgn}(\det(g)) \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \tilde{\varepsilon}_{m_3, m_1, m_2} e_{m_3} D_{m_1} A_{m_2} = \\ &= \frac{\text{sgn}(p, h) \text{sgn}(\det(g))}{\sqrt{|\det g|}} \begin{vmatrix} e_1 & D_1 & A_1 \\ e_2 & D_2 & A_2 \\ e_3 & D_3 & A_3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\text{sgn}(p, h) \text{sgn}(\det(g))}{\sqrt{|\det g|}} \begin{vmatrix} e_1 & D_1 & g_{1k} A^k \\ e_2 & D_2 & g_{2k} A^k \\ e_3 & D_3 & g_{3k} A^k \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Пусть: g – риманова метрика, $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$, $e(p, h)$ – ортогональный базис.

Тогда:

$$\text{rot}(A)(p) = \frac{\text{sgn}(p, h)}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} e_1 & D_1 & (H_1)^2 A^1 \\ e_2 & D_2 & (H_2)^2 A^2 \\ e_3 & D_3 & (H_3)^2 A^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{sgn}(p, h) \begin{vmatrix} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} e_1 & D_1 & (H_1)^2 A^1 \\ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} e_2 & D_2 & (H_2)^2 A^2 \\ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} e_3 & D_3 & (H_3)^2 A^3 \end{vmatrix} = \\
 &= \operatorname{sgn}(p, h) \begin{vmatrix} \frac{1}{H_2 H_3} \tilde{e}_1 & D_1 & H_1 \tilde{A}^1 \\ \frac{1}{H_1 H_3} \tilde{e}_2 & D_2 & H_2 \tilde{A}^2 \\ \frac{1}{H_1 H_2} \tilde{e}_3 & D_3 & H_3 \tilde{A}^3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Замечание.

Пусть: (M, μ) - C^2 гладкая ориентированное квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$,
 $\dim(M, \mu, \mu_+) = N$, g - C^1 гладкая псевдориманова метрика, A - C^1 гладкое векторное поле в (M, μ) .

Обозначим:

$$\operatorname{div}(A)(p) = \nabla_k A^k$$

при $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$.

Пусть: $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$, $k, j = \overline{1, N}$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \nabla_k A^j &= D_k A^j + \Gamma_{km}^j A^m; \\
 \operatorname{div}(A)(p) &= \nabla_k A^k = D_k A^k + \Gamma_{km}^k A^m = \\
 &= D_k A^k + \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} D_m \left(\sqrt{|\det g|} \right) A^m = \\
 &= D_k A^k + \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} D_k \left(\sqrt{|\det g|} \right) A^k = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} D_k \left(\sqrt{|\det g|} A^k \right)
 \end{aligned}$$

Пусть: g - риманова метрика, $p \in D(A)$, $h \in Q(p, \mu)$, $e(p, h)$ - ортогональный базис.

Тогда:

$$\operatorname{div}(A)(p) = \frac{1}{H_1 \dots H_N} D_k (H_1 \dots H_N A^k) = \frac{1}{H_1 \dots H_N} D_k \left(\frac{H_1 \dots H_N}{H_k} \tilde{A}^k \right)$$



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ