ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 2

БУТУЗОВ
ВАЛЕНТИН ФЕДОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КУЩЕНКО АННУ КОНСТАНТИНОВНУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Первый семестр математического анализа был посвящен изучению дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной $y = f(x)$, где $x, y -$ числовые переменные. Мы изучали различные дифференциальные свойства функций, ввели понятия предела, непрерывности и дифференцируемости функции, рассмотрели теоремы Вейерштрасса, Кантора, формулу Лагранжа, формулу Тейлора, неопределенный и определенный интегралы и т.д. Второй семестр в некотором смысле будет дальнейшим развитием дифференциального и интегрального исчислений, но уже применительно к функциям нескольких переменных или функциям многих переменных.

Понятие n-мерного координатного пространства

Для функций одной переменной мы активно использовали геометрическую иллюстрацию. Аналогично, в случае функций многих переменных введём понятие -мерного пространства, и с геометрической точки зрения можно будет трактовать эти функции как некие геометрические объекты в m-мерном пространстве. Мы живем в трехмерном пространстве, в прямоугольной системе координат каждая точка пространства – это три ее координаты. Значит, все наше трёхмерное пространство – это множество точек с тремя координатами. Обобщим понятие трехмерного пространства на m-мерное, будем трактовать -мерное пространство как множество всевозможных упорядоченных совокупностей из m чисел.

Определение. Совокупность m чисел называется упорядоченной, если указано, какое из чисел считается первым, какое – вторым, и т.д. Произвольную упорядоченную совокупность m чисел будем обозначать так: $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то есть числа записываются в порядке их номеров.

Определение. Множество всевозможных упорядоченных совокупностей m чисел называется -мерным координатным пространством. Произвольную упорядоченную совокупность будем записывать в виде $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и называть ее точкой в -мерном пространстве. Числа $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будем называть координатами точки M. Точка $O(0, 0, \ldots, 0)$, у которой все координаты равны нулю, назовем началом координат.

Введем расстояние между точками $M_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $M_2(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ в -мерном пространстве по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2}. \qquad (1.1)$$

Эта формула хорошо известна из курса аналитической геометрии для плоскости ($m = 2$) и трехмерного пространства ($m = 3$).

Определение. Координатное пространство с введенным по формуле (9.1) расстоянием между точками называется -мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^m$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^m$, $R > 0 -$ некоторое число. Множество точек $\{M: \rho(M, A) \leq R\}$ называется -мерным шаром радиуса R с центром в точке A. Множество $\{M: \rho(M, A) = R\}$ называется m-мерной сферой радиуса R. Множество $\{M: \rho(M, A) < R\} -$ открытый m-мерный шар. Открытый шар $\{M: \rho(M, A) < \varepsilon\}$ называется -окрестностью точки A, а $\{M: 0 < \rho(M, A) < \varepsilon\} -$ проколотой ε-окрестностью точки A.

Множество $\{M(x_1, x_2, \dots, x_m): |x_1 - a_1| \leq d_1, \dots, |x_m - a_m| \leq d_m, d_i > 0\}$ называется -мерным параллелепипедом с центром в точке $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Пусть $\{M\} \subset \mathbb{R}^m$. Точка A называется внутренней точкой множества $\{M\}$, если существует -окрестность точки A, целиком принадлежащая множеству $\{M\}$. Точка A называется граничной точкой множества $\{M\}$, если в любой ε-окрестности точки A содержатся как точки множества $\{M\}$, так и точки, которые этому множеству не принадлежат.

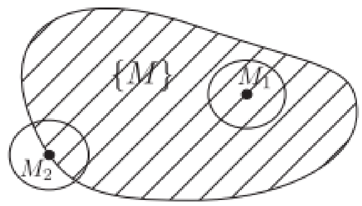


Рис. 1.1. Внутренняя M_1 и граничная M_2 точки множества $\{M\}$.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^m$ рассмотрим множество $G = \{M(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_i \leq 1, i = 1,2,3, x_i -$ рациональные числа$\}$. Данное множество не имеет внутренних точек, любая его точка является граничной. Любая точка $A \in \bar{G} = \{M(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_i \leq 1, i = 1,2,3\}$ будет граничной для множества G. Отметим, что $G -$ счетное множество, а его граница $\bar{G} -$ множество мощности континуума. Таким образом, граничные точки образуют множество более мощное, чем само исходное множество. Граница куба $\bar{G}$ состоит из его шести граней.

Определение. Совокупность всех граничных точек множества называется его границей.

Определение. Множество $\{M\}$ называется открытым, если все его точки – внутренние. (Пример: открытый шар $\{M: \rho(M, A) < R\}$.)

Определение. Множество $\{M\}$ называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки. (Пример: шар $\{M: \rho(M, A) \leq R\}$.)

Множество может быть и не открытым, и не замкнутым, например, рассмотренное выше множество $G = \{M(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_i \leq 1, i = 1,2,3, x_i -$ рациональные числа$\}$. Также множество может быть одновременно и открытым, и замкнутым, например, вся плоскость $\mathbb{R}^2$.

Определение. Точка A называется предельной точкой множества $\{M\}$, если в любой проколотой -окрестности точки A содержатся точки из множества $\{M\}$, отличные от A. Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{M\}$.

Определение. Точка A называется изолированной точкой множества $\{M\}$, если существует -окрестность точки A, в которой нет других точек из $\{M\}$, кроме A.

Внутренняя точка не может быть граничной, а граничная – не может быть внутренней. Любая внутренняя точка множества является его предельной точкой. А граничная точка множества может быть предельной точкой и может быть изолированной точкой этого множества.

Определение. Множество точек $\{M(x_1, x_2, \ldots, x_m): x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), \varphi_i -$ непрерывные на $[\alpha, \beta]\}$ называется непрерывной -мерной кривой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Если точки $A(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha))$ и $B(\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_m(\beta))$ не совпадают, то они называются концами кривой. Если точки A и B совпадают, то кривая называется замкнутой.8

Определение. Множество точек $\{M(x_1, x_2, \ldots, x_m): x_1 = x_1^0 + \alpha_1 t, \ldots, x_m = x_m^0 + \alpha_m t, -\infty < t < \infty\}$, где $x_1^0, \ldots, x_m^0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m -$ некоторые числа, называется прямой в -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Данная прямая проходит через точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$.

Определение. Множество $\{M\}$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству. (Географическим примером несвязного множества является Российская Федерация.)

Определение. Окрестностью точки $M \in \mathbb{R}^m$ называется любое открытое связное множество, содержащее точку M.

Задание. Докажите, что в любой окрестности точки M содержится некоторая -окрестность этой точки.

Последовательности точек в n-мерном евклидовом пространстве

Если каждому натуральному числу $n \in N$ поставлена в соответствие некоторая точка $M_n \in \mathbb{R}^m$, то говорят, что задана последовательность точек $\{M_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Определение. Точка $A \in \mathbb{R}^m$ называется пределом последовательности $\{M_n\}$, если предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, A) = 0.$$

Будем использовать обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$ или $M_n \to A$ при $n \to \infty$.

Лемма 1. Последовательность точек $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ сходится к точке $A(a_1, \ldots, a_m)$ тогда и только тогда, когда последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \ldots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$ координат точек M_n сходятся к соответствующим координатам $a_1, \ldots, a_m$ точки A.

Доказательство:

Запишем выражение для расстояния между точками M_n и A:

$$\rho(M_n, A) = \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + \cdots + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2}.$$

Пусть $M_n \to A$, тогда расстояние $\rho(M_n, A) \to 0$, значит, каждое слагаемое под корнем в формуле стремится к нулю. Откуда следует, что $\left\{x_1^{(n)}\right\} \to a_1, \dots, \left\{x_m^{(n)}\right\} \to a_m$.

Пусть $\left\{x_1^{(n)}\right\} \to a_1, \dots, \left\{x_m^{(n)}\right\} \to a_m$, тогда каждое слагаемое под корнем в формуле $\rho(M_n, A)$ стремится к нулю, следовательно, все выражение $\rho(M_n, A) \to 0$, это означает, что $M_n \to A$.

Определение. Последовательность точек $\{M_n\}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall$ натурального p:

$$\rho\left(M_n, M_{n+p}\right) < \varepsilon.$$

Лемма 2. Последовательность точек $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \dots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$ фундаментальны.

Теорема 1. (Критерий Коши сходимости последовательности). Для того, чтобы последовательность $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:

Пусть последовательность $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ сходится, тогда по Лемме 1 сходятся числовые последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \dots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$. Необходимые и достаточные условия сходимости и фундаментальности для числовых последовательностей мы доказывали в прошлом семестре. Таким образом, из сходимости последовательностей $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \dots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$ следует их фундаментальность. Тогда по Лемме 2 последовательность $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ также является фундаментальной.

Пусть последовательность $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ фундаментальная, тогда по Лемме 2 фундаментальными являются последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \dots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$. Мы знаем, что если числовые последовательности фундаментальны, то они сходятся. Тогда по Лемме 1 из сходимости $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \dots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$ следует сходимость $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right\}$.

Определение. Последовательность точек $\{M_n\}$ называется ограниченной, если все M_n принадлежат некоторому шару, т.е. $\forall n: \rho(M_n, O) \le R$.

Теорема 2. (Теорема Больцано-Вейерштраса). Из любой ограниченной последовательности $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство:

Пусть $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right\} -$ ограниченная последовательность, то есть $\exists R > 0 \colon \rho(M_n, O) = \sqrt{\left(x_1^{(n)}\right)^2 + \cdots + \left(x_m^{(n)}\right)^2} \leq R$. Отсюда получаем $\left|x_1^{(n)}\right| \leq R, \ldots, \left|x_m^{(n)}\right| \leq R$, следовательно, $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \ldots, \left\{x_m^{(n)}\right\} -$ ограниченные числовые последовательности.

По теореме Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей из ограниченной последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{x_1^{(k_n)}\right\}$, сходящуюся к некоторому числу a_1.

Из подпоследовательности $\left\{x_2^{(k_n)}\right\}$, которая также является ограниченной, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_2^{(l_n)}\right\} \to a_2$. При этом $\left\{x_1^{(l_n)}\right\} \to a_1$.

Из подпоследовательности $\left\{x_3^{(l_n)}\right\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_3^{(m_n)}\right\} \to a_3$. При этом $\left\{x_1^{(m_n)}\right\} \to a_1, \left\{x_2^{(m)}\right\} \to a_2$.

Продолжая этот процесс, на -ом шаге мы получим подпоследовательности $\left\{x_1^{(p_n)}\right\} \to a_1, \left\{x_2^{(p_n)}\right\} \to a_2, \ldots, \left\{x_m^{(p_n)}\right\} \to a_m$. В силу Леммы 1 подпоследовательность точек $\{M_{p_n}\}$ сходится к точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Теорема доказана.

В прошлом семестре мы рассматривали еще много различных теорем, вводили два определения предельной точки и доказывали их эквивалентность, понятия верхнего и нижнего пределов. Однако не все эти понятия годятся для последовательностей в -мерном пространстве.

Понятие функции многих переменных. Предел функции многих переменных

Пусть $\{M(x_1, x_2, \ldots, x_m)\} \in \mathbb{R}^m$ и каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \{M\}$ поставлено в соответствие некоторое число u, тогда говорят, что на множестве $\{M\}$ определена функция m переменных, которую будем обозначать как $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(M)$. Координаты $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются независимыми переменными или аргументами функции, а $\{M\} -$ областью определения функции.

В случае функции двух переменных будем использовать обозначения $z = f(x, y)$ или $u = f(x, y)$. Графиком функции двух переменных является поверхность в прямоугольной системе координат $Oxyz$, точки которой имеют координаты $(x, y, f(x, y))$.

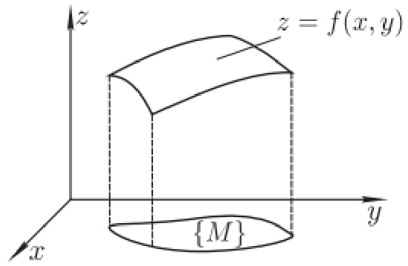


Рис. 2.1. График функции двух переменных.

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве $\{M\}$ и точка A – предельная точка множества $\{M\}$.

Определение 1 (по Коши). Число b называется пределом функции $u = f(M)$ в точке A, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall M \in \{\text{проколотой } \delta - \text{окр. т.} A, M \in \{M\}\}$ выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Определение 1 (по Гейне). Число b называется пределом функции $u = f(M)$ в точке A, если $\forall \{M_n\} \to A$ $(M_n \in \{M\}, M_n \neq A)$ соответствующая последовательность $\{f(M_n)\} \to b$.

<u>Обозначения</u>:

$\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \ldots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \ldots, x_m) = b$, где $A = A(a_1, \ldots, a_m)$.

Теорема 3. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство проводится так же, как и для функции одной переменной.

<u>Примеры</u>.

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left\{(x + y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}\right\} = 0$

   Функция $u(x, y)$ не определена на осях координат, однако точка $O(0,0)$ является предельной точкой ее области определения, поэтому задача поставлена корректно. Поскольку первый множитель $u(x, y)$ при $x \to 0$ и $y \to 0$ стремится к нулю, а другие два ограничены, получим $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y) = 0$.

   Для доказательства можно воспользоваться определением предела функции по Коши, для произвольно заданного ε взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

2) $u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

   Функция $u(x, y)$ не определена на осях координат, однако точка $O(0,0)$ является предельной точкой ее области определения.

Докажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не существует. Устремим точку (x,y) к началу координат по прямой $y=kx$. Тогда

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

При стремлении точки (x,y) к началу координат по разным прямым, будем получать разные предельные значения, поэтому предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не существует.

ЛЕКЦИЯ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

На прошлой лекции мы рассматривали предел функции $u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ при $x\to 0, y\to 0$ и доказали, что он не существует. Мы устремляли точки к началу координат по различным прямым и получали разные предельные значения. Что, если по разным прямым получается одно и то же предельное значение, следует ли отсюда, что предел, как мы его определили, будет равен этому числу? Оказывается, что этого недостаточно.

Лемма 3. Если $\{M_n\}\to A$ при $n\to\infty$ и все $\{M_n\}\in$ замкнутому множеству $\{M\}$, то $A\in\{M\}$.

Доказательство:

Так как $\{M_n\}\to A$ при $n\to\infty$, то в любой -окрестности точки A имеются члены последовательности $\{M_n\}$, а значит и точки из множества $\{M\}$. Следовательно, A является либо внутренней точкой, а значит, принадлежит $\{M\}$, как любая внутренняя точка, либо граничной и принадлежит $\{M\}$, множество по условию замкнуто, то есть содержит все свои граничные точки. В любом случае $A\in\{M\}$, что и требовалось доказать.

Определение. Функция $u=f(M)$ называется бесконечно малой в точке A (при $M\to A$), если $\lim\limits_{M\to A} f(M)=0$.

Пусть $f(M)$ и $g(M)-$ бесконечно малые функции в точке A. Рассмотрим предел их отношения $\lim\limits_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)}$.

1) Если $\lim\limits_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)}=C\neq 0$, то $f(M)$ и $g(M)-$ бесконечно малые одного порядка;
2) Если $\lim\limits_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)}=1$, то $f(M)$ и $g(M)-$ эквивалентные;
3) Если $\lim\limits_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)}=0$, то говорят, что $f(M)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(M)$ в точке A, и пишут $f(M)=o(g)$ при $M\to A$.

Пример. Пусть $f(x,y)=x^3+y^3$, $g(x,y)=x^2+y^2-$ бесконечно малые в точке $O(0,0)$. Докажем, что $f=o(g)$ при $M\to O(0,0)$. Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, имеем

$$\lim_{M\to O}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r^2}=\lim_{r\to 0} r(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=0.$$

Теорема 4. Пусть $f(M)$ и $g(M)$ определены на $\{M\}$ и $\lim\limits_{M\to A} f(M)=b$, $\lim\limits_{M\to A} g(M)=c$, тогда

1) $\lim\limits_{M\to A}\{f(M)\pm g(M)\}=b\pm c$,
2) $\lim\limits_{M\to A}\{f(M)g(M)\}=bc$,
3) если $c\neq 0$, то $\lim\limits_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)}=\frac{b}{c}$.

Обратим внимание на условие: $f(M)$ и $g(M)$ определены на $\{M\}$. Это важно, поскольку возможен случай, когда функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на разных множествах, но имеют общую предельную точку A. Тогда, например, о сумме этих функций речи быть не может.

Определение. Говорят, что функция $f(M)$ удовлетворяет в точке A условию Коши, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, такое, что $\forall M_1, M_2 \in \{\text{проколотой}\ \delta-\text{окр.т.}\ A, M_1, M_2 \in \{M\}\}$ выполняется неравенство $|f(M_2) - f(M_1)| < \varepsilon$.

Теорема 5 (Критерий Коши существования предела функции в данной точке). Для того, чтобы функция $f(M)$ имела предел в точке A, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.

Мы до сих пор говорили о пределе функции в точке, но можно также дать определение предела при $M \to \infty$, когда расстояние точки M от начала координат неограниченно увеличивается.

Задача. Сформулировать определение предела функции $f(M)$ при $M \to \infty$ по Коши и по Гейне, доказать их эквивалентность, сформулировать условие Коши существования предела функции $f(M)$ при $M \to \infty$ и доказать критерий Коши.

Непрерывность функции многих переменных

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве $\{M\}$, пусть точка $A \in \{M\}$ и является предельной точкой множества $\{M\}$.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке A, если

$$\lim_{M\to A} f(M) = f(A). \tag{2.1}$$

Введем функцию $\Delta u = f(M) - f(A)$ и назовем ее приращением (полным приращением) функции $f(M)$ в точке A. Условие непрерывности функции $u = f(M)$ в точке A можно записать в виде:

$$\lim_{M\to A} \Delta u = \lim_{M\to A}\{f(M) - f(A)\} = 0. \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) называется разностной формой условия непрерывности функции $f(M)$ в точке A.

Пусть точки M и A имеют координаты: $M(x_1, \dots, x_m)$ и $A(a_1, \dots, a_m)$. Положим $x_1 - a_1 = \Delta x_1, \dots, x_m - a_m = \Delta x_m$, тогда

$$\Delta u = f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, \dots, a_m).$$

Разностная форма условия непрерывности функции принимает вид

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0. \tag{2.3}$$

Непрерывность функции, определенную условием (2.2) (или (2.3)), называют также непрерывностью по совокупности переменных.

Введем понятие непрерывности функции по отдельным переменным. Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$. Зафиксируем значение одной из переменных, положив $y = y_0 = const$ (рис. 2.1), тогда наша функция станет функцией одной переменной $u = f(x, y_0)$.

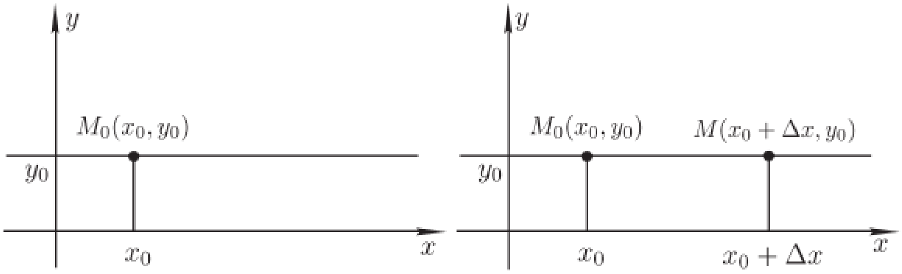


Рис. 2.1. Приращение.

Определение. Если

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0), \tag{2.4}$$

то функция $u = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x. Аналогично определяется непрерывность по переменной y.

Введем обозначение $\Delta_x u = f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$, получим функцию одной переменной, которая называется частным приращением функции $f(x, y)$ в точке M_0 по переменной x. Тогда условие (2.4) можно переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \Delta_x u = 0. \tag{2.5}$$

Если обозначить $x - x_0 = \Delta x$, тогда $x = x_0 + \Delta x$ и $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, условие (2.4), (2.5) примет вид

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{2.6}$$

Теорема 6. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывна по совокупности переменных в точке M_0, тогда $u = f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 по каждой переменной x и y.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. В частности, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, а это и означает, что $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 по переменной x. Аналогично доказывается непрерывность в точке M_0 по переменной y.

Замечание. Обратное к теореме 6 утверждение неверно.

Пример 1.

$$u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0, \\ \quad 0, \quad x = y = 0. \end{cases}$$

На прошлой лекции мы уже рассматривали эту функцию без доопределения ее в начале координат и доказали, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y)$ не существует. Следовательно, функция $u(x, y)$ разрывна в точке $O(0,0)$ по совокупности переменных. Тем не менее, функция $u(x, y)$ непрерывна в точке O(0, 0) по отдельным переменным. В самом деле, зафиксируем $y = 0$, тогда $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $u(x, 0) = 0$, отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to 0} u(x, 0) = 0 = u(0,0)$, то есть функция $u(x, y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной x. Аналогично доказывается непрерывность функции в точке $O(0,0)$ по переменной y.

Пример 2.

$$u(x, y) = \begin{cases} (x\ +\ y)\, sin\dfrac{1}{x}\ sin\ \dfrac{1}{y}, x \neq 0, y \neq 0, \\ \qquad\qquad 0, \quad x = y = 0. \end{cases}$$

На прошлой лекции мы доказали, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} u(x, y) = 0 = u(0,0)$, то есть функция $u(x, y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по совокупности переменных. Вместе с тем, она не определена на осях координат (кроме точки $O(0,0)$), и поэтому не является непрерывной по отдельным переменным в точке $O(0,0)$. Обратим внимание на то, что в данном случае теорема 6 неприменима, поскольку функция $u(x, y)$ не определена на осях x и y, то есть в окрестности точки $O(0,0)$.

Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 7. Пусть $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, тогда $f(M) \pm g(M), f(M)g(M), \frac{f(M)}{g(M)}$ (при условии $g(A) \neq 0$) непрерывны в точке A.

Доказательство теоремы 7 моментально следует из теоремы 4 и определения непрерывности.

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, \dots, x_m)$, пусть ее аргументы являются не независимыми переменными, а функциями аргументов $t_1, \dots, t_k$:

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k),$$

где функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ определены на множестве $\{K\} = \{K(t_1, \dots, t_k)\}$.

Теорема 8 (о непрерывности сложной функции). Пусть функции $\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ непрерывны в точке $A(a_1, \dots, a_k)$ и пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в точке $B(b_1, \dots, b_k)$, где $b_1 = \varphi_1(A), \dots, b_m = \varphi_m(A)$. Тогда сложная функция $u = f\big(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k)\big) =: F(t_1, \dots, t_k)$ непрерывна в точке A.

Теорема 9 (об устойчивости знака непрерывной функции). Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке A и $f(A) > 0$ (< 0), то $\exists$ -окрестность точки A, в которой $f(M) > 0$ (< 0).

Доказательство. Так как $f(M)$ непрерывна в точке A, то $\lim\limits_{M\to A} f(M) = f(A)$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall M \in \{\delta - окр.т. A, M \in \{M\}\}$ выполнено $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Пусть $f(A) > 0$, возьмем $\varepsilon = f(A)$, ему соответствует $\delta > 0$ такое, что в -окрестности точки A: $-f(A) < f(M) - f(A) < f(A)$. Отсюда следует, что $f(M) > 0$ в -окр. т. A.

Теорема 10 (о прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение). Пусть функция $u = f(M)$ непрерывна на связном множестве $\{M\}$. Пусть M_1 и $M_2 \in \{M\}$, $f(M_1) = u_1, f(M_2) = u_2$. Тогда $\forall u_0 \in [u_1, u_2]$ на любой непрерывной кривой $L \subset \{M\}$ найдется точка M_0: $f(M_0) = u_0$.

Доказательство. Пусть кривая L задана уравнениями:

$$L: x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \le t \le \beta,$$

где функции $\varphi_i(t)$ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$. При этом точки M_1 и M_2 имеют координаты: $M_1(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha))$, $M_2(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_m(\beta))$. На кривой L наша функция принимает вид $u = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) =: F(t)$. По теореме 8 функция $F(t)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$. На концах сегмента $[\alpha, \beta]$ функция $F(t)$ принимает значения $F(\alpha) = f(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha)) = f(M_1) = u_1, F(\beta) = f(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_m(\beta)) = f(M_2) = u_2$. По известной теореме из 1-го семестра $\exists t_0 \in [\alpha, \beta]$ $: F(t_0) = u_0$, то есть $f(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)) = u_0$. Но $F(t_0) = f(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)) = f(M_0)$, причем точка $M_0(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)) \in L$. Итак, $\exists$ точка $M_0 \in L: f(M_0) = u_0$, что и требовалось доказать.

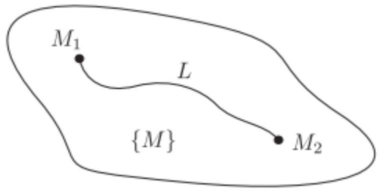


Рис. 2.2. Иллюстрация к теореме 10.

ЛЕКЦИЯ 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $u = f(M)$ ограничена на множестве $\{M\}$, если $\exists$ числа C_1 и C_2, такие, что $\forall M \in \{M\}$: $C_1 \le f(M) \le C_2$.

Теорема 11 (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве.

Доказательство. Допустим, что непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$ функция $u = f(M)$ не ограничена на этом множестве. Тогда $\forall$ натурального числа n $\exists M_n \in \{M\}$: $|f(M_n)| > n$. Последовательность $\{f(M_n)\}$ является неограниченной. Последовательность точек $\{M_n\}$ – ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштраса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пусть подпоследовательность $\{M_{k_n}\} \to A$ при $n \to \infty$. В силу леммы 3 точка $A \in \{M\}$ и поэтому функция $f(M)$ непрерывна в точке A. Следовательно, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_{k_n})\} \to f(A)$ при $n \to \infty$, а это противоречит тому, что $\{f(M_{k_n})\}$ – неограниченная последовательность. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение не верно и, следовательно, функция $u = f(M)$ ограничена на множестве $\{M\}$.

Определение. Число U называется точной верхней гранью функции $u = f(M)$ на множестве $\{M\}$, если

1. $\forall\, M \in \{M\}$: $f(M) \le U$;
2. $\forall$ числа $\widetilde{U} < U$ $\exists \widetilde{M} \in \{M\}$: $f(\widetilde{M}) > \widetilde{U}$.

Теорема 12 (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных граней.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется равномерно непрерывной на множестве $\{M\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall M_1$ и $M_2 \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho(M_1, M_2) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$.

Задача. Привести пример многих переменных функции, которая непрерывна на некотором множестве, но не является равномерно непрерывной.

Теорема 13 (Кантора). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.

Задача. Привести примеры, показывающие, что если множество $\{M\}$ не является ограниченным или замкнутым, то для такого множества утверждения теорем 11,12,13 не верны.

Частные производные и дифференцируемость

Пусть точка $M(x_1,\dots,x_m)$ – внутренняя точка области определения функции $u=f(x_1,\dots,x_m)$. Зафиксируем все аргументы функции кроме x_k. Рассмотрим частное приращение функции в точке M, соответствующее приращению Δx_k аргумента x_k:

$$\Delta_{x_k}u=f(x_1,\dots,x_k-1,x_k+\Delta x_k,x_k+1,\dots,x_m)-f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_m).$$

Определение. Если предел $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}$ существует, то он называется частной производной функции $u=f(x_1,\dots,x_m)$ в точке $M(x_1,\dots,x_m)$ по переменной x_k.

Для частной производной по переменной x_k используются различные обозначения: $u'_{x_k}, f'_{x_k}, u_{x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Примеры.

1) $u=x^y, x>0, y\in\mathbb{R}$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$$

2) $u(x,y)=\begin{cases}1 & \text{на осях координат,}\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$

Функция $u(x,y)$ не является непрерывной в точке начала координат $O(0,0)$, так как предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)$ не существует. Однако функция $u(x,y)$ имеет частные производные в этой точке:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0.$$

Замечание. Если $M(x_1,\dots,x_m)$ – граничная точка области определения функции, то для нее введенное определение частной производной может быть непригодно.

Например, для точки M_0 на рис. 3.1 не существует частное приращение $\Delta_x u$. В этом случае, если существует $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ во внутренних точках M области определения функции $\{M\}$, то полагают $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \lim\limits_{M \to M_0} \frac{\partial u}{\partial x}(M)$ (если этот предел существует).

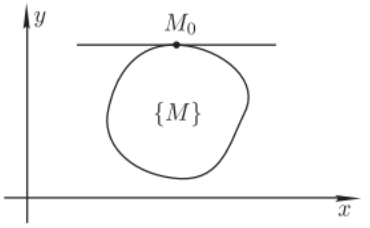


Рис. 3.1. Граничная точка.

Пусть точка $M(x_1, \dots, x_m)$ – внутренняя точка области определения функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$. Рассмотрим теперь полное приращение функции в этой точке

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m).$$

Определение. Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \tag{3.1}$$

где $A_1, \dots, A_m$ – какие-то числа (то есть они не зависят от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$), а $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m), i = 1, 2, \dots, m$ удовлетворяют условиям:

$\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i = 0$ и $\alpha_i(0, \dots, 0) = 0$.

Физический смысл дифференцируемости функции многих переменных

В механике во многих задачах скорость $\vec{v}$ движущейся точки на плоскости раскладывается на компоненты $\overrightarrow{v_x}$ и $\overrightarrow{v_y}$ вдоль оси x и вдоль оси y, соответственно. Теперь мы имеем функцию двух переменных $u(x, y)$, частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ есть скорость изменения функции в направлении оси x, аналогично, $\frac{\partial u}{\partial y}$ – скорость изменения функции в направлении оси y. Но ведь мы можем выйти из точки $M(x, y)$ по произвольному направлению, на следующей лекции лекцию мы введем понятие производной по направлению, которая будет характеризовать скорость изменения функции в произвольном направлении. Спрашивается, можно ли выразить скорость изменения функции в произвольном направлении через ее скорости по осям координат, то есть представить ее в виде линейной комбинации частных производных. Оказывается, что если функция дифференцируема, то можно, в противном случае – нет.

Вспомним, что для функции одной переменной $y = f(x)$ условие дифференцируемости имело вид:

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x = A \Delta x + o(\Delta x).$$

Возникает вопрос: каков аналог слагаемого $o(\Delta x)$ в случае функции многих переменных? Можно предположить, что аналогом будет сумма $o(\Delta x_1)+\ldots+o(\Delta x_m)$, но это не верно. Рассмотрим полное приращение функции в точке $M(x_1,\ldots,x_m)$, обозначим буквой ρ расстояние между точками $M(x_1,\ldots,x_m)$ и $M'(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_m+\Delta x_m)$ (рис. 3.2).

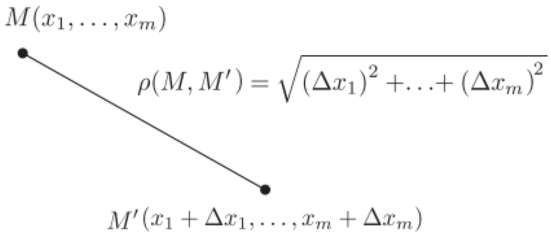


Рис. 3.2. Приращение.

Утверждение. Условие дифференцируемости (3.1) эквивалентно условию:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1+\cdots+A_m\Delta x_m+o(\rho), \tag{3.2}$$

причем $o(\rho)=0$ при $\rho=0$.

Доказательство:

1) Пусть выполнено условие дифференцируемости в виде (3.1), докажем, что $h:=\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_m\Delta x_m=o(\rho)$, причем $h=0$ при $\rho=0$.
   Если $\rho=0$, то все $\Delta x_i=0$. Тогда в силу условия (3.1) все $\alpha_i=0$. А значит и $h=0$.
   Если $\rho\neq 0$, то
   $$\frac{h}{\rho}=\alpha_1\frac{\Delta x_1}{\rho}+\ldots+\alpha_m\frac{\Delta x_m}{\rho}.$$
   Так как $\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right|\le 1$ и все $\alpha_i\to 0$ при $\rho\to 0$, то $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{h}{\rho}=0$, то есть $h=o(\rho)$ при $\rho\to 0$.
2) Пусть выполнено условие дифференцируемости в виде (3.2), докажем, что $h:=o(\rho)$ можно представить в виде $\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_m\Delta x_m$, причем $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \ldots\\ \Delta x_m\to 0}}\alpha_i=0$ и $\alpha_i(0,\ldots,0)=0$.
   Если $\rho\neq 0$, то запишем
   $$h=\frac{h}{\rho}\frac{\rho^2}{\rho}=\frac{h}{\rho}\frac{(\Delta x_1)^2+\cdots+(\Delta x_m)^2}{\rho}=\left[\frac{h}{\rho}\frac{\Delta x_1}{\rho}\right]\Delta x_1+\cdots+\left[\frac{h}{\rho}\frac{\Delta x_m}{\rho}\right]\Delta x_m$$
   $$=\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_m\Delta x_m,$$

мы ввели обозначения $\alpha_i = \frac{h}{\rho}\frac{\Delta x_i}{\rho}$. Докажем, что α_i удовлетворяют необходимым условиям. Так как $\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \leq 1$ и $\frac{h}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$, то есть при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0\\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i = 0$.

Если $\rho = 0$, то положим по определению, что все $\alpha_i = 0$, отсюда следует, что $\alpha_i(0, \dots, 0) = 0$.

Связь дифференцируемости с существованием частных производных

Теорема 14 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке $M(x_1, \dots, x_m)$,, то она имеет в точке M частные производные по всем переменным, то есть $\exists \frac{\partial u}{\partial x_i}(M), i = 1, \dots m$.

Доказательство. Запишем условие дифференцируемости функции в точке M в виде (3.1):

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m.$$

Положим все $\Delta x_i = 0$, кроме Δx_k, тогда

$$\Delta u = \Delta_{x_k} u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k,$$

где A_k − число, а $\alpha_k \to 0$ при $\Delta x_k \to 0$. Получим

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k,$$

то есть $\exists \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k$. Таким образом, существует $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M) = A_k$. Теорема доказана.

Следствие. Условие дифференцируемости функции в точке M можно записать в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m. \quad (3.3)$$

Замечание 1. Из любого вида условия дифференцируемости следует, что если функция дифференцируема в точке M, то она непрерывна в этой точке. Утверждение следует из того, что $\Delta u \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0$, а это и есть условие непрерывности в разностной форме.

Замечание 2. Обратное к Теореме 14 утверждение не верно.

Пример.

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{на осях координат,} \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Ранее было показано, что $\exists \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, но функция $u(x, y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$, а потому не дифференцируема в этой точке.

Таким образом, существование частных производных – только необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции в данной точке.

Теорема 15 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ имеет частные производные по всем аргументам в окрестности точки M, и эти частные производные непрерывны в точке M, то функция дифференцируема в этой точке.

ЛЕКЦИЯ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

На прошлой лекции мы ввели достаточное условие дифференцируемости функции, а является ли оно необходимым? Оказывается, что нет.

Замечание. Условие Теоремы 15 является только достаточным, но не необходимым условием дифференцируемости функции в точке M.

Пример 1.

$$u(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x=y=0.\end{cases}$$

В случае $x^2+y^2\neq 0$ частные производные существуют, их можно вычислить, просто продифференцировав выражение $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ как произведение. В начале координат $x=y=0$ производные также существуют. Рассмотрим приращение функции в начале координат по аргументу x: $\Delta_x u=x^2\sin\frac{1}{|x|}-0$. Тогда $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\frac{\Delta_x u}{x}=x\sin\frac{1}{|x|}\to 0$ при $x\to 0$, значит $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0$. Аналогично вычисляется производная $\frac{\partial u}{\partial y}$. Таким образом, функция $u(x,y)$ имеет частные производные во всех точках плоскости.

Отметим, что эти частные производные не являются непрерывными в точке начала координат $O(0,0)$, тем не менее функция $u(x,y)$ дифференцируема в этой точке. Для того, чтобы доказать дифференцируемость функции в начале координат, нужно доказать, что ее полное приращение $\Delta u=u(x,y)-u(0,0)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ можно представить в виде $\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)y+o(\rho)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Так как $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$, нужно доказать, что $\Delta u=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. Выразим приращение Δu через ρ: $\Delta u=\rho^2\sin\frac{1}{\rho}$. Учитывая, что $\left|\sin\frac{1}{\rho}\right|\leq 1$, получим, что отношение $\frac{\Delta u}{\rho}=\rho\sin\frac{1}{\rho}\to 0$ при $\rho\to 0$. Таким образом, функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$.

Пример 2.

$$u(x,y)=\begin{cases}1 \text{ на осях координат,}\\ 0 \text{ в остальных точках.}\end{cases}$$

Ранее мы получали, что $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$. Докажите самостоятельно, что частные производные непрерывны в точке $O(0,0)$. Заметим, что частные производные существуют не во всех точках плоскости. Так, $\frac{\partial u}{\partial x}$ существует везде кроме точек оси y, отличных от начала координат $O(0,0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ существует везде кроме точек оси x, отличных от начала координат $O(0,0)$. В тех точках, в которых $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ существуют, они равны нулю.

Заметим, что этот пример не противоречит Теореме 15, поскольку важным условием теоремы было существование производной в некоторой окрестности точки, а в нашем примере производные существуют не во всех точках окрестности $O(0,0)$.

Дифференцируемость сложной функции

Теорема 16. Пусть

1) функции $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0) и $\varphi(u_0,v_0) = x_0, \psi(u_0,v_0) = y_0$;
2) функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0).

Тогда сложная функция $z = f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ дифференцируема в точке (u_0, v_0).

Доказательство. Зададим произвольные приращения Δu и Δv аргументам u и v в точке (u_0,v_0). Функции $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ получат приращения Δx и Δy, которые в силу условия (3.3) можно записать в виде:

$$\Delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 \Delta v, \tag{4.1}$$

$$\Delta y = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v + \beta_1 \Delta u + \beta_2 \Delta v, \tag{4.2}$$

где $\alpha_i, \beta_i \to 0$ при $(\Delta u \to 0, \Delta v \to 0)$ и $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$.

Этим приращениям Δx и Δy соответствует приращение Δz функции $z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0), которое в силу второго условия теоремы можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y, \tag{4.3}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$ и $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ при $\Delta x = \Delta y = 0$. Из (4.1), (4.2) следует, что $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $(\Delta u \to 0, \Delta v \to 0)$ и $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$.

Выразим Δz через $\Delta u, \Delta v$ и убедимся в том, что будет выполнено условие дифференцируемости. Подставим (4.1), (4.2) в правую часть (4.3) и получим выражение вида:

$$\Delta z = A\Delta u + B\Delta v + \alpha \Delta u + \beta \Delta v, \tag{4.4}$$

где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0,v_0),$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0,v_0).$$

Выражения для α и β выпишите самостоятельно. Очевидно, что $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $(\Delta u \to 0, \Delta v \to 0)$ и $\alpha = 0, \beta = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$. Равенство (4.4) означает, что сложная функция $z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ дифференцируема в точке (u_0, v_0).

Следствие. Так как $A = \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)$, $B = \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)$, то для производных сложной функции имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0), \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0). \tag{4.6}$$

В более краткой записи формулы (4.5) и (4.6) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{4.5'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4.6'}$$

Пример. Рассмотрим уравнение в частных производных $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, где искомой функцией является $z(x, y)$. Мы пока не знаем, как решать такие уравнения, но проверить, удовлетворяет некая функция уравнению или нет, мы можем.

Пусть $z = f(t) -$ произвольная дифференцируемая функция аргумента t. Докажем, что функция $z = f(x^2 + y^2)$ будет решением данного уравнения. Найдем ее частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 + y^2)2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 + y^2)2y.$$

Тогда

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 + y^2)(2xy - 2xy) = 0.$$

Таким образом, любая функция $z = f(x^2 + y^2)$, где $f(t) -$ дифференцируемая функция, является решением данного уравнения.

Теперь рассмотрим общий случай сложной функции $z = f(x_1, \dots, x_m)$, которая зависит от m переменных, где $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$. Аналогично формулам (4.5)’, (4.6)’ получим общую формулу для производной сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}. \tag{4.7}$$

Дифференциал функции многих переменных

Дифференциалом dy функции одной переменной $y = f(x)$, если она дифференцируема, мы называли линейное по Δx слагаемое в выражении для приращения функции $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, то есть $dy = f'(x)\Delta x$.

Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке M, тогда по определению дифференцируемости ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M)\Delta x_m\right) + (\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m).$$

Заметим, что каждая из сумм в формуле Δu стремится к нулю при $(\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0)$. При этом первое слагаемое является линейной функцией аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, а второе – функцией более высокого порядка малости, чем линейная функция.

Определение. Дифференциалом (первым дифференциалом) функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M называется линейная относительно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ часть приращения функции в этой точке:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M)\Delta x_m.$$

Дифференциалом независимой переменной x_i будем называть приращение этой переменной $dx_i = \Delta x_i$. Тогда дифференциал функции можно записать в виде

$$du = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_i. \tag{4.8}$$

Пример.

$u = x^y (x > 0, y \in \mathbb{R})$

$du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x \, dy$

$du|_{(1,1)} = dx$

$du|_{(1,0)} = 0$

Лемма 4 (об инвариантности формы первого дифференциала). Формула (4.8) остается верной и в том случае, когда аргументы функции $x_1, \dots, x_m$ являются не независимыми переменными, а дифференцируемыми функциями каких-то независимых переменных.

Доказательство. Пусть $u = f(x_1, \dots, x_m) -$ дифференцируемая функция, у которой $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k) -$ дифференцируемые функции независимых переменных $t_1, \dots, t_k$. Тогда $u = f\big(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k)\big) -$ сложная функция независимых переменных $t_1, \dots, t_k$, дифференцируемая в силу Теоремы 16. Запишем выражение для ее дифференциала, учитывая формулу (4.7):

$$du = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u}{\partial t_i} dt_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i.$$

Изменим порядок суммирования, тогда

$$du = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j. \tag{4.9}$$

Мы получили не что иное, как формулу (4.8).

Замечание. Формула (4.8) отличается от формулы (4.9) тем, что в ней $dx_j = \Delta x_j$ — приращение переменной x_j, а в формуле (4.9) dx_j — дифференциал функции $x_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_k)$. Таким образом, сохраняется форма (вид) выражения для дифференциала функции, а содержание (наполнение) этой формулы изменяется.

Правила дифференцирования

Пусть u и v — дифференцируемые функции аргументов $x_1, \ldots, x_m$. Тогда

1) $d(cu) = cdu \ (c = const)$,
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$,
3) $d(uv) = vdu + udv$,
4) если $v \neq 0$, то $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Докажем, например, формулу 4. Функцию $w = \frac{u}{v}$ является сложной функцией аргументов $x_1, \ldots, x_m$. В силу леммы 4 мы можем вычислить ее дифференциал так, как если бы u и v были независимыми переменными:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Касательная плоскость

Давайте вспомним, в чем состоял геометрический смысл дифференцируемости для функции одной переменной. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ на плоскости Oxy (рис. 5.1), выберем точку $M_0(x_0, y_0)$. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке M_0, то есть имеет производную в этой точке, то в этой точке существует касательная к графику функции, причем угловой коэффициент касательной равен производной функции в этой точке $k = \operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x_0)$. Уравнение касательной записывается в виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

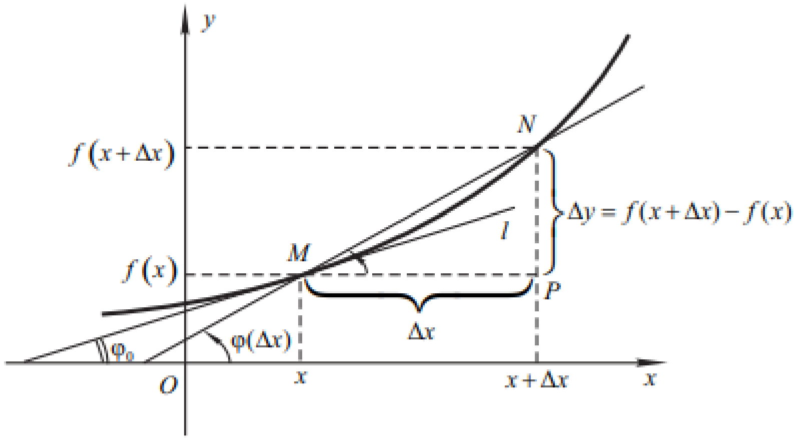


Рис. 5.1. Касательная к кривой на плоскости.

Покажем, что если функция двух переменных дифференцируема в некоторой точке, то в соответствующей точке существует касательная плоскость.

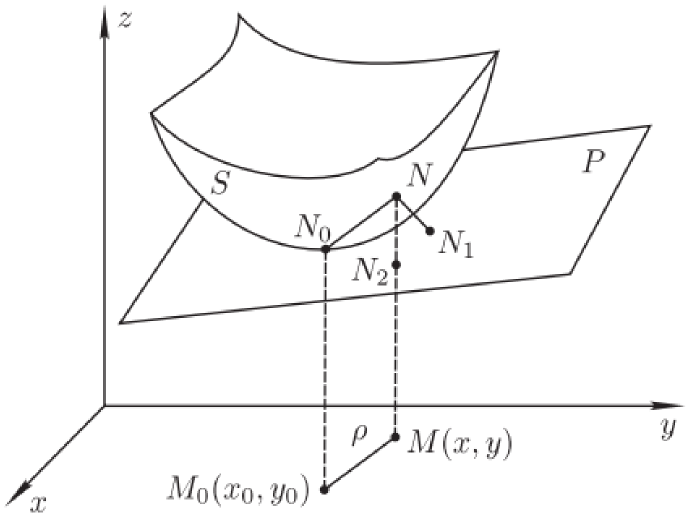


Рис. 5.2. Касательная плоскость.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y), (x, y) \in D$, ее графиком является поверхность $S = \{N(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\}$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 5.2). Проекция поверхности S на плоскость Oxy есть область D, в которой определена наша функция. Выберем на поверхности S точку $N_0(x_0, y_0, z_0) \in S, z_0 = f(x_0, y_0)$. Точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ является проекцией точки N_0 на плоскость Oxy. Проведем через точку N_0 плоскость P, $N_0 \in P$. Выберем произвольную точку $N(x, y, z) \in S$, $z = f(x, y)$, ее проекцией на плоскость Oxy является точка $M(x, y, z)$. Проведем отрезки $NN_1 \perp P, N_1 \in P$ и N_0N.

Определение. Плоскость P, проходящая через точку N_0 поверхности S, называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке, если при $N \to N_0$ $(N \in S)$ расстояние $\rho(N, N_1)$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $\rho(N, N_0)$: $\rho(N, N_1) = o\big(\rho(N, N_0)\big)$, то есть

$$\lim_{N \to N_0\ (N \in S)} \frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0.$$

Теорема 17. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, существует касательная плоскость к графику этой функции.

Доказательство.

Введем обозначения $\Delta z = z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0), \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$. Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то ее приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \rho(M, M_0) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Введем обозначения: $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = A, \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = B$ и перепишем условие дифференцируемости в виде

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho).$$

Рассмотрим плоскость P, заданную уравнением

$Z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$

где $Z -$ координата на плоскости, $z -$ координата на поверхности. Докажем, что P является касательной плоскостью к поверхности S в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Плоскость P очевидно проходит через точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет вектор нормали n = {A, B, −1}. Нам надо доказать, что

$$\lim_{N \to N_0\ (N \in S)} \frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0.$$

Обозначим через N_2 точку пересечения прямой NM с плоскостью P. Тогда можно записать условие, что перпендикуляр меньше наклонной, то есть $\rho(NN_1) \le \rho(NN_2) = |z - Z| = o(\rho)$. Расстояние между точками больше, чем расстояние между их проекциями, поэтому $\rho(NN_0) \ge \rho(MM_0) = \rho$. Таким образом,

$\frac{\rho(N,N_1)}{\rho(N,N_0)} \le \frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$ (при $N \to N_0$).

Теорема доказана.

Уравнение касательной к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$Z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + o(\rho).$$

Вектор $\vec{n} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \frac{\partial z}{\partial y}(M_0), -1\right\}$ называется вектором нормали к поверхности S в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример.

Рассмотрим поверхность, которая задана уравнением $z = f(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (параболоид вращения). Выберем на ней точку $N_0(1,2,5)$, ее проекцией является точка $M_0(1,2)$, для которой $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 2, \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 4$. Уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке N_0 примет вид:

$$Z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2).$$

Задача.

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (коническая поверхность, рис. 5.3). В точке $(0,0)$ функция не дифференцируема, и в точке $O(0,0,0)$ касательная плоскость к поверхности не существует. Возьмем точку $N_0(0,1,1)$. Напишите уравнение касательной плоскости, проходящей через точку N_0 и докажите, что эта касательная плоскость содержит образующую конической поверхности.

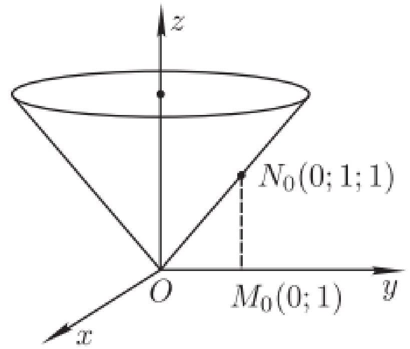


Рис. 5.3. Коническая поверхность.

Производная по направлению. Градиент функции

Пусть функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ определена в окрестности точки M_0. Проведем через точку M_0 какую-нибудь прямую L и выберем на ней одно из двух возможных направлений, оно характеризуется единичным вектором $\vec{l}, |\vec{l}| = 1$ (рис. 5.4). Выберем другую произвольную точку M из указанной окрестности, лежащую на прямой L. Через M_0M обозначим величину направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$, то есть

$$M_0M=\begin{cases}\left|\overrightarrow{M_0M}\right|, \text{если } \overrightarrow{M_0M}\uparrow\uparrow\vec{l}\\ -\left|\overrightarrow{M_0M}\right|, \text{если } \overrightarrow{M_0M}\downarrow\uparrow\vec{l}\end{cases}.$$

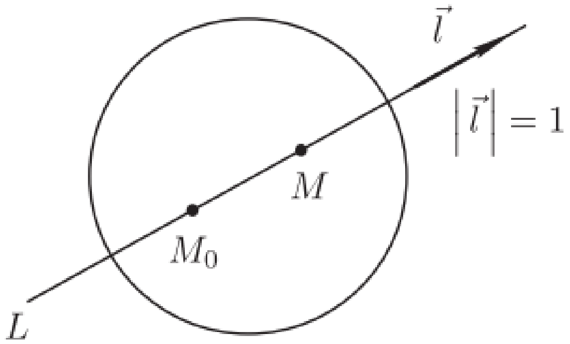


Рис. 5.4. Окрестность точки M_0.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\(M\in L)}}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M},$$

то он называется производной функции $u=f(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ или $u'_{\vec{l}}(M_0)$.

Покажем, что если функция $u=f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то ее производную по любому направлению можно выразить через частные производные в точке M_0, то есть скорость изменения функции в произвольном направлении можно выразить через скорости изменения по осям координат.

Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L, \vec{l}=\{cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\}$, обозначим величину $M_0M=t$, $t\in(-\infty,+\infty)$. Запишем параметрические уравнения прямой L:

$$x=x_0+tcos\,\alpha,$$
$$y=y_0+tcos\,\beta,$$
$$z=z_0+tcos\,\gamma.$$

Очевидно, что $t=0$ соответствует точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Запишем нашу функцию на прямой L:

$$u=f(x_0+tcos\,\alpha, y_0+tcos\,\beta, z_0+tcos\,\gamma)=:\varphi(t), \tag{5.1}$$

где $\varphi(t)-$ сложная функция одной переменной t. По определению для производной по направлению получим

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\lim_{\substack{M\to M_0\\(M\in L)}}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0),$$

если этот предел существует. Пусть наша функция $u=f(M)$ дифференцируема в точке M_0, тогда по правилу дифференцирования сложной функции из равенства (5.1) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\varphi'^{(0)}=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\frac{dx}{dt}(0)+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\frac{dy}{dt}(0)+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\frac{dz}{dt}(0).$$

Поскольку для любого t, в том числе и для $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = \cos\alpha, \frac{dy}{dt} = \cos\beta, \frac{dz}{dt} = \cos\gamma$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \varphi'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \tag{5.2}$$

Скорость изменения функции по направлению $\vec{l}$ является линейной комбинацией скоростей изменения этой функции по направлениям координатных осей, то есть линейной комбинацией частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. Причем коэффициентами этой линейной комбинации выступают координаты $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ единичного вектора $\vec{l}$, задающего направление; эти коэффициенты являются весовыми множителями, показывающими, какую долю вносит каждая частная производная в производную (скорость) по направлению $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. В частности, если $\vec{l} = \{1, 0, 0\}$, то есть направление $\vec{l}$ совпадает с направлением оси Ox, то из формулы (5.2) получаем $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$.

Определение. Градиентом дифференцируемой функции $u = f(M) = f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор

$$grad\, u\,(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\vec{k}.$$

Равенство (5.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left(grad\, u\,(M_0), \vec{l}\right) = |grad\, u\,(M_0)|\left|\vec{l}\right|\cos\varphi = |grad\, u\,(M_0)|\cos\varphi, \tag{5.3}$$

где $\varphi -$ угол между векторами $grad\, u\,(M_0)$ и $\vec{l}$. Если $\varphi = 0$, то есть $\vec{l} \uparrow\uparrow grad\, u\,(M_0)$, то производная принимает максимальное значение:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)\right)_{max} = |grad\, u\,(M_0)|. \tag{5.4}$$

Отсюда следует, что вектор $grad\, u$ не зависит от выбора системы координат. Равенство (5.4) показывает, что вектор $grad\, u\,(M_0)$ определяет направление, в котором функция имеет наибольшую скорость роста, а $|grad\, u\,(M_0)|$ является величиной этой скорости.

Физические примеры

1) Электростатическое поле, то есть электрическое поле неподвижных зарядов, можно описать с помощью скалярной функции $u(M)$, которая называется потенциалом этого поля. Напряженность электрического поля выражается формулой:

$$\vec{E}(M) = -grad\, u\,(M).$$

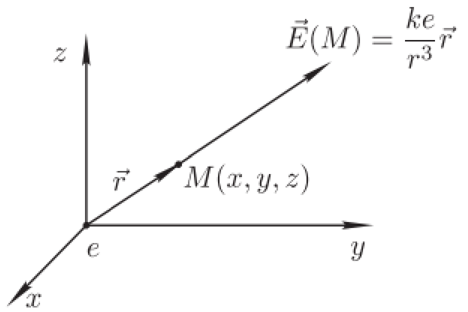


Рис. 5.5. Электростатическое поле.

Пусть электростатическое поле создается точечным зарядом e, помещенным в начале координат. Потенциал поля в произвольной точке $M(x,y,z)$ имеет вид:

$$u(M) = k\frac{e}{r},$$

где постоянная k зависит от выбора системы единиц, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – расстояние от точки M до заряда. Для напряженности электрического поля получаем выражение:

$$\vec{E}(M) = -grad\, k\frac{e}{r} = -ke\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)cos\,\vec{k}\right) = \frac{ke}{r^3}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$
$$= \frac{ke}{r^3}\vec{r}.$$

Значит, вектор электрической напряженности коллинеарен вектору $\vec{r}$.

2) Пусть в начале координат помещена ньютоновская масса m. Она создает гравитационное поле, которое описывается потенциалом

$$u(M) = \gamma\frac{m}{r},$$

где $\gamma -$ постоянная тяготения, зависящая от системы единиц. Сила, с которой масса m притягивает единичную массу, помещенную в точку $M(x,y,z)$, выражается формулой:

$$\vec{F}(M) = -grad\, u(M) = -\frac{\gamma m}{r^3}\vec{r}.$$

Данные два примера показывают великую роль математики, которая позволяет описать два совершенно разных объекта – электрическое поле и поле тяготения – одинаковыми средствами.

Производная по направлению вводится аналогично для функций двух и любого числа переменных. Для функции двух переменных $u = f(x,y)$ производная по направлению $\vec{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, где $\alpha -$ угол наклона $\vec{l}$ к оси Ox, в точке M_0 имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\sin\alpha = \left(grad\ u\ (M_0), \vec{l}\right).$$

Наконец, для функции произвольного $u = f(x_1, \dots, x_m)$ числа переменных m производная по направлению $\vec{l} = \{\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_m\}$, где $\cos^2\alpha_1 + \dots + \cos^2\alpha_m = 1$, в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left(grad\ u\ (M_0), \vec{l}\right).$$

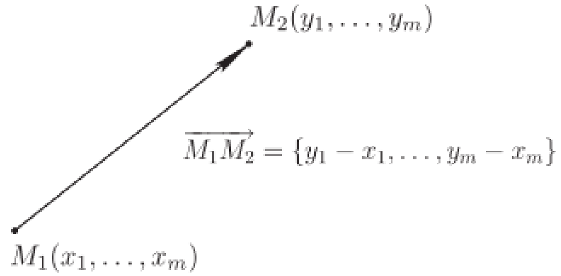


Рис. 5.6. Вектор в -мерном пространстве.

Рассмотрим в -мерном пространстве точки $M_1(x_1, \dots, x_m), M_2(y_1, \dots, y_m)$, вектором в m-мерном пространстве является $\overrightarrow{M_1M_2} = \{y_1 - x_1, \dots, y_m - x_m\}$. Градиент функции $u(M)$ имеет вид $grad\ u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right\}$, производная в произвольной точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \left(grad\ u\ (M), \vec{l}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(M)\cos\alpha_i.$$

Скалярное произведение векторов в -мерном пространстве определяется формулой:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i,$$

а угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, соответственно, формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|},$$

где $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_m^2}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_m^2}$.

Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в некоторой окрестности точки M. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ сама является функцией переменных $x_1, \dots, x_m$, определенной в этой окрестности точки M. Пусть $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет частную производную в точке M по аргументу x_k, то есть существует $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, она называется второй частной производной или частной производной 2-го порядка функции u по переменным x_i, x_k в точке M.

Частные производные 2-го порядка обозначаются следующим образом: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_i}, u''_{x_k x_i}, f''_{x_k x_i}$ и т.д.

Если $i \neq k$, то частнаяпроизводная2-го порядка называется смешанной частной производной 2-го порядка. Если $i = k$, то вторая производная обозначается $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

ЛЕКЦИЯ 6. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частная производная -го порядка функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ определяется формулой

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}, x_{i_{n-1}}, \dots, x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_{n-1}}, \dots, x_{i_1}}\right).$$

Если хотя бы два номера из набора $i_1, \dots, i_n$ не совпадают, то частная производная называется смешанной частной производной -го порядка. Если все номера $i_1, \dots, i_n$ совпадают, то используется обозначение $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}^n}$.

<u>Пример 1</u>.

Пусть $u = x^y, x > 0, y \in \mathbb{R}$. Вычислим частные производные 1-го порядка:

$$u_x = yx^{y-1}, u_y = x^y \ln x;$$

смешанные частные производные:

$$u_{xy} = (u_x)_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$u_{yx} = \left(u_y\right)_x = yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x}.$$

Обратим внимание на то, что в данном примере $u_{yx} = u_{xy}$. Возникает вопрос: всегда ли выполняется это равенство, оказывается, что нет.

<u>Пример 2</u>.

Пусть $u = \begin{cases} xy, |y| \le |x| \\ -xy, |y| > |x| \end{cases}$. Докажем, что $u_{xy}(0,0) \neq u_{yx}(0,0)$.

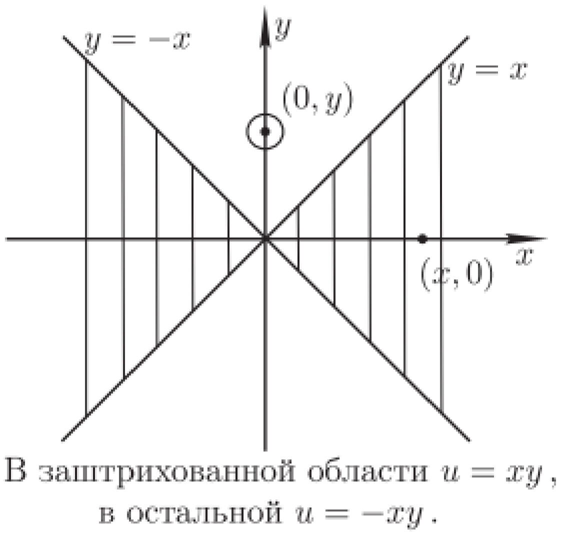


Рис. 6.1. Область определения функции $u(x, y)$.

Выберем точку на оси Oy, у которой $y \neq 0$. Ясно, что точка $(0, y)$ лежит вне заштрихованной области, значит, можно указать такую окрестность этой точки, которая тоже целиком лежит вне заштрихованной области. Таким образом в -окрестности точки $(0, y)$: $u = -xy, u_x(x, y) = -y$, в частности

$$u_x(0, y) = -y. \tag{6.1}$$

При $y = 0$ функция определена на оси Ox, то есть в заштрихованной области. Тогда $u = xy = 0, u_x(x, 0) = 0$, в частности

$$u_x(0,0) = 0. \tag{6.2}$$

Из равенств (6.1) и (6.2) следует, что $u_x(0, y) = -y\ \forall y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим производную 2-го порядка:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(u_x(0, y)\big) = u_{xy}(0, y) = -1,$$

в частности $u_{xy}(0,0) = -1$.

Проделаем аналогичную процедуру с точкой $(x, 0)$ на оси Ox и получим, что $u_y(x, 0) = x, u_{yx}(x, 0) = 1$, в частности $u_{yx}(0,0) = 1$. Таким образом, для данной функции $u_{xy}(0,0) \neq u_{yx}(0,0)$.

Задача.

Пусть $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, x \in \mathbb{R}, t > 0$. Убедитесь самостоятельно, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}. \tag{6.3}$$

Это уравнение играет важную роль в математической физике и называется уравнением теплопроводности. Оно описывает процесс распространения тепла в одномерном стержне. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$ стержню сообщили некоторое количество тепла. Решение $u(x, t)$ уравнения (6.3) имеет физический смысл температуры в точке стержня с координатой x в момент времени t. Функция $u(x, t)$ называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Постройте графики функции $u(x, t)$ при фиксированных значениях времени t_1, t_2 и t_3: $t_1 < t_2 < t_3$ и при фиксированных значениях координаты $x_1 = 0, x_2$ и x_3: $0 < x_2 < x_3$.

Теорема 18 (о равенстве смешанных производных). Пусть $u = f(x, y)$ имеет смешанные частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, и пусть эти смешанные производные непрерывны в точке M_0. Тогда они равны в этой точке:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Доказательство. Рассмотрим квадрат $M_0M_1M_2M_3$ со сторонами, параллельными осям координат и равными h, целиком лежащий внутри окрестности точки M_0 (рис. 6.2). Вершины квадрата будут иметь координаты: $M_1(x_0 + h, y_0), M_2(x_0, y_0 + h), M_3(x_0 + h, y_0 + h)$.

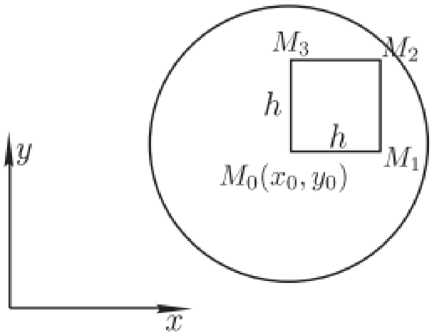


Рис. 6.2. Иллюстрация к доказательству Теоремы 18.

Введем вспомогательные функции

$$F(h) = f(M_0) + f(M_2) - f(M_1) - f(M_3)$$
$$= f(x_0, y_0) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0 + h),$$
$$\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0).$$

Тогда $F(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$. Дважды применяя формулу Лагранжа конечных приращений, получим

$$F(h) = \varphi'(x_0 + \theta_1 h)h = [f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)]h$$
$$= f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h)h^2,$$

где $\theta_1, \theta_2 -$ некоторые числа в интервале $(0,1)$.

Так как по условию функция $f''_{xy}(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, то можно записать, что

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h),$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Следовательно,

$$F(h) = \left[f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)\right]h^2. \tag{6.4}$$

Введем еще одну вспомогательную функцию:

$$\psi(x) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

Тогда $F(h) = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0)$. Аналогично дважды применяя формулу Лагранжа, получим

$$F(h) = \left[f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)\right]h^2, \tag{6.5}$$

где $\beta(h) \to 0$ при $h \to 0$. Приравняем (6.4) и (6.5), сократим на h^2:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h) = f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h),$$

перейдем к пределу при $h \to 0$ и получим:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Теорема доказана.

Определение. Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется дважды дифференцируемой в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0, и все ее частные производные 1-го порядка дифференцируемы в самой точке M_0.

Понятие -кратной дифференцируемости вводится по индукции.

Определение. Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется -кратно дифференцируемой в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, если она $n-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0, и все ее частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемы в самой точке M_0.

Теорема 18а. Если функция $u = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Доказательство проводится сходно с тем, как была доказана Теорема 18.

Теорема 18б. Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ n раз дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то все ее частные производные до -го порядка включительно в точке M_0 не зависят от порядка дифференцирования.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция двух независимых переменных $u = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, тем самым она дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0, и ее частные производные 1-го порядка $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ дифференцируемы в точке M_0. Рассмотрим дифференциал функции в окрестности точки M_0:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)dy. \tag{6.6}$$

Отметим, что дифференциал du является функцией четырех переменных: x, y, dx, dy. При введении дифференциала 2-го порядка функции $u = f(x, y)$, будем рассматривать первый дифференциал du как функцию только x и y, то есть так, как если бы dx и dy были постоянными множителями.

Определение. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) d^2u функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 называется дифференциал от первого дифференциала du при следующих условиях:

1. du рассматривается как функция только x и y,
2. при вычислении дифференциалов функций $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ приращения Δx и Δy независимых переменных x и y будем брать такими же, как в формуле (6.6) для du, то есть равными dx и dy.

Таким образом,

$$d^2u = d(du) = \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx + \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dy = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right]dx +$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2. \qquad (6.7)$$

Отметим, что производные 2-го порядка берутся в точке M_0, а равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(M_0)$$

следует из Теоремы 18а.

Пример.

Пусть $u = x^y, x > 0, y \in \mathbb{R}$. Вычислим второй дифференциал d^2u функции u в точке $M_0(1{,}0)$ по формуле (6.7). Предварительно вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2,$$

в точке M_0 будем иметь $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial xy}(M_0) = 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) = 0$, подставляя в (6.7), получим:

$$d^2u\,|_{M_0(1,0)} = 2dxdy.$$

Заметим, что выражение (6.7) для 2-го дифференциала похоже на квадрат суммы. Оказывается, его действительно можно записать как квадрат, но квадрат операторный или символический.

Под оператором будем понимать правило, согласно которому каждой функции из некоторого множества ставится в соответствие определенная функция из, вообще говоря, другого множества. Например, операцию вычисления частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ можно рассматривать как действие некоторого оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию $u(x, y)$, преобразующего ее в функцию $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$: $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial u}{\partial x}$. Таким образом, $\frac{\partial}{\partial x}$ – оператор частной производной по x. Аналогично определяется оператор $\frac{\partial}{\partial y}$ частной производной по y.

Оператором дифференциала назовем оператор

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy.$$

При действии этого оператора на функцию $u(x, y)$ получается дифференциал:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy.$$

Произведение операторов частных производных определим следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial xy},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial x^l}.$$

Определим -ю степень оператора дифференциала как n-ю степень двучлена:

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^n,$$

в частности при $n = 2$:

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial xy}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Таким образом, равенство (6.7) получается путем действия оператора d^2 на функцию $u(x, y)$. Можно переписать (6.7) в виде:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 u. \tag{6.8}$$

Определение дифференциала -го порядка функции вводится по индукции. Дифференциала -го порядка функции $u(x, y)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка при таких же двух условиях как и в определении дифференциала 2-го порядка, то есть

$$d^n u = d(d^{n-1}u).$$

Нетрудно доказать по индукции, что

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^n u. \tag{6.9}$$

В случае функции произвольного числа переменных $u = f(x_1, \dots, x_m)$ оператор дифференциала имеет вид

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m,$$

и справедлива формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u.$$

ЛЕКЦИЯ 7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Инвариантность дифференциала

Для функции двух независимых переменных $u = f(x, y)$ дифференциал -го порядка можно записать в виде

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 u. \tag{7.1}$$

Для функции произвольного числа независимых переменных $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференциал выражается аналогичным образом:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u. \tag{7.2}$$

Рассмотрим случай, когда аргументы не являются независимыми переменными, а являются функциями каких-то независимых переменных. В первом семестре мы доказали, что вид первого дифференциала в этом случае не меняется, это свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала. Такое же свойство мы доказали уже в этом семестре для функции нескольких переменных, а вот дифференциалы более высокого порядка (2-го и т.д.) не являются инвариантами.

Если аргументы функции являются не независимыми переменными, а дифференцируем функциями каких-то независимых переменных, то формулы (7.1) и (7.2) изменяются.

Пусть аргументы функции $u = f(x, y)$ в свою очередь являются функциями независимых переменных $t_1, \dots, t_k$. В силу инвариантности формы первого дифференциала можем записать:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

где $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ зависят от $t_1, \dots, t_k$, а dx и dy зависят от $t_1, \dots, t_k, dt_1, \dots, dt_k$. Мы договорились, что когда мы вводим дифференциалы высших порядков, в частности дифференциал второго порядка d^2u, мы при этом рассматриваем первый дифференциал как функцию только независимых переменных $t_1, \dots, t_k$, как если бы дифференциалы независимых переменных $dt_1, \dots, dt_k$ были постоянными множителями. Тогда

$$\begin{aligned} d^2u = d(du) &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y \\ &= \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right] + \left\{\frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y\right\} \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2\right] + \left\{\frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, форма 2-го дифференциала не инвариантна. Аналогично, для функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ так же имеет место неинвариантность формы высших дифференциалов.

Замечание. Оказывается есть один частный случай, когда форма дифференциалов высших порядков остаются инвариантной.

Если x и $y -$ линейные функции $t_1, \dots, t_k$, то есть

$$x = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_k t_k + \alpha_{k+1},$$
$$y = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_k t_k + \beta_{k+1},$$

где $\alpha_i, \beta_i -$ числа, то формула (7.1) остается в силе. В этом случае дифференциалы принимают вид:

$$dx = \alpha_1 dt_1 + \dots + \alpha_k dt_k,$$
$$dy = \beta_1 dt_1 + \dots + \beta_k dt_k.$$

Обратим внимание на то, что dx, dy не зависят от $t_1, \dots, t_k$, поэтому вторые дифференциалы равны нулю:

$$d^2x = d(dx) = 0,$$
$$d^2y = d(dy) = 0.$$

Следовательно, выражение

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y\right\} = 0$$

и

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 u.$$

Аналогично, для функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$, если $x_1, \dots, x_m -$ линейные функции $t_1, \dots, t_k$, то сохраняется формула (7.2) для дифференциалов любого порядка функции u, то есть

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n u,$$

где $dx_1, \dots, dx_m -$ дифференциалы указанных выше линейных функций.

Формула Тейлора

Для функции одной переменной $u = F(t)$ в первом семестре была доказана теорема: если функция $u = F(t)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки t_0, то $\forall t$ из этой окрестности справедливо равенство (формула Тейлора):

$$F(t) = F(t_0) + \frac{1}{1!}F(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}F''(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}\big(t_0 + \theta(t - t_0)\big)(t - t_0)^{n+1},$$

где $\theta -$ число в интервале $(0,1)$.

Введем обозначение $t - t_0 = \Delta t = dt, F(t) - F(t_0) = \Delta u$ и вспомним, что

$$F^{(k)}(t_0)(dt)^k = d^k F|_{t=t_0},$$

тогда формулу Тейлора можно переписать в виде:

$$\Delta u = dF|_{t=t_0} + \frac{1}{2!}d^2F|_{t=t_0} + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF|_{t=t_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F|_{t=t_0+\theta(t-t_0)}. \qquad (7.3)$$

Оказывается, что для функции многих переменных имеет место аналогичная формула.

Теорема 19. Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ $(n + 1)$ раз дифференцируема в -окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$. Тогда $\forall$ точки $M(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ из этой ε-окрестности для приращения функции $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ справедливо равенство:

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u|_{M_0} + \cdots + \frac{1}{n!}d^nu|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u|_N, \qquad (7.4)$$

где а дифференциалы $d^k u$ вычисляются по формуле (7.2), то есть

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u,$$

$\Delta x_1, \dots, \Delta x_m -$ те самые приращения, которые фигурируют в точке M, а $N -$ некоторая точка, лежащая на отрезке M_0M.

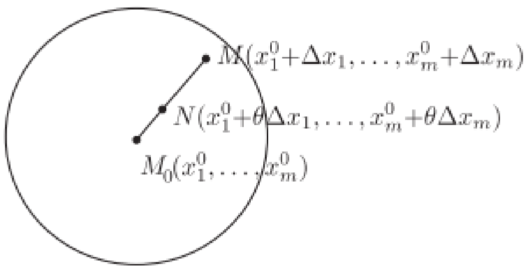


Рис. 7.1. Иллюстрация к Теореме 19.

<u>Доказательство</u>.

Зафиксируем точку $M(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ из указанной -окрестности точки M_0 (рис. 7.1). Запишем параметрические уравнения отрезка M_0M:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t\Delta x_1 \\ \quad\dots \\ x_m = x_m^0 + t\Delta x_m \end{cases}, 0 \le t \le 1. \qquad (7.5)$$

При этом $t = 0$ соответствует точка M_0, а $t = 1$ – точка M.

На отрезке M_0M имеем:

$$u = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\Delta x_m) =: F(t).$$

$F(t) -$ сложная функция одной переменной t, причем она $(n+1)$ раз дифференцируема на отрезке $0 \le t \le 1$.

Заметим, что

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0), \tag{7.6}$$

и применим формулу (7.3), положив $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = dt = 1$:

$$F(1) - F(0) = dF|_{t=0} + \dots + \tfrac{1}{n!} d^nF|_{t=0} + \tfrac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F|_{t=\theta}. \tag{7.7}$$

Так как $x_1, \dots, x_m -$ линейные функции переменной t (см.(7.5)), то дифференциалы функции $F(t)$ можно вычислить по формуле:

$$d^kF|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^k u\Big|_{t=0}, (k = 1, \dots, n),$$

где $dx_1, \dots, dx_m -$ дифференциалы функций (7.5):

$$dx_1 = dt\Delta x_1 = \Delta x_1, \dots, dx_m = dt\Delta x_m = \Delta x_m.$$

Тогда

$$d^kF|_{t=0} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \tfrac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u\Big|_{M_0}, (k = 1, \dots, n), \tag{7.8}$$

$$d^{n+1}F|_{t=\theta} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \tfrac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^{n+1} u\Big|_{N}. \tag{7.9}$$

Так как $0 < \theta < 1$, то точка N лежит на отрезке M_0M. Подставляя выражения (7.8) и (7.9) в правую часть равенства (7.7)и учитывая (7.6), приходим к формуле (7.4). Теорема доказана.

Следствия.

1. При $n = 0$ из (7.4) получаем формулу Лагранжа конечных приращений для функции многих переменных:

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = du|_N = \frac{\partial u}{\partial x_1}(N)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(N)\Delta x_m$$

2. Формулу Тейлора можно записать не через дифференциалы функции, а через ее производные. Для этого нужно раскрыть выражения для дифференциалов в формуле (7.4):

$$du|_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)\Delta x_m,$$

$$d^2u|_{M_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^2 f\Big|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

и т.д. Окончательно получим

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)(x_1 - x_1^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)(x_m - x_m^0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0)(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(M_0)(x_m - x_m^0)^2\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\dots \frac{\partial^n f}{\partial x_m^n}(M_0)(x_m - x_m^0)^n\right) + R_{n+1} = P_n(x_1, \dots, x_m) + R_{n+1}\,.$$

где $P_n(x_1, \dots, x_m)$ — многочлен Тейлора, зависящий от $x_1, \dots, x_m$, степень которого не превосходит n, а остаточный член равен

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f|_N.$$

Заметим, что $P_n(x_1, \dots, x_m)$ обладает тем свойством, что все его частные производные до -го порядка включительно в точке M_0 равны соответствующим частным производным функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M_0.

Пример.

Пусть $u = x^y, x > 0, y \in \mathbb{R}; M_0(1{,}0)$. Вычислим многочлен Тейлора второго порядка $P_2(x, y)$. Учитывая, что

$$f(M_0) = 1, du|_{M_0} = 0, d^2u|_{M_0} = 2dxdy = 2(x-1)y,$$

так как

$$dx = \Delta x = x - 1, dy = \Delta y = y,$$

из формулы Тейлора получим

$P_2(x, y) = 1 + (x - 1)y = 1 - y + xy.$

Формула Тейлора с остаточным членом 3-го порядка примет вид:

$$x^y = 1 - y + xy + R_3.$$

В достаточно малой окрестности точки $M_0(1, 0)$ для приближенного вычисления x^y можно использовать формулу $x^y = 1 - y + xy$.

Замечание 1. Остаточный член в формуле Тейлора $R_{n+1} = o(\rho^n)$, где $\rho = \rho(M_0M) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_m)^2}$.

В нашем примере $u = x^y = 1 - y + xy + o((x-1)^2 + y^2)$.

Замечание 2. Формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x_1, \dots, x_m) = P_n(x_1, \dots, x_m) + o(\rho^n),$$

такой вид остаточного члена называется формой Пеано.

Можно доказать, что формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано справедлива при меньших требованиях к функции, чем в Теореме 19. В частности при $n = 2$ имеет место Теорема 19а.

Теорема 19а. Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то для приращения функции $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ справедливо равенство:

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2} d^2u|_{M_0} + o(\rho^2).$$

В Теореме 19 функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ должна быть трижды дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$.

ЛЕКЦИЯ 8. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^3$.

Определение. Говорят, что в точке M_0 функция $u = f(M)$ имеет локальный максимум (минимум), если существует такая -окрестность точки M_0, в которой $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$ при $M \neq M_0$.

Теорема 20 (необходимое условие экстремума). Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет локальный экстремум в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, и пусть $\exists \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем значения всех аргументов функции, кроме x_k, положив $x_1 = x_1^0, \dots, x_{k-1} = x_{k-1}^0, x_{k+1} = x_{k+1}^0, \dots, x_m = x_m^0$. Получим функцию одной переменной

$$u = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) =: \varphi(x_k).$$

Функция $\varphi(x_k)$ имеет локальный экстремум в точке $x_k = x_k^0$ и имеет производную в точке $x_k^0 \colon \varphi'(x_k^0) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$. По теореме о необходимом условии экстремума для функции одной переменной $\varphi'(x_k^0) = 0$, то есть $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то

$$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m = 0.$$

Замечание. Условие $du|_{M_0} = 0$ является только необходимым, но не достаточным условием локального экстремума дифференцируемой функции в точке M_0.

Пример.

Пусть $u = xy$ и $M_0(0,0)$, тогда $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, следовательно $du|_{M_0} = 0$. Однако в точке M_0 экстремума у данной функции нет, так как в любой окрестности точки M_0 функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, то есть как значения, большие, чем $u(M_0) = 0$, так и значения, меньшие $u(M_0)$.

Точки M, в которых $du|_M = 0$, будем называть точками возможного экстремума дифференцируемой функции $u(M)$. Чтобы установить, имеет ли функция в такой точке экстремум или нет, нужны достаточные условия экстремума. Чтобы сформулировать такие условия, нам понадобятся некоторые сведения о квадратичных формах.

Некоторые сведения о квадратичных формах

Определение. Функция

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j,$$

где a_{ij} — числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$, называется квадратичной формой от аргументов $x_1, \dots, x_m$.

Определение. Квадратичная форма $Q(x_1, \dots, x_m)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если $\forall (x_1, \dots, x_m)$: $Q(x_1, \dots, x_m) \geq 0$ (≤ 0), причем $Q(x_1, \dots, x_m) = 0$ только в начале координат, то есть при $x_1 = \dots = x_m = 0$. Пример положительно определенной квадратичной формы: $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$.

Определение. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются знакоопределенными.

Определение. Квадратичная форма называется квазизнакоопределенной, если она принимает значения либо только неотрицательные, либо только неположительные, но при этом обращается в нуль не только в начале координат. Пример: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0, Q(1,1) = 0$.

Определение. Квадратичная форма называется знакопеременной, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения. Пример: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2, Q(1,0) = 1 > 0, Q(0,1) = -1 < 0$.

Рассмотрим общий вид квадратичной формы

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j.$$

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей квадратичной формы Q. Заметим, что матрица A является симметричной, так как выполнено $a_{ij} = a_{ji}$. Выделим у матрицы A угловые миноры:

$$\delta_1 = a_{11},$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$\delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$\delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Оказывается по знакам этих угловых миноров можно сделать вывод о том, будет квадратичная форма положительно определенной или отрицательно определенной или не будет.

Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были положительны: $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_m > 0$.

Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались следующим образом: $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \dots$.

Доказательство критерия будет рассматриваться в курсе линейной алгебры.

Достаточные условия экстремума

Для функции одной переменной $y = f(x)$ достаточными условиями максимума (минимума) в точке x_0 являются условия:

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \ (> 0).$$

Эти же условия можно записать через дифференциалы функции в точке x_0:

$$dy|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x = 0,$$

$$dy|_{x_0} = f''(x_0)(\Delta x)^2 < 0 \ (> 0) \ \forall \Delta x \neq 0.$$

Аналогичное достаточное условие имеет место и для функции многих переменных. Напомним, что для функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ первый и второй дифференциалы в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ имеют вид:

$$du|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)\Delta x_i,$$

$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j.$$

Обратим внимание, что $d^2u|_{M_0} -$ квадратичная форма от аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$. Согласно Теореме 18б $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(M_0)$, то есть выполнено условие $a_{ij} = a_{ji}$.

Теорема 21 (о достаточных условиях экстремума функции нескольких переменных). Пусть выполнены условия:

1. функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$;
2. $du|_{M_0} = 0$;
3. $d^2u|_{M_0} -$ положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма от аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$.

Тогда в точке M_0 функция $u = f(M)$ имеет локальный минимум (максимум).

Доказательство.

Пусть $M(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) -$ произвольная точка из окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$. По Теореме 19а приращение функции u в точке M_0 можно представить в виде:

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2} d^2u|_{M_0} + o(\rho^2),$$

где $\rho = \rho(M_0M) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$. Из условий 2 и 3 нашей теоремы получаем

$$\Delta u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \Delta x_i \Delta x_j + o(\rho^2) = \frac{1}{2}\rho^2 \left[\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \frac{\Delta x_i}{\rho} \frac{\Delta x_j}{\rho} + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \right].$$

Введем обозначения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) = a_{ij}$, $\frac{\Delta x_i}{\rho} = h_i$ и $\frac{o(\rho^2)}{\rho^2} = \alpha(\rho)$, причем $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, тогда

$$\Delta u = \frac{1}{2}\rho^2 \left[\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j + \alpha(\rho) \right].$$

Сумма в выражении для Δu является квадратичной формой аргументов $h_1, \dots, h_m$:

$$Q = Q(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j,$$

тогда имеем

$$\Delta u = \frac{1}{2}\rho^2 [Q + \alpha(\rho)].$$

Рассмотрим случай, когда $d^2u|_{M_0} -$ положительно определенная квадратичная форма. Тогда согласно определению требуется доказать, что $\exists$ -окрестность точки M_0, в которой $\Delta u > 0$ при $M \neq M_0$. Согласно условию 3 нашей теоремы $Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j -$ положительно определенная квадратичная форма. Величины $h_1, \dots, h_m$, очевидно, удовлетворяют условию:

$$h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1. \tag{8.1}$$

В пространстве $\mathbb{R}^m$ точек $(h_1, \dots, h_m)$ уравнение (8.1) описывает сферу единичного радиуса с центром в начале координат. Сфера – это ограниченное замкнутое множество. Функция $Q -$ непрерывна. По второй теореме Вейерштраса функция Q достигает на сфере (8.1) своей точной нижней грани, то есть имеет на этой сфере минимальное значение $m = min(Q)$. Так как в любой точке сферы $Q > 0$, то $m > 0$.

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $|\alpha(\rho)| < m$ при $0 < \rho < \delta$. Следовательно, при $\rho(M_0, M) < \delta$ $(M \neq M_0)$:

$$\Delta u = \frac{1}{2}\rho^2[Q + \alpha(\rho)] \geq \frac{1}{2}\rho^2[m + \alpha(\rho)] > 0.$$

Таким образом, $\Delta u > 0$ в -окрестности точки M_0 при $M \neq M_0$. Теорема доказана.

Теорема 22 (об отсутствии экстремума). Пусть выполнены условия 1 и 2 Теоремы 21 и пусть $d^2u|_{M_0}$ – знакопеременная квадратичная форма. Тогда в точке M_0 экстремума нет.

Замечание. Если выполнены условия 1 и 2 Теоремы 21, и $d^2u|_{M_0}$ – квазизнакопеременная квадратичная форма, то экстремум в точке M_0 может быть, а может и не быть.

Пример 1.

Рассмотрим функцию $u = x^y, x > 0, y \in \mathbb{R}$. Определим, есть ли у нее точки локального экстремума, для это решим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_x = yx^{y-1} = 0 \\ u_y = x^y \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Мы имеем одну точку возможного экстремума $M_0(1,0)$. Так как второй дифференциал $d^2u|_{M_0} = 2\Delta x \Delta y$ – знакопеременная квадратичная форма, то по Теореме 22 функция u не имеет экстремума точке M_0.

Пример 2.

Рассмотрим функцию $u = x^2 + 2xy + y^2 + xz + z^3 - 4z, x > 0, y \in \mathbb{R}$. Для нахождения точек возможного экстремума функции решим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_x = 2x + 2y + z = 0 \\ u_y = 2x + 4y = 0 \\ u_z = x + 3z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -\dfrac{x}{2} \\ z_1 = -1, z_2 = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = -\dfrac{4}{3} \\ y_1 = -\dfrac{1}{2}, y_2 = \dfrac{2}{3} \\ z_1 = -1, z_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Мы получили две точки возможного экстремума $M_1(1, -\frac{1}{2}, -1)$ и $M_2(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Вычислим вторые производные функции:

$$u_{xx} = 2, u_{xy} = 2, u_{xz} = 1,$$
$$u_{yx} = 2, u_{yy} = 4, u_{yz} = 0,$$
$$u_{zx} = 1, u_{zy} = 0, u_{zz} = 6z.$$

Составим матрицу квадратичной формы d^2u, элементами которой являются частные производные 2-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

и вычислим ее угловые миноры:

$$\delta_1 = 2 > 0,$$

$$\delta_2 = 4 > 0,$$

$$\delta_3 = |A| = -4 + 24z.$$

В точке $M_1\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$: $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0$ не выполнено ни условие положительной определенности, ни отрицательной определенности квадратичной формы. Убедимся, что дифференциал $d^2u|_{M_1}$ − знакопеременная квадратичная форма. При выборе $\Delta x = \Delta y = 0, \Delta z = 1$ получим $\Delta u|_{M_1} = -6 < 0$, при $\Delta x = 1, \Delta y = \Delta z = 0$ получим $\Delta u|_{M_1} = 2 > 0$, значит, $d^2u|_{M_1}$ − знакопеременная квадратичная форма, и по Теореме 22 функция u не имеет экстремума точке M_1.

Для точки $M_2(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$: $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$, по критерию Сильвестра $d^2u|_{M_2}$ − положительно определенная квадратичная форма, следовательно, по Теореме 21 в точке M_2 функция имеет локальный минимум.

Случай функции двух переменных

Рассмотрим функцию $u = f(x, y)$, ее второй дифференциал в точке M_0 принимает вид:

$$d^2u|_{M_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial xy}(M_0)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)(\Delta y)^2$$
$$= a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}(\Delta y)^2.$$

Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда угловые миноры: $\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$. На основании теоремы 21 можно сделать вывод: если $du|_{M_0} = 0$ и $\delta_1 = a_{11} > 0, \delta_2 = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный минимум; если $du|_{M_0} = 0$ и $\delta_1 = a_{11} < 0, \delta_2 = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный максимум; если $\delta_2 < 0$, то экстремума в точке M_0 нет.

ЛЕКЦИЯ 9. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

О неявных функциях, определяемых одним уравнением

Функция $y = f(x), x \in X$ может быть задана путем непосредственного (явного) указания правила f, по которому каждому числу x из области определения функции X ставится в соответствие определенное число y из области значений функции. Например, функция $y = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$ задана непосредственно или явно.

Существует и другой способ задания функции $y = f(x)$. Рассмотрим уравнение с двумя переменными:

$$F(x, y) = 0. \tag{9.1}$$

Пусть $\forall x \in X$ уравнение (9.1) имеет решение $y = f(x)$. Данное решение и называется неявной функцией, определяемой уравнением (9.1).

Пример 1.

В прямоугольнике $Q = \{x \in [-1,1]\,, y \in [0,1]\,\}$ рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{9.2}$$

Решая, получим, что $\forall x \in [-1,1]$:

$$y = \sqrt{1 - x^2}. \tag{9.3}$$

Функция (9.3) – неявная функция, определяемая уравнением (9.2).

Пример 2.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 2y + \sin y - x = 0$$

и покажем, что $\forall x \in \mathbb{R}$ уравнение имеет единственное решение $y = f(x)$, но найти его в явном виде не удается.

Обратим внимание, что не всякое уравнение вида (9.1) определяет неявную функцию. И если оно определяет неявную функцию, то, как показывают примеры 1 и 2, мы различаем два момента: существование неявной функции и возможность найти ее в явном виде.

Теорема 1.

Пусть выполнены условия:

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $Q = \{(x, y): a < x < b, c \le x \le d\}$;
2) $\forall x \in (a, b): F(x, y) \cdot F(x, y) < 0$, то есть на верхней и нижней сторонах прямоугольника Q функция $F(x, y)$ имеет разные знаки;
3) $\forall x \in (a, b): F(x, y)$ является строго монотонной функцией переменной $y \in [c, d]$.

Тогда:

1) в прямоугольнике Q уравнение $F(x,y)=0$ имеет единственное решение относительно $y\ (y=f(x))$, причем $c \le f(x) \le d$, то есть в прямоугольнике Q уравнение (9.1) определяет неявную функцию вида $y=f(x)$;
2) $y=f(x)$ непрерывна на интервале (a,b).

Доказательство.

1) Зафиксируем любое число x из интервала (a,b) и рассмотрим при этом значении x функцию $F(x,y)$ аргумента y на сегменте $[c,d]$. По условию 3 функция $F(x,y)$ является строго монотонной, рассмотрим случай, когда $F(x,y) -$ возрастающая функция y при каждом x, тогда $F(x,c)<0, F(x,d)>0$. Поскольку на концах сегмента $[c,d]$ функция $F(x,y)$ имеет значения разных знаков (условие 2) и является непрерывной на сегменте $[c,d]$ (условие 1), следовательно, $\exists y \in [c,d]: F(x,y)=0$. В силу возрастания функции $F(x,y)$ по переменной y такое значение y единственно. Итак, $\forall x \in (a,b)$ существует решение уравнения (9.1): $y=f(x)$. Таким образом, мы доказали существование и единственность неявной функции, определяемой уравнением (9.1).

2) Докажем непрерывность неявной функции $y=f(x)$ на интервале (a,b), то есть ее непрерывность в каждой точке этого интервала $x_0 \in (a,b)$. По определению непрерывности нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:
$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x-x_0| < \delta$. (9.4)
Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы были выполнены неравенства: $f(x_0)-\varepsilon > c$ и $f(x_0)+\varepsilon > d$ (рис. 9.1).

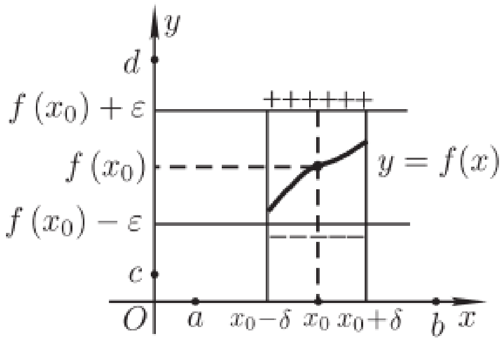


Рис. 9.1. Иллюстрация к доказательству Теоремы 1.

Рассмотрим функцию $F(x,y)$ при $x=x_0$. Функция $F(x_0,y)$ является возрастающей функцией переменной y и $F\big(x_0,f(x_0)\big)=0$, следовательно,

$$F(x_0,f(x_0)-\varepsilon)<0 \text{ и } F(x_0,f(x_0)+\varepsilon)>0. \quad (9.5)$$

Но $F(x,y)$ - непрерывная функция. В силу устойчивости знака непрерывной функции следует:
$\exists\ \delta > 0$, такое, что
$F(x,f(x_0)-\varepsilon)<0$ и $F(x,f(x_0)+\varepsilon)>0$,

при $|x - x_0| < \delta$.
Таким образом в δ - окрестностях выделенных точек знак функции $F(x, y)$ сохраняется (рис. 9.1).
Из полученных неравенств следует, что
$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$,
т.е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.
Выполняется условие 9.4, значит, *Теорема 1* доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\text{F(x, y):}\ \ 2y - \sin y - x = 0 \tag{9.6}$$

Докажем, что для $\forall\, x \epsilon \mathbb{R}$ уравнение 9.6 имеет единственное решение относительно y. И тем самым определяет единственную неявную функцию.
Зафиксируем произвольное значение x и рассмотрим функцию $F(x, y)$ при этом x. Для этого положим:

$$y = y_1 = \frac{x}{2} - 1,$$

тогда $F(x, y_1) = -2 + \sin y_1 < 0$.
Теперь положим:

$$y = y_2 = \frac{x}{2} + 1,$$

тогда $F(x, y_2) = 2 + \sin y_2 > 0$.
Отсюда следует:
$\exists\ y \in (y_1, y_2)$, такое что $F(x, y) = 0$.
Обозначим это значение $y = f(x)$. Такое значение y для $\forall x$ единственное, так как
$F'_y = 2 + \cos y$,
значит функция $F(x, y)$ – возрастающая функция аргумента y для $\forall x$.
Так уравнение 9.6 определяет единственную неявную функцию вида:

$$y = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Раз исходная функция $F(x, y)$ – непрерывна, мы можем утверждать, что функция $y = f(x)$ – непрерывна на всей числовой прямой. Но мы не можем найти её в явном виде.

Существенным условием в *Теореме 1* было условие 3 - строгой монотонности функции $F(x, y)$ по аргументу y для $\forall x$. В этом примере мы видим, что строгую монотонность функции по y, обеспечивает знакопостоянство производной функции $F'_y(x, y)$. Это условие будет использовано в следующей теореме.

Теорема 2.
Рассматриваем уравнение

$$F(x,y)=0.$$

Пусть выполнены условия:

1) функция $F(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности ω точки $M_0(x_0,y_0)$;

2) В окрестности ω $\exists$ $F'_y(x,y)$, непрерывная в точке M_0;

3) $F(x_0,y_0)=0,\ F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда существует прямоугольник:

$$Q=\{(x,y):|x-x_0|<d,|y-y_0|\leq c\}\in\omega,\qquad d>0,c>0$$

В котором уравнение 9.1 определяет единственную неявную функцию $y=f(x)$ непрерывную при $|x-x_0|<d$.

Доказательство.

Пусть для определенности $F'_y(x_0,y_0)>0$ (см. условие 3).

По условию 2 функция $F'_y(x_0,y_0)$ непрерывна в точке M_0, в силу устойчивости знака непрерывной функции $F'_y(x_0,y_0)>0$ и в некоторой окрестности точки M_0.

Тогда найдется прямоугольник:

$$\tilde{Q}=\left\{(x,y):|x-x_0|<\tilde{d},|y-y_0|\leq\tilde{c}\right\},$$

в котором $F'_y(x_0,y_0)>0$, и следовательно, функция $F(x,y)$ является возрастающей функцией переменной y при каждом x в этом прямоугольнике. Т.е. выполнено условие 3 *Теоремы 1*. Функция $F(x_0,y)$ является возрастающей функцией переменной y и $F(x_0,y_0)=0$, следовательно,

$F(x_0,y_0-c)<0$ и $F(x_0,y_0+c)>0$. (9.7)

Рассмотрим теперь функцию $F(x,y)$ на нижней и верхней сторонах прямоугольника $\tilde{Q}$, то есть рассмотрим функции $F(x,y_0-c)$ и $F(x,y_0+c)$ при $|x-x_0|<\tilde{d}$. В силу непрерывности этих функций (условие 1) и неравенств (9.7) следует, что $\exists d\left(0<d\leq\tilde{d}\right)$ такое, что

$F(x,y_0-c)<0$ и $F(x,y_0+c)>0$

при $|x-x_0|<\tilde{d}$.

Таким образом, мы построили прямоугольник $Q=\{(x,y):|x-x_0|<d,|y-y_0|\leq c\}$, в котором выполнены все условия Теоремы 1. По Теореме 1 в прямоугольнике Q уравнение (9.1) определяет единственную неявную функцию вида $y=f(x)$, и эта функция непрерывна при $|x-x_0|<d$. Теорема 2 доказана.

Задание. Пусть выполнены условия 1 и 2 Теоремы 2, а вместо условия 3 выполнено противоположное условие: $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)=0$. Придумайте два примера, в одном из которых утверждение Теоремы 2 остается верным, а в другом – неверным.

1) Пусть $F(x,y)=x^2+y^2-1=0, M_0(1{,}0)$, тогда $F'_y(1{,}0)=0$. Докажите, что для этой точки заключение теоремы неверно.

2) Пусть $F(x,y) = x^3 - y^3 = 0, M_0(0,0)$, тогда $F'_y(0,0) = 0$. Докажите, что в этом случае заключение теоремы верно, решением уравнения будет функция $y = x$.

Теорема 3.

Пусть выполнены условия Теоремы 2, и функция $F(x,y) -$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда неявная функция $y = f(x)$, определяемая уравнением (9.1), дифференцируема в точке x_0, и ее производная в этой точке выражаетсяформулой

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}. \tag{9.8}$$

Доказательство.

Зададим в точке $M_0(x_0, y_0)$ приращения Δx и Δy аргументам x и y функции $F(x,y)$ так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in Q$, где $Q -$ прямоугольник, фигурирующий в Теореме 2. Функция $F(x,y)$ получит приращение, которое в силу дифференцируемости функции в точке M_0 можно записать в виде:

$$\Delta F := F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0,y_0)\Delta x + F'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \tag{9.9}$$

где $\alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$ при $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$. Возьмем в качестве Δy приращение неявной функции в точке x_0, то есть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0$. Тогда

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x, f(x_0) + \Delta x) - F(x_0, y_0) = F\big(x, f(x)\big) - F(x_0, y_0) = 0 - 0 = 0,$$

из равенства (9.8) получаем

$$F'_x(x_0,y_0)\Delta x + F'_y(x_0,y_0)\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) = 0,$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0,y_0) + \alpha_1}{F'_y(x_0,y_0) + \alpha_2}.$$

В силу непрерывности неявной функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$, тогда $\Delta y \to 0$, следовательно, $\alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$, в итоге получаем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F(x,y) = 2y + sin y - x = 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{9.10}$$

Ранее нами уже было установлено, что оно определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$. Вычислим производную неявной функции по формуле (9.8) в произвольной точке x:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x)} = -\frac{-1}{2 + \cos y}\bigg|_{y=f(x)} = \frac{1}{2 + \cos f(x)}.$$

Возьмем, например, $x = 2\pi$. Значение функции $f(2\pi) = \pi$ найдем методом пристального взгляда на исходное уравнение (9.10). Вычислим первую производную в точке $x = 2\pi$:

$$f'(2\pi) = \frac{1}{2 + \cos\pi} = 1.$$

Вторую производную найдем по формуле:

$$f''(x) = -\frac{1}{2 + \cos f(x)} \cdot (-\sin f(x)) \cdot f'(x).$$

ЛЕКЦИЯ 10. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим теперь уравнение, которое является обобщением уравнения (9.1):

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0. \tag{10.1}$$

Решение этого уравнения относительно y является функцией n переменных

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \tag{10.2}$$

и называется неявной функцией, определяемой уравнением (10.1).

Теорема 4.

Пусть выполнены условия:

1. функция $F(x_1, \dots, x_n, y)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности ω точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$;
2. частная производная $F'_y(x_1, \dots, x_n, y)$ непрерывна в точке M_0;
3. $F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0, F'_y(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$.

Тогда существует параллелепипед

$Q = \{(x_1, \dots, x_n, y): |x_i - x_i^0| < d_i, i = 1, \dots, n, |y - y^0| \leq c; d_i > 0, c > 0\} \subset \omega$,

в котором уравнение (10.1) определяет единственную неявную функцию вида (10.2). Эта функция дифференцируема, и ее частные производные выражаются формулой:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\left.\frac{F'_x(x_1, \dots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \dots, x_n, y)}\right|_{y=f(x_1,\dots,x_n)}.$$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теорем 2 и 3.

О неявных функциях, определяемых системой уравнений

Рассмотрим систему m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \qquad\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

Решение этой системы относительно $y_1, \dots, y_m$:

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \tag{10.4}$$

называется системой неявных функций, определяемой системой уравнений (10.3).

Мы рассмотрим вопросы о существовании, единственности и дифференцируемости неявных функций вида (10.4), определяемых системой уравнений (10.3). Оказывается, что при исследовании системы (10.3) важную роль играет определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

который называется определителем Якоби или якобианом функций $F_1, \dots, F_m$ по аргументам $y_1, \dots, y_m$. Часто для якобиана используют более краткое обозначение:

$$\Delta = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}.$$

Теорема 5.

Пусть выполнены условия:

1. $F_1, \dots, F_m$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности ω точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$;
2. $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(i, j = 1, \dots, m)$ непрерывны в точке M_0;
3. $F_1(M_0) = 0, \dots, F_m(M_0) = 0, \Delta|_{M_0} \neq 0$.

Тогда существует параллелепипед

$Q = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \colon |x_i - x_i^0| < d_i, i = 1, \dots, n, |y_j - y_j^0| \leq c_j, j = 1, \dots, m; d_i > 0, c_j > 0\} \subset \omega$,

в котором система уравнений (10.3) определяет единственную систему неявных функций вида (10.4). Причем эти неявные функции дифференцируемы.

<u>Пример</u>.

Рассмотрим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0, \\ F_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0. \end{cases} \tag{10.5}$$

Первое уравнение описывает сферу радиуса $\sqrt{3}$ с центром в начале координат, второе – плоскость. Будем рассматривать данную систему относительно y и z (выразим их через x) в окрестности точки $M_0(1,1,-1)$.

Убедимся, что для нашей системы выполнены все условия Теоремы 5. Функции F_1, F_2 дифференцируемы в окрестности точки M_0. Частные производные $F'_{1y} = 2y, F'_{1z} = 2z, F'_{2y} = 1, F'_{2z} = 1$ непрерывны в окрестности точки M_0. Наконец, $F_1(M_0) = 0, F_2(M_0) = 0$ и якобиан

$$\Delta|_{M_0} = \left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Следовательно, в некоторой окрестности точки M_0 система уравнений (10.5) определяет единственную пару функций вида $y = f_1(x), z = f_2(x)$, причем эти функции дифференцируемы. Получим формулы для производных функций $f_1(x), f_2(x)$, подставим их в систему (10.5), тогда $\forall x$ в окрестности точки $x = 1$ имеем:

$$\begin{cases} x^2 + f_1^2(x) + f_2^2(x) - 3 = 0, \\ x + f_1(x) + f_2(x) - 1 = 0. \end{cases}$$

Продифференцируем оба тождества по x и получим систему уравнений относительно первых производных $f_1'(x), f_2'(x)$:

$$\begin{cases} 2x + 2f_1(x)f_1'(x) + 2f_2(x)f_2'(x) = 0 \\ 1 + f_1'(x) + f_2'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x)f_1'(x) + f_2(x)f_2'(x) = -x \\ f_1'(x) + f_2'(x) = -1 \end{cases}.$$

По формулам Крамера решение имеет вид:

$$f_1'(x) = \frac{f_2(x) - x}{f_1(x) - f_2(x)},$$
$$f_2'(x) = \frac{x - f_1(x)}{f_1(x) - f_2(x)}.$$

Полагая $x = 1$, имеем $f_1(1) = 1, f_2(1) = -1$ и $f_1'(1) = -1$, $f_2'(1) = 0$. Производные 2-го порядка можно найти по формулам:

$$f_1''(x) = \left[\frac{f_2(x) - x}{f_1(x) - f_2(x)}\right]',$$
$$f_2''(x) = \left[\frac{x - f_1(x)}{f_1(x) - f_2(x)}\right]'.$$

Если нарисовать сферу и плоскость, которые задаются уравнениями (10.5) в прямоугольной системе координат $Oxyz$, то линией их пересечения будет некая окружность. Отметим на этой окружности точку $M_0(1,1,-1)$, в некоторой небольшой окрестности этой точки мы получим дугу окружности, рассмотрим проекции этой дуги на координатные плоскости Oxy и Ozx. Эти проекции являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $z = f_2(x)$, то есть тех самых неявных функций, которые определяются уравнениями (10.5) в окрестности точки M_0.

Зависимость функций

В курсе линейной алгебры было введено понятие линейного пространства и линейной зависимости элементов линейного пространства. Элементы называются линейно зависимыми, если существует их линейная комбинация, у которой не все коэффициенты равны нулю, дающая нулевой элемент пространства.

Рассмотрим линейное пространство $C[a,b]$ функций, непрерывных на сегменте $[a,b]$, то есть $C[a,b] = \{f(x): f(x) -$ непрерывны на $[a,b]\}$. Линейная зависимость функций в пространстве $C[a,b]$ означает, что хотя бы одну из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Введем более общее понятие зависимости функций, которое включает в себя как частный случай понятие линейной зависимости. Начнем с примера:

$$y_1(x) = x, y_2(x) = x^2, a \le x \le b.$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не являются линейно зависимыми на сегменте $[a,b]$, так как ни при каких числах C_1 и C_2 равенства:

$$y_1(x) = C_1 y_2(x)\ \forall x \in [a,b],$$
$$y_2(x) = C_2 y_1(x)\ \forall x \in [a,b],$$

или

$$x = C_1 x^2\ \forall x \in [a,b],$$

$$x^2 = C_2 x \ \forall x \in [a,b]$$

не выполняются. Они верны только в точках $x = 0$ и $x = 1$. Однако между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть нелинейная зависимость, которая выражается формулой:

$$y_2(x) = y_1^2(x) \ \forall x \in [a,b].$$

Перейдем к общему понятию зависимости функций. Пусть функции

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \tag{10.6}$$

определены и дифференцируемы в области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. Функция $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$ называется зависимой в области D от остальных функций системы (10.6), если для всех точек области D эту функцию можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m), \tag{10.7}$$

где $\Phi(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Равенство (10.7) нужно понимать так, что если в него вместо $y_1, \dots, y_m$ подставить функции (10.6), то получится тождество, справедливое $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in D$:

$$f_k(x) = \Phi\big(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \dots, f_m(x)\big).$$

В данном определении существенно то, что функция Φ зависит только от $y_1, \dots, y_m$ (кроме y_k) и не зависит от $x_1, \dots, x_n$.

Определение. Функции (10.6) называются зависимыми в области D, если одна из них (все равно какая) зависит в этой области от остальных функций. В противном случае функции (10.6) называются независимыми в области D.

Пример 1. Рассмотрим 3 функции от 4-х аргументов:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2. \end{cases}$$

Эти функции зависимы в любой области $D \subset \mathbb{R}^4$, поскольку для любой точки (x_1, x_2, x_3, x_4) выполняется равенство

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2).$$

Пример 2. Рассмотрим две функции от двух аргументов:

$$y_1 = x_1 + x_2,$$
$$y_2 = x_1 x_2.$$

Интуитивно ясно, что сумму $x_1 + x_2$ двух произвольных чисел нельзя выразить через их произведение $x_1 x_2$, и наоборот. Докажем, что функции y_1 и y_2 независимы в любой окрестности точки начала координат $O(0,0)$.

Предположим противное, что функции y_1 и y_2 зависимы в некоторой окрестности точки $O(0,0)$. Тогда для всех точек (x_1, x_2) из этой окрестности либо $y_1 = \Phi_1(y_2)$, либо $y_2 = \Phi_2(y_1)$.

Допустим, что верно

$$y_1 = \Phi_1(y_2). \tag{10.8}$$

Рассмотрим отрезок лежащий на оси Ox в окрестности точки начала координат

$$L_1 = \{(x_1, x_2): x_1 \in I, x_2 = 0\},$$

где $I -$ некоторый интервал. На этом отрезке

$$y_1 = x_1,$$
$$y_2 = 0,$$

поэтому равенство (10.8) принимает вид

$$x_1 = \Phi_1(0) = const,$$

но это противоречит тому, что на отрезке L_1 координата x_1 не является постоянной, а изменяется на интервале I. Значит предположение (10.8) неверно.

Допустим, что верно

$$y_2 = \Phi_2(y_1). \tag{10.9}$$

В этом случае рассмотрим отрезок лежащий на прямой $x_1 = -x_2$ в окрестности точки начала координат

$$L_2 = \{(x_1, x_2):\ x_1 + x_2 = 0\}.$$

На этом отрезке

$$y_1 = 0,$$
$$y_2 = -x_1^2.$$

Следовательно, из равенства (10.9) мы получаем, что

$$-x_1^2 = \Phi_2(0) = const,$$

но это противоречит тому, что на отрезке L_2 координата x_1 не является постоянной.

Итак, ни одна из функций y_1, y_2 не зависит от другой в любой окрестности точки $O(0,0)$, значит, эти функции независимы в любой окрестности точки $O(0,0)$.

Задание. Докажите, что функции в примере 2 независимы в любой области из $\mathbb{R}^2$.

Пример 3. Рассмотрим функции

$$y_1 = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}, y_2 = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ 0, -1 \leq x \leq 0 \\ (x+1)^2, x \leq -1 \end{cases}.$$

Докажите, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists$ окрестность этой точки, в которой функция y_1 зависит от функции y_2, но вместе с тем функция y_1 не зависит от функции y_2 на всей числовой прямой. Аналогично, докажите, что функция y_2 не зависит от функции y_1 на всей числовой прямой, тем самым будет доказано, что эти функции независимы на всей числовой прямой.

Рассмотрим функции

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \qquad (10.10)$$

при условии $n \geq m$. Введем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x y_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Выберем какие-нибудь m столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Пересечение этих столбцов со строками матрицы A дает минор -го порядка, который является якобианом

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}. \qquad (10.11)$$

Теорема 6 (достаточное условие независимости функций). Пусть

1. функции (10.10) определены и дифференцируемы в окрестности ω точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$,
2. какой-нибудь якобиан вида (10.11) не равен нулю в точке M_0.

Тогда функции (10.11) независимы в любой окрестности точки M_0.

Доказательство.

Допустим, что функции (10.11) зависимы в окрестности ω точки M_0, тогда одна из них, например, y_k может быть представлена в виде:

$$y_k = \Phi(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m),$$

то есть

$$f_k(x) = \Phi\big(f_1(x), \ldots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \ldots, f_m(x)\big),$$

где для краткости введено обозначение $x = (x_1, \ldots, x_n)$. И пусть якобиан

$$\left.\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{M_0} \neq 0.$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1},$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_n}.$$

Эти равенства показывают, что -я строка якобиана $\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$ является линейной комбинацией остальных строк с коэффициентами $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}$. Следовательно, этот якобиан равен нулю во всех точках окрестности ω, в том числе и в точке M_0. Но это противоречит условию теоремы, и, значит, функции (10.10) независимы в ω. Теорема 6 доказана.

ЛЕКЦИЯ 11. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

На прошлой лекции мы сформулировали Теорему 6, сформулируем следствие из нее.

Следствие. Если функции (10.11) зависимы в некоторой области, то все миноры m-го порядка матрицы A равны нулю во всех точках этой области. Для якобиана $\frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}$ это доказано по ходу доказательства теоремы 6, для любого другого якобиана вида утверждение доказывается аналогично.

Общая теорема о зависимости и независимости функций

Теорема 7.

Пусть

1. функции $f_1, \dots, f_m$ дифференцируемы в окрестности ω точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$,
2. все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$ непрерывны в точке M_0,
3. имеется минор -го порядка матрицы A, неравный нулю в точке M_0.
4. все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A тождественно равны нулю в окрестности ω точки M_0.

Тогда

1. r функций, указанных в миноре -го порядка независимы в ω,
2. остальные $(m-r)$ функций зависят от указанных r функций в некоторой окрестности $\omega_1 \subset \omega$.

Первое утверждение следует из Теоремы 6, доказательство второго утверждения технически довольно сложное.

Пример. Рассмотрим функции

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2. \end{cases}$$

Составим для этих функций матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) \end{pmatrix}.$$

Минор, образованный пересечением первых двух строк и первых двух столбцов матрицы A:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

отличен от нуля в любой точке, а все миноры третьего порядка матрицы A тождественно равны нулю в любой области. Поэтому, согласно Теореме 7, функции y_1

и y_2 независимы в любой окрестности любой точки, а функция y_3 зависит от y_1 и y_2. Мы уже решали этот пример, не зная Теоремы 7, усмотрев, что

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2).$$

Условный экстремум

Задача об условном экстремуме функции заключается в нахождении точек локального экстремума данной функции при условии, что ее аргументы не являются независимыми переменными, а связаны между собой некоторыми равенствами (условиями связи).

Пример. Требуется найти экстремумы функции

$$u = f(x, y) = x + y$$

при условии, что ее аргументы x и y связаны соотношением

$$F(x, y) = xy - 1 = 0.$$

У функции u нет точек локального экстремума, хотя бы потому что не выполнено необходимое условие экстремума, то есть равенство нулю частных производных. Таким образом функция u не имеет никакого безусловного экстремума, но, если же наложить условие связи, то окажется, что у данной функции есть условный экстремум.

Из условия связи выразим

$$y = \frac{1}{x},$$

подставим это выражение в формулу для функции и получим

$$u = g(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Найдем точки возможного экстремума функции $g(x)$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Поскольку

$$g''(x) = \frac{2}{x^3}$$

и $g''(1) > 0, g''(-1) < 0$, в точке $x = 1$ функция $g(x)$ имеет локальный минимум, а точке $x = -1$ – локальный максимум. По условию связи $x = 1$ соответствует $y = 1$, и $x = -1$ соответствует $y = -1$. Тогда в точке $M_1(1,1)$ функция $u = x + y$ имеет минимум при условии связи $xy - 1 = 0$, а в точке $M_2(-1, -1)$ – максимум при том же условии связи.

Данная задача допускает наглядную геометрическую иллюстрацию. Мы рассматриваем нашу функцию на плоскости xy, множество точек, которые удовлетворяет условию связи, является гиперболой (рис. 11.1). Мы находим экстремумы нашей функции по отношению не ко всем точкам плоскости, а по отношению только к точкам, лежащим на этих гиперболах. Проведем, так называемые, линии уровня нашей функции, то есть линии, на которых функция сохраняет постоянное значение:

$$u = x + y = C = const.$$

Точка $M_1(1,1)$ соответствует $C = 2$, наглядно видно, что это минимальное значение функции по отношению ко остальным точкам гиперболы. Аналогично, в точке $M_2(-1,-1)$ функция равна -2, это максимальное значение функции по отношению ко остальным точкам гиперболы.

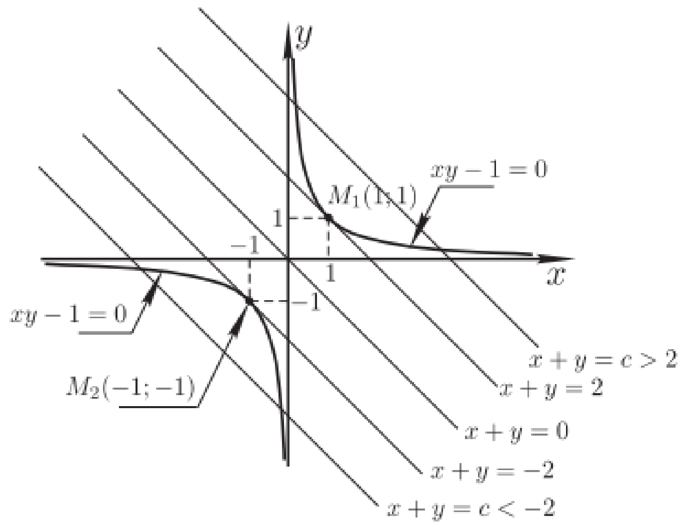


Рис. 11.1. Иллюстрация к примеру.

Перейдем к общей постановке задачи об условном экстремуме функции. Рассмотрим функцию

$$u = f(x_1, \dots, x_n) = f(M) \tag{11.1}$$

при условии, что ее аргументы связаны между собой m $(m < n)$ соотношениями (условиями связи):

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \tag{11.2}$$

Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ удовлетворяют системе уравнений (11.2).

Определение. Говорят, что функция (11.1) имеет в точке M_0 условный минимум (максимум), если существует окрестность точки M_0, в которой для любой точки $M(x_1, \dots, x_n) \neq M_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (11.2), выполняется неравенство

$$f(M) < f(M0)\ (f(M) > f\ (M_0)).$$

Иначе говоря, условный минимум (максимум) – это наименьшее (наибольшее) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи. Экстремум функции без условий связи (то есть тот экстремум, который рассматривался в предыдущих лекциях) будем называть безусловным.

Два метода решения задачи об условном экстремуме

Первый метод. Сведение к задаче о безусловном экстремуме.

Пусть для системы уравнений (11.2) выполнены условия Теоремы 5 о неявных функциях:

1. $F_1, \dots, F_m$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности ω точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$;
2. $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} (i, j = 1, \dots, m)$ непрерывны в точке M_0;
3. $F_1(M_0) = 0, \dots, F_m(M_0) = 0, \frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}\Big|_{M_0} \neq 0.$

Тогда в некотором параллелепипеде

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m): |x_i - x_i^0| < d_i, i = 1, \dots, n, |y_j - y_j^0| \leq c_j, j = 1, \dots, m; d_i > 0, c_j > 0\} \subset \omega,$$

система уравнений (11.2) имеет единственное решение относительно $x_1, \dots, x_m$:

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n). \tag{11.3}$$

Причем $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дифференцируемы, и

$$\varphi_1(M_0') = \varphi_1(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = x_1^0,$$
$$\dots$$
$$\varphi_m(M_0') = \varphi_m(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = x_m^0.$$

Если удается найти функции (11.3) в явном виде, то, подставляя их вместо $x_1, \dots, x_m$ в формулу (11.1), получим функцию

$$u = f(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) =: g(x_{m+1}, \dots, x_n). \tag{11.4}$$

Если функция (11.4) имеет в точке $M_0'(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ безусловный экстремум, то функция (11.1) имеет в точке M_0 условный экстремум при условиях связи (11.2).

Таким образом, вопрос об условном экстремуме функции (11.1) при условиях связи (11.2) сводится в параллелепипеде Q к вопросу о безусловном экстремуме функции (11.4). Именно такой подход был использован в рассмотренном в начале параграфа примере.

Второй метод. Метод Лагранжа.

В этом методе не используются явные выражения для неявных функций (11.3), но по-прежнему считаются выполненными условия Теоремы 5.

Введем так называемую функцию Лагранжа:

$$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \dots + \lambda_m F_m(M),$$

где $f(M)-$ функция (11.1), $F_1(M), \dots, F_m(M) -$ функции из (11.2), $\lambda_1, \dots, \lambda_m -$ пока произвольные числа (они называются множителями Лагранжа). Заметим, что в точках

$M(\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n)$, удовлетворяющих условиям связи (11.2), выполняются равенства:

$$\Phi(M)=f(M)=g(M'),$$

где $M'=M'(x_{m+1},\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-m}$. Таким образом,

$$g(x_{m+1},\dots,x_n)=\Phi(\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n). \tag{11.5}$$

Выведем необходимое (по Лагранжу) условие условного экстремума функции (11.1) при условиях связи (11.2) в точке $M_0\big(\varphi_1(M_0'),\dots,\varphi_m(M_0'),x_{m+1}^0,\dots,x_n^0\big)$. Пусть функция $f(M)$ (а значит и функция $\Phi(M)$) дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи (11.2). Тогда функция $g(M')$ дифференцируема в точке $M_0'(x_{m+1}^0,\dots,x_n^0)$ и имеет безусловный экстремум в этой точке. Следовательно,

$$dg|_{M_0'}=0.$$

Это равенство в силу (11.5) можно записать в виде:

$$dg|_{M_0'}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(M_0)dx_1+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(M_0)dx_m+\frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0)dx_{m+1}+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(M_0)dx_n=0, \tag{11.6}$$

где $dx_{m+1},\dots,dx_n-$ дифференциалы независимых переменных, а

$$dx_i=d\varphi_i|_{M_0'},i=1,\dots,m.$$

Докажем, что $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ можно выбрать так, что будут выполнены равенства:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(M_0)=0,\dots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(M_0)=0. \tag{11.7}$$

Запишем равенства (11.7) в развернутом виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0)+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0)=0,$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0)+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0)=0.$$

Написанные равенства представляют собой систему m линейных уравнений относительно $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, определитель которой является транспонированным по отношению к якобиану $\left.\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}\right|_{M_0}\neq 0$ в силу нашего предположения о выполнении условий Теоремы 5.

Взяв в качестве $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ это решение, получим вполне определенную функцию Лагранжа, удовлетворяющую условиям (11.7). В силу (11.7) равенство (11.6) принимает вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0)dx_{m+1}+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(M_0)dx_n=0. \tag{11.8}$$

Так как $dx_{m+1},\dots,dx_n-$ дифференциалы независимых переменных, то из (11.8) следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0)d = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0) = 0. \qquad (11.9)$$

Наши рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема 8 (необходимое по Лагранжу условие условного экстремума).

Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи (11.2), и если выполнены условия Теоремы 5, то существует функция Лагранжа

$$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \dots + \lambda_m F_m(M),$$

которая удовлетворяет в точке M_0 условиям (11.7) и (11.9), то есть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(M_0) = 0, i = 1, \dots, n. \qquad (11.10)$$

Теорема 8 определяет следующий метод отыскания точек условного экстремума функции $f(M)$ при условиях связи (11.2). Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \dots + \lambda_m F_m(M)$$

и рассмотрим систему уравнений, состоящую из равенств (11.2) и (11.10):

$$F_1(M) = 0, \dots, F_m = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0. \qquad (11.11)$$

Система (11.11) состоит из $m+n$ уравнений относительно $m+n$ неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n$. Пусть система (11.11) имеет решение $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0, x_1^0, \dots, x_n^0$. Тогда для функции Лагранжа

$$\Phi = f + \lambda_1^0 F_1 + \dots + \lambda_m^0 F_m$$

в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ выполнены равенства (11.10). В силу Теоремы 8 это означает, что точка M_0 является точкой возможного условного экстремума функции $f(M)$ при условиях связи (11.2).

Чтобы установить, имеет ли на самом деле функция $f(M)$ условный экстремум в точке M_0, воспользуемся тем, что вопрос об условном экстремуме функции $f(M)$ в точке M_0 эквивалентен вопросу о безусловном экстремуме функции $g(M')$ в точке $M_0'(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$. В свою очередь, для того, чтобы функция $g(M')$ имела безусловный экстремум в точке M_0', достаточно, чтобы квадратичная форма

$$d^2 g|_{M_0'} = Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n) \qquad (11.12)$$

была знакоопределенной. Если эта квадратичная форма знакоопределенная, то функция $g(M')$ имеет в точке M_0' экстремум, а значит функция $f(M)$ имеет в точке M_0 условный экстремум при условиях связи (11.2). Если же эта квадратичная форма знакопеременная, то условного экстремума функции $f(M)$ в точке M_0 нет. Это и есть достаточное условие наличия или отсутствия условного экстремума функции $f(M)$ в точке M_0 при условиях связи (11.2).

Встает вопрос о том, как вычислить квадратичную форму $Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$, то есть как найти ее коэффициенты, если нам неизвестны явные выражения функций (11.3), хотя сами эти функции существуют.

ЛЕКЦИИ 12. КРАТНЫЕ И ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вычисление квадратичной формы

На прошлой лекции мы остановились на этапе вычисления квадратичной формы (11.12). Из (11.5) следует, что первый дифференциал функции $g(M')$ можно записать в виде

$$dg|_{M'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\Phi\Big|_{M'},$$

где $dx_{m+1}, \dots, dx_n -$ дифференциалы независимых переменных, $dx_1, \dots, dx_m -$ дифференциалы неявных функций (11.3). В точке $M_0'(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ второй дифференциал имеет вид:

$$d^2g|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \Phi\Big|_{M_0} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(M_0)d^2x_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(M_0)d^2x_m\right].$$

В силу (11.10) каждое слагаемое в квадратных скобках равно нулю, и значит

$$d^2g|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \Phi\Big|_{M_0}. \tag{12.1}$$

Таким образом, для нахождения $d^2g|_{M_0'}$, то есть для вычисления квадратичной формы нужно вычислить второй дифференциал функции Лагранжа $\Phi(M)$ в точке M_0, причем так, как если бы все аргументы $x_1, \dots, x_n$ были независимыми переменными, а затем заменить $dx_1, \dots, dx_m$ дифференциалами неявных функций (11.3) в точке M_0'.

В свою очередь, чтобы найти дифференциалы функций (11.3) в точке M_0':

$$dx_1 = d\varphi_1|_{M_0'}, \dots, dx_m = d\varphi_m|_{M_0'},$$

не используя явных выражений для этих функций (у нас нет этих явных выражений), подставим неявные функции $x_1, \dots, x_m$ в систему уравнений (11.2). Получим тождества:

$$F_1(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv 0,$$
$$\dots$$
$$F_m(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv 0.$$

Дифференцируя эти тождества в точке M_0' и используя инвариантность формы первого дифференциала, приходим к равенствам:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0)d\varphi_1|_{M_0'} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0)d\varphi_m|_{M_0'} + \frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}}(M_0)dx_{m+1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(M_0)dx_n = 0,$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0)d\varphi_1|_{M_0'} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0)d\varphi_m|_{M_0'} + \frac{\partial F_m}{\partial x_{m+1}}(M_0)dx_{m+1} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(M_0)dx_n = 0. \tag{12.2}$$

Эти равенства представляют собой систему m линейных уравнений относительно дифференциалов $d\varphi_1|_{M_0'}, \dots, d\varphi_m|_{M_0'}$, причем определитель системы равен якобиану

$$\left.\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\right|_{M_0} \neq 0.$$

Следовательно, из этой системы однозначно находятся искомые дифференциалы $d\varphi_1|_{M_0'}, \dots, d\varphi_m|_{M_0'}$ через $dx_{m+1}, \dots, dx_n$. Подставляя найденные выражения в формулу (12.1), получаем искомую квадратичную форму $Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$.

Пример.

Найдем экстремумы функции $u = x + y$ при условии связи $xy - 1 = 0$. В данном случае для решения задачи можно было бы использовать первый метод, но мы применим для решения метод Лагранжа. Введем функцию Лагранжа

$$\Phi = f + \lambda_1 F_1 = x + y + \lambda(xy - 1).$$

Рассмотрим систему уравнений (11.11), которая в нашем случае имеет вид:

$$\begin{cases} F_1 = xy - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + \lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda x = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет два решения: $\lambda_1 = 1, x_1 = -1, y_1 = -1$ и $\lambda_1 = -1, x_1 = 1, y_1 = 1$. Таким образом, имеем две точки возможного условного экстремума функции $u = x + y$ при условии связи $xy - 1 = 0$: точка $M_1(-1, -1)$, при этом $\Phi = x + y + (xy - 1)$, и $M_2(1{,}1)$, при этом $\Phi = x + y - (xy - 1)$, и точка .

Далее в соответствии с описанным алгоритмом вычислим второй дифференциал функции Лагранжа, причем так, как если бы x и y были независимыми переменными. Для точки $M_1(-1, -1)$ имеем:

$$d\Phi = dx + dy + ydx + xdy,$$
$$d^2\Phi = 2dxdy.$$

В нашем случае система (12.2) состоит из одного уравнения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(M_1)dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(M_1)dy = 0 \Rightarrow dy = -dx.$$

Тогда

$$Q(dx) = -2(dx)^2.$$

Так как $Q(dx) -$ положительно определенная квадратичная форма, то в точке $M_1(-1, -1)$ функция $u = x + y$ имеет условный максимум при условии связи $xy - 1 = 0$.

Аналогично доказывается, что в точке $M_2(1{,}1)$ функция $u = x + y$ имеет условный минимум при условии связи $xy - 1 = 0$ (проведите доказательство самостоятельно).

Кратные интегралы. Площадь плоской фигуры

Под плоской фигурой будем понимать любое множество точек плоскости. Рассмотрим произвольную ограниченную плоскую фигуру G. Многоугольник $Q_в$ будем называть вписанным в фигуру G, а многоугольник Q_o — описанным около фигуры G, если $Q_в \subset G \subset Q_o$ (рис. 12.1). Понятие площади многоугольника считаем известным, будем использовать обозначения $P(Q_в) = P_в$ и $P(Q_o) = P_o$ для площадей вписанного и описанного многоугольников соответственно.

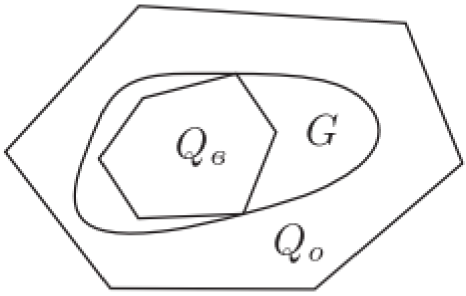


Рис. 12.1. Вписанный и описанный многоугольники.

Рассмотрим множество $\{P_в\}$ площадей всех вписанных в фигуру G многоугольников. Оно ограничено сверху (площадью любого описанного многоугольника) и, следовательно, имеет точную верхнюю грань $\underline{P} = sup\{P_в\}$. Если в фигуру G нельзя вписать ни одного многоугольника, то положим $\underline{P} = 0$. Аналогично, множество $\{P_o\}$ площадей всевозможных описанных многоугольников ограничено снизу (например, числом нуль) и, следовательно, имеет точную нижнюю грань $\overline{P} = inf\{P_o\}$. Числа $\overline{P}$ и $\underline{P}$ называются нижней и верхней площадью фигуры G.

Отметим, что всегда верно утверждение $\underline{P} \leq \overline{P}$. Если допустить, что $\underline{P} > \overline{P}$ (см. рис. 12.2), то найдутся такие $P_в$ и P_o, для которых выполнено неравенство $P_o < P_в$, чего не может быть. Таким образом, для любых $Q_в$ и Q_o выполняются неравенства:

$P_в \leq \underline{P} \leq \overline{P} \leq P_o$. (12.3)

Рис. 12.2. Допущение.

Определение. Плоская фигура G называетсяквадрируемой, если $\underline{P} = \overline{P}$. При этом число $P = \underline{P} = \overline{P}$ называется площадью фигуры G (по Жордану).

Примеры.

1. Всякий многоугольник является, очевидно, квадрируемой фигурой в смысле данного определения, и его площадь по Жордану равна площади, введенной в элементарной геометрии.

2. Примером неквадрируемой фигуры является множество точек $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x$ и y $-$рациональные числа$\}$. Так как $\underline{P} = 0, \overline{P} = 1$, то $\underline{P} \neq \overline{P}$, поэтому фигура G не квадрируема по Жордану. (Тем не менее она будет квадрируема по Лебегу.)

Теорема 1. Для того, чтобы плоская фигура G была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ Q_в$ и $Q_о$: $P_о - P_в < \varepsilon$.

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть G — квадрируемая фигура площади P, тогда по определению $P = \underline{P} = \overline{P}$. Согласно определению точных граней числового множества $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ Q_в$ и $Q_о$: $\underline{P} - P_в < \frac{\varepsilon}{2}$ и $P_о - \overline{P} < \frac{\varepsilon}{2}$. Складывая эти неравенства, получаем $P_о - P_в < \varepsilon$, и, тем самым, утверждение о необходимости доказано.

2) Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ Q_в$ и $Q_о$: $P_о - P_в < \varepsilon$. Отсюда и из неравенств (12.3) следует, что $0 \leq \underline{P} - \overline{P} < \varepsilon$, а так как ε — произвольное положительное число, то$\underline{P} - \overline{P} = 0$, то есть $\underline{P} = \overline{P}$. Это и означает (по определению), что фигура G квадрируема. Утверждение о достаточности доказано.

Пусть функция $y = f(x) \geq 0$ неотрицательна и непрерывна на сегменте $[a, b]$ (рис. 12.3). Фигура, ограниченная графиком этой функции, отрезком $[a, b]$ оси Ox и двумя вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$ (каждый из этих отрезков может вырождаться в точку), называется криволинейной трапецией.

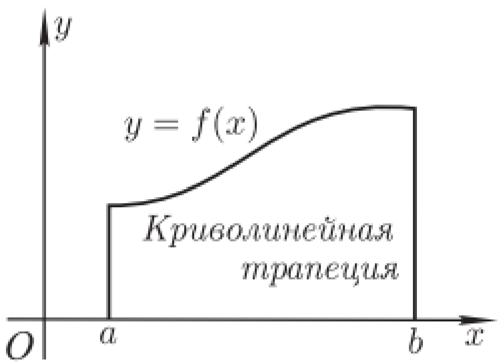


Рис. 12.3. Криволинейная трапеция.

Теорема 2. Криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь P выражается формулой:

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте. Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое разбиение сегмента

$[a,b]$, для которого $S - s < \varepsilon$, где $S, s -$ суммы Дарбу этого разбиения. Заметим, что $S -$ площадь описанного около криволинейной трапеции ступенчатого многоугольника ($S = P_o$), а $s -$ площадь вписанного ступенчатого многоугольника ($s = P_в$) (рис. 12.4).

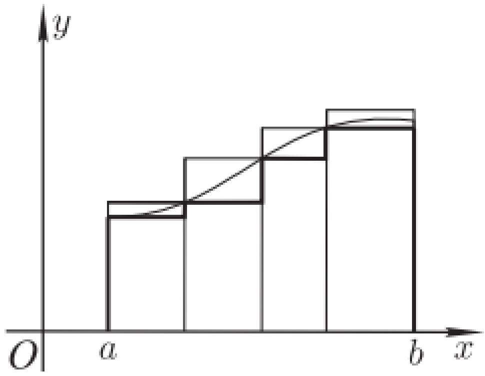


Рис. 12.4. Вписанный и описанный ступенчатые многоугольники.

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ Q_в$ и Q_o: $P_o - P_в < \varepsilon$. Следовательно, согласно Теореме 1, криволинейная трапеция квадрируема. Пусть ее площадь равна P. Тогда для любых $Q_в$ и Q_o выполняются неравенства $P_в \le P \le P_o$, в частности, $s \le P \le S$. Перейдем в этих неравенствах к пределу при $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ — максимальная длина частичного сегмента разбиения сегмента $[a,b]$). По лемме Дарбу

$$\lim_{\Delta \to 0} s = \lim_{\Delta \to 0} S = \int_a^b f(x)dx.$$

Отсюда следует, что площадь также

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим фигуру, изображенную на рис. 12.5. изображена. Это плоская фигура, ограниченная отрезками OA и OB, а также непрерывной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$.

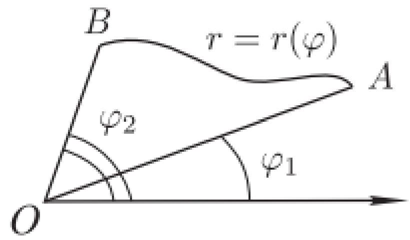


Рис. 12.5. Криволинейный сектор.

Такая фигура называется криволинейным сектором. Площадь P криволинейного сектора выражается формулой

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Двойные интегралы

Пусть G — квадрируемая и, следовательно, ограниченная область на плоскости xy. Пусть в области G задана ограниченная функция $f(x,y) = f(K)$.

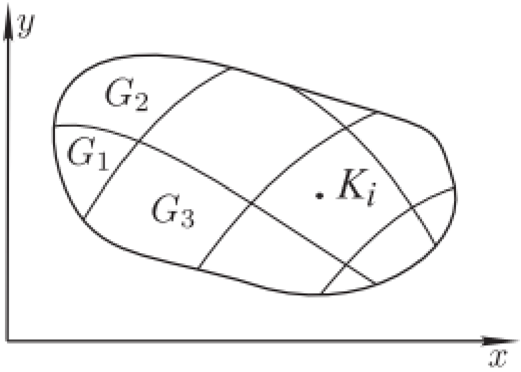


Рис. 12.6. Разбиение области G на плоскости xy.

Разобьем произвольным образом область G на n квадрируемых частей G_i: $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ (рис. 12.6) так, что никакие две части G_i и G_j не имеют общих внутренних точек. В каждой части G_i возьмем произвольным образом точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

$$I(G_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(K_i)P(G_i).$$

Введем понятие диаметра множества. Пусть G — ограниченное множество точек в пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки из G. Числовое множество $\{\rho(M_1,M_2)\}$ всевозможных расстояний между точками M_1 и M_2 ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Число

$d = sup_{\substack{M_1 \in G \\ M_2 \in G}} \{\rho(M_1,M_2)\}$

называется диаметром множества G. Обозначим через d_i диаметр частичной области G_i, и $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

Предел интегральных сумм $\lim\limits_{d\to 0} I(G_i, K_i)$ (если он существует) называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области G и обозначается:

$$\lim_{d\to 0} I(G_i, K_i) = \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G} f(K)dS.$$

Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть $f(x,y), (x,y) \in G$ непрерывная неотрицательная функция, тогда $\iint_G f(x,y)dxdy -$ объем тела, изображенного на рисунке 12.7.

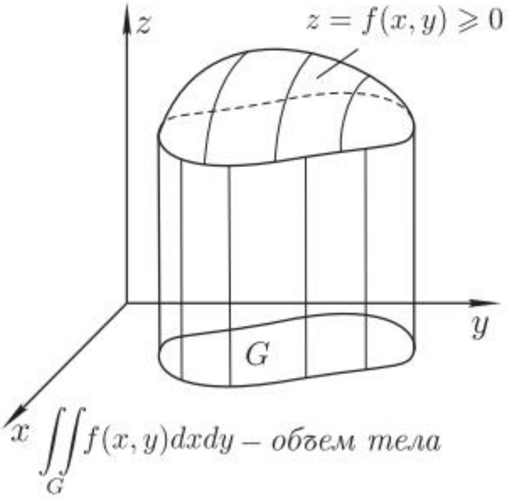


Рис. 12.7. Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y) = 1 \ \forall (x,y) \in G$, то любая интегральная сумма равна площади области G:

$$I(G_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) P(G_i) = P(G),$$

поэтому

$$\iint\limits_G dxdy = P(G).$$

ЛЕКЦИЯ 13. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y)$ в некоторой квадрируемой области G на плоскости xy. Разобьем эту область на частичные подобласти, составим интегральную сумму, предел интегральных сумм и называется двойным интегралом. Для того, чтобы вывести необходимые и достаточные условия интегрируемости для определенного интеграла, мы вводили понятие сумм Дарбу.

Для произвольного разбиения $G=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ введем верхнюю и нижнюю суммы Дарбу функции $f(x,y)$:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i P(G_i)\,,s=\sum_{i=1}^{n} m_i P(G_i),$$

где $M_i=\sup_{G_i} f(x,y)\,,m_i=\inf_{G_i} f(x,y)\,,P(G_i)-$ площадь G_i. Суммы Дарбу обладают такими же свойствами, как и в случае определенного интеграла, в частности, существуют нижний и верхний интегралы Дарбу $sup\{s\}=\underline{I}$ и $inf\{S\}=\overline{I}$. При этом $\underline{I}\le\overline{I}$ и $\lim_{d\to 0} s=\underline{I}$, $\lim_{d\to 0} S=\overline{I}$, где $d=\max_{1\le i\le n} d_i-$ диаметр G_i (лемма Дарбу).

Теорема 3. Для того, чтобы ограниченная в квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируемой в этой области, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I}=\overline{I}$. При этом

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\underline{I}=\overline{I}.$$

Теорема 4. Для того, чтобы ограниченная в квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируемой в этой области, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0$ существовало разбиение области G, у которого $S-s<\varepsilon$.

Теорема 5. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой квадрируемой области, то она интегрируема в этой области.

Определение. Говорят, что множество G является множеством площади нуль, если $\forall\varepsilon>0$ можно указать конечное число многоугольников, имеющих сумму площадей меньшую ε и содержащих в себе все точки множества G.

Теорема 6. Для того, чтобы ограниченая в замкнутой квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируема в этой области, достаточно, чтобы множество ее точек разрыва было множеством площади нуль.

Теоремы 3–6 доказываются так же, как аналогичные теоремы для определенного интеграла. Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы.

Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования

1) Сначала рассмотрим случай, когда функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $Q = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$.

Теорема 7. Пусть:

1. $\forall x \in [a, b] \; \exists \int_c^d f(x, y) dy = I(x)$,
2. $\exists \iint_Q \; f(x, y) dx dy$.

Тогда $\exists \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$, он называется повторным и равен двойному интегралу, то есть

$$\iint\limits_Q f(x, y) dx dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) dy.$$

2) Рассмотрим область $Q = \{(x, y): y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$ (рис. 13.1).

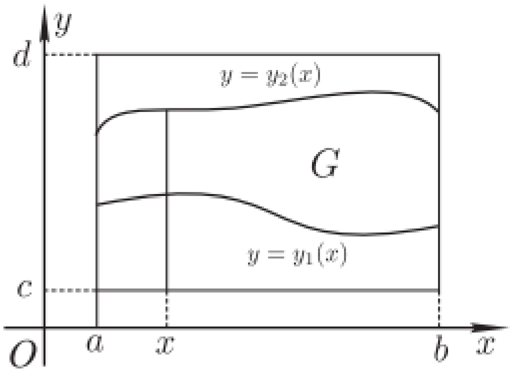


Рис. 13.1. Трапециевидная область.

Теорема 7'. Пусть

1. $\forall x \in [a, b] \; \exists \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = I(x)$,
2. $\exists \iint_Q \; f(x, y) dx dy$.

Тогда $\exists \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \iint_G \; f(x, y) dx dy$.

Для доказательства теоремы 7' введем прямоугольник $Q = \{(x, y): a \le x \le y, c \le y \le d\}$ такой, что $c \le y_1(x) \le y_2(x) \le d$ (рис. 13.1). Введем функцию $F(x, y)$ в прямоугольнике Q:

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y),(x,y)\in G \\ 0,(x,y)\in Q\backslash G \end{cases}$$

и применим к ней Теорему 7.

Пример.

Рассмотрим на плоскости xy область, заключенную между кривыми $y=x$ и $y=x^2$ (рис. 13.2) и вычислим интеграл

$I=\iint_G xydxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xydy=\int_0^1 dx\left[x\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x}\right]=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-x^5)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}.$

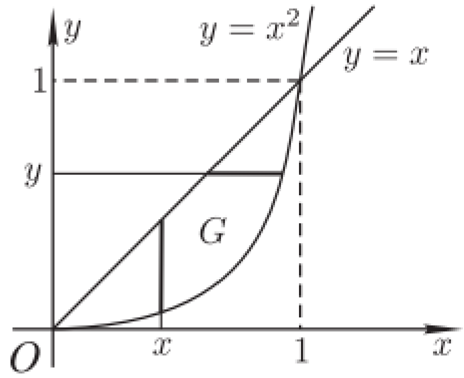


Рис. 13.2. Пример.

Вычислите этот же интеграл, но в обратном порядке, то есть

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} xydx.$$

Замена переменных в двойном интеграле

Запишем хорошо вам известную формулу замены переменных в определенном интеграле. Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и произведем замену переменных $x=\varphi(t),\alpha\le t\le\beta$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Рассмотрим двойной интеграл $\iint_G f(x,y)dxdy$. Перейдем от переменных (x,y) к новым переменным (u,v) по формулам:

$$x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v),(u,v)\in g. \tag{13.1}$$

При некоторых условиях справедливо равенство:

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_g f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv, \tag{13.2}$$

где $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$. Формула (13.2) называется формулой замены переменных в двойном интеграле. Произведение $dxdy$ в формуле двойного интеграла, то есть элемент площади в декартовых прямоугольных координатах, в формуле (13.2) заменили на произведение $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv,$ где $dudv$ так же является элементом площади, но уже в области g, $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| -$ коэффициент растяжения площади.

Рассмотрим нестрогий вывод формулы (13.2). Пусть функции (13.1) удовлетворяют условиям:

I. Если точка (u,v) пробегает область g, то соответствующая точка $(x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ пробегает область G, причем различным точкам (u,v) из области g соответствуют различные точки (x,y) из области G. В таком случае говорят, что функции (13.1) задают взаимно однозначное отображение области g на область G. Область g является праобразом области G, а $G -$ образом g при отображении (13.1).

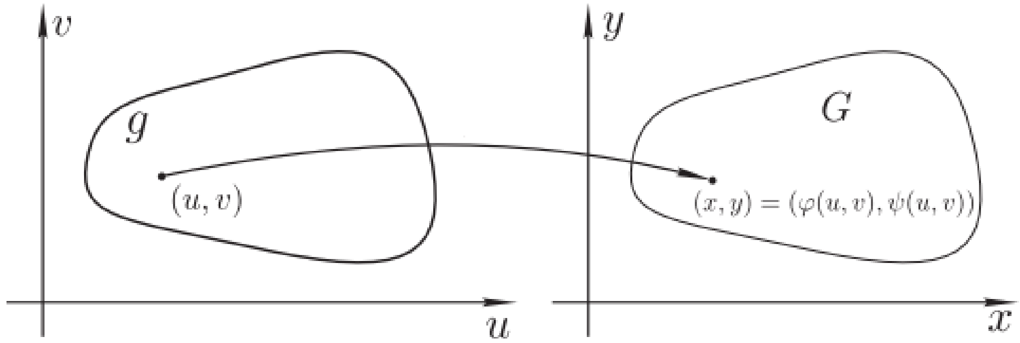


Рис. 13.3. Взаимно однозначное отображение.

II. Функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v$ в области g.

III. $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \neq 0 \ \forall (u,v) \in g.$

Зафиксируем переменную u, положив $u = u_0 = const.$ Тогда по формулам (13.1) получим:

$$x = \varphi(u_0, v), y = \psi(u_0, v). \tag{13.3}$$

Уравнения (13.3) являются параметрическими уравнениями кривой, лежащей в области G (роль параметра играет переменная v). Аналогично, положив $v = v_0 = const,$ получим параметрические уравнения другой кривой, лежащей в области G (роль параметра играет переменная u):

$$x = \varphi(u, v_0), y = \psi(u, v_0). \tag{13.4}$$

Кривые (13.3) и (13.4) пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0)$.

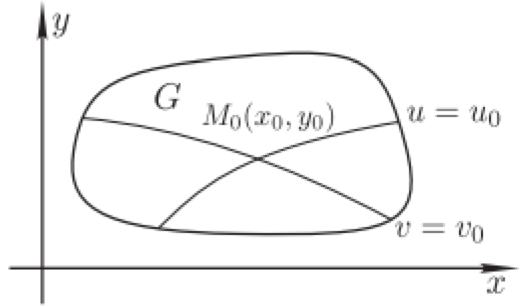


Рис. 13.4. Координатные u- и -линии.

В силу условия I точка $M_0(x_0, y_0) \in G$ соответствует только одной точке (u_0, v_0) из области g. Таким образом, точка M_0 однозначно определяется парой чисел $(u_0, v_0) \in g$. Поэтому эти числа можно рассматривать как новые координаты точки M_0. Кривая (13.3), на которой меняется только переменная v называется координатной -линией, а кривая (13.4) – координатной u-линией. Поскольку эти линии, вообще говоря, кривые, то числа u_0 и v_0 называются криволинейными координатами точки M_0. Итак, формулы (13.1) можно рассматривать как формулы, посредством которых в области G вводятся криволинейные координаты точек.

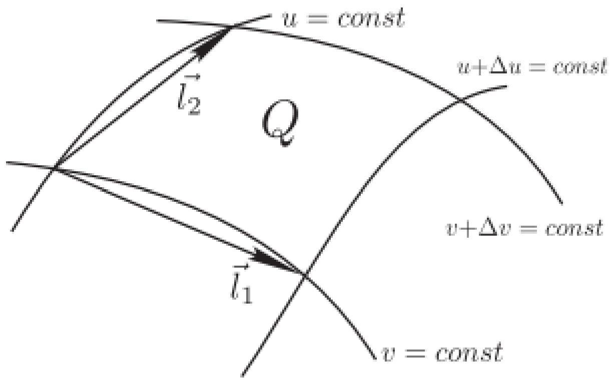


Рис. 13.5. Пары близких координатных линий.

Рассмотрим две пары близких координатных линий в области G. Они ограничивают криволинейный четырехугольник Q (рис. 13.5). Вычислим приближенно площадь этого четырехугольника, заменив его параллелограммом, построенным на векторах $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$:

$$\vec{l}_1 = \{\varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v), \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v)\} = \{\varphi'_u \Delta u, \psi'_u \Delta u\},$$

$$\vec{l}_2 = \{\varphi'_v \Delta v, \psi'_v \Delta v\},$$

где $\Delta u > 0, \Delta v > 0$ и производные $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v$ берутся в некоторых промежуточных точках. Площадь криволинейного четырехугольника приближенно вычисляется по формуле:

$$P(Q) \cong \left|\left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2\right]\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u' \Delta u & \psi_u' \Delta u & 0 \\ \varphi_v' \Delta v & \psi_v' \Delta v & 0 \end{vmatrix} = \left|\vec{k}(\varphi_u' \psi_v' - \varphi_v' \psi_u') \Delta u \Delta v\right| \cong \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\tilde{u},\tilde{v})} \Delta u \Delta v,$$

где $(\tilde{u}, \tilde{v})$ – некоторая точка криволинейного четырехугольника.

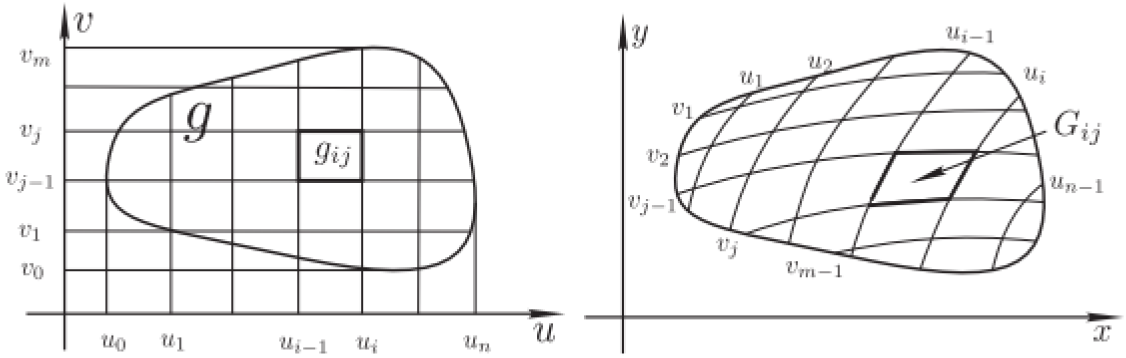


Рис. 13.6. Разбиения.

Проведем на плоскости uv $n+1$ вертикальный отрезок и $m+1$ горизонтальный отрезок, они разобьют область g на части g_{ij}. Таким образом, для области g мы имеем разбиение:

$$g = \bigcup_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n,m} g_{ij}.$$

При этом область G разобьется на криволинейные четырехугольники G_{ij}:

$$G = \bigcup_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n,m} G_{ij}.$$

Конечно, те частичные области, которые примыкают к границе, не являются прямоугольниками, но мы будем игнорировать этот факт в рамках наших не строгих рассуждений. Тем более что, когда мы будем измельчать разбиения, эти прямоугольники, примыкающие к границе, будут становиться сколь угодно маленькими. Основная сложность в полном доказательстве формулы замены переменной состоит именно в том, что надо аккуратно оценить эти области, не являющиеся прямоугольниками.

Для площади G_{ij} имеем

$$P(G_{ij}) \cong \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_j)} \Delta u_i \Delta v_j,$$

где $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}, \Delta v_j = v_j - v_{j-1}$. Составим интегральную сумму для функции $f(x,y)$, соответствующую разбиению области G на части G_{ij}:

$$I(G_{ij}, K_{ij}) = \sum_{i,j} f(K_{ij}) P(G_{ij}) \cong \sum_{i,j} f\left(\varphi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j), \psi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)\right) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)} \Delta u_i \Delta v_j, \tag{13.5}$$

где в качестве промежуточных точек берем $K_{ij}(x_{ij}, y_{ij}), x_{ij} = \varphi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j), y_{ij} = \psi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)$. Сумма в правой части формулы (13.5) является интегральной суммой для функции $f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$, соответствующей разбиению области g на частичные области g_{ij}.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывная и пусть $G, g -$ замкнутые области. Перейдем в равенстве (13.5) к пределу при $d_g \to 0$, где $d_g = \max d_{ij}$, $d_{ij} -$ диаметр g_{ij}, при этом также $d_G \to 0$, получим по определению двойного интеграла, что

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_g f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

ЛЕКЦИЯ 14. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойные интегралы

Продолжим рассматривать замену переменных в двойных интегралах. Пусть $f(x,y)=1$, тогда из формулы (13.2) имеем:

$$\iint\limits_G dxdy = P(G) = \iint\limits_g \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Мы получили выражение для площади области G через криволинейные координаты. $ds = dxdy -$ элемент площади в декартовых координатах, $ds = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv -$ элемент площади в криволинейных координатах, $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| -$ коэффициент растяжения площади.

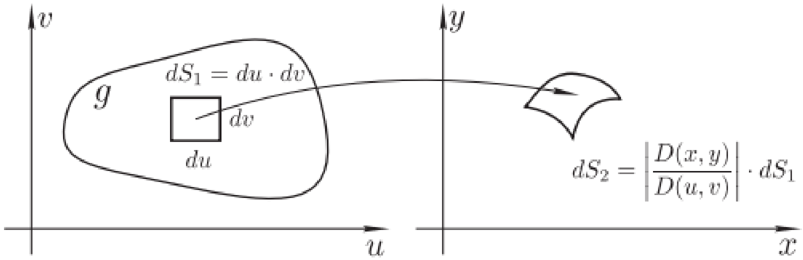


Рис. 14.1. Преобразование элемента площади.

Пример 1(полярные координаты). Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x,y) и полярные координаты (r,φ):

$$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi \ \ (r \geq 0{,}0 \leq \varphi \leq 2\pi). \qquad (14.1)$$

Равенства (14.1) задают отображение заштрихованной полу-полосы на плоскости (r,φ) (рис. 14.1) на всю плоскость (x,y).

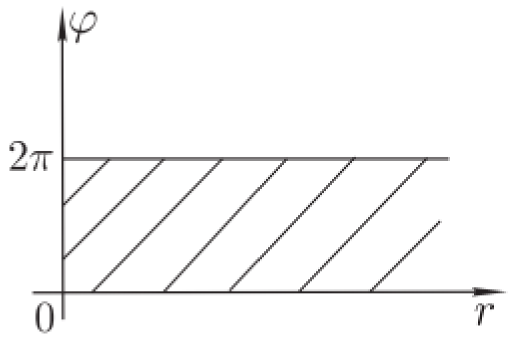


Рис. 14.1. Полу-полоса $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Якобиан $\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r.$

Вычислим двойной интеграл

$$I = \iint\limits_G (x^2 + y^2)dxdy,$$

где $G = \{(x, y): a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\} -$ кольцо на плоскости xy (рис. 14.2). Перейдем к полярным координатам $0 \le \varphi \le 2\pi$, $a \le r \le b$:

$$I = \iint\limits_g r^2 r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^b r^3 dr = 2\pi \frac{1}{4}(b^4 - a^4).$$

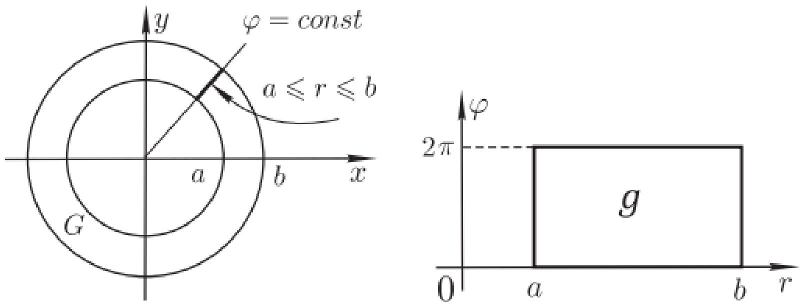


Рис. 14.2. Кольцо $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$.

Пример 2. Рассмотрим криволинейный сектор G на плоскости xy, вычислим его площадь. Переходя к полярным координатам $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $0 \le r \le r(\varphi)$, получим на плоскости $r\varphi$ криволинейную трапецию g (рис. 14.3). Для площади криволинейного сектора получим выражение

$$P(G) = \iint\limits_G dxdy = \iint\limits_g r dr d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} r dr = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

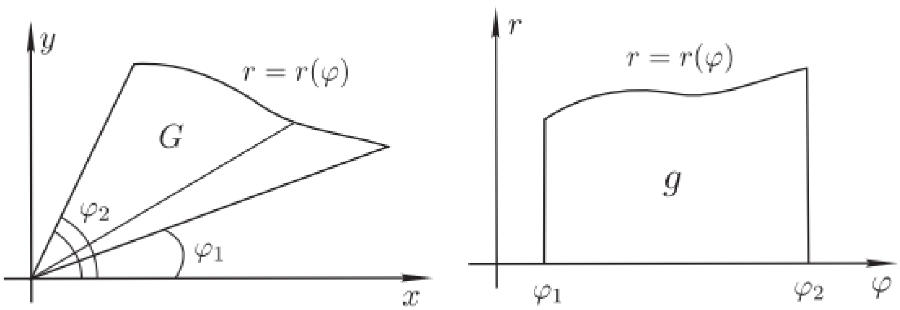


Рис. 14.3. Криволинейный сектор (слева) и криволинейная трапеция (справа).

Тройные интегралы

Тройные интегралы вводятся аналогично двойным интегралам. Понятия кубируемости и объема тела в трехмерном пространстве вводятся аналогично понятию квадрируемости и площади плоской фигуры (на основе рассмотрения вписанных и описанных для данного тела многогранников, для которых понятие объема считаем известным).

Пусть $G -$ кубируемая фигура в пространстве, и пусть в G задана ограниченная функция $f(x,y,z) = f(K), K(x,y,z)$. Разобьем фигуру G на n кубируемых фигур G_i: $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ без общих внутренних точек у любых двух частей и составим интегральную сумму:

$$I(G_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V(G_i),$$

где $K_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in G_i -$ промежуточная точка, $V(G_i) -$ объем G_i. Введем диаметр d_i частичной области G_i и $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Рассмотрим предел интегральных сумм при $d \to 0$, если $\lim\limits_{d \to 0} I(G_i, K_i)$ существует, то он называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области G и обозначается

$$\iiint\limits_G f(x,y,z) dxdydz = \int f(K) dV.$$

Для тройных интегралов имеют место теоремы, аналогичные теоремам 3 – 6 для двойных интегралов.

Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования

Мы сводили вычисление двойного интеграла к последовательному вычислению двух определенных интегралов. Аналогично можно свести вычисление тройного интеграла к вычислению сначала двойного интеграла, а затем определенного, либо, наоборот, сначала определенного, а затем двойного.

1) Пусть $G -$ квадрируемая область на плоскости xy, и в области G задано две непрерывные функции $z = z_1(x,y)$ и $z = z_2(x,y)$, причем $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$. Рассмотрим в пространстве область $T = \{(x,y,z): z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in G\}$ (рис. 14.4). Пусть в области T задана ограниченная функция $f(x,y,z)$.

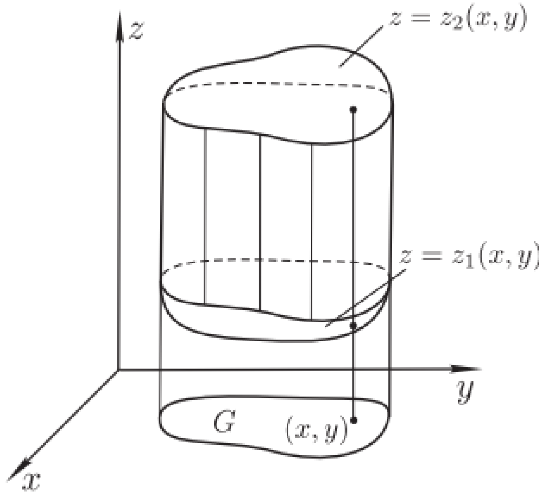


Рис. 14.4. Область T в пространстве.

Теорема 8. Пусть

1) $\exists \iiint_T \ f(x,y,z)dxdydz,$

2) $\forall (x,y) \in G \ \exists \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

Тогда

$$\exists \iint\limits_G I(x,y)dxdy,$$

его обозначают

$$\iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

он называется повторным интегралом, и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{14.1}$$

Теорема 8 доказывается аналогично Теореме 7’.

Пример 1. Пусть область T ограничена поверхностями $S_1 \colon z^2 = x^2 + y^2$ и $S_1 \colon z = 1$ (рис. 14.5). Вычислим интеграл

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (x^2+y^2)dz$$

$$= \iint\limits_G dxdy(x^2+y^2)\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

где $G -$ круг радиуса 1 с центром в начале координат на плоскости. В двойном интеграле по области G перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$ $(0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi)$. Получим:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2(1-r)rdr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

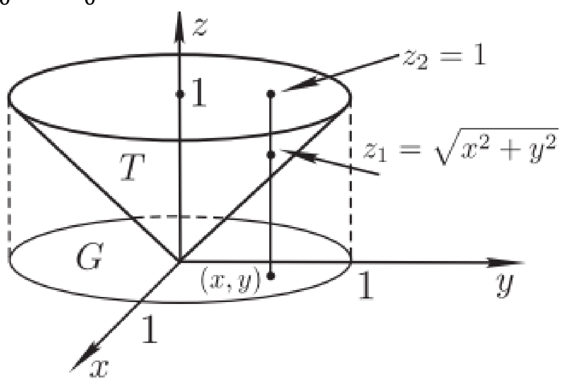


Рис. 14.5. Пример 1.

Пример 2. Пусть область $G = \{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y \le y(x)\}$ на плоскости xy является криволинейной трапецией. В этом случае

$$\iint\limits_G I(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{y(x)} I(x,y)dy,$$

и вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{y(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

2) Рассмотрим кубируемую область T, изображенную на рис. 14.6. Рассмотрим сечение тела плоскостью $x = const$, получим фигуру $G(x)$. Пусть $G(x) -$ квадрируемая фигура $\forall x \in [a,b]$, и в области T задана ограниченная функция $f(x,y,z)$.

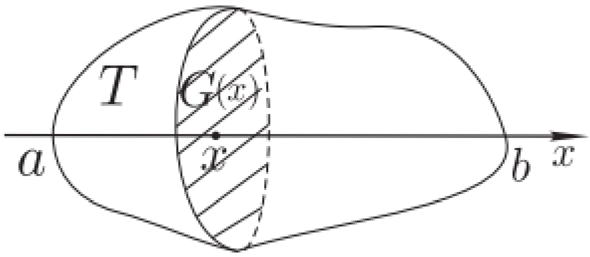


Рис. 14.6. Область T.

Теорема 9. Пусть

3) 1) $\exists \iiint_T \ f(x,y,z)dxdydz$,

4) $\forall x \in [a,b] \ \exists \iint_{G(x)} f(x,y,z)dydz =: I(x)$.

Тогда

$$\exists \int_a^b I(x,y)dx,$$

его обозначают

$$\int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x,y,z)dydz,$$

он называется повторным интегралом, и справедливо равенство:

$$\iiint_T \ f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x,y,z)dydz. \tag{14.2}$$

Пример. Рассмотрим область $T = \left\{(x,y,z)\colon \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1, (x,y) \in G\right\}$, изображенную на рис. 14.6 и вычислим интеграл

$$I = \iiint_T \ (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^1 dz \iint_{G(z)} (x^2+y^2)dxdy.$$

Во внутреннем интеграле перейдем к полярным координатам:

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z r^2 r dr = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{z^4}{4} = 2\pi \frac{z^5}{20}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

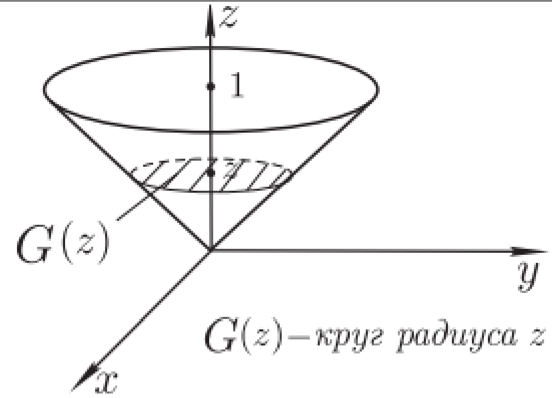


Рис. 14.6. Пример.

Замена переменных в тройном интеграле

Рассмотрим тройной интеграл $\iiint_T \ f(x,y,z)dxdydz$. Перейдем от переменных (x,y,z) к новым переменным (u,v,w) по формулам:

$$x=\varphi(u,v,w), y=\psi(u,v,w), z=\chi(u,v,w), (u,v,w)\in g. \tag{14.3}$$

Пусть функции (14.3) удовлетворяют таким же условиям I-III как в случае двойного интеграла. В частности

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\neq 0\ \forall(u,v,w)\in g.$$

Напишем формулу замены переменных по аналогии с тем, как она выглядела для двойного интеграла. Если $G, g -$ кубируемые замкнутые области, функция $f(x,y,z)-$ непрерывна в G (за исключением быть может множества точек объема нуль) и ограничена в G, то справедлива формула:

$$\iiint\limits_T \ f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_g \ f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw. \tag{14.4}$$

Формула (14.4) называется формулой замены переменных в тройном интеграле.

Отметим частный случай $f(x,y,z)=1$, из формулы (14.4) получим формулу для объема тела через криволинейные координаты:

$$\iiint\limits_T \ dxdydz=V(T)=\iiint\limits_g \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw,$$

где $dV = dxdydz -$ элемент объема в декартовых координатах, $dV = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw -$ элемент объема в криволинейных координатах, $\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| -$ коэффициент растяжения объема.

ЛЕКЦИЯ 15. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Примеры криволинейных координат

1) *Цилиндрические координаты.*

Тройка чисел (r, φ, z) называется цилиндрическими координатами точки M (рис. 15.1). Координатная поверхность $r = const -$ цилиндрическая поверхность. Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x, y, z) и цилиндрические координаты:

$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi\,, z = z\ (r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \infty \leq z \leq \infty)$.

Якобиан перехода имеет вид:

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}\right| = r,$$

тогда элемент объема $dV = rdrd\varphi dz$.

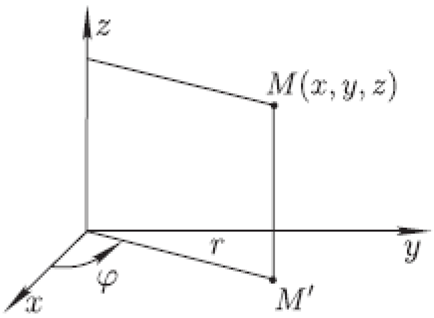


Рис. 15.1. Цилиндрические координаты.

2) *Сферические координаты.*

Тройка чисел $(r, \theta, \varphi) -$ сферические координаты точки M (рис. 15.2). Координатная поверхность $r = const -$ сфера. Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x, y, z) и сферические координаты:

$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, y = r\sin\theta\sin\varphi\,, z = r\cos\theta\ (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

Якобиан перехода имеет вид:

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2\sin\theta,$$

тогда элемент объема $dV = r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta$.

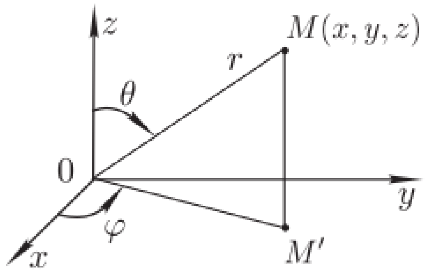


Рис. 15.2. Сферические координаты.

Длина кривой

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим множество точек $\{M(x, y)\}$, координаты которых задаются уравнениями:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \tag{15.1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ − непрерывные функции на сегменте $[\alpha, \beta]$. В формуле (15.1) каждому $t \in [\alpha, \beta]$ ставится в соответствие некоторая точка $M(x, y)$ из этого множества. Если же некоторой точке $M(x, y)$ соответствует несколько значений t, то такую точку назовем кратной. Пусть множество $\{M(x, y)\}$ не содержит кратных точек, тогда оно называется простой плоской незамкнутой кривой. Точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ назовем граничными точками или концами кривой. Переменную t называется параметром, а уравнения (15.1) параметрическими уравнениями кривой. Если точки A и B совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется простой замкнутой кривой.

Примеры:

1) $x = \cos t, y = \sin t$
   a) $0 \leq t \leq \pi \Longrightarrow$ простая незамкнутая кривая (полуокружность)
   b) $0 \leq t \leq 2\pi \Longrightarrow$ простая замкнутая кривая (окружность)
   c) $0 \leq t \leq 4\pi \Longrightarrow$ не простая кривая (двукратная окружность)
2) График непрерывной функции $y = f(x), a \leq x \leq b$ можно рассматривать как простую незамкнутую кривую, записав ее параметрические уравнения в виде:
$$x = t, y = f(t), a \leq t \leq b.$$

Пусть простая кривая (замкнутая или незамкнутая) задана параметрически уравнениями (15.1). Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Каждому значению t_i соответствует точка $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ на кривой (рис. 15.3). Впишем в кривую ломаную $AM_1M_2 \dots B$. Длина Δl_i i-го звена ломаной равна длине отрезка $M_{i-1}M_i$, а длина всей ломаной:

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Введем также обозначения: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\Delta t = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$.

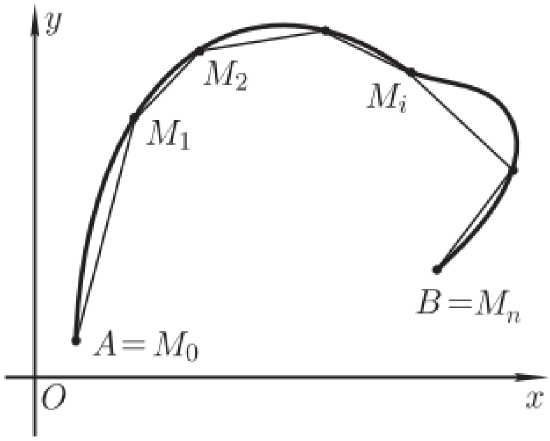


Рис. 15.3. Ломаная.

Определение. Число l называется пределом длин ломаных $l(t_i)$ при $\Delta t \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$ выполняется неравенство

$$0 \le l - l(t_i) < \varepsilon.$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta t \to 0} l(t_i) = l$, то кривая называется спрямляемой, а число l называется длиной кривой (иногда говорят «длиной дуги кривой»).

Теорема 1. Пусть простая кривая задана параметрическими уравнениями (15.1), и функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая спрямляема, и ее длина l выражается формулой:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dt \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}. \tag{15.2}$$

Эвристика обосновывающая формулу (15.2).

Рассмотрим сколь угодно малый элемент кривой dl (рис. 15.4):

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)},$$

где мы учли, что $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$. Тогда для длины кривой получим

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dt \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,.$$

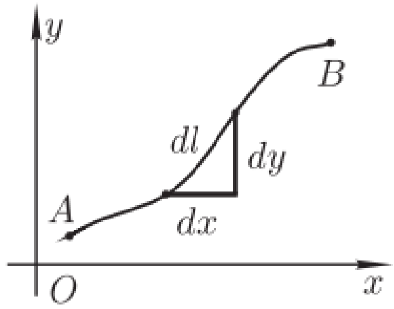


Рис. 15.4. Элемент кривой.

Следствия:

1) Пусть кривая задана в прямоугольной системе координат уравнением $y = f(x), a \leq x \leq b$, причем функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$. Перейдем к параметрическим уравнениям кривой:
$$x = \varphi(t) = t, y = \psi(t) = f(t), a \leq t \leq b.$$
Из (15.2) получаем формулу длины кривой, заданной явным уравнением:
$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'^2(t)}dt = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

2) Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, и функция $r(\varphi)$ имеет на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$ непрерывную производную $r'(\varphi)$. Переходя к декартовым координатам, получим уравнения кривой в параметрической форме ($\varphi -$ параметр):
$$x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi\ (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2).$$
По формуле (15.2) для длины кривой в полярных координатах получаем:
$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}.$$

3) Пусть в полярных координатах кривая задана уравнением $\varphi = \varphi(r), r_1 \leq r \leq r_2$. Выведите формулу:
$$l = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr\sqrt{1 + r^2\varphi'^2(r)}.$$

Замечание о пространственной кривой.

Простая не замкнутая кривая в пространстве задается как множество точек $\{M(x, y, z): x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$, где $\varphi(t), \psi(t)$ и $\chi(t) -$ непрерывные функции на сегменте $[\alpha, \beta]$, и множество $\{M(x, y, z)\}$ не содержит кратных точек. Понятие длины кривой вводится таким же образом, как и для плоской кривой, и длина кривой выражается формулой

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} dt\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}.$$

Пример 1. Пусть $x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le 2\pi$, тогда по формуле (15.2) получаем:

$$l = \int_{0}^{2\pi} dt\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = R\int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Пример 2. Вычислите длину куска параболы $y = x^2, 0 \le x \le 1$.

Криволинейные интегралы первого рода

Пусть $L -$ простая спрямляемая кривая, заданная параметрически, то есть

$$L: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta.$$

Пусть на кривой L задана ограниченная функция $z = f(x, y)$. Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Каждому значению t_i соответствует точка $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ на кривой. При этом кривая L разобьетсяна n частей точками $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$. Обозначим через Δl_i длину дуги $M_{i-1}M_i$. Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ (см. рис. 15.5) и составим интегральную сумму:

$$I(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i.$$

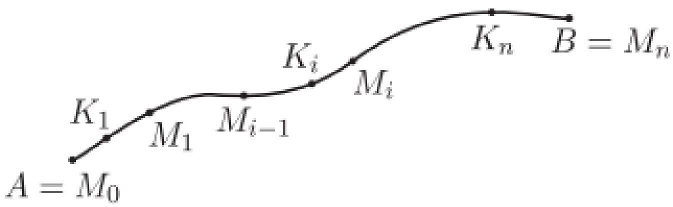


Рис. 15.5. Разбиение кривой L.

Введем обозначение $\Delta l = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$.

Предел интегральных сумм $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I(M_i, K_i)$ (если он существует) называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается так $\int_L f(x, y)dl$ или $\int_{AB} f(x, y)dl$.

Из определения криволинейного интеграла следует, что он не зависит от того, в каком направлении пробегается кривая L, то есть

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{BA} f(x, y)dl.$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода с помощью определенных интегралов

Теорема 2. Пусть

1) $L-$ простая кривая, заданная параметрически уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta$, причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на сегменте $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, одновременно не равные нулю, то есть $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0\ \forall t\in[\alpha,\beta]$ (в таком случае кривая L называется гладкой);
2) функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой L.

Тогда криволинейный интеграл $\int_L f(x,y)dl$ существует, и справедливо равенство:

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Доказательство.

Разобьем сегмент $[\alpha,\beta]$ на n частей точками $\alpha=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=\beta$. При этом кривая L разобьетсяна n частей точками $A=M_0,M_1,\dots,M_n=B$, где $M_i\big(\varphi(t_i),\psi(t_i)\big)$. Обозначим через Δl_i длину дуги $M_{i-1}M_i, \Delta l=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $\Delta t=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta t_i$. Отметим, что $\Delta l\to 0$ при $\Delta t\to 0$, поскольку

$$\Delta l_i=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,$$

и верно обратное утверждение: $\Delta t\to 0$ при $\Delta l\to 0$ (докажите сами).

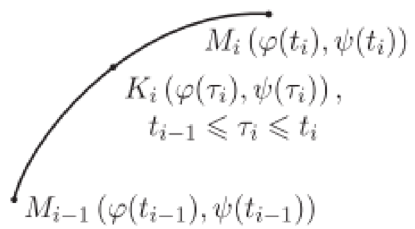


Рис. 15.6. Элемент дуги.

Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $K_i(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))$ и составим интегральную сумму:

$$I(M_i,K_i)=\sum_{i=1}^n f\big(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)\big)\Delta l_i=\sum_{i=1}^n\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f\big(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Требуется доказать, что $\lim\limits_{\Delta l\to 0}I(M_i,K_i)=I$ (или, что то же самое, при $\Delta t\to 0$) существует и равен определенному интегралу

$$I=\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,$$

(15.3)

или же что

$$\lim_{\Delta t \to 0}(I(M_i, K_i) - I) = 0.$$

Интеграл (15.3) можно представить в виде суммы:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Тогда

$$I(M_i, K_i) - I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))\right] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

(15.4)

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$ выполняется неравенство

$$|I(M_i, K_i) - I| < \varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и воспользуемся тем, что функция $f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, а, следовательно, по теореме Кантора и равномерно непрерывна на нем. Поэтому $\exists \delta > 0$, такое, что, если $\Delta t < \delta$, то $\forall \tau_i, t \in [t_{i-1}, t_i]$ будет выполнено неравенство:

$$\left|f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))\right| < \frac{\varepsilon}{l},$$

где $l -$ длина кривой L. Из (15.4) получаем

$$|I(M_i, K_i) - I| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt = \frac{\varepsilon}{l} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ 16. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I И II РОДА

На прошлой лекции мы ввели понятие криволинейного интеграла I рода по плоской кривой $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta$ при условии, что кривая гладкая, то есть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка, причем $\forall t \in [\alpha,\beta]$: $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \neq 0$. На кривой L задана непрерывная функция $f(x,y)$. Тогда

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \tag{16.1}$$

<u>Замечания</u>.

1) Пусть $M\big(\varphi(t),\psi(t)\big) -$ произвольная точка на кривой AB, где $A\big(\varphi(\alpha),\psi(\alpha)\big), B\big(\varphi(\beta),\psi(\beta)\big) -$ граничные точки кривой. Обозначим длину дуги AM через $l(t)$, она выражается формулой:

$$l(t)=\int\limits_\alpha^t \sqrt{\varphi'^2(s)+\psi'^2(s)}ds.$$

Функцию $l(t)$ часто называют переменной дугой. Найдем ее дифференциал

$$dl = l'(t)dt = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Пусть кривая задана в декартовых координатах $L: y=y(x), a \le x \le b$ и $y'(x) -$ непрерывна, в таком случае кривую L также называют гладкой. Тогда для дифференциала имеем

$$dl=\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

Криволинейный интеграл сводим к определенному интегралу следующим образом:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f\big(x,y(x)\big)\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

Пусть кривая задана в полярных координатах $L: r=r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ и $r'(\varphi) -$ непрерывна. Тогда

$$dl=\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$$

и

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi.$$

2) Непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кривых, называется кусочно гладкой (рис. 16.1). Если кривая $L -$ кусочно гладкая, а функция $f(x,y) -$ кусочно непрерывная вдоль кривой L, то формула (16.1) остается в силе.

Рис. 16.1. Кусочно гладкая кривая.

3) Криволинейные интегралы первого рода по пространственной кривой вводится аналогично тому, как это сделано на плоскости. Если $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \le t \le \beta -$ кусочно гладкая, а $f(x, y, z) -$ кусочно непрерывная, то справедлива формула:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt.$$

Примеры.

1) Вычислить интеграл $\int_L \; xdl$, где кривая $L: y = x^2, 0 \le x \le 1.$ Получим

$$\int_L xdl = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2) = \frac{1}{8}\frac{2}{3}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{12}\big(5\sqrt{5}-1\big).$$

2) Вычислить интеграл $\int_L \; xydl$, где кривая $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, 0 \le x \le 1.$ Перейдем к параметрическим уравнениям для $L: x = a\cos t, y = b\sin t, 0 \le t \le 2\pi$. Тогда

$$\int_L xydl = \int_0^{2\pi} ab\cos t\sin t\sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}dt.$$

Криволинейные интегралы второго рода

Пусть $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta -$ простая незамкнутая спрямляемая кривая, на которой заданы две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < \; t_2 < \dots < t_n = \beta$. При этом кривая L разобьетсяна n частей точками $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$, где $M_i(x_i, y_i) = M_i\big(\varphi(t_i), \psi(t_i)\big)$. Введем обозначения $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, обозначим через Δl_i длину дуги $M_{i-1}M_i$, а $\Delta l = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим две интегральные суммы:

$$I_1(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,$$
$$I_2(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

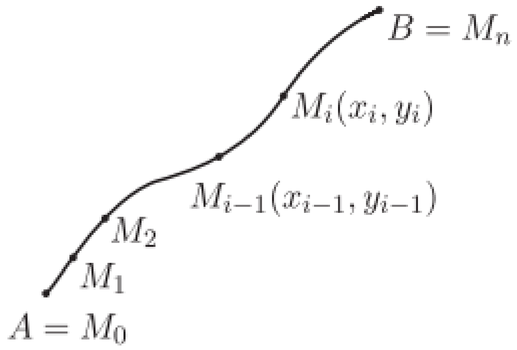


Рис. 16.2. Разбиение кривой L.

Рассмотрим пределы интегральных сумм при $\Delta l \to 0$. Пусть существуют $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I_1(M_i, K_i) = I_1$ и $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I_2(M_i, K_i) = I_2$. Числа I_1 и I_2 называются криволинейными интегралами 2-го рода и обозначаются

$$I_1 = \int\limits_{AB} P(x,y)dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$$

Сумма

$$I = I_1 + I_2 = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

называется общим криволинейным интегралом 2-го рода.

Из определения следует, что криволинейный интеграл второго рода зависит от того, в каком направлении пробегается кривая L, то есть от того, какая из точек A и B считается начальной, а какая конечной. Если двигаться от B к A, то все Δx_i и Δy_iв интегральных суммах изменят знаки, следовательно, интегралы также изменят знак, то есть

$$\int\limits_{AB} Pdx = -\int\limits_{BA} Pdx,$$

$$\int\limits_{AB} Qdy = -\int\limits_{BA} Qdy.$$

<u>Физический пример</u>. Пусть материальная точка движется по кривой AB из точки A в точку B под действием силы $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ (рис. 16.3). Рассмотрим перемещение материальной точки из точки $M(x,y)$ на сколь угодно малый вектор $\overrightarrow{dl} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Скалярное произведение

$$\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}\right) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

имеет смысл работы силы $\vec{F}$ при перемещении точки на вектор $\overrightarrow{dl}$. Тогда работа силы при перемещении точки по кривой AB из точки A в точку B:

$$\int\limits_{AB}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}\right) = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

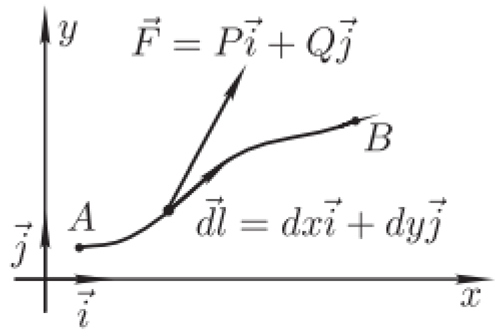


Рис. 16.3. Пример.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода с помощью определенных интегралов

Теорема 3. Пусть
1) $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta -$ гладкая незамкнутая кривая;
2) функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вдоль кривой L.
Тогда криволинейные интегралы второго рода от функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ существуют, и справедливы равенства:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)dt,$$
$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)dt. \qquad (16.2)$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.

Замечания.
1) Если кривая задана в декартовых координатах $L: y = f(x), a \le x \le b$, то
$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b}\Big(P\big(x,f(x)\big) + Q\big(x,f(x)\big)f'(x)\Big)dx.$$
2) Пусть L — замкнутая кривая (замкнутый контур), то есть точки A и B совпадают. Тогда криволинейный интеграл второго рода по кривой L вводится так же, как и для

незамкнутой кривой, но только теперь в обозначении $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не отражено, в каком направлении пробегается кривая. Договоримся считать положительным то направление обхода замкнутого контура, при котором область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к движущейся по контуру точке (рис. 16.4). Интеграл по замкнутому контуру L в положительном направлении обозначается

$$\oint\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

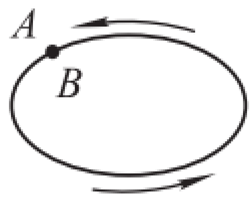


Рис. 16.4. Положительное направление обхода замкнутого контура.

3) Криволинейные интегралы второго рода в пространстве вводятся аналогично интегралам на плоскости. Для незамкнутой кривой $L\colon x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \leq t \leq \beta$ получим

$$I = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P(\varphi,\psi,\chi)\varphi'(t) + Q(\varphi,\psi,\chi)\psi'(t) + R(\varphi,\psi,\chi)\chi'(t)]dt.$$

Интеграл I можно записать более компактно:

$$I = \int\limits_{AB} (\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}),$$

где $\vec{F} = \{P,Q,R\}, \overrightarrow{dl} = \{dx,dy,dz\}$.

<u>Примеры</u>.

1) Вычислим интеграл $I = -\frac{1}{2}\oint_L\ ydx - xdy$, где $L\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, 0 \leq x \leq 1.$ Перейдем к параметрическим уравнениям эллипса:

$$x = a\cos t\,, y = b\sin t\,, 0 \leq t \leq 2\pi$$

и воспользуемся формулами (16.2):

$$I = -\frac{1}{2}\oint\limits_L [b\sin t\,(-a\sin t) - a\cos t\,(b\cos t)]dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} abdt = \pi ab = S_{\text{эл}},$$

где $S_{\text{эл}}$ – площадь фигуры, ограниченной эллипсом.

Оказывается, что если мы рассмотрим произвольную фигуру G, ограниченную замкнутым контуром L, то ее площадь находится по формуле:

$$S(G) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

2) Вычислим интеграл $I = \oint_L \; 2xydx + x^2dy$ по трем кривым, соединяющим точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, изображенным на рис. 16.5:
   1. $y = x$: $I_1 = \int_0^1 (2xx + x^2)dx = \int_0^1 3x^2dx = x^3|_0^1 = 1$;
   2. $y = x^2$: $I_2 = \int_0^1 (2xx^2 + x^2 2x)dx = \int_0^1 4x^3dx = x^4|_0^1 = 1$;
   3. ломаная ACB: $I_3 = \int_{AC} \quad + \int_{CB} \quad = 0 + \int_0^1 1dy = 1$.

Получили $I = I_1 = I_2 = I_3$, что тоже не случайно. Оказывается, что значение интеграла I не зависит от кривой, соединяющей точки A и B.

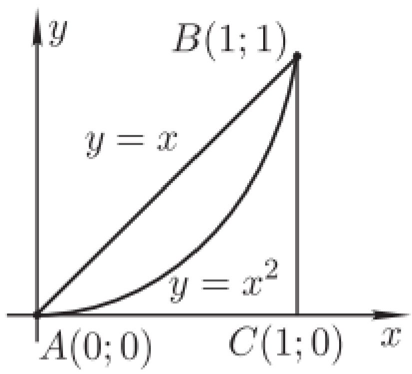


Рис. 16.5. Пример 2.

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Рассмотрим простой случай, когда гладкая кривая L задана в декартовых координатах уравнением $L: y = f(x), a \leq x \leq b.$ Рассмотрим произвольную точку $M(x, f(x))$ на кривой L. Проведем в этой точке касательную и луч, параллельный оси Ox. Обозначим через $\alpha(x)$ угол между направленной касательной к кривой в точке $M(x, f(x))$ и осью Ox. Направление касательной выберем в соответствии с направлением движения по кривой (рис. 16.6).

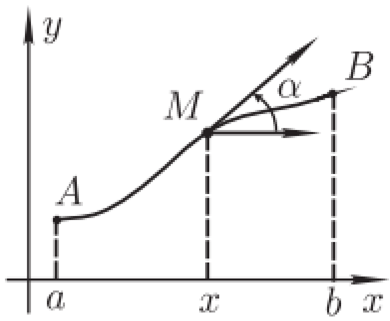


Рис. 16.6. Движение по кривой.

При движении от A к B:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{t}g\,\alpha = f'(x),$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}},$$

$$\sin\alpha = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}.$$

При движении от B к A:

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 3\frac{\pi}{2},$$

$$\text{t}g\,\alpha = f'(x),$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}},$$

$$\sin\alpha = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}.$$

Рассмотрим два криволинейных интеграла:

1) криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P\big(x, f(x)\big)dx,$$

2) криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha\, dl = \int\limits_a^b P\big(x, f(x)\big)\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}\sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \int\limits_{AB} P\big(x, f(x)\big)dx.$$

Из написанных равенств следует, что

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha\, dl.$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)\sin\alpha\, dl.$$

Тогда формула, связывающая интегралы 1-го и 2-го рода имеет вид:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} \big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha\big)dl.$$

Введем векторы $\vec{F} = \{P, Q\}$ и $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}-$ единичный вектор направленной касательной к кривой, тогда полученную формулу можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} \left(\vec{F}\cdot\vec{\tau}\right)dl.$$

Аналогичные формулы имеют место для криволинейных интегралов по пространственной кривой AB:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{AB} \left(\vec{F}\cdot\vec{\tau}\right)dl,$$

где $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ и $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}-$ единичный вектор направленной касательной к кривой.

Формула Грина

Существует формула, которая связывает между собой двойной интеграл с криволинейным. Пусть у нас есть некоторая область G, ограниченная контуром L. Оказывается, что

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy.$$

ЛЕКЦИЯ 17. ФОРМУЛА ГРИНА

Пусть уравнения $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(a \le x \le b)$ задают кусочно гладкие кривые в декартовых координатах, и пусть $y_1(x) \le y_2(x)$. Рассмотрим область

$$G = \{(x, y): a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

будем называть ее «y-трапециевидной» (рис. 17.1). Аналогично определяется «x-трапециевидная» область.

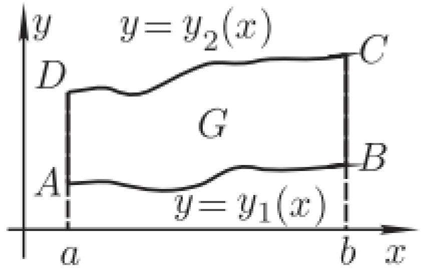


Рис. 17.1. «y-трапециевидная» область.

Замкнутую область G назовем простой, если ее можно разбить как на конечное число «-трапециевидных» областей, так и на конечное число «y-трапециевидных» областей (без общих внутренних точек у любых двух областей). Примеры простых областей: прямоугольник, круг, кольцо (рис. 17.2).

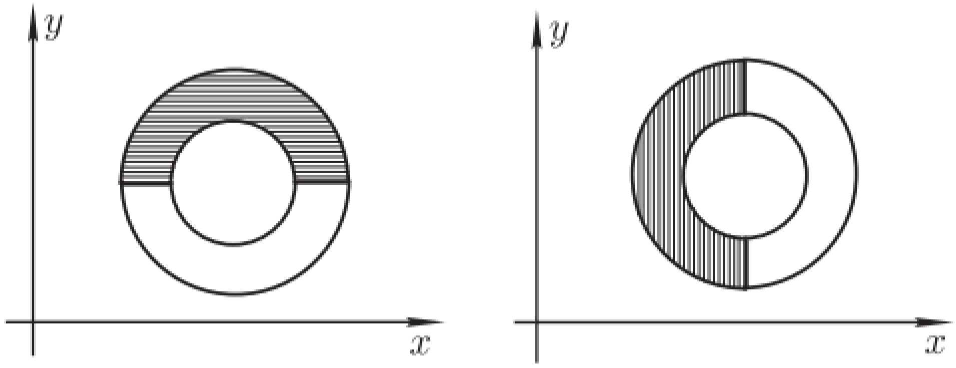


Рис. 17.2. Кольцо.

Теорема 4. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в простой области G с границей L. Тогда справедливо равенство:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy. \tag{17.1}$$

Заметим, что граница L области G может состоять из конечного числа замкнутых контуров (рис. 17.3). Как было оговорено ранее, направление обхода контура считается положительным, если при этом обходе область G остается слева от движущейся по контуру точки.

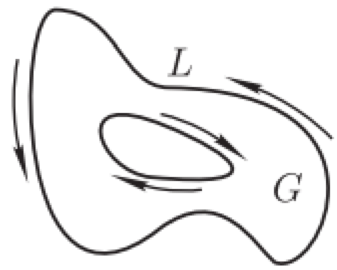


Рис. 17.3. Граница L области G.

Доказательство.

Докажем сначала, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = -\oint\limits_L P(x,y)dx. \tag{17.2}$$

Рассмотрим сначала случай, когда G – «y-трапециевидная» область, то есть $G = \{(x,y)\colon a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$. Сводя двойной интеграл к повторному, получаем:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \left[P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\right]$$
$$= \int\limits_a^b P\big(x, y_2(x)\big)dx - \int\limits_a^b P\big(x, y_1(x)\big)dx. \tag{17.3}$$

Выпишем интегралы по каждой части границы области G на рис. 17.2:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P\big(x, y_1(x)\big)dx,$$

$$\int\limits_{BC} P(x,y)dx = 0,$$

$$\int\limits_{CD} P(x,y)dx = -\int\limits_a^b P\big(x, y_2(x)\big)dx,$$

$$\int\limits_{DA} P(x,y)dx = 0.$$

Сложив эти интегралы и используя (17.3), получим:

$$\oint\limits_{\substack{L \\ (L-ABCD)}} P(x,y)dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy.$$

Тем самым, справедливость равенства (17.2) доказана для «y-трапециевидной» области.

Пусть теперь G – простая область. Разобьем ее на конечное число «y-трапециевидных» областей $G_i, (i = 1, 2, \dots, n)$: $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, обозначим $L_i -$ граница области G_i.

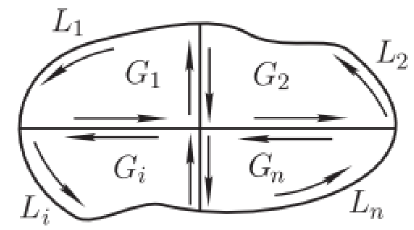


Рис. 17.4. Разбиение области G.

Напишем для каждой области G_i равенство (17.2):

$$\iint\limits_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = -\oint\limits_{L_i} P(x,y)dx.$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до n, получим в левой части интеграл $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy$, а в правой части – интеграл $-\oint_L P(x,y)dx$, так как криволинейный интеграл по каждой внутренней разделительной линии берется дважды, причем в противоположных направлениях, потому сумма таких интегралов равна нулю. Итак, для каждой простой области справедливо равенство (17.2).

Аналогично можно доказать, используя разбиения G на «x-трапециевидные» области, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_L Qdy. \tag{17.4}$$

Вычитая (17.2) из (17.4), получим (17.1). Теорема 4 доказана.

<u>Замечание</u>. Если проводить аналогию с определенным интегралом, то формула Грина аналогична формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(b) - f(a).$$

<u>Следствия</u>. Полагая в (17.1) $Q = x, P = 0$, получаем:

$$S(G) = \iint\limits_G dxdy = \oint\limits_L xdy,$$

аналогично, полагая $Q = 0, P = -y$:

$$S(G) = \iint\limits_G dxdy = -\oint\limits_L ydx.$$

Пусть α и β – произвольные числа, такие, что $\alpha + \beta = 1$. Умножая первое равенство для $S(G)$ на α, а второе на β, и складывая их, приходим к формуле:

$$S(G) = \oint\limits_L \alpha xdy - \beta ydx.$$

Наиболее употребительна эта формула при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$S(G) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

Пример. Вычислить интеграл $I = \oint_L (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$, где L: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. По формуле Грина:

$$I = \iint\limits_G (1 + 1)dxdy = 2\iint\limits_G dxdy = 2S(G) = 2\pi R^2.$$

Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Нам понадобится понятие односвязной области. Областью мы называем открытое связное множество. Объединение области и ее границы называется замкнутой областью. Область G на плоскости называется односвязной, если она обладает следующими свойством: для любого кусочно гладкого замкнутого контура L, целиком лежащего в области G, часть плоскости, ограниченная этим контуром также целиком принадлежит G.

Примеры. Открытые круг и прямоугольник – односвязные области. Кольцо, круг с выколотой точкой не являются односвязными областями.

Теорема 5.

I. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G. Тогда следующие три утверждения эквивалентны (то есть из каждого из них следуют два другие):

1) Для любого кусочно гладкого замкнутого контура $L \subset G$ выполняется равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

2) Для любых двух точек $A, B \in G$ криволинейный интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования (то есть от кривой, соединяющей точки A и B, и целиком лежащей в области G).
3) Выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом, то есть существует функция $u(x,y)$ такая, что $\forall(x,y) \in G$:
$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$
При этом для точек $A, B \in G$ выполняется равенство
$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A). \tag{17.5}$$

II. Если, кроме того, область G – односвязная, а функции P и Q имеют в области G непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то каждое из условий 1-3 эквивалентно условию 4: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ \forall(x,y) \in G$.

Доказательство.

Доказательство проведем по схеме:

I. $1 \to 2 \to 3 \to 1$;
II. $3 \to 4 \to 1$.

I. a) $1 \to 2$

Пусть выполнено условие 1. Рассмотрим две произвольные точки $A, B \in G$ и две произвольные кривые, соединяющие эти точки: ACB и ADB. В силу условия 1:
$$\oint_{ACBDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Longrightarrow$$
$$\int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy = 0 \Longrightarrow$$
$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy.$$
Таким образом, выполнено условие 2.

b) $2 \to 3$

Пусть выполнено условие 2. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка области G, а $M(x, y)$ – произвольная точка. В силу условия 2 интеграл $\int_{M_0M} Pdx + Qdy$ не зависит от выбора кривой M_0M, а зависит только от точки $M(x, y)$, то есть является функцией от x и y. Обозначим эту функцию $u(x, y)$ и докажем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Отсюда последует, так как P и Q – непрерывные функции, что $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, причем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy.$$

Зададим в точке $M(x, y)$ приращение Δx переменной x и получим точку $M_1(x + \Delta x, y)$ (рис. 17.5). Функция $u(x, y)$ получит частное приращение:

$$\Delta_x u = u(M_1) - u(M) = \int\limits_{M_0M_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy = \int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy$$

$$= \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(s, y)ds = P(\xi, y)\Delta x,$$

де $\xi \in [x, x + \Delta x]$ (последнее равенство получено с помощью формулы среднего значения). Отношение $\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(\xi, y) \to P(x, y)$ при $\Delta x \to 0$. То есть функция $u(x, y)$ имеет в точке $M(x, y)$ частную производную по переменной x и $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

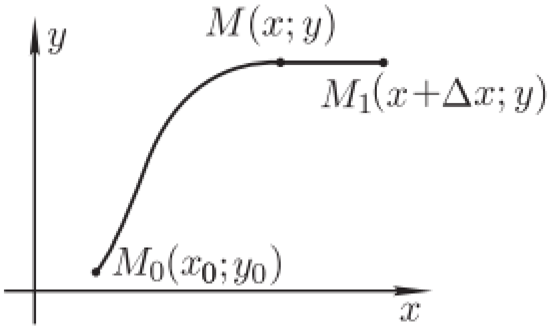


Рис. 17.5. Иллюстрация к доказательству теоремы 5.

Докажем формулу (17.5):

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_0} Pdx + Qdy + \int\limits_{M_0B} Pdx + Qdy$$

$$= -\int\limits_{M_0A} Pdx + Qdy + \int\limits_{M_0B} Pdx + Qdy = -u(A) + u(B).$$

c) $3 \to 1$

Пусть выполнено условие 3, и, следовательно, верна формула (17.5). Возьмем произвольный замкнутый контур $L \subset G$, отметим на нем точку $A = B$. По формуле (17.5) получаем:

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A) = 0.$$

Таким образом, выполнено условие 1.

II. a) $3 \to 4$

Пусть выполнено условие 3, то есть существует $u(x,y)$, такая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

Дифференцируя первое равенство по y, а второе – по x, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, то есть

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Таким образом, выполнено условие 4.

Замечание. Односвязность области G здесь пока не использовалась, она будет использована в доказательстве следующего утверждения.

b) $4 \to 1$

Пусть выполнено условие 4, то есть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в области G, и G – односвязная область. Рассмотрим произвольный замкнутый контур $L \subset G$. В силу односвязности области G область D, ограниченная контуром L, целиком принадлежит области G. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D. По формуле Грина

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Таким образом, выполнено условие 1. Теорема 5 полностью доказана.

ЛЕКЦИЯ 18. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Определение. Множество $\Phi \subset E^3$ называется непрерывной поверхностью, если $\Phi = \{(x, y, z): x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in G\}$, где $G \subset E^2 -$ замкнутая ограниченная область, $\varphi, \psi, \chi \in C(G)$.

Возьмем произвольную точку $M(u, v) \in G$, в пространстве xyz ей соответствует точка $M(x, y, z) = M\big((u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)\big) =: M^{u,v} \in \Phi$. Соответствие осуществляется упорядоченной тройкой функций φ, ψ, χ, иногда ее называют вектор-функцией. Будем называть u, v криволинейными координатами точки M на поверхности Φ. Тем самым у точек поверхности не 3, а в каком-то смысле 2 координаты. Обозначим через L границу области G, а через $\Gamma -$ границу поверхности Φ.

Определение. Точка $M \in \Phi$ называется простой, если $\exists!\ (u, v): M = M^{u,v}$. Если точка не является простой, ее часто называют кратной.

Определение. Непрерывная поверхность Φ называется простой, если все ее точки, за исключением, быть может, граничных, – простые.

Замечание. Если $\varphi(u, v) = u, \psi(u, v) = v$, то $\Phi = \big\{M\big(x, y, z(x, y)\big): (x, y) \in G\big\}$, где $z(x, y) = \chi(x, y)$, то есть Φ является графиком непрерывной функции $z(x, y): O_z = G$, то есть частным случаем параметрически заданной поверхности. В этом случае в роли плоскости параметров выступает плоскость xy, которая находится прямо в нашем пространстве xyz (рис. 18.1).

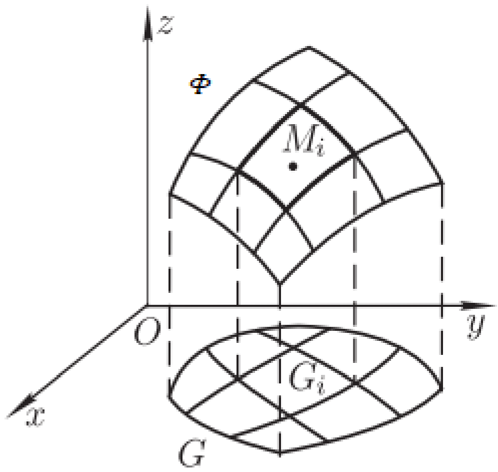


Рис. 18.1. График функции $z(x, y)$.

Определение. Будем говорить, что поверхность Φ задана явно, если Φ представляет собой график функции $x(y, z) \vee y(x, z) \vee z(x, y)$.

Замечание. Если поверхность задана явно, то она простая.

Пусть $\Phi -$ график функции $z(x,y): O_z = G$, при этом $G -$ замкнутая квадрируемая область, $z(x,y) -$ дифференцируема в G, $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, где $\forall i\ G_i -$ квадрируема. Введем обозначение для разбиения $T[G] \coloneqq \{G_1, \dots, G_n\}$, ему отвечает разбиение $\tilde{T}[\Phi] \coloneqq \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$. Произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Phi_i$ соответствует точка $K_i(x_i, y_i) \in G_i$, обозначим через $\Xi(T) \coloneqq \{K_1, \dots, K_n\}$, где ему отвечает разбиение $\tilde{\Xi}(\tilde{T}) \coloneqq \{M_1, \dots, M_n\}$.

Пусть $\pi_i \subset$ касательной плоскости к поверхности Φ в точке M_i, и проекция $Pr_{xy}\pi_i = G_i, \vec{n}_i -$ верхняя нормаль $(\cos\gamma_i > 0)$ к поверхности Φ в точке M_i. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} S(\pi_i) = \sigma(\tilde{T}, \tilde{\Xi}).$$

Введем обозначения: $\Delta_i := diam\, G_i$, $\max \Delta_i \coloneqq \Delta(T) -$ диаметр разбиения T, $\tilde{\Delta}_i = diam\, \Phi_i$, $\max \tilde{\Delta}_i \coloneqq \tilde{\Delta}(\tilde{T}) -$ диаметр разбиения $\tilde{T}$.

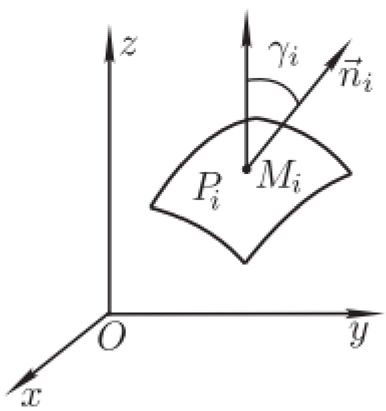


Рис. 18.2. Элемент поверхности Φ_i.

Определение. Если существует $\lim\limits_{\tilde{\Delta}\to 0} \sigma(\tilde{T}, \tilde{\Xi}) \coloneqq S(\Phi)$, то поверхность Φ называется квадрируемой, а число $S(\Phi) -$ площадью поверхности Φ.

Лемма. $S(G_i) = S(\pi_i)\cos\gamma_i$

Доказательство:

Введем дополнительные обозначения:

$\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\} \coloneqq e -$ ОНБ декартовой системы координат xyz;

$\{\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}' \coloneqq \vec{n}_i\} \coloneqq e' -$ ОНБ, где $\vec{\imath}', \vec{\jmath}' \subset \pi_i$;

$\vec{r}_0 \coloneqq \overrightarrow{OM_i}$, $\vec{r}' \coloneqq \overrightarrow{M_iM}, \vec{r} := \overrightarrow{OM}$, где $M(x', y') \in \pi_i -$ произвольная точка, $K(x,y) \in G_i -$ ее проекция. Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

Разложим $\vec{r}_0, \vec{r}', \vec{r}$ по базисам e и e':

$$\vec{r} = eX_e,$$
$$\vec{r}_0 = eX_{0e},$$
$$\vec{r}' = e'X_{e'}.$$

Запишем разность координат векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$:

$$X_e - X_{0e} = C_{ee'}X_{e'}, \tag{18.1}$$

где

$$X_e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X_{0e} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, X_{e'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

и $C_{ee'}$ — ортогональная матрица перехода. Распишем построчно уравнение (18.1):

$$x = C_{11}x' + C_{12}y' + C_{13}z' + x_0,$$
$$y = C_{21}x' + C_{22}y' + C_{23}z' + y_0,$$
$$z = C_{31}x' + C_{32}y' + C_{33}z' + z_0.$$

Заметим, что на плоскости π_i выполняется $z' \equiv 0$. Распишем вектора в базисе e':

$$\vec{i}' = \{C_{11}, C_{21}, C_{31}\}, \vec{j}' = \{C_{12}, C_{22}, C_{32}\}, \vec{k}' = \{C_{13}, C_{31}, C_{33}\}$$
$$= \{\sin\gamma_i \cos\varphi_i, \sin\gamma_i \sin\varphi_i, \cos\gamma_i\}.$$

Получим, что $\pi_i\colon \begin{cases} x = C_{11}x' + C_{12}y' + x_0 \\ y = C_{21}x' + C_{22}y' + y_0 \end{cases}$. Поскольку далее мы будем рассматривать проекцию точки M на плоскость xy, то есть $z = 0$, не будем рассматривать координату z. Учтем, что e' — правый ОНБ, то есть

$$\vec{k}' = [\vec{i}', \vec{j}'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{vmatrix} = \cos\gamma_i = const > 0.$$

Транспонируем определитель $\begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{vmatrix}$ и получим якобиан $\frac{D(x,y)}{D(x',y')}$. Следовательно,

$$S(G_i) = \iint\limits_{G_i} dxdy = \iint\limits_{\pi_i} \left|\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\right| dx'dy' = \cos\gamma_i\, S(\pi_i).$$

Определение. Поверхность $\Phi = \{M(x, y, z(x, y))\colon (x, y) \in G\}$ называется гладкой, если G — замкнутая квадрируемая область, $z \in C^1(G)$ (C^1 — класс непрерывно-дифференцируемых функций).

Теорема 1. Пусть $\Phi = \{M(x, y, z(x, y))\colon (x, y) \in G\}$ — гладкая поверхность, тогда

1) Φ — квадрируема,
2) $S(\Phi) = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}dxdy$.

<u>Доказательство</u>. Надо доказать, что

$$\exists \lim_{\tilde{\Delta}\to 0} \sigma\big(\tilde{T}, \tilde{\Xi}\big) = \iint\limits_G \sqrt{1 + z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)}dxdy \coloneqq \lim_{\Delta\to 0} \sigma(T, \Xi),$$

где $\sigma(T,\Xi) \coloneqq \sum_{i=1}^n F(K_i)S(G_i)$.

Вспомним, что

$$\vec{n}_i = \big\{-z_x(K_i), -z_y(K_i), +1\big\} \Longrightarrow$$

$$\cos\gamma_i = \frac{\big(\vec{n}_i, \vec{k}\big)}{|\vec{n}_i|\big|\vec{k}\big|} = \frac{-z_x(K_i)\cdot 0 - z_y(K_i)\cdot 0 + 1\cdot 1}{\sqrt{z_x^2(K_i) + z_y^2(K_i) + 1}} = \frac{1}{F(K_i)} \underset{\text{лемма}}{\Longrightarrow}$$

$$\sigma(T,\Xi) = \sum_{i=1}^n F(K_i)S(\pi_i)\cos\gamma_i = \sum_{i=1}^n S(\pi_i) =: \sigma\big(\tilde{T}, \tilde{\Xi}\big).$$

Так как $0 \le \Delta(T) \le \tilde{\Delta}\big(\tilde{T}\big)$, то $\tilde{\Delta}\to 0 \Longrightarrow \Delta\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\tilde{\Delta}\to 0} \sigma\big(\tilde{T}, \tilde{\Xi}\big) = \lim_{\Delta\to 0} \sigma(T,\Xi) =: \iint\limits_G \sqrt{1 + z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)}dxdy.$$

Определение. Поверхность $\Phi = \big\{M\big(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\big) \colon (u,v) \in G\big\}$ называется гладкой, если $G -$ замкнутая квадрируемая область, $\varphi, \psi, \chi \in C^1(G)$.

Теорема 1+. Пусть $\Phi = \big\{M\big(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\big) \colon (u,v) \in G\big\} -$ простая гладкая поверхность, тогда

1) $\Phi -$ квадрируема,
2) $S(\Phi) = \iint_G |[\vec{r}_u(u,v), \vec{r}_v(u,v)]|dudv$, где $\vec{r}(u,v) \coloneqq \varphi(u,v)\vec{\imath} + \psi(u,v)\vec{\jmath} + \chi(u,v)\vec{k} -$ радиус-вектор поверхности Φ, $\vec{r}_u = \{\varphi_u, \psi_u, \chi_u\}$, $\vec{r}_v = \{\varphi_v, \psi_v, \chi_v\}$.

ЛЕКЦИЯ 19. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА

Если $\Phi: z(x, y), (x, y) \in G$, функция z имеет непрерывные частные производные 1-го порядка, то $\Phi -$ квадрируема, и

$$S(\Phi) = \iint\limits_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy.$$

Рассмотрим случай параметрически заданной поверхности $\Phi: x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in g$. Пусть $M(x, y, z) \in \Phi$, для радиус-вектора поверхности Φ получим:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \chi(u, v)\vec{k}.$$

Частные производные 1-го порядка вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ выражаются следующими формулами:

$$\vec{r}_u = \varphi_u\vec{i} + \psi_u\vec{j} + \chi_u\vec{k},$$
$$\vec{r}_v = \varphi_v\vec{i} + \psi_v\vec{j} + \chi_v\vec{k}.$$

Из геометрических (и также физических) соображений ясно, что вектор $\vec{r}_u(u, v)$ является касательным вектором к линии $v = const$ в точке $M\big(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)\big)$ (см. рис. 19.1), а вектор $\vec{r}_v(u, v) -$ касательным вектором к линии $u = const$ в точке M. Поэтому векторы $\vec{r}_u(u, v)$ и $\vec{r}_v(u, v)$ лежат в касательной плоскости к поверхности Φ в точке M. Следовательно, вектор $\vec{n} = [\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)]$ является вектором нормали к поверхности Φ в точке M.

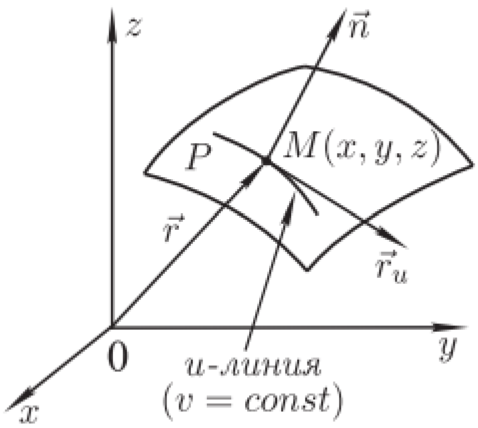
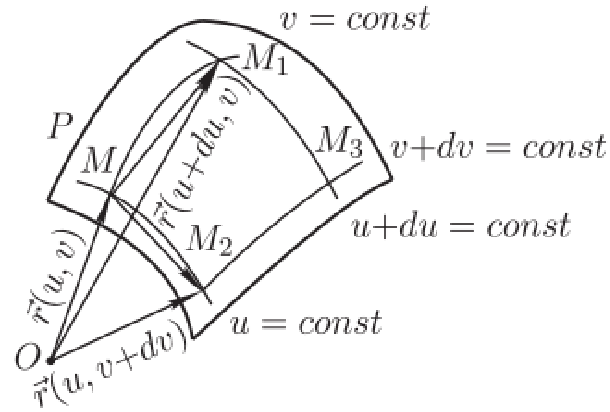


Рис. 19.1. Линия $u = const$.

Оказывается, что

$$S(\Phi) = \iint\limits_g |[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]| dudv.$$



$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+du, v) - \vec{r}(u, v) = \vec{r}_u du$$
$$\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}(u, v+dv) - \vec{r}(u, v) = \vec{r}_v dv$$

Рис. 19.2. Пары близких координатных линий.

Рассмотрим на поверхности Φ две пары близких координатных линий (рис. 19.2). Они ограничивают криволинейный четырехугольник $MM_1M_3M_2$ – «элемент» поверхности Φ. Вычислим приближенно его площадь dS, заменив криволинейный четырехугольник параллелограммом, построенным на векторах $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_u du$ и $\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_v dv$ $(du > 0, dv > 0)$:

$$dS = \left|\left[\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2}\right]\right| = |[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]| du dv.$$

Суммируя по всем «элементам» поверхности Φ, приходим к формуле площади поверхности, заданной параметрически:

$$S(\Phi) = \iint\limits_{g} |[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]| du dv. \tag{19.1}$$

Вычислим векторное произведение

$$[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= A(u, v)\vec{i} + B(u, v)\vec{j} + C(u, v)\vec{k} \Longrightarrow$$
$$|[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Формула для площади принимает вид:

$$S(\Phi) = \iint\limits_{g} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv.$$

(19.2)

Векторное произведение перепишем в виде

$$|[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]| = |\vec{r}_u||\vec{r}_v| \sin\alpha = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

где $E = \vec{r}_u^{\,2} = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2, G = \vec{r}_v^{\,2} = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2, F = (\vec{r}_u\vec{r}_v) = \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v + \chi_u\chi_v$. Тогда формула (19.1) предстанет в другом виде:

$$S(\Phi) = \iint\limits_{g} \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

(19.3)

Замечание 1. Формулы (19.2), (19.3) верны при следующих условиях: функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные первого порядка в g, различным внутренним точкам (u, v) области g соответствуют различные точки (φ, ψ, χ) поверхности Φ, а коэффициенты A, B и C не обращаются одновременно в нуль, то есть $\forall(u, v) \in g$: $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ($\Longrightarrow |\vec{r}_u| \neq 0, |\vec{r}_v| \neq 0$).

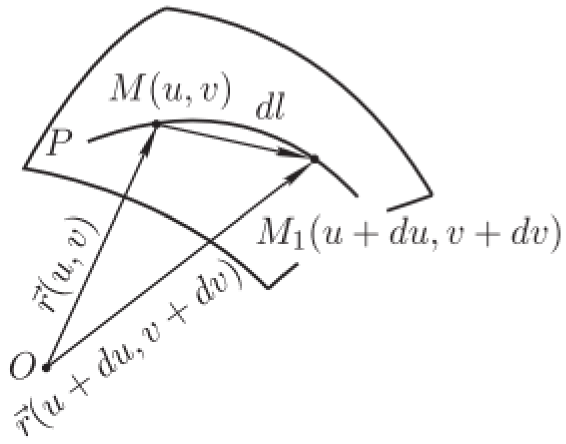


Рис. 19.3. Поверхность Φ.

Замечание 2. Рассмотрим на поверхности Φ две близкие точки $M(u, v)$ и $M_1(u + du, v + dv)$ (рис. 19.3), через которые по поверхности проходит кривая. Вычислим приближенно длину dl «элемента» дуги кривой, заменив его отрезком MM_1:

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u + du, v + dv) - \vec{r}(u, v) = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Тогда

$$dl = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = |\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv| = \sqrt{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2} = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}(du)^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^{\,2}(dv)^2}$$
$$= \sqrt{E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2},$$

где под корнем стоит квадратичная форма от $du, dv,$ она называется первой квадратичной формой поверхности. С помощью первой квадратичной формы вычисляются на поверхности площади, длины кривых и углы между кривыми. Матрица первой квадратичной формы имеет вид $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, ее угловые миноры равны $E > 0$ и $EG - F^2 > 0$. Так как оба угловых минора положительны, то по формуле Сильвестра, эта квадратичная форма положительно определенная.

Пусть кривая AB на поверхности задана параметрически уравнениями $u = u(t), v = v(t), \alpha \leq t \leq \beta$ (рис. 19.4), то ее длина выражается формулой:

$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}.$$

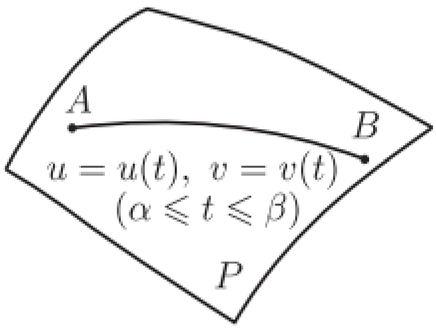


Рис. 19.4. Параметрическая кривая.

Пример. Рассмотрим сферу, заданную параметрически:

$$x = R\sin u \cos v\,, y = R\sin u \cos v\,, z = R\cos u,$$

где $R = const > 0, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$. Коэффициенты:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = R^2\cos^2 u \cos^2 v + R^2\cos^2 u\, sin^2 v + R^2\, sin^2 v = R^2,$$

$$G = \vec{r}_v^{\,2} = R^2\, sin^2 u\, sin^2 v + R^2\, sin^2 u \cos^2 v + 0 = R^2\, sin^2 u,$$

$$F = (\vec{r}_u \vec{r}_v) = 0,$$

следовательно, $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin u$ и

$$S(\Phi) = \iint_g R^2 \sin u\, dudv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} R^2 \sin u\, du = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin u\, du = 4\pi R^2.$$

Поверхностные интегралы первого рода

Пусть $\Phi -$ квадрируемая поверхность, заданная явным уравнением или параметрически, и пусть на поверхности Φ определена ограниченная функция $f(x, y, z) = f(M)$. Разобьем поверхность Φ на n квадрируемых частей: $\Phi = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i$

площадей $S(\Phi_i)$, на каждой части Φ_i возьмем произвольную точку M_i и составим интегральную сумму

$$I(\Phi_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S(\Phi_i).$$

Обозначим через $d_i = diam\,\Phi_i$, $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Если существует $\lim\limits_{d \to 0} I(\Phi_i, M_i) = I,$ то число I называется поверхностным интегралом 1-го рода от $f(M)$ по поверхности Φ и обозначается:

$$I = \iint\limits_{\Phi} f(M) ds.$$

<u>Пример</u>.

1) $f(M) = 1 \Longrightarrow \iint_{\Phi} ds = S(\Phi)$;
2) Если Φ – заряженная поверхность и $\rho(M) -$ поверхностная плотность заряда в точке M, то $\iint_{\Phi} \rho(M) ds = q -$ суммарный заряд поверхности Φ.

Теорема 2. Пусть:

1) поверхность $\Phi: z = z(x, y), (x, y) \in G$, где $G -$ квадрируемая замкнутая область, а функция $z(x, y)$ имеет в области G непрерывные частные производные 1-го порядка (то есть $\Phi -$ гладкая поверхность);

2) функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности Φ.

Тогда поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ существует, и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z) ds = \iint\limits_{G} f\big(x, y, z(x, y)\big) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy. \tag{19.4}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 в лекции о криволинейных интегралах.

<u>Пример</u>. Вычислить $I = \iint_{\Phi} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, где $\Phi: z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in G = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$ (рис. 19.5). По формуле (19.4) получаем

$$I = \iint\limits_{G} (x^2 + y^2 + x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = 2\sqrt{2} \iint\limits_{G} (x^2 + y^2) dxdy$$
$$= \pi\sqrt{2}.$$

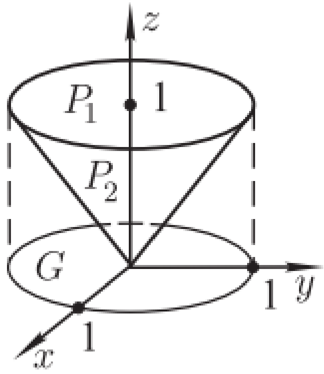


Рис. 19.5. Пример.

Если гладкая поверхность задана параметрически $\Phi: x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in g$, то поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)ds = \iint\limits_{G} f(\varphi, \psi, \chi)\sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Поверхностные интегралы второго рода

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y), (x, y) \in G,$ то на основе наглядных представлений можно различать у нее верхнюю и нижнюю стороны. У поверхности, ограничивающей некоторое тело, например у сферы, можно различать внешнюю и внутреннюю стороны. Введем понятие стороны поверхности.

Пусть $\Phi -$ поверхность, в каждой точке которой существует касательная плоскость. Вектор нормали к поверхности Φ в точке M обозначим. Поскольку вектор $\vec{n}(M)$ можно задать в каждой точке M поверхности Φ, то можем считать, что $\vec{n}(M), M \in \Phi$ – вектор-функция на поверхности Φ. Пусть она будет непрерывной на всей поверхности Φ, то есть в каждой точке поверхности непрерывны координаты вектор-функции. В таком случае будем говорить, что если на поверхности Φ существует непрерывное векторное поле нормалей, то под стороной поверхности будем понимать множество всех ее точек с заданными в них векторами нормали $\vec{n}(M)$, образующими непрерывное векторное поле нормалей. Отметим, что в этом случае вектор-функция $-\vec{n}(M), M \in \Phi$ также задает непрерывное векторное поле нормалей. Будем считать, что это поле нормалей относится к другой стороне поверхности.

Поверхность, на которой существует непрерывное векторное поле нормалей, называется двусторонней. Существуют поверхности, на которых нет непрерывного векторного поля нормалей (при наличии вектора нормали в каждой точке поверхности), такие поверхности называются односторонними.

Классическим примером односторонней поверхности является лист Мебиуса. Его можно изготовить из прямоугольной полоски бумаги, повернув ее узкие стороны и склеив их так, чтобы совпадали вершины прямоугольника, являющиеся концами одной и той же диагонали (рис. 19.6).

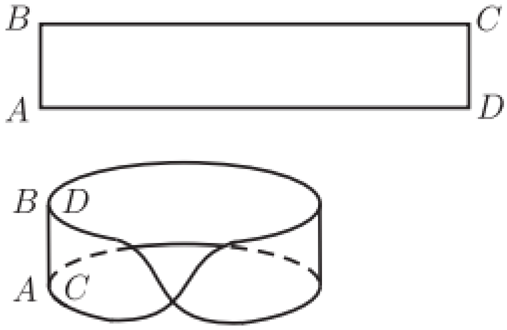


Рис. 19.6. Лист Мебиуса.

ЛЕКЦИЯ 20. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ II РОДА

Если гладкая поверхность задана явно $\Phi: z = f(x,y), (x,y) \in G$, то на одной стороне поверхности непрерывное векторное поле нормалей можно задать вектор–функцией $\vec{n}(M) = \{-f_x(x,y), -f_x(x,y), 1\}$, где $M(x,y,f(x,y))$ (верхняя сторона поверхности), а на другой стороне – вектор-функцией $-\vec{n}(M) = \{f_x(x,y), f_x(x,y), -1\}$.

Если гладкая двусторонняя поверхность задана параметрически $\Phi: x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), (u,v) \in g$, то на одной стороне непрерывное векторное поле нормалей можно задать вектор-функцией $\vec{n}(M) = \{A, B, C\}$, а на другой стороне – вектор-функцией $-\vec{n}(M) = \{-A, -B, -C\}$.

Двусторонняя поверхность называется также ориентируемой, а выбор определенной стороны называется ориентацией поверхности.

Понятия двусторонней и односторонней поверхности можно ввести и для кусочно-гладких поверхностей (то есть поверхностей, составленных из нескольких гладких поверхностей). Примером кусочно-гладкой двусторонней поверхности является поверхность параллелепипеда.

Определение поверхностных интегралов второго рода

Пусть Φ – гладкая двусторонняя поверхность. Выберем на ней одну из сторон, то есть зафиксируем непрерывное поле нормалей $\vec{n}(M)$. Обозначим через $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$ углы между вектором $\vec{n}(M)$ и осями координат. Если $|\vec{n}(M)| = 1$, то $\vec{n}(M) = \{cos\ \alpha(M), cos\ \beta(M), cos\ \gamma(M)\}$.

Пусть на поверхности Φ определены три функции: $P(M), Q(M), R(M)$. Рассмотрим поверхностные интегралы первого рода:

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} P(M)\cos\alpha(M)ds,$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} Q(M)\cos\beta(M)ds,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} R(M)\cos\gamma(M)ds.$$

Интегралы I_1, I_2, I_3 называются поверхностными интегралами второго рода от функций P, Q, R по выбранной стороне поверхности Φ. Если выбрать другую сторону поверхности, то вектор

$\vec{n}(M)$ во всех точках изменит направление, поэтому его координаты $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ изменят знак, следовательно, интегралы I_1, I_2, I_3 изменят знак. В этом отношении поверхностные интегралы второго рода аналогичны криволинейным интегралам второго рода, которые изменяют знак при изменении направления движения по кривой.

Для интегралов I_1, I_2, I_3 используются также следующие обозначения:

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} P(M)dydz,$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} Q(M)dzdx,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} R(M)dxdy.$$

Смысл этих обозначений состоит в том, что $dydz = dS \cdot \cos\alpha$ – площадь проекции элемента поверхности с площадью dS на плоскость Oyz, и аналогично $dzdx = dS \cdot \cos\beta$ и $dxdy = dS \cdot \cos\gamma$.

Сумма

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \iint\limits_{\Phi} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

называется общим поверхностным интегралом второго рода. Введем вектор $\vec{a}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, тогда общий интеграл I можно переписать в виде:

$$I = \iint\limits_{\Phi} (\vec{a} \cdot \vec{n})dS,$$

его также называют потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность Φ.

<u>Физический пример</u>.

Пусть некоторая область в пространстве занята движущейся жидкостью, $\vec{v}(M)$ – скорость течения жидкости в точке M. Будем считать поток стационарным. Рассмотрим элементарный столб жидкости (рис. 20.1), его объем выражается формулой:

$$dV = (\vec{a} \cdot \vec{n})dS,$$

это есть не что иное, как поток жидкости через элемент поверхности с площадью dS. Тогда поток жидкости через всю поверхность (объем жидкости, протекающей через поверхность Φ за единицу времени):

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS.$$

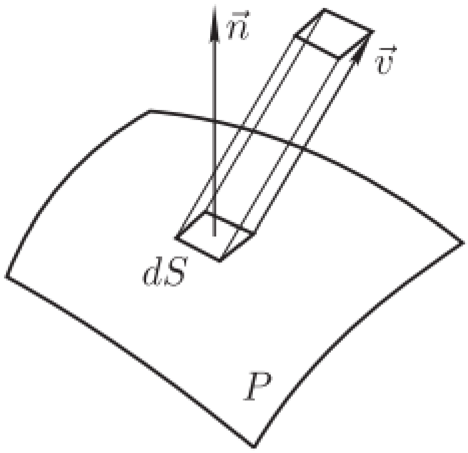


Рис. 20.1. Физический пример.

Вычисление поверхностных интегралов второго рода

1) Пусть гладкая поверхность $\Phi\colon z = f(x, y), (x, y) \in G$. Выберем, например, верхнюю сторону поверхности Φ, на которой $\vec{n}(M) = \{-f_x(x, y), -f_x(x, y), 1\}$. Тогда

$$\cos\alpha(M) = -\frac{f_x(x, y)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$\cos\beta(M) = -\frac{f_y(x, y)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$\cos\gamma(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

По формуле (19.4) получаем:

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} P(x, y, z) \cos\alpha(M)\, dS$$

$$= -\iint\limits_{G} P\big(x, y, f(x, y)\big) \frac{f_x(x, y)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$$

$$= -\iint\limits_{G} P\big(x, y, f(x, y)\big) f_x(x, y) dxdy,$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} Q(x, y, z) \cos\beta(M)\, dS = -\iint\limits_{G} Q\big(x, y, f(x, y)\big) f_y(x, y) dxdy,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\cos\gamma(M)\,dS = \iint\limits_{G} R\big(x,y,f(x,y)\big)dxdy.$$

2) Пусть гладкая двусторонняя поверхность задана параметрически $\Phi: x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), (u,v) \in g$. Выберем ту сторону поверхности, на которой $\vec{n}(M) = \{A, B, C\}$. Тогда

$$\cos\alpha(M) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\beta(M) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma(M) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

По формуле (19.2) получаем:

$$I_1 = \iint\limits_{g} P(\varphi,\psi,\chi)\frac{A(u,v)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

$$= \iint\limits_{g} P(\varphi,\psi,\chi)A(u,v)dudv,$$

$$I_2 = \iint\limits_{g} Q(\varphi,\psi,\chi)A(u,v)dudv,$$

$$I_3 = \iint\limits_{g} R(\varphi,\psi,\chi)C(u,v)dudv.$$

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Phi} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

по внешней стороне эллипсоида $\Phi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Перейдем к параметрическим уравнениям эллипсоида:

$$x = a\sin u\cos v\,, y = b\sin u\sin v\,, z = c\cos u\,, (u,v) \in g = \{0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi\}.$$

Вычислим координаты вектора нормали:

$$\vec{n} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = A(u,v)\vec{i} + B(u,v)\vec{j} + C(u,v)\vec{k},$$

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b\cos u\sin v & -c\sin u \\ b\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = bc\sin^2 u\cos v,$$

$$B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c\sin u & a\cos u\cos v \\ 0 & -a\sin u\sin v \end{vmatrix} = ac\sin^2 u\sin v,$$

$$C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos u\cos v & b\cos u\sin v \\ -a\sin u\sin v & b\sin u\cos v \end{vmatrix} = ab\sin u\cos u.$$

Интеграл I принимает вид:

$$I = \frac{1}{3}\iint\limits_{g} (xA + yB + zC)dudv$$

$$= \frac{1}{3}abc\iint\limits_{g} (\sin^3 u\cos^2 v + \sin^3 u\sin^2 v + \sin u\cos^2 u)dudv$$

$$= \frac{1}{3}abc\iint\limits_{g} \sin u\, dudv = \frac{1}{3}abc\int\limits_0^{2\pi} dv\int\limits_0^{\pi} \sin u\, du = \frac{4}{3}\pi abc.$$

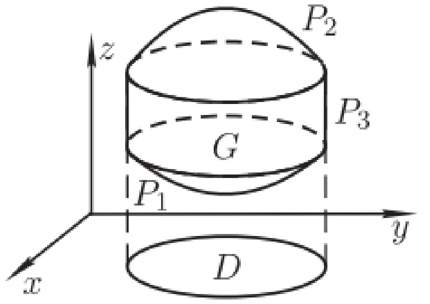
Мы получили объем тела, ограниченного эллипсоидом. Этот результат не случайный. В следующем параграфе будет получена формула Остроградского-Гаусса, из которой следует, что объем любого тела, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью Φ, вычисляется с помощью такого же поверхностного интеграла, как в рассмотренном примере:

$$V(T) = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Phi} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Формула Остроградского–Гаусса

Пусть функции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ определены и непрерывны в ограниченной связной замкнутой области D, причем $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ $(x,y) \in D$. Область $G = \{(x,y,z): (x,y) \in D, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ назовем «z-цилиндрической» (рис. 20.2). Аналогично определяются «x-цилиндрическая» и «y-цилиндрическая» области.

Область G назовем простой, если ее можно представить в виде объединения конечного числа «x-цилиндрических» областей, и также «y-цилиндрических» областей, и «z-цилиндрических» областей.



P_1: $z = z_1(x, y)$, P_2: $z = z_2(x, y)$,
P_3 — *цилиндрическая поверхность*

Рис. 20.2. «z-цилиндрическая» область.

Границу области G, то есть ограничивающую ее поверхность, будем обозначать буквой Φ.

Теорема 3. Пусть $G -$ простая область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Φ, в области G заданы функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$, причем они и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в G. Тогда справедливо равенство

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_\Phi (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS, \tag{20.1}$$

где α, β, γ – углы между вектором внешней нормали $\vec{n}(M)$ и осями координат.

Формула (20.1) называется формулой Остроградского-Гаусса. Она была получена М.В. Остроградским в 1827 году в связи с рассмотрением задачи о распространении тепла в твердом теле. Гаусс получил эту формулу ранее в частном случае, когда $P = x, Q = y, R = z$.

<u>Следствие</u>. Если $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то получим выражение для объема области G через поверхностный интеграл:

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_\Phi (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS.$$

В частности при $P = \frac{1}{3}x, Q = \frac{1}{3}y, R = \frac{1}{3}z$ для объема области G получим формулу:

$$V(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_\Phi (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS = \frac{1}{3}\iint\limits_\Phi xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Введем вектор $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и скалярную функцию $div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, которая называется дивергенцией. Тогда формулу Остроградского-Гаусса можно переписать в виде:

$$\iiint\limits_{G} div\,\vec{a}\,dxdydz = \iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})dS.$$

Формула Стокса

Рассмотрим кусочно-гладкую двустороннюю поверхность Φ, которая ограничена контуром L. Выберем одну из сторон поверхности, то есть ориентируем поверхность. Введем положительное направление обхода контура L, соответствующее ориентации поверхности, следующим образом: если наблюдатель находится на выбранной стороне поверхности (то есть направление от ног к голове совпадает с направлением вектора нормали), то при обходе контура в положительном направлении он оставляет поверхность слева от себя (рис. 20.3).

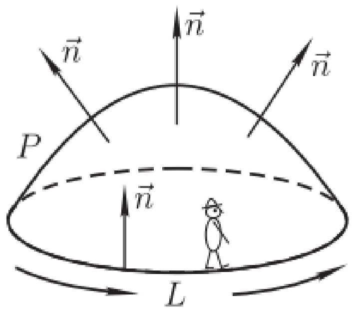


Рис. 20.3. Положительное направление обхода контура L.

Если граница поверхности состоит из нескольких контуров, то для каждого из них положительное направление обхода определяется таким же образом. Выбор положительного направления обхода контура называется также согласованием ориентации контура с ориентацией поверхности.

Определение. Поверхность Φ называется «xyz-проектируемой», если она взаимно однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Простейшим примером такой поверхности является плоский треугольник ABC, изображенный на рис. 20.4.

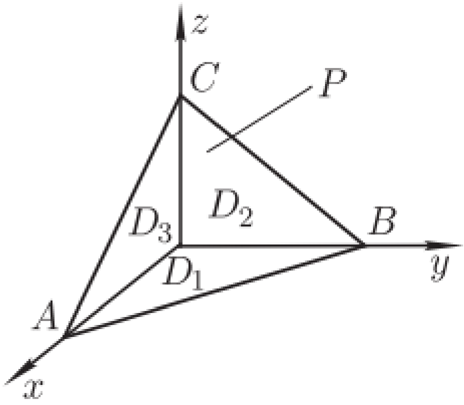


Рис. 20.4. Пример «xyz-проектируемой» поверхности.

Если поверхность Φ «xyz-проектируема», то ее можно задать любым из трех уравнений вида:

$$z = f_1(x, y), (x, y) \in D_1,$$
$$x = f_2(y, z), (y, z) \in D_2,$$
$$y = f_3(x, z), (x, z) \in D_3.$$

В дальнейшем будем считать, что при этом функции f_1, f_2, f_3 непрерывно дифференцируемы.

Теорема 4. Пусть

1) функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в области G;

2) гладкая «xyz-проектируемая» поверхность Φ, ограниченная кусочно-гладким контуром L, расположена внутри области G.

Тогда справедливо равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_{\Phi} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) cos\,\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) cos\,\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) cos\,\beta\right] dS, \tag{20.2}$$

где ориентация контура L согласована с ориентацией поверхности Φ, $\vec{n} = \{cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\} -$ вектор нормали на выбранной стороне поверхности. Формула (20.2) называется формулой Стокса.

<u>Замечание</u>. Если поверхность Φ является плоской областью, лежащей, например, в плоскости xy, то формула Стокса переходит в формулу Грина.

ЛЕКЦИЯ 21. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

На прошлой лекции мы записали формулу Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint_{\Phi} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] dS.$$

Введем вектор-функции: $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и ротор $\vec{a}$

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Тогда формулу Стокса можно переписать в виде:

$$\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \iint_{\Phi} (rot\,\vec{a} \cdot \vec{n}) dS.$$

Эта формула читается так: циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль контура L равна потоку векторного поля $rot\,\vec{a}(M)$ через выбранную сторону поверхности Φ, ограниченную контуром L.

Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве

Теорема 5.

I. Пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ определены и непрерывны в области G. Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура L, расположенного в области G, справедливо равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

2. Для любых двух точек A и B области G криволинейный интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования, расположенного в области G.

3. Выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом, то есть в области G существует функция $u(x,y,z)$: $du = Pdx + Qdy + Rdz$. При этом для любой кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в области G, имеет место равенство:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

II. Если функции P, Q, R имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка, и область G является поверхностно-односвязной, то каждое из условий 1–3 эквивалентно условию 4:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ в области } G,$$

или $rot\,\vec{a} = 0$.

Область G называется поверхностно-односвязной, если для любого замкнутого контура $L \subset G$ существует поверхность $\Phi \subset G$ с границей L.

Пример. Шар, параллелепипед, область между двумя концентрическими сферами – поверхностно-односвязные области; тор не является поверхностно-односвязной областью.

Доказательство проводится по схеме:

I. $1 \to 2 \to 3 \to 1$;
II. $3 \to 4 \to 1$.

Геометрические приложения дифференциального исчисления

С помощью дифференциального исчисления мы умеем находить точки локального экстремума функции, промежутки монотонности, направление выпуклости, точки перегиба и асимптоты графиков функций. Здесь мы рассмотрим применение дифференциального исчисления к другим геометрическим вопросам: касание плоских кривых, огибающая семейства кривых, кривизна плоской кривой.

Касание плоских кривых

Если две кривые L_1 и L_2 имеют общую точку M_0 и общую касательную в этой точке, то говорят, что эти кривые касаются в точке M_0 (рис. 21.1).

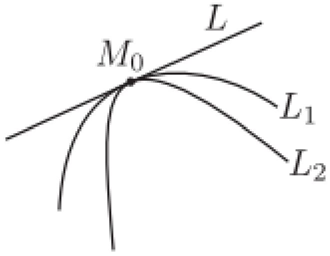


Рис. 21.1. Соприкасающиеся кривые.

Пусть кривые L_1 и L_2 являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и пусть они касаются в точке $M_0(x_0, f_1(x_0))$ (рис. 21.2). Пусть n — натуральное число.

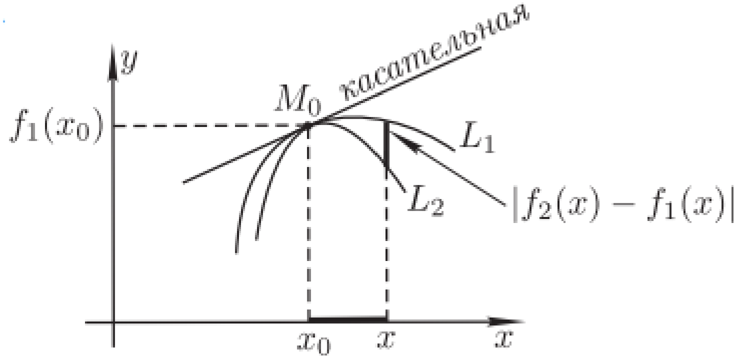


Рис. 21.2. Касательная.

Определение. Если существует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f_2(x) - f_1(x)|}{|x - x_0|^{n+1}} \neq 0, \tag{21.1}$$

то говорят, что порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен n. Если предел (21.1) равен нулю, то говорят, что порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 выше n. Если порядок касания выше любого n, то говорят, что порядок касания бесконечный.

Примеры.

1) Пусть $L_1: y = \sin x$ и $L_2: y = x$. Определим порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке $M_0(0,0)$. Запишем предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x - x|}{|x|^{n+1}} = \begin{cases} 0, n < 2 \\ \frac{1}{3}, n = 2, \\ \infty, n > 2 \end{cases}$$

откуда по определению следует, что порядок касания $n = 2$.

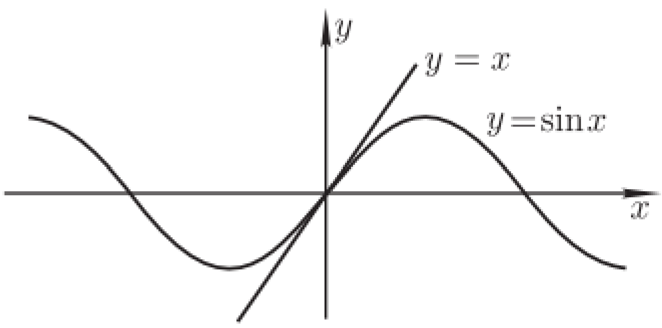


Рис. 21.3. Пример 1.

2) Пусть $L_1: y = 0$ и $L_2: y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$. Убедитесь, что порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке $M_0(0,0)$ равен бесконечности.

Особые точки кривых

Кривая на плоскости Oxy может быть задана тремя способами:

1) явно, то есть уравнением вида $y = f(x)$ или $x = f(y)$;
2) неявно, то есть уравнением вида $F(x, y) = 0$;
3) параметрически, то есть уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t -$ параметр, принимающий значения из некоторого промежутка.

В случае неявного или параметрического задания кривая может иметь особые точки. Пусть кривая задана неявно $L: F(x, y) = 0$, и точка $M_0 \in L$, то есть $F(x_0, y_0) = 0$. В дальнейшем будем считать, что функции, входящие в уравнения кривых, непрерывно дифференцируемы, то есть имеют непрерывные производные первого порядка.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0) \in L$ называется особой (обыкновенной), если

$$F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) = 0 \ (\neq 0).$$

Пусть $M_0(x_0, y_0) \in L -$ обыкновенная точка, пусть $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Так как $M_0 \in L$, то $F(x_0, y_0) = 0$. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки M_0 уравнение $F(x, y) = 0$ имеет единственное решение относительно y: $y = f(x)$. Тем самым кривую L в этой окрестности можно задать явным уравнением $y = f(x)$. При этом функция $f(x)$ дифференцируема, и

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x)}. \tag{21.2}$$

Если же $M_0(x_0, y_0) \in L -$ особая точка, то в ее окрестности кривая может не иметь явного уравнения.

<u>Пример</u>. Пусть $L: x^2 - y^2 = 0$ и $M_0(0,0) \in L$. Кривая L представляет собой две прямые, пересекающихся в точке $M_0(0,0)$ (рис. 21.4). Очевидно, что в окрестности точки M_0 наша кривая не имеет явного уравнения.

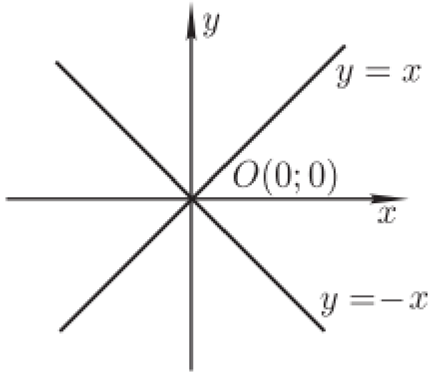


Рис. 21.4. Пример.

Пусть $L: x = \varphi(t), y = \psi(t)$, и $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0)) -$ обыкновенная точка, то есть $\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) \neq 0$. Пусть, например, $\varphi'^2(t_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности

$\varphi'(t_0) \neq 0$ и сохраняет знак в некоторой окрестности точки t_0, следовательно, функция $x = \varphi(t) -$ строго монотонная в этой окрестности точки t_0 и, значит, имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставив ее в уравнение $y = \psi(t)$, получим явное уравнение кривой L: $y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) =: f(x)$ в некоторой окрестности точки $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$. При этом функция $f(x)$ дифференцируема, и

$$f'(x) = -\left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{21.3}$$

Если же $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0)) -$ обыкновенная точка, то есть $\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) = 0$, то в окрестности M_0 кривая может не иметь явного задания.

Огибающая семейства плоских кривых

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, a) = 0. \tag{21.4}$$

Пусть для любого значения переменной a (из некоторого промежутка) уравнение (21.4) задает неявно некоторую кривую на плоскости Oxy. Изменяя a (в пределах указанного промежутка), будем получать различные кривые. Совокупность всех этих кривых называется однопараметрическим семейством кривых, переменная a называется параметром, а уравнение (21.4) – уравнением однопараметрического семейства кривых.

Пример. Уравнение $y - (x - a)^2 = 0, a \in R$ задает однопараметрическое семейство парабол (рис. 21.5). Заметим, что ось Ox касается всех парабол семейства.

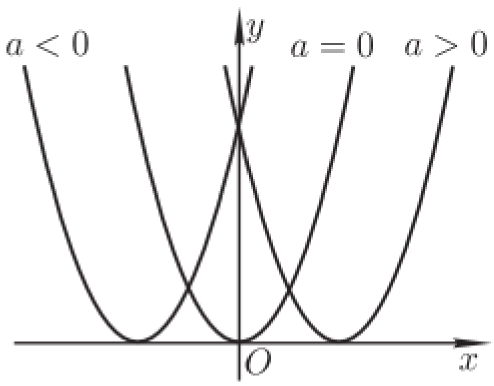


Рис. 21.5. Пример.

Определение. Кривая, которая в каждой своей точке касается и притом только одной кривой данного семейства, а в различных точках касается различных кривых семейства, называется огибающей данного семейства кривых. (В рассмотренном примере ось Ox (прямая $y = 0$) – огибающая семейства парабол.)

Необходимое условие огибающей

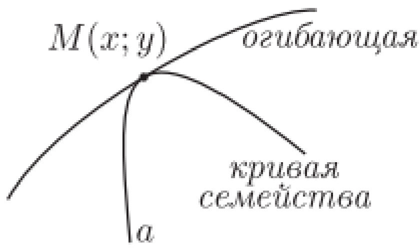


Рис. 21.6. Огибающая и кривая семейства.

Пусть однопараметрическое семейство кривых, заданное уравнением (21.4), имеет огибающую L. Рассмотрим точку $M(x,y)$ на огибающей (рис. 21.6), в этой точке огибающая касается только одной кривой семейства, в свою очередь этой кривой соответствует некоторое значение параметра a, причем различные точки огибающей соответствуют различным значениям a. Следовательно, координаты точки $M(x,y)$ огибающей являются функциями параметра a, обозначим их так:

$$x = \varphi(a), y = \psi(a).$$

Выведем уравнения, которым удовлетворяют эти функции. Так как точка $M\big(\varphi(a), \psi(a)\big) \in$ кривой семейства, то ее координаты удовлетворяют уравнению (21.4):

$$F(\varphi(a), \psi(a), a) = 0. \tag{21.5}$$

Равенство (11.6) выполняется для любого значения a, то есть является тождеством. Продифференцируем его по a:

$$F_x\varphi'(a) + F_y\psi'(a) + F_a\Big|_{\substack{x=\varphi(a)\\ y=\psi(a)}} = 0. \tag{21.6}$$

Так как огибающая и кривая семейства касаются в точке $M\big(\varphi(a), \psi(a)\big)$, то они имеют в этой точке общую касательную, и, значит, одинаковые угловые коэффициенты касательной. Приравнивая угловые коэффициенты касательной для огибающей и для кривой семейства в точке $M\big(\varphi(a), \psi(a)\big)$, получаем равенства:

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{F_x(x,y,a)}{F_y(x,y,a)}\Bigg|_{\substack{x=\varphi(a)\\ y=\psi(a)}}.$$

Откуда следует, что

$$F_x\varphi'(a) + F_y\psi'(a)\Big|_{\substack{x=\varphi(a)\\ y=\psi(a)}} = 0. \tag{21.7}$$

В силу (21.7) равенство (21.6) принимает вид:

$$F_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0. \tag{21.8}$$

Таким образом, если семейство кривых (21.4) имеет огибающую, то функции $x = \varphi(a), y = \psi(a)$, задающие эту огибающую, удовлетворяют равенствам (21.5) и (21.8), то есть эти функции являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} F(\varphi(a), \psi(a), a) = 0 \\ F_a(\varphi(a), \psi(a), a) = 0' \end{cases} \qquad (21.9)$$

это и есть необходимое условие огибающей.

Если система (21.9) не имеет решения относительно x и y, то у семейства кривых (21.4) огибающей нет. Если же система (21.9) имеет решение $x = \varphi(a), y = \psi(a)$, то эти функции могут описывать огибающую, но могут быть и уравнениями кривой, которая не является огибающей. Дело в том, что равенство (21.7) выполняется также и в том случае, когда либо

$$F_y(\varphi(a), \psi(a), a) = F_x(\varphi(a), \psi(a), a) = 0,$$

либо

$$\varphi'(a) = \psi'(a) = 0.$$

В первом случае $M\big(\varphi(a), \psi(a)\big)$ является особой точкой кривой семейства, во втором случае – особой точкой кривой, заданной уравнениями $x = \varphi(a), y = \psi(a)$.

Решение $x = \varphi(a), y = \psi(a)$ системы (21.9) называется дискриминантной кривой семейства кривых (21.4). Таким образом, дискриминантная кривая может быть либо огибающей, либо множеством особых точек, либо частично тем, частично другим.

Примеры.

1) Рассмотрим уравнение $(x-a)^3 - (y-a)^2 = 0, a \in R$. При $a = 0$ мы получаем $y = \pm x^{3/2}$.

Таким образом, уравнение задает семейство кривых, называемых полукубическими параболами. Запишем производную $F_a = -3(x-a)^2 + 2(y-a) = 0$. Полученная система имеет два решения:

$$L_1: x = a, y = a \leftrightarrow L_1: y = x;$$

$$L_2: x = a + \frac{4}{9}, y = a + \frac{8}{27} \leftrightarrow L_2: y = x - \frac{4}{27}.$$

Дискриминантная кривая данного семейства кривых представляет собой две параллельные прямые.

В кривой $L_1: F_x = F_y = 0$, то есть эта прямая является множеством особых точек кривых семейства, а прямая L_2 является огибающей (рис. 21.7).

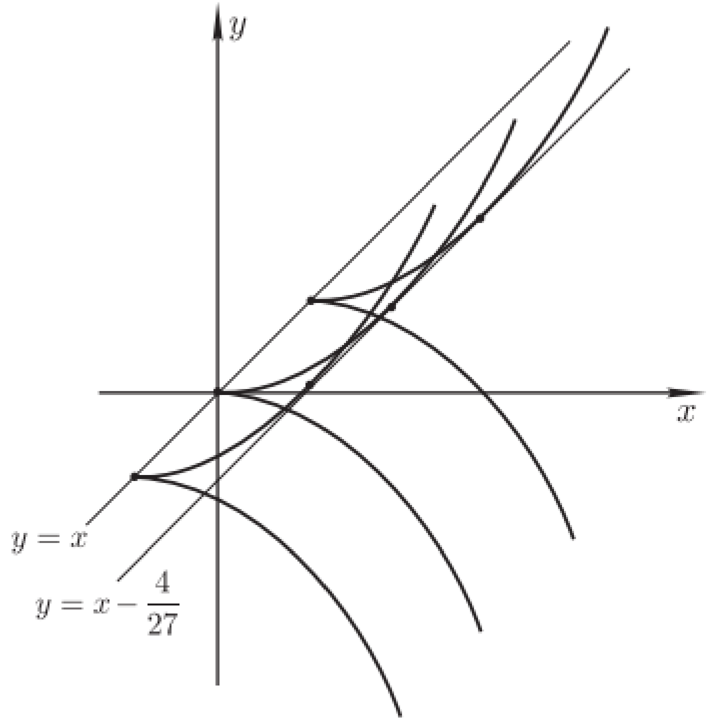


Рис. 21.7. Пример 1.

Замечание. Понятие огибающей используется в теории дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Оно называется дифференциальным уравнением первого порядка, и задача состоит в том, чтобы найти все функции $y = y(x)$, удовлетворяющие этому уравнению. В курсе дифференциальных уравнений будет доказано, что общее решение данного уравнения зависит от одной произвольной постоянной: $y = \Phi(x, a)$, где a- произвольная постоянная, а функция Φ определяется правой частью уравнения, то есть функцией $f(x, y)$. это семейство кривых имеет огибающую, то она является графиком, так называемого, особого решения дифференциального уравнения.

Кривизна плоской кривой

Рассмотрим плоскую кривую, изображенную на рис. 21.8, выделим на ней два участка одинаковой длины (I и II). Наглядно видно, что искривленность на участке II больше, чем на участке I. Наша задача состоит в том, чтобы ввести количественную характеристику искривленности плоской кривой (меру искривленности). Эту меру искривленности мы назовем в дальнейшем кривизной плоской кривой.

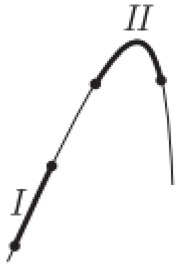


Рис. 21.7. Кривая.

Рассмотрим кривую L, в каждой точке которой существует касательная. Будем рассматривать в каждой точке направленную касательную. За направление касательной примем то, которое соответствует направлению движения точки по кривой, и будем отмечать его стрелкой. Отметим на кривой точки M_0 и M_1 (рис. 21.8). Обозначим через $\Delta\varphi$ угол, на который повернется направленная касательная при движении по кривой L из точки M_0 в точку M_1. Будем считать $\Delta\varphi \geq 0$. Через Δl обозначим длину дуги M_0M_1. Ясно, что чем больше искривленность участка M_0M_1 кривой L, тем на больший угол $\Delta\varphi$ повернется касательная, и наоборот, чем больше угол $\Delta\varphi$ (при заданной длине дуги M_0M_1), тем больше искривленность участка кривой M_0M_1. Эти наглядные представления положим в основу определения кривизны кривой.

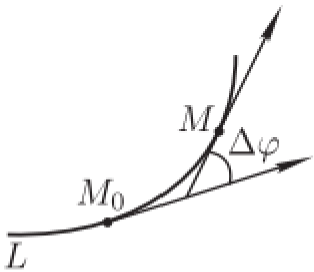


Рис. 21.8. Иллюстрация к определению кривизны кривой.

Определение. Средней кривизной участка кривой M_0M_1 называется отношение

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = k_{M_0M_1}.$$

Кривизной кривой L в точке M_0 называется $\lim\limits_{\substack{M_1\to M_0\\ M_1\in L}} k_{M_0M_1} = k(M_0)$.

Примеры.

1) Пусть L – прямая, тогда для любого ее отрезка M_0M_1 имеем: $\Delta\varphi = 0 \Longrightarrow k_{M_0M_1} = 0 \Longrightarrow k(M_0) = 0,$ то есть у прямой нет кривизны.

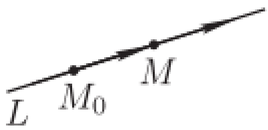


Рис. 21.9. Пример 1.

2) Длина Δl дуги M_0M_1 окружности радиуса R выражаетсяформулой $\Delta l = R\Delta\varphi$ (рис. 21.10), поэтому $k_{M_0M_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{1}{R}$, $k(M_0) = \frac{1}{R}$, то есть как средняя кривизна любой дуги окружности, так и кривизна в каждой ее точке, равны $\frac{1}{R}$. Отметим, что при $R \to \infty$ кривизна окружности стремится к нулю, и в этом смысле дуга окружности очень большого радиуса мало отличается от прямой. Заметим, что прямая и окружность – кривые постоянной кривизны.

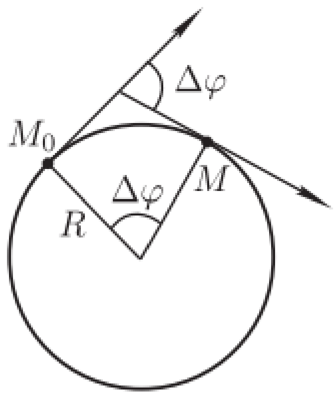


Рис. 21.10. Пример 2.

3) Рассмотрим эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, где $a > b$ (рис. 21.11). Интуитивно ясно, что кривизна эллипса в точке M_1 меньше, чем в точке M_2: $k(M_1) < k(M_2)$. Чтобы доказать это строго, нужно научиться вычислять кривизну в точке.

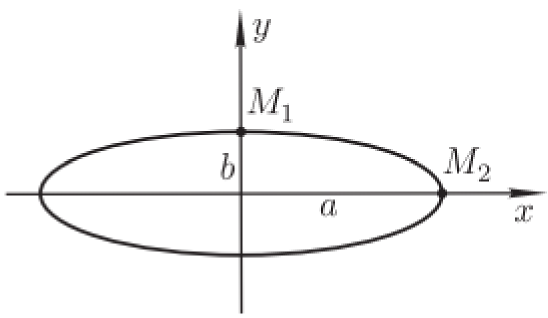


Рис. 21.11. Пример 3.

Вычисление кривизны кривой

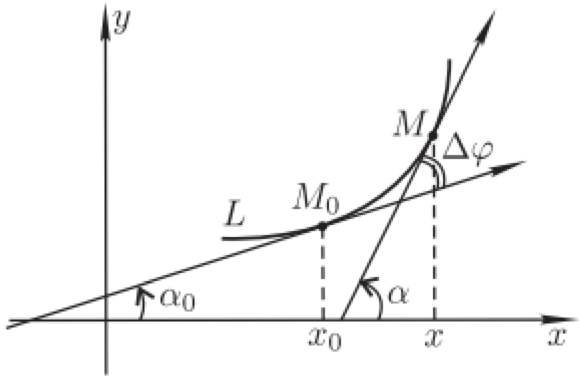


Рис. 21.12. Иллюстрация к вычислению кривизны кривой.

Пусть $L: y = f(x)$, где $f(x)-$ дважды дифференцируемая функция. Обозначим буквой α угол между направленной касательной к кривой L в точке M (при движении в сторону возрастания x) и осью Ox, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (на рис. 21.12 $\alpha > 0$). Значение α для точки $M_0(x_0, f(x_0))$ обозначим через α_0. Положим $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, тогда $\Delta\varphi = |\Delta\alpha|$. Для средней кривизны и кривизны получим:

$$k_{M_0M_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|,$$

$$k(M_0) = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{x=x_0}.$$

Поскольку $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x)$, имеем $\alpha = arctg\, f'(x)$ и

$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)}dx.$$

Вспомним, что

$$l = l_{M_0M_1} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'^2(x)}dS,$$

тогда

$$dl = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Взяв отношение дифференциалов, получим:

$$k(M_0) = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{x=x_0} = \frac{|f''(x_0)|}{[1 + f'^2(x_0)]^{3/2}}.$$

Мы видим, что кривизна $k(M_0)$ тем больше, чем больше $|f''(x_0)|$, и если $f''(x_0) \neq 0$, то $k(M_0) \neq 0$. Обозначим через $R = \frac{1}{k(M_0)}$ величину, обратную кривизне. Окружность радиуса R, касающаяся кривой L в точке M_0, и имеющая в окрестности M_0 такое направление выпуклости, как и кривая, называется кругом кривизны кривой L в точке M_0.

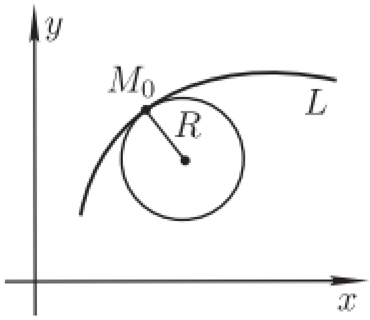


Рис. 21.13. Величина обратная кривизне.

Пример. Рассмотри параболу, заданную уравнением $y = x^2$, и точку $M_0(0,0)$ на этой параболе (рис. 21.14). Напишите уравнение окружности радиуса $R = \frac{1}{k(M_0)}$.

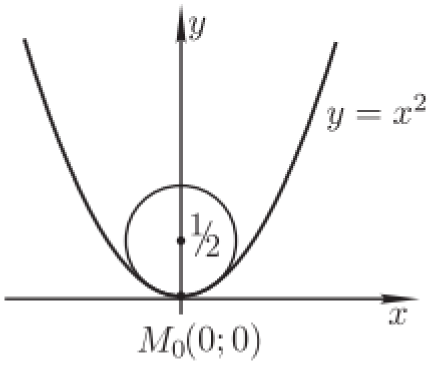


Рис. 21.14. Пример.

Пусть L: $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, тогда

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \alpha = arctg\ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$d\alpha = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Для кривизны кривой L в точке $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ получается формула:

$$k(M_0) = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{|\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\left(\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)\right)^{3/2}}\right|_{t=t_0}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ