ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

БАДЬИН
АНДРЕЙ ВАЛЕНТИНОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КАМИНСКОГО АЛЕКСЕЯ СЕРГЕЕВИЧА

Содержание

Лекция 1

Используемые обозначения

В данном курсе мы в основном будем пользоваться стандартными правилами математической логики. Большинство наших утверждений будут иметь вид:

$$A(B),$$

где A — это условие (или предпосылка), B — следствие, которое мы утверждаем справедливым при данных условиях. Иногда, при очень длинном условии между ними будет ставиться двоеточие. В условии будут часто использоваться конструкции, типа:

$$\forall A(B),$$

где вместо квантора $\forall$ может быть поставлен любой другой квантор, A — это переменная, на которую действует этот квантор, а B — это условия, которые налагаются при этом на переменную A. Например, выражение $\forall x(x > 2)(x > 1)$ следует читать, как «для любого x такого, что x больше, чем 2, справедливо утверждать, что x больше, чем 1».

Так же, для краткости написания, перед длинными выкладками будут использоваться выражения по типу «очевидно, что:» или «очевидно:», которые обозначают, что нетрудно сделать каждый отдельный переход в выкладке, поэтому эти переходы не будут подробно объясняться, но данные выражения, конечно, не имеют ввиду, что очевиден конечный результат выкладки.

При записи суммирования, будет использоваться следующая конструкция:

$$\sum_{A} B,$$

которая обозначает, что суммируются все те слагаемые B, которые удовлетворяют условию A.

При записи условий на целые числа мы будем пользоваться конструкцией $i = \overline{1, N}$, которая обозначает, что число i может принимать целые значения от 1 до N включительно (также эта запись зачастую будет являться условием суммирования).

Кроме того, везде в данном курсе при записи формул будет использоваться правило суммирования Эйнштейна, согласно которому, если один и тот же индекс повторяется в одном и том же слагаемом, на месте верхних индексов и нижних индексов, то по этому индексу ведётся суммирование (иногда мы будем напоминать об этом правиле, а иногда записывать его в явном виде), например, если индекс i пробегает при сумме значения от 1 до 5 включительно, а слагаемые суммы имеют вид $10 * i$, то эта сумма будет записана так (после знака равенства сумма расписана в явном виде):

$$\sum_{i=\overline{1,5}} 10i = 10 * 1 + 10 * 2 + 10 * 3 + 10 * 4 + 10 * 5 = 10 + 20 + 30 + 40 + 50.$$

Введение

В процессе исследования физических явлений ради удобства вводятся системы координат, и работают с ними. Однако при этом наряду с физическими величинами изучаются и сами системы координат, которые были введены искусственно и на сами явления никаким образом не влияют. Получается ненужная информация. Избавиться от неё можно двумя способами:

1) Использовать только инварианты (сохраняющиеся величины). Данный метод труден в реализации, хотя и применяется в ряду областей, позволяя получить многие закономерности.

2) Использовать инвариантную относительно координат запись уравнений (Здесь уже начинается тензорная алгебра, а когда появляются производные, появляется и тензорный анализ).

Тензорная алгебра (Часть 1)

Существует несколько способов определения тензора. В данном курсе мы будем определять тензор через геометрические объекты. Но сперва разберёмся с определением матрицы. Очень часто говорят, что матрица - это таблица из чисел. Но мы будем действовать более формально. Заметим, что матрица позволяет по номерам строки и столбца получить элемент (число). Таким образом, под матрицей мы будем иметь ввиду числовую функцию двух дискретный аргументов:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \underline{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1.1}$$

Числовые наборы

Определение 1.1. *Пусть* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}\,; r \in \mathbb{N}, N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.

1) *Обозначим через* $\mathbb{K}^{N_1 \times \ldots \times N_r}$ *множество ввсех функций* A, *удовлетворяющих условию:*

$$A : \underline{\{1, \ldots, N_1\} \times \{1, \ldots, N_2\} \times \ldots \times \{1, \ldots, N_r\}} \Rightarrow \mathbb{K}, \tag{1.2}$$

где под обозначением $F : A \to B$ *будем иметь ввиду, что* $D(F) \subset A; R(F) \subset B$; *а под обозначением* $F : A \Rightarrow B$, *что* $D(F) = A; R(F) \subset B$, *то есть отображение (1.2) определено на всём множестве. Подчёркнутая часть в (1.2) - совокупность упорядоченных наборов* $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$. *То есть,* A *- числовая функция от* r *дискретных аргументов.*

2) *Будем говорить, что* A *- числовой набор степени* r, *если* $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \ldots \times N_r}$.

3) *Далее обычно будем писать «*$A_{i_1, \ldots, i_r}$*» вместо «*$A(i_1, \ldots, i_r)$*».*

4) *Очевидно,* $\mathbb{K}^{N_1 \times \ldots \times N_r}$ *- линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

Найдём размерность пространства $\mathbb{K}^{N_1\times\ldots\times N_r}$, для этого воспользуемся известной теоремой.

Теорема 1.1. *Длина базиса равна размерности пространства.*

Рассмотрим множество значений упорядоченного набора $(i_1,\ldots,i_r)$ и построим числовой набор для каждой точки i из области определения этого набора, равный единице в i и нулю во всех других точках области определения данного набора. Количество таких наборов равно количеству элементов в области определения: $N_1{\cdot}N_2{\cdot}\ldots{\cdot}N_r$.

Таким образом, размерность исследуемого пространства:

$$\dim\left(\mathbb{K}^{N_1\times\ldots\times N_r}\right) = N_1{\cdot}N_2{\cdot}\ldots{\cdot}N_r. \tag{1.3}$$

Когда мы говорили, что $\mathbb{K}^{N_1\times\ldots\times N_r}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, мы имели ввиду, что в этом пространстве операции сложения и умножения на число определены стандартным образом, пропишем их в явном виде.

Пусть $A, B \in \mathbb{K}^{N_1\times\ldots\times N_r}$. Тогда:

$$(A+B)_{i_1,\ldots,i_r} = A_{i_1,\ldots,i_r} + B_{i_1,\ldots,i_r}, \tag{1.4}$$

при $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{K}; A \in \mathbb{K}^{N_1\times\ldots\times N_r}$. Тогда:

$$(\lambda A)_{i_1,\ldots,i_r} = \lambda{\cdot}A_{i_1,\ldots,i_r}. \tag{1.5}$$

Определение 1.2. *Пусть* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}; N \in \mathbb{N}; r \in \mathbb{Z}_+$.

1) *Пусть* $r = 0$. *Обозначим,* $\mathbb{K}^{(N,r)} = \mathbb{K}$.

2) *Пусть* $r \neq 0$. *Обозначим,* $\mathbb{K}^{(N,r)}$ *- множество всех функций* A*, удовлетворяющих условию:*

$$A : \{1,\ldots,N\}^r \Rightarrow \mathbb{K}. \tag{1.6}$$

Будем говорить, что A *- числовой набор степени* r*, если* $A \in \mathbb{K}^{(N,r)}$.

3) *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{(N,r)}$. *Далее будем писать «*$A_{i_1,\ldots,i_r}$*» вместо «*$A(i_1,\ldots,i_r)$*».*

4) *Очевидно,* $\mathbb{K}^{(N,r)}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$,

$$\dim\left(\mathbb{K}^{(N,r)}\right) = N^r. \tag{1.7}$$

Геометрические объекты

Определение 1.3. *Пусть* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}; \mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}, \dim(\mathcal{L}) = N; r \in \mathbb{Z}_+$.

1) *Будем говорить, что* A *- геометрический объект степени* r *в пространстве* $\mathcal{L}$*, если* A *- отображение, которое каждому базису* e *пространства* $\mathcal{L}$ *ставит в соответствие числовой набор* $A(e)$*, причём* $A(e) \in \mathbb{K}^{(N,r)}$.

2) Обозначим через $(G\mathcal{L})_r$ множество всех геометрических объектов степени r в пространстве $\mathcal{L}$.

3) Пусть $A \in (G\mathcal{L})_r$. Далее будем писать «$A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$» вместо «$A(e)(i_1,\ldots,i_r)$».

4) Очевидно, $(G\mathcal{L})_r$ - линейное пространство над $\mathbb{K}$ (если ввести операции стандартным образом).

Пусть $A, B \in (G\mathcal{L})_r$. Тогда:

$$(A+B)(e) = A(e) + B(e) \tag{1.8}$$

при e - базис $\mathcal{L}$. По компонентам:

$$(A+B)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = A_{i_1,\ldots,i_r}(e) + B_{i_1,\ldots,i_r}(e) \tag{1.9}$$

при e - базис $\mathcal{L}$; $i_1,\ldots,i_r = \overline{1,N}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{K}, A \in (G\mathcal{L})_r$. Тогда:

$$(\lambda A)(e) = \lambda \cdot A(e). \tag{1.10}$$

По компонентам:

$$(\lambda A)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = \lambda \cdot A_{i_1,\ldots,i_r}(e). \tag{1.11}$$

Тензоры

Далее при записи мы будем пользоваться правилом суммирования Эйнштейна.

Определение 1.4. *Пусть $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}, \mathcal{L}$ - линейное пространство над $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}, \dim(\mathcal{L}) = N; p, q \in \mathbb{Z}_+$.*

Будем говорить, что A - тензор порядка $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathcal{L}$, если $A \in (G\mathcal{L})_{q+p}$;

$$A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e') = A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) \cdot \alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e) \cdot \ldots \cdot \alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e) \cdot \alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e') \cdot \ldots \cdot \alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') \tag{1.12}$$

при e, e' - базисы $\mathcal{L}$; $i_1,\ldots,i_p, j_1,\ldots,j_q, i'_1,\ldots,i'_p, j'_1,\ldots,j'_q = \overline{1,N}$.

Выражение (1.12) представляет собой тензорный закон преобразования. Рассмотрим частные случаи, чтобы понять, как работает этот закон.

Пусть $p = 0, q = 0$. Тогда $A(e') = A(e)$.

Пусть $p = 1, q = 0$ (1 раз ковариантный). Тогда

$$A_{i'_1}(e') = A_{i_1}(e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e') = A_1(e)\alpha^1_{i'_1}(e,e') + A_2(e)\alpha^2_{i'_1}(e,e') + \ldots + A_N\alpha^N_{i'_1}(e,e'). \tag{1.13}$$

В (1.13) мы можем заметить закон преобразования компонент линейной формы.

Пусть $p = 0, q = 1$. Тогда

$$A^{j'_1}(e') = A^{j_1}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e) = A^1(e)\alpha^{j'_1}_1(e',e) + \ldots + A^N(e)\alpha^{j'_1}_N(e',e). \tag{1.14}$$

В (1.14) легко увидеть закон преобразования координат вектора.

Пусть $p = 1, q = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}A_{i_1'}^{j_1'}(e') = A_{i_1}^{j_1}(e)\alpha_{j_1}^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{i_1}(e,e') =\\ = A_1^1(e)\alpha_1^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{1}(e,e') + \ldots + A_1^N\alpha_N^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{1}(e,e') +\\ + A_2^1(e)\alpha_1^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{2}(e,e') + \ldots + A_2^N(e)\alpha_N^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{2}(e,e') +\\ + \cdots +\\ + A_N^1(e)\alpha_1^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{N}(e,e') + \ldots + A_N^N\alpha_N^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{N}(e,e').\end{aligned} \tag{1.15}$$

Чтобы проще было записывать формулы преобразования можно запомнить следующее нехитрое правило. Пусть e' - это новый базис, в который нужно перейти, и штрихами обозначены компоненты тензора в новом базисе. Тогда записываем тензор в старом базисе $A_{i_1}^{j_1}(e)$ после него порядок будет идти такой: сперва верхний индекс, потом - нижний. Записываем матрицу преобразования для верхнего индекса, на месте верхнего индекса матрицы (того индекса, который нужно изменить у тензора) записываем штрихованный индекс (тот, на который нужно поменять), на месте нижнего - нештрихованный (тот, который нужно поменять); в скобках (аргументы матрицы) записываем базисы по тому же порядку: сначала базис верхнего индекса (штрихованный), потом нижнего (нештрихованный). Потом аналогично записываем матрицу для преобразования нижнего индекса тензора. Заметим, что старые индексы встречаются дважды, значит по ним будет вестись суммирование (по правилу суммирования Эйнштейна):

$$A_{i_1'}^{j_1'}(e') = A_{i_1}^{j_1}(e)\alpha_{j_1}^{j_1'}(e',e)\alpha_{i_1'}^{i_1}(e,e'). \tag{1.16}$$

Определение 1.5. *Обозначим через $(T\mathcal{L})_p^q$ множество всех тензоров порядка $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathcal{L}$.*

Утверждение 1.1. *Пусть $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $\mathcal{L}$ - линейное пространство над $\mathbb{K}$; $N \in \mathbb{N}; \dim(\mathcal{L}) = N; p, q \in \mathbb{Z}_+$.*

Тогда $(T\mathcal{L})_p^q$ - подпространство $(G\mathcal{L})_{q+p}$.

Без доказательства

Чтобы в этом убедиться нужно сперва проверить, что нулевой элемент принадлежит $(T\mathcal{L})_p^q$, а потом проверить операции суммы и умножения на число.

Прямое произведение тензоров

Определение 1.6. *Пусть $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $\mathcal{L}$ - линейное пространство над $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}; \dim(\mathcal{L}) = N$ (в дальнейшем эту преамбулу для краткости написания мы будем опускать); $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+, A \in (T\mathcal{L})_{p_1}^{q_1}, p_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+; B \in (T\mathcal{L})_{p_2}^{q_2}$.*

Обозначим:

$$(A\otimes B)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) = A_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e)B_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) \tag{1.17}$$

при: e - базис $\mathcal{L}$, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Выражение (1.17) называется прямым произведением тензоров.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть $p_1 = 1, q_1 = 0; p_2 = 1, q_2 = 0$. Тогда

$$(A \otimes B)_{i_1, i_2}(e) = A_{i_1}(e) B_{i_2}(e). \tag{1.18}$$

Для более интуитивного понимания попробуем построить аналогичную конструкцию в матанализе.

Пусть $F_1, F_2 : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$. Тогда построим функцию от двух аргументов следующего вида:

$$\Phi(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2) \tag{1.19}$$

при $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Иначе:

$$(F_1 \otimes F_2)(x_1, x_2) = F_1(x_2) F_2(x_2). \tag{1.20}$$

Заметим, что конструкция (1.20) похожа на конструкцию (1.18), только аргумент у функций не дискретный, и у прямого произведения в качестве параметра выступает базис.

Пусть теперь далее в этом курсе, если не указывается иное, то $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $\mathcal{L}$ - линейное пространство над $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}; \dim(\mathcal{L}) = N$.

Определение 1.7. *Пусть $r \in \mathbb{Z}, r \geq 2, p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+, A_1 \in (T\mathcal{L})^{q_1}_{p_1}, \ldots, p_r, q_r \in \mathbb{Z}_+, A_r \in (T\mathcal{L})^{q_r}_{p_r}$. Обозначим:*

$$\overline{p}_k = \sum_{m=\overline{1,k}} p_m \tag{1.21}$$

при $k = \overline{1, r}$;

$$\overline{q}_k = \sum_{m=\overline{1,k}} q_m \tag{1.22}$$

при $k = \overline{1, r}$. Прямое произведение r тензоров:

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_r)^{j_1, \ldots, j_{\overline{q}_r}}_{i_1, \ldots, i_{\overline{p}_r}}(e) = \\ = (A_1)^{j_1, \ldots, j_{\overline{q}_1}}_{i_1, \ldots, i_{\overline{p}_1}}(e) \cdot (A_2)^{j_{\overline{q}_1+1}, \ldots, j_{\overline{q}_2}}_{i_{\overline{p}_1+1}, \ldots, i_{\overline{p}_2}}(e) \cdot \ldots \cdot (A_r)^{j_{\overline{q}_{r-1}+1}, \ldots, j_{\overline{q}_r}}_{i_{\overline{p}_{r-1}+1}, \ldots, i_{\overline{p}_r}}(e) \tag{1.23}$$

при: e - базис $\mathcal{L}$, $i_1, \ldots, i_{\overline{p}_r}, j_1, \ldots, j_{\overline{q}_r} = \overline{1, N}$.

Прямое произведение тензоров также является тензором.

Свёртка тензоров

Свёрткой будет операция, которая уничтожает один индекс сверху и один индекс сверху.

Определение 1.8. *Пусть* $p, q \in \mathbb{N}, A \in (T\mathcal{L})^q_p$; $k_0 = \overline{1,p}; m_0 = \overline{1,q}$. *Обозначим:*

$$\left(\langle A\rangle^{m_0}_{k_0}\right)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e) = \sum_{n=\overline{1,N}} A^{j_1,\ldots,j_{m_0-1},n,j_{m_0},\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k_0-1},n,i_{k_0},\ldots,i_{p-1}}(e) \tag{1.24}$$

при: e *- базис* $\mathcal{L}$,$i_1,\ldots,i_{p-1},j_1,\ldots,j_{q-1} = \overline{1,N}$. $\langle A\rangle^{m_0}_{k_0}$ *называется свёрткой тензора* A.

Рассмотрим частный случай. Пусть $p = 1, q = 1$. Тогда

$$\langle A\rangle^1_1(e) = \sum_{n=\overline{1,N}} A^n_n(e) = A^1_1(e) + A^2_2(e) + \ldots + A^n_n(e). \tag{1.25}$$

Лекция 2

Тензорная алгебра (Часть 2)

Транспонирование тензоров

Определение 2.1. *Пусть* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $\mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$, $\dim(\mathcal{L}) = N$; $p, q \in \mathbb{Z}_+, A \in (T\mathcal{L})^q_p, p + q \geq 1$; $\sigma_1 \in S_p$ *(перестановка из группы* S_p*, если p целое число, большее нуля, то это группа перестановок p целых чисел; если* $p = 0$*, то* S_p *- тождественная перестановка),* $\sigma_2 \in S_q$.

Обозначим:

$$\left([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\right)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = (A)^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}(e) \tag{2.1}$$

при: e - базис $\mathcal{L}$, $i_1,\ldots,i_p, j_1,\ldots,j_q = \overline{1,N}$. *Выражение* (2.1) *- транспонированный к A тензор.*

Рассмотрим данное определение на примере.

Пусть $N = 10, s = 4, A \in (T\mathcal{L})^0_4$ и имеется перестановка:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Тогда:

$$\left([A]_\sigma\right)_{i_1,i_2,i_3,i_4}(e) = A_{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},i_{\sigma(3)},i_{\sigma(4)}}(e) = A_{i_2,i_1,i_4,i_3}(e) \tag{2.3}$$

Чтобы проследить конкретную компоненту, представим, что $i_1 = 7, i_2 = 8, i_3 = 5, i_4 = 6$.

Для дальнейшего разбора этого примера нам понадобится оператор:

$$[i_1, i_2, i_3, i_4; 7, 8, 5, 6]. \tag{2.4}$$

Оператор (2.4) не является строго математическим. Чтобы понять, как он работает, представим математика (под номером 1), который пишет что-то на доске. Математик 1 размышляет над математическими конструкциями и объектами, он изучает математику. Рядом с математиком 1 стоит математик 2 (См. рис. 2.1). Математик 2 изучает то, что пишет математик 1, то есть размышляет над результатами, которые пишет математик 1. Математик 2 изучает конечные последовательности символов (то, что написал математик 1).

Похожим образом работает и наш оператор (2.4), он преобразует конечные последовательности символов, заменяя в формулах символы, которые стоят в квадратных скобках до «;» на символы в его скобках, стоящие после «;» (в нашем случае i_1 заменяется на 7; i_2 на 8; i_3 на 5,...). Такие операторы будем называть метатеоретическими.

С использованием метатеоретического оператора рассматриваемый пример примет вид:

$$\begin{aligned}\left([A]_\sigma\right)_{7,8,5,6}(e) = \left([A]_\sigma\right)_{i_1,i_2,i_3,i_4}(e)\,[i_1, i_2, i_3, i_4; 7, 8, 5, 6] = \\ = A_{i_2,i_1,i_4,i_3}(e)\,[i_1, i_2, i_3, i_4; 7, 8, 5, 6] = A_{8,7,6,5}(e)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для дальнейшего нам понадобится транспонировать прямое произведение тензоров.

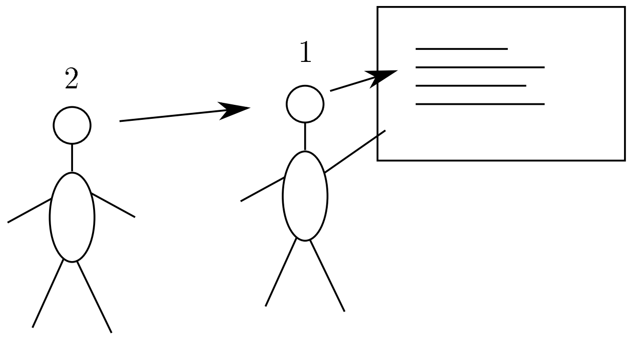

Рис. 2.1. Схематическое объяснение работы метатеоретического оператора

Замечание 2.1. *Пусть* $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+$. *Обозначим:*

$$\sigma(k) = p_2 + k \text{ при } k = \overline{1, p_1}; \quad (2.6)$$

$$\sigma(k) = -p_1 + k \text{ при } k = \overline{p_1 + 1, p_1 + p_2} \quad (2.7)$$

Рассмотрим подробнее, как действует перестановка (2.6), (2.7). Разобьём целые числа от 1 до $p_1 + p_2$ на две группы двумя способами: сперва на группы

1) От 1 до p_1,

2) От p_1 до $p_1 + p_2$;

затем на группы:

1) От 1 до p_2,

2) От p_2 до $p_1 + p_2$.

Несложно увидеть, что перестановка (2.6), (2.7) переставляет числа из первой группы первого разбиения во вторую группу второго разбиения, а из второй группы первого разбиения в первую группу второго разбиения (См. рис. 2.2).

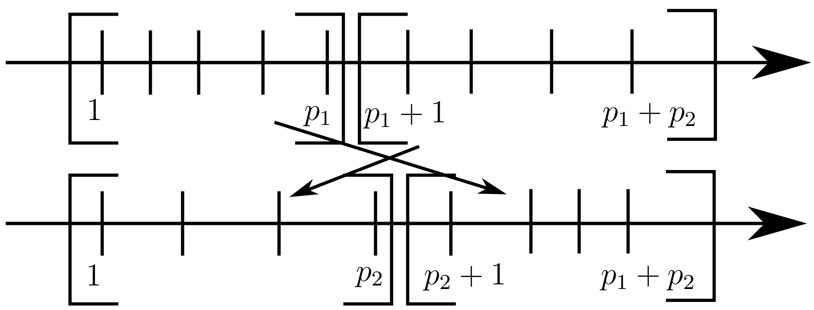

Рис. 2.2. Принцип перестановки (2.6), (2.7)

Тогда: $\sigma \in S_{p_1+p_2}$.

Чтобы понять, какой у этой перестановки знак, воспользуемся следующим рассуждением. Число $p_1 + 1$ переходит на место числа с номером 1. Представляя это через парные перестановки, получим, что $p_1 + 1$ меняется местами с p_1, потом с

$p_1 - 1$ и так далее, всего p_1 парных перестановок. Далее, число p_1+2 встаёт на место, где первоначально было число 2. Для этого также нужно p_1 перестановок. Таким образом, для каждого числа из второй группы первого разбиения (от p_1+1 до p_1+p_2), чтобы совершить перестановку (2.6), (2.7) нужно совершить p_1 парных перестановок, а всего таких чисел в этой группе p_2, значит, знак искомой перестановки:

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{p_1 \cdot p_2}. \tag{2.8}$$

Утверждение 2.1. *Пусть* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+, A \in (T\mathcal{L})^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+, B \in (T\mathcal{L})^{q_2}_{p_2}$.
Пусть:

$$\begin{aligned} \sigma_1(k) &= p_2 + k \text{ при } k = \overline{1, p_1}; & (2.9)\\ \sigma_1(k) &= -p_1 + k \text{ при } k = \overline{p_1 + 1, p_1 + p_2}. & (2.10)\end{aligned}$$

Пусть далее:

$$\begin{aligned} \sigma_2(k) &= q_2 + k \text{ при } k = \overline{1, q_1}; & (2.11)\\ \sigma_2(k) &= -q_1 + k \text{ при } k = \overline{q_1 + 1, q_1 + q_2}. & (2.12)\end{aligned}$$

Тогда

$$[A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = B \otimes A. \tag{2.13}$$

Доказательство
Пусть: e - базис $\mathcal{L}$, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$.
Тогда

$$\begin{aligned} &\left([A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\right)^{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) = (A \otimes B)^{j_{\sigma_2(1)}, \ldots, j_{\sigma_2(q_1+q_2)}}_{i_{\sigma_1(1)}, \ldots, i_{\sigma_1(p_1+p_2)}}(e) = \\ &= A^{j_{\sigma_2(1)}, \ldots, j_{\sigma_2(q_1)}}_{i_{\sigma_1(1)}, \ldots, i_{\sigma_1(p_1)}}(e) \cdot B^{j_{\sigma_2(q_1+1)}, \ldots, j_{\sigma_2(q_1+q_2)}}_{i_{\sigma_1(p_1+1)}, \ldots, i_{\sigma_1(p_1+p_2)}}(e) = A^{j_{1+q_2}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{1+p_2}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) \cdot B^{j_1, \ldots, j_{q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_2}}(e) = \\ &= B^{j_1, \ldots, j_{q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_2}}(e) \cdot A^{j_{1+q_2}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{1+p_2}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) = (B \otimes A)^{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) \end{aligned} \tag{2.14}$$

То есть, мы получили, что каждая компонента тензора $[A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$ равна такой же компоненте тензора $B \otimes A$. Таким образом, имеем

$$[A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = B \otimes A. \tag{2.15}$$

Для следующих утверждений предлагается проделать выкладки самостоятельно.

Утверждение 2.2. *Пусть* $p, q \in \mathbb{Z}_+, p + q \geq 1$; $\xi_1, \ldots, \xi_q \in (T\mathcal{L})^1_0$; $\omega^1, \ldots, \omega^p \in (T\mathcal{L})^0_1$;$\sigma_1 \in S_p$; $\sigma_2 \in S_q$.
Тогда:

$$\left[\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_q \otimes \omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^p\right]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = \xi_{\sigma_2^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes \xi_{\sigma_2^{-1}(q)} \otimes \omega^{\sigma_1^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes \omega^{\sigma_1^{-1}(p)}. \tag{2.16}$$

Замечание 2.2. *Пусть:* $r \in \mathbb{Z}, r \geq 3; p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}_+$.
Обозначим:

$$\overline{p}_k = \sum_{m=\overline{1,k}} p_m \text{ при } k = \overline{1, r}. \tag{2.17}$$

Пусть $\sigma \in S_{\overline{p}_{r-1}}$.
Обозначим:

$$\varphi(\sigma)(k) = \sigma(k) \text{ при } k = \overline{1, \overline{p}_{r-1}}; \tag{2.18}$$
$$\varphi(\sigma)(k) = k \text{ при } k = \overline{\overline{p}_{r-1} + 1, \overline{p}_r}. \tag{2.19}$$

Тогда

$$\varphi(\sigma) \in S_{\overline{p}_r}. \tag{2.20}$$

Выясним знак перестановки (2.18), (2.19). Удобнее всего в данном случае это сделать, используя определение знака через беспорядок. Для этого нужно рассмотреть результат перестановки возрастающей последовательности чисел, взять какое-либо число и сравнивать его с остальными числами. Если в результате сравнения оказывается, что справа от взятого числа стоит меньшее число, то такая ситуация называется беспорядком, и говорят, что перестановка образует беспорядок. Знаком перестановки является число -1, возведённое в степень числа беспорядков.

Разделим числа от 1 до $\overline{p}_r$ на две группы:

1) От 1 до $\overline{p}_{r-1}$;

2) От $\overline{p}_{r-1} + 1$ до $\overline{p}_r$.

Заметим, что во второй группе чисел перестановка $\varphi(\sigma)$ не создаёт беспорядков, поскольку является в ней тождественной. Заметим также, что нет беспорядков в расположении чисел из первой группы относительно второй, поскольку числа второй группы априори больше чисел первой группы и стоят правее. Таким образом, мы видим, что число беспорядков, создаваемое перестановкой $\varphi(\sigma)$, равно числу беспорядков, создаваемых перестановкой σ (См. рис. 2.3).

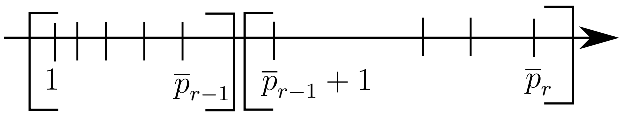

Рис. 2.3. Число беспорядков, создаваемое перестановкой $\varphi(\sigma)$ определяется перестановкой σ

Значит, знак перестановки $\varphi(\sigma)$:

$$\operatorname{sgn}(\varphi(\sigma)) = \operatorname{sgn}(\sigma). \tag{2.21}$$

Утверждение 2.3. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}, r \geq 3$; $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+, A_1 \in (T\mathcal{L})^{q_1}_{p_1}, \ldots, p_r, q_r \in \mathbb{Z}_+, A_r \in (T\mathcal{L})^{q_r}_{p_r}$.
Обозначим:

$$\overline{p}_k = \sum_{m=\overline{1,k}} p_m \text{ при } k = \overline{1, r}. \tag{2.22}$$

Пусть далее $\sigma_1 \in S_{\overline{p}_{r-1}}$. *Обозначим:*

$$\varphi_1(\sigma_1(k)) = \sigma_1(k) \text{ при } k = \overline{1, \overline{p}_{r-1}}; \tag{2.23}$$
$$\varphi_1(\sigma_1(k)) = k \text{ при } k = \overline{\overline{p}_{r-1} + 1, \overline{p}_r}. \tag{2.24}$$

Обозначим также:

$$\overline{q}_k = \sum_{m=\overline{1,k}} q_m \text{ при } k = \overline{1,r} \tag{2.25}$$

Пусть, кроме того, $\sigma_2 \in S_{\overline{q}_{r-1}}$. *Обозначим ещё:*

$$\varphi_2(\sigma_2(k)) = \sigma_2(k) \text{ при } k = \overline{1,\overline{q}_{r-1}}; \tag{2.26}$$

$$\varphi_2(\sigma_2(k)) = k \text{ при } k = \overline{\overline{q}_{r-1}+1,\overline{q}_r}. \tag{2.27}$$

Тогда

$$[A_1 \otimes \ldots \otimes A_r]^{\varphi_2(\sigma_2)}_{\varphi_1(\sigma_1)} = [A_1 \otimes \ldots \otimes A_{r-1}]^{\sigma_2}_{\sigma_1} \otimes A_r. \tag{2.28}$$

Для доказательства этого утверждения можно представить тензор левой части по компонентам:

$$\left([A_1 \otimes \ldots \otimes A_r]^{\varphi_2(\sigma_2)}_{\varphi_1(\sigma_1)}\right)^{j_1,\ldots,j_{\overline{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\overline{p}_r}}(e) = (A_1 \otimes \ldots \otimes A_r)^{j_{\varphi_2(\sigma_2)(1)},\ldots,j_{\varphi_2(\sigma_2)(\overline{q}_r)}}_{i_{\varphi_1(\sigma_1)(1)},\ldots,i_{\varphi_1(\sigma_1)(\overline{p}_r)}}(e) \tag{2.29}$$

Из определения перестановок φ_1 ((2.23), (2.24)) и φ_2 ((2.26), (2.27)) и представления тензора по компонентам (2.29) легко получить требуемое утверждение (2.28).

Специальный базис в пространстве тензоров

С данного пункта начинается новый материал, которого не было в линейной алгебре. Здесь мы рассмотрим способ построения базиса в пространстве тензоров со многими индексами из базисов в пространстве тензоров с одним индексом (одним верхним и одним нижнем).

Утверждение 2.4. *Пусть* $\xi_1,\ldots,\xi_N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^1_0$; $\omega^1,\ldots,\omega^N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^0_1$, $p,q \in \mathbb{Z}_+, p+q \geq 1$.

Тогда

$$\left\{\xi_{m_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{m_q} \otimes \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_p}\right\}^{k_1,\ldots,k_p=\overline{1,N}}_{m_1,\ldots,m_q=\overline{1,N}} \text{ - базис } (T\mathcal{L})^q_p. \tag{2.30}$$

Утверждение 2.5. *Пусть:* $\xi_1,\ldots,\xi_N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^1_0$, $\omega^1,\ldots,\omega^N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^0_1$, $p,q \in \mathbb{Z}_+, p+q \geq 1$.

Пусть далее e *- базис в* $\mathcal{L}$. *Обозначим:*

$$\overline{\xi}^m_k = (\xi_k(e))^m \text{ при } k,m = \overline{1,N}; \tag{2.31}$$

$$\overline{\overline{\xi}} = \overline{\xi}^{-1}; \tag{2.32}$$

$$\overline{\omega}^m_k = (\omega^m(e))_k \text{ при } k,m = \overline{1,N}; \tag{2.33}$$

$$\overline{\overline{\omega}} = \overline{\omega}^{-1}. \tag{2.34}$$

Пусть, кроме того, $Q \in \mathbb{K}^{(N,p+q)}$ *(то есть* Q *- это числовой набор с* p *индексами снизу и* q *индексами сврху). Обозначим:*

$$R(Q)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} = Q^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_q}_{j_q} \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_1}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_p}_{k_p} \tag{2.35}$$

при $k_1, \ldots, k_p, m_1, \ldots, m_q = \overline{1, N}$.

При таких условиях:

1.Пусть $A \in (T\mathcal{L})^q_p$. *Тогда*

$$A = R(A(e))^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \cdot \xi_{m_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{m_q} \otimes \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_p}. \tag{2.36}$$

2.Пусть $C \in \mathbb{K}^{(N,p+q)}$, *и*

$$A = C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \cdot \xi_{m_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{m_q} \otimes \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_p}. \tag{2.37}$$

Тогда

$$C = R(A(e)). \tag{2.38}$$

Первый пункт утверждения 2.5 утверждает существование разложения любого тензора в пространстве $(T\mathcal{L})^q_p$ по базису, объявленном в утверждении 2.4. Второй пункт - утверждает единственность этого разложения и, более того, говорит о том, как вычисляются коэффициенты разложения.

Доказательство

1. Сперва докажем первый пункт утверждения. Пусть $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\left(\left(R(A(e))^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \cdot \xi_{m_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{m_q} \otimes \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_p}\right)(e)\right)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = \\
= R(A(e))^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \cdot (\xi_{m_1}(e))^{j_1} \cdot \ldots \cdot \left(\xi_{m_q}(e)\right)^{j_q} \cdot \left(\omega^{k_1}(e)\right)_{i_1} \cdot \ldots \cdot \left(\omega^{k_p}(e)\right)_{i_p} = \\
= R(A(e))^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \overline{\xi}^{j_1}_{m_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\xi}^{j_q}_{m_q} \cdot \overline{\omega}^{k_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\omega}^{k_p}_{i_p} = \\
= (A(e))^{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_q}_{\widetilde{i}_1,\ldots,\widetilde{i}_p} \overline{\overline{\xi}}^{m_1}_{\widetilde{j}_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_q}_{\widetilde{j}_q} \cdot \overline{\overline{\omega}}^{\widetilde{i}_1}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\omega}}^{\widetilde{i}_p}_{k_p} \cdot \overline{\xi}^{j_1}_{m_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\xi}^{j_q}_{m_q} \cdot \overline{\omega}^{k_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\omega}^{k_p}_{i_p}
\end{gathered} \tag{2.39}$$

Заметим, что из определения (2.32), (2.34) следует, что

$$\overline{\xi}^{j_1}_{m_1} \overline{\overline{\xi}}^{m_1}_{\widetilde{j}_1} = \left(\overline{\xi} \cdot \overline{\overline{\xi}}\right)^{j_1}_{\widetilde{j}_1} = \delta^{j_1}_{\widetilde{j}_1}, \tag{2.40}$$

где δ^{β}_{α} - символ Кронекера (Напомним, что в (2.40), как и везде в этом курсе, мы пользуемся правилом суммирования Эйнштейна для сокращения записи).

Тогда, с учётом (2.40) выражение (2.39) примет вид:

$$\begin{gathered}
\left(\left(R(A(e))^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \cdot \xi_{m_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{m_q} \otimes \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_p}\right)(e)\right)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = \\
= (A(e))^{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_q}_{\widetilde{i}_1,\ldots,\widetilde{i}_p} \cdot \delta^{j_1}_{\widetilde{j}_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{j_q}_{\widetilde{j}_q} \cdot \delta^{\widetilde{i}_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{\widetilde{i}_p}_{i_p} = (A(e))^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}.
\end{gathered} \tag{2.41}$$

Из (2.41) следует, что:

$$R(A)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \cdot \xi_{m_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{m_q} \otimes \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_p} = A. \tag{2.42}$$

Таким образом, первый пункт утверждения доказан.

2. Доказательство второго пункта, как и первого, проще проводить напрямую, раскручивая определения, без всяких хитростей.

Пусть $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(A(e))^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} = \left(\left(C^{\widetilde{m}_1,\dots,\widetilde{m}_q}_{\widetilde{k}_1,\dots,\widetilde{k}_p} \xi_{\widetilde{m}_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\widetilde{m}_p} \otimes \omega^{\widetilde{k}_1} \otimes \dots \otimes \omega^{\widetilde{k}_p}\right)(e)\right)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} =$$
$$= C^{\widetilde{m}_1,\dots,\widetilde{m}_q}_{\widetilde{k}_1,\dots,\widetilde{k}_p} (\xi_{\widetilde{m}_1}(e))^{j_1} \cdot \ldots \cdot (\xi_{\widetilde{m}_q}(e))^{j_q} \cdot \left(\omega^{\widetilde{k}_1}(e)\right)_{i_1} \cdot \ldots \cdot \left(\omega^{\widetilde{k}_p}(e)\right)_{i_p} =$$
$$= C^{\widetilde{m}_1,\dots,\widetilde{m}_q}_{\widetilde{k}_1,\dots,\widetilde{k}_p} \overline{\xi}^{j_1}_{\widetilde{m}_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\xi}^{j_q}_{\widetilde{m}_q} \cdot \overline{\omega}^{\widetilde{k}_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\omega}^{\widetilde{k}_p}_{i_p}. \quad (2.43)$$

Пусть: $k_1, \dots, k_p, m_1, \dots, m_q = \overline{1, N}$. Тогда

$$R(A(e))^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = (A(e))^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} \overline{\overline{\xi}}^{m_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_q}_{j_q} \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_1}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_p}_{k_p} =$$
$$= C^{\widetilde{m}_1,\dots,\widetilde{m}_q}_{\widetilde{k}_1,\dots,\widetilde{k}_p} \overline{\xi}^{j_1}_{\widetilde{m}_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\xi}^{j_q}_{\widetilde{m}_q} \cdot \overline{\omega}^{\widetilde{k}_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\omega}^{\widetilde{k}_p}_{i_p} \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_q}_{j_q} \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_1}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_p}_{k_p} = C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}, \quad (2.44)$$

где мы пользовались соотношением (2.40).

Таким образом, утверждение полностью доказано!

Лекция 3

Тензорная алгебра (Часть 3)

Антисимметричные тензоры

Иногда данную тему называют обобщённой теорией определителей, поскольку определитель является антисимметричным тензором.

Определение 3.1. *Пусть* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}; \dim(\mathcal{L}) = N$*;* $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

1. Пусть $A \in (T\mathcal{L})_p^q$. *Будем говорить, что* A *- антисимметричный тензор, если:*

$$\Big[A\Big]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = sgn(\sigma_1)\cdot sgn(\sigma_2)\cdot A \tag{3.1}$$

при $\sigma_1 \in S_p, \sigma_2 \in S_q$ *(Конечно, для проверки определения не обязательно проверять все перестановки из* S_p *и* S_q*. Можно проверять отдельно перестановку верхних и нижних индексов, к тому же из выполнения* (3.1) *для простой (меняет два произвольных индекса местами) следует выполнение* (3.1) *для любой перестановки).*

2. Обозначим через $(\Omega\mathcal{L})_p^q$ *множество всех тензоров* A*, удовлетворяющих условиям:* $A \in (T\mathcal{L})_p^q$*;* A *- антисимметричный тензор.*

Разумеется, встаёт вопрос, является ли множество $(\Omega\mathcal{L})_p^q$ подпространством пространства $(T\mathcal{L})_p^q$? Сформулируем соответствующее утверждение без доказательства (предлагается доказать самостоятельно).

Утверждение 3.1 (без доказательства)**.** *Пусть* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}, \dim(\mathcal{L}) = N$ *(далее эту преамбулу будем опускать);* $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда $(\Omega\mathcal{L})_p^q$ *- подпространство пространства* $(T\mathcal{L})_p^q$.

Альтернирование тензора

Определение 3.2. *Пусть* $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (T\mathcal{L})_p^q$. *Обозначим:*

$$[A] = \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_p \\ \sigma_2 \in S_q}} sgn(\sigma_1)\, sgn(\sigma_2) \Big[A\Big]_{\sigma_1}^{\sigma_2}. \tag{3.2}$$

Операция (3.2) *называется альтернированием тензора* A.

Интуитивно можно понять, что выражение (3.2) представляет собой антисимметричную вещь, поскольку в нём требуется переставить индексы всеми возможными способами, учесть при этом чётности перестановок и сложить слагаемые, но данное рассуждение является спекулятивным. Поэтому сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Пусть* $p, q \in \mathbb{Z}_+,\ A \in (T\mathcal{L})^q_p,\ \sigma_1 \in S_p, \sigma_2 \in S_q$.
Тогда

$$1.\ \Big[[A]\Big]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = sgn(\sigma_1)\cdot sgn(\sigma_2)\cdot [A] \tag{3.3}$$

$$2.\ \left[\Big[A\Big]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\right] = sgn(\sigma_1)\cdot sgn(\sigma_2)\cdot [A]\,. \tag{3.4}$$

Докажем только первый пункт утверждения, второй доказывается аналогично, предлагается доказать его самостоятельно.

Доказательство

1. Очевидно:

$$\Big[[A]\Big]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = \left[\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_p\\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1)\cdot \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2)\cdot \Big[A\Big]^{\widetilde{\sigma}_2}_{\widetilde{\sigma}_1}\right]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_p\\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1)\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2)\cdot \left[\Big[A\Big]^{\widetilde{\sigma}_2}_{\widetilde{\sigma}_1}\right]^{\sigma_2}_{\sigma_1} =$$

$$= \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_p\\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1)\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2)\ \Big[A\Big]^{\sigma_2\cdot\widetilde{\sigma}_2}_{\sigma_1\cdot\widetilde{\sigma}_1} \tag{3.5}$$

Сделаем замену переменных, и выразим старые переменные через новые:

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1 &= \sigma_1\cdot\widetilde{\sigma}_1\\ \widetilde{\widetilde{\sigma}}_2 &= \sigma_2\cdot\widetilde{\sigma}_2\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\widetilde{\sigma}_1 &= \sigma_1^{-1}\cdot\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1\\ \widetilde{\sigma}_2 &= \sigma_2^{-1}\cdot\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2\end{aligned} \tag{3.6}$$

Тогда, с учётом (3.6) выражение (3.5) примет вид:

$$\Big[[A]\Big]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = \sum_{\substack{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1 \in S_p\\ \widetilde{\widetilde{\sigma}}_2 \in S_q}} \operatorname{sgn}\left(\sigma_1^{-1}\cdot\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1\right)\operatorname{sgn}\left(\sigma_2^{-1}\cdot\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2\right)\Big[A\Big]^{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2}_{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1} \tag{3.7}$$

В теории перестановок есть теорема:

Теорема 3.1. *Знак произведения перестановок равен произведению их знаков.*

Из этой теоремы следует, что знак обратной перестановки равен знаку прямой перестановки. Действительно, с учётом этой теоремы для произвольной перестановки σ имеем:

$$\sigma\cdot\sigma^{-1} = e \Rightarrow \operatorname{sgn}\left(\sigma\cdot\sigma^{-1}\right) = \operatorname{sgn}(e) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = 1, \tag{3.8}$$

а поскольку знак перестановки может равняться только ± 1, то с учётом этого и (3.8) получаем, что знак обратной перестановки равен знаку прямой.

Используя данный факт, можем записать выражение (3.7) в виде:

$$\Big[[A]\Big]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2) \sum_{\substack{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1 \in S_p \\ \widetilde{\widetilde{\sigma}}_2 \in S_q}} \operatorname{sgn}\left(\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1\right)\operatorname{sgn}\left(\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2\right)\Big[A\Big]_{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1}^{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2} =$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma_2)\,[A]\,. \quad (3.9)$$

Первый пункт утверждения доказан.

Внешнее произведение тензоров

С помощью операции альтернирования построим операцию внешнего произведения тензоров.

Определение 3.3. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}, r \geq 2$, $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+, A_1 \in (T\mathcal{L})_{p_1}^{q_1}, \ldots,\ p_r, q_r \in \mathbb{Z}_+, A_r \in (T\mathcal{L})_{p_r}^{q_r}$.
Обозначим:

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_r = \frac{1}{p_1!q_1!\cdot\ldots\cdot p_r!q_r!}\,[A_1 \otimes \ldots \otimes A_r]\,. \quad (3.10)$$

Операция, определяемая выражением (3.10) *называется внешним произведением тензоров, дробь перед квадратными скобками есть нормирующий множитель, который в этой операции обязателен, так как без него выражение* (3.10) *будет определять другую операцию.*

Разумеется, интересно определить, какими свойствами обладает внешнее произведение тензоров, в частности, обладает ли оно свойствами коммутативности и ассоциативности.

Как мы помним, прямое произведение свойством коммутативности не обладает, внешнее, в общем случае, тоже не коммутативно, но всё таки оно обладает некой симметрией относительно перестановки сомножителей. Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 3.3. *Пусть* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+, A \in (T\mathcal{L})_{p_1}^{q_1}$, $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+, B \in (T\mathcal{L})_{p_2}^{q_2}$.
Тогда

$$B \wedge A = (-1)^{p_1p_2+q_1q_2}\cdot A \wedge B. \quad (3.11)$$

Доказательство
Обозначим:

$$\sigma_1(k) \;=\; p_2 + k \text{ при } k = \overline{1 < p_1}; \quad (3.12)$$
$$\sigma_1(k) \;=\; -p_1 + k \text{ при } k = \overline{p_1 + 1, p_1 + p_2}. \quad (3.13)$$

С этой перестановкой мы уже сталкивались в предыдущих лекциях. Тогда (с учётом (2.8)):

$$\sigma_1 \in S_{p_1+p_2}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^{p_1p_2}. \quad (3.14)$$

Обозначим:

$$\sigma_2(k) = q_2 + k \text{ при } k = \overline{1, q_1}; \tag{3.15}$$
$$\sigma_2(k) = -q_1 + k \text{ при } k = \overline{q_1 + 1, q_1 + q_2}. \tag{3.16}$$

Тогда:

$$\sigma_2 \in S_{q_1+q_2}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^{q_1 q_2}. \tag{3.17}$$

Очевидно (здесь просто идёт раскрытие определений):

$$B \wedge A = \frac{1}{p_2!q_2!p_1!q_1!}\left[B \otimes A\right] = \frac{1}{p_1!q_1!p_2!q_2!}\left[\left[A \otimes B\right]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\right] = \frac{\operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)}{p_1!q_1!p_2!q_2!}\left[A \otimes B\right] = \\ = (-1)^{p_1p_2+q_1q_2} \cdot A \wedge B. \tag{3.18}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Вместо того, чтобы доказывать ассоциативность, сформулируем и докажем более сильное утверждение, из которого будет следовать ассоциативность внешнего произведения.

Утверждение 3.4. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}, r \geq 3$, $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+, A_1 \in (T\mathcal{L})_{p_1}^{q_1}, \ldots, p_r, q_r \in \mathbb{Z}_+, A_r \in (T\mathcal{L})_{p_r}^{q_r}$.

Тогда:

$$1. \quad (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r-1}) \wedge A_r = A_1 \wedge \ldots \wedge A_r \tag{3.19}$$
$$2. \quad A_1 \wedge (A_2 \wedge \ldots \wedge A_r) = A_1 \wedge \ldots \wedge A_r. \tag{3.20}$$

Замечание 3.1. *Для* $r = 3$ *выражения* (3.19), (3.20) *примут вид:*

$$(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3;$$
$$A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3.$$

То есть их левые части равны, что является ассоциативностью.

Докажем первый пункт утверждения, второй пункт доказывается аналогично. Рекомендуется доказать его и построить для его доказательства φ самостоятельно.

Доказательство

1.Обозначим:

$$\overline{p}_k = \sum_{m=\overline{1,k}} p_m \text{ при } k = \overline{1, r}. \tag{3.21}$$

Пусть $\sigma_1 \in S_{\overline{p}_{r-1}}$. Обозначим:

$$\varphi_1(\sigma_1)(k) = \sigma_1(k) \text{ при } k = \overline{1, \overline{p}_{r-1}}; \tag{3.22}$$
$$\varphi_1(\sigma_1)(k) = k \text{ при } k = \overline{\overline{p}_{r-1} + 1, \overline{p}_r}. \tag{3.23}$$

Тогда

$$\varphi_1(\sigma_1) \in S_{\overline{p}_r}, \quad \operatorname{sgn}\Big(\varphi_1(\sigma_1)\Big) = \operatorname{sgn}(\sigma_1). \tag{3.24}$$

Обозначим:

$$\overline{q}_k = \sum_{m=\overline{1,k}} q_m \text{ при } k = \overline{1,r}. \tag{3.25}$$

Пусть $\sigma_2 \in S_{\overline{q}_{r-1}}$. Обозначим:

$$\varphi_2(\sigma_2)(k) = \sigma_2(k) \text{ при } k = \overline{1, \overline{q}_{r-1}}; \tag{3.26}$$

$$\varphi_2(\sigma_2)(k) = k \text{ при } k = \overline{\overline{q}_{r-1}+1, \overline{q}_r}. \tag{3.27}$$

Тогда

$$\varphi_2(\sigma_2) \in S_{\overline{q}_r}, \quad \operatorname{sgn}\Big(\varphi_2(\sigma_2)\Big) = \operatorname{sgn}(\sigma_2). \tag{3.28}$$

Очевидно (здесь мы просто раскрываем определения):

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r-1}) \wedge A_r = \frac{1}{\overline{p}_{r-1}!\overline{q}_{r-1}!p_r!q_r!} \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_{\overline{p}_r} \\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_{\overline{q}_r}}} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1)\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2) \cdot \Big[(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r-1}) \otimes A_r\Big]_{\widetilde{\sigma}_1}^{\widetilde{\sigma}_2} =$$

$$= \frac{1}{\overline{p}_{r-1}!\overline{q}_{r-1}!p_r!q_r!} \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_{\overline{p}_r} \\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_{\overline{q}_r}}} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1)\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{1}{p_1!q_1!\cdot \ldots \cdot p_{r-1}!q_{r-1}!} \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_{\overline{p}_{r-1}} \\ \sigma_2 \in S_{\overline{q}_{r-1}}}} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\Big[A_1 \otimes \ldots \otimes A_{r-1}\Big]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\right) \otimes A_r\right]_{\widetilde{\sigma}_1}^{\widetilde{\sigma}_2} \tag{3.29}$$

Вспомним, что транспонирование тензора линейно по своим аргументам, потому мы можем внести транспонирование под знак внутренней суммы. Туда же внесём знаки $\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1)$ и $\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2)$, нормировочные множители можем вынести из под знака суммирования. Поменяем местами суммирование по $\widetilde{\sigma}_{1,2}$ и суммирование по $\sigma_{1,2}$ Тогда выражение (3.29) примет вид:

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r-1}) \wedge A_r =$$

$$= \frac{1}{p_1!q_1!\cdot \ldots \cdot p_r!q_r!\overline{p}_{r-1}!\overline{q}_{r-1}!} \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_{\overline{p}_{r-1}} \\ \sigma_2 \in S_{\overline{q}_{r-1}}}} \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_{\overline{p}_r} \\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_{\overline{q}_r}}} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2) \cdot$$

$$\cdot \left[\Big[A_1 \otimes \ldots \otimes A_{r-1}\Big]_{\sigma_1}^{\sigma_2} \otimes A_r\right]_{\widetilde{\sigma}_1}^{\widetilde{\sigma}_2} \tag{3.30}$$

С учётом (2.28) и свойства знака перестановок $\varphi_{1,2}$, а также теоремы 3.1 выражение (3.30) можно преобразовать к виду:

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r-1}) \wedge A_r = \\
&= \frac{1}{p_1!q_1!\cdot\ldots\cdot p_r!q_r!\overline{p}_{r-1}!\overline{q}_{r-1}!} \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_{\overline{p}_{r-1}} \\ \sigma_2 \in S_{\overline{q}_{r-1}}}} \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_{\overline{p}_r} \\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_{\overline{q}_r}}} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_1)}_{\operatorname{sgn}(\varphi_1(\sigma_1))} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_1) \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_2)}_{\operatorname{sgn}(\varphi_2(\sigma_2))} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}_2)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big[\Big[A_1 \otimes \ldots \otimes A_r \Big]^{\varphi_2(\sigma_2)}_{\varphi_1(\sigma_1)} \Big]^{\widetilde{\sigma}_2}_{\widetilde{\sigma}_1} = \\
&= \frac{1}{p_1!q_1!\cdot\ldots\cdot p_r!q_r!\overline{p}_{r-1}!\overline{q}_{r-1}!} \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_{\overline{p}_{r-1}} \\ \sigma_2 \in S_{\overline{q}_{r-1}}}} \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}_1 \in S_{\overline{p}_r} \\ \widetilde{\sigma}_2 \in S_{\overline{q}_r}}} \operatorname{sgn}\left(\widetilde{\sigma}_1\cdot\varphi_1(\sigma_1)\right) \operatorname{sgn}\left(\widetilde{\sigma}_2\cdot\varphi_2(\sigma_2)\right)\cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \Big[A_1 \otimes \ldots \otimes A_r \Big]^{\widetilde{\sigma}_2\cdot\varphi_2(\sigma_2)}_{\widetilde{\sigma}_1\cdot\varphi_2(\sigma_1)}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Сделаем замену переменных и выразим старые переменные через новые:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1 &= \widetilde{\sigma}_1\cdot\varphi_1(\sigma_1); \\
\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2 &= \widetilde{\sigma}_1\cdot\varphi_2(\sigma_2)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}_1 &= \varphi_1(\sigma_1)^{-1}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1 \\
\widetilde{\sigma}_1 &= \varphi_2(\sigma_2)^{-1}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

С учётом (3.32) выражение (3.31) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r-1}) \wedge A_r = \\
&\frac{1}{p_1!q_1!\cdot\ldots\cdot p_r!q_r!\cancel{\overline{p}_{r-1}!\overline{q}_{r-1}!}} \cancel{\sum_{\substack{\sigma_1 \in S_{\overline{p}_{r-1}} \\ \sigma_2 \in S_{\overline{q}_{r-1}}}}} \underline{\underline{\overset{\cancel{\overline{p}_{r-1}!\overline{q}_{r-1}!}}{\sum_{\substack{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1 \in S_{\overline{p}_r} \\ \widetilde{\widetilde{\sigma}}_2 \in S_{\overline{q}_r}}}} \operatorname{sgn}\left(\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1\right) \operatorname{sgn}\left(\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2\right)\cdot}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\underline{\cdot \Big[A_1 \otimes \ldots \otimes A_r \Big]^{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_2}_{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_1}}}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Мы видим, что в результате замены переменных (3.32) слагаемые внешней суммы в (3.33) (подчёркнуты двумя чертами) перестали зависеть от $\sigma_{1,2}$. На самом деле, так и было с самого начала, и если бы в начале можно было бы вычислить эти слагаемые, то получилось бы, что они - одинаковы (в самом деле, то, что слагаемые формально нумеруются каким-то индексом, ещё не означает, что они не могут быть одинаковыми). Замена переменных позволила обнаружить этот факт. Тогда знак суммы можно заменить умножением на число перестановок в $S_{\overline{p}_{r-1}}$ и $S_{\overline{q}_{r-1}}$ ($\overline{p}_{r-1}$ и $\overline{q}_{r-1}$ соответственно).

Таким образом, окончательно имеем:

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r-1}) \wedge A_r = \\ = \frac{1}{p_1!q_1!\cdot\ldots\cdot p_r!q_r!} \sum_{\substack{\tilde{\tilde{\sigma}}_1 \in S_{\overline{p}_r} \\ \tilde{\tilde{\sigma}}_2 \in S_{\overline{q}_r}}} \operatorname{sgn}\left(\tilde{\tilde{\sigma}}_1\right) \operatorname{sgn}\left(\tilde{\tilde{\sigma}}_2\right) \left[A_1 \otimes \ldots \otimes A_r\right]_{\tilde{\tilde{\sigma}}_1}^{\tilde{\tilde{\sigma}}_2} = \\ = A_1 \wedge \ldots \wedge A_r. \quad (3.34)$$

Первый пункт утверждения доказан.

Теперь, опираясь на операцию внешнего произведения, построим разложение для произвольного антисимметричного тензора, учитывающее симметрию (предыдущее разложение тензоров было не совсем физичным, поскольку не учитывало симметрию системы, что является очень важным для описания некоторых систем, например, систем фермионов).

Разложение произвольного антисимметричного тензора

Сначала сформулируем утверждения касательно базиса в пространстве антисимметричных тензоров и размерности этого пространства (рекомендуется доказать их самостоятельно).

Утверждение 3.5. *Пусть:* $\xi_1, \ldots, \xi_N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})_0^1$, $\omega^1, \ldots, \omega^N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})_1^0$, $p, q = \overline{0, N}, p + q \geq 1$.

Тогда $\left\{\xi_{m_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{m_q} \wedge \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_p}\right\}_{1 \leq m_1 < \ldots < m_q \leq N}^{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq N}$ *- базис в* $(\Omega\mathcal{L})_p^q$.

Утверждение 3.6. *Пусть:* $\xi_1, \ldots, \xi_N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})_0^1$, $\omega^1, \ldots, \omega^N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})_1^0$, $p, q = \overline{0, N}$.

Тогда:

$$\dim (\Omega\mathcal{L})_p^q = C_N^p C_N^q. \quad (3.35)$$

Сформулируем вспомогательное утверждение относительно числовых наборов (коэффициентов разложения), в дальнейшем оно нам пригодится.

Утверждение 3.7 (Вспомогательное)**.** *Пусть:* $\xi_1, \ldots, \xi_N \in (T\mathcal{L})_0^1$, $\omega^1, \ldots, \omega^N \in (T\mathcal{L})_1^0$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $p + q \geq 1$.

Пусть далее: $C \in \mathbb{K}^{(N, q+p)}$ *(числовой набор),* C *- антисимметричный.*

Тогда:

$$C_{k_1,\ldots,k_p}^{m_1,\ldots,m_q} \xi_{m_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{m_q} \otimes \omega^{k_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{k_p} = \frac{1}{p!q!} C_{k_1,\ldots,k_p}^{m_1,\ldots,m_q} \xi_{m_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{m_q} \wedge \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_p} \quad (3.36)$$

Доказательство

Проведём следующие, в сущности простые, но утомительные выкладки (с учётом (2.16)):

$$\frac{1}{p!q!}C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p}=$$
$$=\frac{1}{p!q!}C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\frac{1}{0!1!\cdot\ldots\cdot 0!1!1!0!\cdot\ldots\cdot 1!0!}\sum_{\substack{\sigma_1\in S_p\\ \sigma_2\in S_q}}\operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\cdot$$
$$\cdot\left[\xi_{m_1}\otimes\ldots\otimes\xi_{m_q}\otimes\omega^{k_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{k_p}\right]^{\sigma_2}_{\sigma_1}=$$
$$\frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma_1\in S_p\\ \sigma_2\in S_q}}\operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\cdot\xi_{m_{\sigma_2^{-1}(1)}}\otimes\ldots\otimes\xi_{m_{\sigma_2^{-1}(q)}}\otimes\omega^{k_{\sigma_1^{-1}(1)}}\otimes\ldots\otimes\omega^{k_{\sigma_1^{-1}(p)}}\tag{3.37}$$

Поскольку C - антисимметричен, то можно поменять индексы местами, домножая на знаки соответствующих перестановок, тогда (3.37) примет вид:

$$\frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma_1\in S_p\\ \sigma_2\in S_q}}C^{m_{\sigma_2^{-1}(1)},\dots,m_{\sigma_2^{-1}(q)}}_{k_{\sigma_1-1(1)},\dots,k_{\sigma_1^{-1}(p)}}\xi_{m_{\sigma_2^{-1}(1)}}\otimes\ldots\otimes\xi_{m_{\sigma_2^{-1}(q)}}\otimes\omega^{k_{\sigma_1^{-1}(1)}}\otimes\ldots\otimes\omega^{k_{\sigma_1^{-1}(p)}}\tag{3.38}$$

Вспомним, что в наших записях мы пользуемся правилом суммирования Эйнштейна, тогда из (3.38) видно, что индексы при m и k повторяются, то есть по ним будет проводиться сумма. Это значит, что нет никакой разницы, нумеровать их с помощью знаков обратных перестановок $\sigma^{-1}_{1,2}$ или просто цифрами, поскольку при суммировании они всё равно будут пробегать все свои значения. Тогда (3.38) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{p!q!}C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p}=$$
$$=\frac{1}{\cancel{p!q!}}\cancel{\sum_{\substack{\sigma_1\in S_p\\ \sigma_2\in S_q}}}^{\cancel{p!q!}}\underbrace{C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\xi_{m_1}\otimes\ldots\otimes\xi_{m_q}\otimes\omega^{k_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{k_p}}_{\text{не зависит от }\sigma_{1,2}}=$$
$$=C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\xi_{m_1}\otimes\ldots\otimes\xi_{m_q}\otimes\omega^{k_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{k_p}.\tag{3.39}$$

Опять мы видим, что слагаемые не зависят от $\sigma_{1,2}$, и опять так и было с самого начала.

Таким образом, утверждение доказано.

Теперь сформулируем главное утверждение этого пункта.

Утверждение 3.8. *Пусть:* $\xi_1,\dots,\xi_n$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^1_0$, $\omega^1,\dots,\omega^N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^0_1$, $p,1\in\mathbb{Z}_+$, $p+q\geq 1$.

Пусть далее: e - базис в $\mathcal{L}$; обозначим:

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_k^m &= (\xi_k(e))^m \text{ при } k,m=\overline{1,N}; && (3.40)\\
\overline{\overline{\xi}} &= \overline{\xi}^{-1}; && (3.41)\\
\overline{\omega}_k^m &= (\omega^m(e))_k \text{ при } k,m=\overline{1,N}; && (3.42)\\
\overline{\overline{\omega}} &= \overline{\omega}^{-1}. && (3.43)
\end{aligned}$$

Пусть, кроме того, $Q\in\mathbb{K}^{(N,q+p)}$. Обозначим:

$$R(Q)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} = Q^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}\cdot\overline{\overline{\xi}}^{m_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot\overline{\overline{\xi}}^{m_q}_{j_q}\cdot\overline{\overline{\omega}}^{i_1}_{k_1}\cdot\ldots\cdot\overline{\overline{\omega}}^{i_p}_{k_p}, \tag{3.44}$$

при $k_1,\ldots,k+p=\overline{1,N}$, $m_1,\ldots,m_q=\overline{1,N}$.

Тогда:

1.Пусть: $A\in(\Omega\mathcal{L})^q_p$. Тогда

$$A=\frac{1}{p!q!}R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p}. \tag{3.45}$$

2.Пусть: $C\in\mathbb{K}^{(N,q+p)}$, C - антисимметричный, и

$$A=\frac{1}{p!q!}C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p}. \tag{3.46}$$

Тогда

$$C=R\Big(A(e)\Big). \tag{3.47}$$

Доказательство этого утверждения (без формулировки) будет в следующей лекции.

Лекция 4

Тензорная алгебра (Часть 4)

Разложение произвольного антисимметричного тензора (Продолжение)

Перейдём к доказательству утверждения, сформулированного в конце предыдущей лекции.

Доказательство

1. Очевидно, что:

$$A = R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\cdot\xi_{m_1}\otimes\ldots\otimes\xi_{m_q}\otimes\omega^{k_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{k_p} = \\ = \frac{1}{p!q!}R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\cdot\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p}. \quad (4.1)$$

Действительно, ведь по условию тензор A - антисимметричен, значит и числовой набор $R\Big(A(e)\Big)$ тоже антисимметричен. Тогда из доказанного вспомогательного утверждения 3.7 непременно следует выражение (4.1).

Первый пункт утверждения доказан.

2. Очевидно (из доказанного пункта 1), что:

$$A = \frac{1}{p!q!}C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\cdot\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p} = \\ = C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\cdot\xi_{m_1}\otimes\ldots\otimes\xi_{m_q}\otimes\omega^{k_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{k_p}. \quad (4.2)$$

Тогда из (4.2) и утверждения 2.5 пункта 2 непременно следует, что

$$C = R\Big(A(e)\Big). \quad (4.3)$$

Итак, утверждение доказано.

Таким образом, у нас имеются 2 разложения тензоров. Теперь мы получим третье разложение, без нормировочного множителя, но с упорядочением индексов при суммировании. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Утверждение 4.1 (Вспомогательное). *Пусть:* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* $\mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$*;* $N\in\mathbb{N}$, $p,q=\overline{0,N}$, $p+q\geq 1$.

Пусть далее: $\Big\{A^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\Big\}^{m_1,\ldots,m_q=\overline{1,N}}_{k_1,\ldots,k_p=\overline{1,N}}$ *- семейство элементов* $\mathbb{K}$*, антисимметричное по индексам с номерами* $1,\ldots,q$ *и по индексам с номерами* $q+1,\ldots,q+p$*;* $\Big\{B^{k_1,\ldots,k_p}_{m_1,\ldots,m_q}\Big\}^{k_1,\ldots,k_p=\overline{1,N}}_{m_1,\ldots,m_q=\overline{1,N}}$ *- семейство элементов* $\mathcal{L}$*, антисимметричное по индексам с номерами* $1,\ldots,p$ *и по индексам с номерами* $p+1,\ldots,p+q$.

Тогда:

$$\sum_{\substack{1\leq k_1<\ldots<k_p\leq N\\ 1\leq m_1<\ldots<m_q\leq N}} A^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}B^{k_1,\ldots,k_p}_{m_1,\ldots,m_q} = \frac{1}{p!q!}A^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}B^{k_1,\ldots,k_p}_{m_1,\ldots,m_q}. \quad (4.4)$$

Доказательство

Распишем правую часть выражения (4.4). Поскольку семейства A и B - антисимметричны, то в суммах в правой части (4.4) много нулей. В таком случае уберём ненужные слагаемые из суммы:

$$\frac{1}{p!q!}A^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}B^{k_1,\dots,k_p}_{m_1,\dots,m_q} = \\ = \frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{k_1,\dots,k_p=\overline{1,N}\\ k_1,\dots,k_p \text{ - различны.}}}\ \sum_{\substack{m_1,\dots,m_q=\overline{1,N}\\ m_1,\dots,m_q \text{ - различны.}}} A^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}B^{k_1,\dots,k_p}_{m_1,\dots,m_q}. \tag{4.5}$$

Мы получили суммы по неупорядоченным наборам, их можно представить как суммирование по упорядоченным наборам, а потом суммирование по всевозможным перестановкам этих упорядоченных наборов. Тогда можем переписать (4.5) в виде (с учётом того, что наборы антисимметричны, помним, что можно менять местами индексы, домножая на знак перестановки):

$$\frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{k_1,\dots,k_p=\overline{1,N}\\ k_1,\dots,k_p \text{ - различны.}}}\ \sum_{\substack{m_1,\dots,m_q=\overline{1,N}\\ m_1,\dots,m_q \text{ - различны.}}} A^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}B^{k_1,\dots,k_p}_{m_1,\dots,m_q} = \\ = \frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{1\le k_1<\dots<k_p\le N\\ 1\le m_1<\dots<m_q\le N}}\ \sum_{\substack{\sigma_1\in S_p\\ \sigma_2\in S_q}} A^{m_{\sigma_2(1)},\dots,m_{\sigma_2(q)}}_{k_{\sigma_1(1)},\dots,k_{\sigma_1(p)}}B^{k_{\sigma_1(1)},\dots,k_{\sigma_1 p}}_{m_{\sigma_2(1)},\dots,m_{\sigma_2(q)}} = \\ = \frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{1\le k_1<\dots<k_p\le N\\ 1\le m_1<\dots<m_q\le N}}\ \sum_{\substack{\sigma_1\in S_p\\ \sigma_2\in S_q}} \cancel{\mathrm{sgn}(\sigma1)\cdot\mathrm{sgn}(\sigma_2)}A^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\cdot\cancel{\mathrm{sgn}(\sigma_1)\cdot\mathrm{sgn}(\sigma_2)}B^{k_1,\dots,k_p}_{m_1,\dots,m_q} = \\ = \frac{1}{\cancel{p!q!}}\sum_{\substack{1\le k_1<\dots<k_p\le N\\ 1\le m_1<\dots<m_q\le N}}\ \overset{\cancel{p!q!}}{\cancel{\sum_{\substack{\sigma_1\in S_p\\ \sigma_2\in S_q}}}} A^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}B^{k_1,\dots,k_p}_{m_1,\dots,m_q}. \tag{4.6}$$

Таким образом, вспомогательное утверждение доказано.

Теперь мы можем сформулировать утверждение о третьем разложении.

Утверждение 4.2. *Пусть:* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* $\mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$*,* $N\in\mathbb{N}$*,* $\dim(\mathcal{L}) = N$*;* $\xi_1,\dots,\xi_N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^1_0$*,* $\omega^1,\dots,\omega^N$ *- базис в* $(T\mathcal{L})^0_1$*;* $p,q=\overline{0,N}$*,* $p+q\ge 1$*.*

Пусть e *- базис в* $\mathcal{L}$*; введём матрицы:*

$$\overline{\xi}^m_k = \Big(\xi_k(e)\Big)^m \text{ при } k,m=\overline{1,N} \tag{4.7}$$

$$\overline{\overline{\xi}} = \overline{\xi}^{-1}; \tag{4.8}$$

$$\overline{\omega}^m_k = \Big(\omega^m(e)\Big)_k \text{ при } k,m=\overline{1,N}; \tag{4.9}$$

$$\overline{\overline{\omega}} = \overline{\omega}^{-1}. \tag{4.10}$$

Пусть $Q \in \mathbb{K}^{(N,q+p)}$. *Обозначим:*

$$R(Q)^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = Q^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\xi}}^{m_q}_{j_q} \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_1}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{\omega}}^{i_p}_{k_p} \tag{4.11}$$

при $k_1, \dots, k_p, m_1, \dots, m_q = \overline{1, N}$.

1.Пусть $A \in (\Omega\mathcal{L})^q_p$. *Тогда*

$$A = \sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_p\le N \\ 1\le m_1<\ldots<m_q\le N}} R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} \cdot \xi_{m_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{m_q} \wedge \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_p}. \tag{4.12}$$

2.Пусть: $C \in \mathcal{L}^{(N,q+p)}$, C *- антисимметричен по индексам с номерами* $1, \dots, q$ *и по индексам с номерами* $q+1, \dots, q+p$,

$$A = \sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_p\le N \\ 1\le m_1<\ldots<m_q\le N}} C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} \xi_{m_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{m_q} \wedge \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_p}. \tag{4.13}$$

Тогда:

$$C = R\Big(A(e)\Big). \tag{4.14}$$

3.Пусть $\Big\{C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p}\Big\}^{1\le m_1<\ldots<m_q\le N}_{1\le k_1<\ldots<k_p\le N}$ *- семейство элементов* $\mathbb{K}$. *Пусть далее:*

$$A = \sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_p\le N \\ 1\le m_1<\ldots<m_q\le N}} C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} \cdot \xi_{m_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{m_q} \wedge \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_p}. \tag{4.15}$$

Тогда:

$$C^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} = R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} \tag{4.16}$$

при $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z}, 1 \le k_1 < \ldots < k_p \le N$; $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{Z}, 1 \le m_1 < \ldots < m_q \le N$.

Доказательство

Будем доказывать каждый пункт.

1.Очевидно, что:

$$A = \frac{1}{p!q!} R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} \underline{\xi_{m_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{m_q} \wedge \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_p}} =$$
$$= \sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_p\le N \\ 1\le m_1<\ldots<m_q\le N}} R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\dots,m_q}_{k_1,\dots,k_p} \xi_{m_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{m_q} \wedge \omega^{k_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k_p}. \tag{4.17}$$

Действительно, ведь подчёркнутые члены - это тензоры, которые образуют линейное пространство (по сути - это семейства элементов из $\mathbb{K}$), значит, здесь действует, установленное нами, вспомогательное утверждение 4.1.

2.Несложно увидеть, что:

$$A = \sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_p\le N\\ 1\le m_1<\ldots<m_q\le N}} C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p} =$$

$$= \frac{1}{p!q!}C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p}. \quad (4.18)$$

Действительно, если заменить в (4.17) $R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}$ на $C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}$, то получится (4.18) толко в обратном порядке.

Тогда из (4.17) и (4.18) несложно увидеть, что:

$$C = R\Big(A(e)\Big). \quad (4.19)$$

3.Поскольку представленные в этом пункте семейства сложно устроены (их индексы упорядочены), то сослаться на первый результат лекции здесь не получится, ведь понятие антисимметричности для них не имеет смысла. Сперва нужно достроить это семейство до полноценного антисимметричного числового набора.

Нетрудно доказать, что существует числовой набор $\widetilde{C}$, удовлетворяющий условиям: $\widetilde{C}\in\mathbb{K}^{(N,q+p)}$, $\widetilde{C}$ - антисимметричный по индексам с номерами $1,\ldots,q$ и по индексам с номерами $q+1,\ldots,q+p$. При этом:

$$\widetilde{C}^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} = C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \quad (4.20)$$

при $k_1,\ldots,k_p\in\mathbb{Z}$, $1\le k_1<\ldots<k_p\le N$; $m_1,\ldots,m_q\in\mathbb{Z}$, $1\le m_1<\ldots<m_q\le N$.

Поскольку в сумме (4.15) используются только упорядоченные наборы, то мы можем записать:

$$A = \sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_p\le N\\ 1\le m_1<\ldots<m_q\le N}} C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p} =$$

$$= \sum_{\substack{1\le k_1<\ldots<k_p\le N\\ 1\le m_1<\ldots<m_q\le N}} \widetilde{C}^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p}\xi_{m_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{m_q}\wedge\omega^{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{k_p}. \quad (4.21)$$

Тогда из (4.21) и второго пункта настоящего утверждения следует, что:

$$\widetilde{C} = R\Big(A(e)\Big), \quad (4.22)$$

и, если вспомнить, как был построен набор $\widetilde{C}$, получаем, что:

$$C^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} = \widetilde{C}^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} = R\Big(A(e)\Big)^{m_1,\ldots,m_q}_{k_1,\ldots,k_p} \quad (4.23)$$

при $k_1,\ldots,k_p\in\mathbb{Z}$, $1\le k_1<\ldots<k_p\le N$; $m_1,\ldots,m_q\in\mathbb{Z}$, $1\le m_1<\ldots<m_q\le N$.

Утверждение доказано.

Альтернативные способы построения тензорной алгебры

В самом начале первой лекции мы упомянули, что понятие тензора можно определить разными способами (не только через геометрические объекты). Было бы не правильно не упомянуть эти способы, поэтому в данном пункте мы скажем пару слов о других способах построения тензорной алгебры. Для этого нам понадобятся некоторые понятия из линейной алгебры. Вспомним, что такое сопряжённое пространство и сопряжённый (дуальный) базис.

Замечание 4.1. *Пусть* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $\mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(\mathcal{L}) = N$*;* $p, q \in \mathbb{Z}_+$*,* $p + q \geq 1$*.*

Пусть далее $e = (e_1, \ldots, e_N)$ *- базис в* $\mathcal{L}$*.*

$\mathcal{L}^*$ *- это сопряжённое к* $\mathcal{L}$ *пространство (пространство непрерывных линейных функционалов). В этом пространстве, как и в* $\mathcal{L}$*, можно выбрать базис:*

$$\omega^1, \ldots, \omega^N \in \mathcal{L}^*. \tag{4.24}$$

Элементы в (4.24) *- это линейные функционалы (их, конечно, можно применить к векторам). Можно подобрать (причём единственным образом) такой набор линейных функционалов* (4.24)*, что:*

$$\omega^m(e_k) = \delta_k^m. \tag{4.25}$$

Такой набор называется сопряжённым (или дуальным) базисом, и он обозначается, как e^**:*

$$e^* = \Big((e^*)^1, \ldots, (e^*)^N\Big). \tag{4.26}$$

Пусть:

$$A : (\mathcal{L}^*)^q \times \mathcal{L}^p \Rightarrow \mathbb{K}. \tag{4.27}$$

То есть A - числовая функция $q + p$ аргументов (q ковекторов (линейных функционалов) и p векторов):

$$A\left(\underbrace{a^1, \ldots, a^q}_{\in \mathcal{L}^*}, \underbrace{x_1, \ldots, x_p}_{\in \mathcal{L}}\right) \in \mathbb{K}. \tag{4.28}$$

Пусть теперь A - полилинейная функция (линейная по каждому аргументу).

Попробуем вычислить значения функции A (расписать в явном виде). Квадратными скобками будем обозначать координату вектора в квадратных скобках, а индекс координаты у ковекторов будем писать снизу квадратной скобки, а у векторов - сверху.

Пусть: $a^1, \ldots, a^q \in \mathcal{L}^*$, $x_1, \ldots, x_p \in \mathcal{L}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} &A\big(a^1, \ldots, a^q, x_1, \ldots, x_p\big) = \\ &\quad = A\Big(\big[A^1\big]_{m_1}(e^*)(e^*)^{m_1}, \ldots, \big[A^q\big]_{m_q}(e^*)(e^*)^{m_q}, [x_1]^{k_1}(e)e_{k_1}, \ldots, [x_p]^{k_p}(e)e_{k_p}\Big) \end{aligned} \tag{4.29}$$

Суммы и числовые коэффициенты мысленно выводим за скобки, так как A - полилинейная функция, тогда (4.29) можно переписать, как:

$$\begin{aligned} &A\big(a^1, \dots, a^q, x_1, \dots, x_p\big) = \\ &= \left[a^1\right]_{m_1}(e^*)\cdot \ldots \cdot \left[a^q\right]_{m_q}(e^*)\cdot \left[x_1\right]^{k_1}(e)\cdot \ldots \cdot \left[x_p\right]^{k_p}(e)\cdot A\big((e^*)^{m_1}, \dots, (e^*)^{m_q}, e_{k_1}, \dots, e_{k_p}\big). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Заметим, что (4.30) - это, по сути, свёртка координат с числовым набором.

Нетрудно доказать, что этот числовой набор при переходе к другому базису будет преобразовываться по тензорному закону.

То есть, всякой полилинейной форме A мы поставили в соответствие тензор.

Можно сделать всё наоборот, определить функцию A через тензор (разумеется, всё это законно, доказательства предлагается сделать самостоятельно).

Таким образом, возникает взаимно однозначное соответствие между полилинейными формами и тензорами.

Это и есть альтернативный способ построения тензорной алгебры. Несмотря на то, что он более понятен, в нашем курсе тензоры определяются через геометрические объекты, поскольку в дальнейшем предложенный в данном пункте способ построения тензорной алгебры встретит затруднения в отличии от определения через геометрические объекты.

Теоретико-множественная топология (Часть 1)

Для дальнейшего развития курса нам понадобятся некоторые результаты теории множеств. Поскольку данная теория выходит за рамки нашего курса, то сперва изложим некоторые необходимые понятия из теории множеств, а в дальнейшем элементы этой теории будут появляться по мере необходимости.

Необходимые понятия из теории множеств

Определение 4.1. *Пусть A - множество. Обозначим:*

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\} \tag{4.31}$$

Выражение (4.31) - это множество всех подмножеств A. Его ещё называют «множество-степень».

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{1, 2\}$, тогда $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Заметим, что если в A находится n элементов, то в $P(A)$ находится 2^n элементов.

Существует несколько теорий множеств, поскольку у данной области весьма спорный «фундамент», и приходится идти на компромисс.

Основные теории множеств на данный момент:

1) ZF (Цермело-Френкеля)

2) NBG (Неймана-Бернайса-Гёделя)

В них нет ничего, кроме множеств (элементы множества - это тоже множества). Для нас это будет не очень удобно. Введём определения.

Определение 4.2. *Будем говорить, что Q - это множество множеств, если:*

1) Q - множества;

2) $\forall A \in Q\,(A-$ множество$)$.

С такими множествами множеств введём несколько операций.

Введём операцию объединения множества. Для этого представим само множество множеств, как мешок с маленькими мешочками, в которых находятся элементы (См. рис. 4.1). Тогда объединением $\bigcup Q$ будем называть «мешок», в который высыпали все элементы из мешков, находящихся в мешке Q.

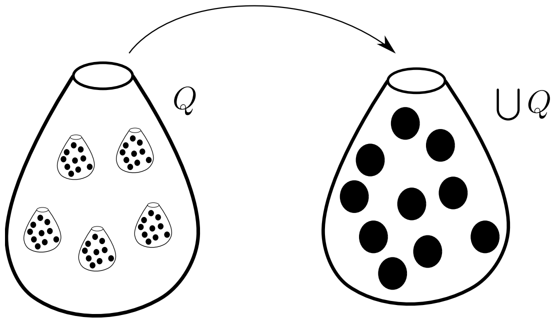

Рис. 4.1. Иллюстрация для объединения множества

Сформулируем определение.

Определение 4.3. *Пусть Q - множество множеств. Обозначим:*

$$\bigcup Q = \Big\{x : \exists A(A \in Q \wedge x \in A)\Big\}. \tag{4.32}$$

Запись (4.32) называется операторной. Иногда мы будем пользоваться и кванторной записью, в ней выражение (4.32) примет вид:

$$\bigcup_{A\in Q} A = \Big\{x : \exists A(A \in Q \wedge x \in A)\Big\}. \tag{4.33}$$

Введём понятие множества, замкнутого в себе относительно объединения.

Определение 4.4. *Пусть Q - множество множеств. Будем говорить, что Q - замкнуто относительно операции объединения, если $\forall \mu \subseteq Q\Big(\bigcup \mu \in Q\Big)$.*

Чтобы интуитивно представить себе такое множество, представим, что Q - это мешок с маленькими мешочками, и если взять какой-либо пустой мешок (назовём его μ) и положить в него несколько мешочков из мешка Q и завязать, то в результате мешок μ будет в точности таким же, как какой-либо из мешочков внутри Q (См. рис. 4.2).

Выясним, принадлежит ли пустое множество, как элемент, множеству, замкнутому в себе относительно объединения.

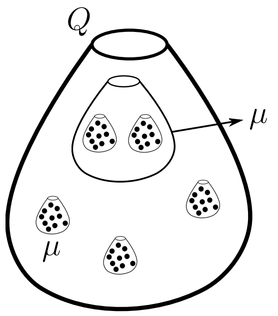

Рис. 4.2. Иллюстрация множества, замкнутого в себе относительно объединения

Утверждение 4.3. *Пусть: Q - множество множеств, и Q - замкнутая система (относительно операции объединения).*
Тогда $\varnothing \in Q$.

Доказательство
Обозначим: $\mu = \varnothing$. Тогда, по свойству пустого множества $\mu \subseteq Q$. Очевидно, что объединение пустого множества является пустым множеством (это несложно проверить непосредственно из определения пустого множества), то есть $\bigcup \mu = \varnothing$.

Таким образом, несложно увидеть следующую логическую цепочку (поскольку Q - замкнуто): $\varnothing = \bigcup \mu \in Q$. Утверждение доказано.

Поскольку есть замкнутые системы множеств (множества множеств), то естественно есть и незамкнутые системы множеств. Тогда возникает вопрос, как из незамкнутой системы множеств сделать замкнутую. Определим процедуру замыкания.

Определение 4.5. *Пусть Q - множество множеств. Обозначим:*

$$[Q] = \underline{\left\{ \bigcup \mu : \mu \subseteq Q \right\}} = \left\{ A : \exists \mu \Big(\mu \subseteq Q \wedge A = \bigcup \mu \Big) \right\}. \tag{4.34}$$

В определении процедуры замыкания (4.34) *подчёркнуто формально не совсем правильная (жаргонная) формулировка, после которой мы записали правильную форму. Поскольку, что не сложно видеть, иногда жаргонная запись сокращает письмо и не умаляет смысла, мы будем ей тоже пользоваться.*

Убедимся, действительно ли множество, полученное с помощью замыкания, является замкнутым.

Утверждение 4.4. *Пусть Q - множество множеств.*
Тогда:

1) $Q \subseteq [Q]$.

2) Пусть $\forall \mu \subseteq Q (\bigcup \mu \in Q)$. Тогда $[Q] = Q$.

3) Пусть $[Q] = Q$. Тогда $\forall \mu \subseteq Q (\bigcup \mu \in Q)$.

4) $\Big[[Q] \Big] = [Q]$.

Доказательство

Будем доказывать каждый пункт.

1. Пусть $A \in Q$. Обозначим: $\mu = \{A\}$.

Тогда: $\mu \subseteq Q$, $\bigcup \mu = A$ (ведь μ состоит из одного элемента - самого A).

Следовательно: $A = \bigcup \mu \in [Q]$.

Поскольку элемент A был выбран произвольно, то исходя из вышесказанного можно заключить, что любой элемент Q принадлежит $[Q]$, а это и означает, что $Q \subseteq [Q]$.

Лекция 5

Теоретико-множественная топология (Часть 2)

Необходимые понятия из теории множеств (продолжение)

Итак, дополним и докажем предыдущее утверждение.

Утверждение 5.1. *1) Пусть Q - множество множеств. Тогда $[Q]$ - множество множеств.*

2) Пусть Q - множество множеств. Тогда $Q \subseteq [Q]$.

3) Пусть Q - множество множеств, Q - замкнуто (относительно операции объединения). Тогда $[Q] = Q$.

4) Верно и обратное. Пусть Q - множество множеств, $[Q] = Q$. Тогда Q - замкнуто (относительно операции объединения).

5) Пусть Q - множество множеств. Тогда $[Q]$ - замкнуто (относительно операции объединения).

6) Пусть Q_1 и Q_2 - множества множеств, $Q_1 \subseteq Q_2$. Тогда $[Q_1] \subseteq [Q_2]$.

Доказательство

Будем доказывать каждый пункт.

1. Из определения очевидно, что $[Q]$ - множество. Пусть $A \in [Q]$. Тогда существует множество μ, удовлетворяющее условиям: $\mu \subseteq Q, A = \bigcup \mu$ (это следует из определения операции замыкания). Следовательно A - множество. Значет, в силу произвольности выбора A, любой элемент Q является множеством.

2. Пусть $A \in Q$. Обозначим: $\mu = \{A\}$. Тогда: $\mu \subseteq Q$; $\bigcup \mu = A$. Следовательно (по определению операции замыкания (4.34)) $A \in [Q]$. В силу произвольности выбора $A \in Q$ получаем, что $Q \subseteq [Q]$.

3. Очевидно (смотри предыдущий пункт), $Q \subseteq [Q]$. Пусть $A \in [Q]$. Тогда существует множество μ, удовлетворяющее условиям: $\mu \subseteq Q$, $A = \bigcup \mu$. Следовательно $A = \bigcup \mu \in Q$ (так как Q по условию замкнуто). Тогда, в силу произвольности выбора $A \in [Q]$, $[Q] \subseteq Q$. С учётом предыдущего пункта получаем, что $[Q] = Q$.

4. Пусть $\mu \subseteq Q$. Тогда $\bigcup \mu \in [Q] = Q$. В силу произвольности выбора $\mu \subseteq Q$ и с учётом определения замкнутости (относительно операции объединения) получаем, что Q - замкнуто (относительно операции объединения).

5.Пусть $\mu \subseteq [Q]$. Тогда рассмотрим объединение μ (здесь и далее, при необходимости сделать комментарий, он будет вписан в квадратные скобки между знаками равенств):

$$\bigcup \mu = \bigcup_{A \in \mu} A = \left[\begin{array}{l} \text{Пусть } A \in \mu. \text{ Тогда } A \in \mu \subseteq [Q] \\ \text{Следовательно существует множество } \mu_0(A), \\ \text{удовлетворяющее условиям: } \mu_0(A) \subseteq Q; A = \bigcup \mu_0(A) \end{array} \right] =$$
$$= \bigcup_{A \in \mu} \bigcup \mu_0(A) = \bigcup \bigcup_{A \in \mu} \mu_0(A) \in [Q]. \quad (5.1)$$

Здесь мы до знака равенства взяли объединение множества $\mu_0(A)$ а потом стали варьировать параметр A и объединять элементы получавшихся множеств в одно большое, после знака равенства мы поменяли местами объединение по вариации параметра A и объединение элементов получившегося множества. Нетрудно увидеть, что такая смена объединений не изменяет результата. Таким образом, в силу произвольности выбора $\mu \subseteq [Q]$ получаем, что $[Q]$ - замкнутое (относительно операции объединения).

6. Пусть $A \in [Q_1]$. Тогда существует множество μ, удовлетворяющее условиям: $\mu \subseteq Q_1$, $A = \bigcup \mu$. Следовательно:

$$\left.\begin{array}{l} \mu \subseteq Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow \mu \subseteq Q_2 \\ A = \bigcup \mu \end{array}\right| \Rightarrow A \in [Q_2]\,. \tag{5.2}$$

Итак, в силу произвольности выбора $A \in [Q_1]$ и в силу (5.2) получаем, что $[Q_1] \subseteq [Q_2]$.

Утверждение доказано.

Теперь, наконец, мы можем ввести понятие топологического пространства.

Топологические пространства

В математическом анализе на «эпсилон-дельта» языке вводилось понятие открытого множества. Далее можно было сделать (но не было сделано) понятие топологии множества (как набора всех открытых подмножеств данного множества).

Но можно сделать это и в обратном порядке (что будет более общим случаем). Сейчас мы сначала введём свойства топологии, а потом назовём множества топологии открытыми. Сформулируем соответвтующие определения.

Определение 5.1. *Пусть M - множество, $\tau \subseteq P(M)$(τ - некая совокупность подмножеств множества M).*

Пусть справедливы следующие утверждения:

1) $M \in \tau$;

2) $\forall A_1 \in \tau \forall A_2 \in \tau (A_1 \bigcap A_2 \in \tau)$;

3) $\forall \mu \subseteq \tau (\bigcup \mu \in \tau)$, то есть τ - замкнуто (относительно операции объединения).

Будем говорить, что τ - топология на множестве M; упорядоченная пара (M, τ) - топологическое пространство; M - носитель топологического пространства (M, τ); τ - топология пространства (M, τ).

Рассмотрим два элементарных примера топологических пространств.

Пример 1.Пусть: M - множество, $\tau = \{\varnothing, M\}$. Тогда (M, τ) - топологическое пространство. Несложно самостоятельно убедиться в выполнении условий определения топологии τ.

Замечание 5.1. *Поскольку τ - замкнуто (относительно операции объединения), то $\varnothing$ всегда будет входить в τ (этот результат был получен в предыдущих лекциях).*

Пример 2. Пусть: M - множество, $\tau = P(M)$. Тогда (M, τ) - топологическое пространство. Предлагается проверить это самостоятельно.

Замечание 5.2. *Топология, введённая в примере 1, является наименьшей возможной, которую можно ввести на множестве M, а топология, введённая в примере 2, является - наибольшей.*

Замечание 5.3. *Разумеется на одном и том же множестве M можно, в общем случае, ввести различные топологии.*

Теперь, когда мы ввели понятие топологии и топологического пространства, мы можем переопределить в новом виде некоторые основные понятия математического анализа. Сформулируем для них отдельное замечание.

Замечание 5.4. *Пусть (M, τ) - топологическое пространство.*

1) *Будем говорить, что A - открытое множество в (M, τ), если $A \in \tau$.*

2) *Пусть $x_0 \in M$. Будем говорить, что ω - окрестность точки x_0, если: $\omega \in \tau$, $x_0 \in \omega$.*

   Заметим, что теперь окрестностью точки является не только открытые круги, но и любые другие открытые множества, содержащие данную точку (См. рис. 5.1).

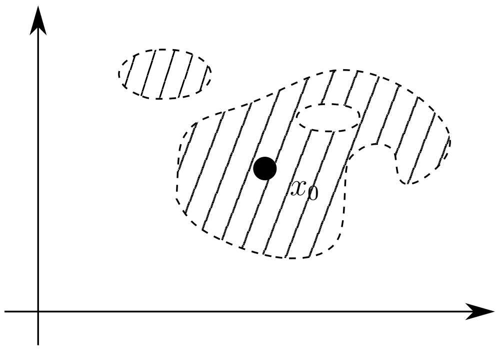

Рис. 5.1. Окрестность точки x_0 (заштрихована)

3) *Теперь можно ввести окрестность не только точки, но и множества. Пусть $A \subseteq M$. Будем говорить, что ω - окрестность множества A, если: $\omega \in \tau$, $A \subseteq \omega$.*

4) *Будем говорить, что (M, τ) - хаусдорфово пространство, если:*

   $\forall x_1 \in M\ \forall x_2 \in M\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \omega_1$ *(ω_1 - окрестность x_1)* $\exists \omega_2$ *(ω_2 - окрестность x_2)* $(\omega_1 \bigcap \omega_2 = \varnothing)$).

5) *Пусть $A \subseteq M$. Будем говорить, что x_0 - внутренняя точка множества A, если: $x_0 \in M$, $\exists \omega$ (ω - окрестность x_0) ($\omega \subseteq A$).*

   Пусть $A \subseteq M$. Обозначим через $int(A)$ множество всех внутренних точек множества A (иногда это множество называют «внутренностью» A).

   Пусть $A \subseteq M$. Тогда $int(A) \subseteq A$ (каждая внутренняя точка множества является точкой этого множества).

   Пусть $A \subseteq \tau$. Тогда $int(A) = A$ (если A - открыто, то вокруг каждой его точки найдётся окрестность, принадлежащая A, значит $A \subseteq int(A)$, что вместе с предыдущим абзацем даёт равенство).

   Верно и обратное. Пусть $A \subseteq M$, $int(A) = A$. Тогда $A \in \tau$.

6) *Пусть $A \subseteq M$. Будем говорить, что x_0 - граничная точка множества A, если: $x_0 \in M$, $\forall \omega$ (ω - окрестность x_0) $\exists x_1 \in \omega$ $\exists x_2 \in \omega$ ($x_1 \in A \wedge x_2 \notin A$).*

   Например, в стандартной топологии на плоскости точка окружности является граничной точкой круга (См. рис. 5.2).

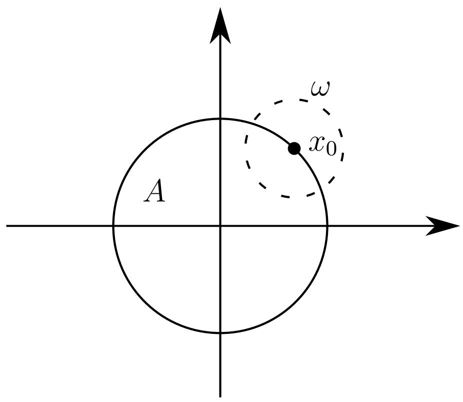

Рис. 5.2. x_0 - граничная точка множества A, так как в любой окрестности ω этой точки есть как точки множества A, так и точки ему не принадлежащие

Пусть $A \subseteq M$. Обозначим через ∂A множество всех граничных точек множества A (иногда это множество называют «границей» A).

Заметим, что граница в топологии и в геометрии - это различные понятия. Так, если взять какую-либо поверхность, то с точки зрения топологии, все точки этой поверхности будут граничными (поскольку их окрестности в топологии должны быть трёхмерными), поэтому на рис. 5.3 с точки зрения топологии обе отмеченные точки являются граничными, а с геометрическое точки зрения - нет.

В нашем курсе будут только топологические границы, поэтому мы не будем вводить лишних обозначений, чтобы различать эти типы границ.

Пусть $A \subseteq M$. Тогда $int(A) \bigcap \partial A = \varnothing$.

Пусть $A \subseteq M$. Тогда $\partial(M \backslash A) = \partial A$.

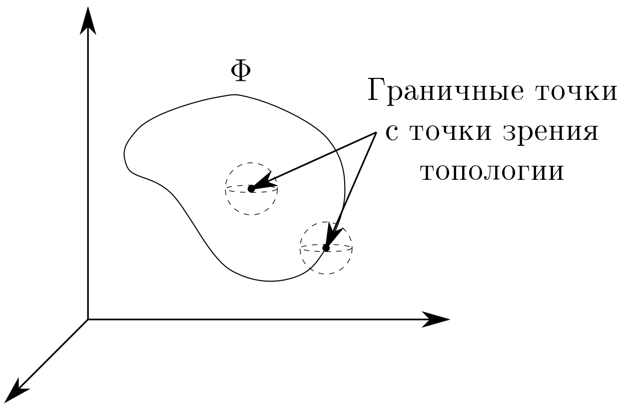

Рис. 5.3. Различие граничных точек в топологии и геометрии

7) *Пусть $A \subseteq M$. Будем говорить, что x_0 - <u>предельная точка множества</u> A, если: $x_0 \in M$, $\forall \omega$ (ω — окрестность x_0) $\exists x \in \omega$ ($x \in A \wedge x \neq x_0$).*

8) *Будем говорить, что A - <u>замкнутое множество</u> в пространстве (M, τ), если: $A \subseteq M$, $\partial A \subseteq A$ (Здесь и далее, если мы подразумеваем замкнутость множества, то по умолчанию считаем именно такую замкнутость).*

   Пусть $A \subseteq M$. Обозначим: $\overline{A} = A \bigcup \partial A$.

   Пусть $A \subseteq M$. Тогда $\overline{A}$ - замкнутое множество (это утверждение легко доказать, но оно не является очевидным само по себе, поскольку $\partial A \subseteq A \bigcup \partial A = \overline{A}$, а для доказательства замкнутости нужно проверить, что $\partial \overline{A} \subseteq \overline{A}$, то есть убедиться, что не появилось новых границ).

9) *Пусть $A \subseteq M$. Будем говорить, что x_0 - <u>точка прикосновения множества</u> A, если: $x_0 \in M$, $\forall \omega$ (ω — окрестность x_0) $\exists x \in \omega (x \in A)$.*

   Пусть $A \subseteq M$. Тогда $A \bigcup \partial A$ - множество всех точек прикосновения множества A.

   Пусть $A \subseteq M$. Тогда $int(A) \bigcup \partial A$ - множество всех точек прикосновения множества A.

10) *Будем говорить, что A - <u>регулярное множество</u> в пространстве (M, τ), если: $A \subseteq M$, $A \neq \varnothing$, $A \subseteq \overline{int(A)}$ (то есть, если к любой точке множества A можно сколь угодно близко подойти, ступая только по внутренним точкам множества A).*

    Может показаться, что любое множество является регулярным, но это не так, чтобы продемонстрировать это, приведём пример нерегулярного множества на плоскости в стандартной топологии (См. рис. 5.4), в нём отдельная точка не входит в $\overline{int(A)}$.

    Объясним, зачем нам нужно понятие регулярного множества. В математическом анализе дифференцирование функции удобно вводить во внутренних точках области определения, но для интегрирования уже понадобятся границы. Тогда всё, что связанно с дифференцированием и производными мы

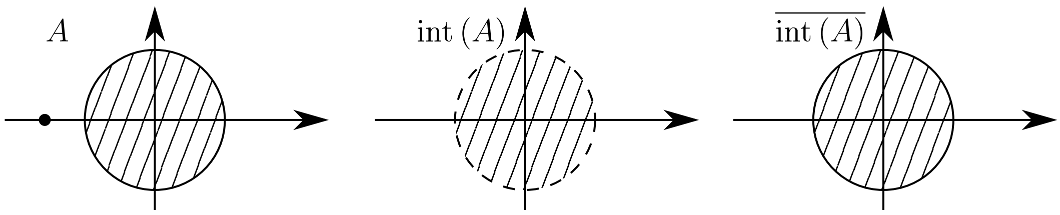

Рис. 5.4. Пример нерегулярного множества

будем строить во внутренних точках, но чтобы определить производные на границах понадобится сделать предельный переход производной изнутри области определения функции, поскольку у производной могут быть проблемы на границе области определения. Например, если функция определена в круге, а нужно посчитать её производную в верхней точке по координате x_1 (См. рис. 5.5), то составить разностное соотношение, для определения производной не получится, но производную можно будет определить через предельный переход.

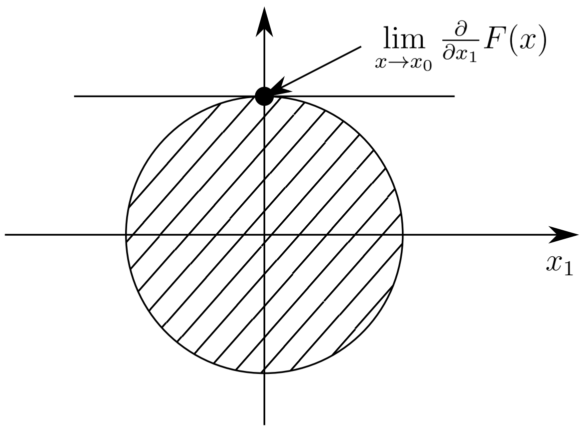

Рис. 5.5. Определение производной на границе области определения

11) *Пусть $A \subseteq M$. Будем говорить, что μ - <u>открытое покрытие множества</u> A, если: $\mu \subseteq \tau$, $A \subseteq \bigcup \mu$. Например, в стандартной топологии на плоскости, у круга может быть открытое покрытие в виде, трёх открытых кругов (См. рис. 5.6).*

Пусть $A \subseteq M$, μ - открытое покрытие множества A. Будем говорить, что μ_0 - <u>подпокрытие</u> покрытия μ, если: $\mu_0 \subseteq \mu$, $A \subseteq \bigcup \mu_0$.

Будем говорить, что A - <u>компактное множество</u> в пространстве (M, τ), если: 1)$A \subseteq M$; 2)для любого множества μ, удовлетворяющего условию: μ - открытое покрытие множества A, существует множество μ_0, удовлетворяющее условиям: $\mu_0 \subseteq \mu$, $A \subseteq \bigcup \mu_0$, μ_0 - конечное множество. То есть, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Например, если у нас есть отрезок от 0 до 1, и есть система интервалов с центрами в точках $\frac{1}{n}$, которые пересекаются, но не заходят за центры со-

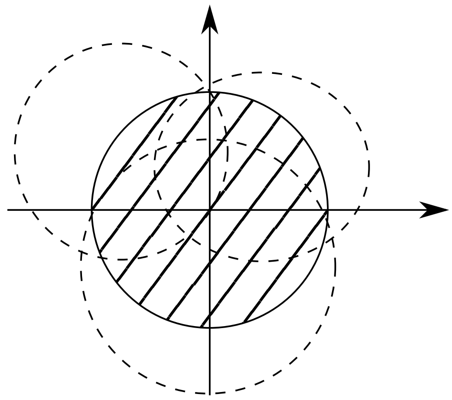

Рис. 5.6. Возможное открытое покрытие круга

седних, и какой-либо интервал, который покрывает точку 0. Тогда понятно, что из неё можно выделить конечное число интервалов (покрывающий нуль, и интервалы, покрывающие остальную часть отрезка). То есть, у этого открытого покрытия не нарушается условие компактности отрезка. Но если у нас интервал от 0 до 1, и есть та же система интервалов с центрами в точках $\frac{1}{n}$*, но без интервала, покрывающего нуль, то эта система также является открытым покрытием интервала от 0 до 1, но из неё нельзя выделить конечное число интервалов, которые будут покрывать интервал от 0 до 1. То есть, интервал от 0 до 1 не является компактным (См. рис. 5.7).*

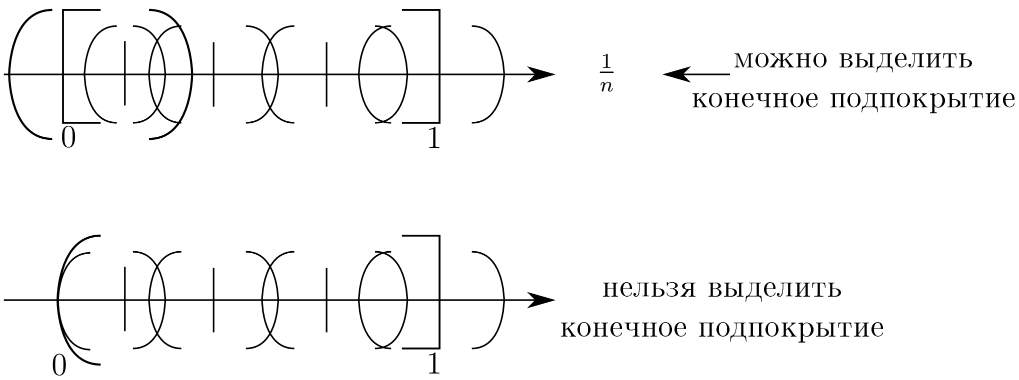

Рис. 5.7. Пример компактного и не компактного множеств на вещественной прямой

В конечномерном пространстве есть лемма Гейне-Бореля.

Лемма 5.1 (Гейне-Бореля)**.** *Если Q - замкнутое и ограниченное множество, то из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.*

Обратное тоже верно. Поэтому для любого линейного конечномерного пространства компактное и замкнутое ограниченное множества - это одно и то же.

Но в бесконечномерном пространстве это не так.

12) *Пусть $x_0 \in M$. Будем говорить, что μ - определяющая система окрестностей точки x_0 (сейчас всё чаще вместо этого говорят, что μ - база окрестностей точки x_0), если:*

   а) *μ - множество;*

   б) *$\forall \omega \in \mu(\omega$ — окрестность $x_0)$;*

   в) *$\forall \omega_1(\omega_1$ — окрестность $x_0)$ $\exists \omega_2 \in \mu(\omega_2 \subseteq \omega_1)$.*

   Будем говорить, что пространство (M, τ) удовлетворяет 1-й аксиоме счётности, если для любой точки $x_0 \in M$ существует множество μ, удовлетворяющее условиям: μ - определяющая система окрестностей точки x_0, μ - конечное либо счётное множество.

13) *Будем говорить, что B - база топологии τ, если: $B \subseteq \tau$, $\tau \subseteq [B]$.*

   Будем говорить, что пространство (M, τ) удовлетворяет 2-й аксиоме счётности, если существует множество B, удовлетворяющее условиям: B - база топологии τ, B - конечное либо счётное множество.

Теперь обсудим понятие компактного множества.

Утверждение 5.2. *Пусть: (M, τ) - хаусдорфово топологическое пространство; A - компактное множество в (M, τ), $x_0 \in M$, $x \notin A$.*

Тогда существуют множества Ω_1, Ω_2, удовлетворяющие условиям: Ω_1 - окрестность A, Ω_2 - окрестность точки x_0, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$.

Доказательство

Пусть $A = \varnothing$. Обозначим: $\Omega_1 = \varnothing$, $\Omega_2 = M$. Тогда: Ω_1 - окрестность множества A, Ω_2 - окрестность точки x_0, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$.

Пусть $A \neq \varnothing$. Фиксируем $x \in A$. Тогда: $x, x_0 \in M$, $x \neq x_0$. Следовательно (из хаусдорфовости пространства) существуют множества $\omega_1(x, x_0), \omega_2(x, x_0)$, удовлетворяющие условиям: $\omega_1(x, x_0)$ - окрестность x, $(\omega_2(x, x_0)$ — окрестность $x_0)$, $\omega_1(x, x_0) \bigcap \omega_2(x, x_0) = \varnothing$.

Тогда множество вида $\{\omega_1(x, x_0) : x \in A\}$ - открытое покрытие множества A (ведь в него входят окрестности, покрывающие каждую точку множества A). Следовательно (из компактности множества A) существует число $r \in \mathbb{N}$, и существуют точки $x_1, \ldots, x_r \in A$, удовлетворяющие условию: $\{\omega_1(x_1, x_0), \ldots, \omega_1(x_r, x_0)\}$ - открытое покрытие множества A.

Обозначим:

$$\Omega_1 = \bigcup_{k=\overline{1,r}} \omega_1(x_k, x_0), \tag{5.3}$$

$$\Omega_2 = \bigcap_{k=\overline{1,r}} \omega_2(x_k, x_0). \tag{5.4}$$

Тогда: Ω_1 - окрестность множества A (поскольку открытое покрытие множества A); Ω_2 - окрестность точки x_0 (поскольку пересечение конечного числа окрестностей точки x_0); $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$ (предлагается проверить самостоятельно).

Утверждение доказано.

Лекция 6

Теоретико-множественная топология (Часть 3)

База топологии

Обсудим связь определяющей системы окрестностей с базой топологии.

Утверждение 6.1 (Без доказательства)**.** *Пусть (M, τ) - топологическое пространство.*

1) Пусть: B - база топологии τ, $x_0 \in M$, $\mu = \{\omega : \omega \in B \wedge x_0 \in \omega\}$.
Тогда μ - определяющая система окрестностей точки x_0.

2) Пусть: $\mu(x_0)$ - определяющая система окрестностей точки x_0 при $x_0 \in M$; $B = \bigcup\limits_{x_0 \in M} \mu(x_0)$.
Тогда B - база топологии τ.

Может показаться, что мы установили взаимно однозначную связь между системой определяющих окрестностей и базой топологии, но это не так, поскольку операции, введённые в утверждении 6.1 не являются взаимно обратными.

Утверждение 6.2. *Пусть (M, τ) - топологическое пространство.*

1) Пусть B - база топологии τ.
Тогда $B \subseteq P(M)$, $[B] = \tau$.

2) Пусть: $B \subseteq P(M)$, $[B] = \tau$.
Тогда B - база топологии τ.

Доказательство
Будем доказывать по пунктам.
1. Так как: $B \subseteq \tau$, $\tau \subseteq P(M)$, то $B \subseteq P(M)$.
Так как $B \subseteq \tau$, то $[B] \subseteq [\tau]$, но $[\tau] = \tau$ (топология замкнута). Тогда $[B] \subseteq \tau$.
Так как $\tau \subseteq [B]$, то $[B] = \tau$.
2. Очевидно, что: $B \subseteq [B] = \tau$, $\tau \subseteq \tau = [B]$. Значит B - база топологии.
Утверждение доказано.
Таким образом, мы получили ещё одно (эквивалентное) определение базы топологии.

Исходя из вышесказанного, можно предположить, что мы B можем задавать произвольно (не зная топологии), и существует критерий того, что τ, образованное базой B является топологией.

Действительно, такой критерий существует. Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 6.3. *Пусть: M - множество, $B \subseteq P(M)$.*

1) Пусть $[B]$ - топология на множестве M.

Тогда:

а) $\bigcup B = M$;

б) $\forall \omega_1 \in B\ \forall \omega_2 \in B\ (\omega_1 \bigcap \omega_2 \in [B])$.

2) Пусть: $\bigcup B = M$; $\forall \omega_1 \in B\ \forall \omega_2 \in B\ (\omega_1 \bigcap \omega_2 \in [B])$.

Тогда $[B]$ - топология на M.

Доказательство

Будем доказывать каждый пункт.

1. Так как $B \subseteq P(M)$, то $\bigcup B \subseteq M$.

Так как $[B]$ - топология на множестве M, то $M \in [B]$. Тогда существует множество μ, удовлетворяющее условиям: $\mu \subseteq B$, $M = \bigcup \mu$.

Следовательно $M = \bigcup \mu \subseteq \bigcup B$. Тогда (из двух противоположных включений) следует равенство $M = \bigcup B$.

Пусть $\omega_1, \omega_2 \in B$. Так как $B \subseteq [B]$, то $\omega_1, \omega_2 \in [B]$. Так как $[B]$ - топология, то $\omega_1 \bigcap \omega_2 \in [B]$.

2. Так как $B \subseteq P(M)$, то $[B] \subseteq P(M)$. Обозначим: $\mu = B$. Тогда $\mu \subseteq B$, $\bigcup \mu = M$. Следовательно (из определения операции замыкания) $M \in [B]$.

Пусть $A_1, A_2 \in [B]$. Тогда (из того же определения замыкания) существуют множества μ_1, μ_2, удовлетворяющие условиям: $\mu_1, \mu_2 \subseteq B$, $A_1 = \bigcup \mu_1$, $A_2 = \bigcup \mu_2$.

Очевидно, что:

$$A_1 \bigcap A_2 = \left(\bigcup \mu_1\right) \bigcap \left(\bigcup \mu_2\right) = \left(\bigcup_{\omega_\omega \in \mu_1} \omega_1\right) \bigcap \left(\bigcup_{\omega_\omega \in \mu_2} \omega_2\right) = \bigcup_{\substack{\omega_1 \in \mu_1 \\ \omega_2 \in \mu_2}} \left(\omega_1 \bigcap \omega_2\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Пусть: } \omega_1 \in \mu_1, \omega_2 \in \mu_2. \text{ Тогда } \omega_1, \omega_2 \in B. \\ \text{Следовательно, существует множество } \mu_0(\omega_1, \omega_2), \\ \text{удовлетворяющее условиям: } \mu_0(\omega_1, \omega_2) \subseteq B, \omega_1 \bigcap \omega_2 = \bigcup \mu_0(\omega_1, \omega_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \bigcup_{\substack{\omega_1 \in \mu_1 \\ \omega_2 \in \mu_2}} \bigcup \mu_0(\omega_1, \omega_2) = \bigcup \underbrace{\left(\bigcup_{\substack{\omega_1 \in \mu_1 \\ \omega_2 \in \mu_2}} \mu_0(\omega_1, \omega_2)\right)}_{\in B} \in [B]. \quad (6.1)$$

Очевидно, что $[B]$ - замкнутая система множеств (это было доказано в утверждении 5.1 пункте 5).

Итак, $[B]$ - топология на множестве M, поскольку утовлетворяет всем аксиомам топологии.

Утверждение доказано, и теперь мы нашли критерии для множества B, удовлетворяя которым, это множество может быть базой топологии.

Метрическое пространство и его стандартная топология

В этом пункте мы совершим переход из топологии в метрические пространства. Для начала вспомним определения.

Определение 6.1. *Пусть: M - множество, $\rho : M \times M \Rightarrow \mathbb{R}$.*
Пусть справедливы следующие утверждения:

1) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ (\rho(x, y) = \rho(y, x))$;

2) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ \forall z \in M\ (\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z))$;

3) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ (x \neq y \Leftrightarrow \rho(x, y) \neq 0)$.

Будем говорить, что (M, ρ) - метрическое пространство, ρ - метрика пространства (M, ρ).

Заметим, что из второй и третьей аксиом метрического пространства следует, что расстояние между двумя точками неотрицательно.

Действительно, записывая вторую аксиому, предполагая, что $z = x$, с учётом третьей и первой аксиом, имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)\\ z = x\end{array}\right| \Rightarrow \underbrace{\rho(x,x)}_{=0} \leq \rho(x,y) + \underbrace{\rho(y,x)}_{=\rho(x,y)} \Rightarrow 2\rho(x,y) \geq 0 \Rightarrow \rho(x,y) \geq 0. \tag{6.2}$$

Сделаем замечание, касательно связи метрических и топологических пространств.

Замечание 6.1. *Пусть (M, ρ) - метрическое пространство.*
1. Пусть: $x_0 \in M$, $\delta \in (0, +\infty)$. Обозначим:

$$B_\delta(x_0) = \{x : x \in M \wedge \rho(x, x_0) < \delta\}. \tag{6.3}$$

Множество (6.3) называется δ-окрестностью точки x_0 или открытым шаром радиуса δ с центром в точке x_0.
2. Будем говорить, что A - открытое множество в пространстве (M, ρ), если: $A \subseteq M$, $\forall x_0 \in A\ \exists \delta \in (0, +\infty)\ (B_\delta(x_0) \subseteq A)$.
Пример открытого множества на вещественной плоскости представлен на рис. 6.1.
3. Обозначим через τ_ρ множество всех открытых множеств в пространстве (M, ρ).
4. Справедливо следующее утверждение: τ_ρ - топология на множестве M.
5. Пусть $x_0 \in M$, $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - последовательность положительных вещественных чисел, пусть далее $\epsilon_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.
Обозначим:

$$\mu = \underbrace{\{B_{\epsilon_k}(x_0) : k \in \mathbb{N}\}}_{\text{жаргон}} = \{u : \exists k (k \in \mathbb{N} \wedge u = B_{\epsilon_k}(x_0))\}. \tag{6.4}$$

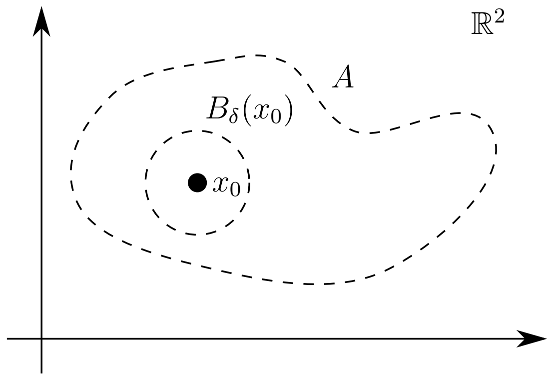

Рис. 6.1. Открытое множество на вещественной плоскости

Тогда μ - определяющая система окрестностей точки x_0.

Таким образом, в метрическом пространстве существует конечная либо счётная определяющая система окрестностей (система может быть конечной, потому что число точек в метрическом пространстве вообще говоря может быть конечным).

Теперь мы видим, что метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности, однако остаётся вопрос, удовлетворяет ли метрическое пространство второй аксиоме счётности. Для ответа на этот вопрос сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 6.4. *Пусть (M, ρ) - метрическое пространство.*

Пусть: $M_0 \subseteq M$, $\overline{M_0} = M$ (это означает, что M_0 - всюду плотное множество); $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - последовательность положительных вещественных чисел, $\epsilon_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Пусть далее:

$$B = \underbrace{\{B_{\epsilon_k}(x_0) : x_0 \in M_0 \wedge k \in \mathbb{N}\}}_{\text{жаргон}} = \{u : \exists x_0 \exists k (x_0 \in M_0 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge u = B_{\epsilon_k}(x_0))\}\,. \tag{6.5}$$

Тогда B - база топологии τ_ρ.

Итак, если в метрическом пространстве есть конечное либо счётное всюду плотное множество (такое метрическое пространство называется сепарабельным), то оно удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Перейдём к доказательству утверждения.

Доказательство

Очевидно, что $B \subseteq \tau_\rho$.

Пусть $A \in \tau_\rho$. Докажем, что $A \in [B]$.

Достаточно доказать, что $\forall x_0 \in A\ \exists \omega\ (\omega \in B \wedge x_0 \in \omega \wedge \omega \subseteq A)$.

Пусть $x_0 \in A$. Сделаем вспомогательный рисунок (См. рис. 6.2).

Так как A - открытое множество, то существует число δ, удовлетворяющее условиям: $\delta \in (0, +\infty)$, $B_\delta(x_0) \subseteq A$.

Так как $\delta > 0$, $\epsilon_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, то существует k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 \in \mathbb{N}$, $\epsilon_{k_0} \leq \frac{\delta}{2}$.

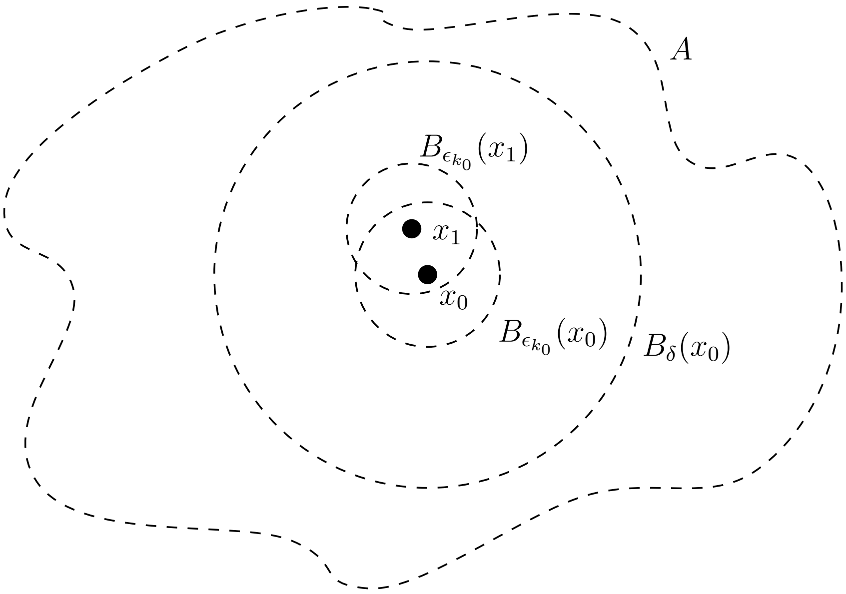

Рис. 6.2. Вспомогательный рисунок для доказательства утверждения 6.4

Так как: $x_0 \in M$, $\overline{M_0} = M$, то существует x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in M_0$, $x_1 \in B_{\epsilon_{k_0}}(x_0)$.

Теперь рассмотрим множество $B_{\epsilon_{k_0}}(x_1)$:

$$B_{\epsilon_{k_0}}(x_1) \in B, x_0 \in B_{\epsilon_{k_0}}(x_1).$$

При этом (поскольку расстояние между x_0 и x_1 меньше, чем ϵ_{k_0}):

$$B_{\epsilon_{k_0}}(x_1) \subseteq B_{2\epsilon_{k_0}}(x_0) \subseteq B_\delta(x_0) \subseteq A.$$

Таким образом, мы построили искомое множество ω (этим множеством, для фиксированной точки x_0, является множество $B_{\epsilon_{k_0}}(x_1)$). В силу того, что мы брали произвольный $x_0 \in A$, то мы доказали существование такого множества ω для любого x_0 из A.

Утверждение доказано.

Предел функции и непрерывная функция в топологическом пространстве

В данном пункте мы «догоним» математический анализ из топологии в вопросах предела и непрерывности функции. Сформулируем соответствующие определения.

Определение 6.2. *Пусть:* (M_1, τ_1), (M_2, τ_2) *- топологические пространства;* $F : M_1 \to M_2$, $x_0 \in M_1$, $y_0 \in M_2$.

Будем писать:

$$F(x) \underset{x \to x_0}{\to} y_0, \tag{6.6}$$

если:

1) x_0 *- предельная точка* $D(F)$*;*

2) $\forall \omega_2$ *(ω_2 — окрестность y_0)* $\exists \omega_1$ *(ω_1 — окрестность x_0)* $\forall x \in D(F)$

$$(x \in \omega_1 \wedge x \neq x_0 \Rightarrow F(x) \in \omega_2).$$

Определение 6.3. *Пусть: (M_1, τ_1), (M_2, τ_2) - топологические пространства; $F : M_1 \to M_2$, $x_0 \in M_1$.*
Будем говорить, что F - непрерывная функция в точке x_0, если:

1) $x_0 \in D(F)$;

2) $\forall \omega_2$ *(ω_2 — окрестность $F(x_0)$)* $\exists \omega_1$ *(ω_1 — окрестность x_0)* $\forall x \in D(F)$

$$(x \in \omega_1 \Rightarrow F(x) \in \omega_2).$$

Мы видим, что определение непрерывности не так сильно завязано на пределе, как это было в математическом анализе. Дело в том, что это определение немного более общее. Так, оно учитывает изолированные точки области определения. Сформулируем эти особенности непрерывной функции в следующем утверждении.

Утверждение 6.5. *Пусть: (M_1, τ_1), (M_2, τ_2) - топологические пространства; $F : M_1 \to M_2$, $x_0 \in M_1$.*

1) Пусть: $x_0 \in D(F)$, x_0 - предельная точка $D(F)$.

Тогда функция F - непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда:

$$F(x) \underset{x \to x_0}{\to} F(x_0). \tag{6.7}$$

2) Пусть $x_0 \in D(F)$, x_0 не является предельной точкой множества $D(F)$. Пример такого случая представлен на рисунке 6.3.

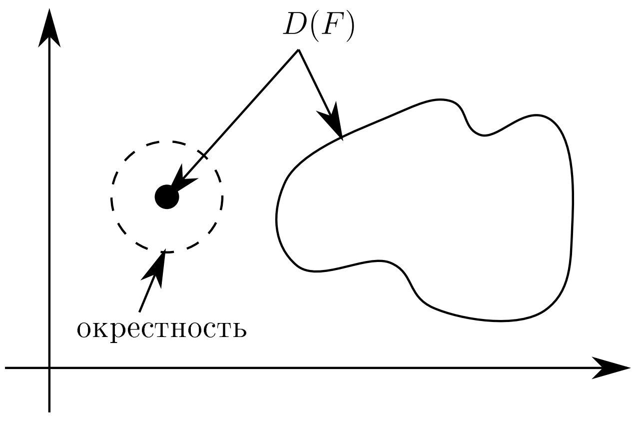

Рис. 6.3. Область определения функции с изолированной точкой

Тогда F - непрерывная функция в точке x_0. Например, такой функцией может быть функция:

$$F(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \in [0, +\infty); \\ 1 \text{ при } x = -1. \end{cases}$$

она непрерывна на всей области определения (См. рис. 6.4) (Действительно, ведь для любой окрестности ω_2 значения 1 на оси x^2 найдётся окрестность ω_1 точки -1 на оси x^1, которая будет содержать только отрицательные числа, что для «любого» x^1 из области определения в этой окрестности будет выполняться условие определения непрерывной функции).

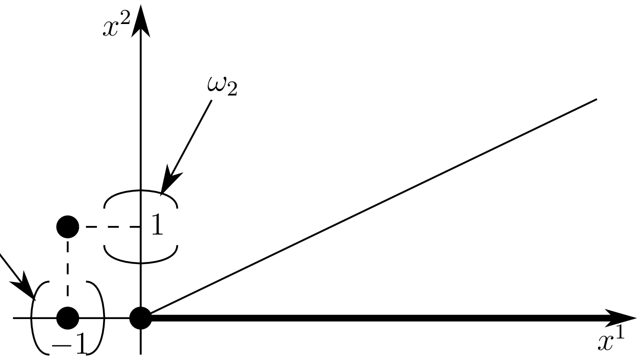

Рис. 6.4. Непрерывная на всей области определения функция

3) Пусть $x_0 \notin D(F)$. Тогда F не является непрерывной функцией в точке x_0.

Лекция 7

Теоретико-множественная топология (Часть 4)

Теперь обсудим две операции, связанные с топологиями: получение индуцированной топологии и произведение топологий.

Ранее в математическом анализе понятие индуцированной топологии уже встречалось (хотя это так и не называлось). Вспомним понятие окрестности точки на какой-либо поверхности. Бралось множество, образующее окрестность точки, оно пересекалось с множеством, образующим поверхность, и результат пересечения мы называли окрестностью точки на поверхности (См. рис. 7.1).

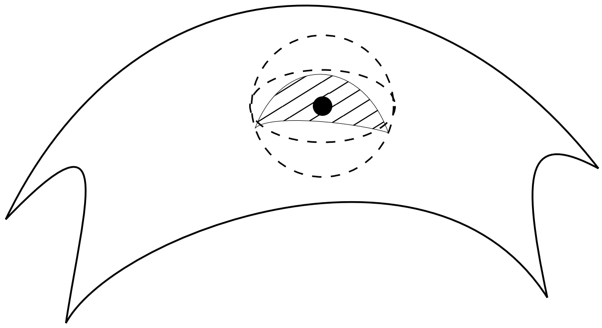

Рис. 7.1. Окрестность точки на поверхности

Окрестность точки на поверхности, как мы увидим далее, - это и есть элемент индуцированной топологии. Так же, в математическом анализе встречалось и произведение топологий.

Индуцированная топология

Определение 7.1. *Пусть: Q - множество множеств; A - множество. Обозначим:*

$$Q_A = \Big\{\omega \bigcap A : \omega \in Q\Big\} = \Big\{\omega_1 : \exists\omega_2\Big(\omega_2 \in Q \wedge \omega_1 = \omega_2 \bigcap A\Big)\Big\}. \qquad (7.1)$$

Будем называть множество (7.1) *ограничением множества множеств на множество A.*

Приведём без доказательства несколько важных и очевидных свойств ограничения множества множеств на множестве.

Утверждение 7.1 (Без доказательства)**.** *Пусть: Q - множество множеств;; A_1, A_2 - множества.*

Тогда:

$$(Q_{A_1})_{A_2} = Q_{A_1 \bigcap A_2}. \qquad (7.2)$$

Утверждение 7.2 (Без доказательства)**.** *Пусть: Q - множество множеств; A - множество.*

Тогда:

$$[Q_A] = [Q]_A\,. \qquad (7.3)$$

Утверждение 7.3 (Без доказательства). *Пусть:* (M, τ) *- топологическое пространство;* $A \subseteq M$.

Тогда τ_A *- топология на множестве* A *(такую топологию называют индуцированной).*

Примером индуцированной топологии может быть например топология, индуцированная на закрытый прямоугольник. Так «с точки зрения прямоугольника» пересечения открытых множеств с таким прямоугольником будут открытыми множествами, хотя они не будут открытыми на плоскости в общем случае, так как могут иметь граничные точки (См. рис. 7.2).

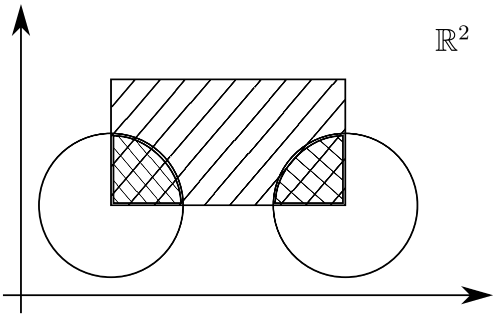

Рис. 7.2. Открытые множества на закрытом прямоугольнике

Может показаться, что такая топология не даёт ничего нового, но в общем случае это не так, всё зависит от того, на какое множество она будет индуцироваться. Так, если она будет индуцироваться на какое-нибудь сложное множество (например, на какой-нибудь фрактал), то у образованного таким образом топологического пространства могут возникать проблемы с размерностью, и появляться другие свойства.

Нас интересует не только топология, но и база.

Утверждение 7.4 (Без доказательства). *Пусть:* (M, τ) *- топологическое пространство;* B *- база топологии* τ, $A \subseteq M$.

Тогда B_A *- база топологии* τ_A.

Нетрудно убедиться в справедливости данного утверждения, поскольку:

$$[B_A] = [B]_A = \tau_A \Rightarrow B_A - \text{ база } \tau_A. \tag{7.4}$$

Наконец, отметим связь индуцированной топологии и непрерывности функции.

Утверждение 7.5 (Без доказательства). *Пусть:* (M_1, τ_1) *- топологическое пространство,* $A_1 \subseteq M_1$; (M_2, τ_2) *- топологическое пространство,* $A_@ \subseteq M_2$; $F : A_1 \to A_2$; $x_0 \in D(F)$.

1) *Пусть* F *- непрерывная функция относительно топологий* τ_1, τ_2.

   Тогда F *- непрерывная функция относительно топологий* $(\tau_1)_{A_1}, (\tau_2)_{A_2}$.

2) *Пусть* F *- непрерывная функция относительно топологий* $(\tau_1)_{A_1}, (\tau_1)_{A_2}$.

   Тогда F *- непрерывная функция относительно топологий* τ_1, τ_2.

Перейдём к произведению топологий.

Произведение топологий

Введём вспомогательную операцию (будем называть её «взволнованным произведением»).

Определение 7.2. *Пусть:*$N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, $Q^1, \ldots, Q^N$ *- множества множеств.*
Обозначим:

$$Q^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^N = \left\{\omega^1 \times \ldots \times \omega^N : \omega^1 \in Q^1 \wedge \ldots \wedge \omega^N \in Q^N\right\} = \\ = \left\{\omega_1 : \exists \omega_2^1 \ldots \exists \omega_2^N \left(\omega_2^1 \in Q^1 \wedge \ldots \wedge \omega_2^N \in Q^N \wedge \omega_1 = \omega_2^1 \times \ldots \times \omega_2^N\right)\right\} \quad (7.5)$$

Проиллюстрируем данное определение. На вещественной прямой открытыми множествами являются множества, представимые в виде объединения какой-либо совокупности интервалом (какое-либо число непересекающихся интервалов). Тогда «взволнованное произведение» двух стандартных топологий вещественной прямой будет представлять собой множества, имеющие вид какого-либо числа непересекающихся открытых прямоугольников (См. рис. 7.3).

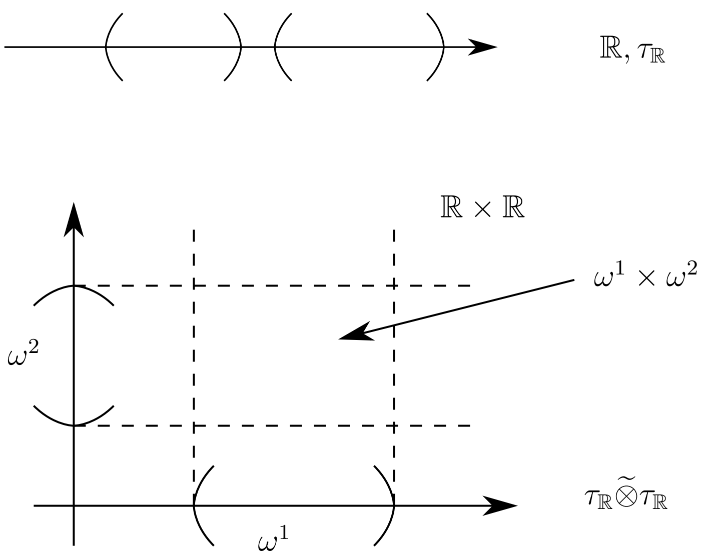

Рис. 7.3. «Взволнованное произведение» двух стандартных топологий вещественной прямой

Приведём без доказательства одно нужное нам свойство «взволнованного произведения».

Утверждение 7.6 (Без доказательства)**.** *Пусть:* $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$; Q^1, D^1 *- множества множеств,* $Q^1 \subseteq D^1$*;...;*Q^N, D^N *- множества множеств,* $Q^N \subseteq D^N$.
Тогда:

$$Q^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^N \subseteq D^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} D^N. \quad (7.6)$$

Докажем свойство «взволнованного произведения» касательно замыкания, которое будет нам необходимо для введения произведения топологий.

Утверждение 7.7. *Пусть:* $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, $Q^1, \ldots, Q^N$ *- множества множеств,* $k = \overline{1, N}$.

Тогда:

$$\left[Q^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^N\right] = \left[Q^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^{k-1} \widetilde{\otimes} \left[Q^k\right] \widetilde{\otimes} Q^{k+1} \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^N\right]. \tag{7.7}$$

Грубо говоря, не важно, в какой последовательности замыкать сомножители «взволнованного произведения».

Доказательство

Обозначим:

$$D^1 = Q^1, \ldots, D^{k-1} = Q^{k-1}, D^k = \left[Q^k\right], D^{k+1} = Q^{k+1}, \ldots, D^N = Q^N. \tag{7.8}$$

Очевидно:

$$Q^1 \subseteq D^1, \ldots, Q^N \subseteq D^N. \tag{7.9}$$

Тогда:

$$\left[Q^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^N\right] \subseteq \left[D^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} D^N\right]. \tag{7.10}$$

Для доказательства утверждения нам достаточно доказать обратное включение.

Пусть $\omega \in \left[D^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} D^N\right]$. Тогда существует множество $\mu_1(\omega)$, удовлетворяющее условиям:

$$\mu_1 \subseteq D^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} D^N,\ \omega = \bigcup \mu_1. \tag{7.11}$$

Пусть $\omega \in D^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} D^N$. Тогда существуют множества $h^1(\omega), \ldots, h^N(\omega)$, удовлетворяющие условиям:

$$h^1(\omega) \in D^1, \ldots, h^N(\omega) \in D^N,\ \omega = h^1(\omega) \times \ldots \times h^N(\omega). \tag{7.12}$$

Пусть $\omega \in D^k$. Тогда $\omega \in \left[Q^k\right]$. Следовательно, существует множество $\mu_2(\omega)$, удовлетворяющее условиям:

$$\mu_2(\omega) \subseteq Q^k,\ \omega = \bigcup \mu_2(\omega). \tag{7.13}$$

Пусть $\omega_1 \in \left[D^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} D^N\right]$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \bigcup \mu_1(\omega_1) = \bigcup_{\omega_2 \in \mu_1(\omega_1)} \omega_2 = \bigcup_{\omega_2 \in \mu_1(\omega_1)} h^1(\omega_2) \times \ldots \times h^N(\omega_2) = \\
= \bigcup_{\omega_2 \in \mu_1(\omega_1)} h^1(\omega_2) \times \ldots \times h^{k-1}(\omega_2) \times \left(\bigcup_{\omega_3 \in \mu_2\left(h^k(\omega_2)\right)} \omega_3 \right) \times h^{k+1}(\omega_2) \times \ldots \times h^N(\omega_2) = \\
= \bigcup_{\omega_2 \in \mu_1(\omega_1)} \bigcup_{\omega_3 \in \mu_2\left(h^k(\omega_2)\right)} \underbrace{h^1(\omega_2)}_{\in Q^1} \times \ldots \times \underbrace{h^{k-1}(\omega_2)}_{\in Q^{k-1}} \times \underbrace{\omega_3}_{\in Q^k} \times \underbrace{h^{k+1}(\omega_2)}_{\in Q^{k+1}} \times \ldots \times \underbrace{h^N(\omega_2)}_{\in Q^N} \in \\
\in \left[Q^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^N\right].
\end{gathered} \tag{7.14}$$

Поскольку ω_1 мы выбирали произвольно, то из (7.14) следует, что:

$$\left[D^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} D^N\right] \subseteq \left[Q^1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} Q^N\right]. \tag{7.15}$$

Итак, из (7.10) и (7.15) получаем, что:

$$\left[D^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}D^N\right] = \left[Q^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}Q^N\right]. \tag{7.16}$$

Утверждение доказано.

Теперь, наконец, определим интересующую нас операцию.

Определение 7.3. *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, $Q^1, \dots, Q^N$ - множества множеств.*
Обозначим:

$$Q^1 \otimes \dots \otimes Q^N = \left[Q^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}Q^N\right]. \tag{7.17}$$

Несложно догадаться, что «взволнованное произведение» баз топологий тоже является базой некоторой топологии. Сформулируем соответствующее утверждение без доказательства.

Утверждение 7.8 (Без доказательства)**.** *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$; M^k - множество, $B^k \subseteq P(M^k)$, $\bigcup B^k = M^k$, $\forall \omega_1 \in B^k\ \forall \omega_2 \in B^k\ \left(\omega_1 \bigcap \omega_2 \in \left[B^k\right]\right)$ при $k = \overline{1, N}$.*
Тогда:

1) $M^1 \times \dots \times M^N$ - множество;

2) $B^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}B^N \subseteq P\big(M^1 \times \dots \times M^N\big)$;

3) $\bigcup\big(B^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}B^N\big) = M^1 \times \dots \times M^N$;

4) $\forall \omega_1 \in \big(B^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}B^N\big)\ \forall \omega_2 \in \big(B^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}B^N\big)$:

$$\left(\omega_1 \bigcap \omega_2 \in \left[B^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}B^N\right]\right). \tag{7.18}$$

Прокомментируем последний пункт. Поскольку:

$$\omega_1 = \omega_1^1 \times \dots \times \omega_1^n; \tag{7.19}$$
$$\omega_2 = \omega_2^1 \times \dots \times \omega_2^N. \tag{7.20}$$

Тогда:

$$\omega_1 \bigcap \omega_2 = \underbrace{\left(\omega_1^1 \bigcap \omega_2^1\right)}_{\in[B^1]} \times \dots \times \underbrace{\left(\omega_1^N \bigcap \omega_2^N\right)}_{\in[B^N]}. \tag{7.21}$$

То есть:

$$\omega_1 \bigcap \omega_2 \in \Big[\left[B^1\right]\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}\left[B^N\right]\Big] = \left[B^1\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}B^N\right]. \tag{7.22}$$

Сформулируем утверждение о произведении топологий (без доказательства).

Утверждение 7.9 (Без доказательства)**.** *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$; $(M^1, \tau^1), \dots, (M^N, \tau^N)$ - топологические пространства.*
Тогда $\tau^1 \otimes \dots \otimes \tau^N$ - топология на множестве $M^1, \dots, M^N$.

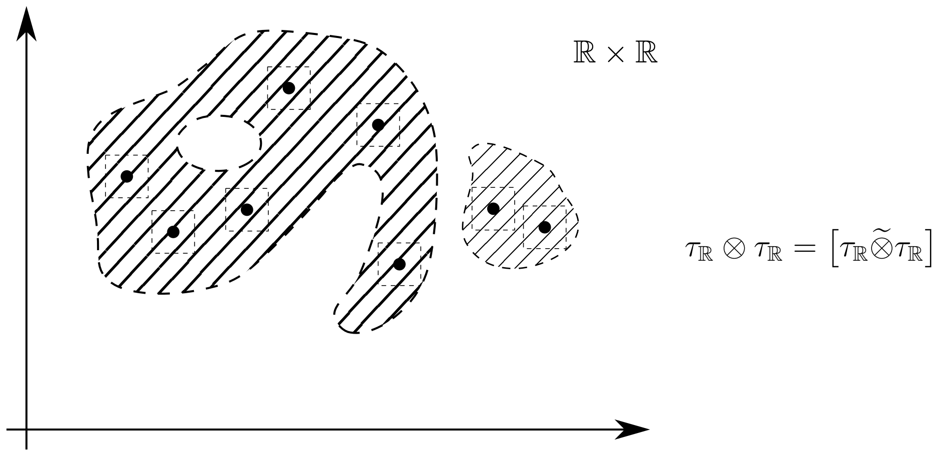

Рис. 7.4. Топология на плоскости, как произведение двух топологий на прямой

Именно так мы и получали в математическом анализе топологию на вещественной плоскости из топологии на вещественной прямой, ведь любое открытое множество на плоскости можно представить как объединение (быть может бесконечного) числа открытых прямоугольников (См. рис. 7.4).

Теперь видно, что многомерные топологические пространства можно строить, как произведение одномерных.

Поскольку нас интересуют не только топологии, но и базы, то сформулируем аналогичное утверждение для баз топологий.

Утверждение 7.10 (Без доказательства). *Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geq 2$; (M^1,τ^1) - топологическое пространство, B^1 - база топологии τ^1; $\ldots$; (M^N,τ^N) - топологическое пространство, B^N - база топологии τ^N.*

Тогда $B^1\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}B^N$ - база топологии $\tau^1\otimes\ldots\otimes\tau^N$.

Теперь вернёмся к непрерывным функциям.

Непрерывная функция в топологии

В отличии от привычного определения непрерывной функции в математическом анализе в теоретико-множественной топологии непрерывную функцию привыкли рассматривать не в точке, а сразу на всём топологическом пространстве, и сама непрерывная функция определяется иначе, без использования «эпсилон-дельта» языка. В этом пункте мы покажем, что привычное определение из математического анализа не противоречит более общему определению из топологии.

Утверждение 7.11. *Пусть: $(M_1,\tau_1),(M_2,\tau_2)$ - топологические пространства; $F: M_1\to M_2$, $A\subseteq M_2$.*

Пусть: $x_0\in int\Big(D(F)\Big)$, $F(x_0)\in int(A)$, F - непрерывна в точке x_0.

Тогда $x_0\in int\Big(D(F,A)\Big)$, где $D(F,A)$ - полный прообраз множества A для функции F:

$$D(F,A)=\{x: x\in D(F)\wedge F(x)\in A\}\,. \tag{7.23}$$

Доказательство

Так как $\operatorname{int}(A)$ - окрестность точки $F(x_0)$, F - непрерывная функция в точке x_0, то существует окрестность ω точки x_0, удовлетворяющая условию: $F[\omega] \subseteq \operatorname{int}(A)$ (здесь и далее под символом $F[A]$ мы будем подразумевать образ множества A от функции F).

Так как $\operatorname{int}\Big(D(F)\Big)$ - окрестность точки x_0, ω - окрестность точки x_0, то $\operatorname{int}\Big(D(F)\Big)\bigcap\omega$ - окрестность точки x_0. Тогда:

$$\operatorname{int}\Big(D(F)\Big)\bigcap\omega \text{ - окрестность } x_0, \tag{7.24}$$

$$\operatorname{int}\Big(D(F)\Big)\bigcap\omega \subseteq \operatorname{int}\Big(D(F)\Big) \subseteq D(F), \tag{7.25}$$

$$F\Big[\operatorname{int}\Big(D(F)\Big)\bigcap\omega\Big] \subseteq F[\omega] \subseteq \operatorname{int}(A) \subseteq A. \tag{7.26}$$

Следовательно: $\operatorname{int}\Big(D(F)\Big)\bigcap\omega$ - окрестность точки x_0; $\operatorname{int}\Big(D(F)\Big)\bigcap\omega \subseteq D(F,A)$.

Тогда, по определению внутренней точки множества, $x_0 \in \operatorname{int}\Big(D(F,A)\Big)$.

Утверждение доказано.

Наконец, мы можем дать более общее определение непрерывной функции.

Утверждение 7.12. *Пусть: $(M_1,\tau_1),(M_2,\tau_2)$ - топологические пространства; $F: M_1 \to M_2$.*

1) *Пусть: $D(F) \in \tau_1$, F - непрерывная функция на $D(F)$.*

   Тогда:
$$\forall A \in \tau_2 \Big(D(F,A) \in \tau_1\Big). \tag{7.27}$$

2) *Пусть: $\forall A \in \tau_2 \Big(D(F,A) \in \tau_1\Big)$.*

   Тогда: $D(F) \in \tau_1$, F - непрерывная функция на $D(F)$.

Это и есть новое определение непрерывности функции. Грубо говоря, функция называется непрерывной, если для неё прообраз любого открытого множества является открытым множеством.

Доказательство

Будем доказывать отдельно каждый пункт.

1. Пусть $A \in \tau_2$. Рассмотрим его прообраз $D(F,A)$. Пусть $x_0 \in D(F,A)$.

Тогда $x_0 \in D(F)$, $F(x_0) \in A$. Следовательно (из определения непрерывности функции): $x_0 \in \operatorname{int}\Big(D(F)\Big)$, $F(x_0) \in \operatorname{int}(A)$, F - непрерывная функция в точке x_0.

Тогда $x_0 \in \operatorname{int}\Big(D(F,A)\Big)$ (это следует из утверждения 7.11). В силу того, что точка $x_0 \in D(F,A)$ была выбрана произвольно, следует, что $D(F,A) \in \tau_1$. Из этого, в силу того, что множество $A \in \tau_2$ было выбрано произвольно, следует утверждение (7.27).

2. Очевидно, что $D(F,M_2) = D(F)$. Так как $M_2 \in \tau_2$, то $D(F) \in \tau_1$.

Пусть $x_0 \in D(F)$. Пусть ω_2 - окрестность точки $F(x_0)$. Рассмотрим прообраз этой окрестности $D(F,\omega_2)$.

Так как $\omega_2 \in \tau_2$, то $D(F, \omega_2) \in \tau_1$. Так как $x_0 \in D(F)$, $F(x_0) \in \omega_2$, то $x_0 \in D(F, \omega_2)$. Тогда $D(F, \omega_2)$ - окрестность точки x_0.

Следовательно, имеем: $D(F, \omega_2)$ - окрестность точки x_0, $F\Big[D(F, \omega_2)\Big] \subseteq \omega_2$. В силу произвольности выбора окрестности ω_2 точки $F(x_0)$ по определению непрерывности в точке следует, что функция F - непрерывна в точке x_0. В силу произвольности выбора $x_0 \infty D(F)$ следует, что функция F - непрерывна на множестве $D(F)$.

Утверждение доказано.

Определение 7.4. *Пусть:* $(M_1, \tau_1), (M_2, \tau_2)$ *- топологические пространства,* $A \subseteq M_1$.

Обозначим через $C\Big(A; (M_1, \tau_1), (M_2, \tau_2)\Big)$ *множество всех функций, удовлетворяющих условиям:*

1) $F : M_1 \to M_2$;

2) $A \subseteq D(F)$, $F\Big|_A$ *- непрерывная функция на* A.

Гомеоморфизм топологических пространств

Определение 7.5. *Пусть:* $(M_1, \tau_2), (M_2, \tau_2)$ *- топологические пространства.*

1) Будем говорить, что F *-* <u>*гомеоморфизм*</u> *из* (M_1, τ_1) *в* (M_2, τ_2)*, если;* F *- обратимая функция,* $D(F) \subseteq M_1$, $R(F) \subseteq M_2$; F *- непрерывная функция на* $D(F)$, F^{-1} *- непрерывная функция на* $R(F)$.

2) Пусть: $A_1 \subseteq M_1$, $A_2 \subseteq M_2$. *Будем писать* $A_1 \overset{F}{\approx} A_2$*, если:* F *- гомеоморфизм из* (M_1, τ_1) *в* (M_1, τ_2), $D(F) = A_1$, $R(F) = A_2$.

3) Пусть: $A_1 \subseteq M_1$, $A_2 \subseteq M_2$. *Будем писать* $A_1 \approx A_2$*, если* $\exists F\Big(A_1 \overset{F}{\approx} A_2\Big)$.

4) Пусть: $A_1 \subseteq M_1$, $A_2 \subseteq M_2$, $F : M_1 \to M_2$.

Будем говорить, что F <u>*гомеоморфно отображает*</u> *множество* A_1 *на множество* A_2*, если:*

$$A_1 \subseteq D(F), A_2 = F\left[A_1\right], F\Big|_{A_1} \text{ - гомеоморфизм из } (M_1, \tau_1) \text{ в } (M_2, \tau_2).$$

Сформулируем (без доказательства) некоторые очевидные свойства гомеоморфизма.

Утверждение 7.13 (Без доказательства)**.** *Пусть:* $(M_1, \tau_2), (M_2, \tau_2)$ *- топологические пространства.*

1) Пусть: F *- гомеоморфизм из* (M_1, τ_1) *в* (M_2, τ_2), $A \subseteq M_1$.

Тогда $F\Big|_A$ *- гомеоморфизм из* (M_1, τ_1) *в* (M_2, τ_2).

2) Пусть F - гомеоморфизм из (M_1, τ_1) в (M_2, τ_2).

Тогда F^{-1} - гомеоморфизм из (M_2, τ_2) в (M_1, τ_1).

3) Пусть: F - гомеоморфизм из (M_1, τ_1) в (M_2, τ_2), $D(F) \in \tau_1$, $R(F) \in \tau_2$.

Тогда:

$$\forall A \in \tau_1 \Big(F\left[A\right] \in \tau_2 \Big); \quad \forall A \in \tau_2 \Big(F^{-1}\left[A\right] \in \tau_1 \Big). \tag{7.28}$$

Сделаем небольшой комментарий относительно последнего пункта. Свойства (7.28) следует напрямую из непрерывности функций F, F^{-1} и из того, что: $F\left[A\right] \in D(F^{-1}, A)$; $F^{-1}\left[A\right] = D(F, A)$.

Утверждение 7.14 (Без доказательства)**.** *Пусть: $(M_1, \tau_1), (M_2, \tau_2), (M_3, \tau_3)$ - топологические пространства.*

Пусть далее: F_1 - гомеоморфизм из (M_1, τ_1) в (M_2, τ_2); F_2 - гомеоморфизм из (M_2, τ_2) в (M_3, τ_3).

Тогда $F_2 \circ F_1$ - гомеоморфизм из (M_1, τ_1) в (M_3, τ_3).

Лекция 8

Теоретико-множественная топология (Часть 5)

Принцип соответствия границ

Сформулируем 4 вспомогательных утверждения, из которых потом и сформулируем принцип соответствия границ.

Утверждение 8.1. *Пусть:* $(M_1, \tau_2), (M_2, \tau_2)$ *- топологические пространства;* F *- гомеоморфизм из пространства* (M_1, τ_1) *в пространство* (M_2, τ_2).

Пусть справедливы следующие утверждения:

$$\forall A (A \in \tau_1 \wedge A \subseteq D(F) \Rightarrow F[A] \in \tau_2), \tag{8.1}$$

$$\forall A \big(A \in \tau_2 \wedge A \subseteq R(F) \Rightarrow F^{-1}[A] \in \tau_1\big). \tag{8.2}$$

(В последующих трёх утверждениях эта преамбула будет опущена, но будет подразумеваться).

Пусть: $A \subseteq D(F)$, $x_0 \in int(A)$.

Тогда $F(x_0) \in int(F[A])$.

Доказательство

Так как: $\operatorname{int}(A) \in \tau_1$, $\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq D(F)$, то

$$F[\operatorname{int}(A)] \in \tau_2. \tag{8.3}$$

Так как $x_0 \in \operatorname{int}(A)$, $x_0 \in \operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq D(F)$, то

$$F(x_0) \in F[\operatorname{int}(A)]. \tag{8.4}$$

Тогда, из (8.3), (8.4), следует, что $F[\operatorname{int}(A)]$ - окрестность $F(x_0)$.

Так как $\operatorname{int}(A) \subseteq A$, то

$$F[\operatorname{int}(A)] \subseteq F[A]. \tag{8.5}$$

Тогда, поскольку $F[\operatorname{int}(A)]$ - окрестность x_0, и из (8.5) следует, что:

$$F(x_0) \in \operatorname{int}\Big(F[A]\Big). \tag{8.6}$$

Утверждение доказано.

Утверждение 8.2. *Пусть;* $A \subseteq D(F)$, $x_0 \in D(F)$, $F(x_0) \in int(F[A])$.

Тогда:

$$x_0 \in int(A). \tag{8.7}$$

Доказательство

Так как $x_0 \in D(F)$, то:

$$F(x_0) \in R(F), \tag{8.8}$$

$$F^{-1}\Big(F(x_0)\Big) = x_0. \tag{8.9}$$

Поскольку $A \subseteq D(F)$, то, очевидно, что:

$$F\left[A\right] \subseteq R(F), \tag{8.10}$$

$$F^{-1}\left[F\left[A\right]\right] = D(F) \bigcap A. \tag{8.11}$$

Так как $A \subseteq D(F)$, то из (8.10), (8.11) получаем, что:

$$F\left[A\right] \subseteq R(F), \tag{8.12}$$

$$F^{-1}\left[F\left[A\right]\right] = A. \tag{8.13}$$

Так как F - гомеоморфизм, то, очевидно, что F^{-1} - гомеоморфизм из (M_2, τ_2) в (M_1, τ_1). Тогда из (8.1), (8.2) следует, что:

$$\forall B\big(B \in \tau_2 \wedge B \subseteq R(F) \Rightarrow F^{-1}\left[B\right] \in \tau_1\big), \tag{8.14}$$

$$\forall B\Big(B \in \tau_1 \wedge B \subseteq D(F) \Rightarrow \left(F^{-1}\right)^{-1}\left[B\right] \in \tau_2\Big). \tag{8.15}$$

Тогда из (8.8), (8.12), (8.14), (8.15) и из утверждения 8.1 следует, что:

$$F^{-1}(F(x_0)) \in \operatorname{int}\left(F^{-1}\left[F\left[A\right]\right]\right) \Rightarrow x_0 \in \operatorname{int}(A). \tag{8.16}$$

Утверждение доказано.

Утверждение 8.3. *Пусть:* $A \subseteq D(F)$, $x_0 \in D(F)$, $x_0 \in \partial A$.
Тогда:

$$F(x_0) \in R(F), F(x_0) \in \partial F\left[A\right]. \tag{8.17}$$

Доказательство
Так как $x_0 \in D(F)$, то:

$$F(x_0) \in R(F), \tag{8.18}$$

$$F^{-1}\Big(F(x_0)\Big) = x_0. \tag{8.19}$$

Так как $x_0 \in D(F)$, то

$$F(x_0) \in R(F) \subseteq M_2. \tag{8.20}$$

Тогда (возможны только три варианта):

$$F(x_0) \in \operatorname{int}\Big(F\left[A\right]\Big) \vee F(x_0) \in \operatorname{int}\Big(M_2 \backslash F\left[A\right]\Big) \vee F(x_0) \in \partial F\left[A\right]. \tag{8.21}$$

Покажем, что второй и третий вариант из (8.21) неверны.
Предположим, что $F(x_0) \in \operatorname{int}\Big(F\left[A\right]\Big)$.
Тогда из утверждения 8.2 $x_0 \in \operatorname{int}(A)$, что противоречит тому, что $x_0 \in \partial A$.
Итак:

$$F(x_0) \notin \operatorname{int}\Big(F\left[A\right]\Big). \tag{8.22}$$

Предположим, что $F(x_0) \in \operatorname{int}\Big(M_2 \backslash F[A]\Big)$.

Так как $\operatorname{int}(M_2 \backslash F[A]) \in \tau_2$, то $\operatorname{int}\Big(M_2 \backslash F[A]\Big)$ - окрестность $F(x_0)$.

Так как F - непрерывная функция в точке x_0, то существует окрестность ω точки x_0, удовлетворяющая условию:

$$F[\omega] \subseteq \operatorname{int}\Big(M_2 \backslash F[A]\Big). \tag{8.23}$$

Так как $x_0 \in \partial A$, то существует точка x_1, удовлетворяющая условиям: $x_1 \in \omega$, $x_1 \in A$.

Так как $x_1 \in A \subseteq D(F)$, $x_1 \in \omega$, то

$$F(x_1) \in F[\omega]. \tag{8.24}$$

Тогда:

$$F(x_1) \in F[\omega] \subseteq \operatorname{int}\Big(M_2 \backslash F[A]\Big) \subseteq M_2 \backslash F[A]. \tag{8.25}$$

Так как $x_1 \in A \subseteq D(F)$, $x_1 \in A$, то $F(x_1) \in F[A]$, что противоречит выражению (8.25).

Итак, получили, что:

$$F(x_0) \notin \operatorname{int}\Big(M_2 \backslash F[A]\Big). \tag{8.26}$$

Из (8.21), (8.22), (8.26) окончательно получаем, что $F(x_0) \in \partial F[A]$.

Утверждение доказано.

Утверждение 8.4. *Пусть:* $A \subseteq D(F)$, $x_0 \in D(F)$, $F(x_0) \in \partial F[A]$.

Тогда:

$$x_0 \in \partial A. \tag{8.27}$$

Доказательство

Так как $x_0 \in D(F)$, то

$$F(x_0) \in R(F), \tag{8.28}$$

$$F^{-1}\Big(F(x_0)\Big) = x_0. \tag{8.29}$$

Очевидно, что:

$$F[A] \subseteq R(F), \tag{8.30}$$

$$F^{-1}\Big[F[A]\Big] = D(F) \bigcap A. \tag{8.31}$$

Так как $A \subseteq D(F)$, то:

$$F[A] \subseteq R(F), \tag{8.32}$$

$$F^{-1}\Big[F[A]\Big] = A. \tag{8.33}$$

Очевидно, что F^{-1} - гомеоморфизм из (M_2, τ_2) в (M_1, τ_1), тогда:

$$\forall B\big(B \in \tau_2 \wedge B \subseteq R(F) \Rightarrow F^{-1}[B]\, B \in \tau_1\big), \tag{8.34}$$

$$\forall B\Big(B \in \tau_2 \wedge B \subseteq D(F) \Rightarrow \left(F^{-1}\right)^{-1}[B] \in \tau_2\Big), \tag{8.35}$$

$$F[A] \subseteq R(F), F(x_0) \in R(F), F(x_0) \in \partial F[A]. \tag{8.36}$$

Тогда из утверждения 8.3 следует, что:

$$F^{-1}\Big(F(x_0)\Big) \in \partial F^{-1}\Big[F[A]\Big] \Rightarrow x_0 \in \partial A. \tag{8.37}$$

Утверждение доказано.

Из данных четырёх утверждений, наконец, сформулируем главное утверждение этого пункта.

Утверждение 8.5 (Принцип соответствия границ). *Пусть:* $(M_1, \tau_1), (M_2, \tau_2)$ *- топологические пространства;* F *- гомеоморфизм из* (M_1, τ_1) *в* (M_2, τ_2)*, и справедливы следующие утверждения:*

$$\forall A(A \subseteq D(F) \wedge A \in \tau_1 \Rightarrow F[A] \in \tau_2), \tag{8.38}$$

$$\forall A\big(A \subseteq R(F) \wedge A \in \tau_2 \Rightarrow F^{-1}[A] \in \tau_1\big). \tag{8.39}$$

1) Пусть $A \subseteq D(F)$*.*

Тогда:

$$F[int(A)] = int\Big(F[A]\Big). \tag{8.40}$$

2) Пусть $A \subseteq D(F)$*.*

Тогда:

$$F[\partial A] = R(F) \bigcap \partial F[A]. \tag{8.41}$$

3) Пусть: $A \subseteq D(F)$*,* A *- регулярное множество в пространстве* (M_1, τ_1)*.*

Тогда $F[A]$ *- регулярное множество в пространстве* (M_2, τ_2)*.*

Сделаем небольшой комментарий. Второй пункт утверждения как раз и является принципом соответствия границ. Пересечение $R(F) \bigcap \partial F[A]$ становится понятным, если учесть, что $F[\partial A] = F[D(F) \bigcap \partial A]$.

Первые два пункта практически являются следствием утверждений 8.1-8.4, поэтому докажем только третий пункт утверждения.

Доказательство

3.Очевидно, что $F[A] \subseteq R(F) \subseteq M_2$.

Так как: $A \neq \varnothing$, $A \subseteq D(F)$, то $D(F) \bigcap A \neq \varnothing$.

Тогда

$$F[A] \neq \varnothing.$$

Очевидно, что:

$$
\begin{gathered}
F\left[A\right] \subseteq F\left[\overline{\operatorname{int}\left(A\right)}\right] = F\left[\operatorname{int}\left(A\right)\bigcup\partial\operatorname{int}\left(A\right)\right] = F\left[\operatorname{int}\left(A\right)\right]\bigcup F\left[\partial\operatorname{int}\left(A\right)\right] = \\
= \left[\text{ Из второго пункта утверждения следует }\right] = \\
= F\left[\operatorname{int}\left(A\right)\right]\bigcup\left(R(F)\bigcap\partial F\left[\operatorname{int}\left(A\right)\right]\right) \subseteq F\left[\operatorname{int}\left(A\right)\right]\bigcup\partial F\left[\operatorname{int}\left(A\right)\right] = \\
= \operatorname{int}\left(F\left[A\right]\right)\bigcup\partial\operatorname{int}\left(F\left[A\right]\right) = \overline{\operatorname{int}\left(F\left[A\right]\right)}, \quad (8.42)
\end{gathered}
$$

то есть $F\left[A\right]$ - регулярное множество.

Утверждение доказано.

Рассмотрим пример, показывающий, что пересечение во втором пункте утверждения действительно стоит по существу.

Рассмотрим множество следующего вида (См. рис. 8.1):

$$
A = \left\{x : x \in \mathbb{R}^2 \wedge \|x\| \geq 1\right\}. \quad (8.43)
$$

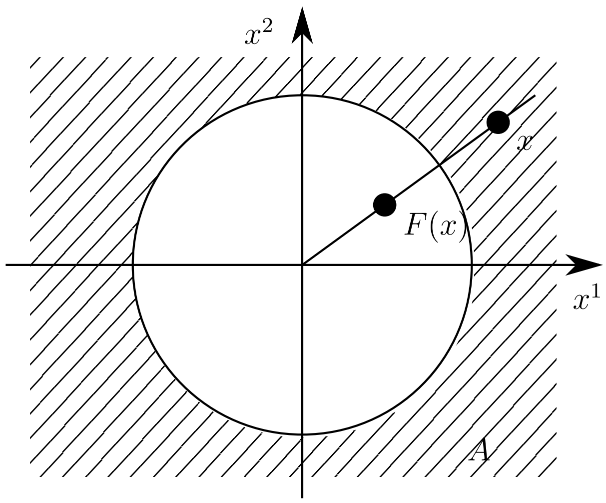

Рис. 8.1. Множество, у которого $\partial F\left[A\right] \neq F\left[\partial A\right]$

Граница этого множества имеет вид:

$$
\partial A = \left\{x : x \in \mathbb{R}^2 \wedge \|x\| = 1\right\}. \quad (8.44)
$$

Расмотрим отображение вида:

$$
F(x) = \frac{1}{\|x\|^2}x \quad \text{ при } x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0. \quad (8.45)
$$

Тогда образом множества A для этого отображения будет множество:

$$
F\left[A\right] = \left\{x : x \in \mathbb{R}^2 \wedge \|x\| \leq 1 \wedge x \neq 0\right\}. \quad (8.46)
$$

Тогда граница образа A и образ границы A отличаются на одну точку 0, в которую не переходит ни одна точка образа A. То есть для этого множества:

$$\partial F\left[A\right] \neq F\left[\partial A\right]. \tag{8.47}$$

Пересечение с множеством значений $R(F)$ отображения F как раз и отсекает эту точку.

Утверждение 8.6. *Пусть:* $(M_1, \tau_1), (M_2, \tau_2)$ *- топологические пространства;* F *- гомеоморфизм из* (M_1, τ_1) *в* (M_2, τ_2)*,* $D(F)$ *- регулярное множество в* (M_1, τ_1)*,* $R(F)$ *- регулярное множество в* (M_2, τ_2)*.*

Тогда:

$$D(F) \subseteq \overline{\Big\{x : x \in int\,(D(F)) \wedge F(x) \in int\,(R(F))\Big\}}. \tag{8.48}$$

Доказательство

Достаточно доказать, что для любой точки $x_0 \in D(F)$ и для любой окрестности ω точки x_0 существует точка x_1, удовлетворяющая условиям:

$$x_1 \in \omega, x_1 \in \operatorname{int}\Big(D(F)\Big), F(x_1) \in \operatorname{int}\Big(R(F)\Big). \tag{8.49}$$

Пусть: $x_0 \in D(F)$, $\omega_{1,0}$ - окрестность точки x_0.

Так как $D(F)$ - регулярное множество, то существует точка x_1, удовлетворяющая условиям:

$$x_1 \in \omega_{1,0}, x_1 \in \operatorname{int}\Big(D(F)\Big). \tag{8.50}$$

Обозначим:

$$\omega_{1,1} = \omega_{1,0} \bigcap \operatorname{int}\Big(D(F)\Big). \tag{8.51}$$

Тогда $\omega_{1,1}$ - окрестность точки x_1.

Обозначим:

$$y_1 = F(x_1). \tag{8.52}$$

Так как $x_1 \in D(F)$, то: $y_1 \in R(F)$, $F^{-1}(y_1) = x_1$.

Так как: F^{-1} - непрерывная функция в точке y_1, и так как $\omega_{1,1}$ - окрестность точки x_1, то существует окрестность $\omega_{2,1}$ точки y_1, удовлетворяющая условию:

$$F^{-1}\left[\omega_{2,1}\right] \subseteq \omega_{1,1}. \tag{8.53}$$

Так как $R(F)$ - регулярное множество, то существует точка y_2, удовлетворяющая условиям:

$$y_2 \in \omega_{2,1}, y_2 \in \operatorname{int}\Big(R(F)\Big). \tag{8.54}$$

Обозначим:

$$x_2 = F^{-1}(y_2). \tag{8.55}$$

Так как $y_2 \in R(F)$, то

$$x_2 \in D(F), F(x_2) = y_2. \tag{8.56}$$

Так как: $y_2 \in R(F)$, $y_2 \in \omega_{2,1}$, то $x_2 \in F^{-1}\left[\omega_{2,1}\right]$.

Тогда:

$$x_2 \in F^{-1}\left[\omega_{2,1}\right] \subseteq \omega_{1,1} \subseteq \omega_{1,0}, \tag{8.57}$$

$$x_2 \in F^{-1}\left[\omega_{2,1}\right] \subseteq \omega_{1,1} \subseteq \operatorname{int}\Big(D(F)\Big). \tag{8.58}$$

Итак, $x_2 \in \omega_{1,0}$, $x_2 \in \operatorname{int}\Big(D(F)\Big)$, $F(x_2) = y_2 \in \operatorname{int}\Big(R(F)\Big)$.
Утверждение доказано.

Гомеоморфизм в координатном пространстве

В этом пункте мы сформулируем без доказательства несколько основных свойств гомеоморфизма в координатном пространстве. Их доказательство не сложно, но требует построения соответствующего аппарата, требующего развитие довольно большой теории, лежащей вне рамок данного курса.

Итак сформулируем основные теоремы о гомеоморфизме.

Теорема 8.1. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, $N \in \mathbb{N}$; $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^N$, *F - обратимая функция;* $D(F) \in \tau_{\mathbb{K}^N}$, *F - непрерывная функция на* $D(F)$.
Тогда:

$$R(F) \in \tau_{\mathbb{K}^N}, F^{-1} \text{ - непрерывная функция }. \tag{8.59}$$

Нам известен некий «аналог» данной теоремы из ТФКП. Сформулируем его.

Теорема 8.2. *Пусть:* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *F - обратимая функция,* $D(F) \in \tau_{\mathbb{C}}$, $D(F) \neq \varnothing$, *F - аналитическая функция,* $\forall z \in D(F)$:

$$\left(\frac{d}{dz}F(z) \neq 0\right).$$

Тогда:

$$R(F) \in \tau_{\mathbb{C}}, R(F) \neq \varnothing, F^{-1} \text{ аналитическая функция }, \tag{8.60}$$

$$\forall \omega \in R(F)\left(\frac{d}{d\omega}F^{-1}(\omega) \neq 0\right). \tag{8.61}$$

Коротко говоря, теорема 8.1 говорит, что любой гомеоморфизм в $\mathbb{K}^N$ обладает необходимыми свойствами, которые нужны для выполнения принципа соответствия границ.

Утверждение 8.7 (Без доказательства)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, $N \in \mathbb{N}$, *F - гомеоморфизм из* $\mathbb{K}^N$ *в* $\mathbb{K}^N$.
Тогда:

$$\forall A(A \in \tau_{\mathbb{K}^N} \wedge A \subseteq D(F) \Rightarrow F\left[A\right] \in \tau_{\mathbb{K}^N}), \tag{8.62}$$

$$\forall A\big(A \in \tau_{\mathbb{K}^N} \wedge A \subseteq R(F) \Rightarrow F^{-1}\left[A\right] \in \tau_{\mathbb{K}^N}\big). \tag{8.63}$$

Теорема 8.3. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; *F - гомеоморфизм из* $\mathbb{K}^{N_1}$ *в* $\mathbb{K}^{N_2}$, $int\Big(D(F)\Big) \neq \varnothing$.
Тогда $N_1 \leq N_2$.

Утверждение 8.8 (Без доказательства). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; F *- гомеоморфизм из* $\mathbb{K}^{N_1}$ *в* $\mathbb{K}^{N_2}$; $int\Big(D(F)\Big) \neq \varnothing$, $int\Big(R(F)\Big) \neq \varnothing$.

Тогда $N_1 = N_2$.

То есть эти теорема и утверждение гласят, что при гомеоморфизме пространств сохраняется размерность.

В дальнейшем мы будем пользоваться этими теоремами, но будем показывать, как без них обойтись, вложив в условия дополнительную информацию.

Общие сведения о гладких функциях

Определение 8.1. *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$ *(это означает, что* r *либо натуральное число, либо равно* $+\infty$*, либо равно символу аналитичности* a*);* Q *- регулярное множество в пространстве* $\mathbb{R}^{N_1}$.

1) *Пусть* $r \in \mathbb{N}$. *Обозначим через* $C^r\big(Q; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}\big)$ *множество всех функций* F*, удовлетворяющих условиям:* $F : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$, $F\Big|_Q$ *- имеет все непрерывные производные от порядка* 0 *до порядка* r.

   Заметим, что производная во внутренних точках области определения определяется через привычное разностное соотношение, но производная на границе (там она может иметь проблемы с разностным соотношением (См. рис. 8.2)) определяется через предельное соотношение для производной.

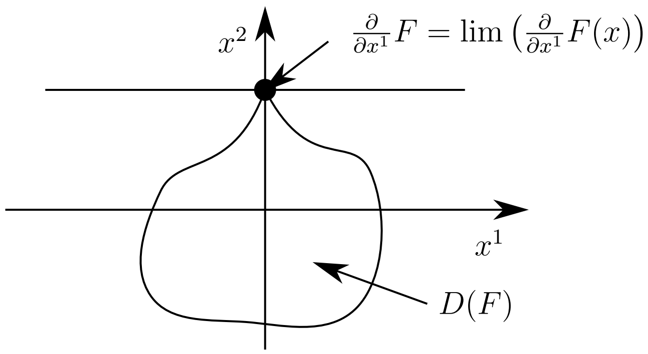

Рис. 8.2. Определение производной на границе области определения

2) *Пусть* $r = +\infty$. *Обозначим через* $C^r\big(Q; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}\big)$ *множество всех функций* F*, удовлетворяющих условиям:* $F : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$, $F\Big|_Q$ *- имеет непрерывные производные всех порядков.*

3) *Пусть* $R = a$*(символ аналитичности). Обозначим через* $C^r\big(Q; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}\big)$ *множество всех функций* F*, удовлетворяющих условиям:* $F : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$*, для любой точки* $x_0 \in Q$ *существует окрестность* ω *точки* x_0*, удовлетворяющая условиям: на множестве* $Q \bigcap \omega$ *функция* F *раскладывается в степенной ряд с центром в точке* x_0.

Вообще говоря, множества определённые в пункте 2 и в пункте 3 не равны. Приведём пример функции, которая принадлежит множеству второго пункта, но не принадлежит множеству третьего пункта.

Рассмотрим функцию:

$$F(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ при } x\in\mathbb{R}, x\neq 0; \\ \quad 0 \text{ при } x\in\mathbb{R}, x=0. \end{cases} \tag{8.64}$$

Исследуем, как ведёт себя функция (8.64) и её производные в точке $x=0$.

Нетрудно видеть, что эта функция непрерывна в этой точке:

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=0=F(0)\Rightarrow F\in C(\mathbb{R};\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{8.65}$$

Из предыдущих курсов, мы знаем, что производную в точке $x=0$ такой функции можно определить, через предел производной, то есть:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\underset{x\to 0}{\to}0. \tag{8.66}$$

И так далее.

По индукции можно доказать, что:

$$F\in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad F^{(k)}(0)=0 \text{ при } k\in\mathbb{N}. \tag{8.67}$$

То есть, ряд Тейлора функции (8.64) сходится, но сходится не к функциии (8.64), то есть $F\notin C^{a}(\mathbb{R};\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Определение 8.2. *Пусть:* $N_1,N_2\in\mathbb{N}$, $r\in\overline{\mathbb{N}}$, $F:\mathbb{R}^{N_1}\to\mathbb{R}^{N_2}$.

Будем говорить, что F *-* C^r *гладкая функция, если:*

1) $D(F)$ *- регулярное множество в* $\mathbb{R}^{N_1}$*;*

2) $F\in C^r\big(D(F);\mathbb{R}^{N_1},\mathbb{R}^{N_2}\big)$.

Лекция 9

Теоретико-множественная топология (Часть 6)

Общие сведения о гладких функциях (продолжение)

Определение 9.1. *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$*;* $F : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$, F *-* C^1*-гладкая функция,* $x_0 \in D(F)$.

Обозначим:

$$D_x F(x)\Big|_{x=x_0} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k}\, F^m(x)\Big|_{x=x_0} \right\}_{k=\overline{1,N_1}}^{m=\overline{1,N_2}}. \tag{9.1}$$

Матрица (9.1) *называется матрицей Якоби.*

Определение 9.2. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$*;* $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, F *-* C^1*-гладкая функция;* $x_0 \in D(F)$.

Обозначим:

$$\frac{D}{D_x}\, F(x)\Big|_{x=x_0} = \det\left(D_x\, F(x)\Big|_{x=x_0} \right). \tag{9.2}$$

Выражение (9.2) *- это определитель матрицы Якоби (его ещё называют Якобианом).*

Рассмотрим подробнее композицию гладких функций и выясним, в каких случаях композиция гладких функций является гладкой функцией.

Утверждение 9.1 (Без доказательства)**.** *Пусть:* $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$*;* $F_1 : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$, F_1 *-* C^r*-гладкая функция;* $F_2 : \mathbb{R}^{N_2} \to \mathbb{R}^{N_3}$, F_2 *-* C^r*-гладкая функция;* $D(F_2 \circ F_1)$ *- регулярное множество, то есть:*

$$D(F_2 \circ F_1) = \{x : x \in D(F_1) \wedge F_1(x) \in D(F_2)\}. \tag{9.3}$$

Пусть далее:

$$int\Big(D(F_2 \circ F_1)\Big) = \Big\{x : x \in int\Big(D(F_1)\Big) \wedge F_1(x) \in int\Big(D(F_2)\Big)\Big\}. \tag{9.4}$$

Тогда $F_2 \circ F_1$ *-* C^r*-гладкая функция.*

Диффеоморфизмы в координатных пространствах

Понятие диффеоморфизма

Определение 9.3. *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$.

1) *Будем говорить, что* F *-* <u>C^r*-гладкий диффеоморфизм*</u> *из пространства* $\mathbb{R}^{N_1}$ *в пространство* $\mathbb{R}^{N_2}$*, если:*
   а) $F : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$, F *- обратимая функция,*
   б) F *-* C^r*-гладкая функция,* F^{-1} *-* C^r*-гладкая функция.*

2) *Пусть:* $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{N_1}$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$. *Будем писать* $A_1 \underset{C^r}{\overset{F}{\approx}} A_2$ *(пространства* A_1 *и* A_2 *-* C^r*-диффеоморфны друг другу относительно отображения* F*), если:* F *-* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{N_1}$ *в* $\mathbb{R}^{N_2}$, $D(F) = A_1$, $R(F) = A_2$.

3) *Пусть:* $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{N_1}$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$. *Будем писать* $A_1 \underset{C^r}{\approx} A_2$, *если*

$$\exists F\Big(A_1 \underset{C^r}{\overset{F}{\approx}} A_2\Big).$$

4) *Пусть:* $F : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$, $A \subseteq \mathbb{R}^{N_1}$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$. *Будем говорить, что* F *отображает* A_1 *на* A_2 C^r*-диффеоморфно, если:*

$$A_1 \subseteq D(F), F\left[A_1\right] = A_2, F\Big|_{A_1} - C^r \text{-диффеоморизм} .$$

Утверждение 9.2 (Без доказательства)**.** *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$*;* F *-* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{N_1}$ *в* N_2.
Тогда F^{-1} *-* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{N_2}$ *в* $\mathbb{R}^{N_1}$.

Сформулируем вспомогательные утверждения.

Утверждение 9.3. *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$*;* F *-* C^1*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{N_1}$ *в* $\mathbb{R}^{N_2}$.
Тогда

$$\underbrace{D_y F^{-1}(y)\Big|_{y-F(x)}}_{\in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}} \cdot \underbrace{D_x F(x)}_{\in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}} = I_1 \text{ при } x \in D(F). \tag{9.5}$$

Доказательство
Очевидно:

$$F^{-1}\Big(F(x)\Big) \;=\; x \text{ при } x \in D(F); \tag{9.6}$$

$$F^{-1}\Big(F(x)\Big) \;=\; x \text{ при: } x \in \operatorname{int}\Big(D(F)\Big), F(x) \in \operatorname{int}\Big(R(F)\Big); \tag{9.7}$$

$$D_y F^{-1}(y)\Big|_{y=F(x)} \cdot D_x F(x) \;=\; I_1 \text{ при: } x \in \operatorname{int}\Big(D(F)\Big), F(x) \in \operatorname{int}\Big(R(F)\Big). \tag{9.8}$$

Так как F - гомеоморфизм, $D(F)$ - регулярное множества, $R(F)$ - регулярное множество, то:

$$D(F) \subseteq \Big\{x : x \in \operatorname{int}\Big(D(F)\Big) \wedge F(x) \in \operatorname{int}\Big(R(F)\Big)\Big\}. \tag{9.9}$$

Тогда:

$$D_y F^{-1}(y)\Big|_{y-F(x)} \cdot D_x F(x) = I_1 \text{ при } x \in D(F). \tag{9.10}$$

Утверждение доказано.

Утверждение 9.4. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$*;* F *-* C^1*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^N$ *в* $\mathbb{R}^N$.
Тогда:

$$\frac{D}{D_x} F^{-1}(y)\Big|_{y=F(x)} \cdot \frac{D}{D_x} F(x) = 1 \text{ при } x \in D(F). \tag{9.11}$$

Доказать это утверждение можно непосредственно взяв определители от обоих частей (9.5), учитывая, что определитель произведения - это произведение определителей.

Утверждение 9.5. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; F - C^1*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^N$ *в* $\mathbb{R}^N$.
Тогда:

$$\frac{D}{D_x}F(x) \neq 0 \text{ при } x \in D(F). \tag{9.12}$$

Это утверждение напрямую следует из утверждения 9.4.

Замечание 9.1. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$; $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^N}$, $D(F) \neq \varnothing$, F - C^r*-гладкая функция. Пусть далее верно, что:*

$$\forall x \in D(F)\left(\frac{D}{D_x}F(x) \neq 0\right).$$

Обозначим:

$$\Phi(x,y) = F(x) - y \text{ при: } x \in D(F), y \in \mathbb{R}^N. \tag{9.13}$$

Тогда: $\Phi : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^N$, $D(\Phi) \in \tau_{\mathbb{R}^{2N}}$, $D(\Phi) \neq \varnothing$, Φ - C^r*-гладкая функция, и верно, что:*

$$\forall x \forall y\left((x,y) \in D(\Phi) \Rightarrow \frac{D}{D_x}\Phi(x,y) \neq \varnothing\right).$$

Пусть $x_0 \in D(F)$. *Обозначим* $y_0 = F(x_0)$.
Тогда:

$$\Phi(x_0,y_0)\theta, \quad \frac{D}{D_x}\Phi(x,y)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \neq 0, \tag{9.14}$$

где θ *- нулевой вектор.*

Согласно теореме о неявной функции существует окрестность ω_1 *точки* x_0, *существует окрестность* ω_2 *точки* y_0, *удовлетворяющие условиям:*

1. $\omega_1 \times \omega_2 \subseteq D(\Phi)$; (9.15)
2. $\forall y \in \omega_2 \exists! x \in \omega_1 (\Phi(x,y) = \theta)$; (9.16)
3. *существует функция* φ, *удовлетворяющая условиям:* $\varphi : \omega_2 \to \omega_1$, $\forall y \in \omega_2(\Phi(\varphi(y),y) = \theta), \varphi - C^r$ *гладкая функция .*

Тогда:

1. $\omega_1 \subseteq D(F)$; (9.17)
2. $\forall y \in \omega_2 \exists! x \in \omega_1\Big(F(x) = y\Big)$; (9.18)
3. $\varphi : \omega_2 \to \omega_1, \forall y \in \omega_2\Big(F(\varphi(y)) = y\Big), \varphi - C^r$ *гладкая функция .* (9.19)

Пусть: $y \in \omega_2$. *Тогда:* $\varphi(y) \in \omega_1 \subseteq D(F)$, $y = F(\varphi(y))$.
Следовательно: $y \in R(F)$. *Тогда* $\omega_2 \subseteq R(F)$.

Основные свойства диффеоморфизма

Теорема 9.1 (О диффеоморфизме). *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$; $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^N}$, $D(F) \neq \varnothing$; F *-* C^r*-гладкая функция. Пусть верно, что:*

$$\forall x \in D(F)\left(\frac{D}{D_x}F(x) \neq 0\right).$$

Тогда: $R(F) \in \tau_{\mathbb{R}^N}$, $R(F) \neq \varnothing$.

Доказательство

Так как $D(F) \neq \varnothing$, то $R(F) \neq \varnothing$.

Пусть $y_0 \in R(F)$. Тогда существует точка x_0, удовлетворяющая условиям: $x_0 \in D(F)$, $y_0 = F(x_0)$.

Построим объекты $\omega_1, \omega_2, \varphi$ так, как это было сделано в замечании 9.1.

Тогда $\omega_2 \subseteq R(F)$. Следовательно $y_0 \in \operatorname{int}\Big(R(F)\Big)$.

Тогда $R(F) \in \tau_{\mathbb{R}^N}$.

Теорема доказана.

Теорема 9.2 (О диффеоморфизме). *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$; $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, F *- обратимая функция,* $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^N}$, $D(F) \neq \varnothing$; F *-* C^r*-гладкая функция, и пусть верно, что:*

$$\forall x \in D(F)\left(\frac{D}{D_x}F(x) \neq 0\right).$$

Тогда F *-* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^N$ *в* $\mathbb{R}^N$.

Доказательство

Очевидно: $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, F - обратимая функция, F - C^r-гладкая функция. Пусть $y_0 \in R(F)$. Тогда существует точка x_0, удовлетворяющая условиям: $x_0 \in D(F)$, $y_0 = F(x_0)$.

Построим объекты: $\omega_1, \omega_2, \varphi$, как это было сделано в замечании 9.1.

Пусть $y \in \omega_2$. Тогда

$$F^{-1}(y) \in D(F), F^{-1}\Big(F(y)\Big); \varphi(y) \in \omega_1 \subseteq D(F), F(\varphi(y)) = y.$$

Так как F - обратимая функция, то

$$F^{-1}(y) = \varphi(y). \tag{9.20}$$

Тогда:

$$F^{-1} \in C^r\big(\omega_2; \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\big).$$

Следовательно:

$$F^{-1} \in C^r\Big(R(F); \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\Big).$$

Итак, F - C^r-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$.

Теорема 9.3 (О диффеоморфизме)**.** *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$; $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $D(F) \in \tau_{\mathbb{R}^N}$, $D(F) \neq \varnothing$; F *-* C^r*-гладкая функция, и пусть справедливо:*

$$\forall x \in D(F)\Big(\frac{D}{D_x}F(x) \neq 0\Big). \tag{9.21}$$

Тогда:

$$\forall x_0 \in D(F)\exists\omega(\omega \text{ — окрестность } x_0)\Big(F\Big|_{\omega} \text{ - } C^r \text{ -диффеоморфизм из } \mathbb{R}^N \text{ в } \mathbb{R}^N\Big). \tag{9.22}$$

Доказательство

Пусть $x_0 \in D(F)$. Обозначим: $y_0 = F(x_0)$.

Построим объекты: $\omega_1, \omega_2, \varphi$, как это было сделано в замечании 9.1.

Так как F - непрерывная функция в точке x_0, так как $y_0 = F(x_0)$, и так как ω_2 - окрестность точки y_0, то существует окрестность ω точки x_0, удовлетворяющая условиям:

$$\omega \subseteq \omega_1, F[\omega] \subseteq \omega_2.$$

Очевидно, что: $F\Big|_{\omega} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $D\Big(F\Big|_{\omega}\Big) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $D\Big(F\Big|_{\omega}\Big) \neq \varnothing$, $F\Big|_{\omega}$ - C^r-гладкая функция, и верно, что:

$$\forall x \in D\Big(F\Big|_{\omega}\Big)\Big(\frac{D}{D_x}\,F\Big|_{\omega} \neq 0\Big).$$

Пусть: $x_1, x_2 \in D\Big(F\Big|_{\omega} \neq 0\Big)$, $F\Big|_{\omega}(x_1) = F\Big|_{\omega}(x_2)$. Тогда: $x_1, x_2 \in \omega$, $F(x_1) = F(x_2)$.

Так как: $x_1 \in \omega \subseteq \omega_1 \subseteq D(F)$, $x_1 \in \omega$ (несмотря на кажущуюся тавтологию, в первом случае мы хотим отметить, что x_1 принадлежит $D(F)$, а во втором случае, что x_1 принадлежит ω), то

$$F(x_1) \in F[\omega]. \tag{9.23}$$

Тогда: $F(x_1) \in F[\omega] \subseteq \omega_2$.

Так как: $F(x_1) \in \omega_2$; $x_1 \in \omega \subseteq \omega_1$, $F(x_1) = F(x_1)$ (сложно спорить с этим); $x_2 \in \omega \subseteq \omega_1$, $F(x_2) = F(x_1)$, то (согласно замечанию 9.1, а конкретно результату (9.18)) $x_1 = x_2$.

Итак, $F\Big|_{\omega}$ - обратимая функция.

Окончательно получаем, что $F\Big|_{\omega}$ — C^r-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$.

Теорема доказана.

Утверждение 9.6 (Без доказательства)**.** *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; F *—* C^1*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^N$ *в* $\mathbb{R}^N$.

Тогда:

$$\forall A(A \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}} \wedge A \subseteq D(F) \Rightarrow F[A] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}), \tag{9.24}$$

$$\forall A\big(A \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}} \wedge A \in R(F) \Rightarrow F^{-1}[A] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}\big). \tag{9.25}$$

Теперь нетрудно увидеть, что всякий диффеоморфизм удовлетворяет принципу соответствия границ.

Утверждение 9.7. *Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; F — C^1-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^{N_1}$ в $\mathbb{R}^{N_2}$.*
Тогда $N_1 = N_2$.

Доказательство
Так как $D(F) \neq \varnothing$, то существует точка x_0, удовлетворяющая условию: $x_0 \in D(F)$.
Обозначим: $y_0 = F(x_0)$.
Тогда:

$$D_y\, F^{-1}(y)\Big|_{y=y_0} \cdot D_x\, F(x)\Big|_{x=x_0} \;=\; I_1, \tag{9.26}$$

$$D_x\, F(x)\Big|_{x=x_0} \cdot D_y\, F^{-1}(y)\Big|_{y=y_0} \;=\; I_2, \tag{9.27}$$

где I_1 - единичная матрица с размерами $N_1 \times N_1$, I_2 - единичная матрица с размерами $N_2 \times N_2$.
Очевидно (из свойства ранга произведения матриц), что:

$$N_1 = \operatorname{rank}(I_1) = \operatorname{rank}\left(D_y\, F^{-1}(y)\Big|_{y=y_0} \cdot D_x\, F(x)\Big|_{x=x_0}\right) \leq \operatorname{rank}\left(D_y\, F^{-1}(y)\Big|_{y=y_0}\right) \leq N_2. \tag{9.28}$$

Аналогично (9.28) только для I_2, выбирая другой сомножитель, получим, что $N_2 \leq N_1$. Тогда с учётом (9.26) имеем $N_1 = N_2$.
Утверждение доказано.

Утверждение 9.8 (Без доказательства)**.** *Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$; F — C^1-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^{N_1}$ в $\mathbb{R}^{N_2}$; $A \subseteq \mathbb{R}^{N_1}$, $D(F) \bigcap A$ - регулярное множество.*
Тогда $F\Big|_A$ — C^1-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^{N_1}$ в $\mathbb{R}^{N_2}$.

Сделаем комментарий.
Поскольку F - диффеоморфизм, то из предыдущего утверждения 9.7 мы знаем, что он сохраняет размерность: $N_1 = N_2$, а значит якобиан этой функции всюду неравен нулю. Тогда выполняются условия теоремы 9.1. Поскольку любой диффеоморфизм удовлетворяет принципу соответствия границ, то:

$$F\,[A] = F\left[D(F) \bigcap A\right] \text{ - регулярное множество .}$$

Тогда ограничение функции является диффеоморфизмом.

Утверждение 9.9 (Без доказательства)**.** *Пусть: $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$.*

1) *Пусть: F_1 — C^r-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^{N_1}$ в $\mathbb{R}^{N_2}$, $F_2 : \mathbb{R}^{N_2} \to \mathbb{R}^{N_3}$, F_2 - C^r-гладкая функция, $D(F_2 \circ F_1)$ - регулярное множество.*

   Тогда $F_1 \circ F_1$ - C^r-гладкая функция.

   (Комментарий. Поскольку F_1 - диффеоморфизм, то $N_1 = N_2$, тогда $F_1\,[D(F_2 \circ F_1)]$ - регулярное множество.)

2) *Пусть:* F_1 *—* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{N_1}$ *в* $\mathbb{R}^{N_2}$*;* F_2 *—* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{N_2}$ *в* $\mathbb{R}^{N_3}$*;* $D(F_2 \circ F_1)$ *- регулярное множество.*

   Тогда $F_2 \circ F_1$ *—* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{N_1}$ *в* $\mathbb{R}^{N_3}$*.*

Лекция 10

Системы координат

Координатная карта

Замечание 10.1. *Пусть:* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $\mathcal{L}$ *- линейное пространство над* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(\mathcal{L}) = N$*.*

Пусть e *- базис в пространстве* $\mathcal{L}$*. Обозначим:*

$$h_e(x) = [x]\,(e) \text{ при } x \in \mathcal{L}. \tag{10.1}$$

Тогда: h_e *- обратимая функция,* $D(h_e) = \mathcal{L}$*,* $R(h_e) = \mathbb{K}^N$*; причём обратная функция из координак* $\widetilde{x}^k$ *восстанавливает вектор:*

$$h_e^{-1}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}^k e_k \text{ при } \widetilde{x} \in \mathbb{K}^N. \tag{10.2}$$

Будем говорить, что h_e *- линейная координатная карта (далее будем говорить просто координатная карта) в пространстве* $\mathcal{L}$*, соответствующая базису* e *(в физике вместо этого употребляют термин «система координат»).*

Пусть e - базис в $\mathcal{L}$; e' - базис в $\mathcal{L}$; $x \in \mathcal{L}$, $\widetilde{x} = h_e(e)$, $\widetilde{\widetilde{x}} = h_{e'}(x)$.
Тогда

$$\widetilde{x} = \alpha(e, e')\widetilde{\widetilde{x}}. \tag{10.3}$$

Замечание 10.2. *Пусть:* $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*,* Q *- афинное пространство над* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(Q) = N$ *(под размерностью афинного пространства мы имеем ввиду размерность ассоциированного линейного пространства* $\vec{Q}$*).*

Пусть: $O \in Q$*,* e *- базис в* $\vec{Q}$*.*

Обозначим:

$$h_{o,e}(p) = \left[\vec{O}_p\right](e) \text{ при } p \in Q, \tag{10.4}$$

где $h_{o,e}(p)$ *- столбец координат точки* p *относительно начала отсчёта* O *в базисе* e*,* $\vec{O}_p$ *- радиус вектор точки* p *относительно начала отсчёта* O*.*

Тогда $h_{o,e}$ *- обратимая функция,* $D(h_{o,e}) = Q$*,* $R(h_{o,e}) = \mathbb{K}^N$*;*

$$(h_{o,e})^{-1}(x) = O \oplus \left(x^k e_k\right) \text{ при } x \in \mathbb{K}^N, \tag{10.5}$$

где $h_{o,e}$ *- афинная координатная карта, соответствующая началу отсчёта* O *и базису* e*.*

Посмотрим, что будет, если имеются две системы отсчёта.
Пусть: $O \in Q$, e — базис в $\vec{Q}$; $O' \in Q$, e' — базис в $\vec{Q}$; $p \in Q$, $x = h_{o,e}(p)$, $y = h_{o',e'}(p)$.
Тогда:

$$x = \left[\overrightarrow{Op}\right](e) = \left[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'p}\right](e) = \left[\overrightarrow{OO'}\right](e) + \left[\overrightarrow{O'p}\right](e) = \\ = \left[\overrightarrow{OO'}\right](e) + \alpha(e, e')\left[\overrightarrow{O'p}\right](e') = h_{o,e}(O') + \alpha(e, e')y. \tag{10.6}$$

Из (10.6) мы видим, что преобразование при переходе из одной точки отсчёта в другую носит не линейный, а афинный характер.

Замечание 10.3. *Пусть: M - множество, $M \neq \varnothing$.*

1) *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что h - координатная карта размерности N на множестве M, если: h - обратимая функция, $D(h) \subseteq M$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$.*

2) *Будем говорить, что h - координатная карта на множестве M, если $\exists N \in \mathbb{N}$ (h - координатная карта размерности N на множестве M).*

3) *Пусть: $N_1 \in \mathbb{N}$, h - координатная карта размерности N_1 на множестве M; $N_2 \in \mathbb{N}$, h - координатная карта размерности N_2 на множестве M.*

   Тогда $N_1 = N_2$.

4) *Пусть h - координатная карта на множестве M. Выберем объект N, удовлетворяющий условиям: $N \in \mathbb{N}$, h - координатная карта размерности N на множестве M.*

   Обозначим: $\dim(h) = N$.

Замечание 10.4. *Пусть: M - множество, $M \neq \varnothing$.*

1) *Пусть: h_1, h_2 - координатные карты на множестве M, $p \in D(h_1)$, $p \in D(h_2)$, $x = h_1(p)$, $y = h_2(p)$.*

   Тогда:
$$x = h_1(p) \in h_1\left[D(h_2)\right]. \tag{10.7}$$
   Заметим, что по определению в квадратных скобках в (10.7) *автоматически подразумевается пересечение $D(h_2) \bigcap D(h_1)$.*

   Очевидно, что $p = h_1^{-1}(x)$. Тогда:
$$y = h_2(p) = h_2\big(h_1^{-1}(x)\big) = \big(h_2 \circ h_1^{-1}\big)(x). \tag{10.8}$$

2) *Пусть: h_1, h_2 - координатные карты на множестве M. Обозначим:*
$$W_{h_2,h_1} = h_1\left[D(h_2)\right]. \tag{10.9}$$
   Тогда $W_{h_2,h_1} \subseteq \mathbb{R}^{\dim(h_1)}$.

3) *Пусть: h_1, h_2 - координатные карты на множестве M. Обозначим:*
$$\varphi_{h_2,h_1} = h_2 \circ h_1^{-1}. \tag{10.10}$$
   Функция (10.10) *называется функцией перехода от координатной карты h_1 к координатной карте h_2.*

   Тогда: φ_{h_2,h_1} - обратимая функция, и тогда справедливы следующие соотношения:
$$D(\varphi_{h_2,h_1}) = W_{h_2,h_1}, \tag{10.11}$$
$$R(\varphi_{h_2,h_1}) = W_{h_1,h_2}. \tag{10.12}$$

4) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатная карта на множестве* M*. Тогда:*

$$(\varphi_{h_2,h_1})^{-1} = \varphi_{h_1,h_2}. \tag{10.13}$$

Теперь выделим «хорошие» координатные карты, то есть те карты, которые согласованные друг с другом, для этого введём понятие согласованности координатных карт.

Замечание 10.5. *Пусть:* M *- множество,* $M \neq \varnothing$*.*

1) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатные карты на множестве* M*,* $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$ *(напомним, что эта запись означает, что* r *может быть равным: нулю, натуральному числу,* $+\infty$*, символу аналитичности),* $D(h_1) \bigcap D(h_2) = \varnothing$*.*

   Будем говорить, что h_1, h_2 *-* <u>C^r*-согласованные*</u>*, если* $\dim(h_1) = \dim(h_2)$*.*

2) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатные карты на множестве* M*,* $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$*,* $D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing$*.*

   Будем говорить, что h_1, h_2 *-* <u>C^r*-согласованные*</u>*, если:*

$$W_{h_2,h_1} \in \tau_{\mathbb{R}^{\dim(h_1)}}, \varphi_{h_2,h_1} \in C^r\big(W_{h_2,h_1}; \mathbb{R}^{\dim(h_1)}, \mathbb{R}^{\dim(h_2)}\big); \tag{10.14}$$

$$W_{h_1,h_2} \in \tau_{\mathbb{R}^{\dim(h_2)}}, \varphi_{h_1,h_2} \in C^r\big(W_{h_1,h_2}; \mathbb{R}^{\dim(h_2)}, \mathbb{R}^{\dim(h_1)}\big). \tag{10.15}$$

3) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатные карты на множестве* M*,* $r = 0$*,* $D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing$*.*

   Тогда: φ_{h_2,h_1} *— гомеоморфизм из* $\mathbb{R}^{\dim(h_1)}$ *в* $\mathbb{R}^{\dim(h_2)}$*,и верны соотношения:*

$$D(\varphi_{h_2,h_1}) \in \tau_{\mathbb{R}^{\dim(h_1)}}, D(\varphi_{h_2,h_1}) \neq \varnothing; \tag{10.16}$$

$$R(\varphi_{h_2,h_1}) \in \tau_{\mathbb{R}^{\dim(h_2)}}, R(\varphi_{h_2,h_1}) \neq \varnothing. \tag{10.17}$$

4) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатные карты на множестве* M*,* $r \in \overline{\mathbb{N}}$*,* $D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing$*.*

   Тогда: φ_{h_2,h_1} *-* C^r*-диффеоморфизм из* $\mathbb{R}^{\dim(h_1)}$ *в* $\mathbb{R}^{\dim(h_2)}$*, причём:*

$$D(\varphi_{h_2,h_1}) \in \tau_{\mathbb{R}^{\dim(h_1)}}, D(\varphi_{h_2,h_1}) \neq \varnothing; \tag{10.18}$$

$$R(\varphi_{h_2,h_1}) \in \tau_{\mathbb{R}^{\dim(h_2)}}, R(\varphi_{h_2,h_1}) \neq \varnothing. \tag{10.19}$$

5) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатные карты на множестве* M*,* $r = 0$*,* $D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing$*,* h_1, h_2 *-* C^r*-согласованные.*

   Тогда $\dim(h_1) = \dim(h_2)$*.*

   Причём, вообще говоря, это не определение, а следствие данных ранее определений, которое опирается на то, что гомеоморфизм сохраняет размерность пространства. Поскольку доказательство требует развитие отдельной весьма большой теории, которая лежит за рамками данного курса, то мы будем пользоваться такими свойствами без доказательств, но всякий раз будем указывать, как можно без них обойтись. В данном случае можно отдельно потребовать такую согласованность в определении.

6) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатные карты на множестве* M, $r \in \overline{\mathbb{N}}$, $D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing$, h_1, h_2 *-* C^r*-согласованные.*

   Тогда $\dim(h_1) = \dim(h_2)$.

   Следующий пункт следует из пунктов 1,5,6.

7) *Пусть:* h_1, h_2 *- координатные карты на множестве* M, $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, h_1, h_2 *-* C^r*-согласованные.*

   Тогда $\dim(h_1) = \dim(h_2)$.

Замечание 10.6. *Пусть:* M *- множество,* $M \neq \varnothing$.

1) *Будем говорить, что* Q *- множество координатных карт на множестве* M, *если:*

$$Q \text{ - множество } , \forall h \in Q(h \text{ - координатная карта на множестве } M).$$

2) *Пусть* Q *- множество координатных карт на множестве* M. *Будем говорить, что* Q *- множество координатных карт одной размерности, если*

$$\forall h_1 \in Q \forall h_2 \in Q(\dim(h_1) = \dim(h_2)).$$

3) *Пусть:* Q *- множество координатных карт на множестве* M; $N \in \mathbb{N}$.

   Будем говорить, что Q *- множество координатных карт размерности* N, *если*

$$\forall h \in Q(\dim(h) = N).$$

4) *Пусть:* Q *- множество координатных карт на множестве* M; $N_1 \in \mathbb{N}$, Q *- множество координатных карт размерности* N_1; $N_2 \in \mathbb{N}$, Q *- множество координатных карт размерности* N_2; $Q \neq \varnothing$.

   Тогда $N_1 = N_2$.

5) *Пусть:* Q *- множество координатных карт на множестве* M, Q *- множество координатных карт одной размерности,* $Q \neq \varnothing$. *Выберем объект* N, *удовлетворяющий условиям:* $N \in \mathbb{N}$, Q *- множество координатных карт размерности* N.

   Обозначим: $\dim(Q) = N$.

Замечание 10.7. *Пусть:* M *- множество,* $M \neq \varnothing$; $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

1) *Пусть* Q *- множество координатных карт на множестве* M. *Будем говорить, что* Q *-* C^r*-гладкое множество, если:*

$$\forall h_1 \in Q \forall h_2 \in Q(h_1, h_2 - C^r\text{-согласованные}).$$

2) *Пусть* Q_1, Q_2 *- множества координатный карт на множестве* M. *Будем говорить, что* Q_1, Q_2 *-* C^r*-согласованные, если:*

$$\forall h_1 \in Q_1 \forall h_2 \in Q_2(h_1, h_2 - C^r\text{-согласованные})$$

3) Пусть: h - координатная карта на множестве M, Q - множество координатных карт на множестве M.

Будем говорить, что h, Q - C^r-согласованные, если:

$$\forall \widetilde{h} \in Q\Big(h, \widetilde{h} - C^r\text{-согласованные}\Big).$$

Теперь мы можем сформулировать некие достаточные условия C^r-согласованности двух координатных карт.

Утверждение 10.1. *Пусть: M - множество, $M \neq \varnothing$; $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.*

Пусть далее: Q - множество координатных карт на множестве M; h_1, Q - C^r-согласованные; h_2, Q - C^r-согласованные; $D(h_1) \bigcap D(h_2) \subseteq \bigcup\limits_{h \in Q} D(h)$; $Q \neq \varnothing$.

Тогда h_1, h_2 - C^r-согласованные.

Доказательство

Так как $Q \neq \varnothing$, то существует функция h_0, удовлетворяющая условиям: $h_0 \in Q$.
Обозначим: $N = \dim(h_0)$. Тогда $N \in \mathbb{N}$.
Так как h_1, h_0 - C^r-согласованные, то $\dim(h_1) = \dim(h_0)$.
Тогда $\dim(h_1) = N$.
Так как h_2, h_0 - C^r-согласованные, то $\dim(h_2) = \dim(h_0)$.
Тогда $\dim(h_2) = N$.
Пусть $h \in Q$. Так как h_1, h - C^r-согласованные, то $\dim(h_1) = \dim(h)$.
Тогда $\dim(h) = \dim(h_1) = N$.
Пусть $D(h_1) \bigcap D(h_2) = \varnothing$. Так как $\dim(h_1) = N = \dim(h_2)$, то h_1, h_2 - C^r-согласованные.
Пусть $D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing$.
Пусть далее: $h \in Q$, $p_0 \in D(h_1) \bigcap D(h_2) \bigcap D(h)$.
Тогда рассмотрим множество $h_1 \left[D(h_2) \bigcap D(h)\right]$:

$$\begin{aligned} h_1 \Big[D(h_2) \bigcap D(h)\Big] &= h_1 \Big[h^{-1} \left[h \left[D(h_2)\right]\right]\Big] = \\ &= \left(h_1 \circ h^{-1}\right) \Big[h \left[D(h_2)\right]\Big] = \varphi_{h_1, h} \left[W_{h_2, h}\right] \end{aligned} \quad (10.20)$$

Так как h, h_1 - C^r-согласованные, то: $\varphi_{h_1,h}$ — гомеоморфизм из $\mathbb{R}^{N_r}$ в $\mathbb{R}^{N_r}$, и верно:

$$D(\varphi_{h_1,h}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, D(\varphi_{h_1,h}) \neq \varnothing, \quad (10.21)$$

$$R(\varphi_{h_1,h}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, R(\varphi_{h_1,h}) \neq \varnothing. \quad (10.22)$$

Так как h, h_2 - C^r-согласованные, то $W_{h_2,h} \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$.
Тогда:

$$h_1 \Big[D(h_2) \bigcap D(h)\Big] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}. \quad (10.23)$$

Так как $p_0 \in D(h_1)$, $p_0 \in D(h_2) \bigcap D(h)$, то

$$h_1(p_0) \in h_1 \left[D(h_2) \wedge D(h)\right]. \quad (10.24)$$

Итак:

$$h_1\left[D(h_2)\wedge D(h)\right] - \text{ окрестность точки } h_1(p_0). \tag{10.25}$$

Очевидно, что:

$$h_1\left[D(h_2)\wedge D(h)\right] \subseteq h_1\left[D(h_2)\right] = W_{h_2,h_1}. \tag{10.26}$$

Пусть $x_0 \in W_{h_2,h_1}$. Тогда существует точка p_0, удовлетворяющая условиям: $p_0 \in D(h_1)\bigcap D(h_2)$, $x_0 = h_1(p_0)$.

Так как $p_0 \in D(h_1)\bigcap D(h_2) \subseteq \bigcup\limits_{h\in Q} D(h)$, то существует функция h, удовлетворяющая условиям: $h \in Q$, $p_0 \in D(h)$.

Тогда:

$$h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right] - \text{ окрестность точки } x_0, \tag{10.27}$$

$$h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right] \subseteq W_{h_2,h_1}. \tag{10.28}$$

Следовательно, $x \in \operatorname{int}(W_{h_2,h_1})$.

В силу произвольности выбора точки $x_0 \in W_{h_2,h_1}$ получаем, что $W_{h_2,h_1} \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$.

Пусть $x_0 \in W_{h_2,h_1}$. Тогда существует точка p_0, удовлетворяющая условиям: $p_0 \in D(h_1)\bigcap D(h_2)$, $x_0 = h_1(p_0)$.

Так как $p_0 \in D(h_1)\bigcap D(h_2) \subseteq \bigcup\limits_{h\in Q} D(h)$, то существует функция h, удовлетворяющая условиям: $h \in Q$, $p_0 \in D(h)$.

Тогда:

$$h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right] - \text{ окрестность точки } x_0, \tag{10.29}$$

$$h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right] \subseteq W_{h_2,h_1}. \tag{10.30}$$

Пусть $x \in h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right]$.

Тогда:

$$\varphi_{h_2,h_1}(x) = h_2\big(h_1^{-1}(x)\big) = h_2\Big(h^{-1}\big(h\big(h_1^{-1}(x)\big)\big)\Big) = \\ = \big(h_2\circ h^{-1}\big)\big(\big(h\circ h_1^{-1}\big)(x)\big) = \varphi_{h_2,h}\Big(\varphi_{h,h_1}(x)\Big). \tag{10.31}$$

Так как h_1, h - C^r-согласованные, и так как $D(h_1)\bigcap D(h) \neq \varnothing$, то: φ_{h,h_1} — C^r-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$, и:

$$D(\varphi_{h,h_1}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, D(\varphi_{h,h_1}) \neq \varnothing, \tag{10.32}$$

$$R(\varphi_{h,h_1}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, R(\varphi_{h,h_1}) \neq \varnothing. \tag{10.33}$$

Так как h_2, h - C^r-согласованные, $D(h_2)\bigcap D(h) \neq \varnothing$, то: $\varphi_{h_2,h}$ — C^r-диффеоморфизм из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$, и:

$$D(\varphi_{h_2,h}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, D(\varphi_{h_2,h}) \neq \varnothing, \tag{10.34}$$

$$R(\varphi_{h_2,h}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, R(\varphi_{h_2,h}) \neq \varnothing. \tag{10.35}$$

Очевидно, что:

$$h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right] \subseteq D(\varphi_{h,h_1}), \tag{10.36}$$

$$\varphi_{h,h_1}\left[h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right]\right] \subseteq D(\varphi_{h_2,h}). \tag{10.37}$$

Тогда:

$$\varphi_{h_2,h_1} \in C^r\Big(h_1\left[D(h_2)\bigcap D(h)\right]; \mathbb{R}^{N_r}, \mathbb{R}^{N_r}\Big). \tag{10.38}$$

В силу произвольности выбора точки $x_0 \in W_{h_2,h_1}$ получаем, что $\varphi_{h_2,h_1} \in C^r\big(W_{h_2,h_1}; \mathbb{R}^{N_r}, \mathbb{R}^{N_r}\big)$.
Аналогично получаем, что:

$$W_{h_1,h_2} \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, \varphi_{h_1,h_2} \in C^r\big(W_{h_1,h_2}; \mathbb{R}^{N_r}, \mathbb{R}^{N_r}\big).$$

Тогда h_1, h_2 - C^r-согласованные.
Утверждение доказано.

Лекция 11

Системы координат

Координатная карта (Продолжение)

Теперь обсудим, как к некому C^r-гладкому множеству координатных карт подклеить другие множества координатных карт.

Утверждение 11.1. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; Q_1 - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M, Q_2 - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M.*

Пусть: $Q_{1,0} \subseteq Q_1$; $Q_2, Q_{1,0}$ - C^r-согласованные, причём

$$\bigcup_{h \in Q_1} D(h) \subseteq \bigcup_{h \in Q_{1,0}} D(h).$$

Тогда $Q_1 \bigcup Q_2$ - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M.

Доказательство

Пусть: $Q_{1,0} = \varnothing$. Так как:

$$\bigcup_{h \in Q_2} D(h) \subseteq \bigcup_{h \in Q_{1,0}} D(h), \tag{11.1}$$

то $Q_2 = \varnothing$. Тогда $Q_1 \bigcup Q_2 = Q_1$. Следовательно $Q_1 \bigcup Q_2$ - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M.

Пусть $Q_{1,0} \neq \varnothing$. Тогда $h \in Q_1 \vee h \in Q_2$.

Пусть $h \in Q_1$. Так как Q_1 - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M, $Q_{1,0} \subseteq Q_1$, то $h, Q_{1,0}$ - C^r-согласованные.

Пусть $h \in Q_2$. Так как $Q_2, Q_{1,0}$ - C^r-согласованные, то $h, Q_{1,0}$ - C^r-согласованные.

Итак, в обоих вариантах получили, что $h, Q_{1,0}$ - C^r-согласованные.

Пусть $h_1, h_2 \in Q_1 \bigcup Q_2$. Тогда:

$$(h_1 \in Q_1 \wedge h_2 \in Q_1) \vee \left(h_1 \in \left(Q_1 \bigcup Q_2\right) \wedge h_2 \in Q_2\right) \vee \left(h_2 \in Q_2 \wedge h_1 \in \left(Q_1 \bigcup Q_2\right)\right). \tag{11.2}$$

Рассмотрим отдельно каждый из трёх вариантов в (11.2).

Пусть $h_1, h_2 \in Q_1$. Так как Q_1 - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M, то h_1, h_2 - C^r-согласованные.

Пусть $h_1 \in (Q_1 \bigcup Q_2), h_2 \in Q_2$. Тогда:

$$D(h_1) \bigcap D(h_2) \subseteq D(h_2) \subseteq \bigcup_{h \in Q_2} D(h) \subseteq \bigcup_{h \in Q_{1,0}} D(h), \tag{11.3}$$

$h_1, Q_{1,0}$ - C^r-согласованные; $h_2, Q_{1,0}$ - C^r-согласованные; $Q_{1,0} \neq \varnothing$.

Следовательно (согласно утверждению 10.1) h_1, h_2 - C^r-согласованные.

Пусть: $h_1 \in Q_2$, $h_2 \in (Q_1 \bigcup Q_2)$. Аналагично предыдущему случаю получаем, что h_1, h_2 - C^r-согласованные.

Итак, вне зависимости от того, какой из вариантов (11.2) реализован, имеем h_1, h_2 - C^r-согласованные.

Тогда в силу произвольности выбора этих координатных карт получаем, что $Q_1 \bigcup Q_2$ - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M.

Утверждение доказано.

Утверждение 11.2. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, M — множество, $M \neq \varnothing$; Q_1 - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M, Q_2 - множество координатных карт на множестве M.*

Пусть: Q_1, Q_2 - C^r-согласованные, и пусть Q_2 накрывает Q_1, то есть пусть верно, что:

$$\bigcup_{h \in Q_2} D(h) \subseteq \bigcup_{h \in Q_1} D(h). \tag{11.4}$$

Тогда $Q_1 \bigcup Q_2$ - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M.

Это утверждение более слабое, чем предыдущее утверждение 11.1. Оно напрямую следует из только что доказанного, поэтому доказательство этого утверждения здесь не будет приведено.

Введём теперь понятие C^r-гладкого координатного атласа на множестве M.

Гладкий координатный атлас

Свойства координатного атласа

Определение 11.1. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$.*

Будем говорить, что μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, если:

1) μ - C^r-гладкое множество координатных карт на множестве M;

2) $\bigcup\limits_{h \in \mu} D(h) = M$.

Изучим вопрос подклеивания к атласу новых координатных карт.

Утверждение 11.3. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, Q - множество координатных карт на множестве M.*

Пусть: $\mu_0 \subseteq \mu$; Q, μ_0 - C^r-согласованные; и пусть множество μ_0 накрывает множество Q, то есть:

$$\bigcup_{h \in Q} D(h) \subseteq \bigcup_{h \in \mu_0} D(h). \tag{11.5}$$

Тогда $\mu \bigcup Q$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Доказательство предлагается провести самостоятельно напрямую из определения атласа.

Утверждение 11.4 (Без доказательства). *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, Q - множество координатных карт на множестве M.*

Пусть: $\mu_0 \subseteq \mu$; Q, μ_0 - C^r-согласованные; $\bigcup\limits_{h\in\mu_0} D(h) = M$.

Тогда $\mu \bigcup Q$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Утверждение 11.5 (Без доказательства). *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, Q - множество координатных карт на множестве M.*

Пусть: Q, μ - C^r-согласованные.

Тогда $\mu \bigcup Q$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

C^r-согласованность атласа с самим собой очевидна, как и очевидна коммутативность отношения C^r-согласованности. Выясним, является ли C^r-согласованность транзитивной.

Утверждение 11.6. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ_1, μ_2, μ_3 - C^r-гладкие координатные атласы на множестве M, μ_1, μ_2 - C^r-согласованные, μ_2, μ_3 - C^r-согласованные.*

Тогда μ_1, μ_3 - C^r-согласованные.

Отметим, что это утверждение неверно для простых C^r-гладких множеств, оно справедливо только для C^r-гладких атласов.

Доказательство

Так как: μ_1 - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, так как μ_2 - множество координатных карт на множестве M, μ_1, μ_2 - C^r-согласованные, то $\mu_1 \bigcup \mu_2$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Так как $\mu_1 \bigcup \mu_2$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, так как μ_3 - множество координатных карт на множестве M, и так как:

$$\mu_2 \subseteq \left(\mu_1 \bigcup \mu_2\right), \bigcup_{h\in\mu_2} D(h) = M, \tag{11.6}$$

причём μ_3, μ_2 - C^r-согласованные, то $\mu_1 \bigcup \mu_2 \bigcup \mu_3$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Тогда μ_1, μ_3 - C^r-согласованные.

Утверждение доказано.

То есть, для C^r-гладких атласов отношение C^r-согласованности является отношением эквивалентности.

Определение 11.2. *Пусть: M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^0-гладкий атлас на множестве M.*

Обозначим:

$$R_*(\mu) = \left\{r : r \in \overline{\mathbb{Z}}_+ \wedge (\mu - C^r - \textit{гладкий координатный атлас на множестве } M)\right\}. \tag{11.7}$$

Тогда: $R_*(\mu) \subseteq \overline{\mathbb{Z}}_+$, $R_*(\mu) \neq \varnothing$.

Заметим, что $\overline{\mathbb{Z}}_+$ - линейно упорядоченное множество, значит если какое-либо его подмножество имеет наибольший элемент, то он определяется однозначно. Если $R_*(\mu)$ - ограничено, то оно содержит свой наибольший элемент, если же $R_*(\mu)$ - неограничено, то его наибольшим элементом может быть либо «$+\infty$», либо символ аналитичности. Причём в любом из этих вариантов, $R_*(\mu)$ будет содержать в себе свой наибольший элемент.

Обозначим:

$$r_*(\mu) = \max\left(R_*(\mu)\right). \tag{11.8}$$

Тогда $r_*(\mu) \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

Утверждение 11.7 (Без доказательства)**.** *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.*

Тогда существует объект h удовлетворяющий условиям:

1) *h - координатная карта на множестве M;*

2) *h, μ - C^r-согласованные;*

3) *$\forall \widetilde{r}\big(\widetilde{r} \in \overline{\mathbb{Z}}_+ \wedge \widetilde{r} > r\big)$($h, \mu$ не являются C^r-согласованными).*

Максимальный C^r-гладкий атлас

Определение 11.3. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$.*

Будем говорить, что μ - <u>максимальный C^r-гладкий координатный атлас</u> на множестве M, если:

1) *μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M;*

2) *Для любого объекта $\widetilde{\mu}$, удовлетворяющего условиям: $\widetilde{\mu}$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\mu \subseteq \widetilde{\mu}$, справедливо следующее утверждение: $\widetilde{\mu} = \mu$.*

Теперь обсудим свойства максимальных координатных атласов.

Утверждение 11.8. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ_1 - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, μ_2 - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, μ_1, μ_2 - C^r-согласованные.*

Тогда $\mu_1 = \mu_2$.

Доказательство

Так как μ_1 - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, μ_2 - множество координатных карт на множестве M, μ_2, μ_1 - C^r-согласованные, то $\mu_1 \bigcup \mu_2$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Так как μ_1 - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\mu_1 \bigcup \mu_2$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\mu_1 \subseteq \mu_1 \bigcup \mu_2$, то $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \mu_1$.

Тогда $\mu_2 \subseteq \mu_1$. Аналогично получим, что $\mu_1 \subseteq \mu_2$.

Итак, $\mu_1 = \mu_2$.

Утверждение доказано.

Утверждение 11.9 (Без доказательства). *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, μ_1, μ_2 - максимальные C^r-гладкие координатные атласы на множестве M, $\mu \subseteq \mu_1$, $\mu \subseteq \mu_2$.*
Тогда $\mu_1 = \mu_2$.

Доказать данное утверждение весьма просто, нужно только учесть транзитивность отношения C^r-согласованности у координатных атласов (тогд из определения максимального атласа выйдет, то μ, μ_1, μ_2 - C^r-согласованные) и предыдущее утверждение.

Утверждение 11.10 (Без доказательства). *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ_1 - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\widetilde{\mu}_1$ - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\mu_1 \subseteq \widetilde{\mu}_1$; μ_2 - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\widetilde{\mu}_2$ - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\mu_2 \subseteq \widetilde{\mu}_2$; μ_1, μ_2 - C^r-согласованные.*
Тогда $\widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_2$.

У нас есть единственность максимального координатного атласа, теперь нам нужно доказать его существование.

Определение 11.4. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.*
Обозначим:

$$MA\,(\mu, r) = \{h : (h - \textit{координатная карта на множестве } M) \wedge \\ \wedge\ (h, \mu -\ C^r\textit{-согласованные})\}\,. \quad (11.9)$$

Утверждение 11.11. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.*
Тогда: $MA\,(\mu, r)$ - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $\mu \subseteq MA\,(\mu, r)$.

Доказательство
Очевидно: $MA\,(\mu, r)$- множество координатных карт на множестве M.
Пусть $h \in \mu$. Тогда h - координатная карта на множестве M, h, μ - C^r-согласованные. Следовательно $h \in MA\,(\mu, r)$.
Тогда $\mu \subseteq MA\,(\mu, r)$.
Пусть: $h_1 \in \mu$, $h_2 \in MA\,(\mu, r)$. Так как $h_2 \in MA\,(\mu, r)$, то h, μ - C^r-согласованные.
Так как $h_1 \in \mu$, то h_1, h_2 - C^r-согласованные.
Тогда $\mu, MA\,(\mu, r)$ - C^r-согласованные. Так как μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $MA\,(\mu, r)$- множество координатных карт на множестве M, $\mu, MA\,(\mu, r)$ - C^r-согласованные, то $\mu \bigcup MA\,(\mu, r)$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.
Так как $\mu \subseteq MA\,(\mu, r)$, то $MA\,(\mu, r)$- C^r-гладкий координатный атлас на множестве M. Пусть $\widetilde{\mu}$ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, $MA\,(\mu, r) \subseteq \widetilde{\mu}$.
Пусть $h \in \widetilde{\mu}$. Так как $\mu \subseteq MA\,(\mu, r) \subseteq \widetilde{\mu}$, то h, μ - C^r-согласованные.
Тогда $h \in MA\,(\mu, r)$. Следовательно $\widetilde{\mu} \subseteq MA\,(\mu, r)$. Итак, $\widetilde{\mu} = MA\,(\mu, r)$.

Тогда $MA(\mu, r)$- максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Утверждение доказано.

Утверждение 11.12 (Без доказательства). *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$; M — множество, $M \neq \varnothing$; μ - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.*

Тогда $r_*(\mu) = r$.

Укажем направление, в котором нужно рассуждать, чтобы доказать данное утверждение.

Из того, что μ - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M, имеем, что $r_*(\mu) \geq r$.

Пусть $r < r_*(\mu)$, и пусть h, μ - C^r-согласованные, но h не может быть согласовано с μ в большем порядке, чем r. Так как h, μ - C^r-согласованные, то $\{h\} \bigcup \mu = \mu$, то ведь тогда h не согласована с какой-нибудь координатной картой из μ в порядке $r_*(\mu)$, что противоречит определению $r_*(\mu)$. Значит предположение $r_*(\mu) > r$ - неверно. Тогда $r_*(\mu) = r$.

Теперь мы, наконец, можем перейти к гладким многообразиям.

Гладкое многообразие (Часть 1)

Понятие гладкого многообразия

Итак, мы ввели понятия гладкого и максимального гладкого координатных атласов. Но, работать с максимальными гладкими координатными атласами, которые входят в определение гладкого многообразия, зачастую неудобно. Поэтому наряду с гладким многообразием, для удобства, введём ещё термин «гладкое квазимногообразие» (это понятие будет шире).

Определение 11.5. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.*

Будем говорить, что (M, μ) - C^r-гладкое квазимногообразие, если:

1) M - множество;

2) $M \neq \varnothing$;

3) μ - C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Обозначим:

$$\dim((M, \mu)) = \dim(\mu); \quad r_*((M, \mu)) = r_*(\mu). \tag{11.10}$$

Определение 11.6. *Пусть: $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.*

Будем говорить, что (M, μ) - C^r-гладкое многообразие, если:

1) M - множество;

2) $M \neq \varnothing$;

3) μ - максимальный C^r-гладкий координатный атлас на множестве M.

Для гладких многообразий будем пользоваться такими же обозначениями (11.10).

Теперь обсудим операции с многообразиями и квазимногообразиями, которые можно ввести.

Операции с гладкими многообразиями

Замечание 11.1. *Пусть:* $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $m \in \mathbb{N}$; (M_1, μ_1) - C^r*-гладкое квазимногообразие,* $N_1 \in \mathbb{N}$,$\dim((M_1,\mu_1)) = N_1$;…;(M_m,μ_m) - C^r*-гладкое квазимногообразие,*$N_m \in \mathbb{N}$,$\dim((M_m,\mu_m)) = N_m$.

Пусть: $h_1 \in \mu_1, \dots, h_m \in \mu_m$.

Обозначим:

$$(h_1 \otimes \ldots \otimes h_m)(p_1, \dots, p_m) = \\ = \left(h_1^1(p_1), \dots, h_1^{N_1}(p_1), h_2^1(p_2), \dots, h_2^{N_2}(p_2), \dots, h_m^1(p_m), \dots, h_m^{N_m}(p_m)\right)^T \quad (11.11)$$

при $p_1 \in D(h_1), \dots, p_m \in D(h_m)$.

Тогда: $(h_1 \otimes \ldots \otimes h_m)$ *- координатная карта на множестве* $M_1 \times \ldots \times M_m$,

$$\dim(h_1 \otimes \ldots \otimes h_m) = N_1 + \ldots + N_m. \quad (11.12)$$

Обозначим:

$$\mu_1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} \mu_m = \{h_1 \otimes \ldots \otimes h_m : h_1 \in \mu_1 \wedge \ldots \wedge h_m \in \mu_m\}. \quad (11.13)$$

Нетрудно доказать, что: $\mu_1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} \mu_m$ - C^r*-гладкий координатный атлас на множестве* $M_1 \times \ldots \times M_m$,

$$\dim\left(\mu_1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} \mu_m\right) = N_1 + \ldots + N_m. \quad (11.14)$$

Обозначим:

$$(M_1,\mu_1) \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} (M_m,\mu_m) = \left(M_1 \times \ldots \times M_m, \mu_1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} \mu_m\right) \quad (11.15)$$

Тогда: $(M_1,\mu_1) \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} (M_m,\mu_m)$ - C^r*-гладкое квазимногообразие, причём*

$$\dim\left((M_1,\mu_1) \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} (M_m,\mu_m)\right) = N_1 + \ldots + N_m. \quad (11.16)$$

Произведение (11.15)*, даже если в качестве сомножителей будут гладкие многообразия, даст в результате гладкое квазимногообразие, потому что в нём будут координатные карты специального вида, а не всевозможные. Для того, чтобы в результате произведения многообразий получалось многообразие необходимо воспользоваться процедурой расширения гладкого координатного атласа до максимального гладкого координатного атласа* (11.9)*, только нужно выбрать, до какой гладкости нужно расширять атлас.*

Обозначим:

$$\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_m = MA\left(\mu_1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} \mu_m, \min_{k=\overline{1,m}}(r_*(\mu_k))\right). \quad (11.17)$$

Тогда: $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_m$ - $C^{\min\limits_{k=\overline{1,m}}(r_*(\mu_k))}$*-гладкий координатный атлас на множестве* $M_1 \times \ldots \times M_m$*, причём*

$$\dim(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_m) = N_1 + \ldots + N_m. \quad (11.18)$$

Обозначим:

$$(M_1, \mu_1) \otimes \ldots \otimes (M_m, \mu_m) = (M_1 \times \ldots \times M_m, \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_m). \tag{11.19}$$

Тогда: $(M_1, \mu_1) \otimes \ldots \otimes (M_m, \mu_m)$ - $C^{\min\limits_{k=\overline{1,m}}(r_*(\mu_k))}$*-гладкое многообразие, причём*

$$\dim\left((M_1, \mu_1) \otimes \ldots \otimes (M_m, \mu_m)\right) = N_1 + \ldots + N_m. \tag{11.20}$$

Далее в курсе мы покажем, что координатный атлас индуцирует топологию, и изучим простейшие свойства этой топологии.

Лекция 12

Гладкое многообразие (Часть 2)

Топология на гладком многообразии

Дадим более общее определение для квазимногообразий, поскольку многообразие - это частный случай квазимногообразия.

Определение 12.1. *Пусть:* (M, μ) - C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$.

1) *Будем говорить, что* A *- открытое множество в* (M, μ)*, если:* $A \subseteq M$, $\forall h \in \mu(h[A] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}})$.

2) *Обозначим через* τ_μ *множество всех открытых множеств в пространстве* (M, μ).

Перед тем, как доказать, что введённые определения открытых множеств действительно образуют топологию сформулируем и докажем вспомогательные утверждения.

Достаточные условия открытости множества

Утверждение 12.1. *Пусть:* (M, μ) - C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$.

Пусть: $Q \subseteq MA(\mu, 0)$, $A \subseteq \bigcup\limits_{h \in Q} D(h)$*, причём*

$$\forall h \in Q(h[A] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}).$$

Тогда $A \in \tau_\mu$.

Доказательство

Очевидно, что:

$$A \subseteq \bigcup_{h \in Q} D(h) \subseteq M. \tag{12.1}$$

Пусть: $h \in \mu$, $h_0 \in Q$. Тогда:

$$h\left[A \bigcap D(h_0)\right] = h\left[h_0^{-1}\left[h_0[A]\right]\right] = \left(h \circ h_0^{-1}\right)\left[h_0[A]\right] = \varphi_{h,h_0}(h_0[A]). \tag{12.2}$$

Так как $h_0 \in Q$, то $h_0[A] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$. Так как φ_{h,h_0} — гомеоморфизм из $\mathbb{R}^{N_r}$ в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(\varphi_{h,h_0}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(\varphi_{h,h_0}) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, то $h[A \bigcap D(h_0)] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$.

Пусть $h \in \mu$. Пусть $x_0 \in h[A]$.

Тогда существует точка p_0, удовлетворяющая условиям: $p_0 \in (A \bigcap D(h))$, $x_0 = h(p_0)$.

Так как $p_o \in A$, то существует координатная карта h_0, удовлетворяющая условиям: $h_0 \in Q$, $p_0 \in D(h_0)$.

Рассмотрим множество $h[A \bigcap D(h_0)]$. Так как: $h \in \mu$, $h_0 \in Q$, то $h[A \bigcap D(h_0)] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$. Так как: $p_0 \in D(h)$, $p_0 \in (A \bigcap D(h_0))$, то $x_0 \in h[A \bigcap D(h_0)]$. Итак, $h[A \bigcap D(h_0)]$ - окрестность точки x_0.

Очевидно, что: $h\left[A \bigcap D(h_0)\right] \subseteq h\left[A\right]$.

Тогда $x_0 \in \operatorname{int}\left(h\left[A\right]\right)$.

Следовательно (поскольку точка $x_0 \in h\left[A\right]$ была выбрана произвольно) $h\left[A\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$. Тогда, в силу того, что координатная карта $h \in \mu$ была выбрана произвольно, получаем, что $A \in \tau_\mu$.

Утверждение доказано.

Утверждение 12.2 (Частный случай)**.** *Пусть:* (M, μ) *-* C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim\left((M, \mu)\right) = N$*.*

Пусть: $h \in MA\left(\mu, 0\right)$*,* $A \subseteq D(h)$*,* $h\left[A\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$*.*

Тогда $A \in \tau_\mu$*.*

Это утверждение напрямую следует из предыдущего.

Утверждение 12.3 (Единственность такой топологии)**.** *Пусть:* M *— множество,* $M \neq \varnothing$*;* μ_1, μ_2 *-* C^0*-гладкие координатные атласы на множестве* M*,* μ_1, μ_2 *-* C^0*-согласованные.*

Тогда $\tau_{\mu_1} = \tau_{\mu_2}$*.*

Доказательство

Обозначим: $N = \dim(\mu_1)$. Так как $\mu_1, MA\left(\mu, 0\right)$ - C^0-согласованные, то $\dim\left(MA\left(\mu_1, 0\right)\right) = N$. Так как μ_1, μ_2 - C^0-согласованные, то $\dim(\mu_2) = N$. Так как $\mu_2, MA\left(\mu_2, 0\right)$ - C^0-согласованные, то $\dim\left(MA\left(\mu_2, 0\right)\right) = N$.

Пусть $A \in \tau_{\mu_1}$. Далее воспользуемся утверждением 12.1, где в качестве $Q \subseteq MA\left(\mu_2, 0\right)$ возьмём μ_1,

Так как μ_1, μ_2 - C^0-согласованные, то $MA\left(\mu_1, 0\right) = MA\left(\mu_2, 0\right)$. Тогда: $\mu_1 \subseteq MA\left(\mu_1, 0\right) = MA\left(\mu_2, 0\right)$.

Так как $A \in \tau_{\mu_1}$, то$\forall h \in \mu_1 (h\left[A\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}})$.

Тогда $A \in \tau_{\mu_2}$. Пусть $A \in \tau_2$. Аналагично можем доказать, что из этого следует: $A \in \tau_{\mu_1}$.

Итак, $\tau_{\mu_1} = \tau_{\mu_2}$.

Утверждение доказано.

Докажем теперь, что построенная нами τ_μ действительно топология.

Утверждение 12.4. *Пусть:*(M, μ) *-* C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim\left((M, \mu)\right) = N$*.*

Тогда τ_μ *- топология на множестве* M*.*

Доказательство

Очевидно, что: $\tau_\mu \subseteq P(M)$.

Очевидно, что $M \subseteq M$. Пусть $h \in \mu$. Тогда:

$$h\left[M\right] = R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}. \tag{12.3}$$

Следовательно, $M \in \tau_\mu$.

Пусть $A, B \in \tau_\mu$. Тогда $A \bigcap B \subseteq M$. Пусть $h \in \mu$.

Так как h - обратимая функция, то $h\left[A \bigcap B\right] = h\left[A\right] \bigcap h\left[B\right]$. Так как $A, B \in \tau_\mu$, то $h\left[A\right], h\left[B\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$. Тогда $h\left[A\right] \bigcap h\left[B\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$. Тогда $h\left[A \bigcap B\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$.

Следовательно $A\bigcap B \in \tau_\mu$.

Пусть $Q \subseteq \tau_\mu$. Тогда:

$$\bigcup_{A\in Q} A \subseteq M. \tag{12.4}$$

Пусть $h \in \mu$. Тогда:

$$h\left[\bigcup Q\right] = h\left[\bigcup_{A\in Q} A\right] = \bigcup_{A\in Q} \underbrace{h\left[A\right]}_{\in\tau_{\mathbb{R}^{N_r}}} \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}. \tag{12.5}$$

Следовательно, $\bigcup Q \in \tau_\mu$.

Итак, τ_μ - топология на множестве M (поскольку выполнены все аксиомы топологии).

Утверждение доказано.

Можно сказать, что атлас индуцирует топологию, а точнее, он переносит топологию из пространства $\mathbb{R}^{N_r}$ на многообразие (индуцирует не с нуля, а с уже готовой топологии). Однако при перенесении на многообразие эта топология может сильно измениться.

Теперь к любому гладкому квазимногообразию (равно как и к многообразию) можно относиться, как к топологическому пространству. Обсудим свойства такой топологии и координатных карт на таком пространстве.

Утверждение 12.5. *Пусть: (M,μ) - C^0-гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim\left((M,\mu)\right) = N$.*

Пусть $h \in MA\left(\mu, 0\right)$.

Тогда h — гомеоморфизм из (M,μ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau_\mu$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$.

Доказательство

Очевидно, что h - обратимая функция, $D(h) \subseteq M$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$.

Очевидно, что $h \in MA\left(\mu, 0\right)$, $D(h) \subseteq D(h)$, причём:

$$h\left[D(h)\right] = R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}. \tag{12.6}$$

Тогда (в силу утверждения 12.2) $D(h) \in \tau_\mu$.

Пусть $p_0 \in D(h)$. Тогда $h(p_0) \in R(h)$, $p_0 = h^{-1}(h(p_0))$.

Пусть ω_2 - окрестность точки $h(p_0)$.

Очевидно, что:

$$h^{-1}\left[\omega_2\right] \subseteq D(h), \quad h\left[h^{-1}\left[\omega_2\right]\right] = \omega_2 \bigcap R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}, \quad h \in MA\left(\mu, 0\right). \tag{12.7}$$

Тогда (по утверждению 12.1) $h^{-1}\left[\omega_2\right] \in \tau_\mu$.

Так как $h(p_0) \in R(h)$, $h(p_0) \in \omega_2$, то $p_0 \in h^{-1}\left[\omega_2\right]$.

Итак, $h^{-1}\left[\omega_2\right]$ - окрестность точки p_0.

Очевидно, что:

$$h\left[h^{-1}\left[\omega_2\right]\right] = \omega_2 \bigcap R(h) \subseteq \omega_2. \tag{12.8}$$

Тогда h - непрерывная функция в точке p_0.

Следовательно (в силу произвольности выбора точки $p_0 \in D(h)$) h - непрерывная функция на $D(h)$.

Пусть $x_0 \in R(h)$. Тогда $h^{-1}(x_0) \in D(h)$, $x = h(h^{-1}(x_0))$.

Пусть ω_2 - окрестность точки $h^{-1}(x_0)$. Так как:

$$\omega_2 \in \tau_\mu = \tau_{MA\,(\mu,0)}, h \in MA\,(\mu, 0),$$

то:

$$h\,[\omega_2] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}. \tag{12.9}$$

Так как: $h^{-1}(x_0) \in D(h)$, $h^{-1}(x_0) \in \omega_2$, то:

$$h\big(h^{-1}(x_0)\big) = x_0 \in h\,[\omega_2]\,. \tag{12.10}$$

Итак, из (12.9), (12.10) следует, что $h\,[\omega_2]$ - окрестность точки x_0. Очевидно, что:

$$h^{-1}\Big[h\,[\omega_2]\Big] = \omega_2 \bigcap D(h) \subseteq \omega_2. \tag{12.11}$$

Тогда h^{-1} - непрерывная функция в точке x_0. В силу произвольности выбора точки $x_0 \in R(h)$ следует, что h^{-1} - непрерывная функция на множестве $R(h)$.

Итак, имеем: h — гомеоморфизм из (M, μ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau_\mu$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$.

Утверждение доказано.

Введём вспомогательное определение, которое поможет нам увидеть важное свойство введённой нами топологии τ_μ.

Определение 12.2. *Пусть:* (M, μ) - C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim\left((M, \mu)\right) = N$.

Будем говорить, что τ *- топология, согласованная с координатным атласом* μ*, если:* τ *- топология на множестве* M*, для любой координатной карты* $h \in \mu$ *справедливо следующее утверждение:* h *— гомеоморфизм из* (M, τ) *в* $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$.

Теперь докажем, что на квазимногообразии (M, μ) не может быть согласованной с μ топологии, отличной от τ_μ.

Утверждение 12.6. *Пусть* (M, μ) - C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim\left((M, \mu)\right) = N$.

Пусть: τ *- топология, согласованная с координатным атласом* μ.

Тогда $\tau = \tau_\mu$.

Доказательство

Пусть $A \in \tau$. Тогда $A \subseteq M$. Пусть $h \in \mu$.

Так как h — гомеоморфизм из (M, τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $A \in \tau$, то $h\,[A] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$.

Следовательно (в силу произвольности выбора $h \in \mu$) $A \in \tau_\mu$. Тогда в силу произвольности выбора $A \in \tau$ следует, что:

$$\tau \subseteq \tau_\mu. \tag{12.12}$$

Пусть $A \in \tau_\mu$. Пусть $h \in \mu$. Тогда $h\left[A\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$.

Очевидно, что:

$$A \bigcap D(h) = h^{-1}\left[h\left[A\right]\right]. \tag{12.13}$$

Так как h^{-1} — гомеоморфизм из $\mathbb{R}^{N_r}$ в (M, τ), $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $D(h) \in \tau$, $h\left[A\right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, то:

$$A \bigcap D(h) \in \tau. \tag{12.14}$$

Очевидно, что:

$$A = A \bigcap M = A \bigcap \bigcup_{h \in \mu} D(h) = \bigcup_{h \in \mu} \underbrace{\left(A \bigcap D(h)\right)}_{\in \tau} \in \tau. \tag{12.15}$$

Тогда в силу произвольности выбора $A \in \tau_\mu$ следует, что:

$$\tau_\mu \subseteq \tau. \tag{12.16}$$

Итак, из (12.12) и (12.16) следует, что $\tau_\mu = \tau$.

Утверждение доказано.

Подытожим часть проделанной работы. Мы ввели координатные атласы и гладкие квазимногообразия, потом построили на них топологию и доказали, что всякая топология, согласованная с атласом гладкого квазимногообразия, совпадает с построенной нами топологией τ_μ. Это был подход Постникова, в нём координатный атлас вводился на совершенно обыкновенном множестве, и само понятие координатного атласа является «самодостаточным», то есть фундаментальным.

Теперь немного пройдём по обратному пути (сначала топология, а потом из неё координатный атлас). Сделаем это для того, чтобы доказать, что гладкие многообразия - это локально евклидовы пространства.

Локально евклидово пространство (Часть 1)

Определение 12.3. *Пусть (M, τ) - топологическое пространство.*

1) *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что (M, τ) — локально евклидово пространство размерности N, если: $M \neq \varnothing$, причём для любой точки $p_0 \in M$ существует функция h, удовлетворяющая условиям: h — гомеоморфизм из (M, τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $p_0 \in D(h)$.*

   (То есть, у каждой точки $gskM\tau$ существует окрестность, гомеоморфная открытому множеству в $\mathbb{R}^{N_r}$).

2) *Будем говорить, что (M, τ) — локально евклидово пространство, если $\exists N \in \mathbb{N}((M, \tau)$ — локально евклидово пространство размерности $N)$.*

3) *Пусть $N \in \mathbb{N}$, $M \neq \varnothing$. Обозначим через $\mu_{\tau,N}$ множество всех функций h, удовлетворяющих условиям: h — гомеоморфизм из (M, τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$.*

4) Пусть $M \neq \varnothing$. Обозначим:

$$\mu_\tau = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mu_{\tau,N}. \tag{12.17}$$

Утверждение 12.7. *Пусть (M,τ) - топологическое пространство.*

1) Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $M \neq \varnothing$, $h \in \mu_{\tau,N}$.
Тогда h - координатная карта на множестве M, $\dim(h) = N$.

2) Пусть: $M \neq \varnothing$; $N_1 \in \mathbb{N}$, $h_1 \in \mu_{\tau,N_1}$; $N_2 \in \mathbb{N}$, $h_2 \in \mu_{\tau,N_2}$; причём верно, что

$$D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing.$$

Тогда h_1, h_2 - C^0-согласованные.

3) Пусть: $M \neq \varnothing$, $N \in \mathbb{N}$, $h_1, h_2 \in \mu_{\tau,N}$.
Тогда h_1, h_2 - C^0-согласованные.

4) Пусть: $N \in \mathbb{N}$, (M,τ) — локально евклидово пространство размерности N.
Тогда $\mu_{\tau,N}$ - C^0-гладкий координатный атлас на множестве M, $\dim(\mu_{\tau,N}) = N$.

5) Пусть $N_1 \in \mathbb{N}$, (M,τ) — локально евклидово пространство размерности N_1; $N_2 \in \mathbb{N}$, (M,τ) — локально евклидово пространство размерности N_2.
Тогда $N_1 = N_2$.

Рекомендуется доказать первый пункт этого утверждения самостоятельно. Третий пункт очевиден, поскольку если $D(h_1) \bigcap D(h_2) = \varnothing$, то они согласованные ввиду одинаковой размерности, иначе они согласованные согласно второму пункту этого утверждения.

Пятый пункт этого утверждения также очевиден, как следствие из четвёртого пункта, ведь поскольку (M,τ) — локально евклидово пространство размерностей N_1, N_2, то существуют C^0-гладкие координатные атласы этого пространства размерностей N_1, N_2, которые пересекаются, следовательно у них есть их максимальные расширения, которые совпадают, а следовательно $N_1 = N_2$.

Таким образом, остаётся доказать пункты 2 и 4.

Доказательство

2. Так как $D(h_1) \in \tau$, $D(h_2) \in \tau$, то:

$$D(h_1) \bigcap D(h_2) \in \tau. \tag{12.18}$$

Так как h_1 — гомеоморфизм из (M,τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h_1) \in \tau$, $R(h_1) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, то:

$$h_1 \left[D(h_1) \bigcap D(h_2) \right] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}. \tag{12.19}$$

Так как:

$$W_{h_2,h_1} = \underbrace{h_1\left[D(h_1)\bigcap D(h_2)\right]}_{=h_1[D(h_2)]}, \tag{12.20}$$

то $W_{h_2,h_1} \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$.

Так как h_1^{-1} - непрерывная функция, h_2 - непрерывная функция, то $h_2 \circ h_1^{-1}$ - непрерывная функция. Так как $\varphi_{h_2,h_1} = h_2 \circ h_1^{-1}$, то φ_{h_2,h_1} - непрерывная функция.

Аналогично можно увидеть, что $W_{h_1,h_2} \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, φ_{h_1,h_2} - непрерывная функция.

Так как $D(h_1)\bigcap D(h_2) \neq \varnothing$, то h_1, h_2 - C^0-согласованные.

Второй пункт утверждения доказан.

4. Пусть $p_0 \in M$. Так как (M,τ) — локально евклидово пространство размерности N, то существует функция h, удовлетворяющая условиям: h — гомеоморфизм из (M,τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $p_0 \in D(h)$.

Так как $p_0 \in D(h)$, то $D(h) \neq \varnothing$. Тогда $R(h) \neq \varnothing$. Следовательно, $h \in \mu_{\tau,N}$. Тогда:

$$M \subseteq \bigcup_{h\in\mu_{\tau,N}} D(h). \tag{12.21}$$

Очевидно, что:

$$\bigcup_{h\in\mu_{\tau,N}} D(h) \subseteq M. \tag{12.22}$$

Итак, из (12.21) и (12.22) имеем, что:

$$\bigcup_{h\in\mu_{\tau,N}} D(h) = M. \tag{12.23}$$

Тогда (по определению координатной карты и координатного атласа) $\mu_{\tau,N}$ - C^0-гладкий координатный атлас на множестве M.

Четвёртый пункт утверждения доказан.

Лекция 13

Локально евклидово пространство (Часть 2)

Связь локально евклидова пространства с гладкими многообразиями

Итак, с учётом полученного, дополним определения.

Определение 13.1. *Пусть (M,τ) - топологическое пространство.*

1) *Пусть $M \neq \varnothing$, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mu_{\tau,N}$ множество всех функций h, удовлетворяющих условиям: h — гомеоморфизм из (M,τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$.*

2) *Пусть $M \neq \varnothing$. Обозначим:*

$$\mu_\tau = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mu_{\tau,N}. \tag{13.1}$$

Утверждение 13.1. *Пусть (M,τ) — топологическое пространство.*

1) *Пусть: $M \neq \varnothing$, $N \in \mathbb{N}$, $h \in \mu_{\tau,N}$.*

   Тогда h — координатная карта на множестве M, $\dim(h) = N$.

2) *Пусть: $M \neq \varnothing$; $N_1 \in \mathbb{N}$, $h_1 \in \mu_{\tau,N_1}$; $N_2 \in \mathbb{N}$, $h_2 \in \tau_{\mu,N_2}$; $D(h_1) \bigcap D(h_2) \neq \varnothing$.*

   Тогда h_1, h_2 - C^0-согласованные.

3) *Пусть $M \neq \varnothing$, $N \in \mathbb{N}$, $h_1, h_2 \in \mu_{\tau,N}$.*

   Тогда h_1, h_2 — C^0-согласованные.

Определение 13.2. *Пусть (M,τ) — топологическое пространство.*

1) *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что (M,τ) — локально евклидово пространство размерности N, если: $M \neq \varnothing$; для любой точки $p_0 \in M$ существует функция h, удовлетворяющая условиям: h — гомеоморфизм из (M,τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $p_0 \in D(h)$.*

2) *Будем говорить, что (M,τ) — локально евклидово пространство, если $\exists N \in \mathbb{N}$ ((M,τ) — локально евклидово пространство размерности N).*

Утверждение 13.2 (Без доказательства)**.** *Пусть (M,τ) — топологическое пространство.*

1) *Пусть $N \in \mathbb{N}$, (M,τ) — локально евклидово пространство размерности N.*

   Тогда: $\mu_{\tau,N}$ —C^0-гладкий координатный атлас на множестве M, $\dim(\mu_{\tau,N}) = N$.

2) *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, (M, τ) *— локально евклидово пространство размерности* N*;* $\widetilde{N} \in \mathbb{N}$, $\widetilde{N} \neq N$.

   Тогда $\mu_{\tau,\widetilde{N}} = \varnothing$.

   Комментарий. (Для доказательства нужно взять координатную карту h_1 *размерности* $\widetilde{N}$*, взять из* $D(h_1)$ *точку* p_0*, взять* h_2 *из* $\mu_{\tau,N}$ *такую, что* $p_0 \in D(h_2)$*. Тогда две карты пересекаются, значит они* C^0*-согласованные, следовательно* $\widetilde{N} = N$*, но так как* $\widetilde{N} \neq N$*, то такой карты* h_1 *не существует, следовательно* $\mu_{\tau,\widetilde{N}} = \varnothing$*.)*

3) *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, (M, τ) *— локально евклидово пространство размерности* N.

   Тогда $\mu_\tau = \mu_{\tau,N}$.

4) *Пусть:* $N_1 \in \mathbb{N}$, (M, τ) *— локально евклидово пространство размерности* N_1*;* $N_2 \in \mathbb{N}$, (M, τ) *— локально евклидово пространство размерности* N_2.

   Тогда $N_1 = N_2$*. (То есть размерность является характеристикой пространства)*

Так как мы не доказали теоремы для доказательства второго пункта данного утверждения, то, строго говоря, мы не можем им пользоваться, но, зная, что он верен, мы формально можем не вводить μ_τ, а всё время пользоваться атласом $\mu_{\tau,N}$. Тогда, по правде говоря, у нас бы возникли технические трудности с выбором числа N, но они, конечно же, решаемые. Поэтому, в целях экономии времени, мы будем пользоваться атласом μ_τ, но при этом будем иметь ввиду $\mu_{\tau,N}$, у которого мы подобрали нужное N.

Определение 13.3. *Пусть* (M, τ) *— топологическое пространство,* (M, τ) *— локально евклидово пространство. Выберем объект* N*, удовлетворяющее условиям:* $N \in \mathbb{N}$, (M, τ) *— локально евклидово пространство размерности* N *(из четвёртого пункта утверждения 1.2 следует, что такой объект единственный).*

Обозначим:

$$\dim((M, \tau)) = N. \tag{13.2}$$

Мы изучили два подхода из гладкого координатного атласа к многообразиям и топологические пространства и из топологического пространства в локально евклидова пространства, в многообразие и атлас. Теперь изучим связи между этими двумя подходами.

Утверждение 13.3. *Пусть:* (M, μ) *—* C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$.

1) *Справедливы следующие утверждения:* M *— множество,* $M \neq \varnothing$, $N \in \mathbb{N}$, μ *—* C^0*-гладкий координатный атлас на множестве* M, $\dim(\mu) = N$.

2) τ_μ *— топология на множестве* M*; для любой функции* $h \in MA(\mu, 0)$ *справедливы утверждения:* h *— гомеоморфизм из* (M, τ_μ) *в* $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau_\mu$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$.

3) (M, τ_μ) — топологическое пространство.

4) (M, τ_μ) — локально евклидово пространство размерности N, $N \in \mathbb{N}$.

5) (M, τ_μ) — локально евклидово пространство, , $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \tau_\mu)) = N$.

6) $\mu_{\tau_\mu} = MA(\mu, 0)$.

Докажем только четвёртый и шестой пункты этого утверждения, остальные предлагается доказать самостоятельно.

Доказательство

4. Очевидно, что $M \neq \varnothing$. Пусть $p_0 \in M$. Так как μ — C^0-гладкий координатный атлас на множестве M, то существует функция h, удовлетворяющая условиям: $h \in \mu$, $p_0 \in D(h)$.

Тогда (в силу утверждения 13.3 пункта 2): h — гомеоморфизм из (M, τ_μ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau_\mu$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $p_0 \in D(h)$. Следовательно (M, τ_μ) — локально евклидово пространство размерности N.

6. Пусть $h \in MA(\mu, 0)$. Тогда: h — гомеоморфизм из (M, τ_μ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau_\mu$, $R(h) \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $R(h) \neq \varnothing$. Следовательно $h \in \mu_{\tau_\mu}$.

Тогда $MA(\mu, 0) \subseteq \mu_{\tau_\mu}$. Так как $MA(\mu, 0)$ — максимальный C^0-гладкий координатный атлас на множестве M, μ_{τ_μ} - C^0-гладкий координатный атлас на множестве M, $MA(\mu, 0) \subseteq \mu_{\tau_\mu}$, то $MA(\mu, 0) = \mu_{\tau_\mu}$.

Теперь сделаем сухую выжимку (для удобства), и отметим наиболее важные для нас в дальнейшем моменты из утверждения 13.3.

Утверждение 13.4 (Основные результаты)**.** *Пусть (M, μ) — C^0-гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$.*

1) (M, τ_μ) — топологическое пространство, (M, τ_μ) — локально евклидово пространство, $N, \in \mathbb{N}$ $\dim((M, \tau_\mu)) = N$.

2) $\mu_{\tau_\mu} = MA(\mu, 0)$.

Утверждение 13.5. *Пусть: (M, τ) — топологическое пространство, (M, τ) — локально евклидово пространство, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \tau)) = N$.*

1) M — множество, $M \neq \varnothing$, $N \in \mathbb{N}$, τ - топология на множестве M.

2) μ_τ — C^0-гладкий координатный атлас на множестве M, $\dim(\mu_\tau) = N$, $N \in \mathbb{N}$.

3) (M, μ_τ) — C^0-гладкое квазимногообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu_\tau)) = N$.

4) $\tau_{\mu_\tau} = \tau$.

5) μ_τ — максимальный C^0-гладкий координатный атлас на множестве M.

6) (M, μ_τ) — C^0-гладкое многообразие, $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu_\tau)) = N$.

Докажем только нетривиальные четвёртый и пятый пункты данного утверждения (остальные рекомендуется доказать самостоятельно).

Доказательство

4. Пусть $h \in \mu_\tau$. Тогда: h — гомеоморфизм из (M, τ) в $\mathbb{R}^{N_r}$, $D(h) \in \tau$. Следовательно, топология τ — согласованна с атласом μ_τ.

Тогда $\tau = \tau_{\mu_\tau}$ (из утверждения 12.6 о единственности согласованной с атласом топологии).

5. Очевидно, что:

$$\mu_\tau = \mu_{\tau_{\mu_\tau}} = MA\,(\mu_\tau, 0). \tag{13.3}$$

Тогда μ_τ — максимальный C^0-гладкий координатный атлас на множестве M.

Опять сделаем выжимку из этого утверждения.

Утверждение 13.6 (Основные результаты)**.** *Пусть:* (M, τ) *— топологическое пространство,* (M, τ) *— локально евклидово пространство,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \tau)) = N$.

1) (M, μ_τ) *—* C^0*-гладкое многообразие,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim((M, \mu_\tau)) = N$*.*

2) $\tau_{\mu_\tau} = \tau$*.*

Теперь мы видим, что из старого подхода можно легко перейти к новому, то есть теория гладких многообразий является эквивалентной теории локально евклидовых пространств.

Примеры гладких многообразий

На самом деле примеры многообразий нам уже известны. Так пусть есть поле $\mathbb{R}^{N_r}$. Рассмотрим на нём функцию:

$$h_0(p) = p \text{ при } p \in \mathbb{R}^{N_r}. \tag{13.4}$$

Нетрудно увидеть, что h_0 — координатная карта на множестве M. Пусть теперь $\mu = \{h_0\}$ — гладкий координатный атлас, и на нашем поле $\mathbb{R}^{N_r}$ рассмотрим расширение этого атласа $MA\,(\mu, r)$(теперь получилось многообразие). На самом деле мы так уже делали, используя криволинейные координаты, поскольку использование криволинейных координат — это добавление к тривиальному атласу μ согласованных с ним новых координатных карт.

Теперь обсудим некий «патологический пример», который носит название «раздвоенная прямая».

Пусть имеется множество:

$$M_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}\,. \tag{13.5}$$

Добавим к множеству M_0 две точки:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.6}$$

И будем рассматривать новое множество (См. рис. 13.1):

$$M = M_0 \bigcup \{p_1, p_2\}\,. \tag{13.7}$$

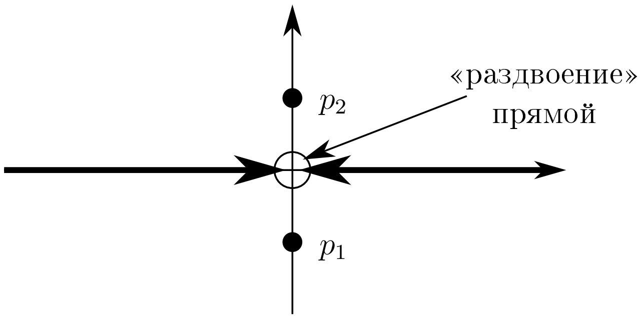

Рис. 13.1. Раздвоенная прямая

Теперь составим координатный атлас для нашего множества M. Пусть: h_1 — функция; $D(h_1) = M_0 \bigcup \{p_1\}$, причём:

$$h_1(x, y) = x \text{ при } (x, y) \in M_0 \bigcup \{p_1\}\,; \tag{13.8}$$

пусть h_2 — функция; $D(h_2) = M_0 \bigcup \{p_1\}$, причём:

$$h_2(x, y) = x \text{ при } (x, y) \in M_0 \bigcup \{p_2\}\,. \tag{13.9}$$

Тогда нетрудно видеть, что $\mu = \{h_1, h_2\}$ — C^a-гладкий координатный атлас на множестве M, $\dim(\{h_1, h_2\}) = 1$.

Значит, поскольку есть атлас, то есть и индуцированная им топология. Рассмотрим окрестности точек p_1, p_2.

Пусть ω_1 — окрестность точки p_1. Тогда $\omega_1 \in \tau_\mu$, $p_1 \in \omega_1$. Тогда $h_1[\omega_1] \in \tau_{\mathbb{R}^{N_r}}$, $h_1(p_1) = 0 \in h_1[\omega_1]$.

Значим $h_1[\omega_1]$ — окрестность точки 0 в обычной топологии на $\mathbb{R}$. Пусть ω_2 — окрестность точки p_2. Тогда $h_2(p_2) = 0 \in h_2[\omega_2]$, $h_2[\omega_2]$ — окрестность точки 0 а обычной топологии на $\mathbb{R}$.

Следовательно, $h_1[\omega_1] \bigcap h_2[\omega_2] \neq \varnothing$, то есть любые две окрестности этих двух точек p_1, p_2 пересекаются между собой. Тем не менее, рассмотренный нами пример является многообразием.

Координатные представления (Часть 1)

Определение 13.4. *Пусть:* (M, μ) *—* C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim((M, \mu)) = N$*;* $p_0 \in M$*.*

Обозначим:

$$Q(p_0, \mu) = \{h : h \in \mu \wedge p_0 \in D(h)\}\,. \tag{13.10}$$

Будем называть такие $h \in Q(p_0, \mu)$ *координатными окрестностями точки* p_0*.*

Определение 13.5. *Пусть:* (M_1, μ_1) *—* C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_1, \mu_1)) = N_1$*;* (M_2, μ_2) *—* C^0*-гладкое квазимногообразие,* $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_2, \mu_2)) = N_2$*;* $F : M_1 \to M_2$*,* $h \in \mu_1$*,* $H \in \mu_2$*.*

Пусть верно, что:

$$\begin{cases} p \in D(F), \\ q = F(p), \\ x = h(p), \\ y = H(q). \end{cases} \tag{13.11}$$

Выразим столбец y через столбец x:

$$q = H\big(h^{-1}(x)\big); y = H\Big(F\big(h^{-1}(x)\big)\Big) \Rightarrow y = \big(H \circ F \circ h^{-1}\big)(x). \tag{13.12}$$

Будем говорить, что $H \circ F \circ h^{-1}$ — координатное представление функции F в координатных картах h, H.

Очевидны некоторые простейшие факты о координатном представлении $H \circ F \circ h^{-1}$:

$$H \circ F \circ h^{-1} : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}; \tag{13.13}$$

$$D(H \circ F \circ h^{-1}) = h\left[D\big(F, D(H)\big)\right]; \tag{13.14}$$

$$R(H \circ F \circ h^{-1}) = H\left[F\left[D(h)\right]\right]. \tag{13.15}$$

Обозначим:

$$F(x; h, H) = H\Big(F\big(h^{-1}(x)\big)\Big) \text{ при } x \in h\left[D\big(F, D(H)\big)\right]. \tag{13.16}$$

Это самый сложный (самый общий) случай, когда функция представляет собой отображение из квазимногообразия в квазимногообразие. Однако, конечно же, можно составить и более простые случаи, когда функция действует из квазимногообразия в координатное пространство, либо когда функция действует из координатного пространства в квазимногообразие.

Замечание 13.1. *Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, (M, μ) — C^0-гладкое квазимногообразие, $\dim\left((M,\mu)\right) = N_1$; $F : M \to \mathbb{R}^{N_2}$, $h \in \mu$.*

Будем говорить, что $F \circ h^{-1}$ — координатное представление функции F в координатной карте h.

Замечание 13.2. *Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^0-гладкое квазимногообразие, $\dim\left((M,\mu)\right) = N_2$; $F : \mathbb{R}^{N_1} \to M$, $H \in \mu$.*

Будем говорить, что $H \circ F$ — координатное представление функции F в координатной карте H.

Рассмотрим замечание 13.1 и убедимся, что в этом случае, вообще говоря, вводить топологию на многообразии не требуется.

Утверждение 13.7. *Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^0-гладкое квазимногообразие, $\dim\left((M,\mu)\right) = N_1$; $F : M \to \mathbb{R}^{N_2}$; $p_0 \in M$, $h \in Q(p_0, \mu)$.*

1) *Пусть F — непрерывная функция в точке p_0.*

   Тогда $F \circ h^{-1}$ — непрерывная функция в точке $h(p_0)$.

   Комментарий. (Этот случай очевиден. Поскольку h — гомеоморфизм из (M, μ) в $\mathbb{R}^{N_2}$, то его обратная функция h^{-1} — тоже непрерывная, и функция $F \circ h^{-1}$ — непрерывная, как композиция непрерывных функций. Поэтому данный пункт доказываться не будет.)

2) *Пусть $F \circ h^{-1}$ — непрерывная функция в точке $h(p_0)$.*

   Тогда F — непрерывная функция в точке p_0.

Доказательство
2. Пусть $p \in D(F) \bigcap D(h)$. Тогда:

$$F(p) = F\big(h^{-1}(h(p))\big) = \Big(\big(F \circ h^{-1}\big) \circ h\Big)(p). \tag{13.17}$$

Следовательно:

$$F\Big|_{D(h)} = \big(F \circ h^{-1}\big) \circ h. \tag{13.18}$$

Тогда $F\Big|_{D(h)}$ — непрерывная функция в точке p_0.

Так как $D(h)$ — окрестность точки p_0, то F — непрерывная функция в точке p_0 (поскольку непрерывность — локальное свойство функции).

Утверждение доказано.

Таким образом, в случае, представленном в замечании 13.1 топологию на многообразии можно исключить и вместо того, чтобы говорить о непрерывности функции F можно говорить о непрерывности её координатного представления.

Однако уже в упрощённом случае, представленном в замечании 13.2, так делать нельзя, поскольку если $F : \mathbb{R}^{N_1} \to H$ и $H \circ F$ — непрерывная функция, то функция F всё равно может терпеть разрыв.

Проиллюстрируем данную ситуацию.

Пусть функция F не является непрерывной (например, пусть она непрерывна всюду на своей области определения, но какая-то последовательность, сходящаяся к точке $p_0 \in D(F)$ «испорчена», то есть на этой последовательности последовательности значений функции не сходятся к $F(p_0)$ (См. рис. 13.2)), но область определения координатной карты $D(H)$ «срезает эти разрывы» (то есть значения функции F на нашей «испорченойя последовательности» не попадают в $D(H)$). Тогда $H \circ F$ будет непрерывной функцией.

Таким образом, сама функция F имеет разрывы в некоторых точках, но при составлении координатного представления эти точки срежутся.

Определение 13.6. *Пусть: (M_1, μ_1) — C^0-гладкое квазимногообразие, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_1, \mu_1)) = N_1$; (M_2, μ_2) — C^0-гладкое квазимногообразие, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim((M_2, \mu_2)) = N_2$; $r \in \overline{\mathbb{N}}$.*

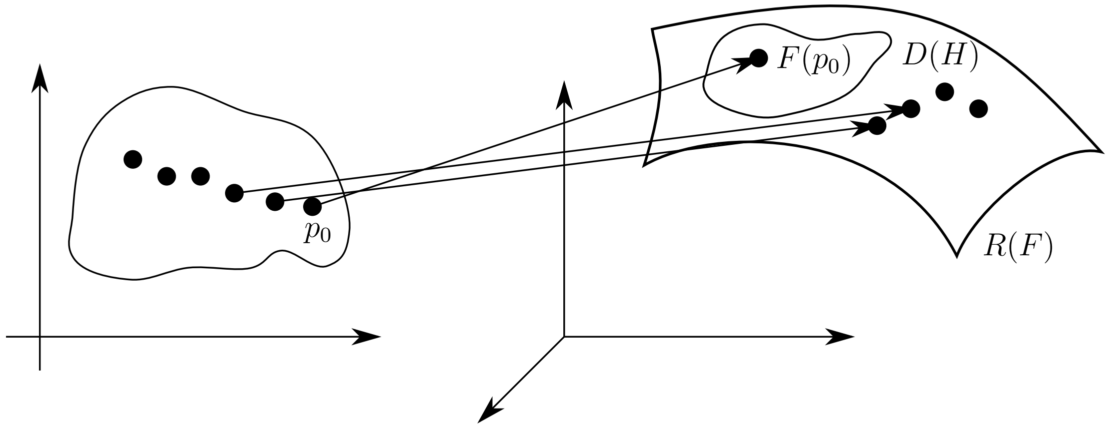

Рис. 13.2. Непрерывное координатное представление функции, имеющей разрыв

1) *Пусть: $F : M_1 \to M_2$. Будем говорить, что F — C^r-гладкая функция, если: $D(F)$ — регулярное множество в (M_1, μ_1), F — непрерывная функция на $D(F)$, причём $\forall h \in \mu_1 \forall H \in \mu_2$ верно:*

$$\Big(F\left[D(h)\right]\bigcap D(H) \neq \varnothing \Rightarrow H \circ F \circ h^{-1} \in C^r\Big(h\left[D(F, D(H))\right]; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}\Big)\Big).$$

2) *Пусть: $F : M_1 \to M_2$, $Q \subseteq M_1$. Будем говорить, что F — C^r-гладкая функция на множестве Q, если: $Q \subseteq D(F)$, $F\Big|_Q$ — C^r-гладкая функция.*

3) *Пусть Q — регулярное множество в (M_1, μ_1). Обозначим через $C^r(Q; (M_1, \mu_1), (M_2, \mu_2))$ множество всех функций F, удовлетворяющих условиям: $F : M_1 \to M_2$, F — C^r-гладкая функция на множестве Q.*

Лекция 14

Координатные представления (Часть 2)

Основная мысль конца предыдущей лекции, грубо говоря, состоит в том, что отображение считается гладким, если каждое его координатное представление является гладким (а ещё область определения — регулярное множество, отображение должно быть непрерывным; для этих требований требуется топология, которая индуцируется атласом).

Естественно желание иметь какой-либо признак гладкости отображения. Сейчас мы сформулируем его без доказательства, так как этот признак доказывается примерно так же, как условие согласованности двух координатных карт (утверждение 10.1) и признак открытости множества (утверждение 12.1).

Утверждение 14.1. *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $r_0 \in \overline{\mathbb{N}}$, $r \geq r_0$; (M_1, μ_1) — C^r*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M_1, \mu_1)) = N_1$; (M_2, μ_2) — C^r*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M_2, \mu_2)) = N_2$.

Пусть: $F : M_1 \to M_2$; $D(F)$ — *регулярное множество в пространстве* (M_1, μ_1); F — *непрерывная функция на* $D(F)$; *причём при* $\forall p_0 \in D(F)$ $\exists h \in Q(p_0, MA(\mu_1, r_0))$ $\exists H \in Q(F(p_0), MA(\mu_2, r_0))$ $\exists \omega((\omega$ — *окрестность* $p_0) \wedge (\omega \subseteq D(h)) \wedge F[\omega] \subseteq D(H))$ *верно, что:*

$$\Big(H \circ F \circ h^{-1} \in C^{r_0}\Big(h\Big[D(F) \bigcap \omega\Big]; \mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}\Big)\Big).$$

Тогда F — C^{r_0}*-гладкая функция.*

Замечание 14.1. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$, (M, μ) — C^r*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M, \mu)) = N$.

Пусть $h \in MA(\mu, r)$.

Тогда: $h : M \to \mathbb{R}^{N_r}$, h — C^r*-гладкая функция.*

Это замечание очевидно из предыдущего утверждения.

Дифференцирование координатного представления

Определение 14.1. *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^1*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M, \mu)) = N_1$; $F : M \to \mathbb{R}^{N_2}$, F — C^1*-гладкая функция,* $p_0 \in D(F)$, $h \in Q(p_0, \mu)$, $k = \overline{1, N_1}$.

Обозначим:

$$D_k(p, h)F(p)\Big|_{p=p_0} = \frac{\partial}{\partial x^k} F\big(h^{-1}(x)\big)\Big|_{x=h(p_0)}. \qquad (14.1)$$

Выражение (14.1) *называется производной функции* F *по* k*-той компоненте в точке* p_0 *в координатной карте* h.

В отличие от привычных производных в математическом анализе, здесь функция действует из абстрактного множества в абстрактное множество (в общем случае), поэтому понятие производной имеет смысл только при наличии координатной карты и, соответственно, сама производная будет зависеть от того, в какой координатной карте она берётся, а не только от функции, от которой будет браться производная. Поэтому производная в (14.1) (как это не сложно заметить) определяется, как производная от сложной функции, где в качестве аргумента функции F выступает значение обратной функции к функции координатной карты в точке $x = h(p_0)$.

Замечание 14.2. *Сделаем небольшое замечание про обозначение производной. Из математического анализа мы привыкли пользоваться двумя различными типами обозначениями производной, которые (хотя это ранее и не оговаривалось) имеют качественное различие. Первый тип — кванторный:*

$$\frac{d}{dx}\,F(x)\Big|_{x=x_0}, \tag{14.2}$$

который обозначает значение производной от функции $F(x)$ по компоненте x в точке $x = x_0$. Здесь $\frac{d}{dx}$ — это квантор, и все символы x в (14.2) — связные, то есть нельзя их заменить на какую-либо константу, иначе выражение станет бессмысленным:

$$\frac{d}{d1}\,F(1)\Big|_{1=1}. \tag{14.3}$$

Но есть и другой тип обозначения производной:

$$F'(x) \text{ или, если хотим значение производной в конкретной точке } F'(x_0). \tag{14.4}$$

Выражение (14.4) — есть операторный тип обозначения производной, в нём символ «$'$» обозначает оператор, поэтому можно подставить вместо переменной её значение сразу под знак оператора.

Поскольку введению оператора производной будут сопутствовать некоторые оговорки и затруднения в нашем случае, а никакой новой информации он не принесёт, то в данном курсе мы будем пользоваться кванторным типом записи (14.2).

На практике, для краткости записи (14.1), мы будем опускать некоторые символы в записи производной, а именно, если будут две координатные карты h_1 и h_2, то для h_1 мы будем использовать обычные латинские буквы, а для h_2 — латинские буквы со штрихом. Иногда будем даже опускать подстановку p_0, когда будет очевидно, в какой точке берётся производная.

Далее рассмотрим примеры производных функций (и вычислим их) в координатных представлениях.

Замечание 14.3. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^1-гладкое квазимногообразие, $\dim\left((M,\mu)\right) = N$.*

Пусть: $p_0 \in M$, $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$, $k = \overline{1,N}$, $k' = \overline{1,N}$.

Тогда:

$$D_k(p, h_1)\; h_2^{k'}(p)\Big|_{p=p_0} = \frac{\partial}{\partial x^k}\; h_2^{k'}\big(h_1^{-1}(x)\big)\Big|_{x=h_1(p_0)} = \frac{\partial}{\partial x^k}\; \varphi^{k'}_{h_2,h_1}(x)\Big|_{x=h_1(p_0)}. \tag{14.5}$$

Пусть: $p_0 \in M$, $h \in Q(p_0, M)$, $k = \overline{1,N}$, $k' = \overline{1,N}$.

Тогда:

$$D_k(p, h)\; h^{k'}(p)\Big|_{p=p_0} = \frac{\partial}{\partial x^k}\; h^{k'}\big(h^{-1}(x)\big)\Big|_{x=h(p_0)} = \frac{\partial}{\partial x^k}\;\Big(x^{k'}\Big)\Big|_{x=h(p_0)} = \delta^{k'}_k. \tag{14.6}$$

Закон преобразования частной производной

Выясним, как будет изменяться производная функции, при изменении координатного представления этой функции, не затрагивающем саму функцию (то есть при переходе от одной координатной карты к другой).

Утверждение 14.2. *Пусть:* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^1*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M,\mu)) = N_1$; $F : M \to \mathbb{R}^{N_2}$, F — C^1*-гладкая функция,* $p_0 \in D(F)$; $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$, $k' = \overline{1, N}$, $k_1 = \overline{1, N_1}$.

Тогда:

$$D_{k'}(p, h_2)\ F(p)\Big|_{p=p_0} = D_{k'}(p, h_2)\ h_1^k(p)\Big|_{p=p_0} \cdot D_k(p, h_1)\ F(p)\Big|_{p=p_0}. \tag{14.7}$$

Или, в сокращённой форме:

$$D_{k'}F = D_{k'}h_1^k \cdot D_k F. \tag{14.8}$$

Доказательство

Обозначим, для удобства, координаты в новой системе координат через y.

Очевидно, что:

$$\begin{aligned}
D_{k'}(p, h_2)\ F(p)\Big|_{p=p_0} &= \frac{\partial}{\partial y^{k'}}\ F\Big(h_2^{-1}(y)\Big)\Big|_{y=h_2(p_0)} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y^{k'}}\ F\Big(h_1^{-1}\Big(h_1\big(h_2^{-1}(y)\big)\Big)\Big)\Big|_{y=h_2(p_0)} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y^{k'}}\ \left(F\big(h_1^{-1}(x)\big)\Big|_{x=h_1\left(h_2^{-1}(y)\right)}\right)\Bigg|_{y=h_2(p_0)} = \\
&= [\text{по правилу дифференцирования сложной функции}] = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}\ F\big(h_1^{-1}(x)\big)\Big|_{x=h_1(p_0)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^{k'}}\ h_1^k\big(h_2^{-1}(y)\big)\Big|_{y=h_2(p_0)} = \\
&= D_k(p, h_1)\ F(p)\Big|_{p=p_0} \cdot D_{k'}(p, h_2)\ h_1^k(p)\Big|_{p=p_0}.
\end{aligned} \tag{14.9}$$

Утверждение доказано.

Замечание 14.4. *Для того, чтобы было можно сослаться на теорему о дифференцировании сложной функции, должны быть выполнены следующие условия: точка, в которой производится дифференцирование, должна быть внутренней точкой области определения внутренней функции, а значение внутренней функции в этой точке должно быть внутренней точкой области определения внешней функции. Здесь, строго говоря, этого нет, так как область определения* $D(F)$ *— регулярное множество, и оно может содержать граничные точки. Однако внутренняя функция здесь — это обратное координатное отображение (обратное отображение к координатной карте) с открытой областью определения, то есть заботиться нужно только о граничных точках области определения функции* F. *В таких точках можно провести следующий алгоритм: сначала применить теорему о неявной функции во внутренних точках области определения* $D(F)$, *а потом сделать предельный переход при приближении к граничным точкам области* *определения $D(F)$ и, тем самым, доказать, что теорема о неявной функции здесь работает во всех точках области определения $D(F)$.*

Далее такие тривиальные, но громоздкие рассуждения будут опускаться, и мы будем по умолчанию иметь это ввиду, применяя в подобных ситуациях теорему о дифференцировании сложной функции.

Рассмотрим обратную ситуацию, когда функция действует из координатного пространства на гладкое квазимногообразие.

Утверждение 14.3 (Без доказательства)**.** *Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^1-гладкое квазимногообразие, $\dim((M, \mu)) = N_2$; $F : \mathbb{R}^{N_1} \to M$, F — C^1-гладкая функция; $x_0 \in D(F)$, $k = \overline{1, N_1}$; $H_1, H_2 \in Q(F(x_0), \mu)$, $m' = \overline{1, N_2}$.*

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, H_2^{m'}(F(x))\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial}{\partial x^k}\, H_1^{m}(F(x))\Big|_{x=x_0} \cdot D_m(q, H_1)\, H_2^{m'}(q)\Big|_{q=F(x_0)}. \qquad (14.10)$$

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 14.2.

Касательное пространство к гладкому квазимногообразию

Данная тема нужна при работе с, так называемыми, неголономными базисами.

Грубо говоря, понимать понятие голономности можно следующим образом. Базисы, состоящие из векторов, параллельных к координатным линиям называются голономными, и наоборот, базисы, состоящие из векторов не параллельных к координатным линиям.

Далее мы более подробно обсудим понятие голономности базиса.

Перед тем, как дать формальное определение касательного пространства, попытаемся понять его смысл. Пусть есть какая-либо поверхность в пространстве, и пусть мы рассматриваем две точки p_0, p_0 данной поверхности не равные друг другу (См. рис. 14.1).

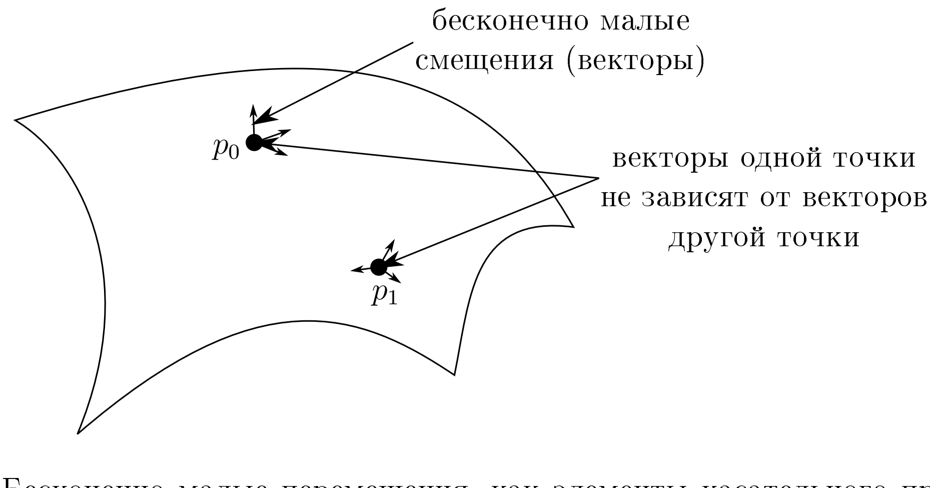

Рис. 14.1. Бесконечно малые перемещения, как элементы касательного пространства

Теперь будем рассматривать, так называемые, всевозможные «бесконечно малые перемещения» этих точек, будем обозначать эти «бесконечно малые перемещения» векторами. Понятно, что вектора, обозначающие малые перемещения точки p_0, и вектора, обозначающие малые перемещения точки p_1, в общем случае, никак не связаны между собой. Очевидно, что вектора каждой из точек образуют своё пространство, и, конечно же, разумно ожидать, что размерность этого пространства будет, по крайней мере, не превышать размерности пространства, образованного такой поверхностью.

Такие пространства, грубо говоря, можно представлять себе как касательные пространства к гладкому квазимногообразию (поверхности).

Также для большей простоты представления, можно представлять себе поверхность в обычном трёхмерном пространстве (См. рис. 14.2), а в качестве «касательных пространств» касательные плоскости к этой поверхности в точках p_0, p_1 (формально говоря, это не совсем корректный пример, поскольку эти плоскости в общем случае пересекаются, и не являются совсем независимыми друг от друга).

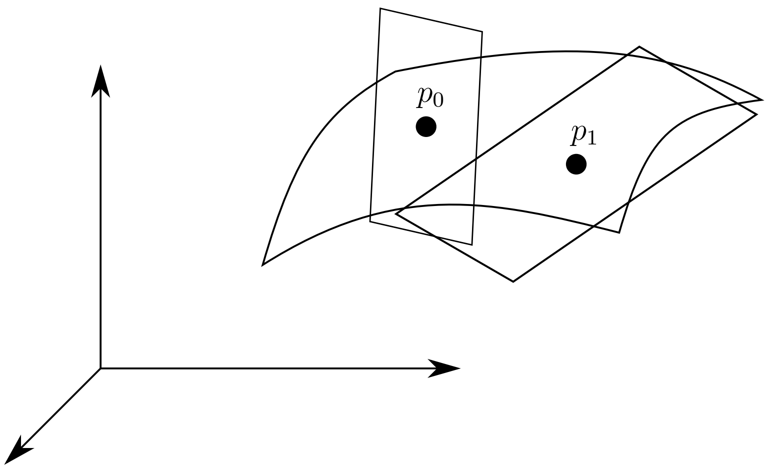

Рис. 14.2. Касательные плоскости, как подобия касательных пространств

Понятно, что можно построить аналогичный абстрактный объект и для многообразия.

Теперь перейдём к строгому определению понятий, для этого введём сперва вспомогательные конструкции.

Замечание 14.5. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$*;* (M, μ) *—* C^1*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M,\mu)) = N$*;* $p_0 \in M$*.*

Обозначим через $\widetilde{T}_{p_0}M$ *множество всех функций* ξ*, удовлетворяющих условию:*

$$\xi : Q(p_0, MA(\mu, 1)) \Rightarrow \mathbb{R}^{N_r}. \tag{14.11}$$

Нетрудно проверить, что множество $\widetilde{T}_{p_0}M$ является пространством. Вспомним, как в нём можно ввести операции сложения и умножения на число.

1) Пусть: $\xi_1, \xi_2 \in \widetilde{T}_{p_0}M$. Тогда:

$$(\xi_1 + \xi_2)(h) = \xi_1(h) + \xi_2(h) \text{ при } h \in Q(p_0, MA(\mu, 1)). \tag{14.12}$$

2)Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in \widetilde{T}_{p_0}M$. Тогда:

$$(\lambda\xi)(h) = \lambda{\cdot}\xi(h) \text{ при } h \in Q(p_0, MA(\mu, 1)). \tag{14.13}$$

Итак, $\widetilde{T}_{p_0}M$ — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.
Обозначим через $T_{p_0}M$ множество всех функций ξ, удовлетворяющих условиям:

1) $\xi \in \widetilde{T}_{p_0}M$;

2) $\forall h_1 \in Q(p_0, MA\,(\mu, 1))$ $\forall h_2 \in Q(p_0, MA\,(\mu, 1))$ $\forall k' = \overline{1, N}$ выполняется следующий закон преобразования:

$$\left(\xi_1^{k'}(h_2) = \xi^k(h_1)\cdot D_k(p, h_1)\ h_2^{k'}(p)\Big|_{p=p_0}\right). \tag{14.14}$$

Несложно доказать, что $T_{p_0}M$ — подпространство пространства $\widetilde{T}_{p_0}M$. Будем говорить, что $\widetilde{T}_{p_0}M$ — <u>касательное пространство</u> к пространству (M, μ) в точке p_0.

Утверждение 14.4. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^1-гладкое квазимногообразие, $\dim((M, \mu)) = N$; $p_1, p_2 \in M$, $p_1 \neq p_2$.*
Тогда:

$$1.\quad \widetilde{T}_{p_1}M \bigcap \widetilde{T}_{p_2}M = \varnothing; \tag{14.15}$$

$$2.\quad \widetilde{T}_{p_1}M \neq \widetilde{T}_{p_2}M; \tag{14.16}$$

$$3.\quad T_{p_1}M \bigcap T_{p_2}M = \varnothing; \tag{14.17}$$

$$4.\quad T_{p_1}M \neq T_{p_2}M. \tag{14.18}$$

Прокомментируем (14.15). *Для того, чтобы это доказать нужно доказать, что в $Q(p_1, MA\,(\mu, 1))$ найдётся координатная окрестность, которая не содержит точку p_2, из этого будет следовать, что все координатные окрестности из $Q(p_1, MA\,(\mu, 1))$ не содержат точку p_2 (рекомендуется самостоятельно доказать, почему), аналогично и со вторым множеством $Q(p_2, MA\,(\mu, 2))$ относительно точки p_1, а это в свою очередь значит, что $Q(p_1, MA\,(\mu, 1)) \bigcap Q(p_2, MA\,(\mu, 2)) = \varnothing$.*

Теперь разберёмся в способах построения элементов касательного пространства. Сейчас мы покажем, что имея точку гладкого квазимногообразия, можно построить элемент касательного пространства, причём этот элемент строится единственным образом.

Утверждение 14.5. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^1-гладкое квазимногообразие, $\dim((M, \mu)) = N$; $p_0 \in M$.*

1) Пусть: $h_0 \in Q(p_0, MA\,(\mu, 1))$; $\xi_1, \xi_2 \in T_{p_0}M$, $\xi_1(h_0) = \xi_2(h_0)$.
Тогда $\xi_1 = \xi_2$.

2) Пусть: $h \in Q(p_0, MA\,(\mu, 1))$, $A \in \mathbb{R}^{N_r}$. Обозначим:

$$\xi^k(h) = A^{k_0}\cdot D_{k_0}h^k \ \textit{при}\ h \in Q(p_0, MA\,(\mu, 1)). \tag{14.19}$$

Тогда: $\xi \in T_{p_0}M$, $\xi(h_0) = A$.

Доказательство

Будем доказывать каждый пункт.

1. Пусть: $h \in Q(p_0, MA(\mu, 1))$, $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\xi_1^k(h) = \xi_1^{k_0}(h_0) D_{k_0} h^k = \xi_2^{k_0}(h_0) D_{k_0} h^k = \xi_2^k(h). \tag{14.20}$$

Следовательно, $\xi_1(h) = \xi_2(h)$. Тогда $\xi_1 = \xi_2$.

2. Очевидно, что $\xi \in \widetilde{T}_{p_0} M$. Пусть: $h_1, h_2 \in Q(p_0, MA(\mu, 1))$, $k' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\xi^k(h_1) \cdot D_k h_2^{k'} = \left(A^{k_0} \cdot D_{k_0} h_1^k\right) \cdot D_k h_2^{k'} = A^{k_0} \left(D_{k_0} h_1^k \cdot D_k h_2^{k'}\right) =$$
$$= [\text{по закону преобразования}] = A^{k_0} D_{k_0} h_2^{k'} = \xi^{k'}(h_2). \tag{14.21}$$

Следовательно, $\xi \in T_{p_0} M$.

Пусть $m_0 = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\xi^{m_0}(h_0) = A^{k_0} D_{k_0} h_0^{m_0} = A^{k_0} \cdot \delta_{k_0}^{m_0} = A^{m_0}. \tag{14.22}$$

Следовательно:

$$\xi(h_0) = A. \tag{14.23}$$

Утверждение доказано.

Итак, мы имеем отображение, которое каждому столбцу A ставит в соответствие касательный вектор (вектор касательного пространства), причём единственный вектор.

Нетрудно сообразить, что это отображение — это изоморфизм из $\mathbb{R}^{N_r}$ в $T_{p_0} M$, значит размерности пространств совпадают. То есть:

$$\dim(T_{p_0} M) = N. \tag{14.24}$$

Замечание 14.6. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; (M, μ) — C^1*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M, \mu)) = N$; $p_0 \in M$.

Пусть: $h_0 \in Q(p_0, MA(\mu,))$, $k_0 = \overline{1, N}$. *Обозначим через* $e_{k_0}(p_0, h_0)$ *вектор, удовлетворяющий условиям:*

$$1) \quad e_{k_0}(p_0, h_0) \in T_{p_0} M; \tag{14.25}$$

$$2) \quad e_{k_0}(p_0, h_0)(h_0) = I_{k_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to k\text{-й номер строки.} \tag{14.26}$$

Пусть: $h \in Q(p_0, MA(\mu, 1))$, $m = \overline{1 < N}$. *Тогда:*

$$(e_{k_0}(p_0, h_0)(h))^m = \left(\underbrace{e_{k_0}(p_0, h_0)(h_0)}_{I_{k_0}}\right)^{m_0} \cdot D_{m_0} h^m = \delta_{k_0}^{m_0} \cdot D_{m_0} h^m. \tag{14.27}$$

Пусть: $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$, $k' = \overline{1, N}$. *Пусть далее* $h_3 \in Q(p_0, MA(\mu, 1))$.
Тогда:

$$e_{k'}(p_0, h_2)(h_3) = D_{k'}h_3 = D_{k'}h_1^k \cdot D_k h_3 = D_{k'}h_1^k \cdot e_k(p_0, h_3). \tag{14.28}$$

Следовательно:

$$e_{k'}(p_0, h_2) = D_{k'}h_1^k \cdot e_k(p_0, h_3) \tag{14.29}$$

Итак, мы построили вектора e_k из столбцов единичной матрицы путём изоморфизма. Столбцы единичной матрицы линейно независимы, следовательно и вектора e_k тоже линейно независимы. Так как количество таких векторов e_k равно размерности касательного пространства, то сами вектора e_k образуют базис в касательном пространстве.

Пусть $h \in Q(p_0, \mu)$. Тогда $e_1(p_0, h_0), \ldots, e_N(p_0, h_0)$ — базис в $T_{p_0}M$(голономный базис).

Нетрудно доказать, что для любого базиса в касательном пространстве можно подобрать такую координатную карту, для которой этот базис будет голономным. То есть, голономность базиса — это свойство взаимоотношения базиса и координатной карты (голономный базис для координатной карты — это тот базис, который соответствует данной координатной карте).

Для работы только с голономными базисами, вообще говоря, не нужно понятие касательного пространства. Дело в том, что мы можем считать, что работаем исключительно с базисом, порождённым данной координатной картой, и, соответственно все свойства приписывать координатной карте, но для того, чтобы выйти из ограничения и начать работать и с неголономными базисами, нужно понятие касательного пространства.

Мы же в данном курсе будем работать только с голономными базисами, но чтобы иметь возможность выйти из описанного выше ограничения, мы будем иметь ввиду понятие касательного пространства.

Но, чтобы не развивать идею о касательном пространстве, мы будем считать, что все геометрические объекты (в том числе и тензоры) зависят не от базиса, а от порождающей его координатной карты.

Лекция 15

Геометрический объект в квазимногообразии

Замечание 15.1. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; (M, μ)— C^1*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M, \mu)) = N$; $p_0 \in M$.

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что A *— геометрический объект степени* s *в точке* p_0*, если:*

$$A : Q(p_0, \mu) \Rightarrow \mathbb{R}^{(N,s)}. \tag{15.1}$$

Напомним, что символом $\mathbb{R}^{(N,s)}$ мы обозначаем числовой набор, имеющий s индексов, каждый из которых может принимать целые значения от 1 до N, а компоненты этого набора — вещественные числа.

Один раз поясним, как бы мы действовали, если бы мы были нацелены на использование произвольных, в том числе неголономных, базисов.

Пусть имеется некоторая поверхность, и на ней выбрана некоторая точка p_0 (См. рис. 15.1).

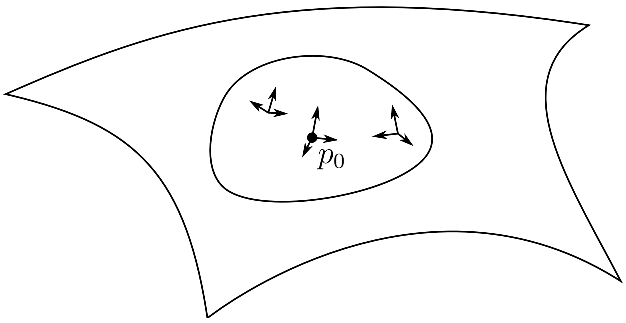

Рис. 15.1. «Подвижный репéр» на открытом множестве

Однако координатная карта h порождает базис не только в точке p_0, но и в каждой точке квазимногообразия, то есть h порождает поле базисов (в дифференциальной геометрии это поле называется «подвижным репéром»), и геометрический объект определяется, как функция базисных окрестностей точки p_0.

Но мы будем пользоваться практически исключительно голономными базисами.

Обозначим через $(G_{p_0}, M)_s$ множество всех геометрических объектов степени s в точке p_0.

Тензор в точке квазимногообразия

Теперь вернёмся к тензорам, но на этот раз не к произвольным тензорам, а к тензорам в точках гладкого квазимногообразия.

Пусть: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что A — тензор порядка $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ в точке p_0, если:

1) $A \in (G_{p_0}, M)_{s_1+s_2}$; (15.2)

2) $A^{j'_1,\ldots,j'_{s_2}}_{i'_1,\ldots,i'_{s_1}}(h_2) = A^{j_1,\ldots,j_{s_2}}_{i_1,\ldots,i_{s_1}}(h_1) \cdot D_{j_1} h_2^{j'_1} \cdot \ldots \cdot D_{j_{s_2}} h_2^{j'_{s_2}} \cdot D_{i'_1} h_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot D_{i'_{s_1}} h_1^{i_{s_1}}$ (15.3)

при $h_1, h_2 \in Q(p_0, \mu)$.

Напоминаем, что на протяжении всего данного курса мы пользуемся правилом суммирования Эйнштейна для краткости записи. Нетрудно увидеть принцип записи индексов в (15.3): чтобы перейти от старой координатной карты h_1 в новую h_2 нужно записать тензор A в старой координатной карте, а потом поочерёдно заменять индексы, так чтобы заменить верхний индекс j_1 нужно поставить его ещё раз снизу (чтобы «сработало» правило суммирования Эйнштейна, и индекс убрался), значит его ставим в индекс дифференцирования, соответственно (раз это старый индекс, а не новый и старым индексом обозначается символ дифференцирования) дифференцирование производится по старой координатной карте h_1, значит производная берётся от новой координатной карты h_2 поскольку старый индекс мы хотим заменить на новый, то в верхний индекс этой новой координатной карты ставится индекс j_1' на который мы и хотим заменить старый индекс. Аналогично поступаем со всеми остальными верхними и нижними индексами.

Обозначим через $(T_{p_0}M)^{s_2}_{s_1}$ <u>множество всех тензоров</u> порядка $\binom{s_2}{s_1}$ в точке p_0.

Введём понятие поля геометрических объектов.

Замечание 15.2. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; (M, μ)— C^1-гладкое квазимногообразие, $\dim((M, \mu)) = N$.*

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что A — <u>поле геометрических объектов</u> степени s в пространстве (M, μ), если:

1) A — функция;

2) $D(A) \subseteq M$;

3) $\forall p \in D(A)$ верно, что:

$$\big(A(p) \in (G_p, M)_s\big). \tag{15.4}$$

Это поле геометрических объектов A называют «сечением расслоения» геометрических объектов.

Определение 15.1. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $r_0 \in \overline{\mathbb{N}}$; (M, μ)— C^1-гладкое квазимногообразие, $\dim((M, \mu)) = N$; $s \in \mathbb{Z}_+$, A — поле геометрических объектов степени s в (M, μ).*

Будем говорить, что A — <u>C^{r_0}-гладкое поле</u>, если:

1) $D(A)$ — регулярное множество в (M, μ);

2) $\forall h((h \in \mu) \wedge (D(A) \bigcap D(h) \neq \varnothing))$:

$$\left(\{A(p, h)\}\Big|_{p \in D(A) \bigcap D(h)} - C^{r_0}\text{-гладкая функция}\right). \tag{15.5}$$

Поясним, в этом определении A — это поле, тогда $A(p)$ — это геометрический объект, а как мы знаем, геометрический объект — это функция, которая принимает в качестве аргумента базис и выдаёт в результате числовой набор, тогда $A(p)(h)$

(хотя обычно пишут $A(p,h)$, но эта запись не является, строго говоря, верной) — это числовой набор (как говорят, результат разложения геометрического объекта $A(p)$ по подвижному репéру), причём координатная карта h здесь выступает не по своему прямому назначению, а как объект порождающий голономный базис.

Таким образом, $\{A(p,h)\}$ — это отображение из множества M в пространство числовых наборов $\mathbb{R}^{(N,s)}$.

Утверждение 15.1. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{N}}$, $r_0 \in \overline{\mathbb{N}}$, $r \geq r_0+1$; (M,μ)— C^r*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M,\mu)) = N$; $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A *— тензорное поле порядка* $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ *в пространстве* (M,μ).

Пусть верно, что:

1) $D(A)$ *— регулярное множество в пространстве* (M,μ)*;*

2) $\forall p_0 \in D(A)\ \exists h_1 \in Q(p_0,\mu)\ \exists h_2 \in Q(p_0,\mu)\ \exists \omega\,((\omega$ *— окрестность точки* $p_0)\wedge \wedge(\omega \subseteq D(h_1)) \wedge (\omega \subseteq D(h_2)))$*:*

$$\left\{A\big(h_2^{-1}(x), h_1\big)\right\}\Big|_{x\in h[D(A)\bigcap\omega]} \in C^{r_0}\Big(h\left[D(A)\bigcap\omega\right]; \mathbb{R}^{N_r}, \mathbb{R}^{(N,s)}\Big). \tag{15.6}$$

Тогда A *—* C^{r_0}*-гладкое тензорное поле.*

В этом утверждении координатная карта h_2^{-1} создаёт зависимость от координаты x, а координатная карта h_1 порождает голономный базис.

Прокомментируем данное утверждение. Заметим, что здесь вместо произвольности координатной карты говорится лишь о её существовании.

Тут придётся доказывать, что в любой координатной карте будет иметь место гладкость, при этом придётся преобразовывать координаты, соответственно, будет использоваться теорема о дифференцировании сложной функции, и придётся переходить от одного базиса к другому, то есть, будет задействован тензорный закон преобразования, в который входят первые производные. Они понизят одну единицу гладкости, поэтому между гладкостью квазимногообразия и гладкостью тензорного поля сделан «зазор», и $r \geq r_0+1$.

Если мы теперь попробуем продифференцировать тензорное поле, например попробуем вычислить конструкцию вида:

$$D_k(p,h)\ A^{j_1,\ldots,j_{s_2}}_{i_1,\ldots,i_{s_1}}\Big|_{p=p_0},$$

то на выходе мы тоже получим поле геометрических объектов, но это поле не будет тензорным (испортится характер геометрических объектов), что недопустимо для любых физических приложений.

Утверждение 15.2. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; (M,μ)— C^2*-гладкое квазимногообразие,* $\dim((M,\mu)) = N$; $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$, A *—* C^1*-гладкое тензорное поле порядка* $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ *в* (M,μ).

Пусть: $p \in M$, $h_1, h_2 \in Q(p,\mu)$, $k', m', n' = \overline{1,N}$.

Обозначим:

$$\Gamma^{n'}_{k',m'}(p,h_1,h_2) = \underbrace{D^2_{k',m'}(p,h_2)}_{D_{k'}(p,h_2)D_{m'}(p,h_2)} h^n_1(p)\cdot D_n(p,h_1)h^{n'}_2(p). \tag{15.7}$$

Обратим внимание на то, что (15.7) *— это не геометрический объект, а конструкция, связанная с переходом от одной координатной карты к другой.*
Пусть: $p \in D(A),\ h_1, h_2 \in Q(p,\mu);\ j'_1,\dots,j'_{s_2}, i'_1,\dots,i'_{s_1} = \overline{1,N}$.
Тогда:

$$\begin{aligned} D_k\left(A^{j_1,\dots,j_{s_2}}_{i_1,\dots,i_{s_1}}\right)\cdot D_{j_1}h^{j'_1}_2\cdot\ldots\cdot D_{j_{s_2}}h^{j'_{s_2}}_2\cdot D_{i'_1}h^{i_1}_1\cdot\ldots\cdot D_{i'_1}h^{i_{s_1}}_1\cdot D_{k'}h^k_1 = \\ = D_{k'}\left(A^{j'_1,\dots,j'_{s_2}}_{i'_1,\dots,i'_{s_1}}\right) + \Gamma^{j'_1}_{k',m'}A^{m',j'_2,\dots,j'_{s_2}}_{i'_1,\dots,i'_{s_1}} + \ldots + \Gamma^{j'_{s_2}}_{k',m'}A^{j'_1,\dots,j'_{s_2-1},m'}_{i'_1,\dots,i'_{s_1}} - \\ - \Gamma^{m'}_{k',i'_1}A^{j'_1,\dots,j'_{s_2}}_{m',i'_2,\dots,i'_{s_1}} - \ldots - \Gamma^{m'}_{k',i'_{s_1}}A^{j'_1,\dots,j'_{s_2}}_{i'_1,\dots,i'_{s_1-1},m'}. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Не будем доказывать это утверждение для общего случая ввиду большого числа требуемых для записи символов, что вызовет технические трудности, а докажем его лишь для случая, когда $s_1 = 1$, $s_2 = 1$. Доказательство общего случая предлагается проделать самостоятельно.

Доказательство

Пусть: $s_1 = 1,\ s_2 = 1$. Пусть: $p \in D(A);\ h_1, h_2 \in Q(p,\mu),\ j', i', k' = \overline{1,N}$.

Тогда (с учётом правила взятия производной от произведения):

$$\underline{D_k\big(A_i^j\big)}\cdot D_j h_2^{j'}\cdot D_{i'}h_1^i\cdot\underline{D_{k'}h_1^k} = [\text{ по закону преобразования частной производной }] =$$

$$= \underbrace{D_{k'}\big(A_i^j\big)}_{D_{k'}(p,h_2)\left(A_i^j(p,h_1)\right)}\cdot D_j h_2^{j'}\cdot D_{i'}h_1^i = \left[\begin{array}{l}\text{выразим компоненты } A_i^j \text{ в}\\ \text{старой системе координат через}\\ \text{компоненты новой системы координат}\end{array}\right] =$$

$$= D_{k'}\Big(A_{\widetilde{i'}}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\Big) D_j h_2^{j'}\cdot D_{i'}h_1^i =$$

$$= D_{k'}\Big(A_{\widetilde{i'}}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot D_{i'}h_1^i\Big)\cdot D_j h_2^{j'} - A_{\widetilde{i'}}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot D_j h_2^{j'}\cdot D^2_{k',i'}h_1^i =$$

$$= D_{k'}\left(A_{\widetilde{i'}}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\cdot \underbrace{D_{i'}h_1^i\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}}_{=D_{i'}h_2^{\widetilde{i'}}=\delta_{i'}^{\widetilde{i'}}}\right)\cdot D_j h_2^{j'} - A_{\widetilde{i'}}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot D_j h_2^{j'}\cdot D^2_{k',i'}h_1^i =$$

$$= D_{k'}\Big(A_{i'}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\Big)\cdot D_j h_2^{j'} - A_{\widetilde{i'}}^{\widetilde{j'}}\cdot \underline{D_{\widetilde{j'}}h_1^j}\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot \underline{D_j h_2^{j'}}\cdot D^2_{k',i'}h_1^i =$$

$$= D_{k'}\Big(A_{i'}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\Big)\cdot D_j h_2^{j'} - A_{\widetilde{i'}}^{\widetilde{j'}}\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot \underbrace{D_{\widetilde{j'}}h_1^j\cdot D_j h_2^{j'}}_{=D_{\widetilde{j'}}h_2^{j'}=\delta_{j'}^{\widetilde{j'}}}\cdot D^2_{k',i'}h_1^i =$$

$$= D_{k'}\Big(A_{i'}^{\widetilde{j'}}\cdot D_{\widetilde{j'}}h_1^j\Big)\cdot D_j h_2^{j'} - A_{\widetilde{i'}}^{j'}\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot D^2_{k',i'}h_1^i =$$

$$= D_{k'}\Big(\underline{A_{i'}^{\widetilde{j'}}}\cdot \underline{D_{\widetilde{j'}}h_1^j}\Big)\cdot D_j h_2^{j'} - D^2_{k',i'}h_1^i\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot A_{\widetilde{i'}}^{j'} =$$

$$= D_{k'}A_{i'}^{\widetilde{j'}}\cdot \underbrace{D_{\widetilde{j'}}h_1^j\cdot D_j h_2^{j'}}_{D_{\widetilde{j'}}h_2^{j'}=\delta_{\widetilde{j'}}^{j'}} + \underline{A_{i'}^{\widetilde{j'}}\cdot D^2_{k',\widetilde{j'}}h_1^j\cdot D_j h_2^{j'}} - \underline{\underline{D^2_{k',i'}h_1^i\cdot D_i h_2^{\widetilde{i'}}\cdot A_{\widetilde{i'}}^{j'}}} \tag{15.9}$$

В слагаемом, подчёркнутом одной чертой в (15.9), переменные $\widetilde{j'}$ и j являются связанными (то есть, по правилу суммирования Эйнштейна, они уйдут при суммировании), соответственно, не важно, как их обозначать. Тогда переименуем эти переменные, обозначим $\widetilde{j'} = m'$ и $j = n$. Аналогично поступим со слагаемым, подчёркнутым двумя чертами, а именно в нём переобозначим: $i = n$ и $\widetilde{i'} = m'$. С учётом этого получим, с учётом (15.7), что (15.9) примет вид:

$$D_{k'}A_{i'}^{j'} + D^2_{k',m'}h_1^n\cdot D_n h_2^{j'}\cdot A_{i'}^{m'} - D^2_{k',m'}h_1^n\cdot D_n h_2^{m'}\cdot A_{m'}^{j'} =$$
$$= D_{k'}A_{i'}^{j'} + \Gamma_{k',m'}^{j'}A_{i'}^{m'} - \Gamma_{k',i'}^{m'}A_{m'}^{j'}. \tag{15.10}$$

Таким образом, для данного частного случая утверждение доказано.

Итак, мы сформировали пространство, в котором впоследствии и будем работать, и поставили задачу: найти дифференциальные операторы, которые, действуя на тензорные поля, дают на выходе снова тензорные поля.

Таких операторов, конечно, много. Сейчас мы коротко расскажем про два из них.

Первый — это «ковариантная производная». Он позволяет дифференцировать любые поля и он похож на обобщение обычной частной производной. Однако он имеет минус: для того, чтобы этот оператор работал, нужно создать на гладком квазимногообразии новое (не тензорное) поле геометрических объектов, которое будет называться «афинной связностью». Это поле отвечает за ковариантную производную и, так называемый «параллельный перенос», который отличается от привычного параллельного переноса.

Чтобы понять, что из себя представляет «параллельный перенос» представим на некоторой поверхности (нашем квазимногообразии) две точки, которые связаны между собой кусочно гладкой кривой (См. рис. 15.2).

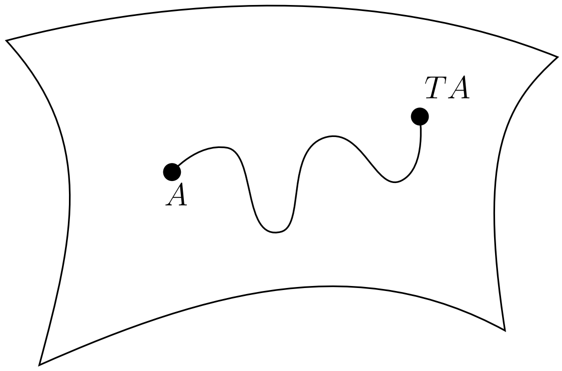

Рис. 15.2. Смысл «параллельного переноса» для ковариантной производной

Тогда можно построить «параллельное поле тензоров», и значением этого поля во второй точке будет называться результатом «параллельного переноса» первой точки (на рисунке TA — это значение «параллельного переноса» точки A), но он будет зависеть от формы кривой.

Другой оператор — «внешний дифференциал», он включает в себя не одну частную производную, и является обобщением конструкций типа ротора, дифергенции, градиента и так далее.

Минусами этого оператора являются:

1) Он не является обобщением частной производной;

2) Этот оператор действует только на поля с нижними индексами и антисимметричные, так называемые «дифференциальные формы».

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ