ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 1

ШИШКИН
АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА

СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

ИЛЬИНА ПАВЛА КОНСТАНТИНОВИЧА

Содержание

Семинар 1 5
- Метод полной математической индукции . . . 6
- Комплексные числа . . . 6

Семинар 2 11
- Числовая последовательность . . . 12

Семинар 3 14
- Однозначная функция одной вещественной переменной . . . 14
- Предел функции в точке . . . 15

Семинар 4 18
- Производная сложной функции . . . 18
- Логарифмическая производная . . . 19

Семинар 5 21
- Дифференциал . . . 21
- Производные старшего порядка . . . 22
- Мажорантная и минорантная оценки . . . 23
- Фундаментальность последовательности . . . 25

Семинар 6 26
- Метод тождественного алгебраического преобразования подынтегральной функции . . . 26
- Метод замены переменной . . . 27
- Метод подстановки . . . 29
- Интегрирование по частям . . . 29
- Интегрирование рациональных функций . . . 30

Семинар 7 31
- Метод зачеркивания/закрывания . . . 31
- Интегрирование иррациональных функций . . . 32
- Дробно-линейная иррациональность . . . 33
- Квадратичная иррациональность . . . 33

Семинар 8 37
- Определенный интеграл . . . 37

Семинар 9 43
- Правило Лопиталя . . . 43
- Формула Тейлора . . . 44

Семинар 10 47
- Исследование функций на экстремум . . . 47

Семинар 11 **52**
Дифференциалы высших порядков 52
Простейшая тригонометрия 53

Семинар 12 **59**
Решение тригонометрических уравнений 59

Семинар 13 **63**
Уравнения с параметром 63
Прогрессии 65

Семинар 1

Возведение в натуральную степень действительного числа

$$\boxed{(a^n, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left(\left[\begin{array}{c} a, \quad \text{если } n = 1 \\ \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \quad \text{если } n \geq 2 \end{array} \right. \right)}$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой двухсторонней окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Тогда производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пример. Найти производную и её область определения для функции $y = \sqrt{x}$.

Ответ: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D_{y'} = (0; +\infty)$.
(0 не принадлежит $D_{y'}$, т. к. сама функция не определена в двухсторонней окрестности точки $x = 0$)

Пример. Найти производную и её область определения для функции $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$.

$D_y = 0$, всего одна точка $\Rightarrow$ *Ответ*: производной нет.

Задача 1.1. Доказать, что любая медиана треугольника меньше полусуммы всех его сторон.

Док-во:

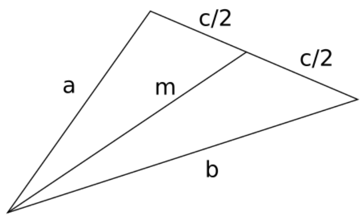

Рис. 1. К задаче 1.1.

$$\begin{array}{c}\text{Из теоремы о том, что каждая сторона треугольника} \\ \text{меньше суммы двух других сторон}\end{array} \Rightarrow \begin{cases} m < a + \dfrac{c}{2} \\ m < b + \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Далее по теореме о том, что два неравенства одинакового знака можно почленно складывать получаем

$$m < \frac{a + b + c}{2} \text{ что и т. д.}$$

Метод полной математической индукции

Индукция — это форма познания, в которой мы идем от частного к общему. Она используется не только в математике, но и в биологии, физике и просто обычной жизни.

Пусть у нас есть набор высказываний $A(k)$, занумерованных натуральными числами $k \in \mathbb{N}$. Мы хотим доказать, что этим высказывания справедливы при любом натуральном k, начиная с какого-то определенного k_0. Это доказательство разбивается на два этапа:

1) Доказать, что высказывание справедливо при $k = k_0$.
2) Доказать, что если верно высказывание $A(k')$ (при любом $k' > k_0$), то верно и $A(k'+1)$.

Пример. Даны два числа b_1, q и рекуррентная формула $b_{n+1} = b_n q$ (т. е. задана геометрическая прогрессия). Доказать, что справедлива формула $b_{n+1} = b_1 q^n$.

Док-во:

$$\underline{\text{при } n = 1:} \quad b_2 = b_1 \cdot q \text{ или } b_2 = b_1 \cdot q^1 = b_1 \cdot q$$

$$\underline{\text{при } n = k:} \quad b_{k+1} = b_1 \cdot q^k \text{ ,тогда } b_{k+2} = b_{k+1} \cdot q = b_1 \cdot q^k \cdot q = b_1 \cdot q^{k+1} \textit{ что и т. д.}$$

Комплексные числа

Алгебраический способ формальной записи символа комплексного числа: $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

Правило сложения/вычитания двух комплексных чисел:

$$\boxed{(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)}$$

Правило перемножения двух комплексных чисел:

$$\boxed{(x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

Из этого правила следует, что $i \times i = -1$, т. е. $i = \sqrt{-1}$.

Правило деления двух комплексных чисел:

$$\boxed{\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}$$

Можно дать геометрическую интерпретацию комплексного числа используя декартову систему координат (Рис. 2.):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \begin{cases} \sin\phi = \dfrac{y}{\rho} \\ \cos\phi = \dfrac{x}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \phi = \phi_0 + 2\pi n$$

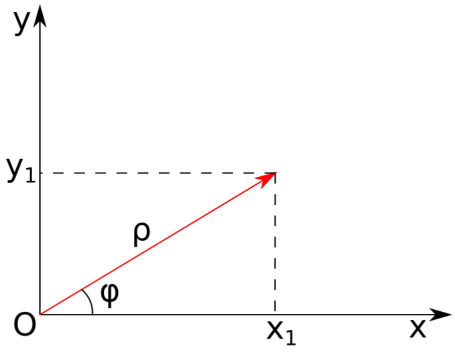

Рис. 2. Геометрическое представление комплексного числа

Три формы записи комплексного числа:

$$x + iy = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi}$$

$$\boxed{\text{Формула Муавра: } (\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)}$$

Задача 1.2. Дано $w = r(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$. Решить уравнение $z^n = w$.
Ответ: $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$

Задача 1.3. Решить уравнение $z^3 = -8$.

$$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = -2$$
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

Ответ: $z_{1,3} = 1 \pm i\sqrt{3}, \quad z_2 = -2.$

$$\boxed{\text{Квадратный корень из мнимой единицы } \sqrt{i} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}\end{array}\right.}$$

Определение. Два числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ называются комплексно сопряженными.

$$\boxed{\begin{array}{c} z\overline{z} = x^2 + y^2 \\ \rho = \sqrt{z\overline{z}} \end{array}}$$

Задача 1.4. Вычислить $\frac{3+i5}{1+i7}$.

$$\frac{3+i5}{1+i7} = \frac{(3+i5)(1-i7)}{(1+i7)(1-i7)} = \frac{3+i5-i21+35}{50} = \frac{19}{25} - i\frac{8}{25}$$

Алгоритм решения неравенств вида $f(x) > g(x)$:

$$f(x), \quad x \in D_1; \quad g(x), \quad \in D_2; \quad D = D_1 \cap D_2$$
$$\forall x \in D \qquad \underbrace{f(x) - g(x)}_{F(x)} > 0 \Leftrightarrow F(x) > 0$$

1) Выписать точки разрыва $b_1,\ b_2, ...,\ b_n$ функции $F(x)$.

2) Выписать решения уравнения $F(x) = 0$ (точки $a_1,\ a_2, ...,\ a_k$).

3) В области D отметить точки $a_1, ...,\ a_k,\ b_1, ...,\ b_n$ и найти области знакопостоянства функции $F(x)$.

Задача 1.5. Решить неравенство $\sqrt{1-x} > \sqrt{x}$.

$$F(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x} > 0$$
$$1) \quad D_F = [0; 1]$$
$$2) \quad \sqrt{1-x} - \sqrt{x} = 0$$
$$1 - x + x - 2\sqrt{(1-x)x} = 0$$
$$\sqrt{(1-x)x} = \frac{1}{2}$$

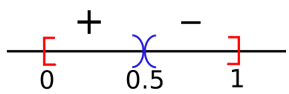

Рис. 3. К задаче 1.5.

Ответ: $x \in [0; 0.5)$.

Задача 1.6. Для любых действительных a, b решить неравенство $ax + b > 0$.

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$$
$$1) \quad \left.\begin{matrix} a \in (0; +\infty) \\ b \in (-\infty; +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$$
$$2) \quad \left.\begin{matrix} a \in (-\infty; 0) \\ b \in (-\infty; +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$$

$$3)\quad a=0 \Rightarrow 0>-b \Rightarrow \left[\begin{array}{c} b\in(0;+\infty),\quad x\in(-\infty;+\infty) \\ b\in(-\infty;0],\quad x\in\varnothing \end{array}\right.$$

$$\textit{Ответ:}\ \text{при } a\in(-\infty;0),\quad b\in(-\infty;+\infty):\quad x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{при } a=0\ \left[\begin{array}{c} b\in(0;+\infty),\quad x\in(-\infty;+\infty) \\ b\in(-\infty;0],\quad x\in\varnothing \end{array}\right.$$

$$\text{при } a\in(0;+\infty),\quad b\in(-\infty;+\infty):\quad x\in\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$$

Задача 1.7. Решить неравенство $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+1}{2x-7}<0$.

$$\text{Перепишем неравенство в виде: } \frac{\log_{\frac{1}{2}}\left((x-2)(x-3)\frac{1}{2}\right)}{2x-7}<0$$

$$1)\quad \begin{cases} x>2 \\ x>3 \\ 2x-7\neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_F=\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$$

$$2)\quad (x-2)(x-3)\frac{1}{2}=1$$
$$x^2-5x+6=2$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$x_1=1,\quad x_2=4$$

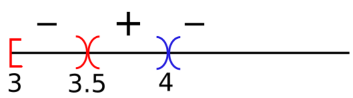

Рис. 4. К задаче 1.7.

Ответ: $x\in(3;3.5)\cup(4;+\infty)$.

Задача 1.8. Решить неравенство $(2x^2-4x+1)\arcsin(x-1)>0$.

$$1)\quad -1\le x-1<\le 1 \Rightarrow D_F=[0;2]$$
$$2)\quad 2x^2-4x+1=0$$
$$D=16-8=8$$
$$x_{1,2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\arcsin(x-1)=0$$
$$x_3=1$$

Ответ: $x \in \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right]$.

Задача 1.9. Решить неравенство $\sin(\operatorname{arctg} x) > \frac{4}{5}$.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

Но решаем в области $0 < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$ (т. к. синус положителен в этой четверти)

$$\Rightarrow \text{мы можем применить формулу } \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

Ответ: $x \in (4/3; +\infty)$.

Задача 1.10. Решить неравенство $\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \dfrac{2x-1}{x-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow D_F : x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$$

Пропотенциируем исходное неравенство отдельных на каждой из двух областей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2x-1}{x-1} < x \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty), \\ \dfrac{2x-1}{x-1} > x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ 2x - 1 > (x-1)x \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty), \\ 2x - 1 > x(x-1) \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задача 1.11. Решить неравенство $\frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{1+2x} - 1$.

Семинар 2

Задача 1.1. Решить неравенство $\frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{1+2x} - 1$.
Область определения $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty)$. Найдем нули

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}}(\sqrt{1+2x}+1) = (\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)$$

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}} = \frac{2x}{\sqrt{1+2x}+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{2x+9} = \sqrt{1+2x}+1 \Rightarrow x = \dfrac{45}{8} \end{array}\right.$$

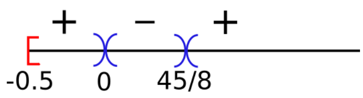

Рис. 5. К задаче 2.1.

Ответ: $x \in (0; \frac{45}{8})$.

Задача 2.2. Дано неравенство $|x+a| \leq x$. Нужно найти решение этого неравенства для всех значений параметра a.

Решение:
Сразу видно, что нужно рассматривать только $x \geq 0$, т. к. модуль по определению неотрицателен. Далее существует два подхода к решению данного неравенства.

1 способ. Снова воспользуемся определением модуля, и задача распадётся на две части:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+a \geq 0, \\ x+a \leq x, \\ x \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x+a < 0, \\ -(x+a) \leq x, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -a, \\ a \leq 0, \\ x \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x < -a, \\ x \geq -\dfrac{a}{2}, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in (-\infty, 0], x \in [-a, \quad +\infty) \\ \begin{cases} a \leq 0 \\ a \in (-\infty, 0), x \in [-\dfrac{a}{2}, \quad +\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

2 способ. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ (x+a)^2 \leq x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2ax + a^2 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \quad , \quad x \geq 0 \\ a > 0, \quad x \leq -\dfrac{a}{2} \\ a < 0, \quad x \geq -\dfrac{a}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: 1) при $a \in (-\infty, 0]$, $x \in [-\frac{a}{2}, \quad +\infty)$
2) при $a \in (0, +\infty)$, $x \in \varnothing$

Числовая последовательность

Определение. Пусть для $\forall n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие по определенному закону вещественное число x_n, тогда множество чисел $x_1,\ x_2,\ x_3, ...$, расположенных в порядке возрастания номера n, называется числовой последовательностью $\{x_n\}$.

Пример. Пусть дана последовательность $x_n = \frac{n}{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$. Необходимо доказать, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Док-во: Чтобы это доказать нам нужно вспомнить определение числовой последовательности:

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = a\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ \Rightarrow\ \ |x_n - a| < \varepsilon)}$$

Таким образом, нам нужно решить функциональное неравенство вида

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad (**)$$

Для этого возьмем некоторое фиксированное $\varepsilon_0 > 0$ и предположим, что существует n_0:

$$\frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon_0$$

А это уже числовое неравенство, которое можно решить

$$\frac{1}{\varepsilon_0} < n_0 + 1 \Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon_0} - 1 \Rightarrow n_0 = [\frac{1}{\varepsilon_0}]$$

Очевидно, для $\forall n > n_0$ (по аксиоме Архимеда) будет верно неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon_0$. Поскольку ε_0 мы фиксировали, но не задавали конкретно, утверждение $(**)$ верно для любого положительного ε.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists M > 0$ такое, что $\forall n \quad |x_n| \leq M$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если $\forall M > 0\ \ \exists n : |x_n| > M$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\forall A > 0\ \ \exists N$ такое, что $\forall n > N \quad |x_n > A|$ (т. е. последовательность стремится к бесконечности определенного знака).

Пример. Последовательность $n^{(-1)^n}$ — неограниченная, но не является бесконечно большой.

Задача 2.3. Доказать, что последовательность $x_n = n^k \quad (\forall k > 0)$ является бесконечно большой.

Подсказка. Вместо $\forall A > 0$ использовать равносильное условие $\forall A^{1/k} > 0$.

Задача 2.4. Найти $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0.$$

Задача 2.5. Найти $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Семинар 3

Однозначная функция одной вещественной переменной

Задача 3.1. Найти область определения функции:

1)

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sin nx}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Необходимо решить систему:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \sin nx \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (\frac{\pi k}{n}; \frac{\pi + \pi k}{n}), \quad k \in \mathbb{Z}_0.$

2)

$$y = \operatorname{ctg} \pi x + \arcsin 2^x$$

Ответ: $x \in (-k-1; -k), \quad k \in \mathbb{Z}_0.$

Новые функции:

- «Знак x»

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Она очень удобна в применении:

$$y = \operatorname{sign} f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$

С помощью неё можно записать модуль: $y = |x| = x \cdot \operatorname{sign} x$.

- «Гиперболический синус»

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- «Гиперболический косинус»

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- «Натуральный логарифм»

$$y = \ln x = \log_e x,$$

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.7$$

Предел функции в точке

Определение. Предел функции $f(x)$ в точке a по Коши:

$$(\lim_{x\to a} f(x) = b) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Известно $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Longleftrightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$, где $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.
Тогда

$$\boxed{\sin x = x + x\alpha(x) = x + o(x)}$$

Аналогично для других функций можно записать:

асимптотические формулы
$\arcsin x = x + o(x)$
$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\ln(1+x) = x + o(x)$
$(1+x)^r = 1 + rx + o(x)$
$a^x = 1 + x\ln a + o(x)$

Задача 3.2. Найти $\lim_{x\to x_0} \sin x$.
Пусть $x = x_0 + t$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \lim_{t\to 0} \sin{(x_0 + t)} = \lim_{t\to 0} [\sin x_0 \cos t + \cos x_0 \sin t] =$$
$$= \lim_{t\to t_0} \left[\sin x_0 \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) + \cos x_0 (t + o(t)) \right] = \lim_{t\to 0} [\sin x_0 + t\cos x_0 + o(t)] = \sin x_0$$

Попутно мы доказали, что синус — это непрерывная функция.
Асимптотические формулы — это тождественное преобразование!

Задача 3.3. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x}{n} - 1 + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{n} + \frac{o(x)}{x} \right] = \frac{1}{n}.$$

Задача 3.4. Найти $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$.
Пусть $x = 1 + t$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+t}-1}{\sqrt[n]{1+t}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{t}{m} - 1 + o(t)}{1 + \frac{t}{n} - 1 + o(t)} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{m} + o(t)}{\frac{t}{n} + o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{m} + \frac{o(t)}{t}}{\frac{1}{n} + \frac{o(t)}{t}} = \frac{n}{m}.$$

Задача 3.5. Найти $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$.
Пусть $x = \pi + t$.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{t\to0} \frac{\sin(m\pi + mt)}{\sin(n\pi + nt)} = \lim_{t\to0} \frac{\cos m\pi \cdot \sin mt}{\cos n\pi \cdot \sin nt} = \lim_{t\to0} \frac{(-1)^m(mt + o(t))}{(-1)^n(nt + o(t))} =$$

$$= (-1)^{m-n} \lim_{t\to0} \frac{m + to(t)}{n + to(t)} = (-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

Задача 3.6. Найти $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 3.7. Найти $\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$.
Пусть $x = a + t$.

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{t\to0} \frac{\ln(a+t) - \ln a}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\ln\left(\frac{a+t}{a}\right)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{a}\right)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{t}{a} + o(t)}{t} = \frac{1}{a}.$$

Задача 3.6.(2) Найти $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{2(\frac{x}{2} + o(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{2(\frac{x^2}{4} + o(x))}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 3.8. Найти $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^2x)}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \ln(1+2e^{-3x})}{2x + \ln(1+3e^{-2x})} = \frac{3}{2}.$$

Задача 3.9. Найти $\lim_{x\to0} \frac{\ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+ax))}{\sin bx}$.

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + ax))}{\sin bx} = \lim_{x\to0} \frac{\ln\frac{1+\operatorname{tg} ax}{1-\operatorname{tg} ax}}{bx + o(x)} = \lim_{x\to0} \frac{2\operatorname{tg} ax + o(\operatorname{tg} ax)}{bx + o(x)} = \lim_{x\to0} \frac{2ax + o(x)}{bx + o(x)} = \frac{2a}{b}.$$

Задача 3.10. Найти $\lim_{x\to0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to0} \frac{\ln(1 - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2))}{\ln(1 - \frac{(bx)^2}{2} + o(x^2))} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Задача 3.11. (*Устно*) Найти

$$\lim_{x\to0} \frac{\arcsin\arcsin\operatorname{tg}\ln[1 + \arcsin\operatorname{tg}\arcsin\ln(1 + \sin\sin\sin x)]}{1 - a^{\ln[1-\sin\sin\operatorname{tg} x]}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\ln a}$.

Задача 3.12. (*Устно*) Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\sin\sin\operatorname{tg}\frac{(x-1)^2}{2}}{\ln\cos(x-1)}.$$

Ответ: -1.

Задача 3.13. Рассмотрим предел $\lim u^v$, где $u=\frac{1+x}{2+x}$ и $v=\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.

1) При $x\to 0$: $\frac{1}{2}$

2) При $x\to 1$: $\sqrt{\frac{2}{3}}$

3) При $x\to +\infty$: 1

Выражение u^v можно переписать в виде $\exp\{v\ln|u|\}$, тогда

$$\lim_{x\to a}u^v=\exp\{\lim_{x\to a}v\ln|u|\}.$$

Задача 3.14. Найти $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\exp\{\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)\}=\exp\{\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)\}=$$
$$=\exp\{\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{3}{x^2-2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\}=e^3.$$

Задача 3.15. Найти $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+2\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+2\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+2\sin x}\right)\}=$$
$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+x+o(x)}{1+2x+o(x)}\right)=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left(1-\frac{1}{1+2x+o(x)}\right)\}=$$
$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(-\frac{x}{1+2x+o(x)}\right)\}=\exp\{\lim_{x\to 0}-\frac{x}{(x+o(x))(1+2x+o(x))}\}=$$
$$=\exp\{\lim_{x\to 0}-\frac{x}{x+o(x)}\}=\frac{1}{e}.$$

Семинар 4

Производная сложной функции

Дифференцирование сложной функции:

$$\boxed{\begin{array}{c} u = f\left(h\left(g(x)\right)\right) \\ u' = f'_h \cdot h'_g \cdot g'_x \end{array}}$$

Пример.

1)
$$y = \sin x^3 \Rightarrow y' = \cos x^3 \cdot 3x^2$$

2)
$$y = \sin(2^{x^3}) \Rightarrow y' = \cos(2^{x^3})2^{x^3}\ln 2 \cdot 3x^2$$

3)
$$y = \sin(2^{\sqrt{1-x^3}}) \Rightarrow y' = \cos(2^{\sqrt{1-x^3}})2^{\sqrt{1-x^3}}\ln 2\frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}(-3x^2)$$

4)
$$y = \sin(2^{\sqrt{1-\ln \operatorname{tg} x^3}}) \Rightarrow y' = \cos(2^{\sqrt{1-\ln \operatorname{tg} x^3}})2^{\sqrt{1-\ln \operatorname{tg} x^3}}\ln 2\frac{-1}{\operatorname{tg} x^3}\left(\frac{1}{\cos^2 x^3}\right)3x^2$$

Задача 4.1. Найти производную и области определения производной и функции $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

$$D_f = [0; +\infty)$$

$$f' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$D_{f'} = (0; +\infty)$$

Рассмотрим функцию знака:
$y = \operatorname{sign} x$
$(\operatorname{sign} x)' = 0, \quad x \neq 0$
$(\operatorname{sign} f(x))' = 0, \quad f(x) \neq 0$

Тогда для модуля получим:
$y = |x| = x \cdot \operatorname{sign} x, \quad x \neq 0$
$(|x|)' = x \cdot 0 + 1 \cdot \operatorname{sign} x = \operatorname{sign} x \quad (x \neq 0)$

Но если взять похожую функцию:
$y = x|x| = x^2 \cdot \operatorname{sign} x$
$x \neq 0: \quad y' = 2x \operatorname{sign} x + x^2 \cdot 0 = 2|x|$
$x = 0: \quad y'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle x|\triangle x| - 0}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} |\triangle x| = 0$

(т. е. в нуле нельзя применить теорему о производной произведения функций, но сама производная в нуле существует)

Логарифмическая производная

$y = \ln|x|, \quad x \neq 0$

$y' = \dfrac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sign} x = \dfrac{1}{x}$

$y = \ln|f(x)|$

$(\ln|f(x)|)' = \dfrac{1}{|f(x)|} \cdot \operatorname{sign} x \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot (\ln|f(x)|)'}$$

Задача 4.2. Найти производную функции $y = \frac{x^5(1-x)^6(x-2)^{1/3}}{\sin^9 x}$.

$$y' = \frac{x^5(1-x)^6(x-2)^{1/3}}{\sin^9 x} \ln\left(\left|\frac{x^5(1-x)^6(x-2)^{1/3}}{\sin^9 x}\right|\right)' =$$
$$= \frac{x^5(1-x)^6(x-2)^{1/3}}{\sin^9 x}(5\ln|x| + 6\ln|1-x| + \frac{1}{3}\ln|x-2| - 9\ln|\sin x|)' =$$
$$= \frac{x^5(1-x)^6(x-2)^{1/3}}{\sin^9 x}\left(\frac{5}{x} - \frac{6}{1-x} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{9}{\sin x}\cos x\right).$$

Задача 4.3. Найти производную функции $y = \sqrt[7]{\frac{x^8 \operatorname{tg}^5 x^3}{\cos^3(1-x)a^{\sqrt{x}}}}$.

$$y' = \sqrt[7]{\frac{x^8 \operatorname{tg}^5 x^3}{\cos^3(1-x)a^{\sqrt{x}}}}\frac{1}{7}[8\ln|x| + 5\ln|\operatorname{tg} x^3| - 3\ln|\cos(1-x)| - \sqrt{x}\ln a]' =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{x^8 \operatorname{tg}^5 x^3}{\cos^3(1-x)a^{\sqrt{x}}}}\frac{1}{7}[\frac{8}{x} + \frac{5}{\operatorname{tg} x^3}\frac{3x^2}{\cos^2 x^3} - \frac{3}{\cos(1-x)}(-\sin(1-x))(-1) - \frac{\ln a}{2\sqrt{x}}].$$

Задача 4.4. Найти производную функции $y = |\sin x|$.
Из графика (Рис.6.) видно, что

$$(|\sin x|)' = \begin{cases} \cos x, \quad x \in (2\pi n; 2\pi n + \pi), \quad n \in \mathbb{Z} \\ -\cos x, \quad x \in (2\pi k + \pi; 2\pi k + 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

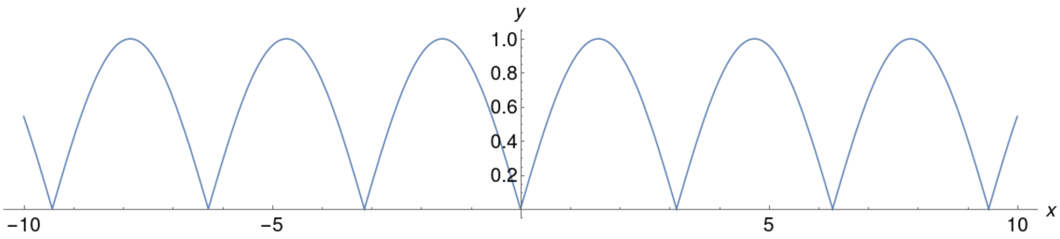

Рис. 6. График функции $|\sin x|$

Задача 4.5. Найти производную функции $y = \ln|\cos x|$.
Ответ: $y' = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Семинар 5

Задача 5.1. Найти асимптотическое разложение $\sqrt[3]{n^3+n}-n$ при $n \to +\infty$.

$$\sqrt[3]{n^3+n}-n = n\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right] = n\left[1+\frac{1}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})-1\right] = n\left[\frac{1}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right]$$

Дифференциал

Задача 5.2. Вычислить дифференциал функции $2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

$$d(2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\ln 2\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

Задача 5.3. Вычислить дифференциал функции $\arcsin\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

$$d(\arcsin\operatorname{arctg}\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Задача 5.4. Найти $d^2\sin t$, где $t = x^3$.

$$d\sin t = \cos t dt$$
$$d^2\sin t = d(d\sin t) = d(\cos t dt) = -\sin t(dt)^2 + \cos t d^2 t$$
$$dt = 3x^2dx$$
$$d^2t = 6x(dx)^2 \Rightarrow d^2\sin x^3 = -\sin x^3(3x^2dx)^2 + \cos x^3\cdot 6x(dx)^2$$

Задача 5.5. Найти $d(\sin|\arcsin x|)$.

$$d(\sin|\arcsin x|) = d\begin{pmatrix} -x, & -1<x<0 \\ 0, & x=0 \\ x, & 0<x<1 \end{pmatrix} = \left[\begin{matrix} -dx, & x\in(-1;0) \\ dx, & x\in(0;1) \end{matrix}\right.$$

Задача 5.6. Вычислить $d\sin(1-x)$, где $x=1,\quad \triangle x = 2$.

$$d(\sin(1-x)) = -\cos(1-x)dx$$
$$-\cos(1-1)\cdot 2 = -2$$

Ответ: -2.

Производные старшего порядка

Задача 5.7. Найти вторую производную функции $y = x\sqrt{1+x^2}$.

$$y'' = (\sqrt{1+x^2} + x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x^2\frac{2x}{2(1+x^2)^{3/2}} = \\ = \frac{x(2x^2+3)}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Задача 5.8. Найти вторую производную функции $y = x\ln x$, где $x > 0$.

$$y'' = (\ln x + x\frac{1}{x})' = \frac{1}{x}$$

ВАЖНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$[(a+bx)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)b^n(a+bx)^{\alpha-n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$[c^{a+bx}]^{(n)} = (b\ln c)^n c^{a+bx}$$

$$(\sin bx)^{(n)} = b^n \sin(bx + \frac{\pi n}{2})$$

$$(\cos bx)^{(n)} = b^n \cos(bx + \frac{\pi n}{2})$$

$$(\ln(a+bx))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!b^n}{(a+bx)^n}$$

$$\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\beta^{n-1}}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

Задача 5.9. Найти восьмую производную функции $y = \frac{x^2}{1-x}$.

$$y = \frac{x^2}{1-x} = x^2(1-x)^{-1}$$

$$y^{(8)} = C_8^0 x^2(\frac{1}{1-x})^{(8)} + C_8^1 2x(\frac{1}{1-x})^{(7)} + C_8^2 2(\frac{1}{1-x})^{(6)}$$

Ответ: $\frac{8!}{(1-x)^9}$

Задача 5.10. Найти 20ю производную функции $y = x^2e^{2x}$.

$$y^{(20)} = C_{20}^0 x^2(e^{2x})^{(20)} + C_{20}^1 2x(e^{2x})^{(19)} + C_{20}^2 2(e^{2x})^{(18)} = \\ = x^2 2^{20}e^{2x} + 20\cdot 2x\cdot 2^{19}e^{2x} + 190\cdot 2\cdot 2^{18}e^{2x} = 2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$$

Задача 5.11. Найти $y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, если $y = \sin^2 x$.

$$y = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n)} - \frac{1}{2}(\cos(2x))^{(n)} = 0 - \frac{1}{2}2^n\cos(2x + \frac{\pi n}{2}) = -2^{n-1}\cos(2x + \frac{\pi n}{2})$$

Задача 5.12. Найти $y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, если $y = e^x \sin x$.
Воспользуемся методом математической индукции.

$$n = 1: \quad y' = e^x \sin x + e^x \cos x = \sqrt{2}e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$n = k: \quad y^{(k)} = \sqrt{2}^k e^x \sin(x + \frac{\pi k}{4})$$

$$y^{(k+1)} = [\sqrt{2}^k e^x \sin(x + \frac{\pi k}{4})]' = \sqrt{2}^k e^x \sin(x + \frac{\pi k}{4}) + \sqrt{2}^k e^x \cos(x + \frac{\pi k}{4}) =$$

$$= \sqrt{2}^{k+1} e^x \sin(x + \frac{\pi(k+1)}{4})$$

Мажорантная и минорантная оценки

Пример. Найти предел $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n: \quad 1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Задача 5.13. Найти предел $\lim_{n\to+\infty} x_n$, где $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

Задача 5.14. Доказать, что $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1)$.
Отметим важные оценки:

$$\boxed{\begin{gathered}(1+\gamma)^n > 1 + n\gamma \\ (1+\gamma)^n > \left(\frac{n\gamma}{2}\right)^2 \\ n \in \mathbb{N}, \quad \forall \gamma > -1\end{gathered}}$$

Док-во. Будем доказывать равносильное утверждение $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} - 1 = 0$.

$$(\sqrt[n]{a} - 1 + 1)^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$$
$$a > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$$
$$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{a-1}{n} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} - 1 = 0$$

Задача 5.15. Доказать, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (\forall a > 1)$.
Для $k = 1: \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = ?$

$$Let \quad \gamma = a - 1: \quad (1 + a - 1)^n > \left(\frac{n(a-1)}{2}\right)^2$$
$$a^n > \frac{n^2}{4}(a-1)^2$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{n}{a^n} < \frac{4}{(a-1)^2 n}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{(a-1)^2 n} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

Для $k < 1$: очевидно.
Для $k > 1$:

$$\frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/k}}\right)^k$$
$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \qquad \frac{n}{a^{n/k}} < 1$$
$$0 < \left(\frac{n}{a^{n/k}}\right)^k < \frac{n}{a^{n/k}}.$$

Теорема. Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Задача 5.16. Найти $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$.
$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{n!a^n} = \frac{a}{n+1} \Rightarrow$ последовательность монотонно убывает
$0 < \frac{a^n}{n!} \Rightarrow \ \{x_n\}$ ограничена снизу
Сделаем предельный переход в рекуррентной формуле, полагая $\lim x_n = b$

$$x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1}$$
$$b = b \cdot 0 \Rightarrow b = 0.$$

В итоге, мы получили важное соотношение

$$\boxed{\begin{gathered} k > 0, \quad a > 1 \\ n^k << a^n << n! \end{gathered}}$$

Фундаментальность последовательности

Задача 5.17. $x_n = a_0 + a_1 q + ... + a_n q^n, \quad |a_k| < M, \quad |q| < 1$ доказать, что $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n$.

$$|x_n - x_{n+p}| = |a_{n+1}a^{n+1} + ... + a_{n+p}q^{n+p}|$$
$$|a_{n+1}a^{n+1} + ... + a_{n+p}q^{n+p}| < |q|^{n+1}M(1 + ... + |q|^{p-1})$$
$$|a_{n+1}a^{n+1} + ... + a_{n+p}q^{n+p}| < |q|^{n+1}M\left(\frac{1}{1-|q|}\right)$$

Семинар 6

Задача 6.1. Найти $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}+\sin\sqrt{x})$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}+\sin\sqrt{x}) = 2\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$$

Мы получили произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}+\sin\sqrt{x}) = 0$.

Задача 6.2. Найти $\lim_{n\to+\infty}(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n$.

$$\lim_{n\to+\infty}(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)^n = exp\{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x^2}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)\} =$$

$$= exp\{\lim_{n\to+\infty} n\left(-\frac{x^2}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)\} = exp\{\lim_{n\to+\infty} n\left(-\frac{x^2}{2}+no(\frac{1}{n})\right)\} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Задача 6.3. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-2^{x+x^2}}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-2^{x+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}+o(x)-1-x\ln 2}{x} = \frac{1}{2}-\ln 2.$$

Задача 6.4. Найти $\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

$$\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \exp\{\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{tg} 2x\ln\operatorname{tg} x\} = \{y=\operatorname{tg} x\} = \exp\{\lim_{y\to 1}\frac{2y}{1-y^2}\ln y\} =$$

$$= \{y = 1+t\} = \exp\{\lim_{t\to 0}\frac{2(1+t)}{-t(2+t)}\ln(1+t)\} =$$

$$= \exp\{\lim_{t\to 0}\frac{2(1+t)}{-t(2+t)}(t+o(t))\} = e^{-1}$$

Метод тождественного алгебраического преобразования подынтегральной функции

Задача 6.5. Найти $\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

$$\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int(1-x^{-2})x^{3/4}dx = \int x^{3/4}dx - \int x^{-5/4}dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C.$$

Задача 6.6. Найти $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x-\operatorname{arctg} x + C.$$

Задача 6.7. Найти $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

$$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = 2\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$$
$$= \frac{2}{\ln\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5\ln\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C.$$

Метод замены переменной

$$\int f(g(x))h(x)dx$$
Если $g'(x) = const \cdot h(x)$, введем $t = g(x)$и $dt = g'(x)dx = const \cdot h(x)dx$
$$\Rightarrow \int f(g(x))h(x)dx = \frac{1}{const}\int f(t)dt$$

Задача 6.8. Найти $\int (2x-3)^{100}dx$.

$$\int (2x-3)^{100}dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{100}d(2x-3) = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{101}}{101} + C.$$

Задача 6.9. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+\frac{\pi}{4})}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})} = -\frac{1}{\operatorname{ctg}(2x+\frac{\pi}{4})} + C.$$

Задача 6.10. Найти $\int \frac{xdx}{4+x^4}$.

$$\int \frac{xdx}{4+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{xdx}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} = \{t = \frac{x^2}{2}\} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C.$$

Задача 6.11. Найти $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$.

Задача 6.12. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = \{t = e^{-x}\} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = ...$$

Задача 6.13. Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \{t = \sin x\} = \int \frac{dt}{\sqrt{2+1-2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{3-2t^2}} = ...$$

Задача 6.14. Найти $\int x^2 \sqrt[8]{1-x} dx$.

$$\int x^2 \sqrt[8]{1-x} dx = \{t = 1-x\} = -\int (1-t^2) t^{1/8} dt = ...$$

Задача 6.15. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x(1+(\sqrt{2}\operatorname{ctg} x)^2)} = \{t = \sqrt{2}\operatorname{ctg} x\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} x) + C.$$

Задача 6.16. Найти $\int \sin^4 x dx$.

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}) dx =$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Задача 6.17. Найти $\int \sin^5 x dx$.

$$\int \sin^5 x dx = -\int \sin^4 x d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^2 d\cos x = \{t = \cos x\} =$$
$$= -\int (1-t^2)^2 dt = \int (-1 + 2t^2 - t^4) dt = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$
$$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Задача 6.18. Найти $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$.

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} = -\int \frac{d\cos x}{\sqrt{\cos^3 x}} = \{t = \cos x\} = -\int \frac{dt}{t^{3/2}} = 2t^{-1/2} + C = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$$

Рассмотрим интеграл общего вида: $\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$

1) Если при замене $\sin x \to -\sin x$ подынтегральная функция преобразуется $f(x) \to -f(x)$, то делаем замену $t = \cos x$.

2) Если при замене $\cos x \to -\cos x$ подынтегральная функция преобразуется $f(x) \to -f(x)$, то делаем замену $t = \sin x$.

3) Если при замене $\sin x \to -\sin x$ и $\cos x \to -\cos x$ подынтегральная функция преобразуется $f(x) \to f(x)$, то делаем замену $t = \operatorname{tg} x$.

Задача 6.19. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

$$\text{Вспомним формулы:} \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^2} = \ldots$$

Метод подстановки

$$\boxed{\int f(x)dx = \{x = h(t)\} = \int f(h(t))h'(t)dt}$$

Задача 6.20. Найти $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}, \quad a > 0$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \{x = a \operatorname{tg} t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\} = \int \frac{a dt}{\cos^2 t a^3 \frac{1}{\cos^3 t}} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt =$$

$$= \frac{1}{a^2} \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}) + C = \frac{1}{a^2} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

Интегрирование по частям

Задача 6.21. Найти $\int x e^{-x} dx$.

$$\int x e^{-x} dx = \{u = x, \quad dv = e^{-x} dx\} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx.$$

Задача 6.22. Найти $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = \{u = \arcsin x, \quad dv = \frac{dx}{x^2}\} = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Пусть $\sqrt{1-x^2} = t$, тогда $xdx = -tdt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}t} = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\arcsin(\sqrt{1-x^2}) + C.$$

Задача 6.23. Найти $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

$$I = \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \{u = e^{\operatorname{arctg} x}, \quad dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^{3/2}}\} = \frac{e^{-\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}dx}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \{u = e^{\operatorname{arctg} x}, \quad dv = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}\} = \frac{-e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Интегрирование рациональных функций

$$\boxed{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad m > n}$$

Задача 6.24. Найти $\int \frac{xdx}{(x^3+1)(x+1)}$.

$$\int \frac{xdx}{(x^3+1)(x+1)} = \int \frac{xdx}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = ...$$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{(A+M)x^3 + (B+2M+N)x^2 + (-B+M+2N)x + A+B+N}{(x^3+1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow A = M = 0, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad N = \frac{1}{3}$$

$$... = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Семинар 7

Задача 7.1. Найти $\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx$.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx = M\int \frac{xdx}{x^2-x+1} + N\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \left(\frac{M}{2}+N\right)\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$*\left(\frac{M}{2}+N\right)\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left(M+2N\right)\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(M+2N\right)\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{M+2N}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Задача 7.2. Разложить на сумму простых дробей $\frac{-x-7}{(x+1)^3(x-1)}$.

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} + \frac{E}{x-1}$$
$$A = 1, \quad B = 2, \quad D = 3, \quad E = -1$$

Задача 7.3. Разложить на сумму простых дробей $\frac{x^2+2}{x^3+1}$.

$$\frac{x^2+2}{x^3+1} = \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$
$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1$$

Метод зачеркивания/закрывания

1) Знаменатель имеет вещественные нули.

2) Все линейные многочлены должны быть приведенного вида.

Задача 7.4. Найти $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = A\ln|x+1| + B\ln|x+2| + D\ln|x+3| + C = ...$$

<u>Правило:</u> Если нужно найти коэффициент A, закрываем $(x+1)$ и подставляем в

выражение корень ($x = -1$), получаем $A = \frac{-1}{(-1+2)(-1+3)} = -\frac{1}{2}$. Если найти B — закрываем $(x+2)$ и подставляем $x = -2$. Для D аналогично.

$$... = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

Задача 7.5. Найти $\int \frac{xdx}{(1-x)(2x+1)(3x+1)}$.

$$\int \frac{xdx}{(1-x)(2x+1)(3x+1)} = -\frac{1}{6}\int \frac{xdx}{(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})} =$$
$$= -\frac{1}{6}(A\ln|x-1| + B\ln|x+\frac{1}{2}| + D\ln|x+\frac{1}{3}|) + C.$$

Задача 7.6. Найти $\int \frac{1-x^2}{(2-x)(x+3)}dx$.

$$\int \frac{1-x^2}{(2-x)(x+3)}dx = x + \frac{3}{5}\ln|x-2| - \frac{8}{5}\ln|x+3| + C.$$

Интегрирование иррациональных функций

Простейшие

А) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ — замена вида $\sqrt{...} = t$

Б) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ — выделить полный квадрат под корнем

Задача 7.7. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1+2x+x^2)+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} =$$
$$= \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Задача 7.8. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}\right| + C.$

Дробно-линейная иррациональность

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)dx$$

$$\text{Замена: } \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}} = t, \quad x = \frac{\beta t^n - b}{a - \alpha t^n}, \quad dx = \frac{(a\beta - \alpha b)nt^{n-1}}{(a-\alpha t^n)^2}dt$$

Задача 7.9. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} = \{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = t\} = \int \frac{3}{2}t^{-2}dt = -\frac{3}{2t} + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

Задача 7.10. Найти $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = \{\sqrt[6]{x+1} = t\} = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5dt = ...$$

Квадратичная иррациональность

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

I)

$$\boxed{\begin{gathered}\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ P_n(x) = Q'_{n-1}(x)[ax^2+bx+c] + Q_{n-1}\frac{1}{2}(ax^2+bx+c) + \lambda\end{gathered}}$$

Задача 7.11. Найти $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$.

$$x^2+1 = A(-x^2+3x-2) + (Ax+B)\frac{1}{2}(-2x+3) + \lambda$$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{9}{4}, \quad \lambda = \frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}\right)\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{27}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

II)

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Замена $x-\alpha=t$ сводит интеграл к случаю I)

Задача 7.12. Найти производную и область определения функции $y=\left(\frac{2\sin x}{\cos 2x}\right)^{1/9}$.

$$\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4}(2n+1), \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$y'=\left(\frac{2\sin x}{\cos 2x}\right)^{1/9}\frac{1}{9}(\ln 2+\ln|\sin x|-\ln|\cos 2x|)'=\left(\frac{2\sin x}{\cos 2x}\right)^{1/9}\frac{1}{9}(\operatorname{ctg} x+2\operatorname{tg} 2x).$$

Задача 7.13. Найти производную и область определения функции $y=\operatorname{arctg}(|\operatorname{ctg} x|)$.

$$x\neq \pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$y'=\frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}(|\operatorname{ctg} x|)'=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\operatorname{sign}(\operatorname{ctg} x)(\frac{-1}{\sin^2 x})=\operatorname{sign}(\operatorname{ctg} x).$$

Задача 7.14. Найти производную и область определения функции $y=(\arcsin x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{cases} x+1\geq 0\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

При отрицательных значения переменной x функция $y(x)$ будет определена лишь в каких-то изолированных точках, поэтому задачу надо решать на отрезке $x\in[0;1]$.

$$y'=y[\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\ln(\arcsin x)]'=$$
$$=(\arcsin x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}}\left(\frac{\ln(\arcsin x)}{2\sqrt{x+1}(2+x)}+\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$$
$$D_{y'}=(0;1)$$

Задача 7.15. Найти $h'(a)$, если $h(x)=(x-a)y(x)$, где $y(x)$ непрерывна при $x=a$.

$$h'(a)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{h(a+\triangle x)-h(a)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{(a+\triangle x-a)y(a+\triangle x)}{\triangle x}=$$
$$=\lim_{\triangle x\to 0}y(a+\triangle x)=\{\text{по определению непрерывности}\}=y(a).$$

Задача 7.16. Дано $y = \sin^4 x$, найти $y^{(40)}$.

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$
$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$$
$$y^{(40)} = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)^{(40)} = -\frac{1}{2}2^{40}\cos(2x + \frac{40\pi}{2}) + \frac{1}{8}4^{40}\cos(4x + \frac{40\pi}{2}) =$$
$$= -2^{39}\cos(2x) + 2^{77}\cos(4x).$$

Задача 7.17. Дана сложная функция $y = f(h(x))$, вычислить d^3y через производные от f по h и дифференциалы dh.

$$dy = f'_h dh$$
$$d^2y = f''_h (dh)^2 + f'_h d^2h$$
$$d^3y = f'''_h (dh)^3 + f''_h 2dhd^2h + f''_h dhd^2h + f'_h d^3h$$

III)

$$\boxed{\int \frac{(Mx+N)dx}{(\tau x^2 + px + q)^m y}, \quad \text{где} \quad y = \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

1) Частный случай ($p = b = 0$):

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(\tau x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}} = M\int \frac{xdx}{(\tau x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}} + N\int \frac{dx}{(\tau x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}$$

в первом интеграле делаем замену $\sqrt{ax^2+c} = t$, а во втором выносим из-под корня x^2 и делаем замену $\sqrt{a + \frac{c}{x^2}} = u$.

2) Общий случай сводится к частному подстановкой Абеля $x = \frac{\mu t + \nu}{t+1}$:

$$\begin{cases} P_t = 2\tau\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q = 0 \\ B_t = 2a\mu\nu + b(\mu+\nu) + 2c = 0 \end{cases} \text{при} \begin{vmatrix} \tau & p \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{Если } \tau = a, \quad p = b \neq 0 \Rightarrow x = t - \frac{p}{2\tau} = t - \frac{b}{2a}$$

Пример. Найти $\int \frac{(2x+1)dx}{(3x^2+4x+4)\sqrt{x^2+6x-1}}$.

$$\begin{cases} 6\mu\nu + 4(\mu+\nu) + 8 = 0 \\ \mu\nu + 6(\mu+\nu) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{aligned} \mu &= 2 \\ \nu &= -1 \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx, \quad \text{решается универсальной заменой: } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$$

Задача 7.18. Найти $\int \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x} = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}+\frac{1+\cos x}{2}} = 2\int \frac{dx}{1+2\cos^2\frac{x}{2}} = 2\int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2} = 4\int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{d\frac{t}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

Задача 7.19. Найти $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $(a-b) \neq 2\pi n$.

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(a-b)dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(a-b+x-x)dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = ...$$

$$* \quad \sin((a+x)-(b+x)) = \sin(a+x)\cos(b+x) - \cos(a+x)\sin(b+x)$$

$$... = \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int \frac{d\sin(a+x)}{\sin(a+x)} - \int \frac{d\sin(b+x)}{\sin(b+x)}\right].$$

Задача 7.20. Найти $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$.

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\theta)} = \frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} + C.$$

Задача 7.21. Найти $\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}dx$.

$$\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}dx = A\sin x + B\cos x + \lambda\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

$$A\cos x(\sin x + \cos x) - B\sin x(\sin x + \cos x) + \lambda =$$

$$= A\cos^2 x + (A-B)\sin x\cos x - B\sin^2 x + \lambda(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\begin{cases} A+\lambda = 3 \\ A-B = -4 \Rightarrow A = -1, \quad B = 3, \quad \lambda = 4 \\ \lambda - B = 1 \end{cases}$$

Семинар 8

Определенный интеграл

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{c+0}^b + F(x)\Big|_a^{c-0} = F(b) - F(a) + \lim_{x\to c-0} F(x) - \lim_{x\to c+0} F(x)$$

Задача 8.1. Найти $\int_{-1}^1 d[\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}]$.

$$\int_{-1}^1 d[\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}] = \left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}\Bigg|_{0+0}^1 + \left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}\Bigg|_{-1}^{0-0} =$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \lim_{x\to 0+0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} + \lim_{x\to 0-0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Arctg\ \phi(x)\Big|_a^b = \operatorname{arctg}\phi(x)\Big|_a^b + k\pi, \\ k \text{ — число переходов функции } \phi(x) \text{ через бесконечность} \end{array}}$$

Задача 8.2. Найти $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$.

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}}Arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}[0+1\cdot\pi] = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

Задача 8.3. Найти $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = \{u = x, \quad dv = e^{-x}dx\} = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

Задача 8.4. Найти $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx$.

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx = -x\ln\frac{x}{e}\Big|_{\frac{1}{e}}^1 + x\ln\frac{x}{e}\Big|_1^e = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Задача 8.5. Найти $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Пусть $x = a\sin t$, где $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}d(a\sin t) = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt =$$
$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt = \frac{a^4\pi}{16}.$$

Задача 8.6. Найти $\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\frac{d}{dx}[\cos(\ln\frac{1}{x})]\right| dx$.

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\frac{d}{dx}[\cos(\ln\frac{1}{x})]\right| dx = \int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|-\sin(\ln\frac{1}{x})x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right| dx = \int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{1}{x}\right| dx =$$
$$= \{\frac{1}{x} = e^t, \quad dx = -e^{-t}dt\} = \int_{2\pi n}^0 |\sin te^t|(-e^{-t})dt = -\int_{2\pi n}^0 |\sin t|dt = \int_0^{2\pi n} |\sin t|dt =$$
$$= 2n\int_0^{\pi} \sin tdt = -2n\cos t\Big|_0^{\pi} = 4n.$$

Задача 8.7. Найти $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx =$$
$$= \{t = \pi - x \text{ во втором интеграле}\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi-t)\sin tdt}{1+\cos^2 t} =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin tdt}{1+\cos^2 t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin tdt}{1+\cos^2 t} = ...$$

Задача 8.8. Найти $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

$$* \quad \sin^4 x + \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 + 2\cos^x \sin^2 x - 2\cos^x \sin^2 x =$$
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \sin^2 2x\left(\frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \sin^2 2x\left(\operatorname{ctg}^2 2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2 2x(1 + (\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x)^2)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{d(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x)}{1+(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}Arcctg(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x)\Big|_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lim_{x\to 2\pi-0} \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x) - \lim_{x\to 0+0} \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x) + 3\pi\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi - 0 + 3\pi] = 2\sqrt{2}\pi.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\left[F(t)\Big|_{\phi(x)}^{\psi(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left[F(\psi(x)) - F(\phi(x))\right] = \\ = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x)\end{aligned}}$$

Задача 8.9. Найти $\frac{d}{dx}\int_{7-x}^{x^3} e^{t^2}dt$.
Ответ: $3x^2e^{x^6} + e^{(7-x)^2}$.

Задача 8.10. Найти $\frac{d}{dx}\int_{\sin\frac{1}{x}}^{1-\cos x} x\sin t^2 dt$.

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin\frac{1}{x}}^{1-\cos x} x\sin t^2 dt = \frac{d}{dx}x\int_{\sin\frac{1}{x}}^{1-\cos x} \sin t^2 dt =$$

$$= \int_{\sin\frac{1}{x}}^{1-\cos x} \sin t^2 dt + x[\sin(1-\cos x)^2\sin x + \sin(\sin\frac{1}{x})^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}].$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

Задача 8.11. Дано каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, найти площадь заштрихованной фигуры S(Рис. 7.).

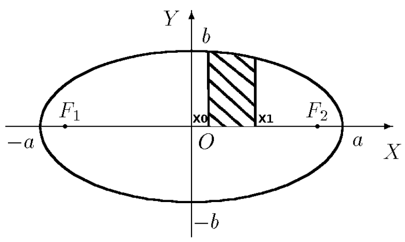

Рис. 7. Эллипс

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$S = \frac{a}{b}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{x_1}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a} + \frac{x_1}{a}\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}} - \frac{x_0}{a}\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\right)$$

Для проверки положим $x_0 = 0, \quad x_1 = a$:

$$\Rightarrow S = \frac{ab}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4} \Rightarrow S_{\text{Эллипса}} = \pi ab$$

Задача 8.12. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды (Рис. 8.), уравнение которой задано параметрически:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

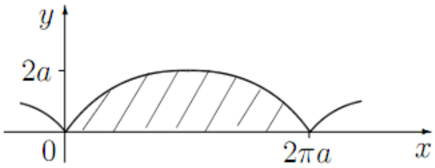

Рис. 8. Циклоида

Подсказка: Если $x = \phi(t), \quad y = \psi(t)$, то справедлива формула $S = \int_0^T \psi(t)\phi'(t)dt$.
Ответ: $2\pi a^2$

Задача 8.13. Найти площадь фигуры, границы которой заданы в полярных координатах

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{\sqrt{3}}{1 - \cos\phi}, \\ \phi = \dfrac{\pi}{2}, \\ \phi = \pi. \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{3}{(1-\cos\phi)^2}d\phi = \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\phi}{\left(1 - \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}\right)^2} = \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1+\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2})^2}{(2\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2})^2}d\phi =$$
$$= \{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} = t\} = 3\int_1^{+\infty} \frac{1+t^2}{4t^4} = \frac{3}{4}\left(\frac{t^{-3}}{3} - t^{-1}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{3}{4}(1/3+1) = 1.$$

Задача 8.14. *(Задача Архимеда)* Из сосуда цилиндрической формы радиуса a и высоты h вытекает жидкость. Доказать, что в момент, когда обнажится половина дна, объем оставшейся жидкости будет равен $\frac{2}{3}a^2h$.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

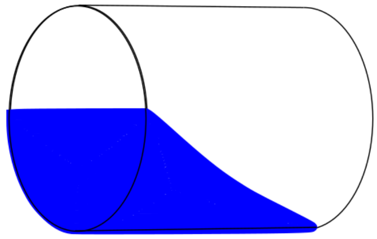

Рис. 9. К задаче 8.14.

$$V = \int_0^a \frac{hx}{a} 2\sqrt{a^2 - x^2} dx = \{x = a\sin t, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]\} =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\sin t) 2\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} a\cos t dt = 2ha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t dt =$$
$$= -2ha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d(\cos t) = \frac{2}{3}ha^2.$$

Масса тела: $m = \int \rho(x) \begin{bmatrix} dl \\ dS \\ dV \end{bmatrix}$

Статический момент

Плоская кривая:

$$M_x = \int y dl, \qquad M_y = \int x dl$$

Плоская фигура:

$$M_x = \frac{1}{2}\int y^2 dx, \qquad M_y = \int xy dx$$

Объемное тело:

$$M_{zy} = \int xS(x) dx$$

Момент инерции

Плоская кривая:

$$J_x = \int y^2 dl, \qquad J_y = \int x^2 dl$$

Плоская фигура:

$$J_x = \frac{1}{3}\int y^3 dx, \qquad J_y = \int x^2 y dx$$

Объемное тело:

$$J_{zy} = \int x^2 S(x) dx$$

Семинар 9

Задача 9.1. Найти статический момент M_x и момент инерции J_x равнобедренного треугольника относительно его основания (основание $2b$, высота h, плотность $\rho = 1$).

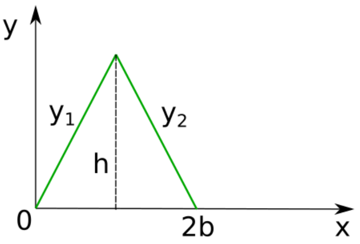

Рис. 10. К задаче 9.1.

$$y_1 = \frac{h}{b}x$$
$$y_2 = 2h - \frac{h}{b}x$$
$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^b y_1^2 dx + \frac{1}{2}\int_b^{2b} y_2^2 dx = \frac{1}{3}bh^2$$
$$J_x = \frac{1}{6}b^3 h$$

Правило Лопиталя

Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$. И выполнены следующие условия:

1)$f(x)$, $g(x)$ определены в окрестности точки $x = a$ за исключением, быть может, самой этой точки. И более того $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$;

2) $\exists f'(x)$, $g'(x)$ в окрестности точки $x = a$ за исключением, быть может, самой этой точки. И более того $g'(x) \neq 0$;

3) $\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда

1) $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$;

2) $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Задача 9.2. Найти $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Применить правило Лопиталя нельзя!

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Задача 9.3. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}.$$

Задача 9.4. Найти $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.
Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 9.5. Найти $\lim_{x\to +0} x\ln x$.

$$\lim_{x\to +0} x\ln x = \lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +0} (-x) = 0.$$

Задача 9.6. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{x\to 0} \left(\exp\{-\frac{1}{x^2} - 100\ln|x|\}\right) = \exp\{-\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x^2 100\ln|x|}{x^2}\right)\} = 0.$$

Задача 9.7. Найти $\lim_{x\to +0} x^x$.

$$\lim_{x\to +0} x^x = \exp\{\lim_{x\to +0} x\ln x\} = 1.$$

Задача 9.8. Найти $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = \exp\{\lim_{x\to 1} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)\} = \exp\{\lim_{x\to 1} \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)\} =$$
$$= \exp\{\lim_{x\to 1} \left(\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(2-x) - \sin\frac{\pi x}{2}\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}\right)\} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

Формула Тейлора

Пусть $\exists \quad f^{(n+1)}(x)$ в окрестности точки $x = a$, тогда для этой функции $f(x)$ справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_{n+1}(x).$$

Остаточный член в форме Пиано: $o\left((x-a)^n\right)$

В форме Шлёмильха-Роша:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi \in (a;x)$$

или

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{pn!}(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)), \qquad \theta \in (0;1)$$

В форме Лагранжа ($p = n+1$):

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$$

В форме Коши ($p = 1$):

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$$

Задача 9.9. Разложить до порядка x^3 в окрестности точки $x = 0$ функцию $y = \sin(\sin x)$, остаточный член записать в форме Пиано.

Ответ: $x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Задача 9.10. Вычислить с помощью разложения в ряд Тейлора $\sqrt[3]{30}$.

$$\text{Пусть } y = x^{\frac{1}{3}}, \quad x_0 = 27, \quad \triangle x = 3$$

$$\sqrt[3]{30} = 27^{1/3} + \frac{1}{3}27^{-2/3}\cdot 3 - \frac{1}{9}27^{-5/3}\cdot 3^2 + ... = 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3^5} + ...$$

Задача 9.11. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ при $x = c$ имеет локальный максимум, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon \quad f(x) < f(c)$.

Теорема. Если функция имеет локальный максимум в точке $x = c$, то либо $f'(c) = 0$, либо $f'(c)$ не существует.

Теорема. Пусть в окрестности точки возможного экстремума $x = c$ функция имеет производную, если при переходе через эту точку в сторону возрастания переменной x знак производной меняется с «+» на «-» (с «-» на «+»), то в точке c

локальный максимум (минимум). Но если знак производной не меняется, то локального экстремума нет.

Семинар 10

Исследование функций на экстремум

Задача 10.1. Через точку C с координатами $(1; 2)$ провести прямую, равноудаленную от точек $A(2; 3)$ и $B(4; 5)$.

Решение: Сделав рисунок к задаче, мы видим, что существует два решения:

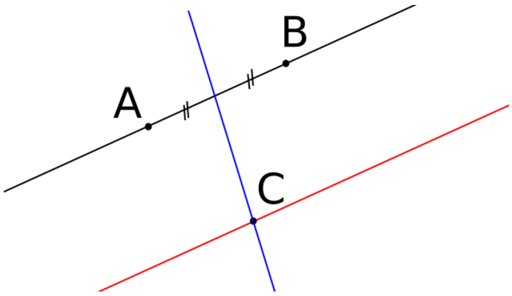

Рис. 11. К задаче 10.1.

1)прямая проходит через точку C параллельно отрезку AB;
2)прямая проходит через центр отрезка AB и точку C.

$$y - 2 = k(x - 1), \quad \text{уравнение } \forall \text{ прямой, проходящей через точку } C.$$

Далее остается воспользоваться нормированным уравнением прямой

$$\frac{y - kx + (k - 2)}{\pm\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

Ответ: $k = -4$ и $k = -\frac{3}{2}$.

Задача 10.2. Через точку с координатами $(-1; 2)$ провести прямую, расстояние от которой до точки $(6; 1)$ равно 5.

Подсказка: Записать уравнение $\forall$ прямой, проходящей через точку $(-1; 2)$, в нормальном виде

$$y - 2 = k(x + 1)$$

$$\frac{y - kx + (-k - 2)}{\pm\sqrt{1 + k^2}} = 0$$

Задача 10.3. Исследуйте на экстремум функцию $y = \arcsin \frac{2-x}{1+x^2}$.

$$y' = \frac{2\,\mathrm{sign}(1 - x^2)}{1 + x^2}$$

Ответ: максимум в точке $x = 1$ и минимум в $x = -1$.

Алгоритм построения графика функции $y = f(x)$

1) Найти область определения функции, указать те значения x, где функция не существует.

2) Определить поведение при $x \to \pm\infty$.
3) Посмотреть, где функция обращается в ноль.
4) Исследовать на экстремумы.

Задача 10.4. Построить график функции $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

$$y(-x) = (-x+2)^{\frac{2}{3}} - (-x-2)^{\frac{2}{3}} = -(x+2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}} = -y(x)$$

Таким образом, функция нечетная (достаточно посмотреть её на половине вещественной оси).

$$\lim_{x\to+\infty} (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{(x+2)^{4/3} + (x^2-4)^{2/3} + (x-2)^{4/3}} = 0.$$

Задача 10.5. Найти асимптотику функции $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ на положительной бесконечности.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (y-x) = \lim_{x\to+\infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x] = 3$$

Ответ: $y = x + 3$.

Задача 10.6. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
Пусть $x = const$, тогда в сечении будут эллипсы

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

$$S_{\text{сеч}}(x) = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})$$

$$V = \int_{-a}^{a} S_{\text{сеч}} dx = \pi bc \int_{-a}^{a} (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \pi bc(x - \frac{x^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a} = \pi bc(2a - \frac{2a}{3}) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Объем тел вращения

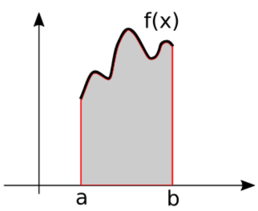

Рис. 12. Тип A

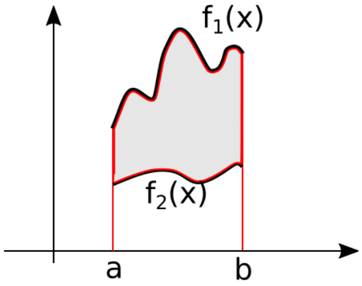

Рис. 13. Тип B

$$\text{Тип A (Рис.12.):}\ \ V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$$\text{Тип B (Рис.13.):}\ \ V = \pi \int_a^b \left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right] dx$$

Задача 10.7. Найти объем тела ограниченного тремя поверхностями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = \frac{c}{a}x,\ z = 0.$

$$S(x) = \frac{2bcx}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$V = \frac{2bcx}{a}\int_0^a x\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{2}{3}abc$$

Задача 10.8. Найти объем тела вращения, полученного из фигуры

$$\begin{cases} y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi, \\ y = 0. \end{cases}$$

Вращение вокруг оси Ox:

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

Вращение вокруг оси Oy:

$$V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2$$

Задача 10.9. Найти объем тела, полученного вращением окружности $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(0 < a \le b)$ вокруг оси Ox.

Для верхней дуги: $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$

Для нижней дуги: $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} (y_1^2 - y_2^2) dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

Задача 10.10. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластины с основанием b и высотой h.

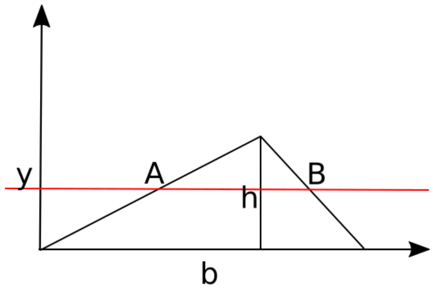

Рис. 14. К задаче 10.10.

$$AB = b(1 - \frac{y}{h})$$

$$\triangle M = yb(1 - \frac{y}{h})\triangle y$$

$$\triangle J = y^2 b(1 - \frac{y}{h})\triangle y$$

$$\Rightarrow M = b \int_0^b y \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{bh^2}{6}$$

$$J = b \int_0^b y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{bh^3}{12}$$

Задача 10.11. Найти $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.
Подсказка. Нужно сделать подстановку Эйлера $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \{x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}\} = \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2} dt = ...$$

Задача 10.12. Для всех вещественных значений a, b, c найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} xy + yz = a^2, \\ yz + xz = b^2, \\ zx + xy = c^2. \end{cases}$$

Из каждого уравнения вычтем два остальных и получившееся уравнения поделим на двойку:

$$\begin{cases} xz = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2} \equiv \alpha \\ xy = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2} \equiv \beta \\ yz = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \equiv \gamma \end{cases}$$

Перемножим все три полученных уравнения

$$x^2y^2z^2 = \alpha\beta\gamma \quad \Rightarrow \quad \text{Если } \alpha\beta\gamma < 0 \text{ решений нет}$$

$$|xyz| = \sqrt{\alpha\beta\gamma}$$

а) $\alpha\beta\gamma > 0$, тогда

$$x = \pm\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\gamma}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\alpha}$$

$$z = \pm\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta}$$

б) $\alpha\beta\gamma = 0$, тогда нужно рассмотреть семь случаев:
1) $\alpha = 0, \quad \beta\gamma \neq 0$
2) $\beta = 0, \quad \alpha\gamma \neq 0$
3) $\gamma = 0, \quad \alpha\beta \neq 0$
4) $\alpha = \beta = 0, \quad \gamma \neq 0$
5) $\beta = \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$
6) $\alpha = \gamma = 0, \quad \beta \neq 0$
7) $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Семинар 11

Дифференциалы высших порядков

Задача 11.1. Функция $y(x)$ задана параметрически $x(t) = 2t - t^2, \;\; y(t) = 3t - t^3$. Найти $y', \; y'', \; y'''$.

$$\text{По Лейбницу: } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(3-3t^2)dt}{(2-2t)dt} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t), \quad t \neq 1$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{\frac{3}{2}dt}{2(1-t)dt} = \frac{3}{4}\frac{1}{1-t}$$

$$\text{Аналогично находится } y'''$$

Задача 11.2. Задана функция $y(x) = x\cos 2x$. Найти $d^{10}y$.

$$d^{10}y = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k d^k x d^{10-k}\cos 2x = xd^{10}(\cos 2x) + dxd^9(\cos 2x) =$$

$$= (dx)^{10}[x(-\cos 2x)2^{10} - 10(\sin 2x)2^9].$$

Задача 11.3. Задана функция $y(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$. Найти $y^{(n)}$.

$$y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то $\exists\, c \in (a;b)$, что справедлива формула

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

Задача 11.4. Доказать, что для $0 < a < b$ справедливо соотношение $1 - \frac{a}{b} < \ln\frac{a}{b} < \frac{b}{a} - 1$.

$$\text{Пусть } y = \ln(x), \text{ тогда } \ln(b) - \ln(a) = \frac{1}{c}(b-a)$$

$$c \in (a;b) \Rightarrow \frac{1}{c}(b-a) < \frac{(b-a)}{a} \text{ и } \frac{1}{c}(b-a) > \frac{(b-a)}{b}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1 \text{ и } \ln\frac{b}{a} > 1 - \frac{a}{b} \;\; \textit{что и т. д.}$$

Простейшая тригонометрия

Задача 11.5. Решить уравнение $\sin(5\operatorname{arcctg} 3x) = 1$.

$$\text{Пусть } 5\operatorname{arcctg} 3x = t, \quad \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Пусть } 3x = u, \quad t = 5\operatorname{arcctg} u, \quad \text{т. к. } \operatorname{arcctg} u \in (0;\pi) \Rightarrow t \in (0;5\pi)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcctg} u = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{5}\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{5}(\frac{\pi}{2} + 2\pi) \\ \frac{1}{5}(\frac{\pi}{2} + 4\pi) \end{array}\right. \Rightarrow u = \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{10} \\ 0 \\ \operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10} = -\operatorname{ctg}\pi 10 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$.

Задача 11.6. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$.

$$\text{т. к. } \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2|x|, \text{ то пусть } |x| = y \geq 0$$

$$\begin{cases} tg^2 y = \dfrac{1-\cos y}{1-\sin y} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\cos^2 y}{1-\sin^2 y} = \dfrac{1-\cos y}{1-\sin y} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos y = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos y = \sin y \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}_0 \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}_0 \end{array}\right.$$

Задача 11.7. Решить уравнение $1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x$.

$$(1 + \cos 2x) + \sin 2x + (\sin x + \sin 3x) = \cos x + \cos 3x$$

$$2\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 2\sin 2x\cos x = 2\cos 2x\cos x$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x + \sin x + \sin 2x = \cos 2x \quad (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \quad \sin x + \sin 2x = \cos 2x - \cos x$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = -2\sin\frac{3x}{2}\sin x2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin\dfrac{3x}{2} = 0 \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ:}\quad \left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

Задача 11.8. Решить уравнение с параметром

$$(\sin x + \cos x)\sin 2x = a(\sin^3 x + \cos^3 x),\ \text{где } x \in [\frac{\pi}{2}; \pi].$$

Перепишем уравнение в виде

$$(\sin x + \cos x)\sin 2x = a(\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

Тогда оно разобьётся на две системы

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} \\ \begin{cases} \sin 2x = \dfrac{2a}{2+a} \\ \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \Rightarrow a \in [-\dfrac{2}{3}; 0] \end{array}\right.$$

Ответ: 1) при $a \in [-\frac{2}{3}; 0]$ $\ x = \frac{3\pi}{4}, \quad x = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2a}{2+a} + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2}\arcsin\frac{2a}{2+a} + \pi$; 2) при $a \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (0; +\infty)$ $\ x = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 11.9. Решить уравнение с параметром $\sin^8 x + \cos^8 x = a\cos^2 2x$, где $0 \leq x \leq 2\pi$.

Сразу видно, что параметр a должен быть больше нуля.

$$\sin^8 x + \cos^8 x + 2\sin^4 x\cos^4 x - 2\sin^4 x \cos^4 x = \cos^2 2x - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x - \frac{1}{8}\sin^4 2x = a\cos^2 2x$$

$$\frac{1}{8}\sin^4 2x = (a-1)\cos^2 2x \text{ видно, что должно быть } a \geq 1$$

$$\text{Обозначим} \sin^2 2x = y$$

$$y^2 + 8(a-1)y + 8(a-1) = 0$$

$$y = 4(1-a) \pm \sqrt{16(a-1)^2 + 8(a-1)}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \pm\sqrt{4(1-a) + \sqrt{16(a-1)^2 + 8(a-1)}},\ \text{т. к. } y \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{4(1-a) + \sqrt{16(a-1)^2 + 8(a-1)}}) + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3 \\ 2x = (-1)^{n+1} \arcsin(\sqrt{4(1-a) + \sqrt{16(a-1)^2 + 8(a-1)}}) + \pi n, \quad n = 1, 2, 3, 4 \end{array}\right.$$

Задача 11.10. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = (2+\sqrt{3}) \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.
Пусть $2+\sqrt{3} = a, \quad x = 3y$

$$\operatorname{tg}(3y) = a \operatorname{tg} y$$

$$* \quad \operatorname{tg}(3y) = \operatorname{tg}(y+2y) = \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} 2y}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} 2y} = \operatorname{tg} y \frac{3 - \operatorname{tg}^2 y}{1 - 3\operatorname{tg}^2 y} \quad *$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} y = 0 \\ \operatorname{tg}^2 y = \dfrac{a-3}{3a-1} = 7 - 4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2 \end{array}\right.$$

Ответ: 1) $x = 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
2) $x = \pm 3 \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) + 3\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Задача 11.11. Найти производную $y = x \cdot |x|$.
1) $x \neq 0$ можем приметить правило диф-ния произведения функций

$$y' = |x| + x \operatorname{sign} x = 2|x|$$

2) $x = 0$ воспользуемся определением производной

$$y'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x) - f(0)}{\triangle x} = 0$$

Ответ: $(x|x|)' = 2|x|, \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Задача 11.12. Найти производную $y = |\sin x|$.

$$|\sin x| = \sin x \cdot \operatorname{sign}(\sin x)$$

Аналогично можно применить правило дифференцирования произведения функций везде кроме точек, где $\sin x = 0$. В них используем определение производной

$$y'(k\pi) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{|\sin(k\pi + \triangle x)|}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{|(-1)^k| \sin \triangle x|}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{|\triangle x + o(\triangle x)|}{\triangle x}$$

Видно, что при $x = k\pi$ предел не существует $\Leftrightarrow$ производной нет.

Задача 11.13. Найти $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \exp\{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 2x \ln |\operatorname{tg} x|\} = \exp\{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln |\operatorname{tg} x|}{\operatorname{ctg} 2x}\} =$$
$$= \{\text{правило Лопиталя}\} = 1.$$

Задача 11.14. Найти $\int \frac{dx}{2\cos^2 x - 3}$.

$$\int \frac{dx}{2\cos^2 x - 3} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (2 - \frac{3}{\cos^2 x})} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x) + C.$$

Задача 11.15. Найти $\int \frac{x^{11}dx}{1-x^8}$.

$$\int \frac{x^{11}dx}{1-x^8} = \begin{bmatrix} x^4 = t \\ 4x^3dx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{t^2dt}{1-t^2} = \dots$$

Задача 11.16. Найти $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg} x) = \{\operatorname{tg} x = y\} =$$
$$= \int (1+y^2)dy = y + \frac{y^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Задача 11.17. Найти $\int \frac{\sin^2 xdx}{\cos 2x}$.

$$\int \frac{\sin^2 xdx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\sin^2 xdx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{(2\sin^2 x - 1 + 1)dx}{1-2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-2\sin^2 x} - \frac{x}{2}.$$

Задача 11.18. Решить уравнение $|\sin x| = \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ответ: $x = \pm\frac{5}{12}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Задача 11.19. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin x| \sin y = -\dfrac{1}{4} \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \dfrac{3}{2} \\ 0 < x < 2\pi, \quad \pi < y < 2\pi. \end{cases}$$

Избавимся от модуля в 1-м уравнении системы (возведением в квадрат) и перепишем 2-е уравнение (раскроем косинус суммы и косинус разности), получаем

$$\begin{cases} \sin^2 x \sin^2 y = \dfrac{1}{16} \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4} \\ 0 < x < 2\pi, \quad \pi < y < 2\pi. \end{cases}$$

Откуда $\sin^2 x = \frac{1}{16\sin^2 y}$, подставим это в преобразованное 2-е уравнение

$$(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y) = \frac{9}{16}$$

$$\sin^4 y - \frac{1}{2}\sin^2 y + \frac{1}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 y = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin y = -\frac{1}{2} \quad (\text{т. к. } \pi < y < 2\pi)$$

$$\begin{cases} \sin y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4} \\ 0 < x < 2\pi, \quad \pi < y < 2\pi. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow \cos x = \dfrac{3}{4\cos\frac{7\pi}{6}}, \quad x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6} \\ y = \dfrac{11\pi}{6} \Rightarrow \cos x = \dfrac{3}{4\cos\frac{11\pi}{6}}, \quad x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6} \end{array}\right.$$

Задача 11.20. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \pi y = \dfrac{1 + \operatorname{tg} \pi x}{1 - \operatorname{tg} \pi x} \\ 2x^2 + y^2 = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

ООСУ: $y \neq \frac{1}{2} + n, \quad x \neq \frac{1}{2} + m, \quad x \neq \frac{1}{4} + k, \quad n, m, k \in \mathbb{Z}.$

$$* \quad \frac{1 + \operatorname{tg} \pi x}{1 - \operatorname{tg} \pi x} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \pi x)$$

$$\operatorname{tg} \pi y = \frac{1 + \operatorname{tg} \pi x}{1 - \operatorname{tg} \pi x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \pi y = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \pi x) \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{4} + s, \quad s \in \mathbb{Z}$$

$$2x^2 + (x + s + 1/4)^2 = \frac{3}{8}$$

$$x = -\frac{s + 1/4}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{2}{9}\left(s + \frac{1}{4}\right)^2}$$

Но необходимо, чтобы $\frac{1}{8} - \frac{2}{9}\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad s \in [-1; 1/2]$

$$s = \left[\begin{array}{l} -1, \quad x = \dfrac{1}{4} \notin \text{ООСУ} \\ 0, \quad x = -\dfrac{1}{12} \pm \dfrac{1}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{12} \in \text{ООСУ} \\ \dfrac{1}{4} \notin \text{ООСУ} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -\frac{5}{12}, \quad y = -\frac{1}{6}.$

Задача 11.21. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(\pi 2^x) \sin(\pi 2^y) = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{tg}(\pi 2^x) \operatorname{tg}(\pi 2^y) = 3. \end{cases}$$

Пусть $\pi 2^x = t, \quad \pi 2^y = u$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} \sin t \sin u = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{tg} t \operatorname{tg} u = 3. \end{cases}$$

Сначала сложим эти два уравнения системы, а потом вычтем.
Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \cos(t-u) = 1 \\ \cos(t+u) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t-u = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ t+u = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Откуда

$$\left[\begin{aligned} t &= \pm\frac{\pi}{3} + (n+k)\pi \\ u &= \pm\frac{\pi}{3} + (k-n)\pi \end{aligned}\right.$$

Но есть дополнительные условия $t > 0, \quad u > 0 \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{cases} n+k \geq 0 \\ k-n \geq 0 \end{cases}\right| \text{для решений с } +\frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{cases} n+k > 0 \\ k-n > 0 \end{cases}\right| \text{для решений с } -\frac{\pi}{3}$$

Окончательный ответ

$$\begin{cases} x = \log_2(\dfrac{1}{3} + k + n) \\ y = \log_2(\dfrac{1}{3} + k - n) \\ n+k \geq 0 \\ k-n \geq 0 \end{cases} \text{И} \quad \begin{cases} x = \log_2(-\dfrac{1}{3} + k + n) \\ y = \log_2(-\dfrac{1}{3} + k - n) \\ n+k > 0 \\ k-n > 0 \end{cases}$$

Семинар 12

Пусть $C_{n\times n},\ B_{n\times n}$ — две квадратные матрицы.

Матрица C называется обратной к матрице B, если их произведение есть единичная матрица

$$CB = E = (\delta_{ik})_{n\times n}.$$

Обозначение $C = B^{-1}$.

Задача 12.1. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем определитель исходной матрицы: $\det A = 2$.

2) Построим транспонированную матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Построим присоединенную матрицу (матрица составленная из алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы)

Алгебраическое дополнение $= M_{ij}(-1)^{i+j}$, $\quad M_{ij}$ — минор элемента с индексами $i,\ j$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Решение тригонометрических уравнений

Задача 12.2. Решить ур-е $\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x \sin 2x$.

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x \sin 2x$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 2x - 1 = 4\sin 2x - 4\sin x - 2\sin x - 2\sin x \cos x$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x \sin 2x$$

$$(\sin x - \sin 2x)^2 = 4(\sin x - \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &\sin x - \sin 2x = 0 \\ &\sin x - \sin 2x = 4 \Rightarrow x \in \varnothing \end{aligned}\right.$$

$$\sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Задача 12.3. Решить уравнение $\frac{\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}}{\cos x} = 4\sin x, \quad 0 < x < 2\pi$.

$$\begin{cases}\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}} + \sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}} = 4\sin x\cos x\\ 0 < x < 2\pi\\ \cos x \neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}|\sin\dfrac{x}{2}| + |\cos\dfrac{x}{2}| = \sqrt{2}\sin 2x\\ \cos x \neq 0\\ 0 < x < 2\pi\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}) = \sin 2x\\ 0 < x \leq \pi\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}) = \sin 2x\\ \pi < x < 2\pi\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{10}$.

Задача 12.4. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если известно что

$$\begin{cases}\sin\alpha + \sin\beta = a\\ \cos\alpha + \cos\beta = b\end{cases}, ab \neq 0.$$

Ответ: $\frac{4a}{a^2+b^2+ab}$.

Алгоритм решения тригонометрических неравенств

1) Определить период T функции, входящей в неравенство.

2) На отрезке длинной периода решить исходное неравенство (получаем ограничение на x сверху и снизу).

3) К границам промежутка, полученного в предыдущем пункте, прибавить слагаемое $k \cdot T \quad (k \in \mathbb{Z})$.

4) Если неравенство надо решить лишь на некотором множестве M, то нужно найти пересечение найденных решений с множеством M.

Задача 12.5. Найти период функции $y = \cos\frac{k}{n}x + \cos\frac{m}{s}x$.
Ответ: $T = \text{НОК}(n,s)/\text{НОД}(k,m)$.

Задача 12.6. Найти $\arcsin(\sin 3)$.

$$\left.\begin{aligned} &\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \\ &3 \in (\frac{\pi}{2};\pi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3.$$

Задача 12.7. Доказать $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = (\sin\frac{\pi}{5})\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$$

$$\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$$

Задача 12.8. Решить систему

$$\begin{cases} (0.25)^{2\sin x} - 3\cdot(0.25)^{\sin x} < -2, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Пусть $(0.25)^{\sin x} = y$, тогда первое неравенство запишется как

$$y^2 - 3y + 2 < 0 \Rightarrow y \in (1;2)$$

$$1 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} < 2$$

$$0 > \sin x > -1/2$$

Ответ: $x \in (\pi; \frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}; 2\pi)$.

Задача 12.9. Решить систему

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(\sin^2 x - 2\sin x + \frac{1}{2}) > 0, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Пропотенциируем первое неравенство и получим равносильную систему

$$\begin{cases} 0 < \sin^2 x - 2\sin x + \frac{1}{2} < 1 \\ 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Пусть $\sin x = y$, тогда $0 < y^2 - 2y + \frac{1}{2} < 1$

$$\begin{cases} y \in \left(1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}}; 1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \\ y \in \left(-\infty; 1 - \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) \cup \left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y \in \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}; 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < \sin x < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Семинар 13

Уравнения с параметром

Задача 13.1. При каждом вещественном значении параметра a найти решение уравнения $\sin x + \cos(x+x) + \cos(a-x) = 2$.

Перепишем сумму двух косинусов как

$$\cos(a+x) + \cos(a-x) = 2\cos a \cos x$$

Получаем

$$\sin x + 2\cos a \cos x = 2$$

$$\sin(x+\phi) = \frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}, \quad \text{где } \phi = \arcsin\left(\frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\right)$$

Но $\sin(...) \in [-1;1] \Rightarrow \quad a \in [n\pi - \frac{\pi}{6}; n\pi + \frac{\pi}{6}],\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: 1) при $a \in [n\pi - \frac{\pi}{6}; n\pi + \frac{\pi}{6}],\ \ x = -\arcsin\left(\frac{2\arcsin a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\right) + (-1)^k \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + k\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}$;

2) при $a \notin [n\pi - \frac{\pi}{6}; n\pi + \frac{\pi}{6}], \quad x = \varnothing$.

Задача 13.2. При каждом вещественном значении параметра a найти решение уравнения $\frac{\frac{1}{\cos x}+1}{\frac{1}{\cos x}-1} = \frac{a}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

Равносильная система

$$\begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} = \dfrac{2a}{1-\cos x} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2a-1 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases}$$

$$2a-1 \neq 0, \quad 2a-1 \neq 1, \quad |2a-1| \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad a \in [0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$$

Задача 13.3. При каких вещественных значения параметра a система

$$\begin{cases} axy + x - y + \dfrac{3}{2} = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Из второго уравнения системы получим

$$xy = -1 - x - 2y$$

Подставим это в первое уравнение

$$a(-1-x-2y)+x-y+\frac{3}{2}=0$$

$$(1-a)x-(2a+1)y+\frac{3}{2}=0$$

Получаем, что единственное решение будет при $a=1$ и $a=-\frac{1}{2}$. При других значениях a

$$y=\frac{-x-1}{x+2}$$

$$(1-a)x^2+(\frac{9}{2}-a)x+4=0$$

Т. е. надо смотреть, когда дискриминант этого уравнения обратится в ноль.

Задача 13.4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2 \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любых значениях b.

Ответ: -1.

Задача 13.5. Решить неравенство с параметром $2|x-a|<2ax-x^2-2$.

Перепишем неравенство в виде

$$2|x-a|<2ax-x^2-a^2-2+a^2$$

$$2|x-a|<a^2-2-(x-a)^2$$

Пусть $|x-a|=u$, тогда получим равносильную систему

$$\begin{cases} u^2+2u+2-a^2<0 \\ u\geq 0 \end{cases}$$

Откуда $a^2-1>0$ и $-1-\sqrt{a^2-1}<u<-1+\sqrt{a^2-1}$.

Ответ: 1) при $|a|\leq\sqrt{2},\ \ x=\varnothing$;
2) при $|a|>\sqrt{2},\ \ a+1-\sqrt{a^2-1}<x<a-1+\sqrt{a^2-1}$.

Задача 13.6. $\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leq 13-5b+\frac{1}{2}b^2$ Доказать, что для любых $a,b\in\mathbb{R}$ неравенство верно.

Если неравенство верно всегда, то оно верно и при минимальном значении правой части

$$\min\left(13-5b+\frac{1}{2}b^2\right)=\frac{1}{2}$$

Т. е. осталось доказать, что

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leq\frac{1}{2}$$

Пусть $5^a=t$, тогда $\frac{5t}{t^2+5}\leq 0.5\Leftrightarrow(t-5)^2\leq 0$. А это верно при любом значении $t=5^a$.

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Пусть заданы $a_1,\ d$, тогда упорядоченное множество $a_1, a_2, ..., a_n$ называется арифметической прогрессией, если между члена множества справедливо рекуррентное соотношение

$$a_k = a_{k-1} + d, \quad k = \overline{2, n}.$$

Свойства:

$$1)\quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$2)\quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$3)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \left(a_1 + \frac{d}{2}(n-1)\right) n$$

Геометрическая прогрессия

Пусть заданы два числа $b_1,\ q$, тогда упорядоченное множество $b_1, b_2, ..., b_n$ называется геометрической прогрессией, если между члена множества справедливо рекуррентное соотношение

$$b_k = b_{k-1} \cdot q, \quad k = \overline{2, n}.$$

Свойства:

$$1)\quad b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$$

$$2)\quad b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$3)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \left[\begin{array}{l} b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1 \\ \quad b_1 n, \quad q = 1 \end{array}\right.$$

Задача 13.7. Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого её членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_1 + 2d \\ a_4 = a_1 + 3d \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} d = 2 - a_1 \\ (4 - a_1)^2 + (6 - 2a_1)^2 < 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1 \in (2.4; 4) \Rightarrow$ *Ответ:* $a_1 = 3$.

Задача 13.8. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 1.5 больше суммы её первых трёх членов. Пятый член прогрессии равен третьему, умноженному на 4. Найти четвертый член прогрессии, если её знаменатель положительный.

$$\left.\begin{array}{r} S_5 = b_1 \dfrac{1-q^5}{1-q} \\ S_3 = b_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} \end{array}\right| \Rightarrow b_1 q^3 (1+q) = \frac{3}{2}$$

$$b_5 = 4 \cdot b_3 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad q = 2 \Rightarrow \quad b_4 = \frac{1}{2}$$

Задача 13.9. Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго на четвертый член равно 3. Найти второй член прогрессии.

$$b_1 b_5 = b_1 b_4 q = b_2 b_4 = 12$$

$$\frac{b_2}{b_4} = 3 \Rightarrow \quad b_2^2 = 36 \Rightarrow \textit{Ответ: } b_2 = \pm 6.$$

Задача 13.10. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, причем $a_1 + a_2 + a_3 = 21$. А числа a_1^2, a_2^2, a_3^2 образуют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3.

$$a_1 + a_3 = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad 3a_2 = 21 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 7$$

$$a_1 = a_2 - d = 7 - d$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + d$$

НО $(a_2^2)^2 = a_1^2 a_3^2 \quad \Rightarrow \quad a_2^2 = |a_1 a_3| \quad \Leftrightarrow \quad 49 = |49 - d^2|$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = \pm 7\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Задача 13.11. Три члена b_1, b_2, b_3 геометрической прогрессии являются соответственно первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии. Сумма b_1, b_2, b_3 равняется 114. Найти знаменатель геометрической прогрессии и сами b_1, b_2, b_3.

Пусть $b_1 = a_1 = c$.

$$\left\{\begin{array}{c} cq = c + 3d \\ cq^2 = c + 24d \\ c(1 + q + q^2) = 114 \end{array}\right| \Rightarrow cq(8 - q) = 7c \Rightarrow q = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 7 \end{array}\right.$$

Ответ: 1) $38, 38, 38, \quad q = 1$; 2) $2, 14, 98, \quad q = 7$.

Задача 13.12. Шары одинакового радиуса расположили один раз в форме квадрата, другой раз в форме правильного треугольника. Найти количество шаров, если вдоль стороны квадрата располагалось на два шара меньше, чем в стороне треугольника.

Ответ: 36.

Задача 13.13. Решить уравнение $3x^2 \log_3(2 + 3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2 + 3x} = 3x^2 + 2x$.

Найдем область определения: $2+3x > 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\frac{2}{3}; +\infty)$. После преобразований уравнение примет вид

$$(3x^2+2x)(1-\log_3(2+3x)) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2x=0 \\ \log_2(2+3x)=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{3} \\ x=-\dfrac{2}{3} \notin OO \end{array}\right.$$

Задача 13.14. Найти все значения параметра x ($x > 1$), при каждом из которых наибольшее из двух чисел a и b

$$a = \log_3 x + 9\log_x 9 - 6$$

$$b = \log_x(81x^2)$$

больше трёх.

Преобразуем выражения

$$a = \log_3 x + \frac{9}{\frac{1}{2}\log_3 x} - 6$$

$$b = \frac{\log_3 81x^2}{\log_3 x} = \frac{4+2\log_3 x}{\log_3 x}$$

Осталось решить систему

$$\begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} a > 3 \\ b > 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (1; 81) \cup (729; +\infty)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ