



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

АНДРЕЕВ
АНАТОЛИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

КАШИНА АРТЕМА ВЯЧЕСЛАВОВИЧА



Содержание

Лекция 1	5
1.1. Уравнения электромагнитного поля. Уравнения Максвелла	5
1.2 Кулоновская калибровка.....	7
1.3 Укороченные уравнения	8
Лекция 2. Поле в резонаторе	10
2.1 Укороченные уравнения (продолжение).....	10
2.2 Плотность энергии поля.....	11
2.3 Поле в резонаторе.....	11
Лекция 3. Скалярное материальное поле.....	15
3.1 Межмодовый обмен	15
3.2 Классическая теория Лоренца	17
3.3 Скалярное материальное поле.....	18
3.4 Уравнение Шредингера	20
3.5 Флуктуации энергии. Дипольный момент	22
Лекция 4. Дипольные взаимодействия.....	23
4.1 Связь оператора скорости и дипольного оператора.....	23
4.2 Эффекты, возникающие при больших напряженностях	25
4.3 Матричный метод.....	26
Лекция 5. Двухуровневый атом	28
5.1 Матричный метод (продолжение)	28
5.2 Двухуровневый атом	29
5.3 Переходы в двухуровневом атоме	30
Лекция 6. Эволюция поля в резонаторе	35
6.1 Атом в резонаторе	35
6.2 Радиационный распад в многомодовом резонаторе	38
Лекция 7. Многоатомные системы	40
7.1 Система укороченных уравнений Максвелла-Блоха	40
7.2 Многоатомная система.....	41
7.3 Скоростные уравнения.....	42
7.4 Стационарный случай	44

7.5 Стационарное усиление	45
Лекция 8. Стационарное усиление.....	47
8.1 Стационарное усиление (продолжение).....	47
8.2 Интенсивность насыщения	50
8.3 Отстройка входного излучения от резонанса	51
Лекция 9. Нелинейный режим генерации.....	53
9.1 Стационарное усиление в однородно-уширенной среде.....	53
9.2 Линейное усиление.....	54
9.3 Насыщение усиления	54
9.4 Стационарная генерация.....	56
9.5 Стационарная генерация в нелинейном режиме	58
9.6 Многочисленные решения	59
Лекция 10. Стационарная генерация (Дополнение)	61
10.1 Оптимальная прозрачность выходного зеркала	61
Лекция 11. Усиление.....	63
11.1 Нестационарное усиление и генерация	63
11.2 Одномодовое приближение	64
11.3 Классификация динамических режимов одномодовых лазеров.....	65
11.4 Условие самовозбуждения генерации	66
11.5 Стационарное решение	67
Лекция 12. Динамика поля в резонаторе	68
12.1 Устойчивость стационарной генерации	68
12.2 Динамика поля в резонаторе	69
Лекция 13. Нестационарная генерация	73
13.1 Нестационарное усиление	73
Лекция 14. Солитоны.....	75
14.1 Солитонные решения	75
14.2 Солитоны в средах конечной длины	77

Лекция 1

1.1. Уравнения электромагнитного поля. Уравнения Максвелла

Процесс взаимодействия излучения с веществом начинается с системы уравнений Максвелла. Есть различные вариации уравнений Максвелла, но мы будем базироваться на классических уравнениях в среде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \rightarrow 8 \text{ уравнений} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Первые два уравнения векторные, последние два – скалярные, поэтому мы имеем систему из 8 уравнений. Неизвестные $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}, \rho$ - 16 скалярных величин. Для дополнения системы (1) мы должны ввести материальные уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B}) \end{array} \right. \quad (2)$$

В рамках модели Лоренца вводится понятие диэлектрической и магнитной проницаемости, поэтому уравнения из системы (2) можно переписать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \\ \vec{P} = \chi\vec{E}, \quad \vec{M} = \mu\vec{H} \end{array} \right. \quad (3)$$

Где \vec{P} – вектор поляризации, \vec{M} – вектор намагниченности, χ и μ - коэффициенты диэлектрической и магнитной восприимчивости. Эти уравнения справедливы в случае, когда расположение зарядов не сильно меняется под воздействием излучения, то есть:

$$E_{\text{волн}} < E_{\text{атомн}}$$

При этом амплитуда колебаний зарядов должна быть $\ll r_{\text{Бора}}$.

В условиях резонанса амплитуда осцилляций атомного электрона в процессе взаимодействия с внешним полем много больше, чем амплитуда осцилляций связанных электронов (которые не находятся на резонансных уровнях). Когда мы имеем дело с многозарядным атомом, то можно выделить 2 вклада тока:

$$\vec{j} = \vec{j}_r + \vec{j}_{nr}$$

Где \vec{j} – плотность тока, \vec{j}_r – связана с резонансными электронами, \vec{j}_{nr} – с нерезонансными. Эффективность взаимодействия нерезонансных электронов с внешним полем невелика, поэтому **будем полагать, что \vec{j}_{nr} линейно зависит от внешнего поля**. Для резонансного тока необходимо записать уравнения. Рассмотрим пустое пространство, где находится один атом:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}$$

Для нерезонансных электронов можно записать:

$$\vec{j}_{nr} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + c\text{rot}\vec{M} + \lambda\vec{E}$$

Где $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ – ток смещения, $c\text{rot}\vec{M}$ – вектор магнитной поляризации, $\lambda\vec{E}$ – это слагаемое связано с тем, что электроны могут совершать сложные движения (λ – проводимость). Последним слагаемым можно пренебречь. Тогда:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_r + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}c\text{rot}\vec{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_r + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) + 4\pi\text{rot}\vec{M} \\ \text{rot}(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_r + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_r + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Отметим, что даже для уравнения среды появляются вектора \vec{H} и \vec{D} . То есть разбив ток на две составляющие, мы перешли от уравнений Максвелла в пространстве к уравнениям Максвелла в среде. Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu = 1 + 4\pi\chi, \varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$$

В системе (4) \vec{j} – плотность резонансного тока, теперь будет без индекса, μ – коэффициент магнитной проницаемости, ε – коэффициент диэлектрической проницаемости. Возьмем rot от первого и второго уравнений системы (4):

$$\begin{aligned} \text{rotrot}\vec{E} &= -\frac{4\pi\mu}{c^2}\vec{j} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ \text{rotrot}\vec{H} &= \text{rot}\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Получились волновые уравнения второго порядка как по пространству, так и по времени.

1.2 Кулоновская калибровка

Поскольку электромагнитное поле является релятивистским инвариантом, то удобно будет воспользоваться специальными потенциалами \vec{A} и φ :

$$\vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

В общем случае:

$$\begin{cases} \nabla \vec{A} - \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) = -4\pi \rho \end{cases} \quad (5)$$

Лоренц-калибровка:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

При подстановке в уравнения Максвелла получаем единое уравнение:

$$\text{rot rot} \vec{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}$$

Из коэффициента $\frac{\varepsilon \mu}{c^2}$ можно вычислить скорость света в среде:

$$v_{\text{света}} = v = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t}$$

Кулоновская калибровка:

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

При ее подстановке получаем стандартное уравнение классической электродинамики:

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho$$

В большинстве задач предполагается, что $\varphi = 0$. Атомы находятся во внешнем поле, заряды разделяются, создаются диполи. Этот потенциал φ учитывает взаимодействие наведенных дипольных моментов (взаимодействие Ван-дер-Ваальса). В реальности расстояние между активными атомами гораздо больше длины волны. Процент резонирующих атомов в теле очень мало \rightarrow мало взаимодействия между резонирующими атомами (продольное) \rightarrow пренебрегаем продольным полем:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

1.3 Укороченные уравнения

Мы хотим найти приближение, которое учитывает взаимодействие излучения с резонаторами. В качестве первого приближения мы будем использовать следующее приближение плоских волн:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_1(\vec{r}, t) \sin(\omega t - kz) + \vec{A}_2(\vec{r}, t) \sin(\omega t + kz) + \vec{A}_3(\vec{r}, t) \cos(\omega t - kz) + \vec{A}_4(\vec{r}, t) \cos(\omega t + kz) \quad (6)$$

По сути мы переходим к анализу укороченных уравнений. Схема рассматриваемой системы представлена на рисунке 1.1. Задача квазиодномерная. Имеются два зеркала с коэффициентами отражения R_1 и R_2 , которые находятся на координатах $z = 0$ и $z = L$. Мы можем выделить четыре слагаемых в (6), распространяющихся как в положительном, так и в отрицательном направлении.

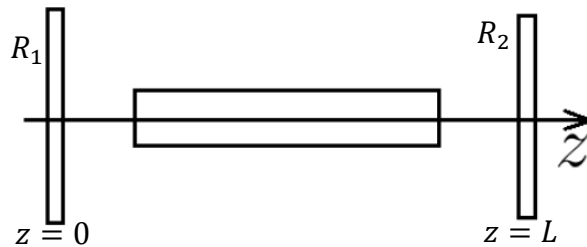


Рисунок 1.1 – Зеркала с резонатором

Для уравнения второго порядка должно быть два независимых решения. Наличие синусов и косинусов обеспечивает независимость этих решений. Будем предполагать, что производные амплитуд «медленные» (медленно изменяются):

$$\frac{|A_i|}{l_{yc}} = \left| \frac{\partial A_i}{\partial z} \right| \ll \frac{\omega}{c} |A_i|, \quad \left| \frac{\partial A_i}{\partial t} \right| \ll \omega |A_i|$$

Полагаем, что характерный масштаб усиления $l_{yc} \ll \lambda$. Возьмем вторую производную от первого слагаемого из уравнения (6):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (A_1 \sin(\omega t - kz)) = \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \sin \phi + 2\omega \frac{\partial A_1}{\partial t} \cos \phi - \omega^2 A_1 \sin \phi$$

Где $\phi = \omega t - kz$. Также можем пренебречь второй производной $\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}$ от «медленной» производной.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (A_1 \sin(\omega t - kz)) = \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \sin \phi - \frac{2\omega}{c} \frac{\partial A_1}{\partial z} \cos \phi - \frac{\omega^2}{c^2} A_1 \sin \phi$$

$$\Delta_{\perp} \vec{A}_1 \sin \phi - 2k \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial z} \cos \phi - k^2 \vec{A}_1 \sin \phi - \frac{2\omega}{v^2} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} \cos \phi + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{A}_1 \sin \phi + \dots = 0$$

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Уравнения квазиоптики взаимодействия двух квадратурных компонент волн распространяющихся в одном направлении являются связанными.

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} \vec{A}_3 - 2k \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{2w}{v^2} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_1 \\ \Delta_{\perp} \vec{A}_1 + 2k \frac{\partial A_3}{\partial z} - \frac{2w}{v^2} \frac{\partial \vec{A}_3}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_3 \end{cases} \quad (7)$$
$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Плотность тока:

$$\vec{j} = \vec{j}_1(\vec{r}, t) \cos \phi_1 + \vec{j}_2(\vec{r}, t) \cos \phi_2 + \vec{j}_3(\vec{r}, t) \cos \phi_1 + \vec{j}_4(\vec{r}, t) \cos \phi_2$$

Лекция 2. Поле в резонаторе

2.1 Укороченные уравнения (продолжение)

На прошлой лекции мы выяснили, что уравнения квазиоптики связаны друг с другом благодаря Δ_{\perp} . На самом деле между собой связаны все 4 компоненты, а не только 1 и 3, как было показано в системе (7).

Полагаем, что мы имеем резонатор длиной L , зеркала диаметром d . Введем безразмерные переменные:

$$z' = \frac{z}{l}, \quad \rho' = \frac{\rho}{l}; \quad t' = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{l}{c}$$

При этом время нормируем на время пролета кванта света через резонатор (τ). Тогда:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t'} + \frac{\partial A_1}{\partial z'} - \frac{v^2 \tau}{2w} \frac{1}{d^2} \Delta'_{\perp} A_3 = \frac{2\pi v \tau}{k} \frac{j_1}{c}$$

Где $\frac{v^2 \tau}{2w} \frac{1}{d^2} = \gamma$, если $\gamma \ll 1$, тогда изменение по поперечным координатам можем не учитывать.

$$\gamma = \frac{v^2 \tau}{2w} \frac{1}{d^2} = \frac{Lv}{2wd^2} = \frac{L}{2kd^2} = \frac{L\lambda}{4\pi d^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda/d}{d/L} = \frac{1}{4F}$$

F – число Френеля, которое отвечает за дифракционные эффекты. Угловая расходимость, обусловленная конечностью зеркала: λ/d . Эта величина определяет ширину первого дифракционного максимума.

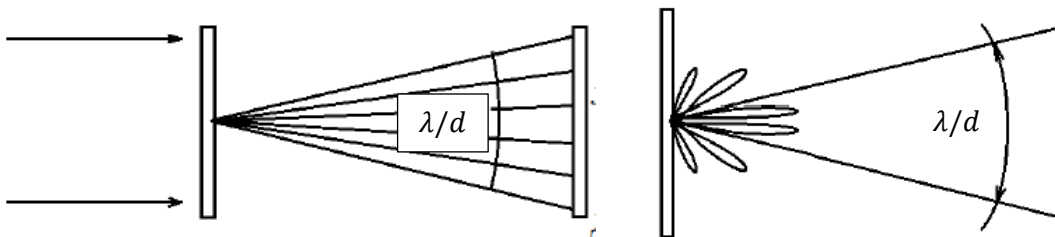


Рисунок 2.1 – Иллюстрация угловой расходимости

Если в угол $\theta = d/L$ помещается много максимумов, то на втором зеркале поле сильно не меняется и наоборот.

Будем рассматривать случаи, когда $F \ll 1$, основные моды поля остаются:

$$\frac{\partial A_{1,3}}{\partial t} + \frac{v \partial A_{1,3}}{\partial z} = \frac{2\pi v}{k} \frac{j_{1,3}}{c} \quad (8)$$

(8) представляет собой систему укорачивающих уравнений

Считаем, что дифракции нет: если j нет, то две квадратурные компоненты независимы друг от друга

2.2 Плотность энергии поля

Плотность энергии поля имеет вид:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{\kappa^2}{8\pi} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2) = hw \sum_{i=1}^4 \sum_{\lambda=1}^2 U_i^{(\lambda)}$$

x, y – компоненты поля. A – векторный потенциал, но вместо этого гораздо удобнее ввести плотность числа квантов:

$$n = \frac{w}{hw}$$

Тогда полная энергия выражается:

$$W = Vw, \quad N = Vn$$

Также можно ввести «вектор энергии» - вектор Пойтинга \vec{S} , он показывает направление распространения энергии:

$$S = wc = I \left(\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{B}]$$

2.3 Поле в резонаторе

Берем идеальный резонатор, рассчитываем собственные моды для него, а затем вносим отличия. Идеальный резонатор состоит из двух металлических зеркал (граница зеркал - S_1) с коэффициентом отражения $R = 1$ и диэлектрической поверхности S_2 . Пока активной среды нет, берем уравнения для свободного поля, учитывая, что в вакууме $B = H$:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Граничные условия

$$[\vec{n} \vec{E}]|_{S_1} = 0 \text{ (Поле не проникает сквозь зеркало)}$$

$$[\vec{n} \vec{H}]|_{S_2} = 0 \text{ (За пределы пунктиров ничего не выходит)}$$

Тогда решение:

$$\begin{cases} \text{rot} E_n = -ik_n \vec{H}_n \\ \text{rot} H_n = ik_n \vec{E}_n \end{cases} \quad (9)$$

Где k_n – собственные значения. Разложим поле по собственным функциям:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n e_n(t) E_n(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_n h_n(t) H_n(\vec{r})$$

Условие ортогональности:

$$\frac{1}{4\pi} \int E_n(r) E_m(r) dV = \delta_{nm} \quad (10.1)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int H_n(r) H_m(r) dV = \delta_{nm} \quad (10.2)$$

Теперь наша задача состоит в нахождении $e_n(t)$ и $h_n(t)$ из волнового уравнения. Для этого подставим разложения (10.1) и (10.2) в систему (9), тогда левая часть переписывается в виде:

$$\text{rot rot} \sum_m e_m E_m(\vec{r}) = \sum_m e_m \text{rot rot} E_m(\vec{r}) = \sum_m e_m \text{rot}(-ik_m \vec{H}_m) = \sum_m e_m ik_m^2 E_m$$

Учитывая правую часть системы (9), получаем:

$$e_n k_n^2 = -\frac{1}{c^2} \ddot{e}_n$$

$$\ddot{e}_n + k^2 c^2 e_n = 0$$

$$\ddot{e}_n + \omega_n^2 e_n = 0$$

$$\omega_n = k_n c$$

Если спектр k_n эквидистантен, то и ω_n тоже эквидистантен. Похожее уравнение получим и для h_n :

$$\ddot{h}_n + \omega_n^2 h_n = 0$$

Теперь решим задачу для реального резонатора. Металлические зеркала имеют конечную проницаемость (т.к. какое-то поле в них есть, проникает). Диэлектрической границы S2 вообще нет. Представим поле в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n e'_n(t) E_n(\vec{r})$$

Так как резонатор реальный, то уравнения для $e'_n(t)$ должны отличаться для уравнений $e_n(t)$. Воспользуемся следующей формулой векторной алгебры:

$$\text{div}[ab] = b \text{rot} a - a \text{rot} b$$

$$a = \vec{E}, \quad b = \text{rot} \vec{E}_n$$

$$\text{div}[\vec{E} \text{rot} \vec{E}_n] dV = \text{rot} \vec{E}_n \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot}(\text{rot} \vec{E}_n) = \int \text{rot} \vec{E}_n \text{rot} \vec{E} dV - \int \vec{E} \text{rot}(\text{rot} \vec{E}_n) dV$$

$$\text{rot} \vec{E}_n = -ik \vec{H}_n, \quad \text{rot}(\text{rot} \vec{E}_n) = -ik_n \text{rot} \vec{H}_n = k_n^2 E_n$$

$$\int_V \text{div} \vec{f} dV = \oint_S f dS$$

$$\int_S [\vec{E} \text{rot} \vec{E}_n] d\vec{S} = -ik_n \int \vec{H}_n \text{rot} \vec{E} dV + k_n^2 \int C \vec{E}_n dV$$

Так как граничные условия в реальном резонаторе не равны нулю:

$$\int_S [\vec{E} \vec{H}_n] d\vec{S} = \int_{S_1} [\vec{n} \vec{E}] \vec{H}_n dS + \int_{S_2} \vec{E} [\vec{H}_n \vec{n}] dS$$

$$\int \vec{H}_n \text{rot} \vec{E} dV = \int_{S_1} [\vec{n} \vec{E}] \vec{H}_n dS - i4\pi k_n e'_n$$

$$\int E \vec{E} dV = \sum_n e'_n \int \vec{E}_m \vec{E}_n dV$$

$$\text{rot} \vec{E} = \sum_n \vec{H}_n(\vec{r}) \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}_n(\vec{r}) \text{rot} \vec{E} dV$$

Вспомним, что:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Разложим по одним и тем же собственным функциям, приравняем коэффициенты при \vec{H}_n :

$$-ik_n e'_n + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} [\vec{n} \vec{E}] \vec{H}_n dS = -\frac{1}{c} h'_n$$

$$\begin{cases} h'_n = i\omega e'_n - \frac{c}{4\pi} \int_{S_1} [\vec{n} \vec{E}] \vec{H}_n dS \\ e'_n - i\omega h'_n = \frac{c}{4\pi} \int_{S_2} [\vec{n} \vec{H}] \vec{E}_n dS \end{cases}$$

$$\ddot{e}'_n + \omega_n^2 e'_n = -i \frac{c^2 k_n}{4\pi} \int_{S_1} [\vec{n} \vec{E}] \vec{H}_n dS + \frac{c}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_2} [\vec{n} \vec{H}] \vec{E}_n dS \quad (11)$$

Интегралы - отличия от идеального резонатора.

На металлических поверхностях можно воспользоваться граничными условиями Леонтовича:

$$[nE]|_{S_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}|_{S_1}$$

Подставляем в правую часть уравнения (11):

$$I_1 = i \frac{c^2 k_n}{4\pi} \int_{S_1} [\vec{n} \vec{E}] \vec{H}_n dS = i \frac{c^2 k_n}{4\pi} z \int_{S_1} \vec{H} \vec{H}_n dS = i \frac{c^2 k_n}{4\pi} z \sum_m h'_m \int \vec{H}_m(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) dS$$

$$= i \frac{c^2 k_n}{4\pi} z h'_n \int \vec{H}_n^2(\vec{r}) dS + \sum'_m \dots$$

Функции \vec{H} и \vec{H}_n ортогональны по объему, но не по поверхности, функцию h'_n можно представить в виде:

$$h'_n = \frac{1}{i w_n} e'_n + i \frac{c}{4\pi w_n} \int_{S_2} [\vec{n} \vec{H}] \vec{E}_n dS$$

$$\ddot{e}'_n + \frac{w_n}{Q_n} \dot{e}'_n + w_n^2 e'_n = -\frac{w_n z}{4\pi} \sum_m \left(\frac{1}{k_m} \int_{S_1} \vec{H}_m \vec{H}_n dS \right) \ddot{e}'_m + \frac{c}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_2} [\vec{n} \vec{H}] \vec{E}_n dS$$

Q_n - добротность, связанная с конечной проводимостью зеркал.

Лекция 3. Скалярное материальное поле 3.1 Межмодовый обмен

Конечное значение коэффициента отражения зеркал приводит к конечному значению ширины линии в резонаторе. Собственные частоты выглядят дельта-функциями. В реальном резонаторе есть слагаемое $\frac{w_n}{Q_n} \dot{e}'_n$, которое определяет ширину полосы:

$$\Delta w_n = \frac{w_n}{Q_n}$$

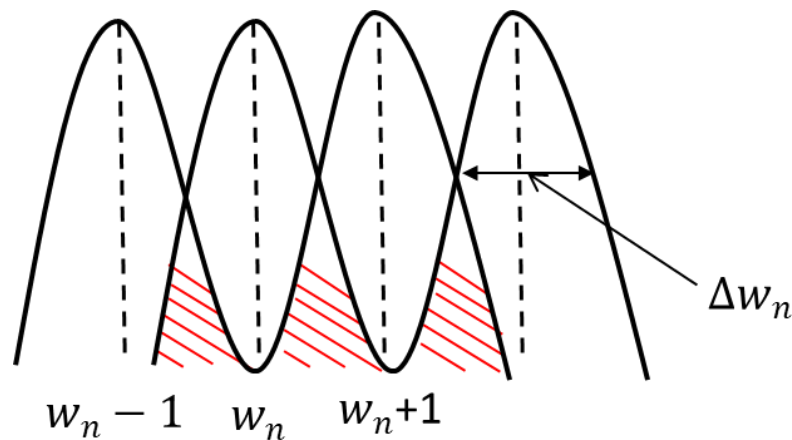


Рисунок 3.1 – Межмодовый обмен

Для генерации ультракоротких импульсов условия должны быть противоположными:

$$I_2 = \frac{c}{4\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_{S_2} [\vec{n} \vec{H}] \vec{E}_n dS \right) = \frac{c}{4\pi \kappa} \sum_m \dot{e}'_m \int_{S_2} [\vec{n} [\vec{\kappa} \vec{E}_m]] \vec{E}_n dS$$

Появление интеграла I_2 связано с тем, что «диэлектрическая» граница S_2 является воображаемой. Излучение, достигшее этой границы в реальном резонаторе покидает его. Моды, которые идут под углом, будут жить конечное время в резонаторе.

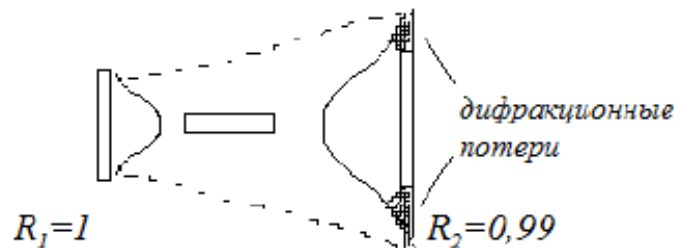


Рисунок 3.2 – Дифракционные потери в резонаторе

Поперечный размер активного тела лазера, как правило, много меньше диаметра зеркал резонатора. Однако в процессе многократных отражений генерируемого пучка в резонаторе лазера поперечный размер генерируемой моды увеличивается в результате дифракции и рано или поздно становится больше поперечного размера зеркал.

Для уменьшения дифракционных потерь нужно, чтобы поперечный размер активной среды был значительно меньше размеров зеркал. Однако в результате многочисленных проходов излучения по резонатору лазера размер пучка неизбежно растет. В теории дифракции вводится понятие дифракционной длины:

$$l_d = \frac{d^2}{\lambda}$$

С другой стороны длина пути проходимого квантом света в резонаторе зависит от его добротности, определявшейся коэффициентом отражения R зеркал. В случае высокодобротных резонаторов длина пробега определяется выражением:

$$l_t = \frac{L}{1 - R}$$

Таким образом, для подавления дифракционных потерь и дифракционной связи мод необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$l_d \gg l_t$$

Суммирование по m – связь различных мод резонатора. Дифракционные потери вносят вклад в добротность резонатора:

$$\frac{1}{Q_n}(s) + \frac{1}{Q_n}(d)$$

Таким образом, из-за дифракционных потерь осуществляется связь между поперечными и продольными модами.

$$\ddot{e}'_n + \frac{w_n}{Q_n} \dot{e}_n w_n^2 e_n = 0$$

Потери в активной среде:

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_n^s} + \frac{1}{Q_n^d} + \frac{1}{Q_n^v}$$

Где $\frac{1}{Q_n^s}$ - потери, связанные с зеркалами, $\frac{1}{Q_n^a}$ и $\frac{1}{Q_n^v}$ - объемные потери: истинные потери (поглощение) + рассеяние.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

В резонаторе будем пользоваться приближением ННА.

$$\vec{A} = \sum_n a_n(t) \vec{u}_n(\vec{r})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \sum_n \left(k_n^2 a_n + \frac{k_n}{Q_n} a_n \right) \vec{u}_n(\vec{r})$$

3.2 Классическая теория Лоренца

Мы рассмотрели различные приближения для уравнений Максвелла. Но как мы знаем задачи о генерации и усилении – это взаимодействия двух систем: электромагнитного излучения и самой среды. Первое уравнение для среды было выведено из теории Лоренца:

$$\ddot{a}_n + \frac{w_n}{Q_n} \dot{a}_n + w_n^2 a_n = c \int \vec{j}(\vec{r}, t) \vec{u}_n(\vec{r}) dV$$

$$a_n(t) = A_n(t) e^{i w_n t}$$

В классической теории если электрон свободный:

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E}_0 e^{-i w_0 t}$$

Для связанных в атоме электронов:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + w_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i w_0 t}$$

Здесь γ – затухания, связанные со столкновениями атомов, $w_0 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^{1/2}$ – частота собственных колебаний электронов в атоме. F_0 – сила, действующая на электрон со стороны ядра атома.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i w t}$$

$$\vec{r}_0 = \frac{\frac{e}{m} 1}{w_0^2 - w^2 + i w \gamma} \vec{E}_0$$

$$\vec{p} = \frac{1}{v} \sum_{i \in V} e \vec{r}_i$$

$$\vec{P} = \frac{N e^2}{V m} \frac{1}{w_0^2 - w^2 + i w \gamma} \vec{E}$$

$\left\{ \chi = \frac{N e^2}{V m} \frac{1}{w_0^2 - w^2 + i w \gamma} \right\}$ - поляризуемость – суммарный дипольный момент единицы объема

$$\varepsilon = 1 + 4\pi x = 1 + \frac{w_p^2}{w_0^2 - w^2 + iw\gamma}$$

$$w_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m V}$$

w_p - плазменная частота – один из основных показателей оптики.

При $\frac{N}{V} = 10^{22} - 10^{24} \text{см}^{-3}$, $w_p = 10^{15} - 10^{16} \text{Гц}$

3.3 Скалярное материальное поле

Функция Лагранжа свободного скалярного поля имеет вид:

$$L = i\hbar\Psi \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\Psi^* \vec{\nabla}\Psi$$

Тогда:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = i\hbar\Psi^*$$

$$H = -\frac{i\hbar}{2m} \vec{\nabla}\pi \vec{\nabla}\Psi = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\Psi^* \vec{\nabla}\Psi$$

Энергия:

$$E = \int H dV = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \Delta\Psi dV = \int \Psi^* \frac{\vec{p}^2}{2m} \Psi dV$$

Напомним, что функция Лагранжа свободного поля имеет вид:

$$L_f = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

Энергия системы частиц с э\м полем имеет вид (вещество + поле):

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) dV$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi, \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

Обобщенный импульс системы вещество+поле:

$$\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i + \frac{e_i}{c} \vec{A}(r_i, t)$$

Тогда:

$$H = \sum_{i=1} \underbrace{\frac{1}{2m_i} \left(\vec{p}_i - \frac{e_i}{c} \vec{A}_i \right)^2}_{H_I} + \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int \left((\text{rot}\vec{A})^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 \right) dV}_{H_{II}} + \underbrace{\frac{1}{8\pi c} \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{grad}\phi dV}_{H_{III}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int (\text{grad}\phi)^2 dV}_{H_{IV}}$$

$$H_{II} = H_f = \frac{1}{8\pi} \int \left((\text{rot} \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right) dV - \text{энергия свободного э\м поля}$$

Кулоновская калибровка $\text{div} \vec{A} = 0$

$$\text{div} \left(\varphi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{grad} \varphi - \varphi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} (\text{div} \vec{A})$$

$$H_{III} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{grad} \varphi dV = \frac{1}{4\pi c} \int \text{div} \left(\varphi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV = \frac{1}{4\pi c} \oint \left(\varphi \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dS \approx 0$$

Считаем поле на границе равным 0:

$$\text{div}(\text{grad} \varphi) = \int \dots dv = \oint \dots dS = 0$$

Гамильтониан

$$(\text{grad} \varphi)^2 = \underbrace{\text{div}(\text{grad} \varphi)}_{=0} - \varphi \underbrace{\Delta \varphi}_{=-4\pi\rho}$$

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}_i(r_i) \right)^2 + \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$$

Поле в атоме можно представить в виде:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_e$$

\vec{A}_0 - внутренний, \vec{A}_e - внешний

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_e$$

Заряженные частицы: электроны, ядра, ионы.

$$\rho = \rho_e + \rho_n$$

$$\frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int (\rho_e + \rho_n)(\varphi_e + \varphi_n) dV = \frac{1}{2} \int (\rho_e \varphi_n + \rho_n \varphi_e) dV = - \frac{e^2}{|\vec{r}_e - \vec{r}_n|}$$

Так как Электроны и ядра – точечные частицы -> вычеркнем слагаемые с одинаковыми индексами, т.к. частица не действует сама на себя.

$$\rho_e = \sum_{i=1}^{N_e} e_i \delta(\vec{z} - \vec{z}_i)$$

$$\varphi_e = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{e_i}{|\vec{z} - \vec{z}_i|}; \quad U(r_i) = \frac{e_i}{|r_i|}$$

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2m_i} \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}_0 + \frac{e}{c} \vec{A}_e \right)^2 + U(r_i) \right] + \sum_{i=1}^N e_i \varphi_e(\vec{r}_i, t)$$

$$U(r_i) = - \frac{e^2}{r_i}$$

3.4 Уравнение Шредингера

Волновое уравнение для свободного атома имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \Psi$$

Где $H_0 = H(\vec{A}_{ex}(\vec{r}, t) = 0)$. Граничная задача для свободного атома с краевыми условиями при $r = 0$ и $r = \infty$ имеет вид:

$$H_0 u_n(\vec{r}) = E_n u_n(\vec{r})$$

Где E_n – собственные значения, а собственные функции $u_n(\vec{r})$ являются ортонормированными:

$$\int u_n^*(r) u_m^*(r) dV = \delta_{nm}$$

Ввиду линейности уравнения Шредингера волновая функция удовлетворяет принципу суперпозиции:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(r)$$

$a_n(t)$ - коэф. разложения

$$a_n(t) = \int \Psi(\vec{r}, t) U_n^*(\vec{r}) d^3 \vec{r}$$

Вероятность нахождения частицы в состоянии n:

$$p_n = |a_n|^2$$

Условие нормировки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n \int \Psi(\vec{r}, t) u_n^*(\vec{r}') d\vec{r}' u_n(\vec{r}) = \int \Psi(\vec{r}, t) \sum_n u_n^*(\vec{r}') d\vec{r}' u_n(\vec{r}')$$

Условие полноты:

$$\sum_n u_n^*(\vec{r}') d\vec{r}' u_n(\vec{r}') = \delta(r - r')$$

Поля нет (свободный атом):

$$i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n(t)}{dt} u_n(\vec{r}) = H_0 \sum_n a_n u_n = \sum_n a_n E_n u_n(\vec{r})$$

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = E_n a_n$$

Решение имеет вид:

$$a_n(t) a_n(0) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

Также как и в случае пустого резонатора каждая из собственных мод осциллирует гармонически во времени. Однако, если волновая функция является суперпозицией различных собственных состояний, то осцилляциям по времени не являются гармоническими.

Энергия частицы в состоянии u_n :

$$E_p = \langle n | H_0 | n \rangle = \int u_n^*(\vec{r}) H_0 u_n(\vec{r}) d^3r = E_n$$

Изменение энергии:

$$(\Delta E_p)^2 = \langle (H_0 - \langle H_0 \rangle)^2 \rangle = \langle H_0^2 \rangle - 2\langle H_0 \rangle \langle H_0 \rangle + \langle H_0 \rangle^2 = 0$$

Оператор инверсии:

$$\hat{p}\Psi(r) = \Psi(-r) \\ \hat{p} = \pm 1$$

Гамильтониан свободного атома:

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)^2 + U(\vec{r})$$

является четным по отношению к инверсии, поскольку

$$\vec{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \quad \vec{A}_0 \sim \vec{j}_n \sim \vec{p}_n$$

$$\hat{P}H_0 - H_0\hat{P} = 0$$

Тогда собственные функции принимают вид:

$$u_n(r) = \pm u_n(-r)$$

То есть являются либо четными, либо нечетными. Оператор дипольного момента имеет вид:

$$\hat{d} = e\hat{p}$$

$$\langle \hat{d} \rangle = \langle n | e\vec{r} | n \rangle = \int u_n^*(\vec{r}) e\vec{r} u_n(\vec{r}) dV$$

$$u_n(\vec{r}) = (-1)^\sigma u_n(-\vec{r}), \quad \sigma \in Z$$

$$\vec{d}_{nm} = \int u_n^*(\vec{r}) e\vec{r} u_m(\vec{r}) dV = - \int u_n^*(-\vec{r}) e\vec{r} u_m(-\vec{r}) dV = \int u_n^*(r) e r u_m(r) dV = d_{nm}$$

Если всё поменять на минусы, то дипольный момент не изменится:

$$\langle \hat{d} \rangle = \int u_n^*(-\vec{r}) e(-\vec{r}) u_m(-\vec{r}) dV = \int \dots (-1)^{2\sigma} = -d_{nm}$$

3.5 Флуктуации энергии. Дипольный момент

Пусть атом находится в суперпозиционном состоянии

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(\vec{r})$$

Тогда:

$$E = \sum_n |a_n|^2 E_n$$

$$(\Delta E)^2 = \sum_{n,m} a_n^* a_m \langle n | H_0 |^2 m \rangle - 2E \sum_{n,m} a_n^* a_m E_n \delta_{nm} + E_p$$

Пусть N=2, тогда:

$$(\Delta E)^2 = \sum_n |a_1|^2 |a_2|^2 (E_1 - E_2)^2$$

В суперпозиционном состоянии дипольный момент имеет вид:

$$\langle d \rangle = \sum_{n,m} a_n^* a_m \int U_n^*(\vec{r}) e\vec{r} U_m(\vec{r}) dV = \sum_{n,m} a_n^* a_m d_{nm}$$

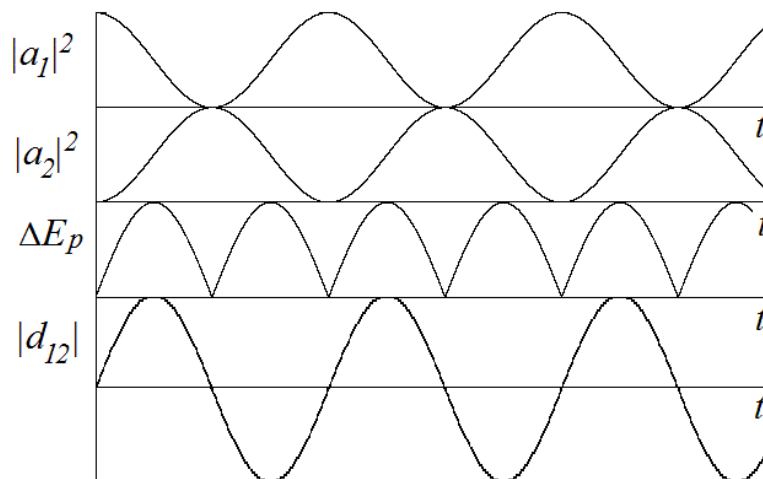


Рисунок 3.3 – Населенность в зависимости от времени

Лекция 4. Дипольные взаимодействия

4.1 Связь оператора скорости и дипольного оператора

В продолжение предыдущей лекции напишем уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} (\vec{A}_0 + \vec{A}_p) \right)^2 + U(\vec{r})$$

$$H = H_0 + H_{int}$$

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)^2 + U(\vec{r})$$

$$H_{int} = -\frac{q}{mc} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right) \vec{A}_e + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}_e^2$$

$$H_0 U_n(\vec{r}) = E_n u_n(\vec{r})$$

Полученный базис не очень удобен, так как не обладает сферической симметрией. Точно данная задача решается только для атома водорода. Разложение в ряд на собственные функции свободного атома:

$$\Psi(r, t) = \sum_n a_n(t) a_n(\vec{r})$$

Для амплитуд мы получаем:

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = E_n a_n + \sum_m \langle n | H_{int} | m \rangle a_m$$

$$\frac{da_n}{dt} = -i\omega_n a_n - \frac{1}{\hbar} \sum_m \langle n | H_{int} | m \rangle a_m \quad (12)$$

Мы должны будем посчитать матричные элементы $\langle n | H_{int} | m \rangle$. Для этого удобно ввести дипольный оператор $\hat{d} = e\vec{r}$. Тогда его матричный элемент выглядит следующим образом:

$$\vec{d}_{nm} = \langle n | \vec{d} | m \rangle$$

$$\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)_{nm} = \langle n | \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right) | m \rangle$$

Введем оператор скорости:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Тогда:

$$i\hbar \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{r}H]$$

Если напряженность внешней электромагнитной волны много меньше внутриатомного поля, то:

$$i\hbar \frac{d\vec{r}}{dt} \approx \underbrace{[\vec{r}H_o]}_{|H_o| \gg |H_{int}|} = \left(\vec{r} \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)^2 \right) - \frac{1}{2m} \left(\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)^2 \vec{r} \right)$$

Посчитать это можно самостоятельно. В результате получается:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right) \quad (13)$$

Можем найти связь между матричными элементами обобщенного импульса и дипольного оператора:

$$\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)_{nm} = \frac{i w_{nm} m}{q} \vec{d}_{nm}$$

$$\vec{d}_{nm} = \int u_n^*(\vec{r}) \vec{d} u_m(\vec{r}) dV$$

С другой стороны:

$$\langle n | i\hbar \frac{d\vec{r}}{dt} | m \rangle = \langle n | \vec{r} H_0 - H_0 \vec{r} | m \rangle = E_m \langle n | \vec{r} | m \rangle - E_n \langle n | \vec{r} | m \rangle = -(E_n - E_m) \langle n | \vec{r} | m \rangle$$

Из чего следует связь оператора скорости и оператора дипольного момента.

$$\frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)_{nm} = i w_{nm} \langle n | \vec{r} | m \rangle$$

$$w_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

$$\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)_{nm} = \frac{i w_{nm} m}{q} \vec{d}_{nm}$$

Подставим матричные элементы в (13)

$$\frac{da_n}{dt} = -i w_n a_n + \frac{i}{\hbar} \sum_m \frac{q}{\hbar c} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \right)_{nm} \vec{A} a_m$$

Где A – напряженность поля внешней волны. Используя полученную связь, можно переписать уравнение в виде:

$$\frac{da_n}{dt} = -i\omega_n a_n + \frac{1}{\hbar c} \sum_m w_{nm} \vec{d}_{nm} \vec{A} a_m \quad (14)$$

4.2 Эффекты, возникающие при больших напряженностях

Стоит отметить, что мы использовали приближение, когда напряженность внешней электромагнитной волны много меньше внутриатомного пол. Какие возникают эффекты без использования приближения? Исходное уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H_0 + H_{int}) \Psi$$

H_0 – свободный атом, H_{int} – все остальное. Будем искать решение в виде:

$$\vec{p}\Psi' = e \frac{ie}{\hbar c} x \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \nabla x \right) \Psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = e \frac{ie}{\hbar c} x \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial t} + i \frac{e}{\hbar c} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \Psi$$

Мы получили связь между штрихованной и не штрихованной функциями.

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{\hbar c} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} (\vec{A} - \nabla x) \right)^2 + U + \frac{e}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \right] \varphi$$

Получили преобразованное уравнение, но приближений пока никаких нет. Для простоты выберем:

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) \vec{r}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{x}) = \vec{\nabla}(\vec{A}\vec{r}) = \vec{A} + \underbrace{\left(\vec{r} \underbrace{\text{rot} \vec{A}}_B \right)}_{A_2} + (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -c \vec{E} \vec{r}$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + U - \vec{E} \vec{d} + \frac{e}{mc} \vec{A}_2 \vec{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}_2^2 \right]$$

Отличие состоит в том, что появляются слагаемые с \vec{A}_2 . Также распишем $\vec{r} \underbrace{\text{rot} \vec{A}}_B$:

$$\frac{e}{mc} \vec{p} [\vec{r} \vec{B}] = \frac{e}{mc} [\vec{p} \vec{r}] \vec{B} = -\frac{e}{mc} \vec{l} \vec{B}$$

Где $[\vec{r}, \vec{p}]$ - оператор углового момента. То есть помимо электропольных переходов появляются магнитнопольные переходы. Электродипольное взаимодействие нечетно, магнитодипольное – четно.

Таким образом, для заселенностей уровней получим:

$$\frac{da_n}{dt} = -i\omega_n a_n + \frac{1}{\hbar} \vec{E} \sum_m \vec{d}_{nm} a_m \quad (15)$$

$$\vec{E} = -i \frac{\omega_{nm}}{c} \vec{A} = -\frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

Уравнения (14) и (15) отличаются не сильно. В случае мы имеем двухуровневую систему то есть, если $\omega_0 = \omega_{nm}$, эти уравнения будут близки.

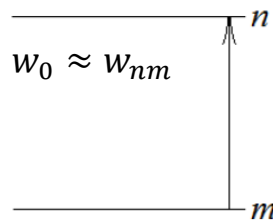


Рисунок 4.1 – Двухуровневая система

В общем случае, эти две системы не одинаковы. В дальнейшем будем пользоваться электродипольным приближением. Будем интересоваться двухуровневыми атомами, но дополнительный уровень не требуется.

4.3 Матричный метод

Рассмотрим матричный метод решения задач.

$$\frac{da_n}{dt} = -i\omega_n a_n + \frac{1}{\hbar} E \sum_m d_{nm} a_m$$

$d_{nm} = \vec{e} \vec{d}_{nm}$, \vec{e} - единичный вектор поляризации

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если бесконечное число уровней:

$$\vec{a} = \sum_n a_n |n\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \dots \end{pmatrix}$$

\vec{a} - вектор амплитуды.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = -i\hat{w}\vec{a} + \frac{1}{\hbar} E\hat{D}\vec{a}$$

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & w_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

w_i - собственные значения частей. Матрица дипольных моментов:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \dots \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & \dots \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & \dots \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

d_{ij} - соответственные яркости линий переходов.

$$\vec{a}^* = \sum_n a_n^* \langle n|$$

$$\langle 1| = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Условие ортогональности:

$$\langle n|n\rangle = 1$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$$

$$|n\rangle\langle m| = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{vmatrix} - \text{матрица } n \times m$$

Лекция 5. Двухуровневый атом

5.1 Матричный метод (продолжение)

В прошлый раз мы остановились на решении уравнения:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = -i\hat{w}\vec{a} + \frac{1}{\hbar} E\hat{D}\vec{a}$$

Во взаимодействии с внешним полем не всегда участвуют все уровни атома. В случае с двухуровневым атомом, размерность \vec{a} вектора равна 2, \hat{w} – диагональная матрица, состоящая из собственных значений, \hat{D} – антидиагональная матрица. Уравнение для собственных функций:

$$i\hbar \frac{dF}{dt} = [FH]$$

Используя уравнение Гейзенберга, мы можем написать уравнение для оператора:

$$H = \sum_n \hbar w_n |n\rangle\langle n| - E \sum_{n,m} d_{nm} |n\rangle\langle m|$$

Любой оператор мы можем разложить по собственным матричным элементам $|n\rangle\langle m|$:

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \sum_{n,m} f_{nm} |n\rangle\langle m| \\ \hat{w} &= \sum_n w_n |n\rangle\langle n| \\ \hat{D} &= \sum_{n,m} d_{nm} |n\rangle\langle m|\end{aligned}$$

В пространстве двухуровневого атома существуют 4 линейно независимых оператора:

$$|1\rangle\langle 1|, |2\rangle\langle 2|, |2\rangle\langle 1|, |1\rangle\langle 2|$$

Первые два оператора описывают населенности уровней, вторые два – переходы. Возьмем два произвольных оператора:

$$[|n\rangle\langle m|, |k\rangle\langle l|] = |n\rangle\langle m|k\rangle\langle l| - |k\rangle\langle l|n\rangle\langle m| = |n\rangle\langle l| - |k\rangle\langle m|$$

Введем обозначение:

$$\sigma_{kl} = |k\rangle\langle l| \sim e^{i w_{kl} t}$$

Свойства:

1. $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$
2. $|\Psi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle, a_n = \langle n|\Psi\rangle$

Собственные состояния осциллируют на собственной частоте. Вид уравнения для σ_{kl} :

$$i\hbar \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} = i w_k \sigma_{kl} + \frac{iE}{\hbar} \sum_n (d_{ln} \sigma_{kn} - d_{nk} \sigma_{nl})$$

5.2 Двухуровневый атом

В случае двухуровневого атома вектора имеют вид:

Свойства:

1. $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\langle 1| = (0 \ 1)$ $\langle 2| = (0)$
3. $\langle 1|1\rangle = 1$ $\langle 1|2\rangle = 0$
4. $|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $|2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
7. $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
8. $\langle 1| = (0 \ 1)$ $\langle 2| = (0)$
9. $\langle 1|1\rangle = 1$ $\langle 1|2\rangle = 0$
10. $|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
11. $|2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
12. $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Произвольную волновую функцию мы можем записать в виде:

$$|\Psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$H_0|\Psi\rangle = (E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|)|\Psi\rangle$$

$$H_0 = \left(\frac{E_2 - E_1}{2} + \frac{E_2 + E_1}{2}\right)|2\rangle\langle 2| + \left(\frac{E_2 - E_1}{2} - \frac{E_2 + E_1}{2}\right)|1\rangle\langle 1|$$

$$H_0 = \frac{E_2 - E_1}{2} \underbrace{(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|)}_{\sigma_3} + \underbrace{\frac{E_2 + E_1}{2}}_{=0} I$$

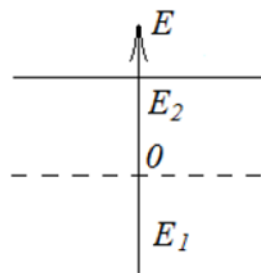


Рисунок 5.1 – Населенности уровней

$$\sigma_3 = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$$

σ_3 — оператор разности населенностей

$$\langle \Psi | \sigma_3 | \Psi \rangle = |\beta|^2 - |\alpha|^2$$

Число линейно независимых операторов: $4 - 1 = 3$ — если размерность пространства равна 2

$$\vec{d} = d_{21}|2\rangle\langle 1| + d_{12}|1\rangle\langle 2|$$

$$\sigma_+ = |2\rangle\langle 1|, \quad \sigma_- = |1\rangle\langle 2|$$

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_3 - \vec{E}(\vec{d}\sigma_+ + \vec{d}^*\sigma_-)$$

$\sigma_+|1\rangle = |2\rangle\langle 1|1\rangle = |2\rangle$ - переводит из основного состояния в возбужденное;

σ_- - переводит в основное.

$$\sigma_+|2\rangle = |2\rangle\langle 1|2\rangle = 0; \quad \sigma_-|2\rangle = |1\rangle, \quad \sigma_-|1\rangle = 0$$

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm i\sigma_y)$$

$$\vec{\sigma} = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

$$\sigma_x^2 = I, \quad \sigma_y^2 = I, \quad \sigma_z^2 = I,$$

На рисунке 5.2 представлена иллюстрация вектора Блоха. Его длина постоянна, если он направлен вверх, то атом находится в возбужденном состоянии, конец вектора остается на сфере. Если он направлен вниз, то атом находится в нижнем состоянии.

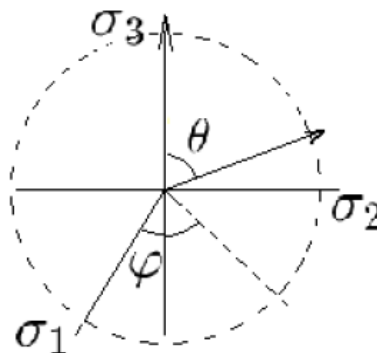


Рисунок 5.2 – Иллюстрация вектора Блоха

5.3 Переходы в двухуровневом атоме

Мы получили следующую систему уравнений, определяющую населенность атома:

$$\frac{da_n}{dt} = -i\omega_n a_n + \frac{i}{\hbar} E d n_0 a_0 \quad (16)$$

Будем считать, что атом взаимодействует с волной следующего вида:

$$E = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t}$$

Также будем считать, что населенность уровней подчиняется следующему закону:

$$|a_n|_{n>0}^2 \ll 1 \rightarrow \text{Линейная модель}$$

Ансамбль атомов в основном состоянии. Число атомов в возбужденном состоянии \ll числа атомов основного состояния.

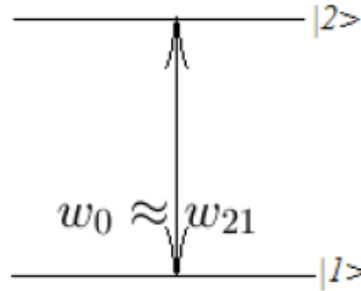


Рисунок 5.3 – Резонансный переход между первым и вторым уровнем

Будут заселяться в основном уровни $\hbar\omega_{n0} \approx \hbar\omega_{21}$. Если напряженность поля равна нулю, то система уравнений (16) распадается на отдельные уравнения:

$$a_1(t) = b_1(t) e^{i\omega_0 t - i\omega_2 t}$$

$$a_2(t) = b_2(t) e^{-i\omega_0 t - i\omega_2 t}$$

$$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1 \approx \omega_0$$

$$\frac{db_2}{dt} = -i\Delta\omega b_2 + \frac{i}{\hbar} d_{21} E_0^* \frac{e^{i(\omega_0 - \omega_{21})T}}{i(\omega_0 - \omega_{21})T} b_1 + \frac{i}{\hbar} d_{21} E_0 \frac{e^{i(3\omega_0 - \omega_{21})T}}{i(3\omega_0 - \omega_{21})T}$$

$$\begin{cases} \frac{db_2}{dt} = -i\Delta\omega b_2 + \frac{i}{\hbar} d_{21} E_0^* b_1 \\ \frac{db_1}{dt} = i\Delta\omega b_1 + \frac{i}{\hbar} d_{21}^* E_0 b_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$$

Когда $\omega_0 \approx \omega_{21}$ экспоненты $\rightarrow 0$

Рассмотрим различные частные случаи.

1. Частота Раби

Пусть внешнее поле имеет вид:

$$E_0(t) = E_0 = const; \quad \Delta\omega = \omega_{21} - \omega_0 = 0$$

Профиль — плоская волна. Продифференцируем 2-е уравнение системы по времени:

$$\frac{d^2 b_1}{dt^2} + \left| \frac{E_0 d_{21}}{\hbar} \right|^2 b_1 = 0$$

Решение имеет вид:

$$b_1(t) = B_1 e^{i\Omega t} + B_2 e^{-i\Omega t}$$

$$\Omega = \frac{E_0 |d_{21}|}{\hbar}$$

$$n_1(t) = |b_1(t)|^2$$

$$b_{1,2}(t) = B_1 e^{i\Omega t} \pm B_2 e^{-i\Omega t}$$

Населенности уровней:

$$n_1(t) = |B_1|^2 + |B_2|^2 + 2|B_1||B_2|\cos(2\Omega t + \varphi_0)$$

$$n_2(t) = |B_1|^2 + |B_2|^2 - 2|B_1||B_2|\cos(2\Omega t + \varphi_0)$$

Если система полная:

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 = 1, |B_1|^2 + |B_2|^2 = \frac{1}{2}$$

$$n_1(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Omega t) = \cos^2 \Omega t$$

$$n_2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\Omega t) = \sin^2 \Omega t$$

$$\Omega_{Rabi} = \frac{2E_0 |d_{21}|}{\hbar}$$

Ω_{Rabi} — частота осцилляции населенности уровней в случае взаимодействия атома с сильным полем, называется частотой Раби.

2. Отстройка от резонанса

Теперь мы предполагаем, что частота отличается от резонансной.

$$E_0(t) = \text{const}, \quad w_{21} \neq w_0$$

Тогда:

$$\frac{d^2 b_1}{dt^2} = i\Delta w \frac{db_1}{dt} + \frac{i}{\hbar} d^* E_0 \frac{db_2}{dt} = i\Delta w \frac{db_1}{dt} + \frac{i}{\hbar} d^* E_0 \left(-i\Delta w b_2 + \frac{i}{\hbar} d E_0^* b_1 \right) =$$

$$= -\Delta w^2 b_1 - \left(\frac{|d|E_0}{\hbar} \right)^2 b_1$$

$$\frac{d^2 b_1}{dt^2} + (\Omega^2 + \Delta w^2) b_1 = 0$$

Уравнение для амплитуды b_1 имеет такой же вид, как и ранее.

$$n_1(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Omega(\Delta w)t) = \cos^2 \Omega(\Delta w)t$$

$$n_2(t) = \sin^2 \Omega(\Delta w)t$$

$$\Omega(\Delta w) = \sqrt{\Omega^2 + \Delta w^2} \quad \Omega_{Rabi} = \frac{2|d_{21}|E}{\hbar}$$

$$\Omega_{Rabi}(\Delta w) = \sqrt{\Omega_{Rabi}^2 + 4\Delta w^2}$$

Величина $\Omega_{Rabi}(\Delta w)$ называется частотой Раби с отстройкой. Частота осцилляции во внешнем заданном поле зависит от величины отстройки частоты поля от частоты атомного перехода. Решения выглядят следующим образом:

$$b_1(t) = \cos(\Omega(\Delta w)t) + \frac{i\Delta w}{\Omega(\Delta w)} \sin(\Omega(\Delta w)t)$$

$$b_2(t) = \frac{i\Omega}{\Omega(\Delta w)} \sin(\Omega(\Delta w)t)$$

$$n_1 = \cos^2(\Omega(\Delta w)t) + \left(\frac{\Delta w}{\Omega(\Delta w)}\right)^2 \sin^2(\Omega(\Delta w)t)$$

$$n_2 = \left(\frac{\Omega}{\Omega(\Delta w)}\right)^2 \sin^2(\Omega(\Delta w)t)$$

Энергия атомной среды по определению:

$$E(t) = E_2 n_2(t) + E_1 n_1(t) = \frac{\hbar w_0}{2} (n_2(t) - n_1(t))$$

Скорость обмена энергиями между полем и средой (в резонансном случае) определяется следующим образом:

$$\frac{E(\tau_0) - E(0)}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{\hbar w_0}{2} - \left(-\frac{\hbar w_0}{2} \right) \right) = \frac{\hbar w_0}{\tau_0}$$

В нерезонансном случае:

$$\frac{E(\tau) - E(0)}{\tau} = \frac{\hbar w_0}{\tau} \left(\frac{\Omega}{\Omega(\Delta w)} \right)^2 = \frac{\hbar w_0}{\tau_0} \frac{\Omega}{\Omega(\Delta w)}$$

3. Площадь импульса

Рассмотрим еще один случай: взаимодействие не с монохроматической волной

$$E_0 = E_0(t), \quad \Delta w = 0$$

$$\ddot{b}_1 - \frac{\dot{\Omega}(t)}{\Omega(t)} \dot{b}_1 + \Omega^2(t) b_1 = 0$$

b_1, b_2 - медленно меняющиеся амплитуды

$$\Omega(t) = \frac{|d_{21}|E_0(t)}{\hbar}$$

$$b_1(t) = B_1 \cos\left(\int_{-\infty}^t \Omega(t') dt'\right) + B_2 \sin\left(\int_{-\infty}^t \Omega(t') dt'\right)$$

$$n_1(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2 \int_{-\infty}^t \Omega(t') dt' \right) = \cos^2 \left(\int_{-\infty}^t \Omega(t') dt' \right)$$
$$n_2(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2 \int_{-\infty}^t \Omega(t') dt' \right) = \sin^2 \left(\int_{-\infty}^t \Omega(t') dt' \right)$$
$$n_1(\infty) = \frac{1}{2} (1 + \cos \Sigma)$$
$$n_2(\infty) = \frac{1}{2} (1 - \cos \Sigma)$$

Σ - площадь импульса:

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|d_{21}|E_0(t)}{h} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_{Rabi}(dt) dt$$

а) $\Sigma = \pi$ (в начальный момент времени атом находится в основном состоянии, в конечный момент — атом в возбужденном состоянии)

б) $\Sigma = 2\pi$ (атом до и после импульса находился в основном состоянии)

$$\Sigma = \pi(2n + 1)$$

в) $\Sigma = 0$ (атом остается в основном состоянии)

Лекция 6. Эволюция поля в резонаторе

6.1 Атом в резонаторе

Рассмотрим ситуацию, когда в резонаторе находится один атом. Уравнения для поперечного электромагнитного поля и уравнения для амплитуд вероятностей населенности атомных уровней имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \\ \frac{db_n}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_m \langle n | H_{int} | m \rangle b_m e^{i\omega_{nm}t} \\ H_{int} &= -\frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}, t) \vec{A}(\vec{r}, t) dV \\ \vec{j} &= \sum_{n,m} \vec{J}_{nm} b_n^* b_m\end{aligned}$$

Атом в идеальном микрорезонаторе.

Пусть атом находится в микрорезонаторе, то есть в резонаторе, линейные размеры которого сопоставимы с длиной волны излучения атома. В этом случае межмодовое расстояние сравнимо с энергией самого кванта:

$$\hbar \Delta \omega_{n,n-1} = \frac{2\pi \hbar n c}{L} - \frac{2\pi \hbar (n-1)c}{L} = \frac{2\pi \hbar c}{L}$$

Поле в резонаторе раскладываем по системе его собственных ортогональных функций:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \sum_k \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{w_k V}} \vec{e}_k a_n(t) n_k(\vec{r}) \\ w_k &= |\vec{k}|c\end{aligned}$$

В этом случае $|\vec{A}(\vec{r}, t)|^2$ есть число квантов в указанной моде, а

$$a_0 = \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{w_k V}}$$

определяет амплитуду одноквантового поля. Напряженность одноквантового поля:

$$E_0 = \frac{w}{c} a_0$$

Нормируя время на период оптических колебаний T получаем:

$$\begin{cases} \ddot{A} + v^2 = 2v\gamma [b_2^* b_1 e^{i\nu_0 t} + b_1^* b_2 e^{-i\nu_0 t}] \\ \dot{b}_1 = i\gamma b_2 A e^{-i\nu_0 t} \\ \dot{b}_2 = i\gamma b_1 A e^{-i\nu_0 t} \\ v = |\vec{K}|cT, \quad \gamma = \Omega T \end{cases}$$

$$\Omega = \frac{m_0}{\hbar c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{wV}} = \frac{m_0 a_0}{\hbar c} = \frac{d_0 E_0}{\hbar} = \frac{\Omega_{Rabi}}{2}$$

Где m – матричный элемент атомного тока. Пусть частота одной из мод резонатора находится в резонансе с атомным переходом, тогда в одномодовом приближении:

$$A(t) = a(t)e^{ivt} + a^*(t)e^{-ivt}$$

$a(t), a^*(t)$ безразмерны, медленно изменяются → укороченные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{a} = i\gamma b_2^* b_1 e^{-i\Delta t} \\ \dot{b}_1 = i\gamma b_2 a e^{-iv_0 t} \\ \dot{b}_2 = i\gamma b_1 a^* e^{-iv_0 t} \end{cases}$$

Вычисляя производные, получаем интегралы движения самосогласованных уравнений:

$$\begin{cases} |b_1(t)|^2 + |b_2(t)|^2 = 1 \\ |b_1(t)|^2 - |a(t)|^2 = C_1 \\ |b_2(t)|^2 - |a(t)|^2 = C_2 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

В резонаторе всегда есть тепловое излучение, полагая:

$$b_1(t) = B_1 e^{i\varphi_1}, \quad b_2(t) = B_2 e^{i\varphi_2}, \quad a(t) = B(t) e^{i\phi(t)}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -\gamma B_2 B \sin\phi \\ \dot{B}_2 &= \gamma B_1 B \sin\phi \\ \dot{B} &= -\gamma B_2 B_1 \sin\phi \end{aligned}$$

Уравнения сохранения угловых моментов для вектора Блоха:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 B_1 = \gamma \dot{B}_2 B \cos\phi \\ \dot{\varphi}_2 B_2 = \gamma \dot{B}_1 B \cos\phi \\ \dot{\Psi} B = -\gamma B_2 B_1 \cos\phi \\ \phi = \Delta t + \varphi_2 - \varphi_1 + \Psi \end{cases}$$

Где φ_2 и φ_1 – углы пространственного псевдоспина. Учитывая интегралы движения, полагаем:

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \sin\theta(t) \\ B_2(t) &= \cos\theta(t) \\ a(t) &= \sin\theta(t) \end{aligned}$$

Где $C_1 = 0, C_2 = 1$. Можно свести к двум уравнениям для двух действительных величин:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \Delta + \gamma \cos\phi \left(\frac{1}{\cos\theta} - 3\cos\theta \right) \\ \frac{d\theta}{dt} = -\gamma \sin\theta \sin\theta \end{cases}$$

Δ - есть отстройка. В случае точного резонанса решение имеет вид:

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \theta(t) = 2 \operatorname{arctg}(e^{-\gamma t})$$

Следовательно, для амплитуды и населенности получаем:

$$A(t) = \frac{1}{\cosh(\gamma t)}$$

$$n_2(t) = \tanh^2(\gamma t)$$

$$B_2(0) = 1, B_1(0) = 0, B(0) = 0$$

Атом бесконечно долго находится в возбужденном состоянии, и в какой-то момент времени t_0 происходит переход, после чего атом возвращается в возбужденное состояние. На рисунке 6.1 представлена временная динамика интенсивности поля в резонаторе и населенности возбужденного уровня.

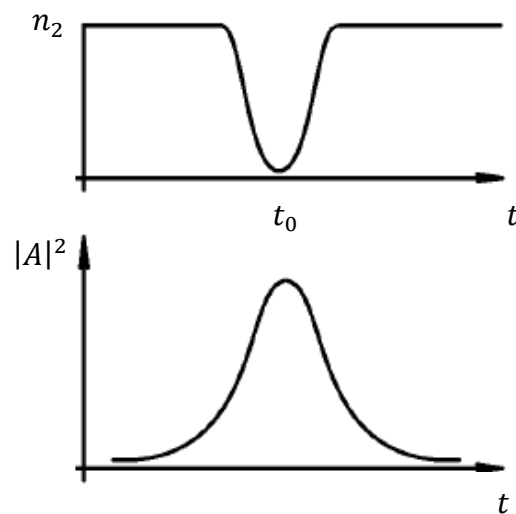


Рисунок 6.1 – Временная динамика интенсивности поля в резонаторе и населенности возбужденного уровня

Таким образом, в идеальном резонаторе атом бесконечно долго находится в возбужденном состоянии, затем под влиянием флуктуаций переходит в основное состояние, испуская квант свет, и практически сразу возбуждается снова.

В реальной ситуации, например за счет конечной температуры стенок резонатора, амплитуда электромагнитного поля в резонаторе никогда не равна нулю, поэтому

$$A(t) = \sqrt{A_0^2 + \sin^2 \theta(t)}$$

Где A_0^2 - амплитуда флуктуационного поля в резонаторе. В резонансном случае решение выражается через эллиптические функции и имеет вид:

$$F\left(\theta - \frac{1}{A_0^2}\right)\Bigg|_{\theta_0}^{\theta} = A_0(t - t_0)$$

6.2 Радиационный распад в многомодовом резонаторе

Увеличение линейных размеров резонатора приводит к уменьшению межмодового расстояния, поэтому при радиационном распаде в резонаторе с макроскопическими размерами атом может взаимодействовать сразу с несколькими резонаторными модами.

$$\begin{cases} \dot{a}_n - i(v_n - v_0)a_n = \gamma_n b_2 b_1^* \\ \dot{b}_2 = - \sum_n \gamma_n a_n b_1 \\ \dot{b}_1 = - \sum_n \gamma_n a_n^* b_2 \\ \gamma_n = \sqrt{\frac{2\pi N}{\hbar w_n V}} |d| w_0 T \end{cases}$$

Считаем, что ширина резонанса мала. Интегральное поле в резонаторе имеет вид:

$$a(t) = \sum_{-u/2}^{u/2} A_n(t) e^{i\Delta w_n t}$$

Если моды поля эквидистантны то:

$$\Delta w_n = n\Delta w_0$$

Если все моды поля, попадающие в пределы ширины линии атомного перехода, скоррелированы, то:

$$a(t) = A_0(t) \frac{\sin \frac{\mu \Delta w_0 t}{2}}{\sin \frac{\Delta w_0 t}{2}}$$

Максимум интегрального поля достигается при:

$$t_m = \frac{2\pi m}{\Delta w_0}$$

Амплитуда поля равна:

$$a_{max}(t = t_m) = NA_0(t_m)$$

В пустом пространстве атому выгодно быть в основном состоянии, в закрытом – в возбужденном. При многомодности — наоборот.

Напомним систему уравнений для амплитуд:

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -iw_1 a_1 + \frac{w_0}{\hbar c} \vec{d}_{12} \vec{A} a_2 \\ \frac{da_2}{dt} = -iw_2 a_2 - \frac{w_0}{\hbar c} \vec{d}_{21} \vec{A} a_1 \end{cases}$$

Наблюдаемые величины - разность населенностей и ток:

$$n(t) = |a_2(t)|^2 - |a_1(t)|^2$$

$$\vec{j} = -i\omega_0(\vec{d}_{12}a_1^*a_2 - \vec{d}_{21}a_2^*a_1)$$

Если много атомов:

$$n(t) = \frac{N}{V} (|a_2(t)|^2 - |a_1(t)|^2)$$

Лекция 7. Многоатомные системы

7.1 Система укороченных уравнений Максвелла-Блоха

Система укороченных уравнений Максвелла-Блоха:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{2i}{\hbar c} \vec{A}(\vec{J} + \vec{J}^*) \\ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + i\omega_0 \vec{J} = -i \frac{w^2 |d|^2}{\hbar c} \vec{A} n \end{cases} \quad (18)$$

Плотность разности населенностей:

$$n = n_2 - n_1$$

Уравнение для \vec{J} :

$$\vec{J} = -i\omega_0 \vec{d}_{12} a_1^* a_2$$

Для случая, когда имеется система атомов (полагая, что все атомы одинаковы):

$$n = \frac{1}{V_1} \sum_{i \in V_1(r)} n^{(i)} = n(r, t)$$

Уравнение для поля:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} (\vec{J} + \vec{J}^*) \quad (19)$$

Система (18) и уравнение (19) вместе составляют систему неукороченных уравнений. При анализе широкого класса задач, можно перейти к системе укороченных уравнений. Переходя к медленно меняющимся амплитудам, можно переписать их в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} \pm c \frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} &= \frac{2\pi i}{k} \gamma_{1,2} \\ \frac{\partial j_{1,2}}{\partial t} + i\Delta \gamma_{1,2} &= -i \frac{w_0^2 |d|^2}{\hbar c} A_{1,2} \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{2i}{\hbar c} \sum_{n=1}^2 (A_n \gamma_n^* - A_n^* \gamma_n) \end{aligned}$$

Представляем амплитуду поля в виде 4-х компонент:

$$\vec{A}(r, t) = A_i e^{\pm i(kz \pm \omega t)}$$

Для простоты предположим, что уравнение написано для скалярных амплитуд.
Отстройка:

$$\Delta \omega = \omega - \omega_0; \quad i - \text{номер атома}$$

7.2 Многоатомная система

При рассмотрении одноатомной системе мы использовали несколько приближений.

- 1) Использован одноатомный гамильтониан, а для многоатомного появится суммирование:

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(r_i) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{P}_i^2}{2M}$$

$$w_i = \frac{w_0}{1 - \frac{v_i}{c} \cos \theta_i}$$

θ_i - направление волны. Теперь вместо одной частоты мы имеем целый профиль частот, изображенной на рисунке 7.1.

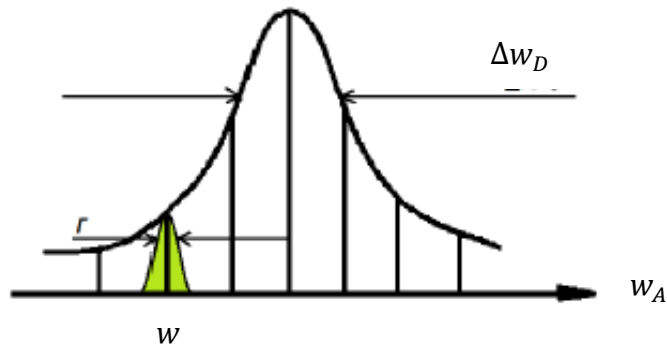


Рисунок 7.1 – Профиль резонанса

- 2) Еще одно приближение, которым мы пользовались – мы считали, что электрон движется во внутриатомном поле, которое создается своим ядром. Если есть газ, то есть столкновения.

$$u(\vec{r}_i) \rightarrow u(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

Столкновения делятся на два класса:

Столкновения приводят к деформации электронных оболочек: процесс неуправляемых столкновений и процесс релаксации.

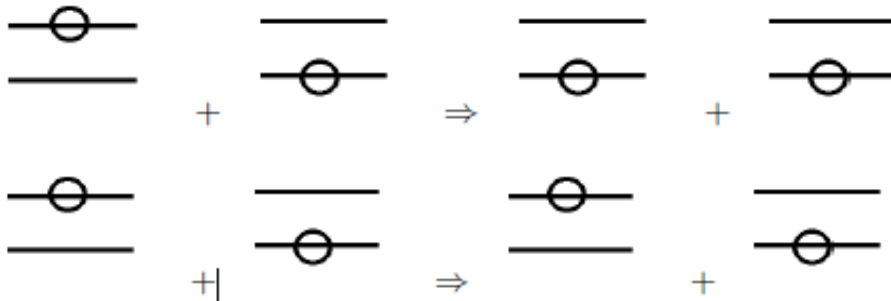


Рисунок 7.2 – Процессы неуправляемых столкновений и релаксации

$$3) U(\vec{r}_r) \equiv U_i(\vec{r}_i)$$

Для одиночного атома потенциальная энергия для каждого атома одинакова, а в случае твердого тела не все узлы могут заполнены. Следовательно, у соседних атомов искажается решетка, а потенциал изменяется.

Конечная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + c \frac{\partial A}{\partial z} &= \int p(\Delta) f(\Delta) d\Delta \\ \frac{\partial p(\Delta)}{\partial t} + \left(i\Delta + \frac{1}{T_2} \right) p(\Delta) &= \frac{2aw_0^2 |d|^2}{\hbar w} Ap(\Delta) \\ \frac{\partial p(\Delta)}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (p(\Delta) - p_e(\Delta)) &= -\frac{w}{\pi \hbar c^2} (p(\Delta) A^* + p^*(\Delta) A) \\ p(\Delta) &= -i \frac{2\pi}{\alpha} \gamma(\Delta) \end{aligned}$$

7.3 Скоростные уравнения

Мы имеем дело с обобщенной моделью. Здесь нельзя не учитывать наличие нулевого уровня, так как накачка происходит с какого-то основного. Накачка на уровни $|2\rangle$, $|1\rangle$ широкополосным излучением. Паразитный эффект — накачка уровня $|1\rangle$.

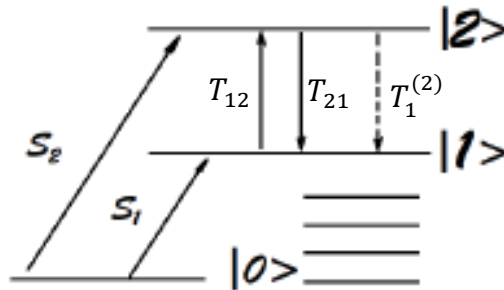


Рисунок 7.3 – Накачка возбужденных уровней

Наличие основного уровня вносит изменения в систему основных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + c \frac{\partial A}{\partial z} = \int p(w) f(w) dw & (\text{режим стационарного усиления}) \\ \left(\frac{\partial p(w)}{\partial t} + \left(\frac{1}{T_w} + i(w - w_0) \right) p(w) \right) = \frac{2\pi w |d|^2}{\hbar} (n_2(w) - n_1(w)) A & (p - \text{поляризация}) \end{cases}$$

Вид уравнений для населенности возбужденных и основного уровней выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{w}{2\pi\hbar c^2}(pA^* + A^*p) + S_2 - \frac{n_2}{T_1^{(2)}}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{w}{2\pi\hbar c^2}(pA^* + A^*p) + \frac{n_2}{T_{21}} + S_1 - \frac{n_1}{T_1^{(1)}}$$

$\frac{1}{T_1^{(2)}}$ - скорость релаксации с верхнего уровня на все уровни, которые находятся ниже.

$$\frac{1}{T_1^{(2)}} = \frac{1}{T_{21}} + \sum_i \frac{1}{T_{2i}}, \quad i - \text{все остальные уровни}$$

S_1, S_2 - скорости накачки

Введем обозначение:

$$\Gamma = \frac{1}{T_2}$$

Γ - скорость релаксации фазы.

$$\Gamma_2 = \frac{1}{T_1^{(2)}}$$

Γ_2 - скорость релаксации уровня 2. Такой же можно ввести для уровня 1. Скорость релаксации с уровня 2 на уровень 1:

$$\Gamma_{21} = \frac{1}{T_{21}}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{T_1^{(2)}} + \frac{1}{T_{21}} - \text{полная скорость релаксации}$$

Перейдем к упрощению уравнений. Будем полагать, что на среду подает импульс очень большой длительности:

$$\tau_p \gg T_2$$

T_2 - время релаксации поляризации.

$$\frac{\partial p}{\partial t} \sim \frac{p}{\tau_p} \ll \frac{p}{T_2}$$

Можем пренебречь производной по времени:

$$p_{(1)} = \frac{2\pi w_0 |d|^2}{\hbar} \frac{(n_2 - n_1)A(t)}{\Gamma + i\Delta}$$

— Адиабатическая связь между p и амплитудой импульса, то есть мы использовали адиабатическое приближение. Если бы не пренебрегли производной, то

$$p(t) = \int_0^t \dots A(t) dt$$

Подставляем в уравнения для населенностей

$$\begin{cases} \frac{\partial n_2}{\partial t} = S_2 - n_2(\Gamma_2 + wI) + n_1 wI \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} = S_1 + n_2(\Gamma_{21} + wI) - n_1(wI + \Gamma_1) \end{cases} \quad (20)$$

Система уравнений (20) – есть система скоростных уравнений, которая определяет скорости изменения населенности уровней.

$$\Gamma_2 = \frac{1}{T_1^{(2)}}, \quad \Gamma = \frac{1}{T_2}$$

$$I = cw = \frac{c\hbar^2}{4\pi} |A|^2$$

$$w = \frac{4\pi|d|^2}{\hbar^2 c} \frac{2\Gamma}{\Gamma^2 + \Delta\omega^2}$$

$n_1 wI$ - процессы индуцированного поглощения (при $n_1 \neq 0$).

$n_2 wI$ - процессы индуцированного перехода с верхнего на нижний уровень.

$\frac{1}{T_1}$ - скорость радиационного распада уровня $|2\rangle$.

$$\frac{1}{T_1} = \frac{4w^3|d|^3}{3\hbar c^3}$$

$$w = \frac{2\Gamma}{\Gamma^2 + \Delta\omega^2} \frac{3\pi c^2}{\hbar w^3} \frac{1}{T_1}$$

7.4 Стационарный случай

В стационарном случае правые части уравнений системы (20) приравняются нулю, тогда выражения для стационарных значений населенностей уровней:

$$n_2 = \frac{\Gamma_1 S_2 + (S_1 + S_2)wI}{\Gamma_1 \Gamma_2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_{21})wI}$$

$$n_1 = \frac{\Gamma_2 S_1 + \Gamma_{21} S_2 + (S_1 + S_2)wI}{\Gamma_1 \Gamma_2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_{21})wI}$$

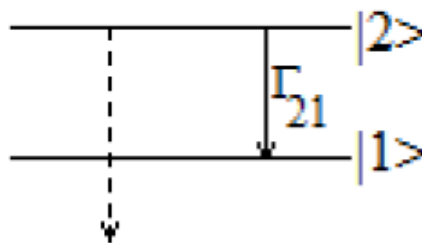


Рисунок 7.4 – Спонтанный переход с уровня $|2\rangle$ на уровень $|1\rangle$

n_1, n_2 не зависят от времени, но могут зависеть от координаты. Разность населенностей:

$$n_2 - n_1 = \frac{\left(\frac{S_2}{\Gamma_2} - \frac{S_1}{\Gamma_1} - \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_1\Gamma_2} S_2\right)}{1 + \left(\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} - \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_1\Gamma_2}\right) wI}$$

Если $I = 0$ (нет внешнего резонансного излучения):

$$n_2 = \frac{S_2}{\Gamma_2} = T_1^{(2)} S_2; \quad \Gamma_2 n_2 = S_2$$

$$n_1 = \frac{S_1}{\Gamma_2} + S_2 \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_1\Gamma_2} \quad (\text{уравнение баланса})$$

Если $I \neq 0$

$$S_2 = 0, \quad n_2 \neq 0$$

7.5 Стационарное усиление

Уравнение для амплитуды импульса (временную производную опустим):

$$\frac{dA}{dz} = \frac{1}{c} \int p(w) f(w) dw$$

Домножим на A^* , в результате получится:

$$\frac{d|A|^2}{dz} = \frac{2\pi w |d|^2}{\hbar c} \int \left(\frac{1}{\Gamma + i\Delta w} + \frac{1}{\Gamma - i\Delta w} \right) (n_2 - n_1) f(w) dw |A|^2$$

Отсюда видно, что:

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \frac{2\pi w |d|^2}{\hbar c} \int \frac{2\Gamma}{\Gamma_2 + \Delta^2} (n_2 - n_1) f(\Delta) d\Delta$$

$$\mu(z) = \frac{1}{I(z)} \frac{dI(z)}{dz}$$

$\mu(z)$ - дифференциальный коэффициент усиления (определяет усиливающее свойство среды).

$$I(z) = I_0 e^{\int_0^z \mu(z') dz'}$$

$$\mu(z) = \frac{2\pi w |d|^2}{\hbar c} \int \frac{2\Gamma}{\Gamma_2 + \Delta^2} (n_2(w) - n_1(w)) f(\Delta) d\Delta$$

1. Резонансный коэффициент усиления

Разность населенностей существенно не изменяется:

$$n_2 - n_1 = \frac{N}{V}$$

$f(\Delta) = \delta(\Delta)$ – неоднородных уширений нет

Коэффициент резонансного усиления:

$$\mu_0 = \frac{3\pi c^2}{w^2} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N}{V} = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N}{V}$$

$\frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1}$ - сечение резонансного рассеяния

Лекция 8. Стационарное усиление

8.1 Стационарное усиление (продолжение)

На прошлой лекции мы рассмотрели случай стационарного усиления, когда разность населенностей уровней является постоянной, а линия уширения является однородной функцией.

2. Неоднородное уширение

В случае, если присутствует неоднородное уширение, коэффициент усиления принимает следующий вид:

$$\mu = \int \mu(w) \frac{n_2(w) - n_1(w)}{N/V} f(w) dw$$

$$\mu(w) = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (w - w_0)^2} \frac{N}{V}$$

Напомним, что w_0 – частота несущего излучения (при $w = w_0$ совпадает с предыдущим выражением).

3. При выводе системы скоростных уравнений, мы получили следующее выражение:

$$w(n_2 - n_1) = \frac{6\pi c^2}{\hbar w^3} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{\frac{S_2}{\Gamma_2} - \frac{\Gamma_2 S_2 + \Gamma_{21} S_2}{\Gamma_1 \Gamma_2}}{1 + \left(\frac{w - w_0}{\Gamma}\right)^2} + \frac{I}{I_0}$$

Для интенсивности:

$$I_0 = \frac{\hbar w^3 \Gamma T_1}{6\pi c^2} \left(\frac{1}{\Gamma_2} + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_{21}}{\Gamma_1 \Gamma_2} \right)^{-1}$$

Интегральный коэффициент усиления

$$\mu(w) = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N^*}{V} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta w_0} \int \frac{e^{-\left(\frac{w-w_0}{\Delta w_0}\right)^2}}{1 + \left(\frac{w - w_0}{\Gamma}\right)^2 + \frac{I}{I_0}} dw \quad (21)$$

Неоднородное уширение в уравнении (21) находится в экспоненте $e^{-\left(\frac{w-w_0}{\Delta w_0}\right)^2}$, выпишем плотность, появляющейся при накачке и балансе:

$$\frac{N^*}{V} = \frac{S_2}{\Gamma_2} - \frac{\Gamma_2 S_1 + \Gamma_{21} S_2}{\Gamma_1 \Gamma_2} = n_2^{\text{ст}} - n_1^{\text{ст}}$$

На рисунке 8.1 графически изображено неоднородное уширение спектра. Из этого спектра участвуют только те молекулы и атомы, которые находятся в пределах уширения Γ . w_A - центральная частота неоднородно уширенного контура.

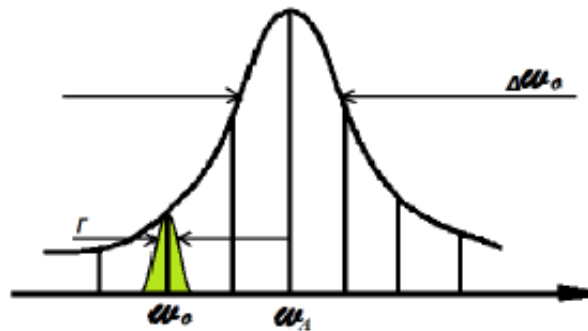


Рисунок 8.1 – Неоднородное уширение

От чего зависит μ :

$$1) \frac{1}{\Gamma T_1} = \frac{\Gamma_0}{\Gamma} < 1$$

Γ_0 - естественная ширина уровня

$$\Gamma = \frac{1}{T_2} \text{ (столкновительные времена)}$$

$$2) \omega_a - \omega_0 - \text{отстройка}$$

$$3) \Delta\omega_0 - \text{ширина линии неоднородного уширения}$$

Оценим характерную величину этих процессов.

$$\Gamma_0 \sim 10^8 \text{ Гц}$$

$$\Gamma = \gamma_{\text{столкн}} = 4\pi \langle r^2 \rangle n \langle v \rangle$$

$$n = 10^{18} \text{ см}^{-3} \quad \Gamma_{\text{ст}} = 10^8 \text{ Гц}$$

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 \frac{\langle V \rangle}{c} = 10^9 \text{ Гц}$$

$$\Gamma_0 < \Gamma \ll \Delta\omega_0 \text{ (при нормальных условиях, при атм. давлении)}$$

4. Резонанс

Резонанс означает совпадение линий:

$$\omega_a = \omega_0$$

Введем безразмерные величины:

$$\varepsilon = \frac{\Gamma}{\Delta\omega_0}; \quad x = \frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}$$

$$\mu(\omega) = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N^*}{V} \frac{\Gamma}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(qx)^2}}{1 + x^2 + \frac{\Gamma}{I_0}} dx$$

Проведем оценки для сред с различными параметрами

а) Однородное уширение ($\Gamma \gg \Delta\omega_0$)

$$\varepsilon \rightarrow \infty$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(qx)^2}}{1 + x^2 + \frac{I}{I_0}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{I}{I_0}}$$

$$\mu_{\text{одн}} = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N^*}{V} \frac{1}{1 + \frac{I}{I_0}} = \frac{\mu_0}{1 + \frac{I}{I_0}}$$

При однородном уширении коэффициент усиления близок к максимальному значению (резонансному).

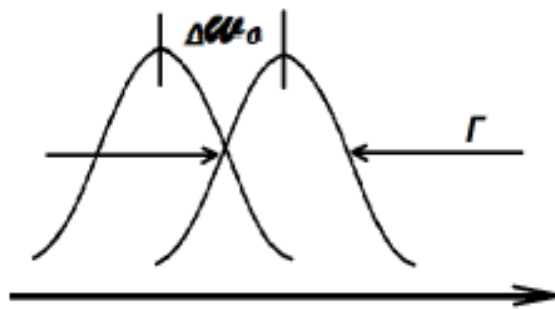


Рисунок 8.2 – Графическое сравнение величин Γ и $\Delta\omega_0$

б) Неоднородное уширение ($\Gamma \ll \Delta\omega_0$)

$$\mu_{\text{неодн}} = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N^*}{V} \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_0}}} = \frac{\mu_{\text{одн}}}{1 + \frac{I}{I_0}}$$

$$\mu_{\text{неодн}} \ll \mu_{\text{одн}}$$

Неоднородно уширенная линия – совокупность различных атомов, поэтому если частота внешнего поля совпадает с частотой группы атомов, то именно эта группа атомов будет наиболее эффективно взаимодействовать с падающим полем.

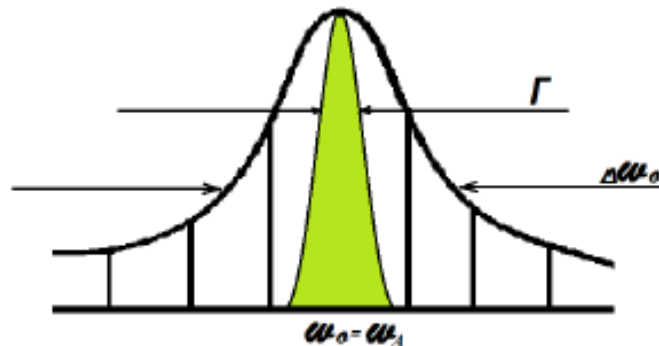


Рисунок 8.3 – Неоднородное уширение при резонансе

Только те атомы, частота которых лежит в пределах $\omega_A - \Gamma < \omega < \omega_A + \Gamma$, отдают свою энергию на усиление. $\frac{\Gamma}{\Delta\omega_0}$ определяет количество атомов, участвующих в этом процессе. На рисунке 8.4 изображен график зависимости населенности уровня 2 от частоты. На графике видно, что при частоте ω_0 на графике появляется резкий минимум – результат взаимодействия с внешним полем.

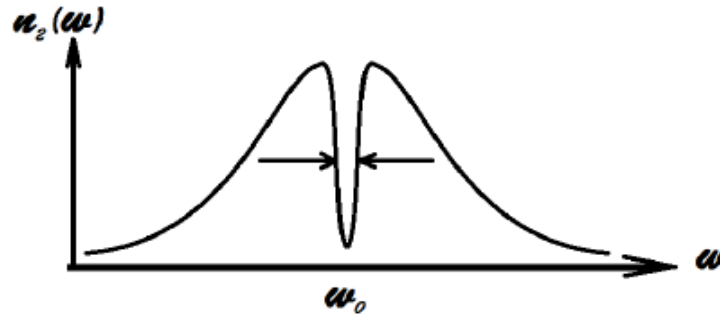


Рисунок 8.4 - График зависимости населенности уровня 2 от частоты

8.2 Интенсивность насыщения

В формулах постоянно фигурировала интенсивность насыщения I_0 , которая равна:

$$I_0 = \frac{\hbar\omega^3\Gamma T_1}{6\pi c^2} \left(\frac{1}{\Gamma_2} + \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{\Gamma_1\Gamma_2} \right)^{-1} = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{1}{\sigma\tau} \quad (22)$$

$$\sigma = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1}$$

σ - сечение резонансного рассеяния, Γ — скорость релаксации поперечной поляризации

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_1} \left(1 - \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_2} \right)$$

τ - характерное время релаксации. Тогда можно переписать уравнение (22):

$$\frac{I_0\sigma}{\hbar\omega} = \frac{1}{2\tau}$$

— плотность актов индуцированного излучения (средняя скорость)

$$\frac{I_0}{\hbar\omega} = cn_{\text{фот}}$$

$cn_{\text{фот}}$ – скорость рождения индуцированных фотонов

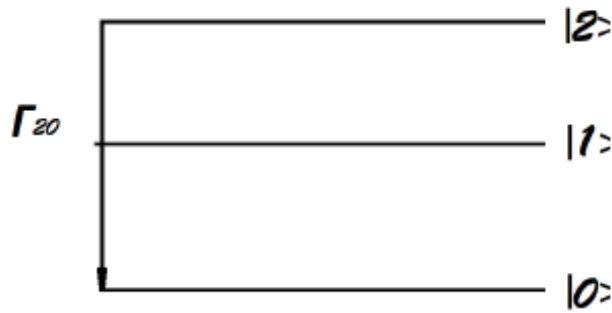


Рисунок 8.5 – Релаксация второго уровня

Скорость продольной релаксации второго уровня:

$$\Gamma_2 = \Gamma_{20} + \Gamma_{21}$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_1} \left(\frac{\Gamma_{20}}{\Gamma_2} \right)$$

8.3 Отстройка входного излучения от резонанса

Введем новые безразмерные величины:

$$\Omega = \frac{w - w_a}{\Delta w_0}, \quad v = \frac{w_0 - w_a}{\Delta w_0}$$

Тогда коэффициент усиления:

$$\mu = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N^*}{V} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\Omega^2}}{1 + \left(\frac{\Delta w_0}{\Gamma}\right)^2 (\Omega - v)^2 + \frac{I}{I_0}} d\Omega$$

Окончательное выражение:

$$\mu = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N^*}{V} \frac{1}{\Delta w_D} \frac{\sqrt{\pi} e^{-v^2}}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_0}}} = \mu_{\text{неодн}} e^{-v^2}$$

Рассмотрим следующую задачу: есть усилитель, имеющий неоднородно уширенный переход, определяющийся доплеровской шириной линии. На вход падает широкий спектральный импульс, который мы хотим усилить. На выходе профиль интенсивности будет определяться доплеровской шириной линии. Мы хотим выяснить всегда ли это так? Коэффициент усиления имеет вид:

$$\frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\mu_{\text{HO}} e^{-v^2}}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_0}}}$$

μ_{HO} – не зависит от координаты.

$$v = \frac{w_0 - w_A}{\Delta w_D}$$

w_D - ширина доплеровского уширения активной среды.

$$\frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial x} = \mu(x)$$

$$I = I_0 e^{\int_0^x \mu(x) dx}$$

$$\mu = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma T_1} \frac{N^*}{V} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta w_D} \int dw \frac{\exp\left(-\frac{w - w_0}{\Delta w_D}\right)^2}{1 + \left(\frac{w - w_0}{\Gamma}\right)^2 + \frac{I}{I_0}}$$

Предположим, что $\Gamma \ll \Delta w_D$ (среда доплеровски уширенная)

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= y \\ \frac{\sqrt{1+y} dy}{y} \frac{dy}{dx} &= \mu_{\text{HO}} e^{-v^2} \\ 2\sqrt{1+y} \Big|_{I_2}^{I_1} + \ln \frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{1+y}+1} \Big|_{I_2}^{I_1} &= \mu_{\text{HO}} L e^{-v^2} \\ 2 \left(\sqrt{1 + \frac{I_1}{I_0}} - \sqrt{1 + \frac{I_2}{I_0}} \right) + \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{I_1}{I_0}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{I_2}{I_0}} + 1} &= \mu_{\text{HO}} L e^{-v^2} \end{aligned}$$

L - длина активной среды, I_1 - интенсивность на входе, I_2 - интенсивность на выходе. Если мы далеко от точки поглощения (выполняется условие $I_{1,2} \ll I_0$), то \ln можем выкинуть.

$$I_{\text{ВЫХ}} = I_{\text{ВХ}} e^{\mu_{\text{HO}} L e^{-v^2}}$$

Используем приближение, когда $\mu_{\text{HO}} L \gg 1$ (хорошее усиление)

$$G(0) = e^{\mu_{\text{HO}} L e^{-v^2}}$$

$$I_{\text{ВЫХ}}(v_0) = \frac{1}{2} I_{\text{ВЫХ}}(0)$$

$$I_{\text{ВЫХ}}(v_0) = I_{\text{ВХ}}(v_0) G(0) e^{-v^2}$$

v_0 - ширина на полувысоте

$\Delta w_{\text{ВЫХ}}$ связана с Δw_0 (начальной шириной входного излучения):

$$\Delta w_{\text{ВЫХ}} = \frac{\Delta w_0}{\sqrt{\mu_{\text{HO}} L}}$$

Лекция 9. Нелинейный режим генерации

9.1 Стационарное усиление в однородно-уширенной среде

В случае однородно уширенной линии, для интенсивности усиливаемой волны мы получили:

$$\frac{dI}{dz} = \frac{\mu_0 I}{1 + \frac{I}{I_0}} - \beta I \quad (23)$$

Где μ_0 – коэффициент резонансного усиления и мы учли ослабление интенсивности усиливаемой волны за счет нерезонансного поглощения или рассеяния в активной среде. I_0 интенсивность насыщения. Коэффициент β обратно пропорционален длине нерезонансного поглощения $\beta = 1/I_{abs}$ и в отсутствие населенности на лазерных уровнях активной среды приводит к экспоненциальному затуханию интенсивности импульса:

$$I = I_0 e^{-\beta z}$$

Удобно ввести безразмерную интенсивность:

$$J = \frac{I}{I_0}$$

Тогда уравнение (23) примет вид:

$$\frac{1+J}{J} \frac{dJ}{\mu_0 - \beta(1+J)} = dz$$

Интегрируя его, получим

$$\ln \frac{J(L)}{J(0)} - \frac{\mu_0}{\beta} \ln \frac{\mu_0 - \beta(1+J(L))}{\mu_0 + \beta(1+J(0))} = (\mu_0 - \beta)L$$

Таким образом, зависимость интенсивности импульса на выходе из усилителя $J(L)$ зависит от его длины L и определяется решением трансцендентного уравнения.

1. $L \ll L_{abs}, \beta = 0$

Начнем со случая, когда нерезонансные потери пренебрежимо малы $\beta \sim 0$, то есть длина усилителя много меньше длины нерезонансного поглощения $L \ll L_{abs}$. В этом случае получаем:

$$\ln \frac{I(L)}{I(0)} + \frac{I(L) - I(0)}{I_0} = \mu_0 L$$

Пусть $J(L) \ll 1$ а, следовательно, и $J(0) \ll 1$, тогда пренебрегая вторым слагаемым:

$$I(L) = I(0) e^{\mu_0 L}$$

Таким образом, на начальном этапе при $0 < z < L_1$, где

$$L_1 \approx \frac{1}{\mu_0} \ln \frac{I_0}{I(0)}$$

выходная интенсивность экспоненциально зависит от длины усилителя.

9.2 Линейное усиление

Пусть теперь входная интенсивность $I(0) \approx I_0$, а выходная $I(L) \gg I_0$. В этом случае второе слагаемое в левой части уравнения (23) много больше первого и для интенсивности на выходе получаем:

$$I(L) = I(0) + I_0 \mu_0 L^2$$

Следовательно, после того как интенсивность излучения на выходе усилителя достигнет интенсивности насыщения, дальнейшее увеличение его длины приводит лишь к линейному росту выходной интенсивности. Это связано с тем, что стационарное значение инверсии населенностей в области, где интенсивность сравнима с интенсивностью насыщения, много меньше его значения в ненасыщенной области.

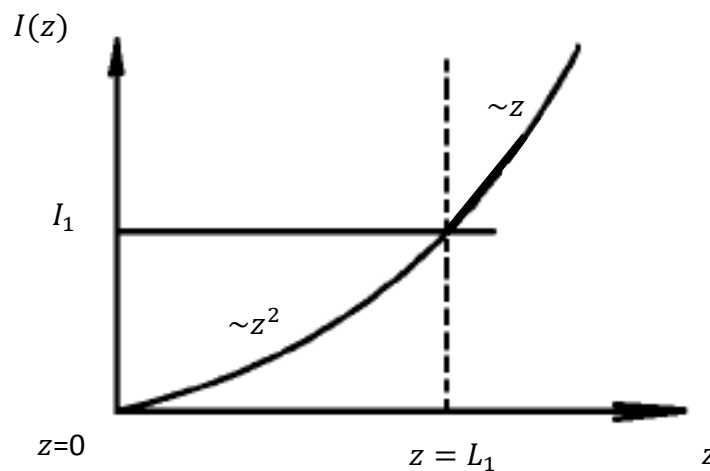


Рисунок 9.1 – Зависимость интенсивности от координаты

Пусть теперь $\beta \neq 0$. В случае, когда интенсивность мала, закон нарастания снова остается экспоненциальным

$$I(L) = I(0)e^{(\mu_0 - \beta)L}$$

Однако результирующий коэффициент усиления является разностью резонансного коэффициента усиления и коэффициента нерезонансного поглощения.

$$\mu = \mu_0 - \beta$$

9.3 Насыщение усиления

В случае, когда коэффициент резонансного усиления много больше коэффициента нерезонансного поглощения $\mu \gg \beta$, несложно получить следующее приближенное уравнение:

$$\frac{\mu_0}{\beta} - J(L) = \left(\frac{\mu_0}{\beta} - J(0) \right) e^{-\beta L}$$

Решение запишем в виде:

$$I(L) = I_0 \frac{\mu_0}{\beta} (1 - e^{-\beta L}) + I(0) e^{-\beta L}$$

Несложно видеть, что при $L > L_{abs}$ интенсивность стремится к следующему насыщенному (предельному) значению:

$$I_{max} = I(L)|_{L \rightarrow \infty} = \frac{I_0 \mu_0}{\beta}$$

С другой стороны насыщенное значение интенсивности можно определить, исходя из условия $\frac{dI}{dz} = 0$. Тогда:

$$I_{max} = I_0 \left(\frac{\mu_0}{\beta} - 1 \right)$$

На рисунке 9.2 представлена зависимость интенсивности усилителя от его длины.

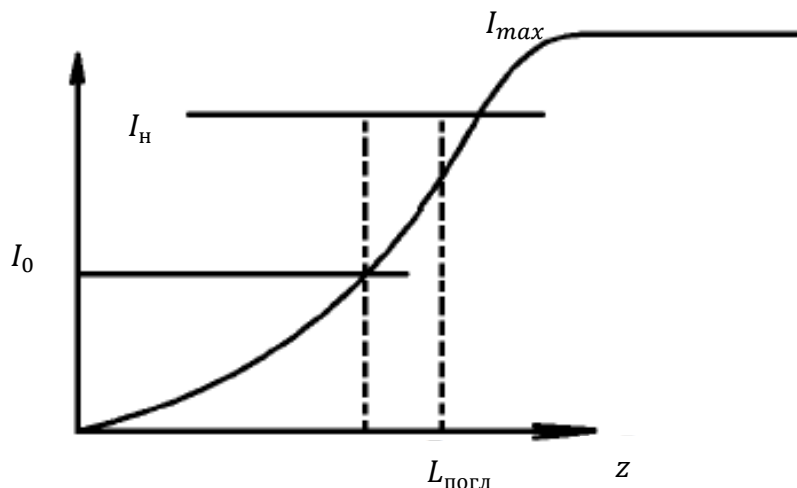


Рисунок 9.2 – Насыщение усиления

9.4 Стационарная генерация

Следующая задача, поддающаяся анализу – задача о генерации. Реально мы полагаем, что зеркала находятся на торцах среды, однако в случае стационарной генерации данное приближение не играет большой роли. На рисунке 9.3 изображена схема стационарной генерации с зеркалами, имеющие коэффициенты отражения R_1, R_2 .

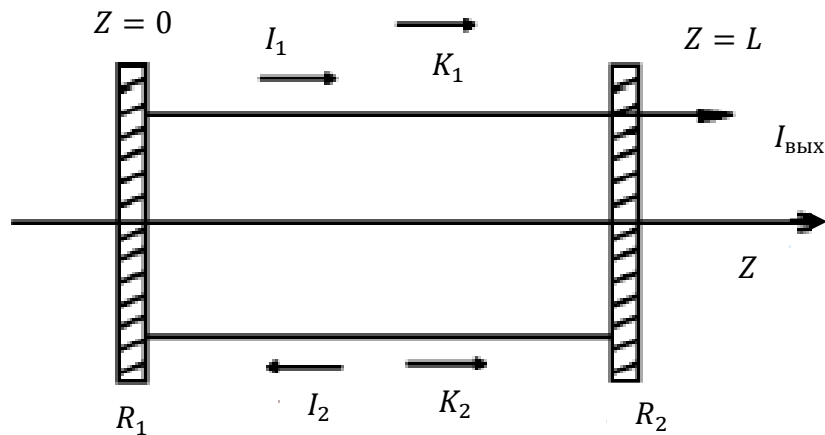


Рисунок 9.3 – Схема стационарной генерации

В результате отражения возникают две встречных волны:

$$\frac{dI_1}{dz} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{I_0 + I_1 + I_2} - \beta \right) I_1 \quad (24.1)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{I_0 + I_1 + I_2} - \beta \right) I_2 \quad (24.2)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} I_1(0) = R_1 I_2(0) \\ I_2(L) = R_2 I_1(L) \end{cases}$$

$$\frac{1}{I_1} \frac{dI_1}{dz} + \frac{1}{I_2} \frac{dI_2}{dz} = 0$$

Интеграл движения:

$$I_1(z)I_2(z) = I_1(0)I_2(0) = const$$

Интенсивность волны на выходе:

$$I_{\text{ВЫХ}} = I_1(L)(1 - R_2)$$

С учетом интеграла движения:

$$\frac{1}{R_1} I_1^2(0) = R_2 I_1^2(L)$$

$$I_1(L) = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}} I_2(0)$$

$$I_{\text{ВЫХ}} = (1 - R_2) \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}} I_1(0)$$

Краевая задача: задали на входе импульс и далее решаем задачу определения интенсивности. Система совместна с граничными условиями (может не иметь решений или иметь несколько) Условие стационарной генерации в линейном режиме:

$$I_{1,2} \ll I_0$$

Если мы пренебрежем нелинейностью, то получим два независимых уравнения:

$$I_1(z) = I_1(0)e^{(\mu_0 - \beta)z}$$

$$I_2(L) = I_2(L)e^{(\mu_0 - \beta)(L-z)}$$

Используя эти решения, получим:

$$I_2(0) = I_2(L)e^{(\mu_0 - \beta)L} = R_2 I_1(L)e^{(\mu_0 - \beta)L} = R_2 I_1(0)e^{2(\mu_0 - \beta)L}$$

Окончательно:

$$I_1'(0) = R_1 I_2(0) = R_1 R_2 e^{2(\mu_0 - \beta)L} I_1(0)$$

Стационарная генерация:

$$I_1'(0) = I_1(0)$$

Следовательно:

$$R_1 R_2 e^{2(\mu_0 - \beta)L} = 1$$

$$\mu_0 = \beta + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}$$

$$(\mu_0 - \beta)L + \frac{1}{2} \ln R_1 R_2 = 0$$

К тому же результату можно прийти иначе:

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dz} = (\mu_0 - \beta)I_1 \\ \frac{dI_2}{dz} = -(\mu_0 - \beta)I_2 \end{cases}$$

Решения имеют вид:

$$I_1(z) = A e^{(\mu_0 - \beta)z}$$

$$I_2(z) = B e^{(\mu_0 - \beta)(L-z)}$$

Подставляем граничные условия:

$$\begin{cases} A = B R_1 e^{(\mu_0 - \beta)L} \\ B = A R_2 e^{(\mu_0 - \beta)L} \\ I_1(0) = R_1 I_2(0) \\ I_2(L) = R_2 I_1(L) \end{cases}$$

Условие существования нетривиальных решений:

$$\begin{vmatrix} 1 & -R_1 e^{(\mu_0 - \beta)L} \\ R_2 e^{(\mu_0 - \beta)L} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1 + R_1 R_2 e^{2(\mu_0 - \beta)L} = 0$$

$$R_1 R_2 e^{2(\mu_0 - \beta)L} = 1$$

9.5 Стационарная генерация в нелинейном режиме

Учитывая обсужденный выше интеграл движения уравнений генерации, можно исключить интенсивность одной из волн, например левой:

$$J_2 = \frac{I_1^2(0)}{I_0^2} \frac{1}{J_1(z)} = \frac{J_0^2}{J_1(z)}$$

Подставляя это соотношение в первое уравнение (24.1), получаем:

$$\frac{dJ}{dz} = \left(\frac{\mu_0 J}{J_0^2 + J + J^2} - \beta \right) J$$

Где J – интенсивность правой волны. Решение имеет вид (учитывая граничное условие $J_1(z) = J_0$):

$$\frac{J(z) - J_0}{J(z) + J_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 - \beta - 2J_0\beta}{\mu_0 - \beta + 2J_0\beta}} \tanh \left[\frac{\sqrt{(\mu_0 - \beta)^2 - 4J_0^2\beta^2}}{2\mu_0} (\beta z + \ln \frac{J(z)}{J_0}) \right]$$

Непоглощающая среда

Пусть $\beta = 0$, тогда:

$$\frac{dJ}{J^2} (J_0^2 + J + J^2) = \int_0^L \mu_0 dz$$

Решение примет вид:

$$J_2(1 - R) + \ln \frac{1}{\sqrt{R}} = \mu_0 L$$

Учитывая, что:

$$I_{\text{вых}} = I_1(L)(1 - R)$$

Получаем:

$$I_{\text{вых}} = I_0 \left(\mu_0 L - \ln \frac{1}{\sqrt{R}} \right)$$

Условие генерации имеет вид:

$$\mu_0 L > \ln \frac{1}{\sqrt{R}}, 0 \leq R < 1$$

Вспомним, что:

$$I_{\text{вых}}|_{\text{max}} = I_0 \left(\frac{\mu_0}{\beta} - 1 \right) \approx I_0 \mu_0 L_{\text{погл}}$$

На рисунке 9.4 изображена зависимость интенсивности на выходе от параметра резонатора. R_0 определяет край области стабильности, в которой возникает стационарная генерация.

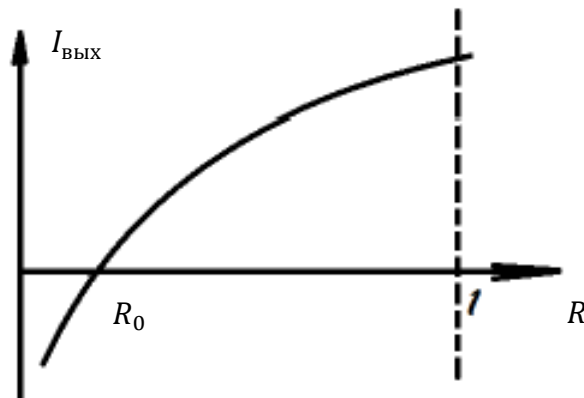


Рисунок 9.4 - Зависимость интенсивности на выходе от параметра резонатора

Значение R_0 определяется следующим образом:

$$R_0 e^{2\mu_0 L} = 1$$

Когда $R_1 = R_2 = 1$, I не зависит от координат, → особенность в 1. Нелинейность насыщения определяет предельные значения импульсов генерации (усиления).

$$R_0 = e^{-2(\mu_0 - \beta)L} \text{ (край области ст. ионизации)}$$

9.6 Многозначные решения

Таким образом, полученное трансцендентное уравнение позволяет определить зависимость выходной интенсивности от параметров усилителя. Для этого нужно использовать связь выходной интенсивности с интенсивностью волны на левом зеркале:

$$J_{out} = J(L)(1 - R) = \frac{J_0(L)(1 - R)}{\sqrt{R}}$$

$$\frac{1 - \sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}} = \sqrt{\frac{(\mu_0 - \beta)(1 - R) - 2J_{out}\beta\sqrt{R}}{(\mu_0 - \beta)(1 - R) + 2J_{out}\beta\sqrt{R}}} \operatorname{th} \left[\frac{\sqrt{(\mu_0 - R)^2(1 - R)^2 - 4J_{out}^2\beta^2 R}}{2\mu_0(1 - R)} \right]$$

Если $R = 1$, то

$$\operatorname{th} \left[\frac{\beta}{\mu_0} \frac{I_1(L)}{I_0} \beta L \right] = 0$$

$$I_1(L) = \frac{I_0 \mu_0 L \pi n}{(\beta L)^2}$$

При выполнении условия:

$$(\mu_0 - \beta)(1 - R) - 2\beta J_{out} \sqrt{R} > 0$$

Есть одно решение трансцендентного уравнения, поскольку величина:

$$\sqrt{(\mu_0 - \beta)(1 - R) - 2\beta J_{out} \sqrt{R}}$$

- является действительным числом

При:

$$(\mu_0 - \beta)(1 - R) - 2\beta J_{out} \sqrt{R} < 0$$

Трансцендентное уравнение имеет несколько решений.

Лекция 10. Стационарная генерация (Дополнение)

В данной лекции рассмотрена стационарная генерация, как в предыдущем разделе. В конспекте этой лекции будет отображено только то, что не было обсуждено в предыдущей лекции.

10.1 Оптимальная прозрачность выходного зеркала

Оптимальная прозрачность выходного зеркала. Определяет максимум выходной интенсивности $(I_{\text{ВЫХ}})_{\text{МАХ}}$. На рисунке 10.1 изображен график зависимости выходной интенсивности от коэффициента отражения. Как видно, график не является монотонной функцией, а значит где-то присутствует оптимальное значение R_{opt} .

$$I_{\text{ВЫХ}} = I_1(L)(1 - R)$$

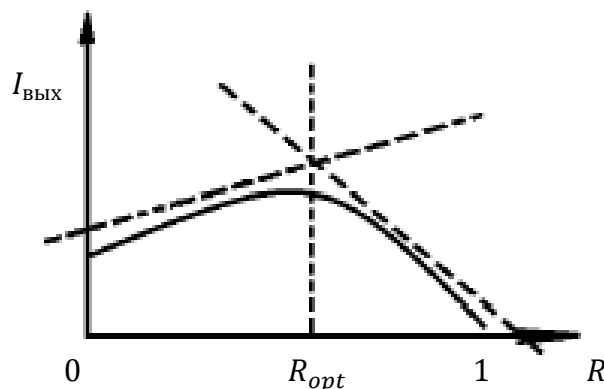


Рисунок 10.1 – Зависимость выходной интенсивности от коэффициента отражения

Предположим, интенсивность любых волн внутри резонатора много меньше интенсивности насыщения. Пользуясь интегралом движения:

$$\frac{dJ(z)}{dz} = \left(\frac{\mu_0 \mathcal{L}}{J_0^2 + J + J^2} - \beta \right) J \quad (25)$$

Также можно записать только для одной из волн:

$$\frac{dJ_1(z)}{dz} = \frac{I_1^2(0)}{I_0^2} \frac{1}{J_1} = \frac{J_0^2}{J_1}$$

$$J_{1,2}(z) = \frac{I_{1,2}(z)}{I_0}$$

Решение уравнения (25) имеет вид:

$$\ln J \Big|_{J_1}^{J_2} - \frac{2(1+a)}{\sqrt{|a^2 - 4J_0^2|}} \operatorname{arth} \frac{2J - a}{\sqrt{|a^2 - 4J_0^2|}} \Big|_{J_1}^{J_2} = -\beta L$$

J_1 – интенсивность волны на левом зеркале ($z = 0$), J_2 – интенсивность волны на правом зеркале ($z = L$). Вы всегда может выразить $I_{\text{ВЫХ}}$ через $I_{\text{ВХ}}$:

$$I_{\text{ВЫХ}} = I_{\text{ВХ}}(I_0, R, \mu_0, \beta)$$

Можно продифференцировать уравнение (25) по R , учитывая $\frac{\partial I_{\text{ВЫХ}}}{\partial R} = 0$, тогда:

$$I_{\text{вых}}|_{max} = \mu_0 L \left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \right) I_0$$
$$\beta \ll \mu_0$$

Полученное решение является приближенным, так как использовано предположение, что коэффициент поглощения много меньше коэффициента усиления. Оптимальное значение коэффициента прозрачности:

$$T_{opt} = 1 - R_{opt} = 2\mu_0 L \left(\sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} - \frac{\beta}{\mu_0} \right)$$

Лекция 11. Усиление

11.1 Нестационарное усиление и генерация

Основные уравнения были получены ранее, а именно системы укороченных уравнений Максвелла-Блоха:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + c \frac{\partial A}{\partial z} = \int j(\omega) f(\omega) d\omega \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \left(\frac{1}{T_2} + i\Delta \right) q = \frac{2\pi\omega |d|^2}{h} A p \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p - p_e}{T_1} = -\frac{\omega}{2\pi\hbar c^2} (jA^* + j^*A) \end{cases} \quad (26)$$

Мы заменили j на q , но после нормировки мы вернемся к привычным обозначениям. Удобно нормировать плотность энергии следующим образом:

$$w_1 = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{1}{2\pi} x^2 |A|^2 = \hbar\omega |B|^2$$

B – безразмерная амплитуда

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} B \\ |B|^2 &= \frac{N_{\text{фот}}}{V} = \frac{N}{V} |d|^2 \\ A &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega} \frac{N}{V}} a \end{aligned}$$

a – безразмерная амплитуда

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega} \frac{N}{V}} p \\ \rho &= \frac{N}{V} R \\ -1 &\leq R \leq 1 \end{aligned}$$

ρ – безразмерная разность населенностей, p – безразмерный ток. Также введем безразмерные координаты:

$$z' = \frac{z}{L}, t' = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{L}{c} \text{ – время пролета фотона через реонатор}$$

Система уравнений (26) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} = \int p(\omega) f(\omega) d\omega \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha_2 i\Omega) p = \beta a R \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \alpha_1 (R - R_e) = -(pa^* + p^*a) \end{cases}$$

Полученная система зависит от следующих параметров:

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{T_1} - \text{скорость продольной релаксации}$$

$$\alpha_2 = \frac{\tau}{T_2} - \text{скорость поперечной релаксации}$$

$$\Omega = \tau \Delta$$

$$w' = w\tau$$

$$\beta = \frac{2\pi w |d|^2 N}{\hbar V} \tau^2$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{4w^3 |d|^2}{3\hbar c^2}$$

$$\beta = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{T_1} \frac{N}{V} L\tau$$

$$\frac{\beta}{\alpha_2} = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{T_2}{T_1} L = \mu_0 L$$

μ_0 - коэффициент усиления (усиление за проход), L - длина генератора.
Плотность поля:

$$w_1 = \frac{1}{2\pi} |E_0|^2 = \hbar w \frac{N}{V}$$

$$E_0 = \sqrt{2\pi \hbar w \frac{N}{V}}$$

$$\beta = \frac{|E_0|^2 |d|^2}{\hbar^2} \tau^2 = |\Omega_{Rabi} \tau|^2$$

Под Ω_{Rabi} в данном случае мы понимаем предельное значение плотности поля, которое возникает в случае, когда все атомы мгновенно перешли из верхнего возбужденного состояния в нижнее. При этом $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

11.2 Одномодовое приближение

Перейдем к анализу задач о генерации. В этом случае в систему уравнений (26) мы должны ввести встречную волну и учесть ее взаимодействие со средой. Поле в резонаторе мы раскладываем по модам. Поле принимает вид:

$$A(r, t) = \sum_n a_n(t) u_n(r)$$

$$\frac{da_n}{dt} + \frac{w_n}{Q_n a_n} = p_n$$

Q_n – добротность резонатора. В одномодовом приближении мы считаем, что межмодовое расстояние много больше, чем размер резонатора, считаем, что поперечной структуры поля нет. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} + \gamma a = p \\ \frac{dp}{dt} + \alpha_2 p = \beta R a \\ \frac{dR}{dt} + \alpha_1 (R - R_e) = -2pa \end{cases} \quad (27)$$

Уравнения системы (27) не учитывают наличия накачки; отстройка = 0. $R_e = -1$ в оптическом диапазоне. Будем считать, что уровень накачки R_{pump} постоянен. Уравнение для разности населенностей можем записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} + \alpha_1 (R - R_{pump}) &= -2pa \\ R_{pump} &= R_e + \frac{1}{\alpha_1} (S_2 - S_1) \end{aligned}$$

S_2 и S_1 – эффективные скорости накачки.

11.3 Классификация динамических режимов одномодовых лазеров

В зависимости от соотношения констант релаксаций $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$, принято выделять 4 режима генерации. γ – скорость релаксации поля.

1. $\gamma \ll \alpha_1 < \alpha_2$ (твердотельный)

$$p = \frac{\beta}{\alpha_2} R a$$

Если $\gamma = 0$, то резонатор идеальный

$$\begin{aligned} T_1 &= 10^{-8} - 10^{-9} \text{ с}; \quad \alpha_1 = 10^8 \text{ с}^{-1} \\ T_2 &= 10^{-12} - 10^{-13} \text{ с}; \quad \alpha_2 = 10^{12} \text{ с}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{1 - |r|^2} &= \frac{100 \text{ см}}{1 - 0.97} = 3 * 10^3 \text{ см} \\ \gamma &= \frac{1 - |r|^2}{L} \text{ с} = 10^7 \text{ с}^{-1} \end{aligned}$$

2. $\alpha_2 \gg \gamma \gg \alpha_1$ (полупроводник)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 10^8 \text{ с}^{-1} \\ \alpha_2 &= 10^{12} \text{ с}^{-1} \\ \gamma &= 10^9 - 10^{10} \text{ с}^{-1} \\ L &= 0,1 - 1 \text{ см} \end{aligned}$$

Лазеры, работающие в таком режиме, используют для задач спектроскопии. Можно использовать адиабатическое приближение

3. $\gamma \approx \alpha_2 \geq \alpha_1$ (полупроводник)

Все константы очень близки друг к другу. Этот класс лазеров сейчас почти не используется. Это лазеры, работающие в далеком ИК-диапазоне (FIR). Работают на вращательных уровнях молекул. Не можем воспользоваться адиабатическим приближением.

4. $\gamma \gg \alpha_2, \alpha_1$

Суперлюминесцентные (импульсные) лазеры.

$$|r|^2 = 0$$

$$\gamma \approx 3 * 10^{10} \text{ Гц}$$

11.4 Условие самовозбуждения генерации

Рассмотрим самый начальный этап генерации. Пока генерация не началась, полагаем, что число квантов меньше числа атомов, разность населенностей претерпевает небольшое отклонение:

$$R = R_0 + \delta R, \quad |\delta R| \ll R_0$$

Система уравнений становится линейной:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} + \gamma a = p \\ \frac{dp}{dt} + \alpha_2 p = \beta a R_0 \end{cases}$$

Ищем решение в виде:

$$a_p \sim e^{\lambda t}$$

$$a = a_0 e^{\lambda t}, \quad p = p_0 e^{\lambda t}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \gamma & -1 \\ -\beta R_0 & \lambda + \alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ответ:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma + \alpha_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\gamma + \alpha_2)^2}{4} - \gamma \alpha_2 \beta R_0}$$

Чтобы возникла генерация, нужно, чтобы $\lambda > 0$ или $\beta R_0 > \gamma \alpha_2$

$$\frac{\beta R_0}{\alpha_2} > \gamma$$

$$\mu_0 > \mu_{\text{погл}} = \frac{1 - |r|^2}{L} + \beta_{\text{погл}}$$

11.5 Стационарное решение

Если есть накачка, то рано или поздно начнется генерация, все производные станут равны нулю.

$$\begin{cases} \gamma a_0 = R_0 \\ \alpha_2 p_0 = \beta R_0 a_0 \\ \alpha_1 (R - 0 - R_p) = -2p_0 a_0 \end{cases}$$

Стационарная генерация – это, как правило, одномодовая генерация. Условия на накачку:

1) $\beta R_0 = \gamma \alpha_2$

Коэффициент усиления равен коэффициенту поглощения

2) $R_0 = R_p - \frac{2\gamma}{\alpha_1} a_0^2$

Усиление больше накачки. Все переменные достигают стационарных значений

3) $a_0^2 = \frac{\alpha_1}{2\gamma} R_p - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2\beta} = \frac{1}{2\gamma} (S_2 - S_1) - \frac{\alpha_1}{2\gamma} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2\beta} > 0$

$$S_2 - S_1 > \alpha_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} \gamma = \alpha_1 + \frac{\alpha_1 \gamma}{\mu_0 L}$$

$$S_2 - S_1 > \alpha_1 + \alpha_1 \frac{\mu_{\text{погл}}}{\mu_{\text{усил}}}$$

Лекция 12. Динамика поля в резонаторе

12.1 Устойчивость стационарной генерации

На прошлой лекции мы нашли стационарное решение, теперь нормируем амплитуду:

$$x = \frac{a}{a_0}, \quad y = \frac{p}{p_0}, \quad z = \frac{R}{R_0}$$

Система уравнений для нормированных амплитуд Лоренца-Хаккена:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma x + \gamma y \\ \dot{y} = -\alpha_2 y + \alpha_2 x z \\ \dot{z} = \frac{\alpha_1 R_p}{R_0} - \alpha_1 z - \alpha_1 \left(\frac{R_p}{R_0} - 1 \right) x y \end{cases} \quad (28)$$

$$\frac{p_0}{a_0} = \gamma, \quad \frac{\beta R_0}{\gamma} = \alpha_2, \quad P_0 a_0 = -\frac{\alpha_1}{2} (R_0 - R_p)$$

Нас интересуют флуктуации амплитуд от их равновесных значений. Введем малые отклонения:

$$x = 1 + \xi, \quad y = 1 + \eta, \quad z = 1 + \chi$$

$$|\xi, \eta, \chi| \ll 1$$

Подставим новые обозначения в систему (28):

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\gamma \xi + \gamma \eta \\ \dot{\eta} = -\alpha_2 \eta + \alpha_2 \xi + \alpha_2 \chi \\ \dot{\chi} = -\alpha_1 \chi - \alpha_1 \left(\frac{R_p}{R_0} - 1 \right) (\xi - \eta) \end{cases}$$

Условие стационарности:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \gamma & -\gamma & 0 \\ -\alpha_2 & \lambda + \alpha_2 & -\alpha_2 \\ \Gamma & \Gamma & \lambda + \alpha_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Где } \Gamma = \alpha_1 \left(\frac{R_p}{R_0} - 1 \right)$$

$$\lambda^3 + (\gamma + \alpha_1 + \alpha_2)\lambda^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\Gamma + \alpha_2\gamma)\lambda + 2\alpha_2\Gamma\gamma = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} < 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) = -\frac{b}{a}$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2\alpha_1\alpha_2\gamma \left(\frac{R_p}{R_0} - 1 \right) = -\frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\Gamma + \alpha_1\gamma}{2\alpha_2\Gamma\gamma} = -\frac{c}{d}$$

Если $R_p|_{opt} \geq R_p > R_{min}$, то выполняется условие самовозбуждения

12.2 Динамика поля в резонаторе

На прошлой лекции мы классифицировали динамические режимы генерации. Рассмотрим, как будет эволюционировать поле при каждом случае.

1. $\gamma \ll \alpha_1 < \alpha_2$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} + \gamma a = p \\ p = \frac{\beta}{\alpha_2} R_a \\ R = R_p - \frac{2}{\alpha_1} R_a \end{cases}$$

$$\frac{dp}{dt} \sim \frac{p}{\gamma} \ll \frac{p}{\alpha_2}, \quad R_p \frac{\beta}{\alpha_2} = \gamma \left(1 + \frac{2\beta}{\alpha_1 \alpha_2} a_0^2 \right)$$

$$a_0^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2\beta \gamma} \left(R_p \frac{\beta}{\alpha_2} - \gamma \right)$$

$$R_0 \frac{\beta}{\alpha_2} > \gamma, \quad \mu_{\text{ус.}} > \mu_{\text{погл.}}$$

$$R = R_p - \frac{2}{\alpha_2} \frac{\beta}{\alpha_2} R_a^2$$

$$R = \frac{R_p}{1 + \frac{2\beta}{\alpha_1 \alpha_2} a_1^2}$$

Получаем ответ:

$$\frac{da}{dt} = 2 \left(\frac{R_p \frac{\beta}{\alpha_2}}{1 + \frac{2\beta}{\alpha_1 \alpha_2} a^2} - \gamma \right) a^2 = 0$$

Как мы уже рассмотрели выше в разделе 9.3, произойдет насыщение усиления до уровня a_0^2 . Найдем a_0^2 :

$$R_p \frac{\beta}{\alpha_2} = \gamma \left(1 + \frac{2\beta}{\alpha_1 \alpha_2} a_0^2 \right)$$

$$a_0^2 = \frac{R_p \frac{\beta}{\alpha_2} - \gamma}{\frac{2\beta \gamma}{\alpha_1 \alpha_2}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2\beta \gamma} \left(R_p \frac{\beta}{\alpha_2} - \gamma \right)$$

Величина $R_p \frac{\beta}{\alpha}$ определяет коэффициент усиления за проход в данной среде, γ – коэффициент поглощения за проход.

2. $\alpha_2 \gg \gamma \gg \alpha_1$

Можем использовать адиабатическое приближение:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} + \gamma a = p \\ \frac{dR}{dt} + \alpha_1(R - R_p) = -2pa \\ p = \frac{\beta}{\alpha_2} R a \end{cases}$$

Упростим задачу и рассмотрим случай $\gamma = 0, \alpha_1 = 0$ (времена релаксации > 0):

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = p \\ \frac{dR}{dt} = -2pa \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = -2 \frac{\beta}{\alpha_2} R a^2 \\ \frac{da}{dt} = \frac{\beta}{\alpha_2} R a \end{cases}$$

$$\frac{dR}{dt} = -2a \frac{da}{dt} = -\frac{da^2}{dt}$$

$$R(t) + a^2(t) = R_0^2$$

$$\frac{dR}{dt} = -2 \frac{\beta}{\alpha_2} R(R - R_0)$$

$$\frac{dR}{R(R - R_0)} = \left(\frac{1}{R - R_0} - \frac{1}{R} \right) \frac{dR}{R_0} = -2 \frac{\beta}{\alpha_2} R_0 dt$$

Решение имеет вид:

$$R(t) = \frac{R_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha_2}(t-t_0)}}{e^{\frac{\beta}{\alpha_2}(t-t_0)} + e^{-\frac{\beta}{\alpha_2}(t-t_0)}}$$

- аperiодический режим

$$t_0 = \frac{\alpha_2}{2\beta} \ln N$$

N - число резонансных атомов

$$a^2(t = 0) = \frac{R_0}{2} \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha_2}(t-t_0)}}{e^{\frac{\beta}{\alpha_2}(t-t_0)} + e^{-\frac{\beta}{\alpha_2}(t-t_0)}} = \frac{A_0}{2N}$$

t_{eff} - время, за которое амплитуда поля выходит на стационарное значение.

В общем случае, если мы учтем конечность времен релаксации:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} + \gamma a = R \frac{\beta}{\alpha_2} a \\ \frac{dR}{dt} + \alpha_1(R - R_p) = -2 \frac{\beta}{\alpha_2} R a^2 \end{cases}$$

$$\text{Если } \frac{da}{dt} \rightarrow R_0 = \frac{\alpha_2 \gamma}{\beta}$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \rightarrow \alpha_1(R_0 - R_p) = -\frac{2\beta R_0 a^2}{\alpha_2}$$

Анализируем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = 2n \left(R \frac{\beta}{\alpha_2} - \gamma \right) \\ \frac{dR}{dt} = \alpha_1 \left(R_p - R - 2 \frac{\beta}{\alpha_2} R n \right) \end{cases}$$

Будем пользоваться фазовым портретом. Определим изоклины:

$$\frac{dn}{dR} = \frac{2n \left(R \frac{\beta}{\alpha_2} - \gamma \right)}{\alpha_1 \left(R_p - R - 2 \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2} R n \right)} = 2 \frac{\beta}{\alpha_2} \frac{(R - R_0)n}{\alpha_1 \left(R_p - R \left(1 + 2 \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2} n \right) \right)}$$

Проанализируем фазовый портрет, изображенный на рисунке 12.2.

$$(1) R_1 = R_0 = \frac{\gamma \alpha_2}{\beta}, \frac{dn}{dR} = 0$$

$$(2) n = 0, \frac{dn}{dR} = 0$$

$$(3) R_2 = \frac{R_p}{1 + 2 \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2} R n}, \frac{dn}{dR} \rightarrow \infty$$

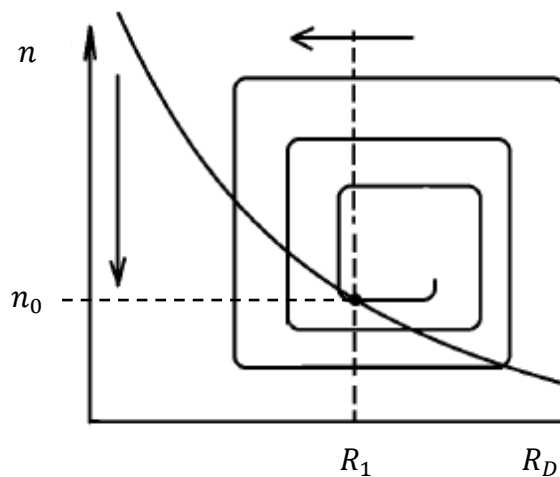


Рисунок 12.2 – Фазовый портрет

4. $\gamma \gg \alpha_1, \alpha_2$

Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \gamma \neq 0$

Накачку считаем бесконечной. Уравнения для среды совпадают с уравнениями для одиночного атома:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} + \gamma a = p \\ \frac{dp}{dt} = \beta R a \\ \frac{dR}{dt} = -2pa \end{cases}$$

$$p^2(t) + \frac{\beta}{2} R^2(t) = \frac{\beta}{2} R_0^2 + p^2(0)$$

Интеграл движения:

$$p(t) = \sqrt{\frac{\beta}{2} \sqrt{R_0^2 - R^2}}$$

Если $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, но $\gamma \gg \alpha_1, \alpha_2$ - это режим суперлюминесценции

$$\frac{dR}{dt} = -2\gamma a^2 = -\frac{2}{\gamma} p^2 = -\frac{\beta}{\gamma} (R_0^2 - R^2)$$

$$\frac{dR}{R_0^2 - R^2} = -\frac{\beta}{\gamma} dt$$

$$R = R_0 \operatorname{th} \left[\frac{R_0 \beta}{\gamma} (t - t_0) \right]$$

$$a(t) = \frac{R_0 \sqrt{\beta}}{2/\gamma} \frac{1}{\operatorname{ch} \left[\frac{R_0 \beta}{\gamma} (t - t_0) \right]}$$

t_0 – начальный момент времени. Интенсивность сверхизлучения:

$$I(t) = \hbar \omega \frac{N}{V} |a|^2 = \frac{N \hbar \omega}{V 4\tau_p} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t - t_0}{\tau_p} \right)$$

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{2\pi \omega |d|^2 N \tau}{h V \gamma}$$

$\tau = \frac{L}{c}$ – нормировочная константа

$$I_0 \sim \left(\frac{N}{V} \right)^2$$

Лекция 13. Нестационарная генерация

13.1 Нестационарное усиление

Мы подошли к самой сложной теме этого курса – нестационарной генерации. Сложность состоит в том, что вместо дифференциальных уравнений необходимо решать уравнения с частными производными. Привычная система переписывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} = p \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_2 p = \beta a R \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \alpha_1 (R - R_0) = -2ap \end{cases}$$

Все переменные уже обезрамерены. Все обозначения сохранили свой смысл. Реальные аналитические решения не получены даже в простых случаях из-за наличия релаксации. Для начала нам необходимы начальные условия: $a(z, 0) = 0$, $p(z, 0) = 0$, $R(z, 0) = 1$. Граничные условия: $a_0(0, t) = A_0(t)$, $A_0(t)$ – профиль импульса.

Для упрощения, будем считать, что на нашу систему падает слабый импульс:

$$R(t) = R_0 + \delta R \\ |\delta R| \ll 1$$

Таким образом, можем не учитывать динамику, система становится линейной. Преобразование Карсона:

$$a(z, S) = \int_0^{\infty} a(z, t) e^{-St} dt$$

При подстановке в систему получаем уравнение:

$$\frac{da}{dz} + \left(u - \frac{\beta}{u + \alpha} \right) a = a(z, 0) + \frac{\rho(z, 0)}{u + \alpha}$$

Решение:

$$a(z, S) = A_0(S) e^{-\lambda z} + \int_0^z \left(a(z', 0) + \frac{\rho(z', 0)}{S + \alpha} \right) e^{-\lambda(z-z')} dz' \\ \lambda = S - \frac{\beta}{S + \alpha}$$

У нас имеется особая точка $S = -\alpha$. Полное решение через функцию Грина:

$$a(z, t) = \int_0^{t-z} a(0, t') G_1(t - t', z) dt' + a(0, t - z) \\ G_1(t, z) = \sqrt{\frac{\beta z}{t - t' - z}} I_1 \left(2\sqrt{\beta z(t - t' - z)} \right) e^{-\alpha(t-t'-z)}$$

Теперь мы хотим качественно понять, как зависит усиление от различных параметров. Пусть:

$$a(0, t) = A_0 e^{\delta t}$$

Тогда решение имеет вид:

$$a(z, t) = A_0 e^{\left(\delta(t-z) + \frac{\beta z}{\alpha + \delta}\right)} - A_0 e^{\delta(t-z)} + A_0 e^{-\alpha(t-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\alpha + \delta) \sqrt{\frac{t-z}{\beta z}} \right]^n I_n(2\sqrt{\beta z(t-z)}) \theta(t-z)$$

I_n - функция Бесселя мнимого аргумента, $\alpha = \frac{v_0}{T_2}$ - нормированная скорость поперечной релаксации. Коэффициент определяется следующим выражением:

$$\mu = \mu_0 \frac{\gamma}{\alpha + \delta}$$

δ - спектральная ширина импульса.

$$a = [a_0 e^{\left(\delta(t-z) + \frac{\beta z}{\alpha + \delta}\right)} + a_0 e^{-\alpha(t-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2 + \delta) \sqrt{\frac{t-z}{\beta z}} \right]^n I_n(2\sqrt{\beta z(t-z)})] \theta(t-z)$$

Пользуемся адиабатическим приближением для поляризации:

$$p(z, t) = \frac{\beta}{\alpha} R_0 a(z, t)$$

$$p(z, t) = \frac{\beta}{\alpha} R_0 \int_0^t a(z, t') e^{-\alpha(t-t')} dt'$$

Поляризация определяется амплитудой в предыдущие моменты времени ($t - T_2$; t). Второе слагаемое в () определено когерентными эффектами, что поляризация «помнит», поляризация когерентная растет во времени гораздо быстрее, чем в некогерентном случае:

$$|p(z, t)|^2 = \left| \frac{\beta}{\alpha} R_0 \int_0^t a(z, t') e^{-\alpha(t-t')} dt' \right|^2$$

Асимптотика функции Инфельда:

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

При больших значениях аргумента функции имеют одинаковые асимптотический вид. Второе слагаемое принимает вид:

$$a(z, t) = a_0 e^{\delta(t-z)} e^{\frac{\beta z}{\alpha + \delta}} + a_1(z, t) e^{z\sqrt{\beta z(t-z)} - \alpha(t-z)}$$

Усиление происходит тогда, когда доминирует первое слагаемое.

$$a_1(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-z)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\alpha + \delta) \sqrt{\frac{t-z}{\beta z}} \right]^n$$

Лекция 14. Солитоны

14.1 Солитонные решения

Мы рассмотрели различные аспекты распространения излучения при различных приближениях. Это связано с тем, что изначальная система уравнений не имеет простых аналитических решений. Однако в случае солитонных решений аналитическое решение есть. Полная система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} = p \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha p = \beta a R \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \alpha_1 (R - R_0) = -2ap \end{cases}$$

Данная система записана без учета неоднородного уширения. Рассмотрим случай, когда $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z} = p \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \beta a R \\ \frac{\partial R}{\partial t} = -4ap \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial t} = \beta a R p = -\frac{\beta}{8} \frac{\partial R^2}{\partial t}$$

$$p^2(z, t) + \frac{\beta}{4} R^2(z, t) = \frac{\beta}{4} R^2(z, t) \quad (29)$$

Мы видим, что в каждой точке пространства выполняется закон сохранения вектора Блоха. Этот закон совпадает с законом сохранения одиночного атома.

$$R(z, t) = R_0(z) \cos \theta(z, t)$$

Подставляем в уравнение (29) и получаем:

$$p(z, t) = \frac{\sqrt{\beta}}{2} R_0 z \sin \theta(z, t)$$

$$a(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

И уравнения для амплитуды поля получаем:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial z} = \beta R_0 \sin \theta$$

Это уравнение всегда имеет решение:

$$\theta(z, t) = 4 \operatorname{arccatg} \left(e^{\frac{t-z}{\tau_0}} \right)$$

$$v = \frac{1}{1 + \beta \tau_0^2}$$

θ — угол Блоха, v — безразмерная скорость распространения импульса, τ_0 — длительность импульса. Выпишем уравнение для амплитуды поля:

$$a(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}\tau_0} \frac{1}{ch\left[\frac{1}{\tau_0}\left(t - \frac{z}{v}\right)\right]}$$

при $\tau \rightarrow 0$ скорость стремится к скорости света в среде.

1. $R_0 = -1$

14.1. При данном значении R_0 график зависимости скорости выглядит, как на рисунке

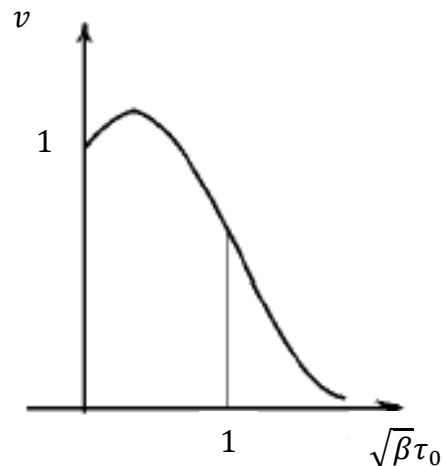


Рисунок 14.1 – Зависимость скорости распространения импульса от длительности импульса

В данном случае среда не возбуждена, а солитонные решения называются солитонами самоиндуцированной прозрачности. Среда поглощает все атомы в начальный момент времени в основном состоянии. Импульс взаимодействует со средой, но не отнимает у нее энергию. Передняя часть импульса переводит атомы в возбужденное состояние, а «задняя» часть импульса переводит атомы обратно.

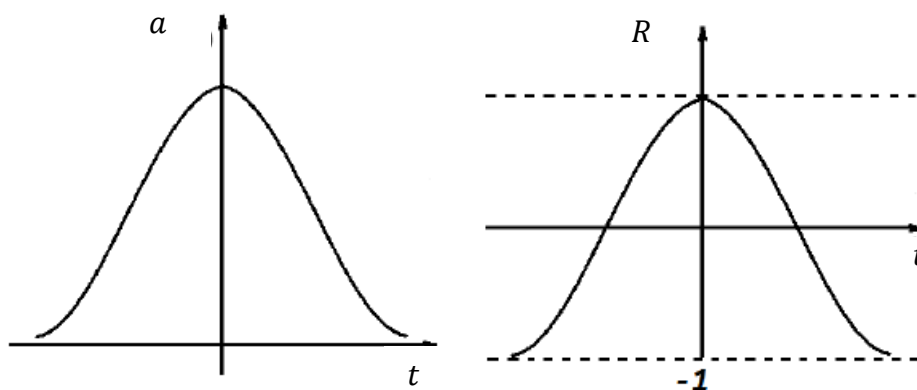


Рисунок 14.2 - Зависимости амплитуды и коэффициента отражения от времени

$$2. R_0 = +1$$

Все атомы в возбужденном состоянии в начальный момент времени.

Единственное изменение состоит в следующем:

$$v = \frac{1}{1 - \beta\tau_0^2}$$

Из графика зависимости скорости от длительности не понятен физический смысл. Мы должны рассмотреть ограниченную среду. Если в ограниченной среде эти решения не имеют смысла, то их следует вообще выкинуть.

14.2 Солитоны в средах конечной длины

Рассмотрим систему уравнений Максвелла-Блоха, когда среда имеет конечную длину:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial z} = \beta R_0(z) \sin \theta(z, t)$$

В случае полубесконечной среды решение этого уравнения — плоский слой, поглощающий либо усиливающий:

$$R_0(z) = \frac{R_0[\theta(z) - \theta(L - z)]}{2}$$

$$\theta(z, t) = 4 \operatorname{arcatg} e^{\Phi(z, t)}$$

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v_0} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{4e^{\Phi}}{1 + e^{2\Phi}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{4e^{\Phi}(1 - e^{2\Phi})}{(1 + e^{2\Phi})^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{4e^{\Phi}}{(1 + e^{2\Phi})^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)$$

$$\sin \theta = \frac{4e^{\Phi}(1 - e^{2\Phi})}{(1 + e^{2\Phi})^2}$$

Решение существует, если выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \beta R_0(z) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = c(z)$$

— произвольная функция координат, не зависящая от времени

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = c(z) - \frac{\beta R_0(z)}{c(z)}$$

$$\Phi(z, t) = \frac{t - z}{\tau_0} + \beta \tau_0 \int_{-\infty}^z R_0(z') dz'$$

Теперь мы знаем решение в аналитическом виде. Введем переобозначение для компактности:

$$\Phi(z, t) = \frac{t - \varphi(z)}{\tau_0}$$

$$\varphi(z) = z - \beta\tau_0^2 \int_{-\infty}^z R_0(z') dz'$$

Тогда:

$$R_0(z) = (\theta(z) - \theta(L - z))z$$

1. $R_0 = -1$ (невозб. среда), тогда:

$$\varphi(z) = (1 + \tau_0^2\beta)z$$

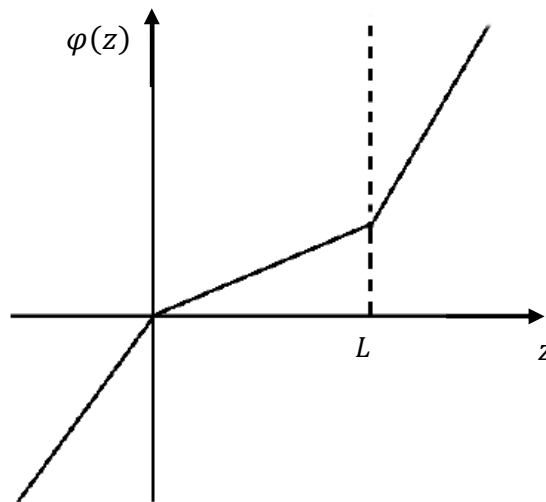


Рисунок 14.3 – Зависимость $\varphi(z)$ от координаты при $R_0 = -1$

2. $R_0 = +1$

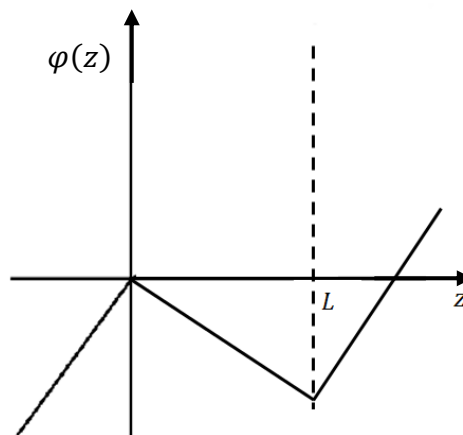


Рисунок 14.4 – Зависимость $\varphi(z)$ от координаты при $R_0 = +1$

$$a(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\beta\tau_0}} \frac{1}{ch\left[\frac{t - \varphi(z)}{\tau_0}\right]}$$

В точке z_0 достигается максимум импульса при $t = \varphi(z_0)$

$$t - \varphi(z) = \text{const}$$

$$\frac{dt}{dz} - d\varphi dz = 0$$

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$v = \frac{1}{1 + \beta\tau_0^2}$$



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ