ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ II

ШИШКИН
АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ИЛЬИНА ПАВЛА КОНСТАНТИНОВИЧА

Содержание

Семинар 1

Функция многих переменных

Задача 1.1. Найти область определения функции $u = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

$$D_u = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0, \\ 4-x^2-y^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 < 0, \\ 4-x^2-y^2 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: Замкнутое множество D на Рис. 1.

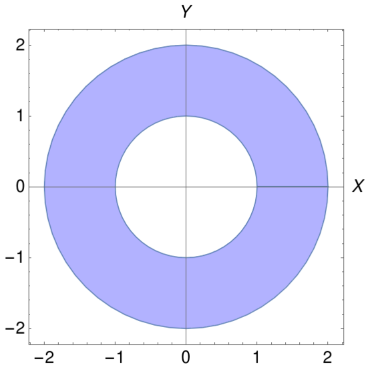

Рис. 1. К задаче 1.1.

Определение. Замкнутое множество — множество, которому принадлежат все граничные точки.

Определение. Открытое множество — множество, которому не принадлежит ни одна граничная точка.

Задача 1.2. Найти область определения функции $u = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

$$D_u = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-x \geq 0, \\ 2x-x^2-y^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-x < 0, \\ 2x-x^2-y^2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow D_u = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-0.5)^2+y^2-0.25 \geq 0, \\ -(x-1)^2-y^2+1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-0.5)^2+y^2-0.25 < 0, \\ -(x-1)^2-y^2+1 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: Множество D на Рис. 2. (не замкнутое и не открытое).

Задача 1.3. Найти область определения функции $u = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$.

$$D_u = \begin{cases} -1 \leq \dfrac{x}{y^2} \leq 1, \\ -1 \leq 1-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow D_u = \begin{cases} -y^2 \leq x \leq y^2, \; y \neq 0, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ответ: Множество D на Рис. 3.

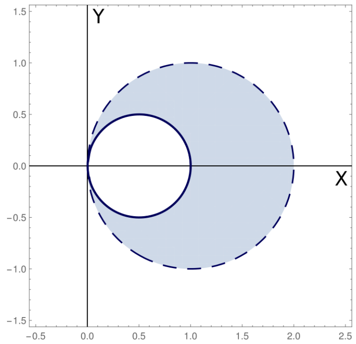

Рис. 2. К задаче 1.2.

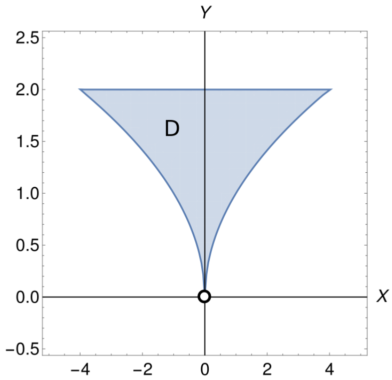

Рис. 3. К задаче 1.3.

Линии уровня

Определение. Линия уровня — множество точек из области определения функции $u = f(x, y)$, где функция равна константе $u = const$.

Задача 1.4. Найти линии уровня функции $u = (x^2 + y^2)^{-1}$.

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = x^2 + y^2$$

Задача 1.5. Найти линии уровня функции $z = |x| + |y| - |x + y|$.

Необходимо рассмотреть шесть различных случаев:
1) $x > 0,\ y > 0:\ z = 0$
2) $x < 0,\ y < 0:\ z = 0$
3.1) $x > 0,\ y < 0,\ |x| > |y|:\ z = x - y - (x + y) = -2y$

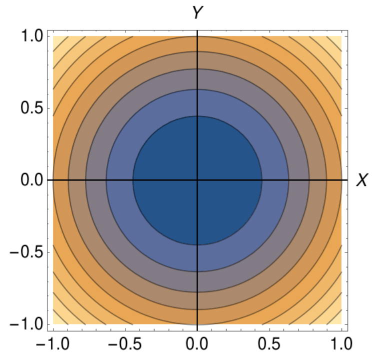

Рис. 4. К задаче 1.4.

$3.2)\ x > 0,\ y < 0,\ |x| < |y|:\ z = x - y + (x + y) = 2x$
$4.1)\ x < 0,\ y > 0,\ |x| > |y|:\ z = -x + y + (x + y) = 2y$
$4.2)\ x < 0,\ y > 0,\ |x| < |y|:\ z = -x + y - (x + y) = -2x$

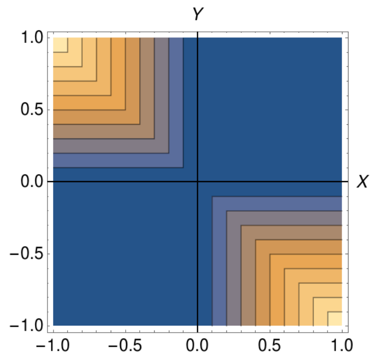

Рис. 5. К задаче 1.5.

Определение. Число b называется пределом функции двух переменных $u(x, y)$ в точке A, если для $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$: для $\forall M \in D_u\ \ 0 < \rho(M, A) < \delta$ будет выполняться $|u(M) - b| < \varepsilon$.

Предел по совокупности аргументов. Повторный предел

Повторный предел:

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} u(x, y) \right) \text{ или } \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} u(x, y) \right)$$

Задача 1.6. Дана функция $u = \frac{x-y}{x+y}$. Убедиться, что есть оба повторных предела в точке $O(0; 0)$. А предела по совокупности аргументов в точке O не существует.

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = \lim_{y \to 0} (-1) = -1$$

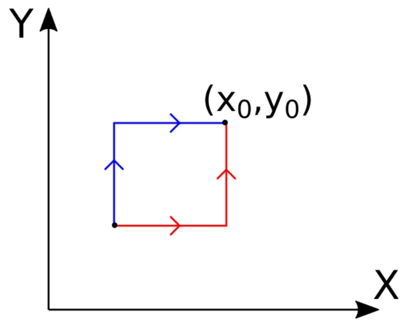

Рис. 6. Повторный предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}(1)=1$$

Будем искать предел по совокупности аргументов по траектории $y=kx$. Тогда

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x(1-k)}{x(1+k)}=\frac{1-k}{1+k}$$

Т. е. предел зависит от коэффициента наклона k, следовательно, предел по совокупности аргументов не существует.

Задача 1.7. Дана функция $u=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$. Убедиться, что предел по совокупности аргументов в точке $O(0;0)$ есть. А повторные пределы не существуют.

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=[\text{бесконечно малая }\times\text{ ограниченная}]=0$$

Задача 1.8. Найти повторные пределы функции $u=\frac{x^y}{1+x^y}$ при $x\to+\infty,\ \ y\to+0$.

$$1)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2)\quad \lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right)=\lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^y}}\right)=\lim_{y\to+0}1=1$$

Задача 1.9. Найти предел по совокупности аргументов

$$\lim_{(x;y)\to(+\infty;+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$

В данном случае необходимо применить теорему «о двух милиционерах»:

$$0<\frac{xy}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}$$

$$0^{x^2}<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{(x;y)\to(+\infty;+\infty)} 0^{x^2} = 0\\ \lim_{(x;y)\to(+\infty;+\infty)} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{(x;y)\to(+\infty;+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0.$$

Семинар 2

Частная производная

Определение. Пусть функция $u(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$. Частной производной функции $u(x, y)$ по аргументу x называется предел (если он существует):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Задача 2.1. Существует ли предел в точке $O(0; 0)$ функции

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ \nexists, & xy = 0 \end{cases}$$

Ответ: Существует.

Задача 2.2. Существует ли предел в точке $O(0; 0)$ функции

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

Ответ: Не существует.
Полное приращение: $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$.

Определение. Функция двух переменных называется дифференцируемой в заданной точке, если можно записать полное приращение в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

(A_1, A_2 — числа, не зависящие от $\Delta x, \Delta y$; α_1, α_2 — бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ и $\alpha_{1,2}(0; 0) = 0$)

или

$$\Delta u = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \alpha(\rho)$$

($\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\alpha(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \to 0$, $\alpha(0) = 0$)

Задача 2.3. Найти предел в полярных координатах $\lim_{\rho \to +0} \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

$$\lim_{\rho \to +0} \exp\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{\rho \to +0} \exp\left(\frac{\rho \cos\phi}{\rho^2 \cos^2\phi + \rho^2 \sin^2\phi}\right) = \lim_{\rho \to +0} \exp\left(\frac{\cos\phi}{\rho}\right)$$

Видно, что предел зависит от угла ϕ.
Задача 2.4. Найти частные производные функции $u = xy + \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = y + \frac{1}{y} = \frac{y^2 + 1}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$$

Задача 2.5. Найти частные производные функции $u = \sqrt[3]{xy}$ в точке $O(0;0)$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0;0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0;0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = 0$$

Задача 2.6. Дана функция $u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}$. Найти $\Delta u,\ du$ в точке $(1;2)$, если $\Delta x = -1,\ \Delta y = 1$.
Ответ: $\Delta u = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}, \quad du = -\frac{1.25}{\cos^2 \frac{1}{2}}$.

Задача 2.7. Дана функция $u = x^{\frac{y}{z}}$. Найти $u_x,\ u_y,\ u_z$. Найти $\Delta u,\ du$ в точке $(1;0;2)$, если $\Delta x = 2,\ \Delta y = -3,\ \Delta z = 1$.
Ответ: $u_x = \frac{yx^{y/z-1}}{z}, \quad u_y = \frac{x^{y/z}\ln x}{z}, \quad u = -\frac{yx^{y/z}\ln x}{z^2}, \quad \Delta u = -\frac{2}{3}, \quad du = 0.$

Задача 2.8. Посчитать приблизительно $1.002 \times (2.003)^2 \times (3.004)^3$.
Пусть $u = xy^2z^3$, а $x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 3, \quad \Delta x = 0.002, \quad \Delta y = 0.003, \quad \Delta z = 0.004$.

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx u(x_0, y_0, z_0) + A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z$$

$$1.002 \times (2.003)^2 \times (3.004)^3 \approx 108 \times (1 + 0.009)$$

Задача 2.9. Посчитать приблизительно $\sin 29° \operatorname{tg} 46°$.
Подсказка. $x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad y_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \Delta x \approx 0.017, \quad \Delta y \approx 0.017.$

Задача 2.10. $x,\ y$ — малые величины. Оценить $\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.
Подсказка. Пусть $u = \operatorname{arctg}\frac{t}{v}$, $t_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \Delta t = x + y, \quad \Delta v = xy$
Ответ: $\approx x + y$.

Семинар 3

Частная производная сложной функции

Пусть $u = f(t,v)$, $\quad t = t(x,y)$, $\quad v = v(x,y)$, тогда алгоритм взятия частных производных в операторной форме имеет вид

$$\boxed{\begin{aligned}\Box_x &= \Box_t \times t_x + \Box_v \times v_x\\ \Box_y &= \Box_t \times t_y + \Box_v \times v_y\end{aligned}}$$

Задача 3.1. Дана функция $u = f(t,v)$, $\quad t = xyz$, $\quad v = x^2+y^2+z^2$.
Найти u_x, $\quad u_{xx}$, $\quad u_{xz}$.

$$u_x = u_t yz + u_v 2x$$
$$u_z = u_t xy + u_v 2z$$
$$u_{xx} = yzu_{tx} + 2u_v + 2xu_{vx} = yz[u_{tt}yz + u_{tv}2x] + 2u_v + 2x[u_{tv}yz + u_{vv}2x]$$

Задача 3.2. Дана функция $u = f(t,v)$, $\quad t = xy$, $\quad v = x^2 - y^2$. Найти u_{xy}.

$$u_x = u_t y + u_v 2x$$
$$u_{xy} = u_t + yu_{ty} + 2xu_{vy} = u_t + y[u_{tt}x - 2yu_{tv}] + 2x[u_{vt}x - 2yu_{vv}]$$

Задача 3.3. Дана функция $u = f(t,v,w)$, $\quad t = xy$, $\quad v = \frac{x}{y} + y$, $\quad w = x$.
Найти u_{xyx}.

Задача 3.4. Дана функция $u = \sin(x^2+y^2)$. Найти d^3u.
Пусть $u = \sin t$, где $t = x^2 + y^2$.

$$du = \cos t dt$$
$$d^2u = -\sin t (dt)^2 + \cos t d^2 t$$
$$\begin{aligned} d^3u &= -\cos t (dt)^3 - (\sin t) 2dtd^2t - (\sin t) dtd^2t - (\cos t) d^3t = \\ &= -\cos t (dt)^3 - 3(\sin t) dtd^2t - \cos t d^3 t\end{aligned}$$
$$\left| \begin{aligned} &dt = 2xdx + 2ydy \\ &d^2t = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 \\ &d^3t = 0 \end{aligned}\right.$$

Задача 3.5. Дано решение некоторого дифференциального уравнения:
$z = x + \phi(xy)$. Найти исходное дифференциальное уравнение.

Пусть $\phi(xy) = \phi(t)$, где $t = xy$.

$$\begin{cases} z_x = 1 + \phi_t y, \\ z_y = \phi_t x \end{cases} \Rightarrow \textit{Ответ: } xz_x - yz_y = x.$$

Производная по направлению

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M)$ является скоростью изменения функции $u(M)$ по направлению $\bar{l}$ в точке M.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ $\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

Задача 3.6. Найти производную по направлению $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ функции $z = x^2 - y^2$ в точке $(1;1)$, если $\bar{l}$ составляет угол $\frac{\pi}{3}$ с положительным направлением оси Ox.

Градиент: $\text{grad } z = \{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\}$

Единичный вектор: $\bar{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = (\text{grad } z, \bar{l}) = 1 - \sqrt{3}$$

Задача 3.7. Найти производную по направлению $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $(1;1)$, если $\bar{l}$ составляет угол α с положительным направлением оси Ox. Ответить в каком направлении производная имеет максимум, минимум и равна нулю.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;1)} = 2x - y = 1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;1)} = 2y - x = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

Ответ: $Max: \ \alpha = \frac{\pi}{4}, \ Min: \ \alpha = \frac{5\pi}{4}, \ '0': \ \alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 3.8. Найти угол между градиентом функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $A(1;1;0)$ и градиентом в точке $B(0;1;-1)$.

$$\text{grad } u = \{2x, 2y, -2z\}$$

$$\left.\text{grad } u\right|_A = \{2, 2, 0\}$$

$$\left.\text{grad } u\right|_B = \{0, 2, 2\}$$

$$\cos\phi = \frac{4}{\sqrt{2^2+2^2}\times\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Задача 3.9. Дана функция $u(x,y)$. Известно, что при $y = x^2 \quad u(x,y) = 1$ и $u_x = x$. Найти u_y на линии $y = x^2$.

С одной стороны, на линии $y = x^2$

$$du = u_x dx + u_y dy = u_x dx + u_y 2x dx = x dx + u_y 2x dx$$

С другой стороны,

$$du = d(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Ответ: } u_y = -\frac{1}{2}.$$

Семинар 4

Неявные функции

$f(x,y)=0$ — это уравнение!

Теорема. Пусть: 1) функция $F(x,y)$ непрерывна в некотором прямоугольнике $Q=\{(x,y): a<x<b,\ c\le y\le d\}$;

2) $\forall x\ \in\ (a,b):\ \ F(x,c)F(x,d)<0$ (т. е. на нижней и верхней сторонах прямоугольника Q функция $F(x,y)$ имеет значения разных знаков;

3) $\forall x\ \in\ (a,b)$ функция $F(x,y)$ является строго монотонной функцией аргумента y на сегменте $[c,d]$.

Тогда на (a,b) существует единственная неявная функция, определяемая уравнением $F(x,y)=0$, и эта функция непрерывна на (a,b).

Задача 4.1. Дано уравнение $x^3+y^3+xy=1$. Найти в точке $M(1;0)$ y' и y''.
Пусть $y=y(x)$

$$x^3+y^3(x)+xy(x)=1$$

$$3x^2+3y^2y'+y+xy'=0\ \ (*)$$

Подставляя $x=1,\ \ y=0$, получаем

$$3+y'=0\ \Rightarrow\ y'=-3$$

Дифференцируем $(*)$ ещё раз

$$6x+6yy'^2+3y^2y''+2y'+xy''=0$$

$$6-6+y''=0\ \Rightarrow\ y''=0$$

Задача 4.2. Дано уравнение $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Найти $y',\ y''$.

$$\frac{y}{x}=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$\frac{y'x-y}{x^2}=2\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{y'x-y}{x^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{y'x-y}{x^2}=0$$

$$y'=\frac{y}{x}$$

$$y''=\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{\frac{y}{x}x-y}{x^2}=0$$

Задача 4.3. Дано $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$. Найти y' в точке $O(0;0)$.

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 2x - 2yy'$$

Отсюда мы не можем найти y'. Нужно продифференцировать всё ещё раз

$$2(2x+2yy')^2 + 2(x^2+y^2)(2+2y'^2+2yy'') = 2 - 2(y')^2 - 2yy''$$

$$2 - 2(y')^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm 1$$

Т. е. через начало координат проходят две ветви!

Задача 4.4. Дано $x^2+y^2+z^2=a^2$. Найти $z_x,\ z_y,\ z_{xx},\ z_{xy},\ z_{yy}$.

Замечаем, что проще записать полный дифференциал, чтобы найти все необходимые производные

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \quad (**)$$

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy = z_x dx + z_y dy$$

$$\Rightarrow \quad z_x = -\frac{x}{z}, \quad z_y = -\frac{y}{z}$$

Возьмем дифференциал от $(**)$ ещё раз

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + zd^2z = 0$$

$$d^2z = -\frac{1}{z}\left[(dx)^2 + (dy)^2 + \left(\frac{x}{z}\right)^2(dx)^2 + 2\frac{xy}{z^2}dxdy + \left(\frac{y}{z}\right)(dy)^2\right]$$

$$z_{xx} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}$$

$$z_{xy} = -\frac{xy}{z^3}$$

$$z_{yy} = -\frac{z^2+y^2}{z^3}$$

Задача 4.5. Дана система

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{z^2}{2}, \\ x+y+z = 2 \end{cases}$$

Будем считать, что $x = x(z), \quad y = y(z)$. Найти $x',\ y',\ x'',\ y''$ в точке $M(1;-1;2)$.

Продифференцируем тождества, получаемые из системы уравнений,

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' = z \\ x' + y' + 1 = 0 \end{cases}$$

Тогда в точке M

$$\begin{cases} x' - y' = 1, \\ x' + y' = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x' = 0, \quad y' = -1$$

Продифференцируем всё ещё раз

$$\begin{cases} 2xx'' + 2(x')^2 + 2yy'' + 2(y')^2 = 1, \\ x'' + y'' = 0 \end{cases}$$

Тогда в точке M

$$\begin{cases} 2x'' - 2y'' = -1, \\ x'' - y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x'' = \frac{1}{4}, \quad y'' = -\frac{1}{4}$$

Задача 4.6. Сколько функций определяет уравнение $x^2 - y^2 = 0$ в окрестности точки $O(0;0)$.

Ответ: 4 непрерывных функции (Рис. 7.): $y = x,\ y = -x,\ y = |x|,\ y = -|x|$.

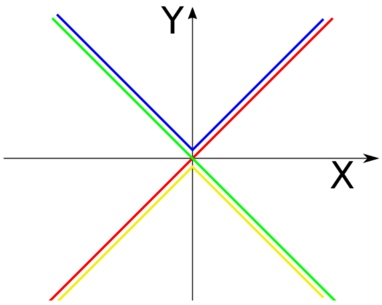

Рис. 7. К задаче 4.6.

Задача 4.7. В окрестности какой из трех точек $A(2;0),\ B(0;2),\ C(2;2)$ уравнение $x^2 + y^2 - 4 = 0$ задает неявную функцию.

$(2;2)$ — не является решением исходного уравнения.

$$2x + 2yy' = 0$$

$$A: \quad 4 + 0 \neq 0$$

$$B: \quad 0 + 4y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

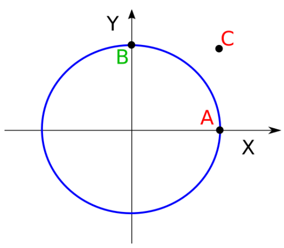

Рис. 8. К задаче 4.7.

Ответ: B.

Замена переменных

Пусть есть функция $y = f(x)$, и мы хотим перейти к новым переменным $x, y \to t, u$.

Алгоритм:

1) Для всех видов связи между переменными $x,\ y,\ t,\ u$ дифференцируем условия связи по переменной t, считая $x,\ y,\ u$ функциями переменной t. Получаем уравнения линейные относительно $\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{u}$.

2) Из этих уравнений получаем выражения для $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

3) Подставляем найденные выражения для $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в формулу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

4) Если есть вторые производные, используем операторную формулу

$$\square_x = \frac{\dot{\square}}{\dot{x}}$$

5) В исходном выражении полностью переходим к новым переменным t и u.

Задача 4.8. Решить уравнение Эйлера $x^2y'' + xy' + y = 0$.
Совершим переход $x, y \ \to \ t, y$, где $x = e^t$

$$\dot{x} = e^t$$

$$\dot{y} = \dot{y}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{e^t} = \dot{y}e^{-t}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t}}{e^t} = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^{2t}}$$

$$\ddot{y} - \dot{y} + \dot{y} + y = 0$$

Получаем классическое колебательное уравнение:

$$\ddot{y} + y = 0$$

Семинар 5

Задача 5.1. Дано: 1) $\forall (x_0, y_0) \in G$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(x_0, y_0, \varepsilon) > 0 : \ \ \forall (x, y_0) \in G$ $|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

2) $\forall (x, y), \ (x, y_0) \in G \ \ |f(x, y) - f(x, y_0)| < k|y - y_0|$

Доказать: $\forall (x_0, y_0) \in G \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0 \ : \ \forall (x, y) \in G$ $|x - x_0| < \delta, \ |y - y_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

Док-во:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |f(x,y) - f(x_0,y_0) + f(x,y_0) - f(x,y_0)|$$

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0) + f(x,y_0) - f(x,y_0)| \le |f(x,y) - f(x,y_0)| + |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)|$$

В силу 2) $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2k} \ : \ \forall (x, y), \ (x, y_0) \in G$ будет выполняться

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < k|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В силу 1) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_2(\varepsilon, x_0, y_0) > 0 \ : \ \forall (x, y_0) \in G \ \ |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall (x_0, y_0) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \ :$$

$$\forall (x,y) \ |x - x_0| < \delta, \ |y - y_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon \textit{ что и т. д.}$$

Задача 5.2. Найти предел по совокупности аргументов $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.
Нам поможет «теорема о двух милиционерах»:

$$0 < \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} < \frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = \{\text{Правило Лопиталя}\} = 0$$

Ответ: 0.

Задача 5.3. Дано $4x^2 + y^2 = 8$. Найти внутреннюю нормаль.

$$F(x,y) = 0$$

$$\text{grad } F = \{F_x, F_y\} \text{ — всегда перпендикулярен линии уровня!}$$

$$\text{grad } u = \{8x, 2y\}$$

$$\overline{n}_{\text{внеш}} = -\frac{1}{|\text{grad } u|}\text{grad } u$$

Задача 5.4. Дана функция $u = \ln(x^2 + y^2)$. Найти производную этой функции в точке $M(1; -1)$ в направлении $\bar{l}$ перпендикулярном к линии уровня, проходящей через точку M.

Линии уровня: $\ln(x^2 + y^2) = C, \quad C \in \mathbb{R}$. Направление $\bar{l}$ и grad u совпадают.

$$\cos\alpha = \frac{u_x(M)}{|\text{grad } u|}, \quad \cos\beta = \frac{u_y(M)}{|\text{grad } u|}$$

$$\text{grad } u = \{\frac{2x}{x^2 + y^2}, \ \frac{2y}{x^2 + y^2}\}$$

$$\text{grad } u\Big|_M = \{1, -1\} \ \Rightarrow \ |\text{grad } u| = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}\Big|_M = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M \cdot \cos\beta = \sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 5.5. Дано дифференциальное уравнение $y'y''' - 3y''^2 = x$. Нужно заменить переменные $x, y \to y, x$.

$$x, y \to t, u$$

$$y(x) \to u(t)$$

Условия связи: $x = u, \quad y = t$.

$$\dot{x} = \dot{u}$$

$$\dot{y} = 1$$

$$y' = \frac{1}{\dot{u}}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{\dot{u}^2}\ddot{u}}{\dot{u}} = -\frac{\ddot{u}}{\dot{u}^3}$$

$$y''' = -\frac{\dddot{u}\dot{u}^3 - \ddot{u}3\dot{u}^2\ddot{u}}{\dot{u}\dot{u}^6}$$

Ответ: $x''' + xx'^5 = 0$.

Задача 5.6. Дано дифференциальное уравнение $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Нужно перейти к полярным координат и решить его.

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\phi - \rho\sin\phi$$

$$\dot{y} = \dot{\rho}\sin\phi + \rho\cos\phi$$

$$y' = \frac{\dot{\rho}\sin\phi + \rho\cos\phi}{\dot{\rho}\cos\phi - \rho\sin\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}\sin\phi + \rho\cos\phi}{\dot{\rho}\cos\phi - \rho\sin\phi} = \frac{\rho(\cos\phi + \sin\phi)}{\rho(\cos\phi - \sin\phi)}$$

Откуда

$$\dot{\rho} = \rho$$

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = d\phi \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\rho}{\rho} = \int d\phi$$

Задача 5.7. Дано $\frac{x^2}{1-\ln x}y' + y = 1$. Нужно перейти к новым переменным $x, y \to t, u$ при условиях связи $y = u + 1$, $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln t}{t}$.

Замена переменных в случае функций многих переменных

$$\boxed{x, y, z \ : \ z(x, y) \quad \to \quad t, u, w \ : \ w(t, u)}$$

1) Взять дифференциал от условий связи. Сразу полагая, что $dw = w_t dt + w_u du$. Получаем систему из трёх уравнений линейных относительно dt, du, dz, dx, dy.

2) Решаем систему относительно dt, du, dz.

3) Выражение для dz, полученное в пункте 2), приравниваем к $z_x dx + z_y dy$. И собрав коэффициенты при $dx(dy)$, получим значении для $z_x(z_y)$.

4) Если нужны вторые производные, то надо применить первый дифференциал к первым производным.

$$z_x = \phi(x, y, z, w, w_t, w_u, t, u)$$

$$z_{xx} dx + z_{xy} dy = d\phi$$

5) Полностью переходим в исходном выражении к новым переменным.

Семинар 6

Замена переменных в выражениях с производными

Задача 6.1. Дано уравнение $\frac{x^2}{1-\ln x}y' + y = 0$. Перейти к новым переменным $x, y \ : \ y(x) \ \to \ t, u \ : \ u(t)$ при условиях связи $y = u + 1$, $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln t}{t}$.

$$\dot{y} = \dot{u}$$

$$\frac{\dot{x}(1-\ln x)}{x^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$\dot{x} = \frac{x^2(1-\ln t)}{t^2(1-\ln x)}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{u}t^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln t)}$$

$$\frac{t^2}{1-\ln t} \cdot \frac{\dot{u}t^2(1-\ln t)}{t^2(1-\ln t)} + u = 0$$

Ответ: $\frac{t^2}{1-\ln t}\dot{u} + u = 0$.

Задача 6.2. Дано уравнение $xz_x + yz_y = z$. Перейти к новым переменным $x, y, z \ : \ z(x, y) \ \to \ t, u, z \ : \ z(t, u)$ при условиях связи $t = x$, $ux = y$.

$$dt = dx$$

$$u = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ du = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{dy}{x}$$

$$dz = z_x dx + z_y dy = z_t dt + z_u du = (z_t - \frac{y}{x^2}z_u)dx + \frac{z_u}{x}dy$$

$$\Rightarrow \quad z_x = z_t - \frac{y}{x^2}z_u, \quad z_y = \frac{z_u}{x}$$

Ответ: $tz_t = z$.

Задача 6.3. Дано уравнение $xz_x + yz_y = 2z$. Перейти к новым переменным $x, y, z \ : \ z(x, y) \ \to \ t, u, w \ : \ w(t, u)$ при условиях связи $t = \frac{x}{y}$, $u = \frac{x^2+y^2}{2}$, $w = \frac{xy}{2}$.

$$dt = \frac{1}{y}dy - \frac{x}{y^2}dy$$

$$du = \frac{1}{2}(2xdx + 2ydy)$$

$$z = \frac{xy}{w} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{y}{w}dx + \frac{x}{w}dy - \frac{xy}{w^2}[w_t dt + w_u du]$$

$$z_x = \frac{y}{w} - \frac{x}{w^2}w_t - \frac{x^2y}{w^2}w_u$$

$$z_y = \frac{x}{w} + \frac{x}{yw^2}w_t - \frac{xy^2}{w^2}w_u$$

$$xz_x + yz_y = \frac{2xy}{w} - \frac{x^3y + xy^3}{w^2}w_u$$

Ответ: $w_u = 0$.

Задача 6.4. Дано уравнение $xz_x + (y+1)z_y = 0$. Перейти к новым переменным $x, y, z \ : \ z(x, y) \ \to \ t, u, w \ : \ w(t, u)$ при условиях связи $x = u + t, \ y = \frac{u}{t}, \ z = \frac{w}{t}$.
Ответ: $w_u = 0$.

Задача 6.5. Дано уравнение $\frac{x^2+y^4}{y}z_x + x(1+y^2)z_y = \frac{y^3}{x} - xy$. Перейти к новым переменным $x, y, z \ : \ z(x, y) \ \to \ t, u, w \ : \ w(t, u)$ при условиях связи
$t^2 + u^2 + x^2 - y^2 = 0, \ x = uy, \ \sin(w - z) = t$.

Задача 6.6. Дано уравнение $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$. Перейти к новым переменным $x, y, z \ : \ z(x, y) \ \to \ t, u, w \ : \ w(t, u)$ при условиях связи $t = x + y, \ u = \frac{y}{x}, \ w = \frac{z}{x}$.

$$dt = dx + dy$$

$$du = \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx$$

$$z = wx \ \Rightarrow \ dz = x(w_t dt + w_u du) + w dx$$

$$z_x = w + xw_t - \frac{y}{x}w_u$$

$$z_y = xw_t + w_u$$

$$z_{yx}dx + z_{yy}dy = w_t dx + x(w_{tt}dt + w_{tu}du) + w_{ut}dt + w_{uu}du$$

$$z_{xx} = 2w_t + xw_{tt} - 2\frac{y}{x}w_{tu} + \frac{y^2}{x^3}w_{uu}$$

$$z_{xy} = w_t + xw_{tt} + (1 - \frac{y}{x})w_{tu} - \frac{y}{x^2}w_{uu}$$

$$z_{yy} = xw_{tt} + 2w_{tu} + \frac{1}{x}w_{uu}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2}{x^3}w_{uu} = 0$$

Ответ: $w_{uu} = 0$.

Задача 6.7. Дано уравнение $z_{xx} + z_{xy} + z_x = z$. Перейти к новым переменным $x, y, z \ : \ z(x, y) \ \to \ t, u, w \ : \ w(t, u)$ при условиях связи $x = t + u, \ y = t - u, \ z = we^{u-t}$.

$$\begin{cases} x = t + u, \\ y = t - u \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} t = \dfrac{x+y}{2} & \Rightarrow \ dt = \dfrac{1}{2}(dx + dy) \\ u = \dfrac{x-y}{2} & \Rightarrow \ du = \dfrac{1}{2}(dx - dy) \end{array}$$

$$z = we^{u-t} = we^{-y}$$

$$dz = -we^{-y}dy + e^{-y}\frac{w_t}{2}dx + e^{-y}\frac{w_t}{2}dy + e^{-y}\frac{w_u}{2}dx - e^{-y}\frac{w_u}{2}dy$$

$$z_x = \frac{e^{-y}}{2}(w_t + w_u)$$

$$z_{xx}dx + z_{xy}dy = -\frac{e^{-y}}{2}(w_t + w_u)dy + \frac{e^{-y}}{2}(w_{tt}dt + w_{tu}du + w_{ut}dt + w_{uu}du)$$

$$z_{xx} + z_{xy} = -\frac{e^{-y}}{2}(w_t + w_u) + \frac{e^{-y}}{2}(w_{tt} + w_{ut})$$

$$z_{xx} + z_{xy} + z_x = \frac{e^{-y}}{2}(w_{tt} + w_{ut})$$

$$z_{xx} + z_{xy} + z_x = z \quad \Leftrightarrow \quad w_{tt} + w_{ut} = 2w$$

Ответ: $w_{tt} + w_{ut} = 2w$.

Семинар 7

Локальный экстремум

Определение. Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, в которой при $M \neq M_0$ выполняется неравенство

$$f(M) < f(M_0) \quad [f(M) > f(M_0)]$$

Задача 7.1. Дана функция $z = x^2 + (y-1)^2$. Найти её локальный экстремум.

Возьмем дифференциал от исходной функции и приравняем его к нулю:

$$dz = 2xdx + 2(y-1)dy$$

$$dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Получим точку возможного экстремума $(0;1)$.

$$d^2z = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 > 0$$

$\Rightarrow$ точка $(0;1)$ — минимум.

Задача 7.2. Дано уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 10$. Найти локальный экстремум, считая $z = z(x,y)$.

Подставим $z = z(x,y)$ в исходное уравнение и возьмем первый дифференциал:

$$xdx + ydy + zdz - dx + dy - 2dz = 0$$

$$dz = \frac{1}{2-z}\left((x-1)dx + (y+1)dy\right) = 0$$

Это возможно, когда $x = 1, \;\; y = -1$. Но есть и линия $z = 2$, кода дифференциал dz не существует (возможен экстремум).

Возьмем второй дифференциал:

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + zd^2z - 2d^2z = 0$$

$$d^2z = \frac{1}{2-x}\left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right]$$

$\Rightarrow$ знак d^2z зависит только от знака множителя $\frac{1}{2-z}$

Для точки $(1;-1)$ получаем:

$$\left[\begin{array}{l} z = 6 \quad \Rightarrow \quad (1;-1) \text{ — максимум} \\ z = -2 \quad \Rightarrow \quad (1;-1) \text{ — минимум} \end{array}\right.$$

Чтобы разобраться с $z = 2$, преобразуем исходное уравнение

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$$

Мы видим, что это уравнение сферы $\Rightarrow$ $z = 2$ высекает из сферы окружность (Рис. 9.) $\Rightarrow$ экстремума нет

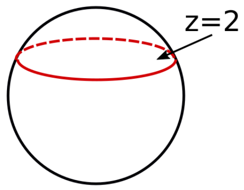

Рис. 9. К задаче 7.2.

Условный экстремум

Задача 7.3. Дана функция $z = xy$ и условие связи $x + y = 1$. Найти условный экстремум.

$$x + y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = 1 - x$$
$$\Rightarrow \quad z = x(1-x)$$
$$z = x - x^2$$
$$z' = 1 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$$
$$z''\Big|_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)} < 0 \;\Rightarrow\; (0.5; 0.5) \text{ — минимум}$$

Задача 7.4. Дана функция $u = x - 2y + z$ и условие связи $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Найти условный экстремум.

Дифференцируем условие связи, полагая $z = z(x, y)$

$$xdx + ydy = zdz$$
$$dz = \frac{x}{z}dx + \frac{y}{z}dy$$
$$\Rightarrow \quad du = dx - 2dy + dz = \left(1 + \frac{x}{z}\right)dx + \left(\frac{y}{z} - 2\right)dy$$
$$\begin{cases} 1 + \dfrac{x}{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -z \\ \dfrac{y}{z} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2z \end{cases}$$

Подставим это в условие связи

$$z^2 + 4z^2 - z^2 = 1$$
$$\Rightarrow \quad z = \pm\frac{1}{2}$$

Получим две точки $M_1(0.5; -1; -0.5)$ и $M_2(-0.5; 1; 0.5)$.

$$d^2z = \frac{1}{z}[(dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2 z]$$

$$d^2z = \frac{1}{z}[(dx)^2 + (dy)^2 - \frac{x^2}{z}(dx)^2 - 2\frac{xy}{z^2}dxdy - \frac{y^2}{z^2}(dy)^2]$$
$$d^2z = \frac{1}{z}\left[\left(1 - \frac{x^2}{z^2}\right)(dx)^2 - 2\frac{xy}{z^2}dxdy + \left(1 - \frac{y^2}{z^2}\right)(dy)^2\right]$$

В точках $M_{1,2}$:

$$d^2z = \frac{1}{z}[-4dxdy + 3(dy)^2]$$

Мы получили знакопеременную квадратичную форму $\Rightarrow$ экстремумов нет.

Метод Лагранжа

Задача 7.4. Дана функция $u = x + y + z^2$ и условия связи $z - x = 1,\ y - xz = 1$. Найти условный экстремум.

Построим функцию Лагранжа:

$$L = u + \lambda(z - x) + \mu(y - xz)$$

Поставим для этой функции задачу о безусловном экстремуме:

$$\begin{cases} dL = 0 \\ z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_x = 1 - \lambda - \mu z = 0 \\ L_y = 1 + \mu = 0 \\ L_z = 2z + \lambda - \mu x = 0 \\ z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases}$$

Находим все пять чисел: $x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 0,\ \lambda_0 = 1,\ \mu_0 = -1$. Далее осталось проверить знак второго дифференциала.

Ответ: точка $(-1; 1; 0)$ — минимум.

Задача 7.6. При каких размерах открытая прямоугольная ванна, объемом 32, имеет наименьшую поверхность.

$$\begin{cases} S = xy + 2yz + 2zx, \\ xyz = 32 \end{cases}$$

Семинар 8

Линейные пространства

Задача 8.1. Для $z = f(x, y)$ найти z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, если функция задана неявно $\frac{x}{z} = \ln zy + 1$.

Считая $z = z(x, y)$ и дифференцируя, получаем

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{y}{z}\frac{ydz - zdy}{y^2}$$

$$dz = \frac{z}{x+z}dx + \frac{z^2}{y(x+z)}dy$$

$$\Rightarrow \quad z_x = \frac{z}{x+z}, \quad z_y = \frac{z^2}{y(x+z)}$$

$$d^2z = z_xx(dx)^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}(dy)^2$$

$$(dx + dz)dz + (x+z)d^2z = dzdx + \frac{2yzdz + z^2dy}{y^2}dy$$

$$y^2(dz)^2 + y^2(x+z)d^2z = 2yzdz + z^2(dy)^2$$

$$d^2z = -\frac{z^2}{(x+z)^3}(dx)^2 + 2\frac{xz^2}{y(x+z)^2}dxdy - \frac{x^2z^2}{y^2(x+z)^3}(dy)^2$$

$$\Rightarrow \quad z_{xx} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}, \quad z_{xy} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}, \quad z_{yy} = -\frac{x^2z^2}{y^2(x+z)^3}$$

Задача 8.2. Образует ли поле множество иррациональных чисел?
Ответ: Нет.

Задача 8.3. Образуют ли поле все дроби со знаменателем 3?
Ответ: Нет.

Задача 8.4. Образует ли множество векторов на плоскости, начало которых в начале системы координат, а конец в первой четверти, линейное пространство?
Ответ: Нет.

Задача 8.5. Образует ли линейное пространство множество всех векторов на плоскости за исключением векторов параллельных некоторой прямой.
Ответ: Нет.

Задача 8.6. Дано множество выражений вида

$$a\sin x + b\cos x, \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

Образует ли оно линейное пространство?

Ответ: Да.

Задача 8.7. Рассмотрим множество всех векторов $\vec{x}$, которые удовлетворяют условию

$$(\vec{x}, \vec{x_0}) = a \quad (\vec{x_0},\ a \text{ — конкретные})$$

Будет ли это множество образовывать линейное пространство?

Если $a \neq 0$, возьмем любые $\vec{x_1},\ \vec{x_2}$.

$$(\vec{x_1} + \vec{x_2},\ \vec{x_0}) = a + a = 2a$$

Т.е. $\vec{x_1} + \vec{x_2}$ уже не принадлежит линейному пространству.
Но если $a = 0$, получаем линейное пространство.

Задача 8.8. Рассмотрим множество $\{X_A\}$ матриц размера $n \times n$, коммутирующих с некоторой матрицей A:

$$XA = AX, \quad \forall X \in \{X_A\}$$

Образует ли линейное подпространство множество $\{X_A\}$ линейного пространства всех действительных матриц размера $n \times n$?

Нужно проверить два пункта:

1)

$$X_1, X_2 \in \{X_A\}$$
$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = X_1A + X_2A = (X_1 + X_2)A$$

2)

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad X_1 \in \{X_A\}$$
$$A(\lambda X_1) = \lambda(AX_1) = \lambda(X_1A) = (\lambda X_1)A$$

Задача 8.9. Доказать, что $1,\ x,\ x^2$ базис в пространстве P_2.

Задача 8.10. Рассмотрим пространство столбцов T_4.

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Доказать, что $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ — базис. И найти координаты элемента $X = (1, 1, 1, 1)^T$ в этом базисе.

Построим матрицу из столбцов y_1, y_2, y_3, y_4 и покажем, что её ранг равен 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 1 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_4 \\ 1 = 2\lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0; 1/2; 3/2)$.

Задача 8.11. Рассмотрим пространство T_3. Дано два базиса:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найти:

а) матрицу перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{g\}$.

б) матрицу перехода от базиса $\{g\}$ к базису $\{e\}$.

в) координаты g_1 в базисах $\{g\}$ и $\{e\}$.

г) координаты g_3 в базисах $\{g\}$ и $\{e\}$.

д) координаты e_3 в базисе $\{g\}$.

е) координаты $z = (2, 3, -1)^T$ в базисах $\{g\}$ и $\{e\}$.

Семинар 9

Матрицы и системы линейных уравнений

Задача 9.1 Найти ранг и базисный минор матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Подобные столбцы можно «выкидывать», не изменяя ранг исходной матрицы! А базисный минор дают 1-й, 3-й и 4-й столбцы.

Задача 9.2. Решить систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Задача 9.3. Решить систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Задача 9.4. Дана система неоднородных уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 = 1 \\ x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = -1 \\ x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 = 5 \end{cases}$$

Найти общее решение.

$\operatorname{rang} A = 2, \quad 4 - 2 = 2 \ \Rightarrow$ ФСР состоит только из двух решений.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{K}.$

Задача 9.5. Дана система неоднородных уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 + x^4 = 1 \\ x^1 + 2x^2 - x^3 + 4x^4 = 2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 + 11x^4 = \lambda \end{cases}$$

При каких значениях переменной λ система совместна.

По теореме Кронекера-Капелли:

$$\text{Система совместна} \iff \text{rang } A = \text{rang } A^*$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\lambda = 5$.

Задача 9.6. Дано $x + y + z + u = 0$. Построить нормальную фундаментальную совокупность решений.

Подсказка: Система уравнений может состоять из одного уравнения!

Ответ: $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача 9.7. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0 \\ 3x^1 + 2x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 = 0 \\ x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 0 \\ 5x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 3x^4 - x^5 = 0 \end{cases}$$

Построить общее решение данной системы.

Ответ: $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{K}$.

Семинар 10

Двойной интеграл

Запись двойного интеграла:

$$\iint\limits_{g} f(x,y)dxdy,$$

где g — область интегрирования, Рис. 10. (обязательные условия: ограниченная, замкнутая и каждая прямая $x = l$, $a < l < b$, пересекает границу области не более, чем в двух точках $y_1(x) \le y_2(x)$), $f(x,y)$ гарантирует существование двойного интеграла и для всех $x \in (a,b)$ существует $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

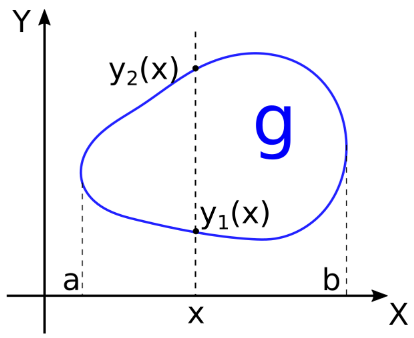

Рис. 10. Область интегрирования g

Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\iint\limits_{g} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy} \quad (1)$$

Либо в зависимости от области (Рис. 11.):

$$\boxed{\iint\limits_{g} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx} \quad (2)$$

Замечание 1. Иногда в физике мы получаем интегралы вида

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

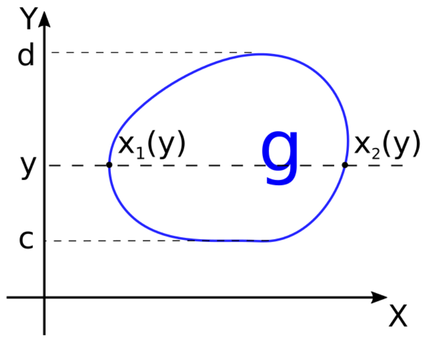

Рис. 11. Область интегрирования g

Возникает вопрос можно ли свести их к двойному интегралу? Можно, если выполняются требования $b \geq a, \quad \psi(x) \geq \phi(x)$. Тогда

$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \iint_g f(x,y)dxdy$$

Замечание 2. Как переставить интегралы в повторном интеграле?

$$\int dx \int ...\, dy \quad \to \quad \iint_g ...\, dxdy \quad \to \quad \int dy \int ...\, dx,$$

т. е. сначала нужно перейти к двойному интегралу, а потом к новому повторному.

Замечание 3. Чтобы свести двойной интеграл к повторному, область интегрирования можно разбивать удобным образом (Рис. 12.).

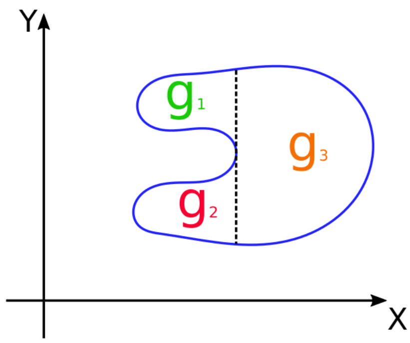

Рис. 12. К замечанию 3.

Замечание 4. Область, ограниченная четырьмя кривыми (Рис. 13.).

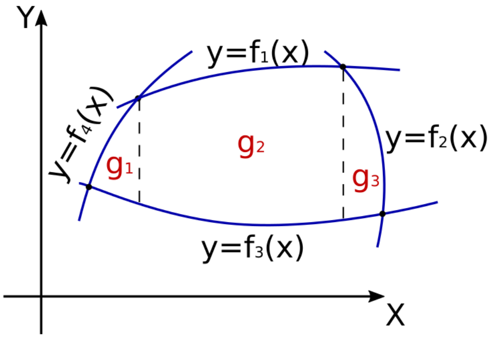

Рис. 13. К замечанию 4.

Задача 10.1. Задана область g в виде треугольника AOB, координаты вершин: $A(1;0)$, $O(0;0)$, $B(1;1)$. Записать повторные интегралы вида (1) и (2) для функции $f(x,y)$.

$$J_1 = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$$

$$J_2 = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$$

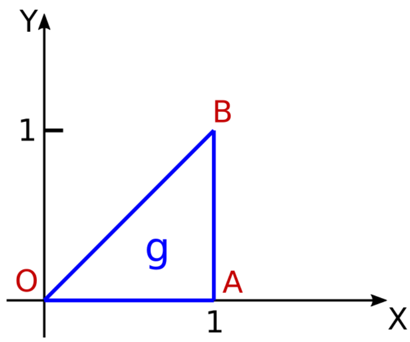

Рис. 14. К Задача 10.1.

Задача 10.2. Задана область $g:\ x^2+y^2 \le y$. Записать повторные интегралы вида (1) и (2) для функции $f(x,y)$.

$$x^2+y^2 \le y \ \Leftrightarrow\ x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

Тогда область g — это просто круг, Рис. 15.

$$J_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}+\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}+\frac{1}{2}} f(x,y)dy$$

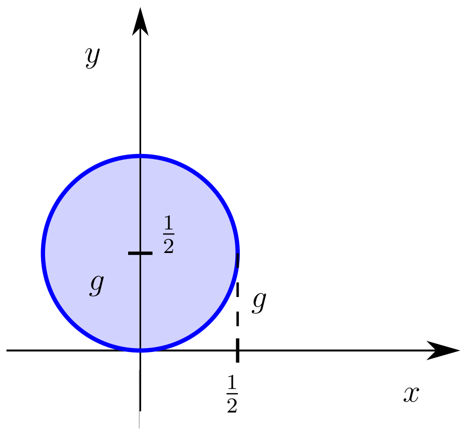

Рис. 15. К задаче 10.2.

$$J_2 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$$

Задача 10.3. Задана область $g:\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4$. Записать повторные интегралы вида (1) и (2) для функции $f(x,y)$.

1) Разобьем исходный интеграл на четыре части (Рис. 16.):

$$\iint\limits_g f(x,y)dxdy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

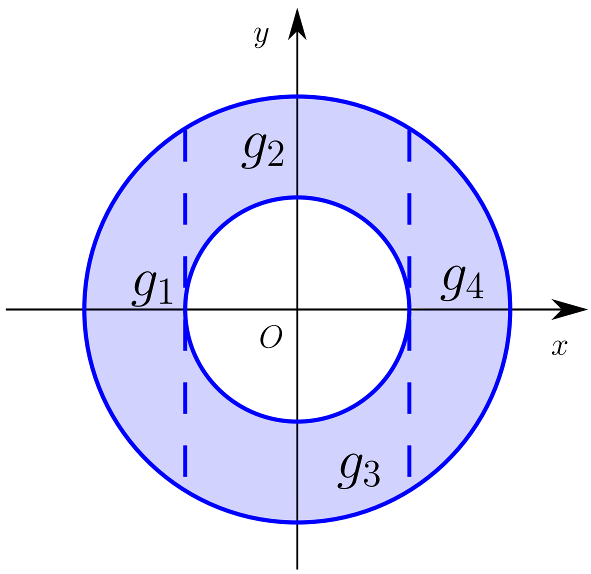

Рис. 16. К задаче 10.3.

$$I_1 = \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

$$I_3 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

$$I_4 = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

2) Разобьем исходный интеграл на четыре части другим способом(Рис. 17.):

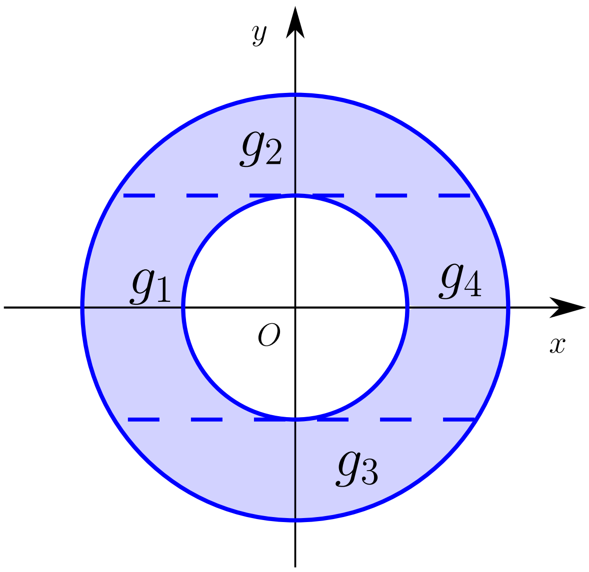

Рис. 17. К задаче 10.3.

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

$$I_2 = \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

$$I_3 = \int\limits_{-1}^{-2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

$$I_4 = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

Задача 10.4. Дан повторный интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy.$$

Необходимо поменять пределы интегрирования.

Покажем область интегрирования g, Рис. 18.

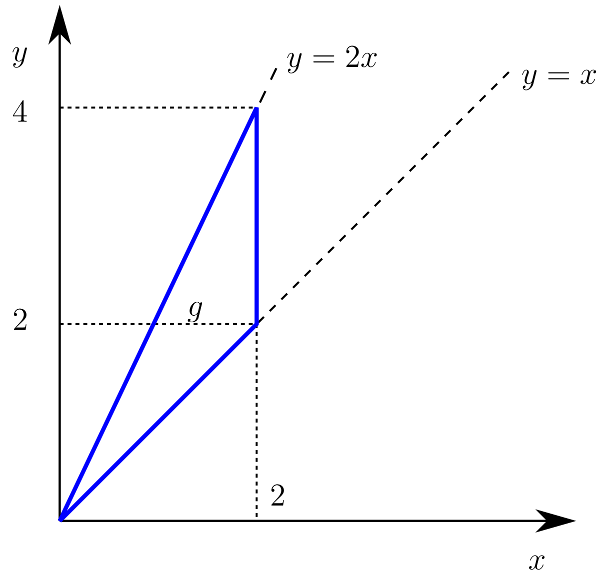

Рис. 18. К задаче 10.4.

Ответ: $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx.$

Задача 10.5. Дан повторный интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$$

Необходимо поменять пределы интегрирования.

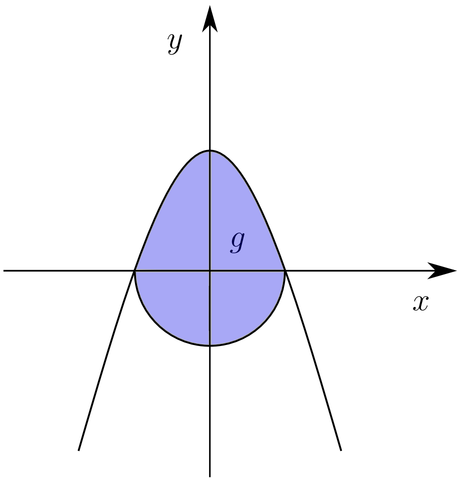

Рис. 19. К задаче 10.5.

Покажем область интегрирования g, Рис. 19.

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$$

Задача 10.6. Дан повторный интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$$

Необходимо поменять пределы интегрирования.

Ответ: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{\arcsin y} f(x,y)dx - \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{2\pi+\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dy.$

Задача 10.7. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{g} (2a-x)^{-1/2} dxdy, \quad a > 0,$$

если g — область, ограниченная кратчайшей дугой окружности с центром в точке $(a;a)$ и радиуса a, касающейся осей координат (Рис. 20.)

$$\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{-\sqrt{2xa-x^2}+a} (2a-x)^{-1/2} dy = \int\limits_{0}^{a} (a - \sqrt{2xa-x^2})(2a-x)^{-1/2} dx =$$

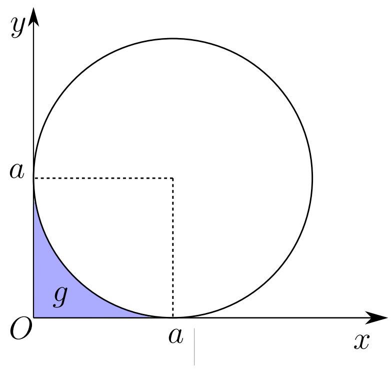

Рис. 20. К задаче 10.7.

$$= \int\limits_0^a \left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}} - \sqrt{x} \right) dx = \int\limits_0^a \frac{a}{\sqrt{2a-x}} dx - \int\limits_0^a \sqrt{x} dx = -2a\sqrt{2a-x}\Big|_0^a - \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^a =$$

$$= a^{3/2} \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3} \right)$$

Ответ: $a^{3/2} \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3} \right)$.

Семинар 11

Замена переменных под знаком двойного интеграла

Пусть у нас есть двойной интеграл по некоторой области g от функции в переменных x и y

$$\iint\limits_{g} f(x,y)dxdy$$

Мы хотим перейти к новым переменным ξ и η, используя преобразование (Рис. 21.):

$$x = \phi(\xi,\eta)$$

$$y = \psi(\xi,\eta)$$

$$(\xi,\eta) \in g^*$$

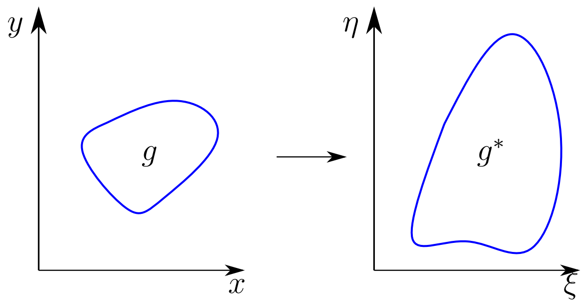

Рис. 21.

Существуют определённые **требования**:
1) Это преобразование переводит область g в g^*.

2) Это преобразование взаимно однозначное.

3) Функции ϕ и ψ в g^* имеют непрерывные частные производные первого порядка.

4) Якобиан перехода не равен нулю в области g^*, за исключением каких-то отдельных линий (областей нулевой площади)

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \neq 0.$$

Если это всё выполнено, справедлива формула

$$\boxed{\iint\limits_{g} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{g^*} f(\phi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta))\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta}$$

$\left|\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|$ — коэффициент деформации элементарной площадки.

Рассмотрим частный случай перехода к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi \end{cases} \quad \text{Якобиан перехода } J = \rho.$$

Чтобы отображение было взаимно однозначным необходимо выполнение двух условий:

1) $\rho \geq 0$

2) $\phi \in [0; 2\pi)$ или $\phi \in (-\pi; \pi]$

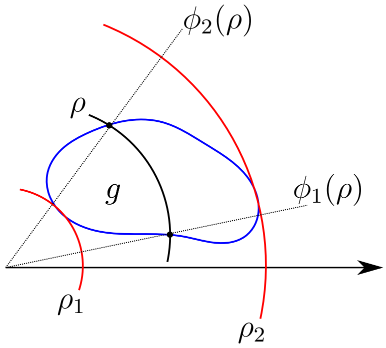

Рис. 22. Случай А.

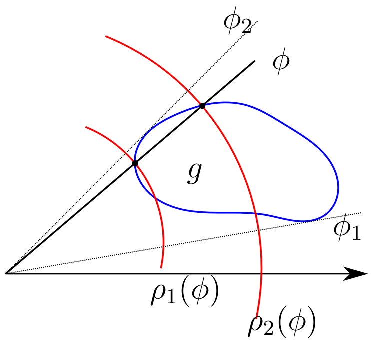

Рис. 23. Случай B.

Случай А.

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int\limits_{\phi_1(\rho)}^{\phi_2(\rho)} f(...)d\phi$$

Случай B.

$$\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int\limits_{\rho_1(\phi)}^{\rho_2(\phi)} f(...)\rho d\rho$$

Задача 11.1. Пусть дан двойной интеграл $I = \iint\limits_g f(x,y)dxdy$, $g: \; x^2+y^2 \le ax \; (a>0)$. Необходимо совершить переход к полярным координатам $x, y \; \to \; \rho, \phi$ и записать исходный интеграл в виде повторного двумя способами.

$$\rho^2 = a\rho\cos\phi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = a\cos\phi \end{cases}$$

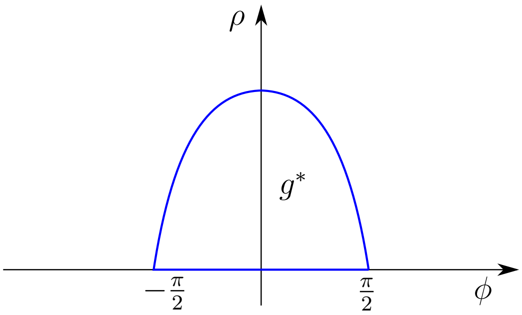

Рис. 24. К задаче 11.1.

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{a\cos\phi} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho$$

Либо

$$I = \int\limits_0^a \rho d\rho \int\limits_{-\arccos\frac{\rho}{a}}^{\arccos\frac{\rho}{a}} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) d\phi$$

Задача 11.2. Дан двойной интеграл $I = \iint\limits_g f(x,y)dxdy$. Необходимо совершить переход к полярным координатам $x, y \; \to \; \rho, \phi$, если

$$g = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1 - x, \end{cases}$$

и записать исходный интеграл в виде повторного двумя способами.

$$\rho\sin\phi = 1 - \rho\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{\sin\phi + \cos\phi}$$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\phi+\sin\phi}} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho$$

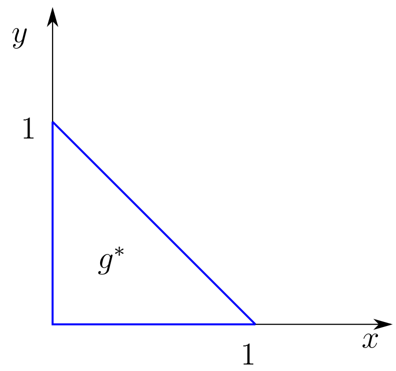

Рис. 25. К задаче 11.2.

Либо

$$I = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \rho d\rho \left[\int\limits_{0}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\rho} - \frac{\pi}{4}} f(...) + \int\limits_{\pi - \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\rho}}^{\frac{\pi}{2}} f(...) d\phi \right] + \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho d\rho \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(...) d\phi$$

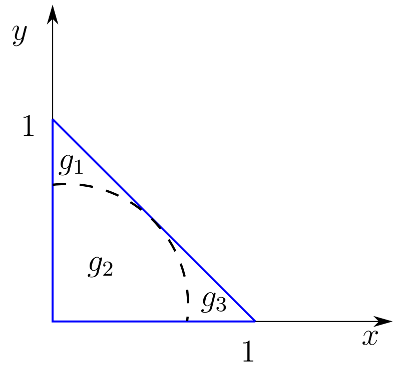

Рис. 26. К задаче 11.2.

Задача 11.3. Дан двойной интеграл $I = \iint\limits_{g} f(x,y)dxdy$. Необходимо совершить переход к полярным координатам $x, y \rightarrow \rho, \phi$, если

$$g = \begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ \dfrac{x^2}{a} \leq y \leq a, \end{cases}$$

и записать исходный интеграл в виде повторного двумя способами.

$$\frac{\rho^2 \cos^2\phi}{a} = \rho \sin\phi$$

$$\rho = \frac{a \sin\phi}{\cos^2\phi}$$

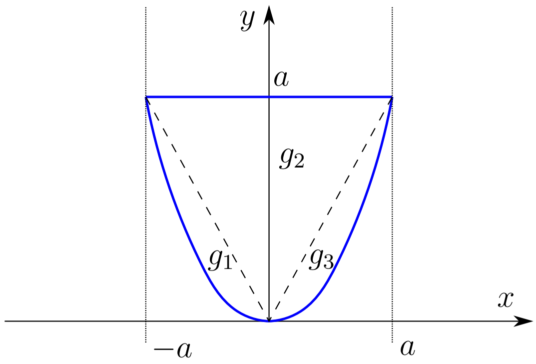

Рис. 27. К задаче 11.3.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_0^{\frac{a\sin\phi}{\cos^2\phi}} f(...)\rho d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\phi \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\phi}} f(...)\rho d\rho + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{a\sin\phi}{\cos^2\phi}} f(...)\rho d\rho$$

Задача 11.4. Дан повторный интеграл $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$. Необходимо совершить переход к полярным координатам $x, y \ \rightarrow \ \rho, \phi$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_{\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}}^{\frac{1}{\cos\phi}} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho$$

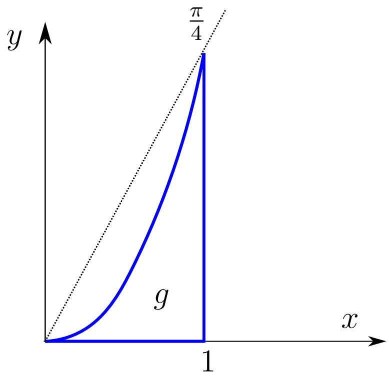

Рис. 28. К задаче 11.4.

Либо

$$I = \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\arcsin\frac{-1+\sqrt{1+4\rho^2}}{2\rho}} f(...)d\phi + \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int\limits_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{-1+\sqrt{1+4\rho^2}}{2\rho}} f(...)d\phi$$

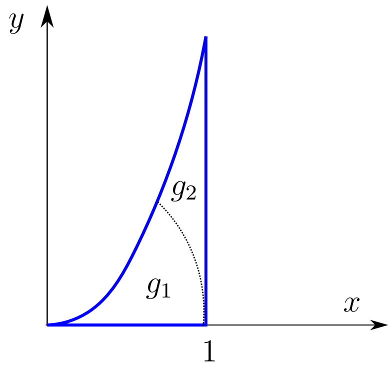

Рис. 29. К задаче 11.4.

Семинар 12

Приложения двойного интеграла

Рассмотрим область g, ограниченную кривой $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. Очевидно, если точка (x, y) принадлежит ограничивающей кривой, то и точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ также ей принадлежат. Наблюдается симметрия! Далее определим точки пересечения кривой с осью Ox:

$$x^4 = a^2x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = a \\ x = -a \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Получаем примерный вид области g, Рис. 30.

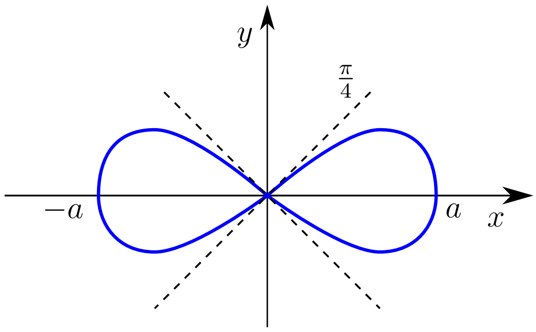

Рис. 30.

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\phi}$$

$$\cos 2\phi \geq 0$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

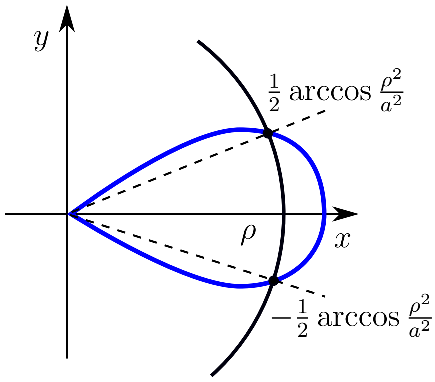

Рис. 31.

$$\rho^2 = a^2\cos 2\phi$$

$$\phi = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}$$

Задача 12.1. Дан повторный интеграл

$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy.$$

Нужно осуществить замену переменных

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y. \end{cases}$$

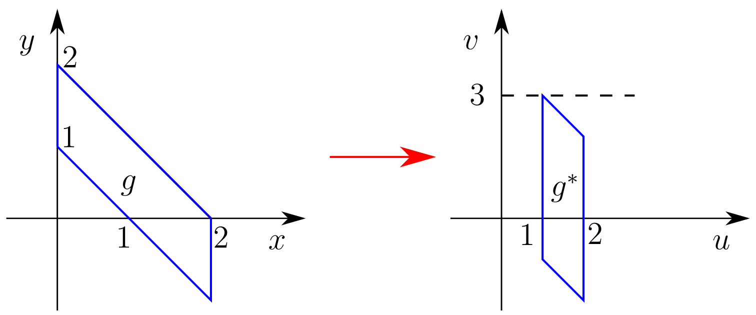

Рис. 32.

На Рис. 32. показано преобразование области интегрирования.

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 du \int\limits_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$$

Задача 12.2. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_g \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy,$$

если область $g: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

Подсказка: Использовать преобразование

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\phi, \\ y = b\rho\sin\phi \end{cases}$$

Ответ: π.

Задача 12.3. Найти площадь области g:

$$\begin{cases} xy = a^2, \\ x + y = \dfrac{5}{2}a \end{cases} \qquad (a > 0).$$

Решим исходную систему уравнений

$$y = \frac{a^2}{x} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{a^2}{x} = \frac{5}{2}a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2} \text{ и } x = 2a$$

Тогда

$$S = \iint\limits_{g} dxdy = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int\limits_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x} dy = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \left(\frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x}\right) = \left(\frac{15}{8} - \ln 4\right) a^2$$

Задача 12.4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \\ x^2 + y^2 \geq a^2 \end{cases}$$

Область является симметричной, поэтому можно вычислить двойной интеграл только по одной четвертинке, Рис. 33.

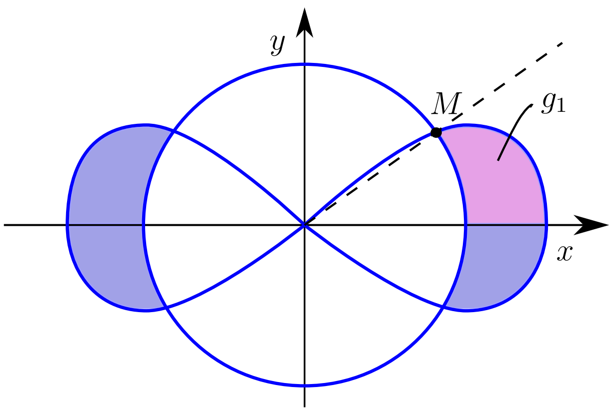

Рис. 33. К задаче 12.4.

Для точки M : $\quad a = a\sqrt{2\cos 2\phi} \;\Rightarrow\; \phi_M = \frac{\pi}{6}$.

$$S = 4S_1 = 4 \iint\limits_{g_1} dxdy = 4 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\phi \int\limits_{a}^{a\sqrt{\cos 2\phi}} \rho d\rho = a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$$

Задача 12.5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} xy = a^2, \\ xy = 2a^2, \\ y = x, \\ y = 2x \end{cases}$$

при условии: $x > 0,\ y > 0$.

Совершим преобразование к новым переменным

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

Тогда границы примут вид

$$\begin{cases} u = a^2, \\ u = 2a^2, \\ v = 1, \\ v = 2 \end{cases}$$

$$S = \iint\limits_{g} dxdy = \iint\limits_{g^*} \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2} \int\limits_{2}^{2a^2} du \int\limits_{1}^{2} \frac{dv}{v} = \frac{a^2}{a} \ln 2$$

Определение. Цилиндроид — тело, ограниченное сверху некой поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхность.

Формула для объема цилиндроида:

$$\boxed{V = \iint\limits_{g} f(x, y) dxdy}$$

Задача 12.6. Найти объём цилиндроида

$$\begin{cases} z = e^{-x^2 - y^2}, \\ z = 0, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

Для решения необходимо перейти к полярным координатам:

$$V = \int\limits_{0}^{2\pi} d\phi \int\limits_{0}^{R} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi \left(1 - e^{-R^2}\right).$$

Масса плоской пластинки с переменной плотностью $\rho(x, y)$:

$$\boxed{m = \iint\limits_g \rho(x, y) dx dy}$$

Центр масс плоской фигуры:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 = \frac{M_y}{m}, \quad M_y = \iint\limits_g \rho(x, y) dx dy \\ y_0 = \frac{M_x}{m}, \quad M_x = \iint\limits_g \rho(x, y) dx dy \end{aligned}}$$

Момент инерции:

$$\boxed{\begin{aligned} I_y = \iint\limits_g \rho(x, y) x^2 dx dy \\ I_x = \iint\limits_g \rho(x, y) y^2 dx dy \end{aligned}}$$

Задача 12.7. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} ay = x^2, \\ 2 + y = 2a \ (a > 0) \end{cases}$$

при условии: $\rho(x, y) = \rho_0$.

$$m = \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy$$

$$m = \frac{9}{2} a^2 \rho_0$$

$$M_y = \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} x dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = -2.25a^3$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{2} a$$

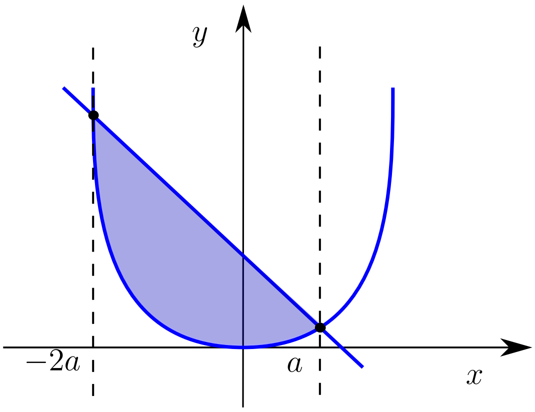

Рис. 34. К задаче 12.7.

Аналогично y_0.

Задача 12.8. Найти моменты инерции $I_x,\ I_y$ однородной пластинки, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-a)^2=a^2, \\ x=0,\ y=0, \\ 0\le x\le a, \end{cases}$$

при условии: $\rho(x,y)=1$.

Семинар 13

Тройной интеграл

Задача 13.1. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V xy^2z^3 dxdydz.$$

Если уравнения границ области V

$$\begin{cases} z = xy, \\ y = x, \\ x = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Будем использовать рабочую формулу:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_g dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz}$$

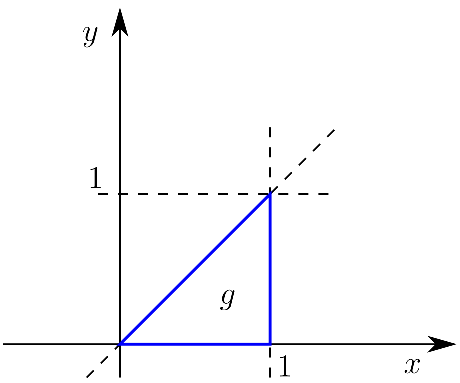

Рис. 35. К задаче 13.1.

$$I = \iint\limits_g xy^2dxdy \int\limits_0^{xy} z^3dz = \frac{1}{4}\iint\limits_g x^5y^6dxdy = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^5dx \int\limits_0^x y^6dy = \frac{1}{364}$$

Ответ: 1/364.

Задача 13.2. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V xyzdxdydz.$$

Если тело V задано системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0. \end{cases}$$

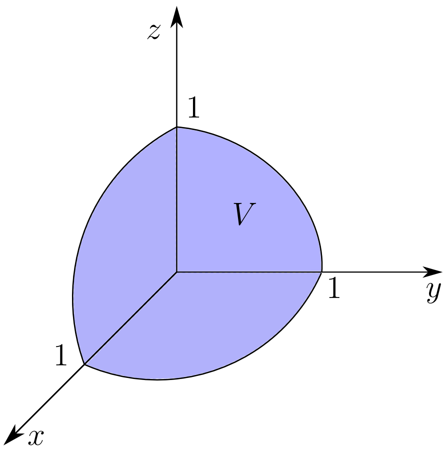

Рис. 36. К задаче 13.2.

$$I = \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) y dy =$$

$$= \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}$$

Ответ: 1/48.

Задача 13.3. Дан повторный интеграл

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z) dz.$$

Необходимо различными способами поменять порядок интегрирования.

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dx \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z) dz$$

$$I = \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^y dz \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z) dx + \int\limits_y^1 dz \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z) dx \right\}$$

и т. д.

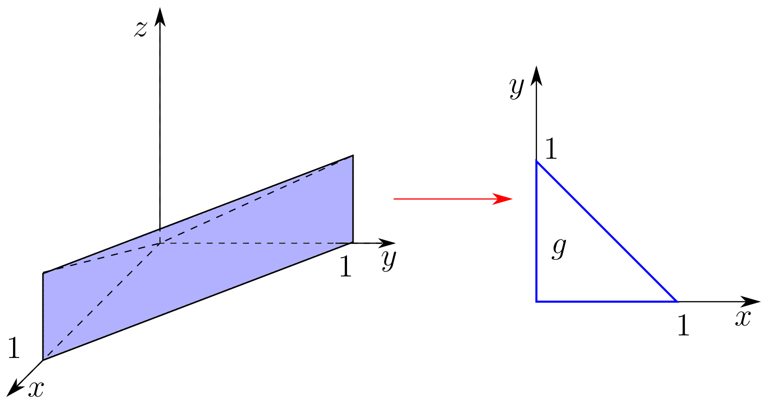

Рис. 37. К задаче 13.3.

Задача 13.4. Дан повторный интеграл

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$$

Необходимо изменить порядок интегрирования.

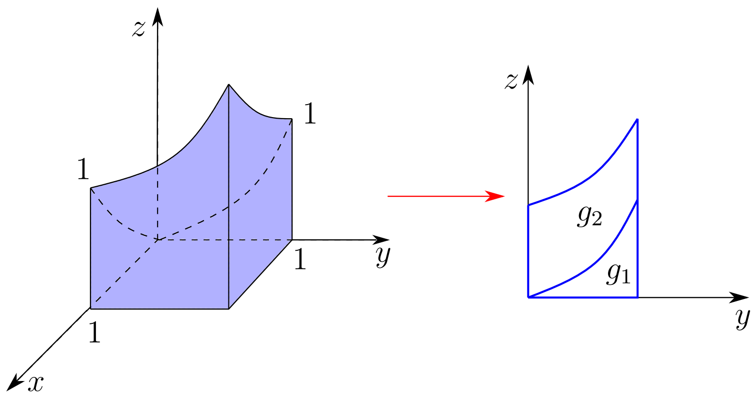

Рис. 38. К задаче 13.4.

$$I = \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^{y^2} dz \int\limits_0^1 f(x,y,z)dx + \int\limits_{y^2}^{2y^2} dz \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx \right\}$$

Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Условия:

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Коэффициент деформации:

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)}\right| = |r^2 \sin\theta|$$

Координатные поверхности:

$$r = \text{const} \ \text{ — сферы}$$

$$\phi = \text{const} \ \text{ — полуплоскость}$$

$$\theta = \text{const} \ \text{ — коническая поверхность}$$

Проколы:

$$\begin{cases} \phi = \text{const} \\ \theta = \text{const} \end{cases} \text{ — луч}$$

$$\begin{cases} \phi = \text{const} \\ r = \text{const} \end{cases} \text{ — полуокружность}$$

$$\begin{cases} \theta = \text{const} \\ r = \text{const} \end{cases} \text{ — окружность}$$

Обобщенные сферические координаты

$$\begin{cases} x = ar\cos^k\phi\sin^m\theta, \\ y = br\sin^k\phi\sin^m\theta, \\ z = cr\cos^m\theta \end{cases}$$

Коэффициент деформации:

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)}\right| = |abcmk\cos^{k-1}\phi\sin^{k-1}\phi\sin^{2m-1}\theta\cos^{m-1}\theta|$$

Семинар 14

Приложения тройного интеграла

Задача 14.1. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz.$$

Если уравнения границ области V

$$\begin{cases} z = x^2+y^2, \\ x = y, \\ x = 1, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

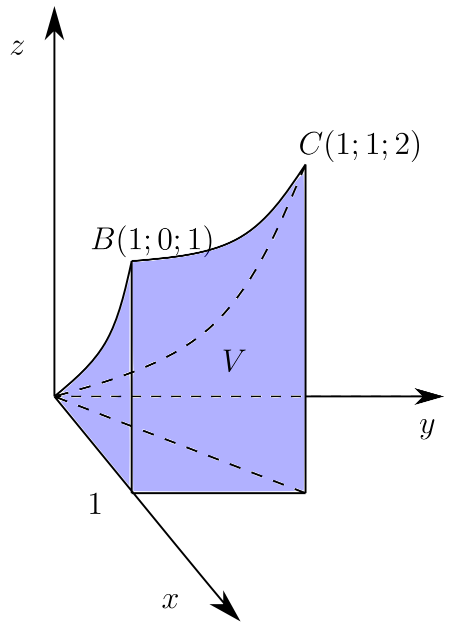

Рис. 39. К задаче 14.1.

Необходимо перейти к сферическим координатам.

$$z = x^2+y^2, \quad r = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$x = y, \quad \cos\phi = \sin\phi, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 1, \quad r\cos\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Дуга BC : $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos\phi\sin\theta} \Rightarrow \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\cos\phi}$.

$$\theta = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\cos\phi}\right)$$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_{\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\cos\phi}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\phi\sin\theta}} f(r) r^2 dr$$

Задача 14.2. Вычислить тройной интеграл:

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2) dxdydz.$$

Если тело V ограничено поверхностями:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2z, \\ z = 2. \end{cases}$$

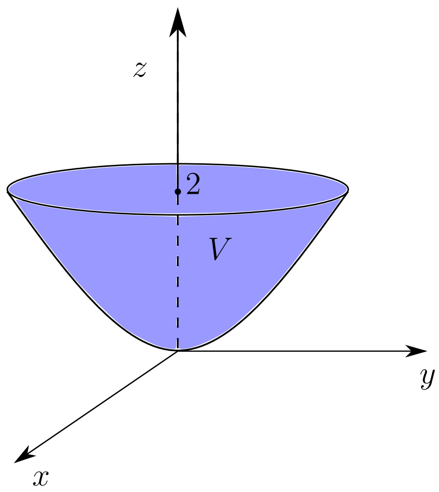

Рис. 40. К задаче 14.2.

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi, \\ z = h. \end{cases}$$

$$\rho^2 = 2h, \quad h = 2, \quad |J| = \rho$$

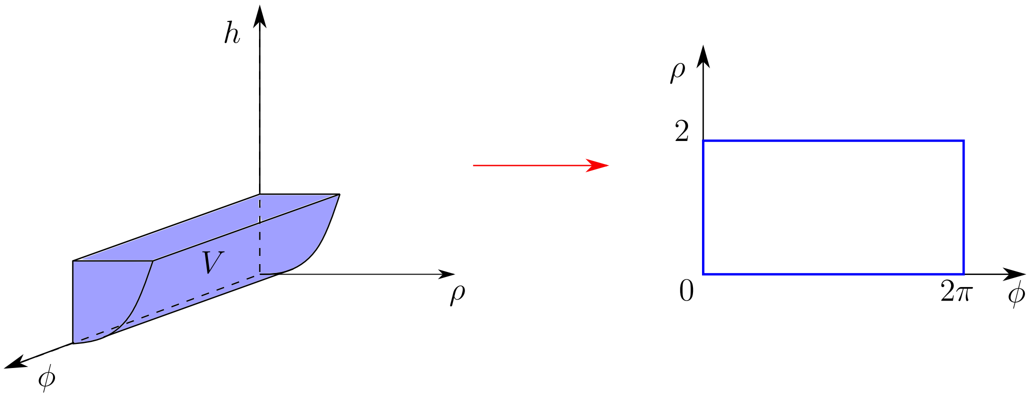

Рис. 41. К задаче 14.2.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 \rho^2 \rho d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dh = 2\pi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz = 2\pi \int\limits_0^2 \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 \left(2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}\right) d\rho = 2\pi \left(\frac{2\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}\pi$$

Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

Задача 14.3. Найти массу телу, для которого $\rho(x) = 8x$. А границы тела заданы как

$$\begin{cases} x^2 = 4z, \\ y^2 = 4x, \\ x = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

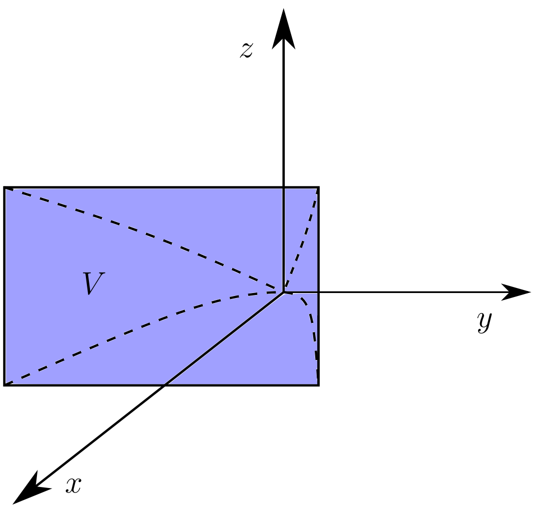

Рис. 42. К задаче 14.3.

$$m = 8\iiint\limits_V xdxdydz = 8\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{1}xdx\int\limits_{0}^{\frac{x^2}{4}}dz = \frac{16}{9}.$$

Ответ: 16/9.

Задача 14.4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2).$$

Подсказка: Перейти к сферическим координатам.
Ответ: $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$.

Задача 14.5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

Воспользуемся обобщенными сферическими координатами:

$$\begin{cases} x = ar\cos\phi\sin\theta, \\ y = br\sin\phi\sin\theta, \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

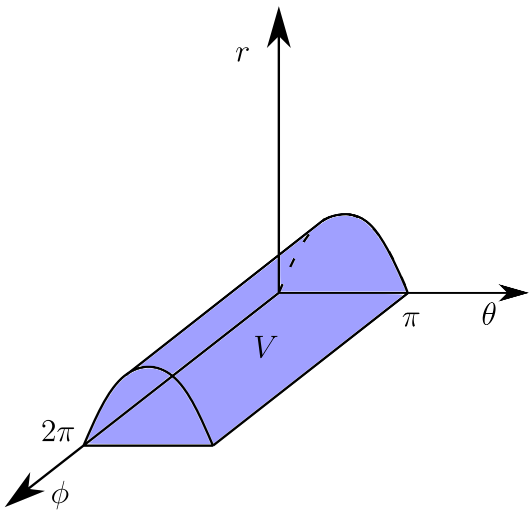

Рис. 43. К задаче 14.5.

$$J = abcr^2\sin\theta$$

$$I = abc\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\sin\theta}r^2dr$$

Ответ: $\frac{abc}{4}\pi^2$.

Семинар 15

Задача 15.1. Найти момент инерции относительно оси Oz тела единичной плотности $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^5 z$.

$$J_z = \iiint (x^2+y^2)dxdydz$$

Необходимо перейти к сферическим координатам

$$x, y, z \quad \to \quad r, \phi, \theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r^5 = a^5\cos\theta$$

$$J_z = 2\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[5]{\cos\theta}} r^2\sin^2\theta r^2\sin\theta dr$$

Ответ: $\frac{\pi a^5}{5}$.

Криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl$$

Требуется, чтобы кривая L была задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta \\ z = z(t) \end{cases}$$

Чтобы на кривой L функции $x(t), y(t), z(t)$ были дифференцируемы.
А подынтегральная функция была определена и непрерывна для всех точек кривой L.

Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt}$$

Задача 15.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L y^2 dl$. Если кривая L задана параметрически

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$I = \int\limits_L y^2 dl = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{(a-\cos t)^2+\sin^2 t}dt =$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi}(\sin^2 t - 2\cos t)\sqrt{1+a^2-2a\cos t}dt = ...$$

Ответ: $\frac{256}{15}a^3$.

Задача 15.3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$. Если кривая L — контур, заданный кривыми

$$\rho = a, \quad \phi = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

Видно, что

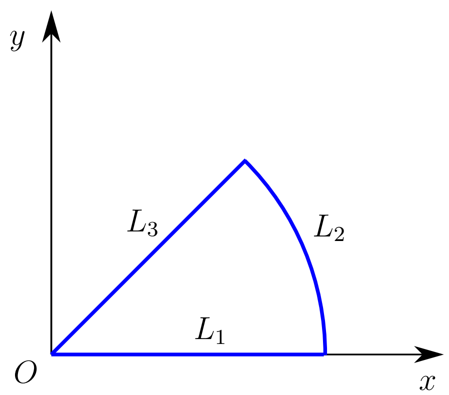

Рис. 44. К задаче 15.3.

$$\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int\limits_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl + \int\limits_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl + \int\limits_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$$

$$L_1: \quad \begin{cases} x = t, \\ y = 0 \end{cases}, \quad dl = dt$$

$$\int\limits_0^a e^t dt = e^a - 1$$

$$L_2: \quad \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad dl = adt$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a dt = ae^a\frac{\pi}{4}$$

$$L_3: \quad \begin{cases} x = t, \\ y = t \end{cases}, \quad dl = \sqrt{2}dt$$

$$\int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}t}\sqrt{2}dt = e^a - 1$$

Ответ: $\left(2 + \frac{a\pi}{4}\right)e^a - 2$.

Задача 15.4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$. Если кривая L задана уравнением

$$x^2 + y^2 = ax$$

Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

$$\rho^2 = a\rho\cos\phi$$

$$\rho = a\cos\phi \;\Rightarrow\; \phi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$I = \int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{a^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi}d\phi = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\phi d\phi = 2a^2$$

Или можно было пойти другим путем

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \\ y = \frac{a}{2}\sin t \end{cases}$$

Задача 15.5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$. Если кривая L задана параметрически (часть винтовой линии):

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl = \int\limits_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + b^2\frac{(2\pi)^3}{3}\right)$$

Задача 15.6. Найти момент инерции однородной окружности $x^2 + y^2 = a^2$ относительно её диаметра

$$J_y = \int\limits_L \rho x^2 dl = \ldots$$

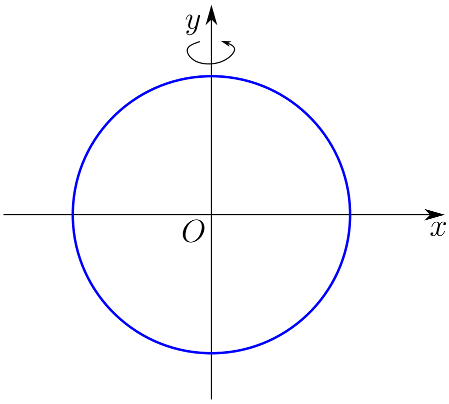

Рис. 45. К задаче 15.6.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\ldots = \rho \int\limits_0^{2\pi} a^2 \cos^2 t \sqrt{a^2} dt = \rho a^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi \rho a^3$$

Задача 15.7. Вычислить координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(b, h)$. Найдем массу:

$$m = \rho a \operatorname{sh} \frac{b}{a}$$

Статический момент относительно оси Oy:

$$M_y = \rho a^2 \left[\frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{b}{a} - \operatorname{ch} \frac{b}{a} + 1 \right]$$

Криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L \left(\vec{F}, \vec{dl} \right)$$

$\vec{F} = \{P, Q, R\}$ — векторная функция

P, Q, R — функции трёх переменных
$\vec{dl} = \{dx, dy, dz\}$
Кривая L задаётся параметрически

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

$$\int\limits_L \left(\vec{F}, \vec{dl}\right) = \int\limits_L P dx + Q dy + R dz$$

Если точка пробегает по кривой в направлении роста параметра t, то справедлива формула

$$\boxed{\int\limits_L P dx + Q dy + R dz = \int\limits_\alpha^\beta \left[P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z}\right] dt}$$

Задача 15.8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy,$$

где $L: \quad y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$

$$\int\limits_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int\limits_{-1}^{1} \left[(x^2 - 2x^3) \cdot 1 + (x^4 - 2x^3) 2x\right] dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} - \frac{2x^6}{6} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{14}{15}$$

Семинар 16

Задача 16.1. Найти криволинейный интеграл второго рода

$$I = \oint\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy,$$

если кривая L — это эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{(пробегается против часовой стрелки)}$$

Перейдем к новым координатам

$$\begin{cases} x = a\cos\phi, \\ y = b\sin\phi \end{cases} \to \quad \begin{cases} \dot{x} = -a\sin\phi, \\ \dot{y} = b\cos\phi \end{cases}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left[(a\cos\phi + b\sin\phi)\cdot(-a\sin\phi) + (a\cos\phi - b\sin\phi)b\cos\phi\right] d\phi = 0$$

Задача 16.2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

если кривая L — линия пересечения двух поверхностей

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2, \\ y = x\operatorname{tg}\alpha \end{cases} \quad (0 < \alpha < \pi)$$

Линия L пробегается против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси Ox.

Перейдем к сферической системе координат и получим

$$L: \quad \begin{cases} x = a\cos\alpha\sin t, \\ y = a\sin\alpha\sin t, \\ z = a\cos t \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} t = 0: & (0;0;\alpha) \\ t = \dfrac{\pi}{2}: & (a\cos\alpha; a\sin\alpha; 0) \end{array}\right. \Rightarrow \text{движемся по часовой стрелке}$$

Ответ: $2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Задача 16.3. Найти работу упругой силы, направленной к началу системы координат, величина которой пропорциональна (с коэффициентом k) удалению

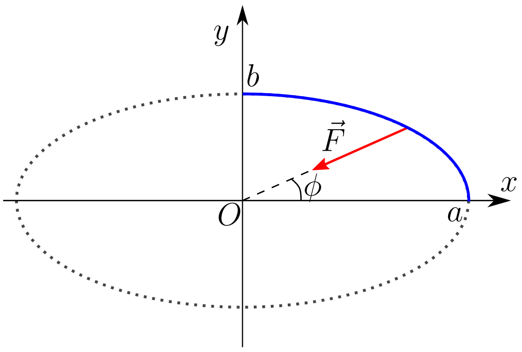

Рис. 46. К задаче 16.3.

материальной точки от начала координат. Если эта точка описывает четверть эллипса в направлении против часовой стрелки.

$$\vec{F}(r) = -k\vec{r} = \{-kx; -ky\}$$

$$A = \int\limits_L \left(\vec{F}, \vec{dl}\right) = \int\limits_L -kxdx - kydy = \int\limits_0^a kxdx - \int\limits_0^b kydy = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) k.$$

Поверхностный интеграл первого рода

S — кусочно-гладкая двусторонняя поверхность.
Описывается S параметрически

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad u,v \in g \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Подынтегральная функция $f(x,y,z)$ непрерывна во всех точках поверхности S. Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\begin{gathered} \iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_g f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}dudv, \\ E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{gathered}}$$

Если поверхность задана как

$$z = z(x,y), \quad x,y \in \sigma$$

Можно использовать другую формулу:

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_\sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy}$$

Задача 16.4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint\limits_S (x+y+z)dS$$

по поверхности заданной как

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$z_x = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}$$

$$I = \iint\limits_S (x+y+z)dS = \iint\limits_\sigma (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy = \pi a^3$$

Семинар 17

Задача 17.1 Найти площадь поверхности, заданной уравнением

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2$$

Введем сферическую систему координат

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sin\theta \ \Rightarrow \ w: \left[\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi, \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{array}\right.$$

Далее получаем

$$\begin{cases} x = \sin^2\theta\cos\phi, \\ y = \sin^2\theta\sin\phi, \\ z = \sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$S = \iint\limits_{w} \sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\phi = \ldots$$

$$E = 1, \quad G = \sin^4\theta, \quad F = 0$$

$$\ldots = \iint\limits_{w} \sin^2\theta d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi^2$$

Задача 17.2. Найти массу параболической оболочки

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad z \in [0;1]$$

Если плотность $\rho = z$.

$$m = \iint\limits_{S} \rho dS = \iint\limits_{S} z dS = \frac{1}{2}\iint\limits_{S} (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \ldots$$

$$\sigma: \quad x^2+y^2 = 2$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^3\sqrt{1+\rho^2}d\rho = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^3+\rho^5}{\sqrt{1+\rho^2}}d\rho = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3})$$

Задача 17.3. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности, вырезанной

$$x^2+y^2 = ax \text{ из поверхности } z = \sqrt{x^2+y^2}$$

Приведём поверхность к каноническому виду

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$S=\iint dS=\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{\sigma}dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\rho\int\limits_0^{a/2}\rho d\rho=\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{2}$$

$$m=\rho\cdot S$$

Ответ: $x_0=\frac{a}{2}$.

Поверхностный интеграл второго рода

Требования:

1) S — гладкая двусторонняя поверхность.

2) S^+ — сторона поверхности, характеризуемая направлением нормали

$$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

3) $P,\ Q,\ R$ — функции трёх переменных непрерывные по всей поверхности S.
Если всё выполнено, справедлива формула

$$\boxed{\iint\limits_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS}$$

Пусть поверхность S задана явно

$$S:\quad z=z(x,y)$$

Очень удобно использовать другую формулу

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\iint\limits_{S^+}Rdxdy=\pm\iint\limits_{\text{Пр}_{xy}S}R(x,y,z(x,y))dxdy\\ \text{«+» ставится, когда } \gamma \text{ — острый угол,}\\ \text{«-» ставится, когда } \gamma \text{ — тупой угол}\end{array}}$$

И обратная формула

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\iint\limits_{S^-} Rdxdy = \mp \iint\limits_{\text{Пр}_{xy}S} R(x,y,z(x,y))dxdy \\ \text{«-» ставится, когда } \gamma \text{ — острый угол,} \\ \text{«+» ставится, когда } \gamma \text{ — тупой угол}\end{array}}$$

Задача 17.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_{S^+} (xdydz + ydzdx + zdxdy),$$

если S^+ — это внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

$$\vec{N} = \{2x, 2y, 2z\}, \quad |\vec{N}| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right\}$$

$$I = \iint\limits_{S^+} (\vec{b}, \vec{n})dS = \iint adS = 4\pi a^3$$

Другой подход:
Разобьем исходный интеграл на сумму трёх

$$I = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J_1 = \iint\limits_{S^+} xdydz = \iint\limits_{S_{\text{пер}}} xdydz + \iint\limits_{S_{\text{зад}}} xdydz$$

$$\text{, где } \sigma: \quad 0 \le z^2 + y^2 \le a^2$$

$$\iint\limits_{S_{\text{пер}}} xdydz = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{a^2-y^2-z^2}dydz$$

$$\iint\limits_{S_{\text{зад}}} xdydz = -\iint\limits_{\sigma} -\sqrt{a^2-y^2-z^2}dydz$$

$$J_1 = 2\iint\limits_{\sigma} \sqrt{a^2-y^2-z^2}dydz$$

Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} z = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

$$J_1 = 2\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho = 2\pi \int\limits_0^a \sqrt{a^2-\rho^2} d\rho^2 = -2\pi \int\limits_{a^2}^0 \sqrt{t} dt = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$I = 3J_1$$

Ответ: $4\pi a^3$.

Задача 17.5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_{S^-} (x^2+y^2) dxdy,$$

если S^- — внутренняя часть поверхности верхней полусферы

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Можно явно выписать поверхность

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$I = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2) dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\rho \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{\pi}{2}$$

Формула Грина

$$\boxed{\oint_{\partial G^+} (Pdx+Qdy) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}$$

Требования:

1) Область G может быть не односвязной.

2) Граница ∂G^+ обходится так, что область G остаётся слева.

3) $P, Q \quad \in \quad C^1_{\overline{G}}$.

Пример. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{C^+} (e^x+2xy)dx + (x^2+\cos y)dy,$$

если C — кривая, заданная параметрически

$$\begin{cases} x = 5\cos t - \cos 5t, \\ y = 5\sin t - \sin 5t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ответ: 0.

Семинар 18

Задача 18.1 Найти центр тяжести однородной кривой L, если она является границей поверхности

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x \geq 0, \quad y \geq, \quad z \geq 0 \end{cases}$$

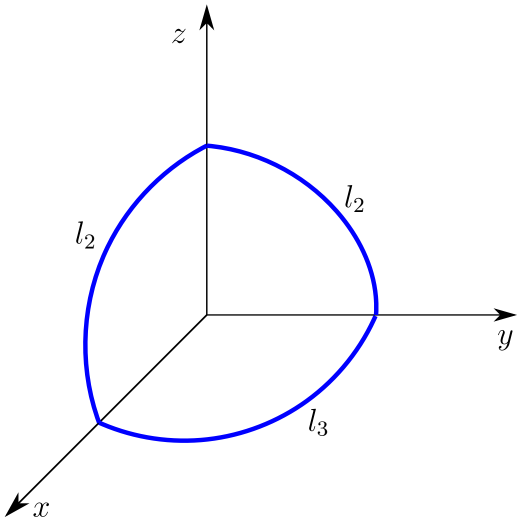

Рис. 47. К задаче 18.1.

$$m = \int\limits_L dl = \int\limits_{l_1} \ldots + \int\limits_{l_2} \ldots + \int\limits_{l_3} \ldots$$

Каждый интеграл опишем с помощью полярной системы координат.

$$m = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_0 = \frac{\int\limits_L zdl}{m} = \frac{4a}{3\pi}$$

Задача 18.2. Высчитать площадь ограниченной линией

$$\begin{cases} x = 5\cos t - \cos 5t, \\ y = 5\sin t - \sin 5t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Будем решать через формулу Грина

$$S = \iint\limits_G dxdy$$

$$\Rightarrow \quad Q_x - P_y = 1$$

Можно взять

$$Q = x, \quad P = 0$$

$$Q = 0, \quad P = -y$$

$$Q = \frac{x}{2}, \quad P = -\frac{y}{2}$$

Ответ: 30π.

Задача 18.3. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{L_M^N} (\sin x - y^3)dx + (x^3 + y^5)dy,$$

если L_M^N — дуга кривой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x > 0, \quad y > 0 \end{cases}.$$

Необходимо дополнить контур до замкнутого (Рис. 48.) и тогда

$$\oint\limits_{\partial G^+} = \int\limits_0^a \sin x dx + J + \int\limits_a^0 y^5 dy = \iint\limits_G (3x^2 + 3y^2)dxdy$$

Ответ: $\frac{3\pi a^4}{8} + \frac{a^6}{6} - 1 + \cos a$.

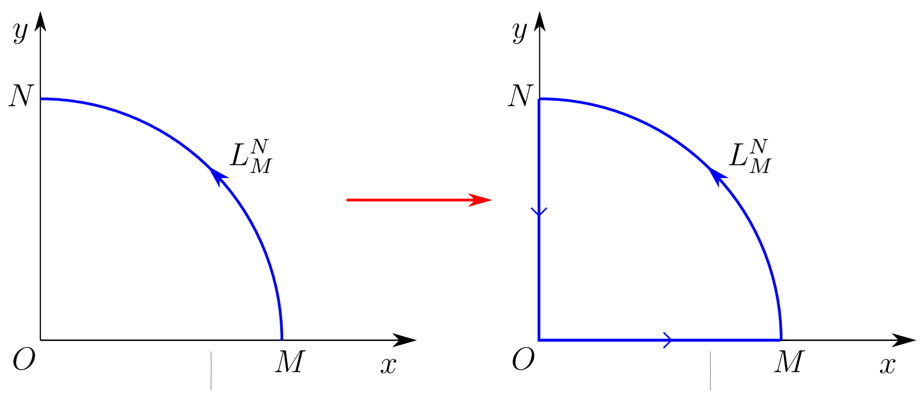

Рис. 48. К задаче 18.3.

Задача 18.4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{L^+} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},$$

если L — любой замкнутый контур.

1 случай: Начало координат не попадает внутрь контура (Рис. 49.)

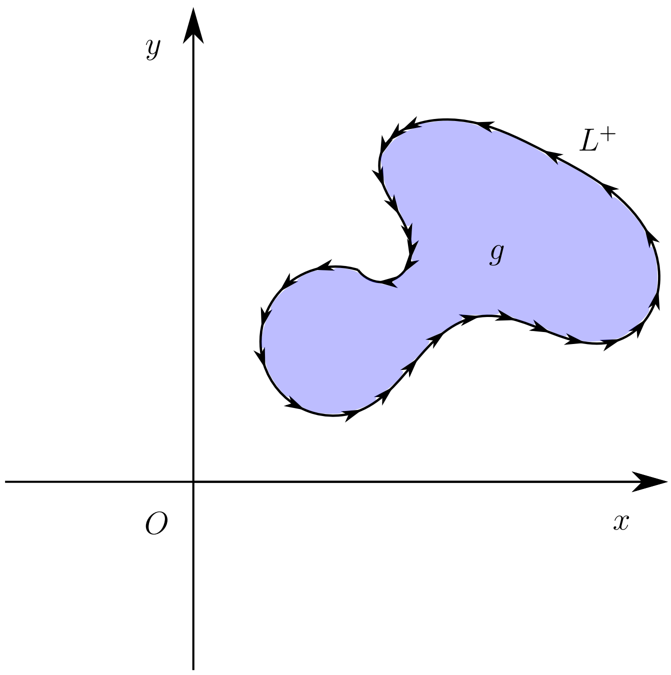

Рис. 49. К задаче 18.4.

$$\int\limits_{L^+} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \iint \left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) dxdy = 0$$

2 случай: Формулу Грина применить сразу нельзя, нужно добавить дополнительный контур γ (Рис. 50.)

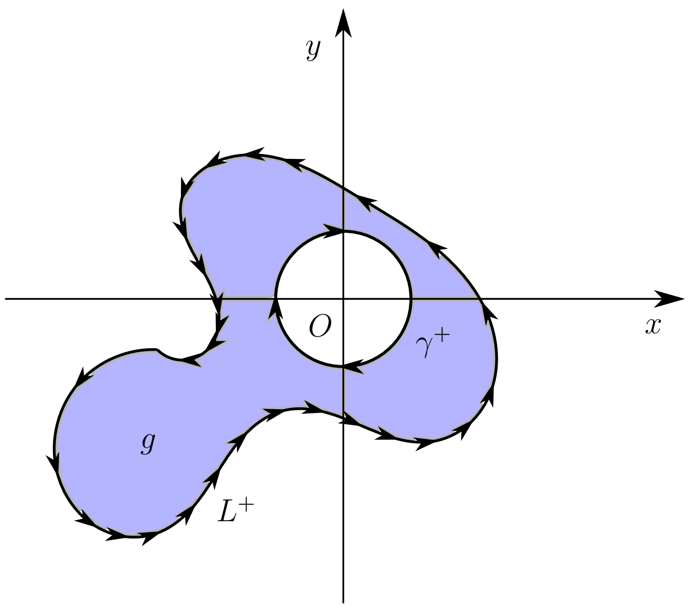

Рис. 50. К задаче 18.4.

$$\gamma: \quad \begin{cases} x = \varepsilon\cos\phi, \\ y = \varepsilon\sin\phi \end{cases}$$

$$\oint\limits_{L^+} + \int\limits_{\gamma^-} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \oint\limits_{L^+} = \int\limits_{\gamma^+} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2\sin^2\phi + \varepsilon^2\cos^2\phi}{\varepsilon^2} d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Задача 18.5. Дан интеграл

$$\int\limits_{L_B^A} F(x,y)(ydx + xdy)$$

При каких условиях этот интеграл не зависит от пути кривой L из точки A в B.

$$I_{L^+} \quad + \quad I_{L^-} \quad = \quad 0$$

$$\oint F(x,y)(ydx + xdy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \iint\limits_g \left(\frac{\partial(F(x,y)x)}{\partial x} - \frac{\partial(F(x,y)y)}{\partial y} \right) dxdy$$

В итоге, получаем условие

$$xF_x = yF_y$$

Поток векторного поля. Формула Остроградского

Определение. Пусть есть вектор $\vec{A} = \{P, Q, R\}$, P, Q, R —функции трех переменных. Поток этого вектора через бесконечно малую площадь $d\sigma$ ($\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$) равен

$$d\Pi = (\vec{A}, \vec{n})d\sigma = (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma.$$

А суммарный поток вектора $\vec{A}$ через поверхность Σ:

$$\boxed{\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n})d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma}$$

Задача 18.6. Даны вектор $\vec{A} = \frac{1}{r^3}\vec{r}$ и поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Необходимо вычислить поток вектора $\vec{A}$ через поверхность этой сферы.

Ответ: 4π.

Формула Остроградского:

$$\boxed{\iint\limits_{S^+} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\omega}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ