ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

БУТУЗОВ
ВАЛЕНТИН ФЕДОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

Лекция 1. Вещественные числа. Часть 1.

Вещественные числа

$y = f(x)$ x и y - вещественные переменные.

Исторически первыми возникли **натуральные числа** - те, которые используются для счета предметов. Потом появились **простые дроби**, чтобы измерять части целого. Считается, что индусы изобрели число 0, а в начале нашей эры итальянцы изобрели отрицательные числа.

Понятие числа относится к первичным понятиям. Наиболее безупречная теория вещественных чисел - числами называются объекты произвольной природы, для них установлены правила сравнения, сложения, умножения, которые подчиняются определенным аксиомам.

Рациональные числа

Рациональное число – это число, которое можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное число.

Для рациональных чисел имеет место три правила.

Правило сравнения:

Рациональные числа $\frac{m_1}{n_1}$, связаны тем же знаком ($>$,$=$ или $<$), что и целые числа m_1n_2 и m_2n_1.

Свойство множества рациональных чисел, состоящее в том, что любые два рациональных числа связаны между собой знаком $\leqslant$,.

Правило сложения:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}$$

Правило умножения:

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1n_2}{n_1n_2}$$

Эти три правила обладают рядом свойств:

1) *правило сравнения* обладает **свойством транзитивности** знака $>$ (если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$) и знака $=$ (если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$);

2) *правило сложения* обладает **перестановочным** ($a + b = b + a$), **сочетательным** ($(a+b)+c = a+(b+c)$) и рядом других свойств;

3) *правило умножения* также обладает **перестановочным и сочетательным** свойствами.

Рациональных чисел недостаточно для измерения различных величин, в частности, длин любых отрезков. Так, длина диагонали квадрата со стороной 1 не является рациональным числом. Возникает потребность расширить множество рациональных чисел и дополнить его так, чтобы иметь возможность измерять длины любых отрезков.

Любое рациональное число с помощью процесса деления можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

$$\frac{1}{6} = 0,166\ldots6\cdots = 0,01(6)$$

Для конечных десятичных дробей, отличных от 0 возможно двоякое представление в виде бесконечной десятичной дроби.

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,5000\cdots = 0,5(0)$$

$$\frac{1}{2} = 0,49\cdots9 = 0,4(9)$$

Иррациональные числа

Наряду с периодическими существуют непериодические десятичные дроби.

$$0,10011000111\cdots$$

$$1,414213\cdots \textit{число} \quad \sqrt{2}$$

$$3,141592\cdots \textit{число} \quad \pi$$

$$2,7182818284590452353\cdots \textit{число} \quad \varepsilon$$

Любая непериодическая десятичная дробь – **иррациональное число**. Множество всех рациональных и иррациональных чисел с тремя правилами (сравнения, сложения и умножения) называются множеством вещественных (или действительных) чисел.

$$\mathbb{Q} \quad - \textit{множество иррациональных чисел}$$

$$\mathbb{R} \quad - \textit{множество рациональных чисел}$$

Любое вещественное число a можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$a := \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

где из двух знаков плюс и минус берется какой-то один, α_0 – целое неотрицательное число, α_k цифры ($k = 1, 2, \cdots$).

Далее возникает задача введения для вещественных чисел трех правил (сравнения, сложения и умножения) с сохранением тех свойств, которые имели место для рациональных чисел.

Сравнение вещественных чисел

1) Если все $\alpha_k = 0$, то независимо от знака перед дробью число α считаем равным нулю: $\alpha = 0$. Если хотя бы одно $\alpha_k \neq 0$ и перед дробью стоит знак плюс, то число α будем называть положительным и писать $\alpha > 0$, если же стоит знак минус, то число α будем называть отрицательным и писать $\alpha < 0$.

2) Пусть $a := \pm\alpha_0, \alpha_1 \cdots, \alpha_n, \cdots$, $b := \pm\beta_0, \beta_1 \cdots, \beta_n, \cdots$

Числа a и b называются равными (пишем $a = b$), если числа имеют один и тот же знак и $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \cdots$

3) Пусть $a \leqslant 0, \quad b \leqslant 0, a \neq b$

Тогда для некоторого k имеют место соотношения: $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$. Будем считать, что

$$a > b \textit{если} \quad \alpha_k > \beta_k$$

$$a < b \textit{если} \quad \alpha_k < \beta_k$$

4) Пусть $a \geqslant 0, b < 0$. Тогда будем считать, что $a < b$.

5) Пусть $a < 0, b < 0$, $a \neq b$. Будем считать, что:

$$a > b \quad \textit{если} \quad |a| < |b|$$

$$a < b \quad \textit{если} \quad |a| > |b|$$

Можно доказать, что введенное правило сравнения вещественных чисел обладает такими же свойствами, как и правило сравнения рациональных чисел, и что в применении к рациональным числам оно дает тот же результат, что и правило сравнения рациональных чисел.

Для введения правил сложения и умножения вещественных чисел нам понадобится новое понятие **точных граней ограниченного числового множества**.

Точные грани ограниченного числового множества

Обозначим буквой X множество вещественных чисел, содержащее хотя бы одно число (такое множество называется **непустым**). Любое число $x \in X$ называют элементом множества X.

Определение 1.1. ***Ограниченное сверху (снизу) множество и его верхняя (нижняя) грань***

*Множество X называется **ограниченным сверху (снизу)**, если существует число $M(m)$ такое, что для любого элемента $x \in X$ выполняется неравенство*

$$x \leqslant M \quad (x \geqslant m)$$

*Число $M(m)$ называется **верхней (нижней) гранью** множества X. Для краткости вместо слов «существует» и «для любого» будем использовать логические символы (кванторы):*

$\exists$ – квантор существования (заменяет слово «существует» или «найдется») и $\forall$ – квантор всеобщности (заменяет выражения «для любого» или «для всех»).

Определение 1.2 (Альтернативное). *Множество X называется **ограниченным сверху**, если*

$$\exists M, \quad \forall \in X : x \leqslant M$$

*Число M называется **верхней гранью множества** X*

*Отрицание этого предложения в позитивной форме выглядит так: Множество X называется **неограниченным сверху**, если*

$$\forall M \quad \exists x \in X : x > M$$

Сравнивая две записи, видим, что для построения отрицания нужно квантор $\exists$ заменить на $\forall$, а квантор $\forall$ на $\exists$, и стоящее после двоеточия неравенство заменить ему противоположным. Это правило можно использовать и для построения отрицаний любых других утверждений, содержащих кванторы $\exists$ и $\forall$.

*Множество X называется **ограниченным снизу**, если*

$$\exists m, \quad \textit{такое, что} \quad \forall \quad x \in X : x \geqslant m$$

*Число m называется **нижней гранью множества** X*

Введем понятие **точных верхней и нижней граней**.

Пример 1.1. *Множество $X = \{x : x < 1\}$ ограничено сверху, но не ограничено снизу. Очевидно, любое неотрицательное число является верхней гранью этого множества. Таким образом, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних граней.*

Среди всех верхних граней в данном примере имеется наименьшая – число 1.*Такую наименьшую грань будем называть **точной верхней гранью**.*

Определение 1.3. ***Точная верхняя и нижняя грани***

*Наименьшая из верхних граней ограниченного сверху множества X называется **точной верхней гранью** этого множества и обозначается*

$$\sup X \quad (\textit{supremum множества } X)$$

*Иногда пишут: $\overline{x} = \sup X$ Аналогично,наибольшая из нижних граней ограниченного снизу множества X называется **точной нижней гранью** этого множества и обозначается*

$$\inf X \quad (\textit{infinum множества } X)$$

Иначе пишут: $\underline{x} = \inf X$. *Определение точной верхней грани можно сформулировать иначе: число* $\overline{x}$ *называется точной верхней гранью ограниченного сверху множества* X, *если:*

1) $\forall x \in X : x \leqslant \overline{x}$

– это означает, что x *–* ***одна из верхних граней*** *множества* X*;*

2) $\forall \tilde{x} \quad \exists x \in X : x > \tilde{x}$

– это означает, что $\overline{x}$ *–* ***наименьшая*** *из верхних граней.*

Поставим **вопрос**: всегда ли среди верхних граней ограниченного сверху множества имеется наименьшая? Ответ на этот вопрос неочевиден. Например, множество $\{x : x > 0\}$ не имеет наименьшего числа. Оказывается, что в отношении верхних граней ограниченного сверху множества ответ на поставленный вопрос положительный.

Пример 1.2. *Рассмотрим множество* $X = \{x : x > 1\}$

Наименьшего числа нет.

Теорема 1.1. *Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Мы докажем теорему для точной верхней грани (для точной нижней грани доказательство аналогично).

Пусть X *– ограниченное сверху множество, то есть* $\exists M, \quad \forall x \in x : \leqslant M$.

Возможны два случая:

1) среди элементов множества X *имеется хотя бы одно число* $x \geqslant 0$

2) $\forall x \in X : x < 0$

Рассмотрим подробно первый случай. Отбросим все отрицательные числа из множества X *и рассмотрим множество*

$$X_+ = \{x \in X : x = x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n \cdots \geqslant 0\}$$

Тогда $\forall x_0 : x_0 \leqslant M$.

Положим $\overline{x_0} = \max\limits_{X_+}\{x_0\}$

Оставим только те числа, у которых целая часть равна максимальной.

Рассмотрим множество

$$X_0 = \{x \in X : \overline{x_0}, x_1 \cdots x_n \cdots\}$$

Положим $\overline{x_1} = \max\limits_{X_0}\{\overline{x_1}\}$

Рассмотрим множество

$$X_1 = \{x \in X : \overline{x_0}, \overline{x_1} \cdots\}$$

Положим $\overline{x_2} = \max\limits_{X_0}\{\overline{x_2}\}$

Алгоритм выработан. На шаге k *рассмотрим множество*

$$X_{k-1} = \{x \in X : x = \overline{x_0}, \overline{x_1} \cdots \overline{x}_{k-1}\}$$

Положим $\overline{x_k} = \max\limits_{X_{k-1}}\{\overline{x_k}\}$

Продолжая неограниченно этот процесс, определим $\overline{x}_k$ *для всех* $k = 0, 1, 2 \cdots$.

Введем число

$$\overline{x} = \overline{x}_0, \overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n \cdots$$

Докажем, что $\overline{x} = \sup X$

Для этого воспользуемся эквивалентным определением точной верхней грани. Для этого нужно доказать, что:

a) $\forall x \in X : x \leqslant \overline{x}$;

b) $\forall \tilde{x} < \overline{x} \quad \exists x \in X : x > \tilde{x}$.

Лекция 2. Вещественные числа. Часть 2.

Рассмотрим два случая. Первый – когда хотя бы одно число положительное, второй – когда все числа отрицательные.

$$\exists x \in X : x \geqslant 0$$

$$\bar{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2} \cdots \overline{x_n}$$

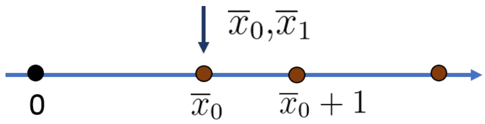

Рис. 2.1. $\overline{x_0}$ - самая большая целая часть среди всех чисел множества

Докажем, что $\bar{x} = \boldsymbol{Sup} X$ – верхняя грань множества. Для этого нужно доказать, что:

- $\forall x \in X : x \leqslant \bar{x}$;
- $\forall \tilde{x} < \bar{x} \quad \exists x \in X : x > \tilde{x}$.

Выполнение двух этих условий докажет, что $\bar{x}$ - супремум множества X ($\boldsymbol{Sup} X$)

Докажем, что $\forall x \in X : x \leqslant \bar{x}$.

$$\forall x < 0 (x \in X) : x < \bar{x}$$

$$x = x_0, \quad x_1 \cdots x_n \cdots \leqslant 0 (x \in X)$$

Доказательство от противного. Допустим, что

$$\exists x > \bar{x} = x_0, \quad x_1 \cdots x_n \cdots$$

Тогда по правилу сравнения вещественных чисел

$$\exists k : x_0 = \overline{x_0} \cdots x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}$$

$$x_k > \bar{x}_k$$

В силу равенств

$$\exists k : x_0 = \overline{x_0} \cdots x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}$$

$$x \in X_{k-1}$$

Согласно определению $\overline{x_k} = max \quad x_k$ из множества $X_{k-1} \Rightarrow x_k \leqslant \bar{x}_k$. Это противоречит неравенству $x_k > \bar{x}_k$. То есть условие выполнено:

$$\forall x \in X : x \leqslant \bar{x}$$

Докажем, что

$$\forall \widetilde{x} < \bar{x} \exists x \in X : x > \widetilde{x}$$

Возьмем

$$0 < \widetilde{x} = \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \cdots \widetilde{x}_n \cdots < \bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \cdots$$

Воспользуемся правилом сравнения вещественных чисел.

$$\exists k : \widetilde{x}_0, \cdots, \widetilde{x}_{k-1} = \bar{x}_{k-1}$$

$$\widetilde{x}_k < \bar{x}_k$$

Возьмем произвольное

$$x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_k x_{k+1} \cdots \in X_k$$

Очевидно, что $x > \widetilde{x}$. Выполнено условие $\forall \widetilde{x} < \bar{x} \quad \exists x \in X : x > \widetilde{x}$

$$\Rightarrow \ \bar{x} = SupX$$

Рассмотрим **второй случай**, когда все числа отрицательные

$$\forall x \in X : x < 0 \quad (x = -x_0, x_1 \cdots)$$

Точную верхнюю грань можно построить следующим образом:

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \cdots$$

При этом нужно положить:

$$\bar{x}_0 = \overset{min}{X} \{x_0\}$$

$$X_0 = \{x \in X : x = -\bar{x}_0, x_1 \cdots\}$$

$$\bar{x}_1 = \overset{min}{X_0}\{x_1\}$$

Доказать самостоятельно, что $\bar{x} = SupX$.

Теорема доказана: всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Аналогично доказывается, что всякое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.

Замечание

Точная грань множества (верхняя, нижняя) – это какое-то число, которое может принадлежать или не принадлежать множеству.

Пример 2.1.

$$X = \{ : 1 < x \leqslant 2\}$$

$$SupX = 2 \in X$$

$$infX = 1 \notin X$$

Нужно различать существование точных граней у ограниченного сверху или снизу множества и их принадлежность этому множеству. В этом отношении точная верхняя и точная нижняя грани имеют преимущество перед максимумом и минимумом.

В данном примере есть наибольшее число:

$$maxX = 2, min \quad \textit{нет}$$

Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу. В виде неравенства запишем так:

X ограничено, если $\exists M$ и m, такие, что

$$\forall x \in X : m \leqslant x \leqslant M$$

Используют такое определение: X ограничено, если

$$\exists A > 0, \forall x \in X : |x| \leqslant A$$

Арифметические действия над вещественными числами

Сложение вещественных чисел

Пусть x и y – произвольные вещественные числа, и пусть x_r и y_r – любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$x_r \leqslant x, \quad y_r \leqslant y$$

Составим множество сумм этих рациональных чисел $\{x_r + y_r\}$. Эти числа складываются по правилу сложения рациональных чисел. Это числовое множество ограничено сверху.

Пусть $\bar{x}_r > x, \quad \bar{y}_r > y$. По свойству транзитивности знака

$$x_r \leqslant x < \bar{x}_r \Rightarrow x_r < \bar{x}_r$$

$$y_r \leqslant y < \bar{y}_r \Rightarrow y_r < \bar{y}_r$$

Отсюда следует, что $x_r + y_r < \bar{x}_r + \bar{y}_r$. Это означает, что множество $\{x_r + y_r\}$ ограничено сверху. Следовательно, оно имеет точную верхнюю грань.

Определение 2.1. ***Сумма вещественных чисел***

Суммой вещественных чисел x и y называется точная верхняя грань множества $\{x_r + y_r\}$.

$$x + y = \{x_r + y_r\}$$

$$x + y = \underset{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ x_r \leqslant x, y_r \leqslant y}}{Sup} \{x_r + y_r\}$$

Q – множество рациональных чисел.

Умножение вещественных чисел

Пусть $x > 0$ и $y > 0$ – произвольные вещественные числа. И пусть xr и yr – любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < x_r \leqslant x, \quad 0 < y_r \leqslant y$$

Рассмотрим множество $\{x_r \cdot y_r\}$, где умножение $x_r \cdot y_r$ производится по правилу для рациональных чисел. Оно ограничено сверху (доказывается так же, как ограниченность суммы), то есть имеет точную верхнюю грань.

Определение 2.2. ***Произведение положительных вещественных чисел***

1) Произведением положительных вещественных чисел x и y называется точная верхняя грань множества $\{x_r \cdot y_r\}$

$$x \cdot y = \underset{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ x_r \leqslant x, \quad y_r \leqslant y}}{Sup} \{x_r \cdot y_r\}$$

2) $\forall x : x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

3) $\forall x \neq 0 \quad y \neq 0$ *по определению*

$$x \cdot y = \begin{cases} |x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака;} \\ -|x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ разных знаков;} \end{cases}$$

Можно доказать, что введенные правила сложения и умножения вещественных чисел обладают такими же свойствами, как и правила сложения и умножения рациональных чисел, и что в применении к рациональным числам эти правила дают тот же результат, что и правила сложения и умножения рациональных чисел.

Вычитание вещественных чисел вводится как действие, обратное сложению. Разность чисел x и y – это такое число z, что

$$y + z = x, \quad (z = x - y)$$

Можно доказать, что

$$\forall x \text{ и } y \quad \exists! z : y + x = z$$

Иначе говорят, что для любых вещественных чисел существует единственная разность.

Деление определяется как действие, обратное умножению: частное от деления x на $y \neq 0$ это такое число z, что $\quad y \cdot z = x$.

Можно доказать, что $\forall x, \quad y \neq 0 \exists! \quad$ z:y $\cdot z = x$. Иначе говорят, что для любых x и y, не равных нулю, частное существует, и оно единственное.

Некоторые числовые неравенства

1) Для любого вещественного числа имеет место двойное неравенство:

$$-|a| \leqslant a \leqslant ||a$$

Данное неравенство непосредственно следует из правила сравнения вещественных чисел.

2) Для любых чисел a и b справедливо неравенство:

$$|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$$

По введенному определению

$$a + b = Sup\{x_r + y_r\}, \ \textit{где } x_r \leqslant a, \quad y_r \leqslant b, \quad x_r, y_r \in \mathbb{Q}$$

3) Для любых чисел a и b справедливо неравенство:

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|$$

Доказательство. Так как $|a| = (a-b)+b| \leqslant |a-b|+|b|$ в силу **утверждения 2**, то $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

Геометрическое изображение вещественных чисел

Введем в рассмотрение координатную прямую (или ось координат), т.е. прямую, на которой выбрано направление, начало отсчета (точка O) и масштабный отрезок OE, длину которого считается равной 1

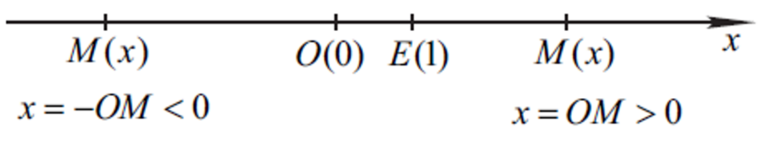

Рис. 2.2. Координатная прямая

Каждой точке M на координатной прямой поставим в соответствие вещественное число x – длину отрезка OM, такое, что $x = OM$, если точка M лежит на положительной полуоси, и взятую со знаком минус длину отрезка OM

$(x = -OM)$, если точка M лежит на отрицательной полуоси.Точке O поставим в соответствие число нуль.

Каждой точке M координатной прямой соответствует некоторое вещественное число. Имеет место и обратное соответствие, т.е. каждому вещественному числу соответствует некоторая точка на координатной прямой. Доказательство этого утверждения основывается на аксиомах геометрии, а именно, на аксиоме непрерывности прямой.

Для наглядности пользуются геометрическим изображением вещественных чисел в виде точек на координатной прямой. Поэтому сами числа часто будем называть точками.

Если $\overline{x} = supX$, то каждая точка множества X лежит левее $\overline{x}$ или совпадает с $\overline{x}$, причем сколь угодно близко от $\overline{x}$ имеются точки множества X.

Некоторые числовые множества

1) **Интервал**

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}$$

Точки a и b не принадлежат интервалу, это граничные точки.

2) **Сегмент (или отрезок)**

$$[a,b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$$

точки a и b называются *граничными* точками сегмента, остальные его точки – *внутренними* точками.

3) **Полуинтервал, полусегмент**

$$(a,b] = \{x < a < b\} \ \textit{или} \ [a,b) = \{x > a > b\}$$

4) **Окрестность точки** c

любой интервал, содержащий точку c

5) ε**-окрестность точки** c

$$\textit{интервал} \ (-\varepsilon, c+\varepsilon)$$

Иное название - симметричная окрестность точки c. Иное обозначение:

$$c = \{x : |x - c| < \varepsilon\}$$

6) **Проколотая ε-окрестность точки** c. Записывается:

$$\{x : 0 < |x - c| < \varepsilon\}$$

7) **Числовая прямая**

$$\mathbb{R} = (+\infty, -\infty) \textit{ Или } \{-/\infty, +\infty\}$$

Это множество всех вещественных чисел.

8) **Полупрямая**

$$[a, +\infty) = \{x \geqslant a\}$$

Если a не входит, то $(a, +\infty)$. Могут быть варианты $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$.

Все множества, кроме проколотой окрестности, называются еще **промежутками**. Проколотая окрестность – это два промежутка.

Предел функции

Понятие функции

Пусть X – некоторое числовое множество. Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое (единственное) число y. Говорят, что на множестве X определена (задана) функция и пишут $y = f(x)$ (или $y = y(x)$).

При этом множество X называется **областью определения функции**. Переменная числовая величина x, принимающая значения из X (пробегающая множество X) называется **независимой переменной или аргументом функции**. Число y, соответствующее данному значению x, называется **частным значением функции** в точке x; $\{y\}$ – **множество значений функции**.

Геометрически функция $y = f(x)$ изображается своим графиком. График функции – это множество точек $\{M(x, f(x)), x \in X\}$ в прямоугольной системе координат Oxy

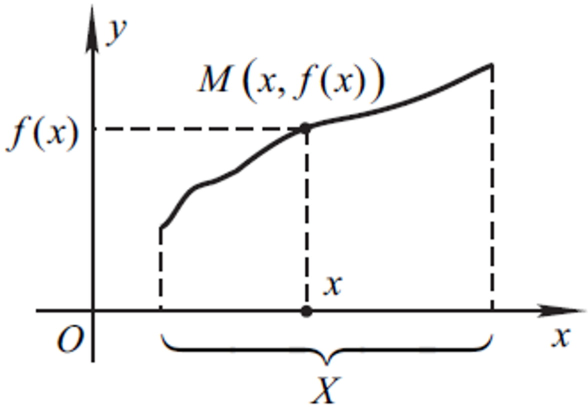

Рис. 2.3. График функции

Определение 2.3. ***Ограниченная сверху функция. Верхняя грань функции***

Функция $y = f(x), \quad x \in X$ *называется ограниченной сверху на множестве* X*, если*

$$\exists M, \quad \forall x \in X : f(x) \leqslant M$$

То есть все значения функции не превосходят некоторого числа. Число M *называется верхней гранью функции f(x) на множестве* X*.*

Определение 2.4. ***Ограниченная снизу функция. Нижняя грань функции***

Функция $y = f(x), \quad x \in X$ *называется ограниченной снизу на множестве* X*, если* $\exists m, \quad \forall x \in X : f(x) \geqslant m$*. Число* m *называется нижней гранью функции f(x) на множестве* X*.*

Определение 2.5. ***Ограниченная на множестве функция***

Функция называется ***ограниченной на множестве****, если она ограничена сверху и снизу на этом множестве. То есть* $\exists M$ *и* m *такие, что* $\forall x \in X : m \leqslant f(x) \leqslant M$*.*

Часто пишут так: $y = f(x)$ *ограничена на* X*, если* $\exists A > 0, \quad \in X : |f(x)| \leqslant A$*.*

Определение 2.6. ***Точная верхняя грань***

Наименьшая из верхних граней ограниченной сверху функции $f(x)$ на множестве X называется ее точной верхней гранью на этом множестве и обозначается

$$\underset{X}{Sup} f(x) \quad (\underset{X}{inf} f(x))$$

Иначе говорят: точная верхняя грань функции $y = f(x)$ – это $sup\{y\}$, где $\{y\}$ – множество значений функции.

Определение 2.7 (Эквивалентное определение точной верхней грани)**.** *Число M называется точной верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X, если:*

1) $\forall x \in X : f(x) \leqslant M$ (это условие показывает, что M – одна из верхних граней $f(x)$ на X;

2) $\forall \widetilde{M} < M \exists x \in X : f(\widetilde{x}) > \widetilde{M}$ (это условие показывает, что M – наименьшая из верхних граней).

Пример 2.2. *Рассмотрим функцию $y = \sin x, \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$.*

$$\underset{(0,\frac{\pi}{2}]}{sup} \sin x = 1 \in \{y\}$$

$$\underset{(0,\frac{\pi}{2}]}{inf} \sin x = 1 \notin \{y\}$$

Этот пример показывает, что ограниченная функция может не принимать значения, равного какой-либо ее точной грани. В таком случае говорят, что функция не достигает этой точной грани.

Определение предела функции

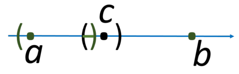

Рис. 2.4. Точки множества, проколотая окрестность

Определение 2.8. ***Предельная точка числового множества***

Число a называется предельной точкой числового множества X, если в любой проколотой ε-окрестности точки a содержатся точки из множества X.

При этом сама точка a может принадлежать, а может и не принадлежать множеству X.

Пример 2.3. *1) $X = \{x : a < x < b\}$. Любая точка интервала X, а также точки a и b – предельные точки интервала X.*

2) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел – не имеет предельных точек.

Лекция 3. Предел функции. Часть 1.

На понятии предела основан математический анализ. Есть пределы разных величин, функций, последовательностей, интегральных сумм и так далее. Прежде всего речь о пределе функции.

Определение 3.1. ***Предельная точка числового множества***

Число a называется предельной точкой числового множества X, если в любой проколотой ε-окрестности точки a содержатся точки из множества X.

При этом сама точка a может принадлежать, а может и не принадлежать множеству X.

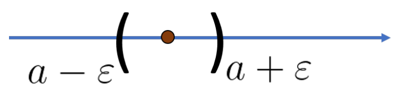

Рис. 3.1. Предельная точка числового множества

Пример 3.1. *Пусть* $X = (a,b)$

Рис. 3.2. $X = (a,b)$

Предельной точкой будет любая точка внутри интервала. Точки a и b тоже будут предельными точками интервала, хотя в интервал не входят.

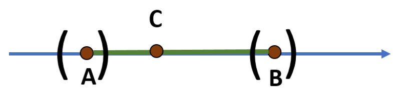

Рис. 3.3. Любая окрестность

Определение 3.2. *Пусть $Q = x \in R : x$ - рациональное число. То есть рассматривается множество всех рациональных чисел.*

Любая точка числовой прямой будет предельной точкой этого множества.

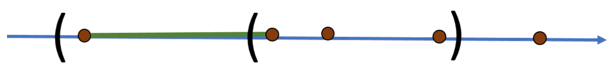

Рис. 3.4. Любая точка - предельная

Определение 3.3. *Предел функции.*

Пусть $f(x)$ определена на множестве X. Пусть точка a - предельная точка области определения (множества X).

Определение по Коши

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a (при $x \to a$), если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для любого значения аргумента x из проколотой δ-окрестности точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = b$$

Задание.

1. Постройте отрицание определения предела функции, то есть сформулируйте определение

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) \neq b$$

2. Сформулируйте определение того, что $\lim_{x \to \alpha} f(x)$ не существует.

Геометрическая иллюстрация определения предела функции.

Геометрическим изображением функции является ее график.

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon < f(x) < \varepsilon \Leftrightarrow \; b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$$

С геометрической точки зрения определение предела функции означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, в пределах

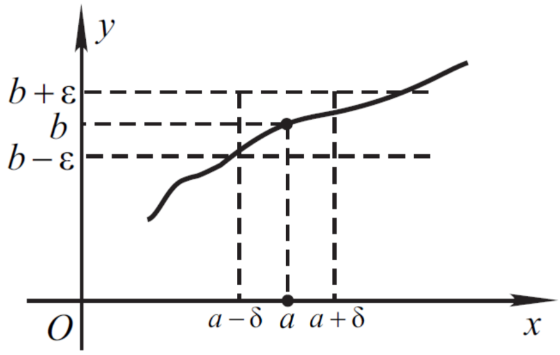

Рис. 3.5. $y = f(x)$

которой график функции лежит между горизонтальными прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$

Замечание 1. Функция может иметь в данной точке не более одного предела.

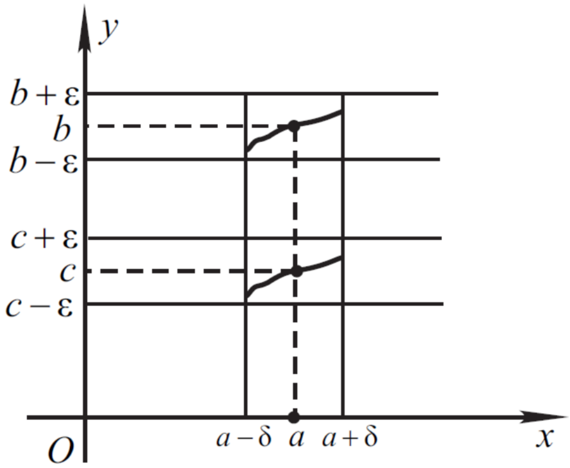

Рис. 3.6. Геометрическая иллюстрация определения

В самом деле, если предположить, что функция имеет в точке a два предела: b и c, то, взяв непересекающиеся ε-окрестности точек b и c, получим, что в пределах некоторой проколотой δ-окрестности точки a график функции лежит одновременно в полосе между $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ и также в полосе между прямыми $y = c - \varepsilon$ и $y = c + \varepsilon$, чего не может быть.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Утверждение следует непосредственно из определения предела функции:

$$b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon \text{ при } 0<|x-a|<\delta$$

Или так:

$$\forall x \in 0 < (x-a) < \delta$$

Пример 3.2. *Пусть* $f(x) = b = const, \forall x \in R$, *тогда* $\forall a$*:*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = b$$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ *возьмем любое* $\delta > 0$*. Тогда* $|f(x)-b = 0 < \varepsilon$ *при всех* x *и, значит, при* $0<|x-a|<\delta$*.*

Пример 3.3. *Пусть*

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a; \\ c \neq b, & \text{если } x = a. \end{cases}$$

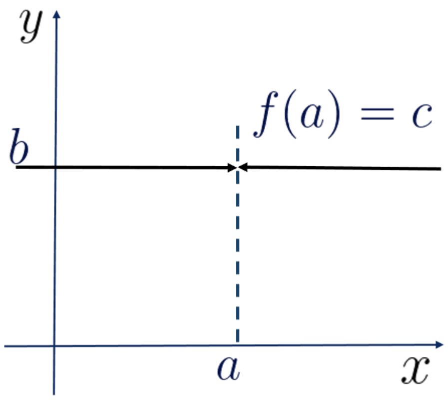

Рис. 3.7. Пример 1.3

Тогда

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = b$$

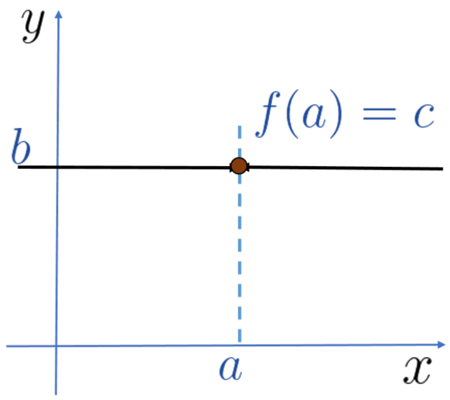

Рис. 3.8. В точке a функция не определена

Пример 3.4. *Пусть*

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a; \\ \text{не определена}, & \text{при } x = a. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = b$$

Замечание 3 В примерах **1.2, 1.3, 1.4** для любого $\varepsilon > 0$ можно взять произвольное $\delta > 0$, то есть δ не зависит от ε.

Замечание 4 Если в определении предела функции исключить неравенство $0 < |x-a|$, т.е. потребовать выполнения неравенства $|f(x)-b| < \varepsilon$ для всех значений аргумента x из δ-окрестности точки a, включая и саму точку a (если, конечно, она принадлежит области определения функции), то ответ в примере **1.4** не изменится, поскольку $x = a$ не является значением аргумента функции.

В **примере 2**, напротив, ответ изменится: предел у функции $f(x)$ при $x \to a$ не будет существовать, так как для $x = a$ неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$ принимает вид $|c-b| < \varepsilon$, и, следовательно, оно не выполняется, если взять ε меньше, чем $|c..b|$.

Пример 3.5. *Пусть* $f(x) = x$, $x \in R$ *тогда для любого* a

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$$

Для $\forall\varepsilon > 0$ *возьмем* $\delta = \varepsilon$.

Тогда если $0 < |x-a| < \delta = \varepsilon$, *то* $|f(x)-a| = |x-a| < \varepsilon$, *то есть определение выполнено.*

Пример 3.6. *Пусть* $f(x) = sin\frac{1}{x}, x \neq 0$. *Заметим, что* $x = 0$ *является предельной точкой области определения функции, и докажем, что эта функция не имеет предела при* $x \to sin\frac{1}{x}$.

Доказательство проведем от противного: предположим, что

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = b$$

b - *некоторое число. Возьмем* $\varepsilon = 1$, $\forall x, 0 < |x| < \delta$ *Должно выполняться неравенство* $\exists\delta > 0$, *такое, что*

$$\left|sin\frac{1}{x} - b < 1\right| \text{ при } 0 < |x| < \delta$$

Возьмем

$$x_1 = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \qquad x_2 = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

При достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ *числа* x_1 *и* x_2 *удовлетворяют неравенствам:* $0 < |x_i| < \delta$, $i = 1,2$. *При этом*

$$\left|sin\frac{1}{x_1} - b\right| = |1-b| < 1 \text{ и } \left|sin\frac{1}{x_2} - b\right| = |-1-b| = |1+b| < 1$$

Последние два неравенства не могут одновременно выполняться ни при каком b, *следовательно, наше предположение неверно и предел функции* $sin\frac{1}{x}$ *при* $x \to 0$ *не существует.*

Пример 3.7. *Пусть* $f(x) = \sin x$, *тогда*

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

Чтобы доказать это, воспользуемся известным неравенством $sinx < x$ *при* $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

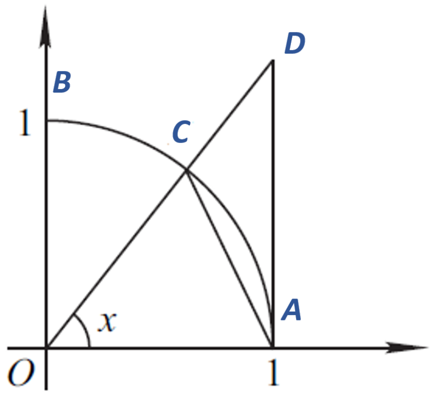

Рис. 3.9. Получение неравенства

Неравенство выражает тот факт, что площадь равнобедренного треугольника, вписанного в сектор единичной окружности, меньше площади этого сектора:

$$S_{\Delta AOC} < S_{\text{сект } AOC} < S_{AOD}$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} sinx$$

$$S_{\text{сект } AOC} = \frac{1}{2} x$$

$$\frac{1}{2} sinx < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tgx$$

$$sinx < x < tgx, \qquad \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$$

В силу нечетности функций $\sin x$ *и* x *имеем*

$$|x - nx| \leqslant |x| \qquad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

Проверим выполнение определения предела Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ *и возьмем* $\delta = \varepsilon$*. Тогда для всех* x*, удовлетворяющих условию* $0 < |x| < \delta = \varepsilon$*, получим*

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon$$

а это и означает, что

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Односторонние пределы

Может случиться так, что при стремлении аргумента x к точке a слева и справа функция $f(x)$ имеет разные предельные значения. В качестве примера приведем функцию

$$f(x) = sgnx = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = a, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

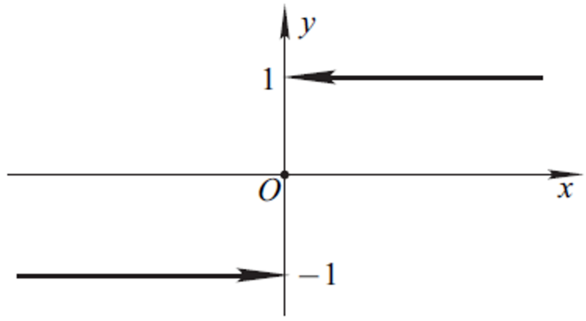

Рис. 3.10. График функции

Определение 3.4. *Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа (слева), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in (a, a+\delta)$ (соответственно, $\forall x \in (a-\delta, a)$) выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Обозначение:

$$\lim_{x \to \alpha+0} f(x) = b \quad \textit{или} \quad f(a+0) = b$$

$$\lim_{x \to \alpha-0} f(x) = b \quad \textit{или} \quad f(a-0) = b$$

Пример 3.8. *Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$, где $[x]$ - целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.*

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел, включая нуль) имеем:

$$f(n-0) = n-1, \quad f(n+0) = n, \quad f(n) = n$$

Из определения предела функции и определений односторонних пределов следует теорема.

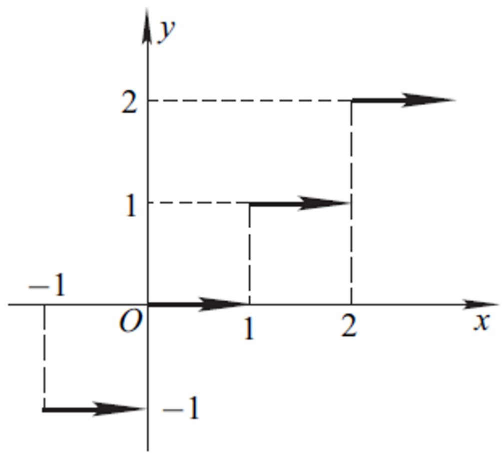

Рис. 3.11. График функции

Теорема 3.1. *Если функция $f(x)$ имеет в точке a правый и левый пределы, причем $f(a-0) = f(a+0) = b$, то в данной точке существует предел этой функции, равный односторонним пределам b.*

Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X и $\forall A \quad \exists x \in X : x > A$.

Определение 3.5. *Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A$, такое, что для любого значения аргумента $x > A$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Обозначение

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Аналогично определяется предел функции при $x \to -\infty$. Если функция $f(x)$ имеет равный числу b предел при $x \to +\infty$ и равный этому же числу предел при $x \to -infty$, то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Пример 3.9. *Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ и докажем, что*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ *возьмем* $A = \frac{1}{\varepsilon}$*. Тогда если* $x > A = \frac{1}{\varepsilon}$*, то* $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$*, т.е.* $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$*, а это по определению означает, что*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Лекция 4. Предел функции. Часть 2

Определение 4.1.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad A > 0$$

$$\forall x > A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Частным случаем предела функции при $x \to +\infty$ является предел числовой последовательности.

Числовая последовательность - это функция, определенная на множестве натуральных чисел. Областью определения этой функции является множество натуральных чисел.

$$f(n), n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$$

Чаще числовая последовательность обозначается $\{x_n\} = x_1, x_2 \cdots, x_n, \cdots$

Определение 4.2. *Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$ при $n \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$*

Записывается так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Пример 4.1. *Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$*

Докажем, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\forall \varepsilon > 0$ *возьмем* $N > \frac{1}{\varepsilon}$. *Тогда*

$$\forall n > N : n > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\frac{1}{n < \varepsilon})$$

$$\Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$$

Это означает, что $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 4.3. *Функция $f(x)$ называется* ***бесконечно малой*** *в точке a (при $x \to a$), если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

Пример 4.2. *1) Функция $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой в точке $x = 0$, так как (это было доказано)*

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$$

Функция также является бесконечно малой в точке $x = 0$ (заметим, что при этом $f(0) = 1 \neq 0$).

3) Функция $f(x) = sgn\, x$ не является бесконечно малой в точке $x = 0$, хотя $f(0) = 0$.

Аналогично определяется бесконечно малая при $x \to +\infty$ (или $-\infty$) функция, в частности, бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$:

$$\lim_{n\to +\infty} x_n = 0$$

Определение 4.4. *Эквивалентное определение бесконечно малой*

$f(x)$ называется бесконечно малой в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x)| > \varepsilon$$

Определение 4.5. *Функция $f(x)$ называется* ***бесконечно большой*** *в точке a (при $x \to a$), если*

$$\forall A > 0 \quad \exists \quad \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x)| > A$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Если при этом выполнено неравенство $f(x) > A(f(x)$, то пишут:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Если при этом выполнено неравенство $f(x) < -A$, то пишут:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Аналогичные определения бесконечно малой и бесконечно большой функции имеют место при $x \to a+0, x \to a-0, x \to +\infty, x \to -\infty$

Пример 4.3. $f(x) = \frac{Sinx}{\sqrt{x}}$ *– бесконечно малая при* $x \to \pi n, n \in \mathbb{N}$, *при* $x \to \pi n + 0$, *при* $x \to \pi n - 0$, *при* $x \to +\infty$.

Пример 4.4. $f(x) = \frac{1}{x}$ *– бесконечно большая при* $x \to 0$

$$\lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

Задание Пусть $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a. Доказать три утверждения:

1) Если $f(x)$ бесконечно большая функция в точке a, то в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ и она является бесконечно малой в точке a.

2) если $f(x)$ – бесконечно малая в точке a функция и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ бесконечно большая функция в точке a.

3) если $f(x) = c = const$ и

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

то $c = 0$.

Теорема 4.1. *Сумма и разность двух бесконечно малых в точке a функций являются бесконечно малыми в точке a функциями.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые в точке a функции. Тогда

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_1>0, \quad \forall x\in\{0<|x-a|<\delta_1\}: \quad |f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\delta_2>0, \quad \forall x\in\{0<|x-a|<\delta_2\}: \quad |g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем $\delta\min(\delta_1,\delta_2)$ Тогда $\forall x\in\{0<|x-a|<\delta\}$ выполнены неравенства:

$$|f(x)|<\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad |g(x)|<\frac{\pi}{2}$$

следовательно

$$\forall x\in\{0<|x-a|<\delta\}: |f(x)\pm g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|<\varepsilon$$

а это и означает, что функции $f(x)+g(x)$и $f(x)-g(x)$ являются бесконечно малыми в точке a.

Следствие. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке a функций является бесконечно малой в точке a функцией.

Доказательство проведем по индукции. Для двух слагаемых утверждение верно в силу теоремы 4.1. Предположим, что утверждение верно для n слагаемых ($n>2$), и докажем, что тогда оно верно и для $n+1$ слагаемых.

Пусть $f1(x), f2(x),\cdots,f_n(x),f_{n+1}(x)$ – бесконечно малые в точке a функции. Их сумму представим в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1}f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)+f_{n+1}(x)=g(x)+f_{n+1}(x)$$

Функция $g(x)$ является бесконечно малой в точке a в силу индуктивного предположения. Поэтому $\sum_{i=1}^{n+1}f_i(x)$ представляет собой сумму двух бесконечно малых в точке a функций $g(x)$ и $f_{n+1}(x)$, а такая сумма является бесконечно малой в точке a функцией в силу теоремы . Следствие доказано.

Теорема 4.2. *Произведение бесконечно малой в точке a функции на ограниченную в окрестности точки a функцию есть бесконечно малая функция в точке a. Доказательство. Пусть $f(x)$ бесконечно малая в точке a функция, а $g(x)$*

– ограниченная функция в некоторой окрестности точки a (обозначим эту окрестность ω. Тогда существует такое число $M > 0$, что $\forall x \in \omega : |g(x)| \leqslant M$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ – бесконечно малая в точке a функция, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Возьмем $\delta_1 \leqslant \delta$ столь малым, что δ_1-окрестность точки a принадлежит ω. Тогда

$$\forall x \in \{0 < |x-a| < \delta_1\} : |f(x) \cdot g(x)| = |f(x) \cdot g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

а это и означает, что $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно малая в точке a функция.

Следствие. Произведение конечного числа ограниченных функций, из которых хотя бы одна – бесконечно малая в точке a, есть бесконечно малая в точке a функция.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые в точке a функции. Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется неопределенностью типа $\frac{0}{0}$.

Пример 4.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ *является неопределенностью типа* $\frac{0}{0}$

Определение 4.6. *Функция $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка (имеет более высокий порядок малости), чем $g(x)$ при $x \to a$, если*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Обозначение *$f = o(g)$ при $x \to a$ (символ $o(g)$ читается так: о-малое от g).*

Пример 4.6. $x^2 = o(x) \quad$ *при* $\quad x \to 0$

Определение 4.7. *Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка (имеют одинаковый порядок малости) при $x \to a$, если*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$$

Обозначение: $f = O(g)$ при $x \to a$ (символ $O(g)$ читается так: O-большое от g).

Пример 4.7. $2x^2 + x^3 = O(x^2)$ *при* $x \to 0$

Определение 4.8. *Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to a$, если*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение: *$f \sim g$ при $x \to a$.*

Пример 4.8. *1)* $x^2 + x^3 \sim x^2$ *при* $x \to 0$.

2) $\sin x \sim x$ *при* $x \to 0$.

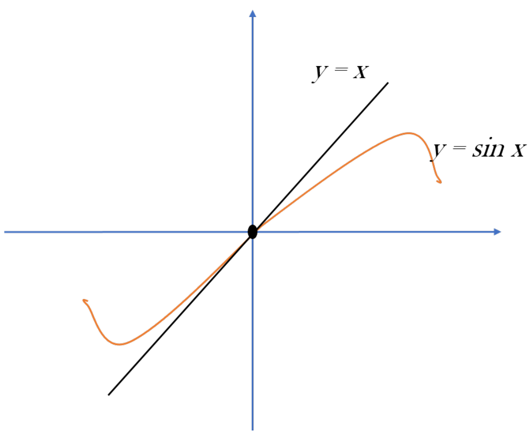

Рис. 4.1. График функции

Замечание. *Для неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ при $x \to a + 0$, $x \to a - 0$ и $x \to 1$ можно дать аналогичные определения.*

Свойства символа o-малое:

а) $o(g) \pm o(g) = o(g)$.

б) Если $f = o(g)$, то $o(f) \pm o(g) = o(g)$. Пример: $o(x^2) \pm o(x) = o(x)$.

в) Если f и g – бесконечно малые, то $f \cdot g = o(f), \quad f \cdot g = o(g)$.

г) Если $f \sim g$, то $f - g = o(f)$ и $f - g = o(g)$.

д) $o(c \cdot g) = o(g)$, если $c = const \neq 0$.

е) $o(g + o(g)) = o(g)$. Пример: $o(x + 2x^2) = o(x)$.

ж) $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$

Доказательство:

$$f - g = o(f) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f - g}{f} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f - g}{f} = \lim_{x \to a} \left[1 - \frac{g}{f} \right] = 0$$

Справедливость этих утверждений нетрудно доказать, используя определение символа «о-малое».

Замечание. Равенства с символом o-малое, как правило, верны только в одну сторону (слева направо). Например, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, или $o(x) \neq x^2$.

Сравнение бесконечно больших функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ называется *неопределенностью типа* $\frac{\infty}{\infty}$.

Определение 4.9. *Если* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, *то говорят, что* $f(x)$ *при* $x \to a$ *более высокий порядок роста, чем* $g(x)$.

Пример 4.9. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *имеет более высокий порядок роста при* $x \to 0$, *чем* $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \to \infty; \quad x \to 0$$

Определение 4.10. *Если* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$, *то говорят, что* $f(x)$ *и* $g(x)$ *при* $x \to a$ *имеют одинаковый порядок роста.*

Пример 4.10.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2}{x} \quad \text{при} \quad x \to 0$$

Лекция 5. Непрерывность функции. Часть 1

Определение непрерывности. Точки разрыва функции

Наглядное представление о непрерывной и разрывной функциях дают непрерывная и разрывная кривые, являющиеся графиками этих функций

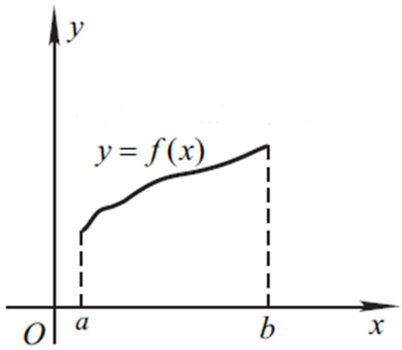

Рис. 5.1. График непрерывной функции

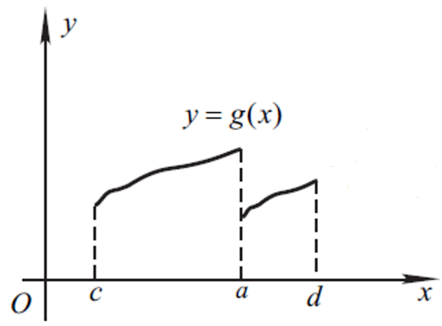

Рис. 5.2. Разрывная в точке a функция

Определение 5.1. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a.*

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** *в точке a, если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Пример 5.1. *Приведем два примера*

1) Функция $f(x) = \sin x$ *непрерывна в точке* $x = 0$, *поскольку* $\sin 0 = 0$ *и было доказано, что*

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0; \quad \sin 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0} = \sin 0; \quad \sin 0 = f(0)$$

2)Рациональная функция $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. *Если* $Q_m(a) \neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$$

То есть рациональная функция непрерывна в любой точке, в которой знаменатель не равен нулю.

Пример 5.2. ***(эквивалентное определение)***

Функция $f(x)$ *называется непрерывной в точке* a, *если* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\forall x \in \{|x-a| < \delta\} : |f(x) - f()a| < \varepsilon$$

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a > 0)$. Возьмем $\varepsilon = f(a)$. Тогда, согласно определению, существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon = f(a)$ в δ-окрестности точки a, т.е. $-f(a) < f(x) - f(a) < f(a)$. Из левого неравенства следует, что $f(x) > 0$ в δ-окрестности точки a.

Тем самым мы доказали, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и положительна в этой точке, то она будет положительной и в некоторой окрестности точки a (аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $f(x)$ отрицательна в точке a). Это свойство называется **устойчивостью знака** непрерывной функции.

Задача Установите, верны ли утверждения:

1) если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то функция $|f(x)|$ также непрерывна в точке a?

2) если функция $|f(x)|$ непрерывна в точке a, то и функция $f(x)$ непрерывна в точке a?

Если утверждение верно, то его необходимо доказать, если же неверно, привести контрпример. Первое утверждение верно, его нужно доказать. Второе – неверно, приведите примеры в виде формулы или геометрически.

Односторонняя непрерывность

Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки a, т.е. при $a \leqslant x < a+\delta$.

Определение 5.2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке a, если*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$$

Другая форма записи: $f(a+0) = f(a)$. Аналогичным образом определяется непрерывность слева в точке a:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{или} \quad f(a-0) = f(a)$$

Пример 5.3. *Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$ (целая часть x).*

Для любого $n \in Z$ имеем: $f(n+0) = n, f(n-0) = n-1$ и $f(n) = n$, поэтому функция $[x]$ непрерывна в точках $x = n$ только справа, а в остальных точках – и справа, и слева.

Теорема 5.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева и справа, то она непрерывна в точке a.*

Доказательство.

По условию

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$$
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$$

Согласно **теореме 3.1.** отсюда следует, что существует

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Это и означает, что $f(x)$ непрерывна в точке a. Теорема доказана. ■

Точки разрыва функции

Определение 5.3. *Предельная точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной, называется* ***точкой разрыва функции****.*

Пример 5.4. *Приведем три примера:*

1) Функция $f(x) = [x]$ разрывна в точках $x = n, n \in Z$.

2) Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

где $\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел, ***разрывна*** *во всех точках, так как $\forall a \in \mathbb{R} \lim\limits_{x\to a} D(x)$*

не существует

3) Функция $f(x) = x \cdot D(x)$ ***непрерывна*** *в точке $x = 0$, поскольку*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

В $\forall a \neq 0 \quad f(x)$ ***разрывна***

Классификация точек разрыва

1) **Устранимый разрыв**. Точка a называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$$

но в точке a функция $f(x)$ либо не определена, либо $f(a) \neq b$.

Если положить $f(a) = b$ (переопределить функцию в точке a), то разрыв будет устранен, т.е. функция станет непрерывной в точке a.

Пример 5.5. *Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{x}{x}, x \neq 0$.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Но в точке $x = 0$ эта функция не определена. Введем новую функцию $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$$

то функция $\tilde{f}(x)$ будет непрерывной в точке $x = 0$.

2) **Разрыв 1-го рода**

Точка a называется точкой разрыва 1-го рода функции $f(x)$, если существуют

$$\lim_{x \to a+0} f(x)$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x)$$

но они не равны: $f(a-0) \neq f(a+0)$

Пример 5.6. *Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$. Точки $x = n, n \in \mathbb{Z}$ являются* ***точками разрыва 1-ого рода*** *данной функции, так как*

$$f(n-0) = n-1, \quad a \quad f(n+0) = n \neq f(n-0)$$

3) **Разрыв 2-го рода**. Точка a называется **точкой разрыва** 2-го рода функции $f(x)$, если в этой точке не существует по крайней мере один из односторонних пределов $f(x)$.

Пример 5.7. *Приведем два примера:*

1) Точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-ого рода функции $\sin\frac{1}{x}$, так как оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to -0} \sin\frac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x \to +0} \sin\frac{1}{x}$ не существуют.

2) Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2-го рода функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}, \quad x \neq 0$, поскольку

$$\lim_{x \to 0-1} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \text{но}$$

$$\lim_{x \to 0+1} 2^{\frac{1}{x-1}} = \infty, \quad \text{то есть не существует}$$

Свойства непрерывных функций

Теорема 5.2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции*

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), f(x) = g(x) \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (при условии } g(a) \neq 0)$$

также непрерывны в точке a.

Доказательство.

Основано на определении непрерывности. По условию

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$$

Если выполнено условие $g(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

а это и означает справедливость утверждения теоремы. ■

Понятие сложной функции

Пусть аргумент t функции $y = f(t)$ является не независимой переменной, а функцией независимой переменной $t = \varphi(x)$.

Тогда говорят, что переменная y является **сложной функцией** переменной x (или суперпозицией функций f и φ) и пишут $y = f(\varphi(x))$.

Пример 5.8. $y = \sin(x^3)$ – *сложная функция:* $y = \sin t$, *где* $t = x^3$

Теорема 5.3. *Пусть функция $t = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$, $\varphi(a) = b$, а функция $y = f(t)$ непрерывна в точке b. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x = a$.*

Доказательство.

Нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)),$$

то есть $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ такое, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \textit{при условии, что} |x-a| < \delta$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке b, то $\exists\gamma > 0$, такое, что $|f(t) - f(b)| < \varepsilon$ при $|t-b| < \gamma$, откуда следует, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \textit{при} |\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma$$

В свою очередь, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке a для указанного γ существует $\delta > 0$, такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma \quad \textit{при} |x-a| < \delta$$

Следовательно

$$|x-a| < \delta, \quad \textit{то} \quad |f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon$$

Теорема доказана. ∎

Определение 5.4. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Пример 5.9. *рациональная функция $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ непрерывна на любом интервале, на котором $Q_m(x) \neq 0$.*

В частности, $f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a,b]$ при $(a < b)$, если она непрерывна в каждой внутренней точке сегмента $[a,b]$, непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

Теорема 5.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $f(c) = 0$.*

Доказательство.

Пусть для определенности $f(a) < 0, f(b) > 0$. Тогда в силу устойчивости знака непрерывной функции $f(x) < 0$ в некоторой правой полуокрестности точки a. Рассмотрим множество X таких чисел $\tilde{x}$ сегмента $[a,b]$, для которых $f(x) < 0$ на $[a,\tilde{x})$, то есть $X = \{\tilde{x} : f(x) < 0$ при $a \leqslant x < \tilde{x}\}$. Это множество ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань.

Пусть $\sup X = c$.

$$\forall x < c : f(x) < 0$$

Действительно, если $x < c$, то x не является верхней гранью множества X и значит существует число $\tilde{x} \in X$, такое, что $\tilde{x} > x$. Так как $f(x) < 0$ при $a \leqslant x < \tilde{x}$, то $f(x) < 0$.

Докажем, что $f(c) = 0$ методом от противного. Допустим, что $f(c) < 0$. Тогда в силу устойчивости знака непрерывной функции $f(x) < 0$ в некоторой окрестности точки c и, следовательно, $\exists \tilde{x} > c$, такое, что $f(x) < 0$ при $a \leqslant a < x$, а это противоречит тому, что $\sup X = c$.

Допустим теперь, что $f(c) > 0$. Тогда в силу устойчивости знака непрерывной функции $f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки c, и, следовательно, $\exists x < c : f(x) > 0$, что противоречит неравенству $\forall x < c : f(x) < 0$.

Итак, мы заключаем, что $f(c) = 0$. Теорема доказана. ■

Лекция 6. Непрерывность функции. Часть 2

Следствие. (Теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.)

Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, причем $f(a) = A, f(b) = B$. Тогда

$$\forall C \in (A,B) \quad \exists c \in (a,b) : f(c) = C$$

Доказательство

Пусть для определенности $A < B, \quad A < C < B$. Введем функцию $g(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на сегменте $[a,b]$, причем

$$g(a) = f(a) - C = A - C < 0$$

$$g(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

По теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение существует такая точка $c \in (a,b)$, что $g(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, откуда $f(c) = C$. Что и требовалось доказать.

Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и пусть Y – множество ее значений. Пусть каждое $y \in Y$ соответствует ровно одному значению x из множества X. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств X и Y .

Поставим в соответствие каждому y из Y то число x из X, для которого $f(x) = y$. Тем самым на множестве Y будет определена функция, которая называется **обратной** по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначается $x = f^{-1}(y), \quad y \in Y$.

Очевидно, обратной по отношению к функции $x = f^{-1}(y)$ является функция $y = f(x)$. Поэтому эти две функции называются **взаимно обратными**.

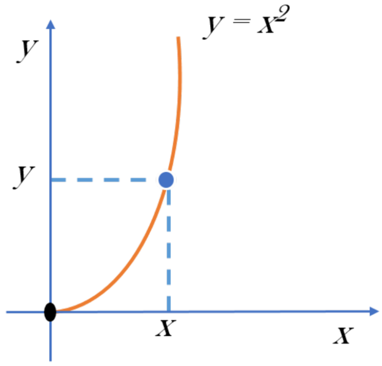

Рис. 6.1. График функции $y = x^2$

Пример 6.1. *Приведем два примера.*

1) Рассмотрим функцию $y = x^2, \quad x \in X,\ X = [0, +\infty)$. *Множество ее значений* $Y = [0, +\infty)$.

Обратной по отношению к этой функции будет функция $x = \sqrt{y}$, *определенная на множестве* Y. *Можно записать так:*

$$x = y^{\frac{1}{2}}, \quad y \in Y$$

2) Рассмотрим функцию $y = x^2$, *определенную на множестве* $X = (-\infty, +\infty)$. *То есть область определения - вся числовая прямая.*

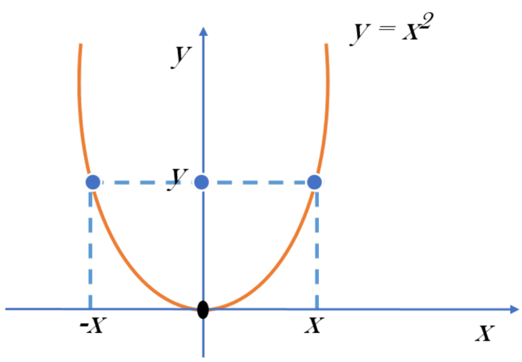

Рис. 6.2. График функции $y = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

В этом случае, как и в примере 1, $Y \in [0, +\infty)$, *но обратной функции не существует, поскольку соответствие, устанавливаемое данной функцией меж-*

ду элементами множеств X и Y , не является взаимно однозначным (каждому значению y соответствует два симметричных значения x).

Теорема 6.1. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна (либо возрастает, либо убывает) и непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда:*

1) множеством значений функции $y = f(x)$ является сегмент $Y = [f(a), f(b)]$;

2) на сегменте Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$;

3) обратная функция также строго монотонна на Y;

4) обратная функция непрерывна на сегменте Y.

Доказательство.

Пусть (для определенности) функция $y = f(x)$ возрастает на $[a,b]$. Все утверждения теоремы наглядно очевидны.Проведем аккуратное доказательство.

1) Согласно следствию из теоремы (доказанному) непрерывности функция $y = f(x)$ принимает все значения от $f(a)$ до $f(b)$, а так как она возрастает на сегменте $[a,b]$ она не имеет значений, меньших $f(a)$ и больших $f(b)$. Таким образом, множеством ее значений является сегмент $Y = [f(a), f(b)]$

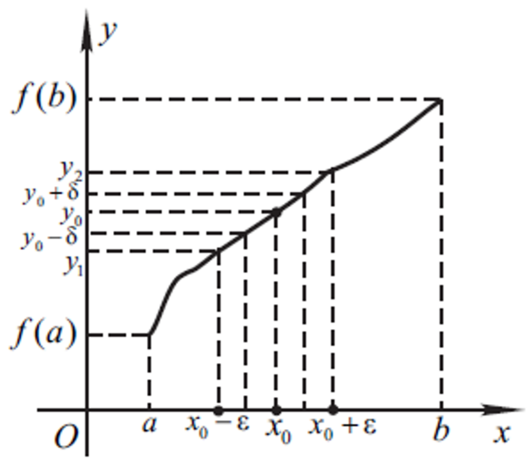

Рис. 6.3. График функции, непрерывной на сегменте $[a,b]$

2) Каждое число $y \in Y$ соответствует ровно одному числу $x \in [a,b]$. Действительно, если предположить, что некоторое y из Y соответствует двум числам x_1 и x_2 из $[a,b]$, $\quad x_1 x_2$). Пусть $x_1 > x_2$.

Тогда получим $f(x_1) > f(x_2)$, а это противоречит возрастанию функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Следовательно, на сегменте Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

3) Докажем, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y . Пусть $y_1, y_2 \in Y, y_1 < y_2$. Нужно доказать, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Положим $f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$. Нужно доказать, что $x_1 < x_2$, то есть $f^{-1}(y_1) < f-1(y_2)$ Положим противное – допустим, что $y_1 < y_2$, но $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$.

Обозначим $f(y_1) = x_1$, $f(y_2) = x_2$. Иначе можно записать так: $f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2$, поскольку функции взаимно обратные. Тогда так как $f(x)$ – возрастающая функция, то из нашего предположения, что $x_1 \geqslant x_2$ последует, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то есть $y_1 \geqslant y_2$. Это противоречит неравенству $y_1 < y_2$.

Полученное противоречие доказывает, что обратная функция возрастает на сегменте Y.

4) Докажем, что обратная функция непрерывна на сегменте Y. По определению функция непрерывна на сегменте, если она непрерывна в каждой внутренней точке, а в граничных точках непрерывна с одной стороны. Докажем, что $x = f^{-1}(y)$ непрерывна в любой внутренней точке $y_0 \in Y$. В граничных точках рассуждения будут аналогичны.

Для этого нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f^{-1}(y) - |f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ в δ-окрестности точки y_0 (то есть $\forall y \in |y - y_0| < \delta$). Обозначим значение обратной функции в точке y_0: $f^{-1}(y_0) = x_0$. Надо доказать, что $\exists \delta > 0 : |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$ в δ-окрестности точки y_0.

Обозначим $f(x_0 - \varepsilon) = y_1, f(x_0 + \varepsilon) = y_2$. Так как $y = f(x)$ – возрастающая функция, то $y_1 < y_0 < y_2$. А так как обратная функция также возрастающая, то $\forall y \in (y_1, y_2)$ соответствующее значение $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Возьмем любую δ-окрестность точки y_0, которая лежит в интервале (y_1, y_2). Тогда для любого значения y из этой δ-окрестности значения обратной функции будут принадлежать δ-окрестности точки x_0, т.е. $\forall y \in \{|y - y_0| < \delta\}$ выполняется неравенство $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ■

Непрерывность элементарных функций

Используя доказанную теорему, докажем непрерывность элементарных функций.

1) Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Ранее было доказано, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$, откуда следует непрерывность $\sin x$ в точке $x = 0$. Иначе можно записать

$$\sin x \to 0 = \sin = 0 \quad при x \to 0$$

Докажем непрерывность функции $y = \sin x$ в произвольной точке $x = a \in \mathbb{R}$. Нужно доказать, что $\sin x \to \sin a$ при $x \to a$, или, что то же самое,

$$\sin x - \sin a \to 0 \quad при \quad x \to a$$

Имеем:

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2} \quad при \to a$$

В этой формуле 2 постоянный множитель, $\cos\frac{x+a}{2}$ – ограниченная функция, $|\cos\frac{x+a}{2}| \leqslant 0$, аргумент $\frac{x-a}{2} \to 0$, то есть $\sin\frac{x-a}{2} \to 0 \quad при \quad x \to a$.

Поэтому можно записать так:

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2} \to 0 \quad при \quad x \to a$$

Мы доказали непрерывность функции $\sin x$ в любой точке a.

Введем обратную функцию. Рассмотрим функцию $y = \sin x, x \in X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Это непрерывная и возрастающая функция на X. То есть если x_1 и $x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $x_1 < x_2$, то

$$\sin x_1 < \sin x_2$$

Это следует из формулы:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \cos\frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$$

$$\frac{x_2+x_1}{2}>0$$
$$2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0$$

Значит, $\sin x$ – возрастающая функция. По доказанной теореме множеством значений $f=\sin x$, где $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ является сегмент $Y=[\sin-\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2}]=[-1,1]$.

На сегменте $[-1,1]$ существует обратная функция $x=\arcsin y, y\in[-1,1]$. Эта обратная функция возрастающая и непрерывная.

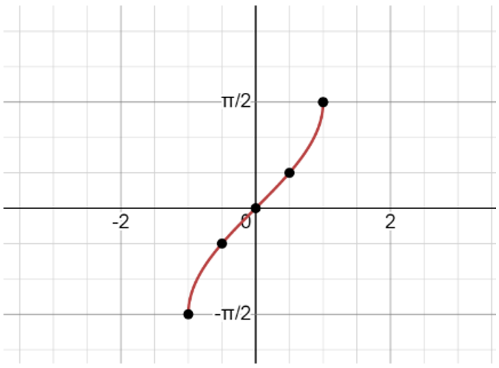

Рис. 6.4. График функции $y=\arcsin x$

2) Функция $y=cosx$ и обратная ей $x=\arccos y$, где $y\in[-1,1]$ рассматривается по образу и подобию $\sin$ и $\arcsin$. **Сделать самостоятельно**.

3) Рассмотрим функцию $y=tgx$. По определению

$$y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

При этом исключаются точки, где $\cos x$ обращается в нуль:

$$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Функция $y=\operatorname{tg}x$ непрерывна во всех точках, кроме указанных, как частное двух непрерывных функций.

Введем обратную функцию. Рассмотрим функцию $Ey=\operatorname{tg}x$ на сегменте $[-\frac{\pi}{2}+\delta,\frac{\pi}{2}-\delta]$.

На этом сегменте функция $x=\operatorname{arctg}y$ определена, возрастает и непрерывна на всей числовой прямой $(-\infty,+\infty)$

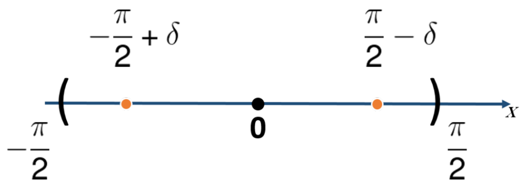

Рис. 6.5. Сегмент $[-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta]$

Возрастание следует из формулы:

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$$

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0, \textit{если}$$

$$x_2 > x_1, \quad x_1, x_2 \in [-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta]$$

По теореме множеством значений данной функции является сегмент

$$[\operatorname{tg} -\frac{\pi}{2}+\delta, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}-\delta]$$

То есть это сегмент, ограниченный значениями tg в концевых точках сегмента. На этом сегменте Y существует обратная функция (она обозначается $x = \operatorname{arctg} y, \quad y \in Y$), возрастающая и непрерывная.

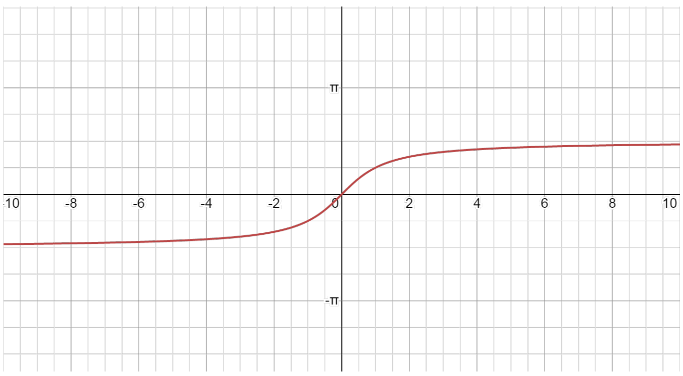

Рис. 6.6. График $y = \operatorname{arctg} x$

Так как при $\delta \to +$

$$\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2}+\delta) \to -\infty$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\delta) \to +\infty$$

то $\forall y \quad \exists \delta > 0$, такое, что

$$y \in [\operatorname{tg} -\frac{\pi}{2} + \delta, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} - \delta]$$

Следовательно, функция $x = \operatorname{arctg} y$ определена для любого $y \in (-\infty, +\infty)$ и на всей числовой прямой является возрастающей и непрерывной.

4) Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$. По определению:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Обратная функция $x = \operatorname{arcctg} y$, $y \in (-\infty, +\infty)$

Непрерывность, монотонность доказываются аналогично доказательству для ctg. Докажите самостоятельно.

5) **Степенная функция** $y = x^n$, где n – натуральное число. Она непрерывна в каждой точке как произведение n непрерывных функций, равных x.

При любом натуральном показателе эта функция определена для любого x. Но обратная функция, $\sqrt[n]{x}$ не будет существовать для отрицательных x

Поэтому нужно рассматривать данную функцию на полупрямой $[0, +\infty)$, где $a > 0$ – произвольное неотрицательное фиксированное число. Чтобы применить доказанную теорему, нужно ограничиться сегментом.

Рассмотрим данную функцию на сегменте $[0, a]$, где $a > 0$ – произвольное положительное число. Функция непрерывна как произведение n непрерывных функций, равных x. Функция возрастающая: чем больше x, тем больше x^n. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент $Y = [0, a^n]$.

На сегменте Y существует обратная функция. Она обозначается $x = \sqrt[n]{y}$ или $x = y^{\frac{1}{n}}$, $y \in Y$. Функция возрастающая и непрерывная.

Так как $\forall y > 0 \quad \exists a \quad : y\, in [0, a^n]$, то $x = \sqrt[n]{y}$ определена на полупрямой $[0, +\infty)$, является на этой полупрямой возрастающей и непрерывной. Для любого положительного натурального n и любого целого m положим

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$$

Таким образом мы определили степенную функцию с любым рациональным показателем.

6) **Показательная функция** $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$.

Для рациональных показателей степени a^x определена в предыдущем примере. Для рациональных показателей степени показательная функция обладает следующими свойствами:

1) если $r_1 > r_2$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;

2) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;

3) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

4) $a^0 = 1$ (по определению);

5) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ (по определению);

6) $a^r b^r = (ab)^r$;

7) $\forall r : a^r > 0$.

Определим теперь a^x для любого вещественного числа x. Пусть $a > 1$, x – произвольное вещественное число.

Рассмотрим множество $\{a^r\}$, где r – любое рациональное число, не превосходящее x. Это множество ограничено сверху, например, числом $a^{\bar{r}}$, где $\bar{r}$ – любое рациональное число, большее x.

Следовательно, это множество имеет точную верхнюю грань, то есть существует $\sup\{a^r\}$. По определению:

$$a^x = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r \leqslant x} \{a^r\}$$

Можно определить a^x иначе:

$$a^x = \inf_{R \in \mathbb{Q}, R \geqslant x} \{a^R\}$$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, тогда

$$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$$

Лекция 7. Непрерывность функции. Часть 3

Показательная функция a^x, где $a > 0, \quad a \neq 1$ Для рациональных x эта функция определена, определим ее для иррациональных x.

Берем случай, когда $a > 1$. Рассматриваем множество рациональных чисел $\{r - -\textit{рациональное число}, r \leqslant x\}$

Рассматриваем множество $\{a^r\}$, где r – рациональные числа. Это множество ограничено сверху, то есть имеет точную верхнюю грань. По определению:

$$a^x = \sup_{r \in Q, r \leqslant x} \{a^r\} \quad (1)$$

Доказательство этого тривиально. Если x рациональное и рассматриваем множество для $r \leqslant x$, то наибольшее a^r будет при $r = x$. Тогда $\sup\limits_{r \in Q, r \leqslant x} \{a^r\} = a^r$ Докажите самостоятельно.

Можно определить a^x иначе.

$$a^x = \inf_{r \in Q, r \geqslant x} \{a^r\} = a^r \quad (2)$$

Докажите самостоятельно эквивалентность определений (1) и (2).

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Тогда

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

Можно доказать, что функция a^x для любых вещественных x обладает такими же свойствами, как и отмеченные свойства для рациональных x. В частности a^x – строго монотонная функция. Если основание $a > 1$, то возрастающая, если основание $a < 1$, то убывающая.

Докажем непрерывность функции a^x в любой точке.

Рассмотрим случай, когда $a > 1$. Докажем, что a^x непрерывна в произвольной точке $x = c$. Используя определение (1) докажем непрерывность a^x в точке c слева. Для этого нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется левая полуокрестность точки c, в которой ($\forall x$ из этой полуокрестности) выполняется неравенство:

$$|a^x - a^c| < \varepsilon$$

Можно записать иначе:

$$a^c - a^x < \varepsilon$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению (1) $a^c = \sup\limits_{r \in Q, r \leqslant c} \{a^r\}$.

Рассмотрим $a^c - \varepsilon$. Понятно, что $a^c - \varepsilon < a^c$. По определению точной верхней грани найдется $\tilde{r} < c$ такое, что $a^{\tilde{r}} > a^c - \varepsilon$.

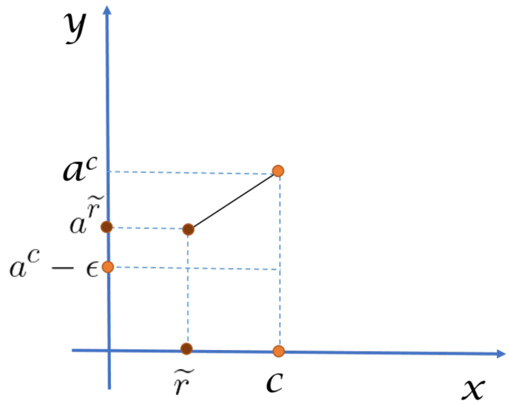

Рис. 7.1. График функции при $a^x > a^{\tilde{r}}$, если $\tilde{r} < x \leqslant c$

Так как a^x – возрастающая функция, то $a^x > a^{\tilde{r}}$, если $\tilde{r} < x \leqslant c$. Из этих двух неравенств следует, что $a^x > a^c \ - \varepsilon$ при $\tilde{r} < x \leqslant c$. то есть $a^c - a^x < \varepsilon$ в левой полуокрестности $(\tilde{r}, c]$ точки c. Что и требовалось доказать.

Аналогично, используя определение (2) можно доказать непрерывность a^x в точке c справа. Из непрерывности a^x в точке c слева и справа следует непрерывность функции a^x в точке c.

Введем обратную функцию. Для показательной функции обратной является логарифмическая.

Рассмотрим функцию $y = a^x$ на произвольном сегменте $[b, c]$. На этом сегменте $y = a^x$ строго монотонна и непрерывна. Поэтому согласно *теореме 5* множеством значений данной функции является сегмент

$$Y = [a^b, a^c]$$

На сегменте Y существует обратная функция

$$x - \log_a y$$

Эта обратная функция строго монотонна и непрерывна. Так как $\forall y > 0$ найдутся b и c такие, что $a^b < y < a^c$, то $y = \log_a y$ определена, строго монотонна и непрерывна на полупрямой $(0, +\infty)$.

Если $a = e$, то показательная функция e^x называется **экспонентой**, а $\log_e x$ обозначается $\ln x$ и называется **натуральным логарифмом**.

7) Степенная функция с произвольным вещественным показателем.

Рассмотрим функцию $y = x^\alpha$. α – произвольное действительное число, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Эта функция непрерывна на прямой $x > 0$, потому что:

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = e^t, \quad t = \alpha \ln x$$

x^a – суперпозиция двух непрерывных функций e^t и $t = \alpha \ln x$. Следовательно x^α - непрерывная функция как суперпозиция двух непрерывных функций согласно теореме о непрерывности сложной функции.

Рассмотренные семь функций называются **основными элементарными функциями**. Любая функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций, называется просто **элементарной функцией**, а множество всех элементарных функций называется **классом элементарных функций**. Например,

$$y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

Из непрерывности основных элементарных функций следует, что любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в окрестности которой она определена.

Пример 7.1.

$$y = \sqrt{\cos x - 1}$$

Это элементарная функция. Она определена только на дискретном множестве точек $x = 2\pi n, \quad n \in Z$.

Чтобы ввести понятие непрерывности функции, функция должна быть определена в окрестности точки.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Этот предел является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$

Доказательство.

Ранее было доказано, что

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x \quad \textit{при} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \textit{при} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

В силу четности функций $\cos x$ и $\sin x = x$ эти неравенства верны также при $\frac{\pi}{2}<x<0$.

Перейдем к пределу при $x\to 0$. Поскольку $\cos x\to 1$ (в силу непрерывности функции $\cos x$) и $1\to 1$ при $x\to 0$, то, согласно теореме, $\sin\frac{x}{x}\to 1$ при $x\to 0$, что и требовалось доказать. ■

Следствия 1) Так как $\sin x\tilde{x}$ при $x\to 0$, то $\sin x-x=o(x)$, откуда получаем простейшую асимптотическую формулу для функции $\sin x$ при $x\to 0$:

$$\sin x=x+o(x)$$

$$\textit{Здесь} \quad (x)=-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

2)

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Доказательство.

Доказательство будет основано на первом замечательном пределе.

$$\mathit{lim}_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$$

Отсюда получаем

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x\to 0$$

$$\Rightarrow 1-\cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2)$$

$$\Rightarrow \cos x = 1-\frac{x}{2}+o(x)^2$$

■

3)

$$\operatorname{tg} x = x + o(x) \quad при x\to 0$$

Здесь $o(x) = x^3 3 + o(x^3)$ *Докажите самостоятельно.* Для доказательства рассмотрите предел отношения $\operatorname{tg} x$ к x.

Асимптотические формулы очень удобны для вычисления пределов.

Пример 7.2. *Рассмотрим два примера.*

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x+2\sin^2 x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right)+2(x+o(x))^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}+o(x^2)+2x^2+o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{13}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{13}{2}$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$$

Первая попытка*, используем простейшие асимптотические формулы, получим:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)-(x+o(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^3} = ?$$

Но предел можно вычислить другим способом. ***Вторая попытка****, используем первый замечательный предел.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\to\left(\frac{1}{2}\right)\textit{при}\quad x\to 0$$

Второй замечательный предел

Утверждение о втором замечательном пределе выглядит так:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Этот предел является неопределенностью типа 1^{∞}. По определению

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Положим $\frac{1}{n}=x$, тогда $n=1x$, $x\to 0$ при $n\to+\infty$ и мы получаем

$$\lim_{n\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Однако, это еще не доказывает, что второй замечательный предел имеет место, т.к. при таком подходе $x\to 0$, принимая лишь значения $\frac{1}{n}$, где $n\in\mathbb{N}$, а нужно доказать справедливость предельного равенства при любом способе стремления x к нулю, в том числе и когда x принимает отрицательные значения.

Введем функцию

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]},\quad x\geqslant 1$$

Если $n\leqslant x\leqslant 1$, где $n\in\mathbb{N}$, то $[x]=n$. Следовательно

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Воспользуемся неравенствами. При $x\geqslant 1$ справедливы такие неравенства:

$$[x]\leqslant x<[x+1]=[x]+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{[x]}$$

Ко всем трем частям прибавим единицу:

$$1+\frac{1}{[x+1]} \leqslant 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{[x]}$$

Возведем неравенства в степень:

$$\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x+1]-1} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = f(x)$$

$$\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x+1]-1} = f(x+1)\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{-1} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant f(x)\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

Через цепочку преобразований мы подошли к важным неравенствам. Пусть $x \to +\infty$. Левая и правая части последнего двойного неравенства, очевидно, стремятся к e. Следовательно, мы доказали, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Положим $\frac{1}{x} = y$. Тогда $y \to +0$ при $x \to +\infty$ и мы получаем:

$$\lim_{y\to+0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Для удобства перепишем последнее равенство в виде:

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{7.1}$$

Это и есть второй замечательный предел, но только справа. Докажем теперь, что предел слева тоже равен e.

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{7.2}$$

Тогда из (7.1) и (7.2) по теореме о пределах последует, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Это доказывается с помощью простых преобразований. Рассмотрим

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Положим $y = -x$. Тогда $y \to +0$ при $x \to -0$. Значит можно записать так:

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +0}(1-y)^{-\frac{1}{y}} =$$

$$= \lim_{y\to +0}\left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to +0}\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}$$

Введем еще одно обозначение. Пусть $z = \dfrac{y}{1-y}$. Если $y \to +0$, то $z \to +0$ при $x \to -0$. Из $z = \dfrac{y}{1-y}$ следует, что $\frac{1}{z} = \frac{1}{y} - 1$. Это значит, что $\frac{1}{y} = \frac{1}{z} + 1$. Таким образом можно продолжить равенство:

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to +0}(1+z)^{\frac{1}{z}}(1+z)$$

$\lim\limits_{x\to -0}$ – это первый замечательный предел справа.

$$\lim_{z\to +0}(1+z)^{\frac{1}{z}} \to e$$

$$(1+z) \to 1, \quad \Rightarrow \lim_{x\to -0} = e$$

Равенство 8.2 доказано, тем самым доказан второй замечательный предел.

Лекция 8. Производные функций

Равенство $\lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ – это второй замечательный предел.

Приведем два примера.

Пример 8.1.

$$y = \log_a(1+x)$$

При $x \to 0$ эта функция стремится к нулю. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$$

Значение легко вычислить с помощью второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \to e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Функции, предел отношений которых равен единице, называются эквивалентными функциями.

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка.

$$log_a(1+x) - \frac{x}{\ln a} = o(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

Мы получили асимптотическую формулу для логарифмической функции. Как частный случай, если $a = e$,

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0 \tag{8.1}$$

В данном случае $o(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Пример 8.2. *Второй пример. Рассмотрим*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

Здесь $x \to 0$, показательная функция – непрерывная функция, $a^x \to a^0$, то есть $a \to 1$. Значит, числитель стремится к нулю, знаменатель - тоже к нулю. То есть это неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Сделаем замену переменной: обозначим $a^x - 1 = y$. Тогда $x = \log_a(1+y)$. $y \to 0$ при $x \to 0$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\quad\frac{y}{\log_a(y+1)} = \ln a$$

$$a^x - 1 - x\ln a = o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

$$a^x \sim 1 + x\ln a + o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

Поэтому имеет место асимптотическая формула

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0 \tag{8.2}$$

$$a^x - 1 - x\ln a = o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

В частности, для $a = e$ получаем формулу

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

$$o(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Производные и дифференциалы

Определение производной. Производные некоторых основных элементарных функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Зафиксируем какую-нибудь точку x из (a,b) и рассмотрим другую точку $x+\Delta x$ этого интервала. Величину Δx назовем **приращением аргумента функции** в точке x.

Составим разность

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

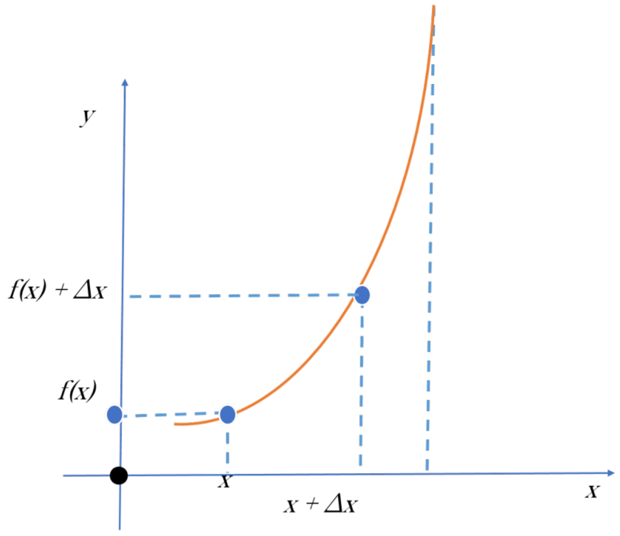

Рис. 8.1. График функции

При фиксированной точке x эта разность является функцией аргумента Δx. Она называется **приращением функции** $y = f(x)$ в точке x. При этом $\Delta x \neq 0$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x) + \Delta x - f(x)}{\Delta x}$$

Оно также является функцией аргумента Δx.

Определение 8.1. *Если существует*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

то он называется ***производной функции*** $y = f(x)$ *в точке* x. *Обозначения производной:* $f'(x)$ *или* $y'(x)$. *В физике часто используется обозначение* $\dot{y}(x)$, *обычно в том случае, когда* x *– время. Несколько позже мы введем еще одно обозначение:* $\frac{dy}{dx}$, *но это будет не единый символ, а дробь, в которой числитель и знаменатель имеют свой смысл.*

Пример 8.3. *Постоянная функция* $y = c$, *где* c *– некоторое число.* $x \in X$ *Так как* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$, *то*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad \text{то есть} \quad c' = 0$$

Пример 8.4. *Степенная функция* $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Найдем приращение функции:*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= (x+\Delta x)^n - x^n =$$

$$= x^n + nx^{n-1}\cdot\Delta x + n(n-1)x^{n-2}\cdot\frac{(\Delta x)^2}{2} + \ldots + (\Delta x)^n - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\cdot\Delta x + o(\Delta x) \quad \textit{при} \quad \Delta x \to 0$$

Отсюда следует:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to nx^{n-1} \quad \textit{при} \quad x \to 0$$

то есть

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Позднее мы докажем, что эта формула верна для любого вещественного числа n *и любого* $x > 0$.

Пример 8.5.

$$y = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Вычислим производную $\sin x$, *пользуясь определением производной.*

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\Delta x \to 0$$

Здесь мы воспользовались формулой $\sin\frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta y}{2} + o(\Delta x)$ *при* $x \to 0$. *Используя теперь непрерывность функции* $\cos x$, *получаем:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(1+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$$

$$\Delta x \to 0$$

То есть доказано, что

$$(\sin x)' = \cos x \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Пример 8.6. *Так же доказывается, что*

$$(\cos x)' = -\sin x \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Пример 8.7. *Логарифмическая функция* $y = log_a x \quad (x > 0)$. *Так как*

$$\Delta y = log_a(x + \Delta x) - log_a x = log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Так как $\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x) \quad$ *при* $\quad x \to 0$, *то получаем:*

$$log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x \ln a} + o(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to \frac{1}{x \ln a} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$$

То есть получаем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{для любого} \quad x > 0$$

В частности если $a = e$, *то:*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Пример 8.8. *Показательная функция* $y = a^x$, *где* $(a > 0; a \neq 1)$ *Составим приращение* y:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x =$$
$$= a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

Воспользуемся формулой $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ *при* $x \to 0$. *Тогда:*

$$a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x(1 + \Delta x \ln a + o(\Delta x) - 1)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\left(\ln a + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) \underset{\Delta x \to 0}{\to} a^x \ln a$$

То есть получаем:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

В частности если $a = e$, *то*

$$(e^x)' = e^x$$

Односторонние производные

Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) + \Delta x}{\Delta x}, \quad \Delta x > 0$$

Определение 8.2. *Рассмотрим предел:*

$$\lim_{\Delta \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если такой предел существует, то он называется ***правой производной*** *функции $y = f(x)$. Обозначается $f'_{пр}(x)$. То есть*

$$\lim_{\Delta \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{пр}(x)$$

Аналогично определяется левая производная функции $y = f(x)$ в точке x:

$$\lim_{\Delta \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{лев}(x)$$

Функция $y = f(x)$ может иметь в какой-то точке не равные односторонние производные.

Пример 8.9. *Рассмотрим функцию $y = |x|$.*

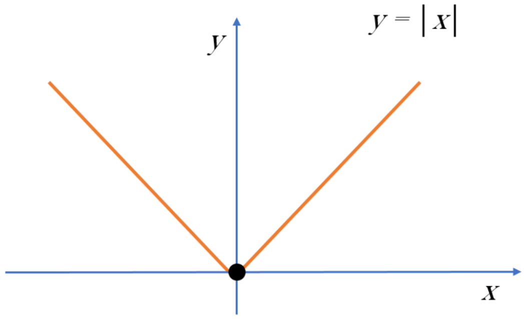

Рис. 8.2. График функции $y = |x|$

В точке $x = 0$ имеем

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) =$$

$$= |\Delta x| =$$

$$= \begin{cases} \Delta x, & \text{если } x > 0; \\ -\Delta x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, правая производная функции $y = |x|$ в точке 0 равна 1, а левая производная равна -1. Производной в этой точке функция $y = |x|$ не имеет.

Частные производные

Рассмотрим функцию не одной, а нескольких переменных. Возьмем функцию

$$z = f(x,y)$$

Если зафиксировать значение одной из переменных, например y, то функция z станет функцией одной переменной x. Производная этой функции называется **частной производной** функции $z = f(x,y)$ по аргументу x и обозначается

$$z'_x$$

Аналогично определяется частная производная z'_y по аргументу y.

Пример 8.10. *Рассмотрим функцию $z = xy$. Тогда*

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}$$

$$z'_y = x^y \cdot \ln x$$

Физический и геометрический смысл производной

Физический смысл производной

Пусть x – время, а $y = f(x)$ – координата точки, движущейся по оси y, в момент времени x.

Рис. 8.3. Физический смысл производной

Зафиксируем какой-то момент времени x и рассмотрим приращение функции $y = f(x)$ за время Δx:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

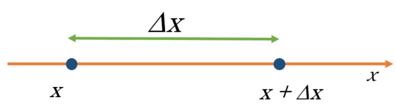

Рис. 8.4. Ось времени

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = V_{\text{ср}}$$

представляет собой **среднюю скорость** точки на промежутке времени от момента x до момента $x+\Delta x$, а величина

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = V(x) = f'(x)$$

является **мгновенной скоростью** точки в момент времени x. В случае произвольной функции $y = f(x)$ производная $f'(x)$ характеризует **скорость изменения** переменной y (функции) по отношению к изменению аргумента x.

Геометрический смысл производной

Пусть задана прямоугольная система координат и дана прямая l.

Обозначим буквой α величину угла, на который нужно повернуть ось Ox, чтобы совместить ее положительное направление с одним из направлений на прямой l, причем

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется угловым коэффициентом прямой l в данной системе координат.

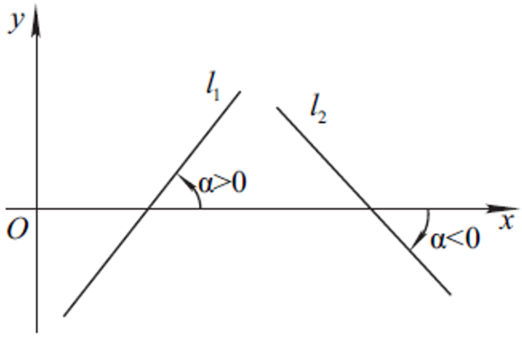

Рис. 8.5. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, т.е. множество точек $f(x, f(x)), x \in X$, где X – область определения этой функции. Отметим на графике точки $M(x, f(x))$ и $N(x+\Delta x, f(x+))$.

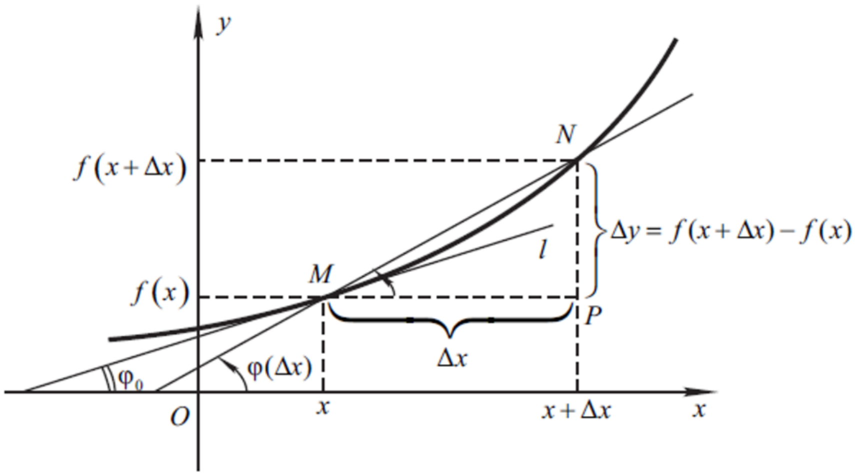

Рис. 8.6. $y = f(x)$

Прямая MN называется **секущей** по отношению к графику функции. Величину угла между секущей MN и осью Ox обозначим $\phi(\Delta x)$.

Если $\phi_0 \neq \frac{\pi}{2}$ и $\phi_0 \neq -\frac{\pi}{2}$, то прямая l, проходящая через точку $M(x, f(x))$ и имеющая угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\phi_0$ называется **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M.

Говорят также, что прямая l является **предельным положением** секущей

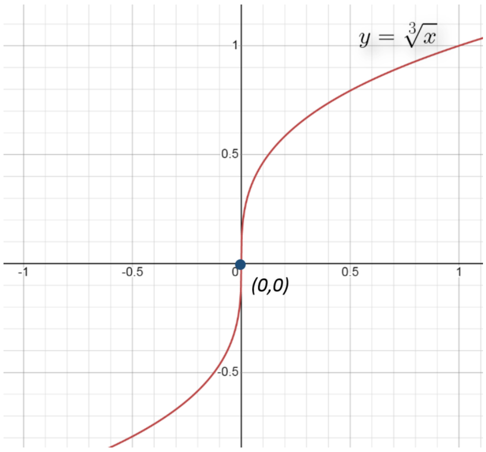

Рис. 8.7. Пример функции

MN при $\Delta x \to 0$. В соответствии с этим можно сказать, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$ есть **предельное положение** секущей MN при $\Delta x \to 0$.

Теорема 8.1. *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, то график функции имеет в точке $M(x, f(x))$ касательную, причем угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$.*

Доказательство.

Из треугольника MNP (Рис. 8.6) получаем:

$$tg\phi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \phi(\Delta x) = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользуемся тем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

и $\operatorname{arctg} t$ – непрерывная функция. Получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\phi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0}\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x)$$

Отсюда по определению касательной следует, что существует касательная к графику функции в точке $M(x, f(x))$. При этом

$$\phi_0 = \lim_{\Delta x \to 0}\phi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x)$$

и, следовательно, для углового коэффициента касательной получаем равенство $k = \operatorname{tg}\phi_0 = f'(x)$. Теорема доказана. ■

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Дифференцируемость и дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то есть существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Введем функцию

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

Функция $\alpha(\Delta x)$ определена при $\Delta x \neq 0$ и является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Из равенства получаем

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0$$

Равенство будет верным и для $\Delta x = 0$, если доопределить каким-нибудь образом функцию $\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x = 0$. Для дальнейшего удобно положить $\alpha(0) = 0$, то есть доопределить $\alpha(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ по непрерывности. $f'(x)$ не зависит от Δx, т.е. для данной точки x является некоторым числом.

Итак, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $x \to 0$, $\quad \alpha(0) = 0$.

Пусть теперь дано, что приращение функции $y = f(x)$ в точке x имеет вид

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

где A – некоторое число, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $x \to 0$, $\alpha(0) = 0$.

В этом случае функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, причем $f'(x) = A$. Получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} = f'(x) = A$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

где $A = f'(x)$, и **обратно**, если приращение функции в точке x можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

то она имеет в точке x производную, причем $f'(x) = A$, т.е. существование производной функции в точке x и представление приращения функции в указанном виде являются **эквивалентными свойствами функции**.

Лекция 9. Производные и дифференциалы. Часть 1

Наряду с понятием производной мы ввели эквивалентное понятие.

$$y = f(x)$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

x - фиксированная точка, Δx может меняться. То есть приращение - это функция аргумента Δx.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Эквивалентное определение: функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

A – некоторое число, $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть она бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. $\alpha(0) = 0$.

Таким образом для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x **необходимо и достаточно** чтобы функция имела производную в точке x.

Операцию вычисления производной называют **дифференцированием функции**.

Замечание. Условие дифференцируемости с учетом равенств $A = f'(x)$, $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ (как произведение двух бесконечно малых), можно записать в виде:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Пример 9.1. *Рассмотрим функцию $y = x^2$. Имеем:*

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$A = f'(x) = 2x$$

Теорема 9.1. *Если функция $y = f(x$ дифференцируема в точке a, то она и непрерывна в этой точке. Эта теорема устанавливает связь между понятиями* ***дифференцируемости и непрерывности****.*

Доказательство.

Нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x = f(a))$$

Введем обозначение: $x - a = \Delta x$.

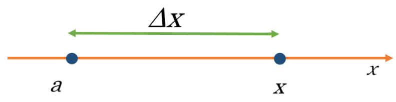

Рис. 9.1. График функции

Тогда $\Delta x \to 0$ при $x \to a$, $x = a + \Delta x$, и нужно доказать, что

$$\mathit{lim}_{x\to 0} f(a+\Delta x) = f(a)$$

$$\mathit{lim}_{x\to 0} [f(a+\Delta x) - f(a)] = 0$$

Но $f(a+\Delta x) - f(a) = \Delta y$ – приращение функции в точке a. Таким образом, требуется доказать, что

$$\lim_{x\to 0} \Delta y = 0$$

По условию теоремы функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a, поэтому

$$\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \Delta y = 0$$

Что и требовалось доказать. ■

Замечание. Равенство

$$\mathit{lim}_{x\to} \Delta y = 0$$

где $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ называется **разностной формой условия непрерывности функции** $y = f(x)$ в точке a. Если это условие выполнено, то функция непрерывна в точке a, и обратно, если функция непрерывна в точке a, то это условие выполнено.

Обратное к **теореме 9.1** утверждение **неверно**, т.е. непрерывная в некоторой точке функция может быть недифференцируемой в этой точке. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Пример 9.2. *Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.*

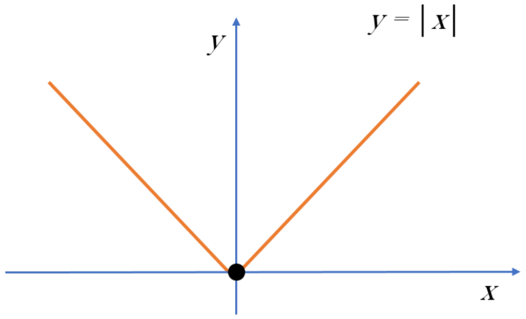

Рис. 9.2. График функцииу $= |x|$

Существуют функции, которые непрерывны в каждой точке числовой прямой, но ни в одной точке не дифференцируемы.

$$\Delta y|_{x=0} f(0+\Delta x - f(0)) =$$

$$= |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \text{если } x > 0; \\ -\Delta x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Функция недифференцируема, поскольку у нее нет производной.

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0; \\ -1x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда легко понять, что

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \text{если } \Delta x \to +0; \\ -1x, & \text{если } \Delta x \to -0. \end{cases}$$

Это значит, что предел не существует. То есть

$$f'(0) \quad \text{не существует}$$

Значит функция не дифференцируема в точке $x = 0$. Впервые пример такой функции построил Карл Вейерштрасс (1815-1897) в 1872 году. Этот пример подводит нас к понятию ***правой и левой производных*** *функции.*

$$f'_{пр}(0) = 1$$

$$f'_{лев}(0) = -1$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда ее приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Приращение представлено в виде суммы двух слагаемых. Оба слагаемых являются бесконечно малыми функциями при $\Delta x \to 0$. Если $f'(x) \neq 0$, то первое слагаемое является бесконечно малой того же порядка, что и $\Delta x : f'(x)\Delta x = O(\Delta x)$. Второе слагаемое $o(\Delta x)$ всегда является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Определение 9.1. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется линейная функция аргумента Δx:*

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Если $f'(x) \neq 0$, то $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ является главной частью Δy при $\Delta x \to 0$. Если же $f'(x) = 0$, то $dy = 0$ и уже не является главной частью приращения функции.

Дифференциалом независимой переменной *x назовем приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Формула принимает теперь вид: $dy = f'(x)dx$, откуда следует, что*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

*То есть **если x – независимая переменная**, то производная функции в точке x равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной.*

Пример 9.3. *Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Найдем ее дифференциал: $dy = -\sin x \cdot dx$ – линейная функция аргумента dx при фиксированном x. В частности,*

$$dy|_{\pi}, \quad (\forall dx)$$

$$dy|_{\frac{\pi}{3}, dx=0,1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.1$$

Физический смысл дифференциала функции

Пусть x – время, $y = f(x)$ – координата точки, движущейся по оси y в момент времени x. Тогда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – изменение (приращение) координаты за промежуток времени от момента x до момента $x+\Delta x$.

При этом $dy = f'(x)\cdot\Delta x = v(x)\cdot\Delta x$, то есть дифференциал равен тому изменению координаты, которое имела бы точка, если бы ее скорость $v(x)$ на отрезке времени $[x, x+\Delta x]$ была постоянной, равной $f'(x)$. То есть движение должно быть равномерным со скоростью $v(x)$.

Геометрический смысл дифференциала функции

Иначе можно сказать, что это геометрическое изображение дифференциала.

Дифференциал dy равен тому изменению функции $y = f(x)$ при изменении аргумента на Δx, которое имела бы функция, если бы на отрезке $[x, x+\Delta x]$ она была линейной с угловым коэффициентом прямой (ее графика), равным $f'(x)$.

Правила дифференцирования

Теорема 9.2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot f(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x)\neq 0$, также дифференцируемы в точке x, причем:*

1) $[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$

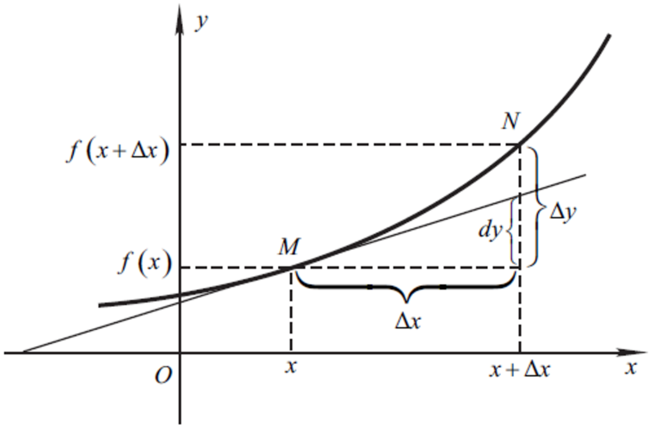

Рис. 9.3. Геометрическое изображение дифференциала

2) $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}$

При условии, что $g(x) \neq 0$

Доказательство.

Все три формулы доказываются одинаковым образом. Докажем, например, формулу 2).

Чтобы найти производную от произведения $[f(x)\cdot g(x)]'$, нужно взять приращение этой функции, разделить на Δx, рассмотреть предел при $\Delta x \to 0$. Требуется доказать, что он равен $f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Введем обозначение $y = f(x)\cdot g(x)$. Составим приращение этой функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) =$$

$$= \pm f(x)\cdot g(x+\Delta x) =$$

$$= [f(x+\Delta x) - f(x)]\cdot g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]$$

Здесь:

$$[f(x+\Delta x) - f(x)] = \Delta f$$

$$[g(x+\Delta x) - g(x)] = \Delta g$$

Поэтому:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)$$

По условию функции f и g дифференцируемы, то есть имеют производную. Значит:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x)$$

$$g(x+\Delta x)\to g(x)$$

$$f(x)\to f(x)$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}\to g'(x)$$

При этом:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)=[f(x)\cdot g(x)]'$$

Таким образом получаем, что

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'x$$

Это и требовалось доказать. ■

Следствия из теоремы.

1) Если $c=const$ и $\exists y'(x)$ то:

$$[c\cdot y(x)]'=c\cdot y'(x)$$

Иначе можно сказать так: постоянный множитель можно выносить за знак производной. Доказательство простое.

$$(c\cdot y(x))=c'\ cdoty(x)+c\cdot y'(x)$$

$$c'=0,\Rightarrow$$

$$(c\cdot y(x))=c\cdot y'(x)$$

2)

$$(\mathrm{tg}\,x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Формула верна для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{N}$

3) Доказать самостоятельно:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Производная обратной функции

Теорема 9.3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0, дифференцируема в самой точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Будем считать, что $f(x_0) = y_0$. Тогда в некоторой окрестности точки y_0 существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, эта функция дифференцируема в точке y_0 и*

$$f^{-1\prime} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство.

Рассмотрим какой-нибудь сегмент $[a, b]$, расположенный в указанной окрестности точки x_0 и такой, что $a < x_0 < b$. Функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на этом сегменте.

Поэтому, согласно теореме о существовании и непрерывности обратной функции, множеством значений функции $y = f(x)$, заданной на $[a, b]$, является сегмент $Y = [f(a), f(b)]$, на сегменте Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго монотонная и непрерывная. При этом $y_0 \in (f(a), f(b))$.

Зададим аргументу y обратной функции в точке y_0 приращение $\Delta y \neq 0$ столь малое, что $(y0 + \Delta y) \in [f(a), f(b)]$. Обратная функция получит приращение $\Delta x = f^{-1}(y_0 0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$, которое отлично от нуля в силу строгой монотонности обратной функции $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$. Поэтому справедливо равенство:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

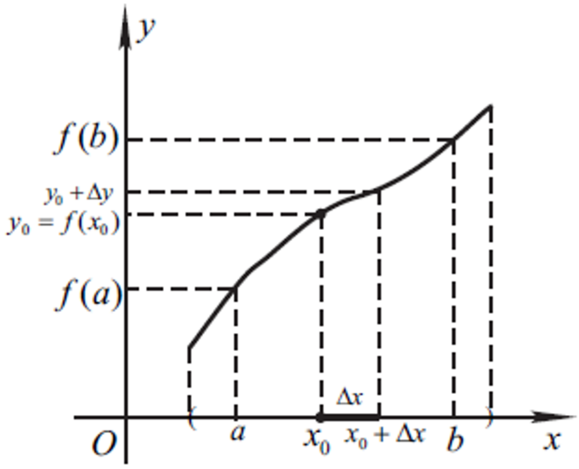

Рис. 9.4. График функции $y = f(x)$

Устремим в этом равенстве $\Delta y \to 0$ и воспользуемся непрерывностью обратной функции $x = f^{-1}(y)$ и условием непрерывности в разностной форме $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

$$\Delta y \to 0, \Rightarrow \Delta x \to 0$$

Так как при $\Delta x \to 0$ знаменатель в равенстве $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ стремится к $f'(x_0)$, то предел правой части равен $\frac{1}{f'(x_0)}$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq$ в силу условия теоремы. Следовательно, существует предел и левой части равенства $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, который по определению производной равен $f^{-1\prime}(y_0)$.

Таким образом, переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ в равенстве, мы получаем:

$$f^{-1\prime} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Теорема доказана. ■

Следствия из теоремы, примеры

Пример 9.4. *Рассмотрим функцию*

$$y = \sin x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Для $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *выполнены все условия только что доказанной теоремы (9.4). По теореме* ***9.4*** *для производной обратной функции справедлива формула:*

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Перепишем формулу в «нормальных обозначениях», заменив y *на* x*:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Заметим, что $(\arcsin x)' \to \infty$ *при* $x \to 1$ *или* $x \to -1$. *В таком случае говорят, что функция в данной точке имеет* ***бесконечную производную***. *Геометрически это означает, что касательная в соответствующей точке графика параллельна оси* y.

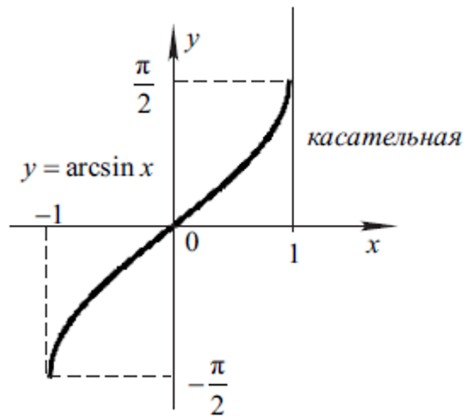

Рис. 9.5. График функции $y = \arcsin x$

Пример 9.5. *Рассмотрим функцию* $y = \cos x$ *на интервале* $x \in (0, \pi)$.

$y = \cos x$ *– непрерывная монотонная функция, имеет производную. Для нее выполнены все условия теоремы* ***9.3***.

Доказать самостоятельно, что:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (-1 < x < 1)$$

Пример 9.6. *Аналогично выводятся формулы для производной* arctg *и* arcctg*:*

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Пример 9.7.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Лекция 10. Производные и дифференциалы. Часть 2

Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $y = f(t)$, $t = \phi(x)$, то есть

$$y = f(\phi(x)) := F(x)$$

Теорема 10.1. *Теорема о дифференцируемости сложной функции*

Пусть функция $t = \phi(x)$ дифференцируема в точке x_0, $\quad \phi(x_0) = t_0$, и функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0. Тогда сложная функция $F(x) = f(\phi(x))$ дифференцируема вточке x_0 и выполняется равенство:

$$F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \phi'(x_0) = f'(\phi(x_0)) \cdot \phi'(x_0) \qquad (1)$$

Доказательство.

Согласно определению дифференцируемости функции нужно доказать, что приращение функции $y = F(x)$ в точке x_0 можно представить в виде:

$$\Delta y = f'(\phi(_x0)) \cdot \Delta\phi'(x_0) \cdot + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (2)$$

где $\alpha(\Delta x)0$ при $\Delta x \to 0$ и $\alpha(0) = 0$

Дадим аргументу $\phi(x)$ приращение Δx в точке x_0. Функция $t == \phi(x)$ получит приращение $\Delta t = \phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)$, которое можно представить в виде (в силу дифференцируемости функции

$$\Delta t = \phi'(x_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (3)$$

$$\lim_{\Delta x 0} \beta \Delta x = 0$$

$$\beta(0) = 0$$

Этому приращению Δt переменной t соответствует приращение $\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ функции $y = f(t)$. Поскольку функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0, то Δy можно представить в виде

$$\Delta y = f'(t_0) \cdot \Delta t + \gamma \Delta t \cdot \Delta t \qquad (4)$$

$$\gamma\Delta t 0 \quad \textit{при} \quad \Delta t 0$$

$$\gamma(0) = 0$$

Выразим Δy через Δx. Для этого подставим выражение (3) в правую часть равенства (4):

$$\Delta y = f'(\phi(x_0)) \cdot \phi'(x_0) \cdot \Delta x + [f'(t_0) \cdot \beta + \gamma\phi'(x_0) + \gamma\beta] \cdot \Delta x$$

$$[f'(t_0) \cdot \beta + \gamma\phi'(x_0) + \gamma\beta] = \alpha(\Delta x)$$

$$\alpha(\Delta x) \to 0 \quad \textit{при} \quad \Delta x \to 0$$

$$\alpha(0) = 0$$

Полученное равенство совпадает с равенством:

$$\Delta y = f'(\phi(_x 0)) \cdot \Delta\phi'(x_0) \cdot +\alpha() \cdot \Delta x$$

Что и требовалось доказать. ■

Замечание

Полученная формула имеет простой и ясный физический смысл:

$\phi'(x_0)$ – скорость изменения переменной t по отношению к изменению переменной x,

$f'(t_0)$ – скорость изменения y по отношению к изменению t,

$F'(x_0)$ – скорость изменениях y по отношению к изменению x.

Ясно, что эти скорости связаны равенством:

$$F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \phi'(x_0)$$

Следствия из теоремы

Пример 10.1. *Рассмотрим функцию*

$$y = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x > 0$$

Можно записать так:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Это же можно записать как e^t, где $t = \alpha \ln x$. То есть x^a можно представить как сложную функцию:

$$(x^\alpha)' = (e^t)' \cdot (\alpha \ln x)' = e^t \cdot \frac{alpha}{x}\Big|_{t=\alpha \ln x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Формула для производной степенной функции будет такой:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Отметим два частных случая этой формулы.

1) Для $\alpha = \frac{1}{2}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Для $\alpha = -1$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Пример 10.2. *Выведем формулу для степенно-показательной функции.*

$$y = [u(x)]^{v(x)} \quad u(x) > 0$$

$$u^v = e^{v \ln u} = e^t, \quad t = v \ln u$$

$$(u^v)' = e^t|_{t=v\ln u} \cdot (v \ln u)' = u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right) = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

$$u^v \cdot \ln u \cdot v' = (u^v)|_{u=}$$

$$v \cdot u^{v-1} \cdot u' = (u^v)'|_{v=}$$

Тогда окончательно полученная формула будет такой:

$$(u^v)' = (u^v)'|_{u=} + (u^v)'|_{v=}$$

Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$, где x независимая переменная, выражается формулой

$$dy = f'(x)dx \qquad (1)$$

x в этой формуле – независимая переменная. Дифференциал функции dy называется также **первым дифференциалом функции**.

Если x не будет независимой переменной, а будет зависеть от какой-то переменной t, то это выражение (вид, форма) останется неизменной. В этом и состоит **инвариантность формы первого дифференциала**.

Докажем, что равенство (1) сохраняется и в том случае, если x будет не независимой переменной, а дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной $t : x = \phi(t)$.

В этом случае $y = f(\phi(t)) := F(t)$ – сложная функция независимой переменной t, дифференцируемая в силу теоремы 10.1 как сложная функция. Согласно определению дифференциала функции $dy = F'(t)dt$, а по теореме 10.1

$$F'(t) = f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

поэтому $dy = f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$. Так как $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)dt$, то выражение для dy также можно записать в виде

$$dy = f'(x)dx \qquad (2)$$

То есть формула имеет место и в том случае, когда x – дифференцируемая функция некоторого аргумента t. Это свойство называется **инвариантностью формы первого дифференциала**. Инвариантной (не изменяющейся) является только форма (вид) первого дифференциала, а суть меняется, поскольку теперь $dx = \phi'(t)dt \neq \Delta x$. Из $dy = f'(x)dx$ следует,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

То есть производная функции равна отношению дифференциалов функции и аргумента и в том случае, когда аргумент x – не независимая переменная, а функция некоторой независимой переменной t.

Производная функции, заданной параметрически

Пусть переменные x и y заданы как функции аргумента t, который назовем **параметром**:

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t)$$

$$t \in \mathbb{T}(\textit{промежуток})$$

Пусть параметр t изменяется на некотором промежутке и пусть существует функция $t = \phi^{-1}(x)$, обратная к функции $x = \phi(t)$. Тогда можно записать:

$$y = \psi(\phi^{-1}(x)) := f(x)$$

Таким образом, уравнения $x = \phi(t), \quad y = \psi(t)$ определяют функцию $y = f(x)$. Такой способ задания функции называется **параметрическим заданием функции**. Вычислим $f'(x)$. Воспользуемся формулой $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)dt}{\phi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\bigg|_{t=\phi^{-1}(x)} \qquad (5)$$

Это и есть формула производной функции, заданной параметрически:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\bigg|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

Эту же формулу можно получить иначе, если использовать правило дифференцирования сложной функции и формулу производной обратной функции:

$$f(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$$

$$f'(x) = \psi'(\phi-1(x)) \cdot (\phi^{-1}(x))' =$$
$$= \psi'(\phi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\phi'(t)}\bigg|_{t=\phi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\bigg|_{\phi^{-1}(x)}$$

Получили ту же формулу (5), но выведенную иначе.

Физическая интерпретация

Уравнения можно рассматривать как уравнения, задающие движение точки на плоскости: t время, $(x,y) = (\phi(t), \psi(t))$ – координаты точки в момент времени t.

При такой интерпретации график функции $y = f(x)$ представляет собой траекторию движения точки на плоскости. Вектор скорости этой точки $\vec{v}(t) = \phi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}$ направлен по касательной к траектории, так как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = f'(x)$$

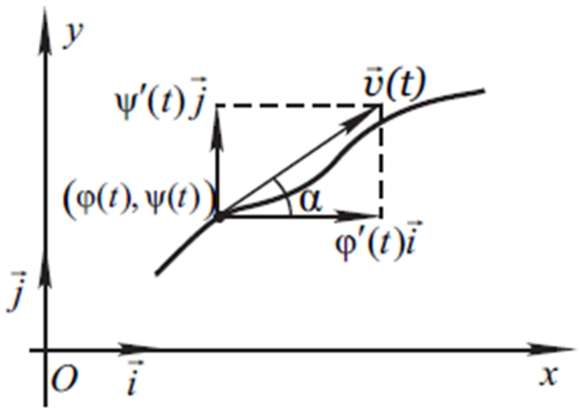

Рис. 10.1. Физическая интерпретация

Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда производная $f'(x)$ является функцией, определенной на интервале (a, b).

Если $f'(x)$ имеет производную в некоторой точке x из (a, b), то производная от $f'(x)$ в точке x называется **второй производной** функции $f(x)$ в точке x (или **производной второго порядка**) и обозначается $f''(x)$

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

Другие обозначения: $f^{(2)}(x)$, $y''(x)$, $y^{(2)}(x)$). Производная n-ого порядка (или n-я производная) функции $y = f(x)$ определяется как производная от производной $(n-1)$- ого порядка:

$$f^n(x) = \left[f^{n-1}(x)\right]$$

Физический смысл второй производной

Если x – время, а $y = f(x)$ – координата точки на оси y в момент времени x, то $f'(x) = v(x)$ – **мгновенная скорость** точки в момент x, а $f''(x) = [f'(x)]' = v'(x) = a(x)$ – **ускорение** точки в момент x.

Геометрический смысл второй производной

Позже будет установлено, что знак $f''(x)$ определяет направление выпуклости графика функции $y = f(x)$:

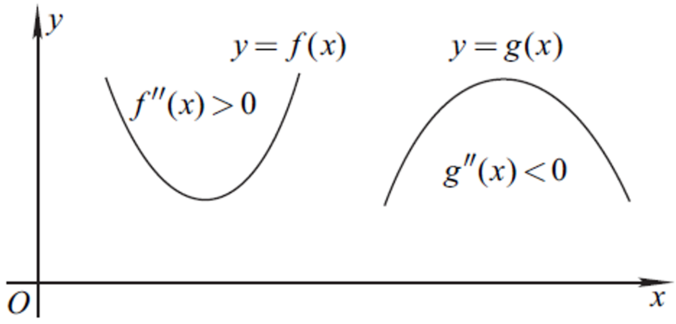

Рис. 10.2. График функции $y = f(x)$

Некоторые формулы

Пример 10.3. *Рассмотрим функцию* $y = x^\alpha$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

И так далее. Для производной n-ого порядка получается выражение

$$y^(n) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

если $\alpha = m \quad \in N$, *то*

$$(x^m)^m = m(m-1)\times\cdots\times = 1\cdot x^0 = m!$$

$$(x^m)^n = 0 \quad \forall n > m$$

Пример 10.4. *Рассмотрим функцию* $(a^x)^n$*:*

$$y' = a^x \ln a$$

$$y'' = a^x(\ln a)^2$$

Пример 10.5. *Рассмотрим функцию* $y = \sin x$

$$y' \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

График такой функции сдвинется на $\frac{\pi}{2}$ *влево.*

$$(\sin x)'' = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dots$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Пример 10.6.

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Две формулы для производных n-ого порядка

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные n-ого порядка, то функции $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ также имеют производные n-ого порядка, причем:

Для суммы и разности формула будет такой:

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$$

Для произведения формула иная:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)} v^{(2)} + \dots + C_n^k \cdot u^{(n-k)} v^{(k)} + \dots + u \cdot v^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

В обеих формулах:

$$u^{(0)} := u$$

$$C_n^k = \frac{n!}{[k!(n-k)!]}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

$$0! = 1$$

Эта формула называется **формулой Лейбница**. Она верна для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Для $n = 2$ получаем:

$$(u(x) \pm v(x))^{(2)} = \left[(u(x) \pm v(x))'\right]' = \left[u'(x)v'(x)\right]' = u^{(2)}(x) \pm v^{(2)}(x)$$

то есть для $n = 2$ формула верна. Равенство по форме похоже на формулу бинома Ньютона:

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$$

Пример 10.7. *Рассмотрим функцию $y = x^2 \cdot e^{3x}$. Используя формулу, найдем $y^{(10)}$:*

$$y^{(10)} = (e^{3x})^{(10)} \cdot x^2 + C_{10}^1 \cdot (e^{3x})^{(9)} \cdot (x^2)' + C_{10}^2 \cdot (e^{3x})^{(8)} \cdot (x^2)'' + \dots =$$
$$= 3^{10} \cdot e^{3x} \cdot x^2 + 10 \cdot 3^9 \cdot e^{3x} \cdot 2x + \frac{10 \cdot 9}{2} e^{3x} \cdot 3^8 \cdot 2 =$$
$$= 3^9 e^{3x}(3x^2 + 20x + 30)$$

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то есть имеет производную в каждой точке этого интервала. Если x – независимая переменная, то первый дифференциал функции выражается формулой

$$dy = f'(x)dx$$

Если $x = \phi(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t, то

$$dy = f'(x)dx = f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$$

В каждом из двух случаев dy является функцией двух переменных: независимой переменной (x или t) и ее дифференциала (dx или dt), который входит в виде сомножителя.

При введении дифференциала второго порядка мы будем рассматривать y как функцию **только независимой переменной** (x или t), то есть дифференциал независимой переменной (dx или dt) будем рассматривать как **постоянный множитель** в выражении для dy.

В любом случае dy зависит от двух переменных:

$$x \quad \text{или} \quad t \quad \text{и} \quad dx \quad \text{или} \quad dt$$

Такую же договоренность примем при определении дифференциалов более высокого порядка. При этом условии определим дифференциал второго порядка (или второй дифференциал) d^2y функции $y = f(x)$ как дифференциал от первого дифференциала:

$$d^2y = d(dy)$$

Причем при вычислении дифференциала от dy приращение дифференциала независимой переменной (x или t) будем снова брать равным dx или dt. Дифференциал n-ого порядка $d^ny (n \geqslant 2)$ определим формулой

$$d^ny = d[d^{n-1}y], \quad n = 2, 3, \cdots$$

при таких же условиях, как при ведении дифференциала второго порядка. Форма (вид) дифференциала второго порядка будет не инвариантна.

Лекция 11. Производные и дифференциалы. Часть 3

Дифференциал второго порядка функции $y(x)$ определяется как дифференциал от первого дифференциала:

$$d^2y = d(dy)$$

По индукции для любого n:

$$d^ny = d(d^{n-1}y), \quad n = 2,3\cdots$$

Рассмотрим два случая.

Пример 11.1. *Возьмем $y = f(x)$, где x – независимая переменная. По определению дифференциала первый дифференциал запишем так*

$$dy = f'(x)dx, \quad dx = \Delta x$$

Второй дифференциал:

$$d^2y = d(f'(x)dx)$$

По условиям первый дифференциал рассматривается как функция только от x. От него зависит f' так, как если бы dx было постоянным множителем. Тогда:

$$dx\cdot[d(f'(x))] = dx\cdot[(f'(x))'dx] = f^{(2)}(x)(dx)^2$$

Дифференциал от второго дифференциала определяется так:

$$d^3y = d(d^2y) = (dx)^2 d\cdot f^{(2)}(x)] = (dx)^2\cdot f^{(3)}(x)dx = f^{(3)}(x)(dx)^3$$

и т.д. По индукции несложно доказать общую формулу для любого n:

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Из этой формулы вытекает, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \quad n = 2,3,\cdots$$

То есть производная n-го порядка функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала n-го порядка функции к n-й степени дифференциала независимой переменной.

Пример 11.2. *Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Найдем $d^{20}y$:*

$$d^{20}(\sin x) = (\sin x)^{(20)} \cdot (dx)^{(20)} =$$

$$= \sin(x + 20 \cdot \frac{\pi}{2})(dx)^{20} = \sin x \cdot (dx)^{20}$$

Пусть теперь x – функция некоторой независимой переменной $t : x = \phi(t)$. В этом случае

$$dx = \phi'(t)dt, \quad dy = f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$$

Вычисляем производную по формуле производной сложной функции:

$$d^2y = d(dy) = dt \cdot d\left(f'(\phi(t))\phi'(t)\right) = dt \cdot \left(f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\right)' dt =$$

$$= [f''(\phi(t)) \cdot (\phi'(t))^2 + f'(\phi(t)) \cdot \phi''(t)]dt^2 =$$

$$= f''(\phi(t)) \cdot (\phi'(t)dt)^2 + f'(\phi(t)) \cdot \phi''(t)dt^2 =$$

$$= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

В результате получаем:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

Таким образом, форма второго дифференциала не инвариантна. Это же относится к дифференциалам более высокого порядка.

Пример 11.3. *Пусть $y = \cos x$. Вычислим дифференциал 10-го порядка от этой функции. x – независимая переменная.*

$$d^{10}y = (\cos x)(10) \cdot dx^{10} = \cos(x + 10\frac{\pi}{2})(dx)^{10} = -\cos x(dx)^{10}$$

Вектор-функция и ее производные

Функция вида $y = f(x)$ – скалярная функция.Потому что y – это переменное число, или говорят, что y принимает числовые значения.

Вектор-функция (векторная функция) –это когда каждому числу ставится в соответствие не число, а вектор. Пример такой функции в физике – напряженность электрического поля.

Если каждому числу t из множества T поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{r}$, то говорят, что на множестве T задана векторная функция (или вектор-функция) = (t).

Модуль вектора $\vec{r}(t)$ будем обозначать, как обычно, $|\vec{r}(t)|$. $|\vec{r}(t)|$ – скалярная функция аргумента t.

Определение 11.1. *Вектор $\vec{a}$ называется пределом вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если*

$$\lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$$

Записывается это так

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \vec{a} \quad \text{или}$$

$$\vec{r}(t) \to \vec{a} \quad \text{при} \quad t \to t_0$$

Теперь легко ввести понятие производной вектор-функции. Зададим аргументу t приращение $\Delta t \neq 0$. Вектор-функция получит приращение

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Определение 11.2. *Если существует*

$$\mathop{lim}_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

*то он называется **производной вектор-функции** $\vec{r}(t)$ в точке t.*

<u>Обозначение</u>: $\vec{r}'(t)$ или $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ и введем базис $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Разложим вектор $\vec{r}(t)$ по этому базису:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + (t)\vec{k} = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

Модуль вектора через его координаты выражается так:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

Утверждение 11.1. *Для того, чтобы $\vec{r}(t) \to \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ при $t \to t_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $t \to t_0$*

$$x(t) \to a_1$$

$$y(t) \to a_2$$

$$z(t) \to a_3$$

Доказательство.

Используем равенство:

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (yx(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}$$

Из этого утверждения следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} =$$

$$= \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$$

То есть вычисление производной вектор-функции сводится к вычислению производных ее координат. ■

Определение 11.3. *Множество концов всех векторов $\vec{r}(t) \quad (t \in T)$, отложенных от начала координат (точки), называется **годографом вектор-функции** $\vec{r} = \vec{r}(t)$.*

Физический смысл годографа – это траектория точки, движение которой в пространстве задано уравнением

$$\vec{r} = \vec{OM} = \vec{r}(t)$$

Физический смысл производной $\frac{d\vec{r}}{dt}$ – это скорость точки. Можно доказать, что вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ является касательным к годографу.

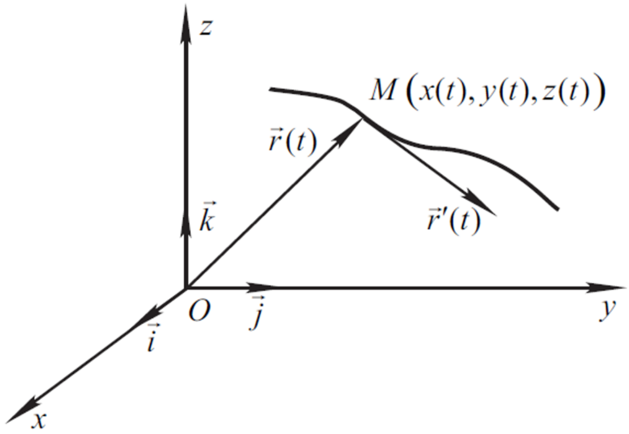

Рис. 11.1. Годограф вектор-функции

Правила дифференцирования вектор-функций

1) $[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)]' = \vec{r'}_1(t) \pm \vec{r'}_2(t)$

2) $[f(t)\cdot\vec{r}(t)]' = f'(t)\cdot\vec{r}(t) + f(t)\cdot\vec{r'}(t)$

3)$(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))' = \vec{r'}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r'}_1(t)\cdot\vec{r'}_2(t)$

4)$[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)]' = \left[\vec{r'}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right] + \left[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r'}_2(t)\right]$

Здесь $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2$ – скалярное произведение, а $[\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2]$ – векторное произведение векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Эти правила нетрудно обосновать, используя выражения для $\vec{r}_1\pm\vec{r}_2,\cdots,[\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2]$ в координатах.

Производные высших порядков вектор-функции вводятся так же, как и для скалярной функции:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right),\cdots,\vec{r}^n(t) = [\vec{r}^{n-1}(t)]'$$

В координатах:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \{x''(t), y''(t), z''(t)\}$$

Пример 11.4. *Рассмотрим прямую (ось вращения) и вектор $\vec{a}$ с началом на этой прямой, составляющий угол α с прямой.*

Пусть вектор $\vec{a}$ вращается вокруг прямой с постоянной угловой скоростью ω, причем угол α и длина вектора $\vec{a}$ остаются неизменными. Положим $|\vec{a}| = a$

и введем вектор $\vec{\boldsymbol{\omega}}$*, у которого* $|\boldsymbol{\omega}| = \boldsymbol{\omega}$*, а направление показано на рисунке (Рис. 11.2).*

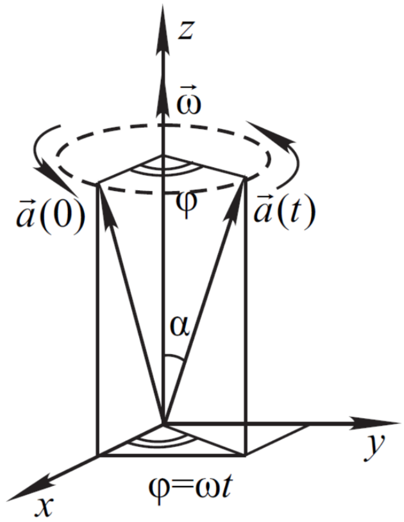

Рис. 11.2. Направление вектора

Вектор $\vec{a}$ *зависит от времени:* $\vec{a} = \vec{a}(t)$*. Докажем, что*

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \vec{a}]$$

Введем прямоугольную систему координат xyz *так, чтобы положительное направление оси* Oz *совпало с направлением вектора* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$*, и запишем координаты вектора* $\vec{a}(t)$*:*

$$\vec{a}(t) = \{a\sin\alpha \cdot \cos\omega t, \quad a\sin\alpha \cdot \sin\omega t, \quad a\cos\alpha\}$$

Введем обозначения: $a\sin\alpha = b, \quad a\cos\alpha = c$*, тогда*

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \{-b\omega\sin\omega t, \quad b\omega\cos\omega t, \quad 0\}$$

$$[\vec{\omega} \cdot \vec{a}(t)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b\cos\omega t & b\sin\omega t & c \end{vmatrix} =$$

$$\{-b\omega\sin\omega t, \quad b\omega\cos\omega t, \quad 0\}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \vec{a}]$$

Если начало вектора $\vec{a}$ не лежит на оси вращения, то доказанная формула остается в силе, поскольку такой вектор можно представить в виде разности двух векторов с началами на оси вращения:

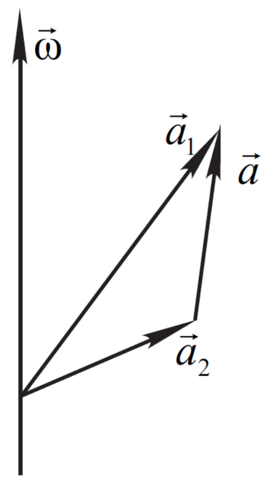

Рис. 11.3. Разность двух векторов

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}_1}{dt} - \frac{d\vec{a}_2}{dt} =$$

$$= [\vec{\omega} \cdot \vec{a}_1 - \vec{\omega} \cdot \vec{a}_2] =$$

$$= [\vec{\omega} \cdot (\vec{a}_1) - \vec{a}_2] =$$

$$[\vec{\omega} \cdot \vec{a}]$$

Пример 11.5. *Рассмотрим твердое тело (например, Земной шар), вращающееся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно неподвижной системы координат с базисом $\{\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\}$.*

Введем на этом твердом теле свой базис$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Он вращается вместе с твердым телом с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, поэтому

$$\vec{i} = \vec{i}(t), \quad \vec{\ae} = \vec{j}(t), \quad \vec{k} = \vec{k}(t)$$

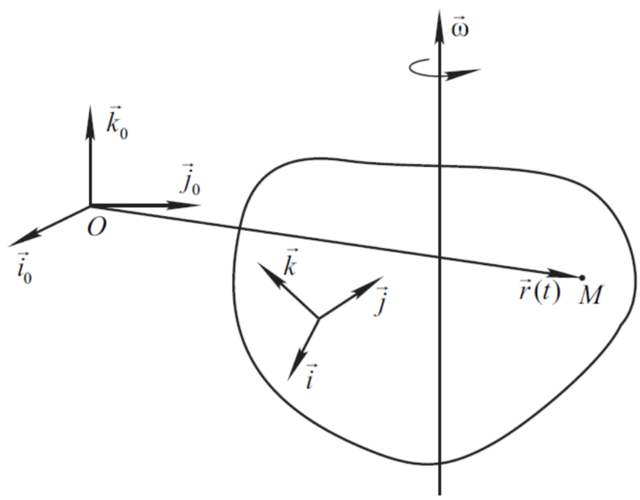

Рис. 11.4. Пример 2

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \vec{i}]$$
$$\frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \vec{j}]$$
$$\frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \vec{k}]$$

Рассмотрим точку M, движущуюся внутри тела или по его поверхности. Ее положение относительно неподвижной системы координат в каждый момент времени можно задать радиус-вектором $\vec{OM}$, который обозначим $\vec{r}(t)$.

Выведем формулу скорости точки M относительно неподвижной системы координат, т.е. формулу для $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. С этой целью разложим вектор $\vec{r}(t)$ по вращающемуся базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} =$$
$$\left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) + x \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{i}] + y \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{j}] + z \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{k}]$$

Выражение в скобках представляет собой скорость точки относительно связанного с телом базиса $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Назовем ее ***относительной скоростью*** *и обозначим $\vec{v}_{отн}$. Таким образом,*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{отн} + [\vec{\omega}\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})] = \vec{v}_{отн} + [\vec{\omega\cdot}\vec{r}]$$

В полученном равенстве векторное произведение $[\vec{\omega\cdot}\vec{r}]$ представляет собой компоненту скорости, обусловленную вращением тела.

Назовем ее ***переносной скоростью*** *и обозначим $\vec{v}_{пер.}$. Итак, абсолютная скорость точки M, то есть скорость относительно неподвижной системы координат, равна сумме переносной и относительной скоростей:*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{пер.} + \vec{v}_{отн.}$$

Выведем формулу для ускорения точки M. Имеем:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{пер.}}{dt} + \frac{\vec{v}_{отн.}}{dt} =$$

$$= \left[\vec{\omega}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}\right) =$$

$$= [\vec{\omega}\cdot(\vec{v}_{пер.}+\vec{v}_{отн.})] + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\vec{k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{dx}{dt}\cdot[\vec{\omega}\cdot\vec{i}] + \frac{dy}{dt}\cdot[\vec{\omega}\cdot\vec{j}] + \frac{dz}{dt}\cdot[\vec{\omega}\cdot\vec{k}]\right) =$$

$$= [\vec{\omega}\cdot\vec{v}_{пер.}] + [\vec{\omega}\cdot\vec{v}_{отн.}] + \vec{a}_{отн.} + [\vec{\omega}\cdot \vec{отн.}] =$$

$$= \vec{a}_{отн.} + 2[\vec{\omega}\cdot\vec{v}_{отн.}]$$

В этом равенстве слагаемые

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v}_{пер.} =: \vec{a}_{пер.}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\vec{k} =: \vec{a}_{отн.}$$

являются соответственно ***переносным и относительным ускорениями****, а слагаемое $[\vec{\omega}_{отн.}]$ – так называемым* ***кориолисовым ускорением*** *$\vec{a}_{кор.}$*

Итак, абсолютное ускорение равно ***сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений****:*

$$\vec{a} = \vec{a}_{пер.} + \vec{a}_{отн.} + \vec{a}_{кор.}$$

Отметим, что $\vec{a}_{пер.} = [\vec{\omega} \cdot \vec{v}_{пер.}] = [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]$ *представляет собой* ***двойное векторное произведение****.*

Здесь же:

$$\vec{a}_{отн.} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}$$
$$\vec{a}_{кор.} = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_{отн.}]$$

Из формулы видно, что кориолисово ускорение возникает только тогда, когда есть вращение, когда $\vec{\omega} \neq 0$*, и когда точка движется по вращающемуся телу.*

Лекция 12. Интегралы. Часть 1.

Первообразная и неопределённый интеграл

Пусть x – время, а $y = f(x)$ – координата точки, движущейся по оси y в момент времени x. Пусть известна $v(x)$ – скорость в каждый момент времени. Необходимо найти $f(x)$. Математически задача сводится к отысканию такой $f(x)$, что $f'(x) = v(x)$. Т.е. возникает задача, обратная дифференцированию.

Определение 12.1. *F(x) называется первообразной для функции f(x) на промежутке X, если* $\forall x \in X : F'(x) = f(x)$

Пример 12.1. $F(x) = ln$ *– первообразная* $f(x) = \frac{1}{x}$ *на* $X_+ = \{x > 0\}$

Т.к. $(lnx)' = \frac{1}{x}$ *для* $x \in X_+$

$F(x) = ln(-x)$ *– первообразная для* $f(x) = \frac{1}{x}$ *на* $X_- = \{x < 0\}$

Т.к. $\big(ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ *на* $X_- = \{x > 0\}$

$F(x) = ln|x|$ *– первообразная для* $f(x) = \frac{1}{x}$ *на* X_+ *и на* X_-

Пример 12.2.

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

При $x > 0 : \quad F(x) = x$

Т.к. $F'(x) = 1$

При $x < 0 : \quad F(x) = -x$

В 0 функция не дифференцируема $\Rightarrow f(x) = sgn(x)$ *не имеет первообразной на всей числовой прямой.*

Позднее будет доказано, что любая непрерывная на промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Разрывная функция также может иметь первообразную.

Пример 12.3.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Убедимся, что у этой функции есть производная.

$x \neq 0:$

$$F'(x) = 2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}$$

$x = 0:$

$$F'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(0+\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x sin\frac{1}{\Delta x} = 0$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ разрывна в т. $x = 0$, но имеет первообразную $F(x)$ на всей числовой прямой.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке X, то $F(x) + C$ – также первообразная для $f(x)$ на промежутке X

Теорема 12.1. *Любые две первообразные для $f(x)$ на заданном промежутке X отличаются на постоянную.*

Доказательство.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на X, т.е. $F_1'(x) = f(x)$ *и* $F_2'(x) = f(x) \forall x \in X$

$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$

Требуется доказать: $F(x) = const$ на X

$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow F(x) = const$

Это утверждение будет доказано позднее. ■

Если $F(x)$ – какая-то первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на X имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$

Замечание 12.1. *Существенно, что X – промежуток.*

Предположим, что X – не промежуток, а два промежутка. Возьмём функцию $sgn(x)$. Возьмём одну первообразную $F_1(x) = x$ на промежутке $(0,+\infty)$ и $F_1(x) = -x$ на промежутке $(-\infty,0)$, а другую – $F_2(x) = x+1$ на $(0,+\infty)$ и $F_2(x) = -x+2$ на $(-\infty,0)$. Они отличаются на разные константы.

Определение 12.2. *Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределённым интегралом от $f(x)$ на данном промежутке и обозначается так:*

$$\int f(x)\,dx$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а произведение $f(x)\,dx$ называется подынтегральным выражением. dx показывает, по какой переменной интегрирование.

Заметим, что подынтегральное выражение $(f(x)\,dx)$ является дифференциалом любой первообразной для функции $f(x)$.

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx \tag{12.1}$$

В силу следствия из теоремы 12.1:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{12.2}$$

где $F(x)$ – какая-то первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Пример 12.4.

$$\int sinx\,dx = -cosx + C$$

Не любая элементарная функция интегрируется в элементарных функциях.

Пример 12.5.

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

Первообразная e^{-x^2} не является элементарной функцией.

Но например: $xe^{-x^2}\,dx$ – интегрируема в элементарных функциях

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

Определение 12.3. *Операция вычисления первообразной (неопределённого интеграла) называется интегрированием. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.*

Основные свойства неопределённых интегралов

$$1. \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

$$2. \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

$$3. \quad \int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm f_2(x)\,dx$$

$$4. \quad \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k = const$$

Доказательство.

Свойства 1 и 2 следуют непосредственно из формул 12.1 и 12.2

3. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Т.е. $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$

Верны также следующие два равенства:

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1$$

$$\int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2$$

Складывая и вычитая два последних равенства получим:

$$\int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx = F_1(x) \pm F_2(x) + (C_1 \pm C_2) \tag{12.3}$$

$$\big(F_1(x) \pm F_2(x)\big)' = F_1'(x) \pm F_2'(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$$

Следовательно $\big(F_1(x) \pm F_2(x)\big)$ – первообразная для $f_1(x) \pm f_2(x)$

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = F_1(x) \pm F_2(x) + C \tag{12.4}$$

Сравнивая правые части равенств 12.3 и 12.4 приходим к выводу, что равны левые части этих равенств:

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$$

$\blacksquare$

Упражнение 12.1. *Доказать свойство 4.*

Два метода интегрирования

1. Замена переменной

Теорема 12.2. *Пусть $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T и пусть множеством её значений является промежуток X*

Пусть $f(x)$ определена на X и имеет первообразную $F(x)$ (т.е. $F'(x) = f(x)$)

Тогда $F\big(\varphi(t)\big)$ является первообразной для $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ на T

Доказательство.

По правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$F\big(\varphi(t)\big)' = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in T$ $\blacksquare$

$$\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big) + C = \big(\underbrace{F(x) + C}_{\int f(x)\,dx}\big)\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

– формула замены переменной в неопределённом интеграле

Пример 12.6.

$$\int cos\,kx\,dx = \frac{1}{k}\int cos\,t\,dt = \frac{1}{k}sin\,t + C = \frac{1}{k}sin\,kx + C$$

$$x = \frac{t}{k} = \varphi(t), \quad dx = \frac{1}{k}$$

Пример 12.7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

1 способ (с использованием гиперболических функций):

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

$$(shx)' = chx$$

$$(chx)' = shx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[x = sht\right] = \int \frac{cht\,dt}{cht} = \int dt = t + C$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow t = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

2 способ (с использованием подстановки Эйлера):

$$t = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t^2 - t^2 + 1}{t^2}\,dt = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\Bigg|_{t=x+\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = lnt + C = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

2. Интегрирование по частям

Теорема 12.3. *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на промежутке X и пусть $u'(x)\,v(x)$ имеет первообразную на X,*

$$\textit{т.е. существует} \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$\textit{Тогда существует} \int v'(x)\,u(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

Доказательство.

$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow v'u = (uv)' - u'v$

$(uv)'$ имеет первообразную uv, $u'v$ имеет первообразную по условию $\Rightarrow v'u$ имеет первообразную

$$\int v'u\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

■

$v'\,dx = dv, \quad u'dx = du$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ – формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле

Пример 12.8.

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Лекция 13. Интегралы. Часть 2.

Было введено понятие первообразной и неопределенного интеграла.

Первообразная *для функции $f(x)$ – это такая функция $F(x)$ производная которой равна $f(x)$.*

$$F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл *– это совокупность первообразных, отличающихся друг от друга на произвольную постоянную.*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Отметили, что интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Если не любая элементарная функция интегрируется в элементарную, то, возможно, подмножество элементарных функций обладает этим свойством.

Любая рациональная функция интегрируется в элементарную функцию.

Интегрирование рациональных функций

Рациональная функция *– это функция, имеющая вид*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

где P_n и Q_m многочлены степени n и m соответственно.

Дробь правильная, если $n < m$. Степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя. Любую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

Пример 13.1.

$$\frac{x}{x^4 - 1}$$

Разложим знаменатель на множители

$$\frac{x}{x^4 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Каждому из сомножителей знаменателя соответствует та дробь, в знаменателе которой стоит только этот сомножитель. Там где в знаменателе многочлен первой степени, в числителе – число, где в знаменателе многочлен второй степени, в числителе – многочлен первой степени. Чтобы найти коэффициенты A, D, C, D, сложим дроби, приведя их к общему знаменателю.

$$\frac{A(x+1)(x^2+1)}{x-1}+\frac{B(x-1)(x^2+1)}{x+1}+\frac{(Cx+D)(x^2-1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^3(A+B+C)+x^2(A_B+D)+x(A+B_C)+(A-B-D)}{x^4-1}$$

Знаменатели дробей одинаковы, следовательно, должны быть одинаковы и числители.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=1 \\ A-B-D=0 \end{cases}$$

Получили для неизвестных коэффициентов систему линейных уравнений.

Решение системы

$$\begin{cases} A=B=\frac{1}{4} \\ C=-\frac{1}{2} \\ D=0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^4-1}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$

Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – произвольная правильная рациональная дробь ($n<m$) и разложение знаменателя на вещественные множители имеет вид

$$Q_m(x)=(x-a)^{\alpha}...(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\gamma}...(x^2+rx+s)^{d} \tag{13.1}$$

где $a,...,b$ – вещественные корни $Q_m(x)$

$x^2+px+q,...,x^2+rx+s$ – квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами, имеющие комплексные (различные) корни

α,β,γ – натуральные числа, кратности соответствующих корней.

Равенство 13.1 называется разложением многочлена с вещественными коэффициентами на произведение неприводимых вещественных множителей. "Неприводимые"означает, что дальше раскладывать нельзя.

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \\ + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \\ + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \ldots + \\ + \frac{L_\delta x + K_\delta}{(x^2+rx+s)^\delta} + \ldots + \frac{L_1 x + K_1}{x^2+rx+}\end{aligned} \tag{13.2}$$

Каждому из квадратных трехчленов будет соответствовать группа из стольких слагаемых, какова кратность корня. Чтобы найти коэффициенты нужно сложить все дроби и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x. Чем больше степень многочлена, тем больше уравнений. Данный метод называется **метод неопределенных коэффициентов**.

Есть и более удобные методы для нахождения коэффициентов для более простых случаев.

При сложении крайностей корней, получим

$$\alpha + \ldots + \beta + 2(\gamma + \ldots + \delta) = m$$

где m – степень многочлена

Из написанного разложения видно, что интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию четырех видов простейших дробей:

- Число делится на многочлен степени больше 1;
- Число делится на многочлен с единичной степенью;
- Многочлен делится на многочлен степени больше 1;
- Многочлен делится на многочлен с единичной степенью.

От каждой из простейших дробей интеграл выражается в элементарную функцию.

Пример *I*.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot ln|x-a| + C$$

Пример *II*.

$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^\alpha} = A(x-a)^{-\alpha+1}\frac{1}{-\alpha+1} + C = \frac{A}{1-\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + C$$

Пример *III*.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left|p^2-4q<0\right|$$

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right) + q - \frac{p^2}{4} = \left|q-\frac{p^2}{4} = a^2 > 0\right|$$

$$x+\frac{p}{2} = t$$

Тогда

$$x^2+px+q = t^2+a^2$$

Заметим, что $dx = dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}dt = M\int\frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{M_p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \\ &= \frac{M}{2}ln(t^2+a^2) + \left(N-\frac{M_p}{2}\right)\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} = \left|\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} = \text{arctan}\left(\frac{t}{a}\right)\right|\end{aligned} \tag{13.3}$$

Пример *IV*.

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha}dx \quad \textit{где} \quad (\alpha > 1)$$

Если дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправильная, то следует разделить числитель на знаменатель.

$$P_n(x) = Q_m(x)\cdot T_{n-m}(x) + R_k(x)$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$$

где $T_{n-m}(x)$ – многочлен, $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Любая рациональная функция интегрируется в элементарную функцию.

Пример 13.2.

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x_2} + \frac{B}{x+a} = \frac{x(A+B)+(A-b)a}{x^2-a^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=\frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\frac{1}{2a} \\ B=-\frac{1}{2a} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Важно выделить классы функций, которые с помощью замены переменной сводятся к интегралу по рациональной функции. Такие классы как дробно-линейные рациональности, квадратичные рациональности, иррациональности, тригонометрические функции.

Понятие определенного интеграла

Пусть $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$ при $(a<b)$. Выберем на сегменте $[a,b]$ произвольным образом точки x_1, x_2, ..., x_{n-1} так, что $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

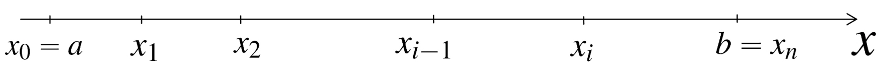

Рис. 13.1. Изображение сегмента

Определенный выбор точек $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ назовем **разбиением сегмента** $[a,b]$. А точки – **точки разбиения**. Сегменты $[x_{i-1},x_i]$ назовем **частичными сегментами**.

На $[x_{i-1},x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i.

Введем длину i-го сегмента $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i =: I(x_i, \xi_i)$$

Интегральная сумма функции $f(x)$ соответствует данному разбиению сегмента и данному выбору промежуточных точек. Для такого разбиения имеется множество интегральных сумм, зависящих от выбора точек.

Обозначим через Δ максимальную из длин Δx_i.

$$\Delta = max\Delta x_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n - \textit{диаметр разбиения}$$

Сформулируем определение предела интегральных сумм, при условии, что $\Delta \to 0$

Определение 13.1. *Число I называется пределом интегральных сумм $I(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \to 0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$ и для любого выбора ξ_i выполняется равенство*

$$|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$$

Данный предел не есть предел функций, так как при $\Delta \to 0$ число точек разбиения стремится к бесконечности.

Определение 13.2. *Если существует предел $\lim_{\Delta\to 0} I(x_i, \xi_i) = I$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на сегменте $[a, b]$, а число I – это определенный интеграл от функции $f(x)$ по сегменту $[a, b]$.*

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл

Из школьного курса известно, что интеграл для неотрицательной непрерывной функции – это площадь криволинейной трапеции.

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

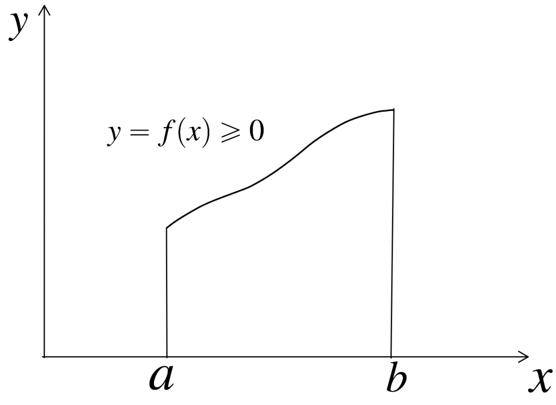

Рис. 13.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Какие функции интегрируемы ?

Любая неограниченная на сегменте $[a,b]$ функция – неинтегрируема, так как для любого сколь угодно мелкого разбиения сегмента интегральная сумма может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора промежуточных точек и, следовательно, не существует предела интегральных сумм.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Два примера ограниченных функций

1) Пример интегрируемой функции

$$f(x) = c = const \quad \text{на}[a,b]$$

$$\forall \quad \text{разбиения} \quad [a,b] \quad \text{и для} \quad \forall \xi_i:$$

$$I(x_i,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = C(b-a) = const$$

$$\lim_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i) = C(b-a)$$

$$\int_a^b C dx = C(b-a)$$

2) Пример неинтегрируемой функции (функции Дирихле)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное} \end{cases}$$

$$x \in [a,b]$$

Для любого сколь угодно маленького разбиения $[a,b]$ интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ может изменяться от 0 до $(b-a)$ и, следовательно, не существует предела интегральных сумм. В дальнейшем будем рассматривать только ограниченные функции.

Цель: доказать интегрируемость любой непрерывной на сегменте функции, а также любой функции из некоторого класса разрывных функций и любой монотонной функции.

Суммы Дарбу

Пусть $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a,b]$. Рассмотрим произвольное разбиение сегмента $[a,b]$ и введем следующие обозначения

$$Sup_{[x_{i-1},xi]}f(x) = M_{ij}$$

$$inf_{[x_{i-1},xi]}f(x) = m_{ij}$$

Составим 2 суммы

$$S = \sum_{i=1}^{m} M_i \Delta x_i$$

$$s = \sum_{i=1}^{m} m_i \Delta x_i$$

Суммы S и s называются верхней и нижней суммами для данного разбиения сегмента $[a,b]$ или **суммами Дарбу**.

Свойства сумм Дарбу:

1) $s \leqslant I(x_i,\xi_i) = S$

Во множестве интегральных сумм для данного разбиения s является нижней гранью числового множества, а S – верхней.

$$s = inf\{I(x_i,\xi_i)\} - \textit{точная нижняя грань}$$

$$S = Sup\{I(x_i,\xi_i)\} - \textit{точная верхняя грань}$$

2) Обозначим разбиения как T_1, T_2 и т.д. T_2 назовем измельчением разбиения T_1, если оно получено из разбиения T_1 путем добавления нескольких новых точек разбиения.

   Пусть

$$T_1 : S_1 \quad \text{и} \quad s_1$$

$$T_2 : S_2 \quad \text{и} \quad s_2$$

   И пусть разбиение T_2 является измельчением разбиения T_1. Тогда при измельчении разбиения верхняя сумма не возрастает, а нижняя не убывает.

$$S_2 \leqslant S_1, \quad s_2 \geqslant s_1$$

3) Нижняя сумма любого разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

$$s_1 \leqslant S_2 \quad \text{и} \quad s_2 \leqslant S_1$$

4) Рассмотрим множество всевозможных верхних сумм $\{S\}$, ограниченное снизу любой нижней суммой и имеющее точную нижнюю грань.

$$inf\{S\} = \bar{I} - -\textit{верхний интеграл Дарбу}$$

   Множество всех нижних сумм ограничено сверху и имеет точную верхнюю грань.

$$sup\{s\} = \underline{I} - \textit{нижний интеграл Дарбу}$$

   Всегда нижний интеграл меньше или равен верхнему интегралу.

$$\underline{I} \leqslant \bar{I}$$

   Следовательно

$$\forall [a,b] : s \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S$$

5) Лемма Дарбу

$$\lim_{\Delta \to 0} S = \bar{I}, \quad \lim_{\Delta \to 0} s = \underline{I}$$

Лекция 14. Интегралы. Часть 3.

Приведем верхнюю и нижнюю сумм Дарбу

$$S = \sum_{i=1}^{m} M_i \Delta x_i$$

$$s = \sum_{i=1}^{m} m_i \Delta x_i$$

В отличие от интегральной суммы, верхняя и нижняя суммы не связаны с промежуточными точками. Для данного разбиения имеется множество интегральных сумм, одну верхнюю и одну нижнюю суммы.

Разберем подробнее свойства сумм Дарбу.

1) $s \leqslant I(x_i, \xi_i) \leqslant S$

   Любая интегральная сумма заключена между нижней и верхней суммами. Точная верхняя грань функции $f(x)$ по частичному сегменту $\{I(x_i, \xi_i)\}$.

$$S = Sup\{I(x_i, \xi_i)\} \tag{14.1}$$

   Точная нижняя грань функции $f(x$ по частичному сегменту $\{I(x_i, \xi_i)\}$.

$$s = inf\{I(x_i, \xi_i)\}$$

   Доказательство.

   Мы можем так выбрать точку ξ_i, что $f(\xi_i)$ будет сколь угодной близко к точной нижней грани, а, следовательно, интегральная сумма будет сколь угодна близка к s. Аналогично для верхней грани. ■

2) При измельчении сегмента верхняя сумма не возрастает, а нижняя не убывает.

   Доказательство.

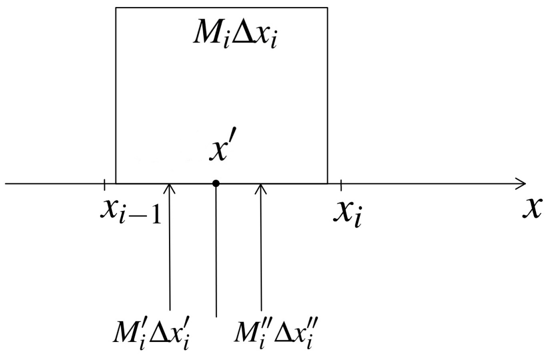

Рис. 14.1. Изображение сегмента верхних сумм при добавлении одной точки

Если при каждом добавлении хотя бы одной новой точки верхняя сумма не возрастает, то верхняя сумма не возрастет и при добавлении множества новых точек.

$$M_i \geqslant M_i'$$

Поэтому при сложении M_i' и M_i'' их сумма будет меньше или равна M_i, что означает, что верхняя сумма не увеличилась. ■

3) Нижняя сумма любого разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

$$s_1 \leqslant S_2 \quad \text{и} \quad s_2 \leqslant S_1$$

Доказательство.

При объединении точек двух разбиений, нижняя сумма не увеличится, а верхняя сумма не уменьшится. ■

4) Рассмотрим всевозможные разбиения и связанные с ними всевозможные верхние и нижние суммы. Множество всевозможных верхних сумм ограничено снизу любой нижней суммой, так как любая верхняя больше или равна нижней.

$$\{S\} \quad inf\{S\} = \bar{I} - \textit{верхний интеграл Дарбу}$$

$$\{s\} \quad sup\{s\} = \underline{I} - \textit{нижний интеграл Дарбу}$$

Всегда нижний интеграл меньше или равен верхнему.

$$\underline{I} \leqslant \bar{I}$$

Допустим верхний интеграл меньше нижнего (14.2).

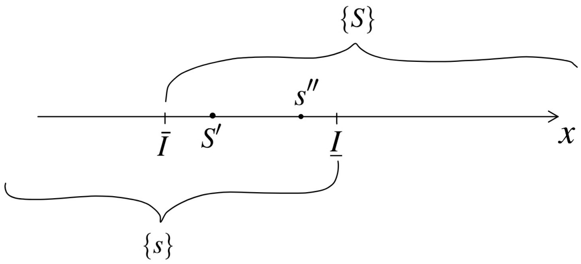

Рис. 14.2. Изображение верхнего и нижнего интегралов

Доказательство.

Так как $\bar{I}$ является точной нижней гранью множества всех верхних сумм, значит множество верхних сумм расположено правее $\bar{I}$, а так как это точная нижняя грань, то сколь угодно близко найдется верхняя сумм S'. Все множество нижних сумм лежит левее $\underline{I}$, а так как это точная верхняя грань, то сколь угодно близко найдется нижняя сумма s''. Получили противоречие, что нижняя сумма больше чем верхняя. ■

$$s \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S \tag{14.2}$$

5) **Лемма Дарбу**

Предел нижних сумм при $\Delta \to 0$ равен нижнему интегралу Дарбу, предел верхних сумм – верхнему интегралу Дарбу.

$$\lim_{\Delta\to 0} S = \bar{I}, \quad \lim_{\Delta\to 0} s = \underline{I}$$

Необходимое и достаточное условие интегрируемости

Теорема 14.1. *Для того, чтобы ограниченная на сегменте функция была интегрируемой на этом сегменте необходимо и достаточно, чтобы нижний интеграл равнялся верхнему интегралу.*

$$\underline{I} = \bar{I}$$

Доказательство.

Необходимость условия

Равенство с необходимостью следует из интегрируемости, значит функция интегрируема. Пусть $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, т.е. существует предел интегральных сумм.

$$\lim_{\Delta\to 0} I(_i, \xi_i) = I$$

Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall \quad \textit{разбиение} \quad [a,b], \quad \textit{у которого} \quad \Delta < \delta \forall \xi_i : |I(_i, \xi_i) - I| < \frac{1}{4}\varepsilon$$

Зафиксируем одно из таких разбиений и будем использовать свойство сумм Дарбу.

Обозначим через s и S суммы Дарбу для этого разбиения. s – точная нижняя грань, а S – точная верхняя грань. В силу неравенства 14.1 можно так выбрать точки ξ_i', что будет выполнено неравенство

$$I(x_i \xi_i') - s < \frac{\varepsilon}{4}$$

Аналогично

$$S - I(x_i, \xi_i'') < \frac{\varepsilon}{4}$$

В силу написанных неравенств получаем

$$S - s = \left[S - I(x_i, \xi_i'')\right] + \left[I(x_i, \xi_i'') - I\right] + \left[I - I(x_i, \xi_i')\right] + \left[I(x_i, \xi_i') - s\right] < \varepsilon$$

$$S - I(x_i, \xi_i'') < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$I(x_i, \xi_i'\prime) - I < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$I - I(x_i, \xi_i') < \frac{\varepsilon}{4}$$
$$I(x_i, \xi_i') - s < \frac{\varepsilon}{4}$$

Следовательно

$$S - s < \varepsilon$$

Воспользуемся неравенством 14.2

$$0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon \Rightarrow \underline{I} = \bar{I}$$

Необходимость доказана.

Замечание 14.1. *Попутно мы доказали, что если $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ разбиение $[a,b]$, разность которого $S - s < \varepsilon$.*

Достаточность условия

Пусть $\underline{I} = \bar{I} = I$.

В силу леммы Дарбу

$$\lim_{\Delta \to 0} s = I$$
$$\lim_{\Delta \to 0} S = I$$

Любая интегральная сумма данного разбиения удовлетворяет следующим неравенствам

$$s \leqslant I(_i, \xi_i) \leqslant S$$

Следовательно $\exists \lim_{\Delta \to 0} I(_i, \xi_i) = I$, что означает, что функция интегрируема.

■

Пример 14.1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное} \end{cases}$$

$\forall \quad$ *разбиения* $\quad [a,b] : s = 0, \quad S = b - a$

Следовательно

$$\underline{I} = 0, \bar{I} = b - a$$
$$\underline{I} \neq \bar{I}$$

Функция Дирихле не интегрируема.

Теорема 14.2. *Для того, чтобы ограниченная на сегменте* $[a,b]$ *функция была интегрируемой на этом сегменте необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ *разбиение* $[a,b]$, *у которого* $S - s < \varepsilon$.

Доказательство.

Необходимость См. замечание после доказательства необходимости в теореме 14.1

Достаточность Пусть для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ разбиение $[a,b]$, у которого $S - s < \varepsilon$.

Воспользуемся цепочкой неравенств 14.2.

$$0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} \leqslant \varepsilon$$

$$\underline{I} = \bar{I}$$

Для того, чтобы доказать, что функция интегрируема воспользуемся теоремой 14.1. Откуда следует, что $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$. ■

Замечание 14.2. *Используя обозначения*

$$M_i = Sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$m_i = inf_{[x_{i+1},x_i]} f(x)$$

Введем следующую величину – ***колебание функции*** $f(x)$ *на частичном сегменте.*

$$\omega_i = M_i - m_i$$

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$$

Классы интегрируемых функций

Интегрируемость непрерывных функций

Сформулируем свойства непрерывных функций.

Определение 14.1. *Функция $f(x)$ называется* ***равномерно непрерывной*** *на промежутке X, если $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$, такое, что*

$$\forall x'x'' \in X, |x'' - x'| < \delta : |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Из определения следует, что равномерно непрерывная на промежутке X функция непрерывна в каждой точке на этом промежутке. Функция непрерывная в каждой точке промежутка может не быть равномерно непрерывной.

Пример 14.2.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1$$

Функция непрерывна на интервале $[0,1]$. Докажем, что данная функция не является равномерно непрерывной на этом интервале.

Докажем, что

$$\exists\varepsilon > 0, \text{ \textit{такое, что} } \forall\delta > 0 \quad \exists x' u x'' \in (0,1), \text{ \textit{такие, что} } |x'' - x'| < \delta,$$

$$\text{\textit{но} } |f(x'') - f(x')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| \geqslant \varepsilon$$

Возьмем $\varepsilon = 1$

$$x' = \frac{1}{n}, \quad x' = \frac{1}{n+2} \quad (n \in N)$$

Очевидно, что для $\forall\delta > 0 \quad \exists n : |x'' - x'| < \delta$

Но

$$|f(x'\prime) - f(x')| = |(n+2) - n| = 2 > \varepsilon = 1$$

Выполнено отрицание определения равномерности непрерывности, что означает, что данная функция не является равномерно непрерывной на рассмотренном интервале. Отметим, что особое месть среди промежутков занимают сегменты.

Теорема 14.3. ***Теорема Кантора***

Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.

Теорема 14.4. ***1-ая теорема Вейерштрасса***

Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.

Теорема 14.5. ***2-ая теорема Вейерштрасса***

Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте своих точных граней.

Если $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $\exists$ x' *и* $x'' \in [a,b]$:

$$f(x) = M = Sup_{[a,b]} f(x)$$

$$f(x) = m = inf_{[a,b]} f(x)$$

Следствие из теоремы Кантора

Если $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $\forall \varepsilon$ *разбиение* $[a,b]$ *у которого каждое* $\omega_i <$
ε

Доказательство.

По теореме Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, и значит, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta >$,такое, что $\forall x'x'' \in [a,b], |x''-x'| < \delta$:

$$|f(x)'\prime - f(x)'| < \varepsilon$$

Рассмотрим произвольное разбиение $[a,b]$, у которого

$$\Delta = max\Delta_{xi} < \delta \quad 1 \in i \in n$$

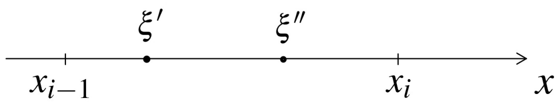

Рис. 14.3. Изображение произвольного частичного сегмента

По 2-ой теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на этом сегменте своих точных граней.

Т.е. $\xi'\xi' \in [x_{i-1}, x_i]$, такие, что

$$f(\xi') = M_i$$

$$f(\xi'') = m_i$$

Так как $|\xi'' - \xi'| \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant \Delta < \delta$, то $|f(\xi'') - \varphi(\xi')|\varepsilon$

$$M_i - m_i < \varepsilon \Rightarrow \omega_i < \varepsilon$$

■

Теорема 14.6. *Непрерывная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство.

Зададим произвольный $\varepsilon > 0$ и рассмотрим такое разбиение сегмента $[a,b]$, у которого $\omega - i < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Оно существует в силу следствия теорема Кантора.

Для этого разбиения

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ } \textit{разбиение } [a,b] : S - s < \varepsilon$$

Следовательно, по теореме 14.2 функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$. ■

Интегрируемость некоторых разрывных функций

Пусть $f(x)$ имеет точки разрыва на сегменте $[a,b]$. Будем говорить, что все точки разрыва $f(x)$ можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечное число интервалов, заключающих в себе все точки разрыва функции и имеющие сумму длин $< \varepsilon$.

Например, если функция имеет конечное число точек разрыва, то она удовлетворяет этому условию.

Теорема 14.7. *Если $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и если все её точки разрыва можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин, что $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$.*

Доказательство.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, и покроем все точки разрыва функции конечным числом интервало с суммой длин $< \frac{\varepsilon}{M-m}$

$$M = Sup_{[a,b]}f(x), m = inf_{[a,b]}f(x) \quad (M > m)$$

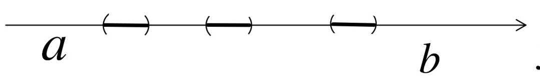

Рис. 14.4. Изображение конечного числа интервалов

Остальная часть сегмента $[a,b]$ представляет собой конечное число не пересекающихся сегментов, на каждом из которых $f(x)$ непрерывна. В силу следствия из теоремы Кантора каждый из сегментов можно разбить на частичные сегменты так, что колебания функции $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Объединяя эти разбиения с интервалами, покрывающими точки разрыва, получим разбиение сегмента $[a,b]$ для которого

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum{}^{'} \omega_i \Delta x_i + \sum{}^{''} \omega_i \Delta x_i < (M-m) \sum{}^{'} \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum{}^{''} \Delta x_i < \varepsilon$$

$$\sum{}^{'} \omega_i \Delta x_i - \textit{сумма по интервалам}$$

$$\sum{}^{''} \omega_i \Delta x_i - \textit{сумма по частичным сегментам}$$

Что означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists$ *разбиение* $[a,b] : S - s < \varepsilon$

Следовательно, по теореме 14.2 функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. ■

Лекция 15. Интегралы. Часть 4.

Интегрируемость монотонных функций

Теорема 15.1. *Монотонная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство

Пусть $f(x)$ не убывает на сегменте $[a,b]$ и не равна константе.

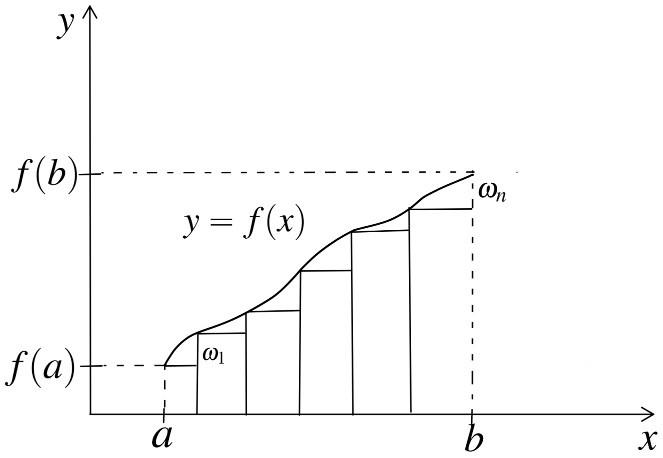

Рис. 15.1. График непрерывной функции $y = f(x)$

$$f(b) > f(a)$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ разобьем сегмент на равные частичные сегменты.

$$\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

Рассмотрим колебание функции на каждом частичном сегменте.

$$\omega_i = M_i - m_i$$

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = f(b) - f(a)$$

$$S - s < \varepsilon$$

Следовательно, функция интегрируема на сегменте $[a,b]$.

Следствие из теоремы 15.1

Если функция кусочно-непрерывна на сегменте (т.е. имеет конечное число точек разрыва 1-го рода), то она интегрируема на этом сегменте.

Свойства определенного интеграла

1) Мы ввели определенный интеграл в том случае, когда $a < b$.

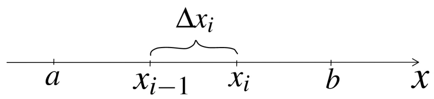

Рис. 15.2. Изображение сегмента $[a,b]$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Сегмент $[a,b]$ вырождается в точку.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx =$$

Если поменять пределы интегрирования местами, то интеграл изменит знак.

Все следующие свойства будем рассматривать для случая $a < b$.

2) **Линейное свойство**

Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, а α и β – любые числа, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \qquad (15.1)$$

Доказательство

Составим интегральную сумму для функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x+\beta\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x$$

Переходя к пределу в написанном равенстве при $\Delta\to 0\quad(\Delta=max\Delta x_i)$ получаем 15.1.

Если в формуле 15.1 $\alpha=1$, $\beta=1$ или $\beta=-1$, то получим

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

Если в формуле 15.1 $\alpha\neq 0$, а $\beta=0$

$$\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

3) Если $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на $\forall[c,d]\in[a,b]$

   Доказательство основано на теореме 14.2.

4) **Аддитивность**

   Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и точка $C\in(a,b)$

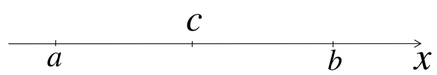

Рис. 15.3. Изображение сегмента $[a,b]$

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx \tag{15.2}$$

Доказательство

Рассмотрим такие разбиения сегмента $[a,b]$, в которых C является точкой разбиения.

Интегральные суммы по частичным сегментам равны

$$\sum_{[a,c]} f(\xi_i)x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)x_i = \sum_{[a,b]} f(\xi_i)x_i$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$ получим равенство 15.2. **Замечание**

Если C лежит вне сегмента $[a,b]$, то равенство 15.2 остается в силе.

Пусть $a < b < c$ и $f(x)$ интегрируема на $[a,c]$

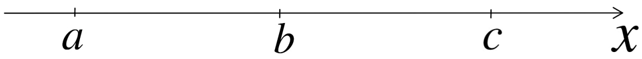

Рис. 15.4. Изображение сегмента $[a,c]$

Применяя формулу 15.2, получим

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{15.3}$$

Сравним интегралы 15.2 и 15.3. Выражения равны, только в случае формулы 15.3 точка c не лежит на сегменте $[a,b]$.

5) Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ в случае $(a < b)$ и $f(x) > 0$ для $\forall x \in [a,b]$, то

$$I = \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

Интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.

Доказательство

Так как $f(x) \geqslant 0$, то любая интегральная сумма тоже больше или равна 0.

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > 0 \tag{15.4}$$

Допустим, что $I < 0$. По определению предела интегральных сумм $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall$ разбиение $[a,b]$, у которого $\Delta < \delta$:

$$|I(x_i, \xi_i)| < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < I(x_i, \xi_i) < I + \varepsilon$$

Возьмем $\varepsilon = -I > 0$, тогда $I(x_i, \xi_i) < 0$, что противоречит 15.4. **Следствие**

Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$ для $\forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx \tag{15.5}$$

Доказательство

Так как $f(x) - g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geqslant 0$$

6) Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ – также интегрируем на $[a,b]$ и справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|$$

Доказательство свойства основывается на теореме 14.2.

Отметим, что обратное утверждение неверно. Т.е. из интегрируемости функции $|f(x)|$ не следует интегрируемость самой функции $f(x)$.

Пример 15.1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \textit{ - рациональное} \\ 0, & \textit{если } x \textit{ - иррациональное} \end{cases}$$

$$|f(x)| = 1 = const$$

7) Если произведение $f(x) \cdot g(x)$ интегрируемо на $[a,b]$, то

- $f(x) \cdot g(x)$ интегрируемая функция на $[a,b]$
- Если $Sup_{[a,b]}g(x) < 0$, либо $inf_{[a,b]}g(x) > 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ интегрируемо на } [a,b]$$

Доказательство основано на теореме 14.2.

Формулы среднего значения

Теорема 15.2. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $g > 0$ (либо =0) $\forall x \in [a,b]$,*

$$M = Sup_{[a,b]}f(x), \quad m = inf_{[a,b]}f(x)$$

Тогда

$$\exists \mu \in [m,M]:$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

За знак интеграла можно вынести среднее значение функции $f(x)$, которое лежит в пределах этой функции.

Доказательство

Пусть $g(x) > 0$ на $[a,b]$. Так как $m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$, то

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

Так как $g(x) = 0$, то

$$\int_a^b g(x)dx \geqslant 0$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Если $\int_a^b g(x)dx > 0$, то

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$$

Обозначим

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$$

$$\mu \in [m, M]$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \tag{15.6}$$

Следствие 1

1) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x)$ принимает все значения $[m,M]$ и, следовательно, для μ $\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \mu$, формула 15.6 принимает вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \tag{15.7}$$

2) Если $g(x) = 1 \quad \forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b dx = \mu(b-a) \tag{15.8}$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \tag{15.9}$$

Формулы 15.6-15.9 называются формулами среднего значения.

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, тогда она интегрируема на любом сегменте, лежащем на $[a,b]$. Обозначим t как переменную, изменяющуюся $a \leqslant t \leqslant x$ и рассмотрим интеграл

$$\int_a^x f(t)dt$$

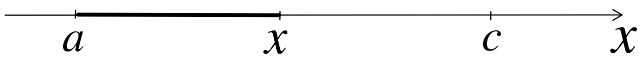

Рис. 15.5. Изображение сегмента

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

где $F(x)$ – интеграл с переменным верхним пределом

Теорема 15.3. *Непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную на этом сегменте, одной из первообразных является $F(x)$.*

Доказательство

Требуется доказать, что $\forall x \in [a,b] : F'(x) = f(x)$

Т.е.

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Поскольку функция непрерывна, воспользуемся формулой среднего значения 15.9.

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow \xi \to x \Rightarrow f(\xi) \to f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Т.е.

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Следствие

Так как любые 2 первообразные отличаются на константу, то произвольная первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t)dt + C$$

$$x = a \quad \Phi(a) = C$$

$$x = b \quad \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + \Phi(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) - \textit{формула Ньютона-Лейбница}$$

Формула связывает определенный и неопределенный интегралы.

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$$

Пример 15.2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Пример 15.3.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Пример 15.4.

$$\int_0^1 \sin x dx = -\cos x\Big|_0^1 = \cos\pi - \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

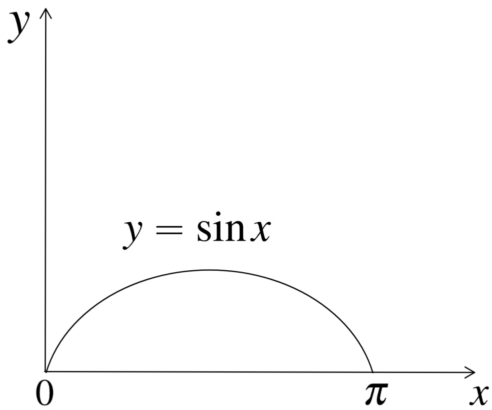

Рис. 15.6. График функции $f(x)$

Лекция 16. Интегралы. Часть 5.

Обобщим следующую формулу

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Рассмотрим интеграл, у которого оба предела переменные и зададим вопрос: "Как вычислить производную от этого интеграла ?"

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = ?$$

Пусть $F'(x)$ первообразная для $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

По формуле Ньютона-Лейбница получим

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = F(t)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

Получаем

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = F'(\psi(x))\cdot\psi'(x) - F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Замена переменной

Теорема 16.1. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $g(t)$ имеет непрерывную производную $g'(t)$ на $[a,b]$, $g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b, \quad a \leqslant g(t) \leqslant b$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.*

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int \alpha^{\beta} f(g(t))\cdot g'(t)dt \tag{16.1}$$

Неравенство 16.1 является **формулой замены переменной** в определенном интеграле.

Доказательство

Пусть $F'(x) = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$

Тогда $F(g(t))$ – первообразная для $f(g(t)) \cdot g'(t)$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \tag{16.2}$$

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t))|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) \tag{16.3}$$

Правые части уравнений 16.2 и 16.3 равны, следовательно, равны и левые части.

Пример 16.1.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Сделаем замену

$$x = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Интеграл от функции $y = \sqrt{1-x^2}$ – это площадь фигуры под графиком.

Интегрирование по частям

Теорема 16.2. *Пусть $U(x)$ и $V(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,b]$.*

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\big|_a^b - \int_a^b V(x)U'(x)dx \tag{16.4}$$

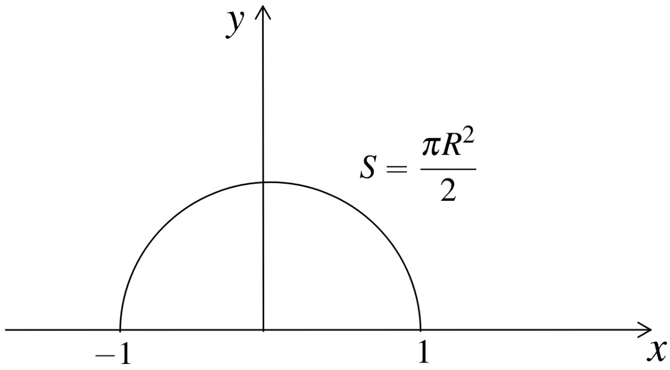

Рис. 16.1. График функции $y = \sqrt{1 - x^2}$

Доказательство

Так как $(U(x)V(x))' = U(x)V'(x) + V(x)U'(x)$

Т.е. $U(x)V(x)$ – первообразная для $U(x)V'(x) + V(x)U'(x)$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b \left[U(x)V'(x) + V(x)U'(x)\right] dx = U(x)V(x)\Big|_a^b$$

Непосредственно следует формула 16.4.

Так как $V'(x)dx = dV, \quad Udx = dU$, то

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU$$

Пример 16.2.

$$\int_0^\pi \cos x dx = \int_0^\pi x \sin x = x \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x|_0^\pi = -1 - 1 = -2$$

Геометрические приложения определенного интеграла

1. Длина кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{16.5}$$

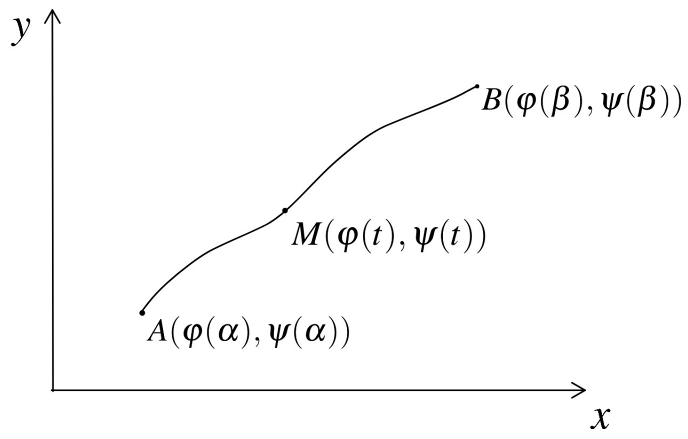

Рис. 16.2. График кривой $y(x)$

Переменная t называется параметром, а уравнение 16.4 – **уравнение кривой**.

Пусть φ и ψ непрерывны на сегменте $[\alpha,\beta]$ и пусть различным значениям параметра t соответствуют различные точки $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. В таком случае кривая называется простой плоской незамкнутой кривой на плоскости.

Пример кривой

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

Если все точки кривой простые (не кратные), а совпадают только точки A и B, то кривая – простая замкнутая кривая.

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Пусть кривая L задана уравнениями 16.5 и является простой кривой. Разобьем сегмент $[\alpha,\beta]$ на частичные сегменты (рис. 16.3).

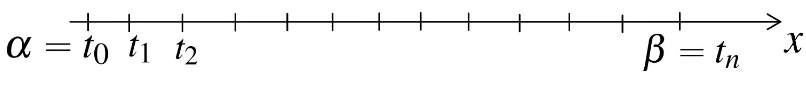

Рис. 16.3. Изображение сегмента $[\alpha,\beta]$

Обозначим через Δt_i длину i-го частичного сегмента $[\alpha, \beta]$.

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$\Delta t = max \Delta t_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Впишем в кривую ломаную. Обозначим длину ломаной через Δl_i, а через $l(M_i)$ – сумму длин звеньев.

$$l(M_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i - -\textit{длина ломаной}$$

Определение 16.1. *l называется пределом $l(M_i)$ при $\Delta t \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое что $\forall$ разбиение $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$: $l - l(M_i) < \varepsilon$*

Если $\exists \quad \lim_{\Delta t \to 0} l(M_i) = l$, то кривая L называется **спрямляемой**, а l – длина дуги кривой. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, то кривая является спрямляемой и ее длина выражается формулой

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi^{2\prime}(t) + \psi^{2\prime}(t)} dt$$

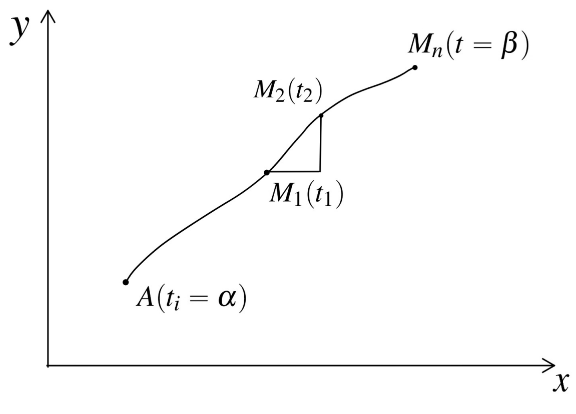

Рис. 16.4. График кривой L

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt$$

$$dl^2 \simeq (dx)^2 + (dy)^2 = (\varphi'^2(t) + \psi'^2(t))(dt)^2$$

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t))} dt$$

Чтобы получить всю длину кривой, нужно просуммировать элементы dl.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t))}dt \tag{16.6}$$

Пусть кривая является графиком функции $y = f(x)$.

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

$$x = t, y = f(t), a \leqslant t \leqslant b$$

Применяя формулу 16.6, получаем

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Пример 16.3.

$$x = Rt, \quad y = Rt, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt = \int_0^{2\pi} Rdt = Rt\big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

Пример 16.4.

$$y = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

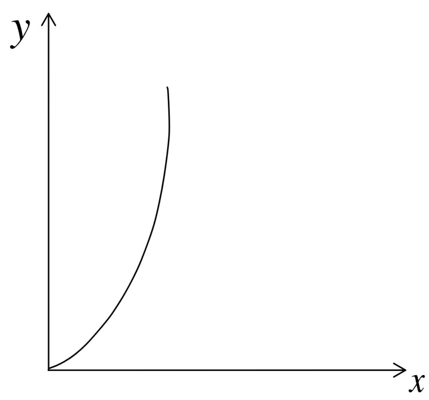

Рис. 16.5. График параболы $y = x^2$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx$$

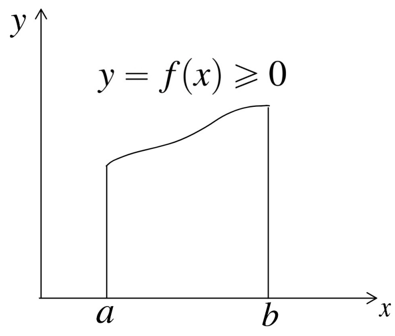

Рис. 16.6. График непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$

2. Площадь плоской фигуры

$$S = \int_a^b f(x)dx - -\textit{площадь криволинейной трапеции}$$

Рассмотрим полярную систему координат.

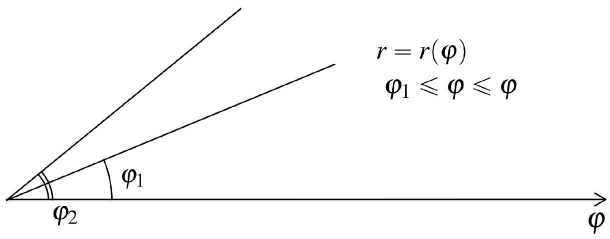

Рис. 16.7. Изображение криволинейного сектора в полярных координатах

$$dS = \frac{1}{2}r^2(\varphi)d\varphi$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi - -\textit{площадь криволинейного сектора}$$

3. Объем тела

Рассмотрим некое протяженное тело.

$$dV = S(x)dx$$

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

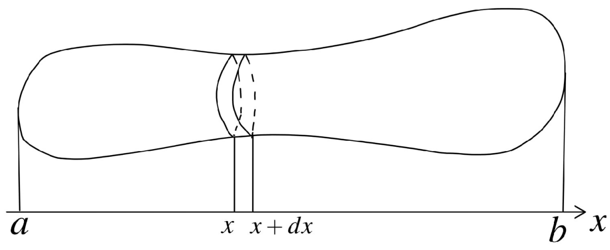

Рис. 16.8. Изображение протяженного тела

4. Площадь поверхности вращения

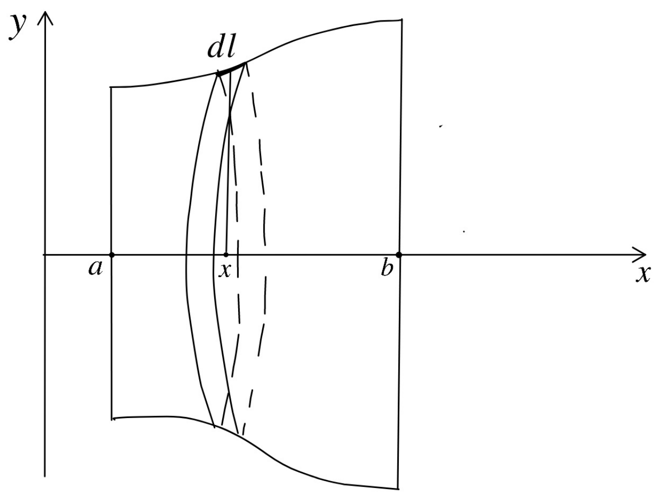

Рис. 16.9. График кривой $y = f(x)$

При вращении кривой вокруг оси x получим поверхность вращения. В каждом сечении поверхности плоскостью $x = conxt$ получается окружность, радиус которой $r = f(x)$. Передвинемся вдоль графика функции в такую точку, что длина кривой будет равна dl. Площадь полученного диска будет

$$dS = 2\pi r dl = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Тогда вся площадь трапеции равна

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Объем тела вращения будет выражен следующим выражением

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Лекция 17. Числовые последовательности. Часть 1.

Числовая последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел.

Определение 17.1. *Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой, что для любого $n > N$* $\quad |x_n - a| < \varepsilon$

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n, \ \text{если } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \quad \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Геометрический смысл определения состоит в том, что все члены последовательности с номерами $n > N$ лежат в ε-окрестности точки a.

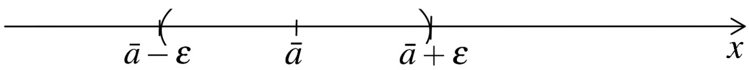

Рис. 17.1. Изображение числовой прямой

Было доказано, что монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Было отмечено, что если все члены $x_n \in [a,b]$ и $\exists \quad \lim_{n\to\infty} x_n = c$, то $c \in [a,b]$

Теорема о вложенных сегментах

Рассмотрим последовательность сегментов $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots [a_n,b_n],\ldots$, такую, что каждый следующий сегмент содержится в предыдущем, т.е

$$\forall n : a_n \leqslant a_{n-1} < b_{n+1} \leqslant b_n \tag{17.1}$$

Кроме того

$$(b_n - a_n) \to 0 \ \text{при } n \to \infty$$

Такая последовательность сегментов называется **стягивающейся системой сегментов**.

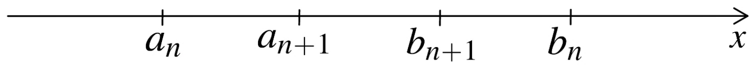

Рис. 17.2. Изображение вложенного сегмента

Теорема 17.1. *Существует единственная точка, принадлежащая всем сегментам стягивающейся системы.*

Доказательство.

Из неравенств 17.1 следует, что последовательность a_n – неубывающая, а последовательность b_n – невозрастающая. Кроме того, обе последовательности ограничены, так как все их члены лежат на сегменте $[a_1, b_1]$. Следовательно, эти последовательности сходятся, а так как $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то пределы последовательностей равны.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

Очевидно, что $\forall n : a_n \leqslant c, \quad b_n \geqslant c$ Т.е.

$$\forall n : a_n \leqslant c \leqslant b_n$$

$$\forall n : c \in [a_n, b_n]$$

Существование точки, принадлежащей всем сегментам стягивающейся системы доказано. ■

Докажем, что такая точка только одна. Допустим, что существует другая точка d.

$$\exists d \in [a_n, b_n], \quad d > c$$

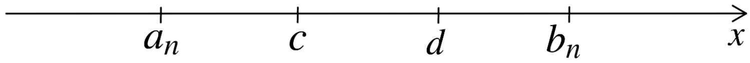

Рис. 17.3. Изображение числовой прямой

Тогда

$$b_n - a_n \geqslant d - c$$

$$\lim_{n\to\infty} \geqslant d - c > 0$$

Но это условие противоречит тому, что $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, не может быть другой точки, теорема доказана.

Свойство, обоснованное в теореме 17.1 называется **непрерывностью множества вещественных чисел**.

При рассмотрении множества рациональных чисел мы видим, что система может и не стягиваться к рациональной точке.

Предельные точки последовательности

Пусть $\{x_n\}$ – любая последовательность.

$$\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n$$

И пусть $\{k_n\}$ – возрастающая последовательность, элементами которой являются целые положительные числа.

$$\{k_n\} = k_2, k_2, ..., k_n$$

Например

$$\{k_n\} = \{2n-1\} = 1, 3, 5, ...2n-1$$

Составим последовательность $\{x_{kn}\}$.

$$\{x_{kn}\} = x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn}$$

Данная последовательность называется **подпоследовательностью последовательности** $\{x_n\}$.

Лемма 1.

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *то любая последовательность* $\{x_{kn}\} \to a$

Доказательство.

Для $\forall \varepsilon > 0$ при $n > N$ все члены $x_n \in \{\varepsilon - \textit{окрестности т. } a\}$, следовательно, все x_{kn} при $k_n > N$ также $\in \{\varepsilon - \textit{окрестности т. } a\ \}$.

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{kn} = a$$

■

Может быть так, что последовательность x_n расходится, но у неё есть сходящиеся подпоследовательности.

Пример 17.1.

$$\{x_n\} = 0, 1, 0, 1, ...0, 1 \ \textit{расходится}$$

$$\{x_{2n-1}\} = 0, 0, 0..., 0 \quad \to 0$$

$$\{x_{2n}\} = 1, 1, 1, ..., 1 \quad \to 1$$

Теорема 17.2. ***Больцано-Вейерштрасса*** *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство.

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная, т.е. $\forall n: \quad a \leqslant x_n \leqslant b$

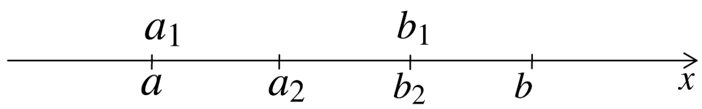

Рис. 17.4. Изображение сегмента $[a, b]$

Разделим сегмент $[a, b]$ пополам. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из образовавшихся сегментов, на котором бесконечно много членов последовательности. Возьмем такой член последовательности, что

$$x_{k_1} \in [a_1, b_1], \quad a_1 \leqslant x_{k_1} \leqslant b_1$$

Разделим сегмент $[a_1, b_1]$ пополам. Обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из образовавшихся сегментов, на котором бесконечно много членов последовательности.

$$x_{k_2} \in [a_2, b_2], \quad k_2 > k_1 \quad a_{@} \leqslant x_{k_2} \leqslant b_2$$

Далее разделим сегмент $[a_2, b_2]$ пополам и т.д. Продолжая неограниченно этот процесс получим стягивающуюся систему сегментов. $[a_1, b_1]$,$[a_2, b_2]$, $[a_n, b_n]$,... И подпоследовательность $\{x_{kn}\}$, удовлетворяющую неравенствам

$$\{x_{kn}\} \quad \forall n : a_n \leqslant x_{kn} \leqslant b_n$$

По теореме 17.1 $\exists$ т. $C : \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = C$

$$\lim_{n\to\infty} x_{kn} = C$$

Теорема 17.2 доказана. ■

Для неограниченной теоремы утверждение неверно.

Определение 17.2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если $\forall A \exists x_n : |x_n| > A$*

Пример 17.2.

$$\{x_n\} = 1, 2, 3..., n$$

У данной последовательности нет сходящихся подпоследовательностей.

Определение 17.3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall A \quad \exists N, \forall n > N : |x_n| > A$*

Сопоставим определение неограниченной и бесконечно большой. Для неограниченной последовательности необходимо, чтобы нашелся хотя бы один элемент, в случае бесконечно большой необходимо выполнение условия для всех элементов больших a.

Заметим, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной, а обратное неверно.

Пример 17.3.

$$\{x_n\} = 0, 1, 0, 2, 0, 3..., n$$

Данная последовательность неограниченная, но не является бесконечно большой.

Из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

Если $\{x_n\}$ –бесконечно большая, то $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

Предельные точки последовательности

Определение 17.4. *Число a называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если $\exists\{x_{kn}\} \to a$*

Из теоремы Больцано-Вейерштрасса следует, что любая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку. Также существует второе определение предельной точки последовательности.

Определение 17.5. *Число a называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε – окрестности т. a содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.*

Лемма 2.

Определения 17.4 и 17.5 эквивалентны.

Пусть точка a – предельная точка $\{x_n\}$ по определению 17.4, т.е. $\exists\{x_{kn}\} \to a$.

Докажем, что a удовлетворяет определению 17.5.

В любой ε – окрестности a содержится бесконечно много членов $\{x_{kn}\}$. Т.е. для точки a выполнено условие определения 17.5. И a является предельной точкой.

Сколько предельных точек может быть у ограниченной последовательности ? Ответ – несчетное множество.

Множества

Определение 17.6. *Два множества называются **эквивалентными**, если между их элементами можно установить взаимооднозначное соответствие.*

Если два множества эквивалентны, то говорят, что они имеют одинаковую мощность. Эквивалентное множество натуральных чисел называется счетным. Значит, все члены этого множества можно пронумеровать с помощью натуральных чисел. Докажем, что множества всех рациональных чисел счетное.

$$\{r : r \in [0,1], \text{ где } r \text{ рациональное } \}$$

Расположим все рациональные числа сегмента в виде следующей последовательности

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}... \tag{17.2}$$

Каждый элемент взаимооднозначно сопоставляется натуральному числу.

Множество всех вещественных чисел не является счетным. Любое множество, эквивалентное множеству всех вещественных чисел $[0, 1]$ имеет **мощность континуума**.

Пример 17.4.

Если $\exists \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\{x_n\} = a_1, a_2, ..., a_m a_1 a_2 ... a_m ... a_1 ... a_m$

Рассмотрим последовательность 17.2. В любой ε-окрестности точки a со-

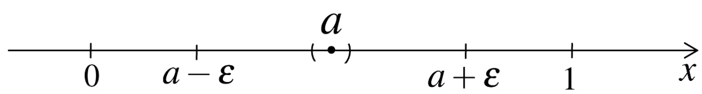

Рис. 17.5. Изображение сегмента $[0, 1]$

держится бесконечно много членов последовательности 17.2, следовательно, a – предельная точка последовательности 17.2. Последовательность 17.2 имеет континуум предельных точек.

Рассмотрим множество всех предельных точек ограниченной последовательности. Наибольшая из предельных точек ограниченной последовательности называется ее верхним пределом, а наименьшая из предельных точек нижним.

$$\{x_n\} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

Теорема 17.3. *Любая ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.*

Доказательство.

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность.

$$\{x_n\} \quad A = \{\textit{множество предельных точек}\{x_n\}\}$$

Очевидно, что A – непустое ограниченное множество.

$$SupA = \bar{a}, \quad infA = \underline{a}$$

Докажем, что $\bar{a}$ и $\underline{a}$ предельные точки последовательности $\{x_n\}$. Докажем это для $\bar{a}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{\varepsilon}{2} - \text{окрестности } \varepsilon - \text{окрестности точки } \bar{a}$$

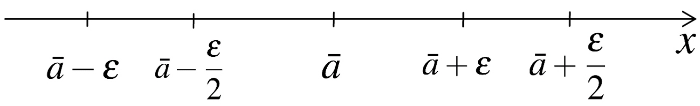

Рис. 17.6. Изображение числовой прямой

Так как $\bar{a} = SupA$, то $\exists C \in A : \bar{a} - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant C \leqslant \bar{a} \quad \{\frac{\varepsilon}{2}$ окрестности точки $C\} \in \{\varepsilon$ окрестности точки $\bar{a}$

■

По определению 17.5 в $\{\frac{\varepsilon}{2}$ - окрестности точки С $\}$ содержится бесконечно много членов $\{x_n\} \Rightarrow \{\varepsilon -$ окрестности точки $\bar{a}\}$ содержится бесконечно много членов $\{x_n\} \Rightarrow \bar{a}$ – предельная точка.

Если $\{x_n\}$ – неограниченная сверху (снизу), то пишут: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$)

Пример 17.5.

$$\{x_n\} = 0, -1, 0, -2, 0, -3, ..., 0, -n$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Критерий Коши сходимости последовательности

Определение 17.7. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***фундаментальной****, если* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \quad \forall n > N$ *и* $\forall$ *натурального* $p : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

Так как $n + p > N$, если $n > N$, то $\{x_n\}$ – фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \quad \forall n > N$ и $\forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Лемма 3.

Фундаментальная последовательность ограничена.

Теорема 17.4. *Для того, чтобы последовательность сходилась необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна.*

Лекция 18. Числовые последовательности. Часть 2

Критерий Коши сходимости последовательности (окончание)

Определение 18.1. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* ***фундаментальной****, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m > N$: $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

С ростом номеров все члены последовательности становится ближе друг к другу. В прошлом разделе была сформулирована лемма:

Лемма 18.1. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

Упражнение 18.1. *Сформулировать определение не фундаментальной последовательности с помощью кванторов.*

Теорема 18.1. ***(критерий Коши)*** *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство.

1. Необходимость: последовательность сходится, значит, она фундаментальная.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} = a$. По определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall n > 0$: $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично $\forall m > N$: $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что $\forall n > N$ и $\forall m > N$ верно, что

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значит, последовательность фундаментальная.

2. Достаточность: последовательность фундаментальная, значит, она сходится.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. По лемме 18.1 следует, что $\{x_n\}$ — ограниченная. По *теореме Больцано-Вейерштрасса* выделим из

$\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность. Пусть подпоследовательность $\{x_{k_n}\} \to a$ при $n \to \infty$. Докажем, что $\{x_n\} \to a$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Начиная с некоторого номера N_1 все члены $\{x_{k_n}\}$ лежат в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности точки a (так как эта подпоследовательность сходится). Так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то начиная с некоторого номера N_2 любые два её члена отличаются меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда начиная с номера N все члены последовательности $\{x_n\}$ будут лежать в ε-окрестности точки a. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Второе определение предела функции

Напомним, что когда мы даём определение предела функции в точке A, то точка A должна быть *предельной* точкой по отношению к области определения функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на области X, а точка a — предельная точка множества X.

Определение 18.2. *a — предельная точка множества X, если в любой окрестности точки a существуют точки из множества X, отличные от a (причём a может не входить в X).*

Отметим, что понятия предельной точки *множества* и предельной точки *последовательности* — это разные понятия.

Пример 18.1. *Пусть $X = \{0;1\}$ — две точки на числовой прямой. У этого множества нет предельных точек.*

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = 0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots\}$. Здесь есть предельные точки $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$.

Пусть функция $f(x)$ определена на области X, а точка a — предельная точка множества X. Вспомним определение предела функции по Коши:

Определение 18.3. ***(по Коши)*** *Число b называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x \in \{0 < |x-a| < \delta\}$ (проколотой δ-окрестности точки a) выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.*

Определение 18.4. ***(по Гейне)*** *Число b называется* ***пределом функции*** *$f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\} \to a$ (и такой, что $\forall\, n : x_n \neq a$) соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\} \to b$.*

Упражнение 18.2. *Сформулировать по Гейне определение того факта, что $\lim\limits_{x\to a} \neq b$.*

Теорема 18.2. *Определения 18.3 и 18.4 эквивалентны.*

Доказательство.

I. Пусть выполнено

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{по Коши} \tag{18.1}$$

Требуется доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{по Гейне} \tag{18.2}$$

$\forall\,\{x_n\} \to a$ (такой, что $x_n \neq a$) соответствующая последовательность $\{f(x_n)\} \to b$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \to a$ (при $x_n \neq a$) и возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия (18.1) $\exists\,\delta > 0$ такое, что:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \,\forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} \tag{18.3}$$

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, значит, её элементы с ростом номеров становится ближе к a, то есть:

$$\exists N \text{ такое, что } \forall n > N \,:\, 0 < |x_n - a| < \delta \tag{18.4}$$

Из условий (18.3) и (18.4) следует, что

$$\forall n > N \,:\, |f(x_n) - b| < \varepsilon$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ — предел по Гейне, что и требовалось доказать.

II. Пусть выполнено условие (18.2) — предел функции равен b по Гейне. Требуется доказать, что будет выполнено условие (18.1) — предел функции равен b по Коши.

Предположим противное: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$ по Коши. Другими словами:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ такое, что } \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \{0 < |x-a| < \delta\} \,:\, |f(x) - b| \geqslant \varepsilon \tag{18.5}$$

Возьмём какую-нибудь последовательность $\{\delta_n\} \to 0$ (чтобы $\delta_n > 0$, например, $\delta = \frac{1}{n}$). В силу предположения:

$$\forall\, \delta_n\, \exists\, x_n \in \{0 < |x_n - a| < \delta_n\}, \text{ для которого } |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon \tag{18.6}$$

В силу неравенств $0 < |x_n - a| < \delta_n$, последовательность $\{x_n\} \to a$ и при этом $x_n \neq a$. Значит, в силу условия (18.2), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\} \to b$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $|f(x_n) - b| \to 0$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, в силу условия (18.6), предел $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon > 0$. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение не верно, следовательно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Коши, что и требовалось доказать. ■

Пример 18.2. *Доказать, что* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sin\frac{1}{x}\right)$ *не существует.*

Доказательство.

Заметим, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$ (то есть не входит в область определения), но 0 является предельной точкой области определения (в любой окрестности этой точки имеются точки из области определения, отличные от этой точки). Рассмотрим две последовательности:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\pi n}\right\} \to 0 \text{ (где } x_n \neq 0)$$

$$\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right\} \to 0 \text{ (где } x_n' \neq 0)$$

$$\Rightarrow\ \{f(x_n)\} = \{\sin \pi n\} \to 0, \text{ а } \{f(x_n')\} = \left\{\sin\left(2\pi n + \tfrac{\pi}{2}\right)\right\} \to 1$$

Мы указали две последовательности, сходящиеся к нулю (с не нулевыми элементами), но для одной последовательности предел функции равен 0, а для другой — 1. Значит, предела не существует в соответствие с определением предела по Гейне. ■

Утверждение 18.1. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и начиная с некоторого номера все $x_n > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (**последовательность $\{x_n\}$ сходится к бесконечности**).*

Определение 18.5. ***(по Гейне)*** *Число b называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\} \to b$.*

Упражнение 18.3. *Доказать эквивалентность двух определений пределов функции при $x \to \infty$.*

Критерий Коши существования предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и точка a является предельной точкой множества X.

Определение 18.6. *Будем говорить, что функция $f(x)$ **удовлетворяет условию Коши в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x', x''$, удовлетворяющих условиям $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Понятия *фундаментальности* для последовательностей и *условия Коши* для функции являются аналогичными.

Теорема 18.3. ***(критерий Коши)*** *Для того чтобы функция имела предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.*

Доказательство.

I. Необходимость.

Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Иначе говоря, $\forall \varepsilon > 0$ найдётся проколотая δ-окрестность точки a, что для любого значения аргумента x' в этой окрестности значение функции $f(x')$ отличается от b меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, то есть $|f(x')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ (рассматривается определение по Коши). Аналогично для любого аргумента x'' выполняется $|f(x'')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, что удовлетворяет условию Коши по определению, что и требовалось доказать.

II. Достаточность.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a. Требуется доказать, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. То есть в соответствие с определением предела функции по Гейне нужно доказать, что $\forall\{x_n\}\to a$ (такой, что $x_n\neq a$) соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b, причём одинаковому для всех последовательностей.

Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\}\to a$ (где $x_n\neq a$). Докажем, что соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальная. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Так как функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a, то:

$$\exists\,\delta>0: |f(x')-f(x'')|<\varepsilon \text{ при } 0<|x'-a|<\delta \text{ и } 0<|x''-a|<\delta \tag{18.7}$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}\to a$ и $x_n\neq a$, то $\exists N$ такой, что:

$$\begin{cases}\forall n>N \text{ верно, что } 0<|x_n-a|<\delta\\ \forall m>N \text{ верно, что } 0<|x_m-a|<\delta\end{cases} \tag{18.8}$$

Из условий (18.7) и (18.8) следует, что $\forall n>N$ и $\forall m>N$ выполняется неравенство $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$, то есть последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальная, и значит, что она сходится. Остаётся доказать, что $\forall\{x_n\}\to a$ (такой, что $x_n\neq a$) соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ сходятся к одному и тому же числу b.

Пусть для последовательности $\{x_n\}\to a$ (такой, что $x_n\neq a$) соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}\to b$, а для другой последовательности $\{x'_n\}\to a$ (такой, что $x'_n\neq a$) соответствующая последовательность $\{f(x'_n)\}\to b'$. Составим последовательность $\{x''_n\}=x_1,x'_1,x_2,x'_2,\ldots,x_n,x'_n,\ldots$. Очевидно, что $\{x''_n\}\to a$ и при этом $x''_n\neq a$. Отсюда следует, что соответствующая последовательность $\{f(x''_n)\}\to b''$. Заметим, что $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ это подпоследовательности последовательности $\{f(x_n)\}''$. (У нас была лемма, что если последовательность сходится, то любая её подпоследовательность сходится к тому же числу). Следовательно, последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ сходятся к числу b'', значит, $b'' = b = b'$, что и требовалось доказать. ■

Упражнение 18.4. *Сформулировать условие Коши для функции $f(x)$ при $x \to \infty$.*

Упражнение 18.5. *Доказать теорему о критерии Коши существования существования предела функции при $x \to \infty$.*

Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях. Теоремы об ограниченности непрерывных функций

Теорема 18.4. ***(о локальной ограниченности непрерывной функции)*** *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.*

Доказательство.

Зададим $\varepsilon = 1$. По определению непрерывности, $\exists\, \delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для любого x из δ-окрестности точки a, иными словами $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ в некоторой окрестности точки a, где $f(a) - \varepsilon$ — нижняя грань m функции, а $f(a) + \varepsilon$ — верхняя грань M функции. Полученные неравенства доказывают ограниченность функции в некоторой δ-окрестности точки a. ■

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве X (то есть непрерывна в каждой точке этого множества). Раз она непрерывна в каждой точке, то у каждой точки есть некоторая окрестность, в которой эта функция ограничена. Будет ли $f(x)$ на множестве X?

Пример 18.3. *Возьмём функцию $f(x) = \frac{1}{x}$, где $x \in (0;1)$. Функция непрерывна на заданном множестве, но не ограничена.*

Теорема 18.5. ***(I теорема Вейерштрасса)*** *Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.*

Наглядное доказательство представлено на рисунке 18.1. Функция из точки a могла пойти куда-то вверх, но она должна вернуться в точку b.

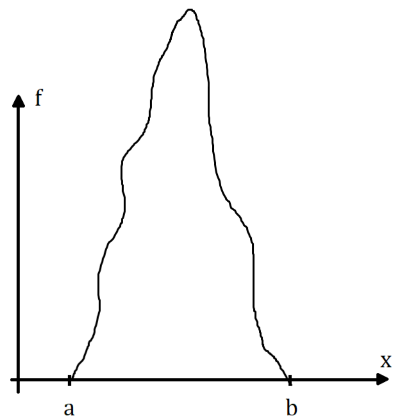

Рис. 18.1. I теорема Вейерштрасса

Доказательство.

Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Предположим, что она не ограничена на этом сегменте. Значит, какое бы большое положительное число мы не задали, найдётся значение функции, по модулю большее этого числа, то есть:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a,b] \text{ такое, что } |f(x_n)| > n \tag{18.9}$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$. Она ограничена (поскольку все её члены лежат на сегменте $[a,b]$) и значит, что из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть подпоследовательность $\{x_{k_n}\} \to c$. Так как все члены $x_{k_n} \in [a,b]$, то и точка $c \in [a,b]$. Значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке c. Отсюда следует, что последовательность значений функций $\{f(x_{k_n})\} \to f(c)$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, в силу неравенства (18.9), $f(_{k_n}) > k_n$. Значит, последовательность $\{f(x_{k_n})\}$ бесконечно большая. Получили противоречие. Значит, наше предположение не верно, следовательно функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a,b]$, что и требовалось доказать. ■

Замечание 18.1. *Для интервала теорема не верна (смотри пример 18.3).*

Упражнение 18.6. *Установить, в каком месте не пройдёт доказательство теоремы для интервала.*

Лекция 19. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Изучение свойств непрерывно дифференцируемых функций (продолжение)

Напомним первую теорему Вейерштрасса:

Теорема 19.1. ***(I теорема Вейерштрасса)*** *Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.*

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и ограничена сверху и снизу на этом множестве. Тогда существуют **точная верхняя грань** функции $\sup\limits_X f(x) = M$ и **точная нижняя грань** функции $\inf\limits_X f(x) = m$. Функция $f(x)$ может принимать значения, равные m или M в каких-то точках, а может не принимать. Если в какой-то точке x функция $f(x)$ принимает значение M, то будем говорить, что функция *достигает на множестве X свой точной верхней грани.* Если в какой-то точке x функция $f(x)$ принимает значение m, то будем говорить, что функция *достигает на множестве X свой точной нижней грани.*

Пример 19.1. *Рассмотрим функцию:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{19.1}$$

График этой функции изображён на рис. 19.1.

Функция ограничена, поэтому у неё есть точная верхняя и нижняя грани.

$$\sup_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 1, \qquad \inf_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0$$

В этом случае точная верхняя грань не достигается, а нижняя — достигается.

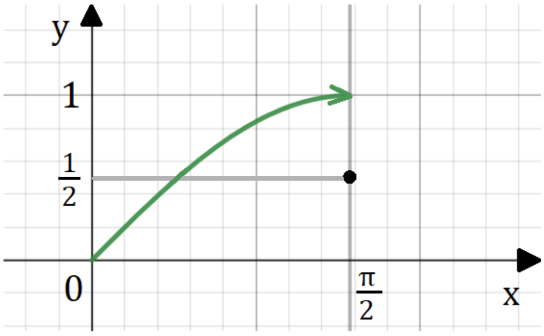

Рис. 19.1. График функции (19.1).

Вторая теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда по первой теореме Вейерштрасса она ограничена на этом сегменте, следовательно, имеет точные верхнюю и нижнюю грани:

$$\sup_{[a,b]} f(x) = M, \qquad \inf_{[a,b]} f(x) = m$$

Теорема 19.2. ***(II теорема Вейерштрасса)*** *Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте своих точных граней.*

Доказательство.

Докажем теорему для точной верхней грани. Предположим противное: $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) < M$. Введём вспомогательную функцию:

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

Очевидно, что $F(x) > 0$ на сегменте $[a,b]$ и $F(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[a,b]$. Тогда по первой теореме Вейерштрасса $F(x)$ — ограниченная функция на сегменте $[a,b]$, то есть $\exists A > 0$ такое, что $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство $F(x) \leqslant A$. То есть:

$$\frac{1}{M - f(x)} \leqslant A \quad \Rightarrow \quad M - f(x) \geqslant \frac{1}{A}$$

Отсюда следует, что $f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}$, причём это выполняется для всех $x \in [a,b]$. Заметим, что $M - \frac{1}{A} < M$. Но M — точная верхняя грань, то есть наименьшее из всех чисел такое, что значения функции не превосходят это число. У нас получилось, что функция $f(x)$ имеет верхнюю грань, меньшую M. Полученное противоречие доказывает теорему. ∎

Упражнение 19.1. *Доказать теорему 19.2 для точной нижней грани.*

Заметим, что для не сегмента теорема не выполняется.

Пример 19.2. *Рассмотрим функцию* $f(x) = \sin x$ *на множестве* $X = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Функция определена и непрерывна на этом множестве, но не достигает своей точной верхней грани* 1.

Равномерная непрерывность функции

Напомним понятие непрерывности в точке.

Определение 19.1. *Функция* $f(x)$ ***непрерывна в точке*** x_0, *если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, *или другими словами:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ такое, что } \forall x \in \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\} \text{ верно: } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Определение 19.2. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на промежутке* X. *Функция* $f(x)$ *называется* ***равномерно непрерывной*** *на этом промежутке* X, *если* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall x'$ *и* x'' *из* X, *удовлетворяющих неравенству* $|x' - x''| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Из определения следует, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке X, то она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Главным моментом в этом определении является то, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдётся δ одно и то же для всех x. Обратное необязательно верно: из непрерывности в каждой точки не следует равномерная непрерывность функции на этом промежутке.

Пример 19.3. *Рассмотрим функцию* $f(x) = \frac{1}{x}$ *на интервале* $X = (0, 1)$. *Функция непрерывна в каждой точке интервала* X. *Покажем, что она не является равномерно непрерывной на это интервале. Нужно показать, что* $\exists \varepsilon > 0$ *такое, что* $\forall \delta > 0 \exists x'$ *и* x'' *из* X *такие, что* $|x' - x''| < \delta$ *и выполнено* $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon$ *(отрицание определения равномерной сходимости).*

Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда $\forall\, \delta > 0$ возьмём такое натуральное число n, что $\frac{1}{n} < \delta$. Положим $x' = \frac{1}{n}$, $x'' = \frac{1}{n+2}$. Тогда $|x' - x''| = \frac{2}{n(n+2)} < \delta$. При этом:

$$|f(x'') - f(x')| = \left| f\left(\frac{1}{n+2}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = |n+2-n| = 2 > \varepsilon = 1$$

В точности выполнилось отрицание определения равномерной сходимости. Следовательно, равномерной сходимости нет.

Теорема Кантора

Теорема 19.3. ***(теорема Кантора)*** *Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.*

Заметим, что у всех трёх именных теорем, описанных раннее, одно и то же условие: функция непрерывна на сегменте. И все три теоремы доказываются методом от противного.

Упражнение 19.2. *Доказать теорему 19.3 методом от противного.*

Подсказка: *предположим, что функция не является равномерно непрерывной, выпишем отрицание определения равномерной непрерывности, придём к противоречию.*

Понятие равномерной непрерывности играет большую роль во многих разделах, в частности в теории определённых интегралов.

Возрастание и убывание функции в точке. Локальный экстремум

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b). Пусть точка $c \in (a,b)$.

Определение 19.3. *Будем говорить, что функция $f(x)$* ***возрастает в точке c****, если найдётся окрестность точки c, в которой выполнены следующие неравенства:*

$$f(x) < f(c) \quad \text{при } x < c$$
$$f(x) > f(c) \quad \text{при } x > c$$

Аналогично определяется *убывание функции в точке* (в левых неравенствах нужно поменять знак).

Пример 19.4. *Функция, изображённая на графике 19.2, возрастает в точке c_1. В окрестности этой точки (изображённой зелёным цветом) видно, что при $x < c_1$ значения $f(x) < f(c_1)$, а при $x > c_1$ значения $f(x) > f(c_1)$.*

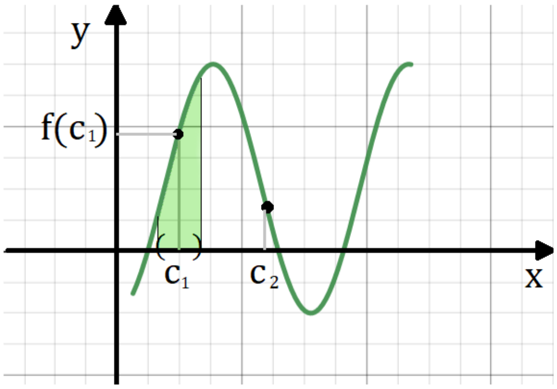

Рис. 19.2. Возрастание функции в точке c_1 и убывание в точке c_2.

Заметим, что при значениях аргумента, больших c_1, есть участок, где функция убывает. Но это не имеет значения, так как в выбранной окрестности точки c_1 условия выполняются.

Теорема 19.4. ***(о возрастании функции в точке)*** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и её производная в этой точке $f'(c) > 0$ (или $f'(c) < 0$), то функция $f(x)$ возрастает (или убывает) в точке c.*

Доказательство.

Рассмотрим случай, когда $f'(c) > 0$ (случай, когда $f'(c) < 0$, аналогичен). По определению производной:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

В свою очередь, по определению предела: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что:

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon,$$

при условии, что $0 < |x-c| < \delta$ (проколотая δ-окрестность точки c). Перепишем данное неравенство:

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < f'(c) + \varepsilon$$

Возьмём $\varepsilon = f'(c) > 0$. Тогда из левого неравенства получим:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \text{ в проколотой } \delta\text{-окрестности точки } c$$

Отсюда следует, что $f(x) < f(c)$ при $x < c$ и $f(x) > f(c)$ при $x > c$ в δ-окрестности точки c. Значит, функция $f(x)$ возрастает в точке c по определению, что и требовалось доказать. ■

Упражнение 19.3. *Доказать теорему 19.4 для убывания.*

Замечание 19.1. *Положительность производной является достаточным, но не необходимым условием возрастания дифференцируемой функции.*

Пример 19.5. *Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Её график изображён на рис. 19.3.*

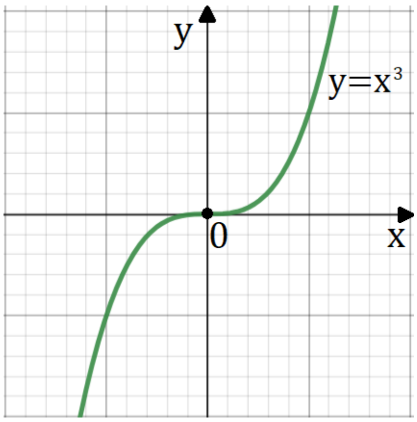

Рис. 19.3. График функции $f(x) = x^3$.

Функция $f(x)$ очевидно возрастает в точке $x = 0$, но при этом $f'(0) = 0$. Пример показывает, что функция может возрастать в точке, но производная может не быть положительной.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) и точка $c \in (a,b)$.

Определение 19.4. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке c* ***локальный максимум (минимум)****, если найдётся окрестность точки c, в которой $f(x) < f(c)$ $(f(x) > f(c))$ при $x \neq c$.*

Пример 19.6. *На рис. 19.4 точка c_1 является точкой локального максимума, а точка c_2 — точкой локального минимума. c_1 необязательно наибольшая точка функции, а c_2 — необязательно наименьшая.*

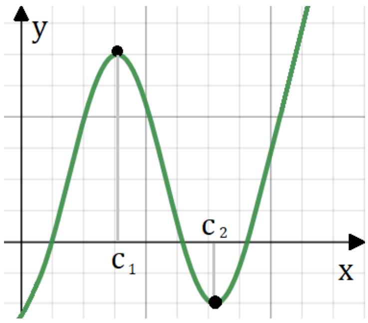

Рис. 19.4. В точке c_1 достигается локальный максимум, в точке c_2 — локальный минимум.

Понятия локального минимума и максимума часто объединяются в понятие *локального экстремума.*

Теорема 19.5. ***(теорема Ферма)*** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в ней локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство.

Предположим противное: пусть $f'(c) \neq 0$. Пусть $f'(c) > 0$ и пусть в точке c достигается локальный максимум. Тогда по теореме 19.4 функция $f(x)$ возрастает в точке c, значит, существует окрестность точки c, в которой $f(x) < f(c)$ при $x < c$ и $f(x) > f(c)$ при $x > c$. Последнее неравенство противоречит тому, что в точке c достигается локальный максимум. Пришли к противоречию. Аналогичным образом доказывается, что не может выполняться неравенство $f'(c) < 0$. Полученные противоречия доказывают теорему. ■

Замечание 19.2. *Условие $f'(c)$ является необходимым, но не достаточным условием локального экстремума дифференцируемой функции в точке c.*

В примере 19.5 рассматривалась функция, где в точке $x = 0$ производная $f'(0) = 0$, но это не являлось достаточным условием для достижения локального экстремума в этой точке (см. рис. 19.3).

Теоремы Ролля и Лагранжа

Теорема 19.6. ***(теорема Ролля)*** *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$.*

2) *Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b).*

3) *$f(a) = f(b)$.*

Тогда $\exists c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Так как $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на этом сегменте своих точных граней и следовательно имеет на этом сегменте максимальное и минимальное значения. Пусть:

$$\max_{[a,b]} f(x) = M, \qquad \min_{[a,b]} f(x) = m$$

Возможны два случая:

1. $M = m$. В этом случае $f(x) = M = m = const$ на сегменте $[a,b]$. Следовательно для любой точки $c \in (a,b)$ верно, что $f'(c) = 0$.

2. $M > m$. Возможны три картины (рис. 19.5).

В этом случае хотя бы одно из значений m или M функция принимает во внутренней точке c сегмента $[a,b]$ (на рис. 19.5 a) и b) либо m, либо M, на c) — оба).

Пусть $c \in (a,b)$ и $f(c) = M$. По теореме 19.5: $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать. ■

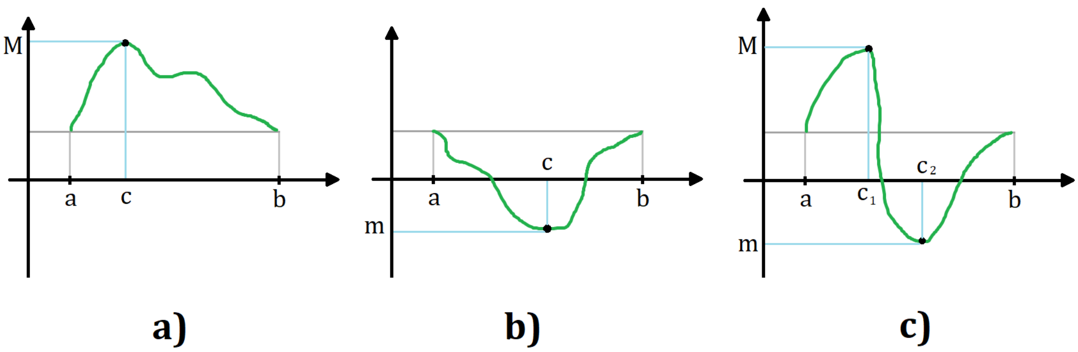

Рис. 19.5. Экстремумы функций

У теоремы Ролля есть физическая интерпретация. Пусть x — время, а $y = f(x)$ — координата точки на оси Y в момент времени x. В момент времени a координата равна $f(a)$. В момент b координата равна $f(b)$, причём $f(a) = f(b)$. Значит, точка прошла какой-то путь, остановилась и вернулась обратно. Когда точка остановилась, её скорость была равна нулю, то есть и производная $f'(x) = 0$ (см. рис. 19.6).

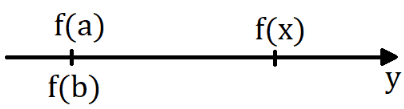

Рис. 19.6. Физическая интерпретация теоремы Ролля.

Теорема 19.7. ***(теорема Лагранжа)*** *Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы Ролля (то есть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b)). Тогда найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что:*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) \tag{19.2}$$

Доказательство.

Введём вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: 1) раз $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и от неё отнимается линейная непрерывная функция, то $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$; 2) $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $(x-a)$ — тоже, значит $F(x)$ дифференцируема на (a,b); 3) проверим равенство $F(a) = F(b)$. $F(a) = f(a)$, аналогично $F(b) = a$, следовательно $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля $\exists\, c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = 0$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Отсюда следует, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 19.7.1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке X и $\forall x \in X$ верно, что $f'(x) = 0$, то функция $f(x) = const$ на X.*

Доказательство.

На промежутке X возьмём две точки x_0 (фиксированную) и x (произвольную). По формуле Лагранжа (19.2), верно, что $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$. Но $f'(\xi) = 0$ (по условию). Тогда $f(x) = f(x_0)$ для любой $x \in X$, значит $f(x)$ — константная функция. ■

Лекция 20. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

Формула Коши

Теорема 20.1. ***(о формуле Коши)*** *Пусть:*

1) *функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a,b]$;*

2) *функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b);*

3) *производная $g'(x) \neq 0$ ни в какой точке $x \in (a,b)$.*

Тогда найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что справедливо равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{f'(c)} \tag{20.1}$$

Не может ли получиться так, что для какой-то функции $g(a)-g(b)=0$ и знаменатель из формулы 20.1 обратится в 0? Нет. Допустим, $g(a)=g(b)$. Тогда функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, согласно которой найдётся такая точка c, в которой производная $g'(c)=0$, что противоречит условию 3 текущей теоремы.

Можно было бы предположить, что для доказательства теоремы можно дважды воспользоваться формулой Лагранжа, получить $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ и $g(b)-g(a)=g'(c)(b-a)$, сократить $(b-a)$ и получить нужное отношение. Но так сделать не получится, так как точка c для функции $f(x)$ и точка c для функции $g(x)$ по формулам Лагранжа не обязаны совпадать.
Доказательство.

Введём вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна на сегменте $[a,b]$ (так как $f(x)$ и $g(x)$ тоже непрерывны на сегменте); она дифференцируема на интервале (a,b) (так как $f(x)$ и $g(x)$ тоже дифференцируемы на интервале); значения на концах отрезка равны: $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(a)$ следовательно $F(a) = F(b)$.

Тогда по теореме Ролля существует такая точка $c \in (a,b)$, что $F'(c) = 0$, то есть:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

Выразим большую дробь, получим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

что и требовалось доказать. ■

Заметим, что формула Коши (20.1) обобщает формулу Лагранжа (19.2). В качестве функции $g(x)$ возьмём функцию $g(x) = x$: в этом случае $g'(c) = 1$, $G(b) - g(a) = b - a$, тогда:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \Rightarrow \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Правило Лопиталя

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то есть функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые в точке x_0. Рассмотрим предел: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределённость типа $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя во многих случаях позволяет свести вычисление предела отношения функций к вычислению предела отношения их производных.

Теорема 20.2. ***(правило Лопиталя)*** *Пусть:*

1) *функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0;*

2) *предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;*

3) *производная $g'(x) \neq 0$ для всех x из проколотой окрестности точки x_0;*

4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причём:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{20.2}$$

Доказательство.

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 по непрерывности, то есть положим $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны в точке x_0 и следовательно во всей окрестности точки x_0.

Зафиксируем значение $x \neq x_0$ из окрестности x_0 (рис. 20.1).

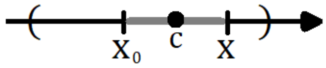

Рис. 20.1. Зафиксируем значение $x \neq x_0$ из окрестности x_0.

Рассмотрим функции на сегменте $[x_0, x]$: на этом сегменте функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 20.1. Следовательно найдётся такая точка $c \in (x_0, x)$, что:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

А раз $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то получается следующее равенство:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$ (точка c тоже стремится к x_0). В силу условия 4 теоремы существует предел правой части равенства. А раз правая и левая части равны, то существует предел левой части, то есть :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если принять $c = x$. Что и требовалось доказать. ■

Пример 20.1. *Рассмотрим предел:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$$

Проверим, выполнены ли условия теоремы 20.2. Обе функции $\operatorname{tg} x - x$ *и* x^3 *определены и дифференцируемы в окрестности точки* $x = 0$*. Пределы обеих функций при* $x \to 0$ *равны* 0*. Производная* $(x^3)' = 3x^2$ *не равна нулю для всех* x *из проколотой окрестности точки* $x = 0$*. Теперь надо убедиться, что существует предел отношения производных.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^{-2} x - 1}{3x^2}$$

Отношение производных оказалось тоже неопределённостью вида $\frac{0}{0}$*. Применим правило Лопиталя ещё раз:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^{-2} x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^{-3} x \sin x}{6x}$$

Отношение производных снова оказалось неопределённостью вида $\frac{0}{0}$*. Она появляется из-за отношения* $\frac{\sin x}{x}$*, что является первым замечательным пределом, это отношение стремится к 1 при* $x \to 0$*. Тогда:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^{-3} x \sin x}{6x} = \frac{1}{3}$$

Рассмотрим некое следствие из примера.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\frac{1}{3}x^3} = 1$$

Если предел отношения двух бесконечно малых равен 1, то эти две бесконечно малые эквивалентны, то есть:

$$\operatorname{tg} x - x \sim \frac{x^3}{3} \quad \text{при } x \to 0$$

Вспомним свойство o-малого: если две функции эквивалентны, то их разность есть o-малое от любой из них. Следовательно:

$$\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3} = o(x^3)$$

Тогда для $\operatorname{tg} x$ получается следующая асимптотическая формула:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{при } x \to 0$$

Раньше для $\operatorname{tg} x$ у нас была более короткая формула:

$$\operatorname{tg} x = x + o(x) \quad \text{при } x \to 0$$

Замечание 20.1. *4 условие теоремы 20.2 говорит о существовании предела отношения производных. Если это условие заменить условием* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, *то и предел отношения функций* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Замечание 20.2. *2 условие теоремы 20.2 говорит о том, что обе функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *бесконечно малые в точке* x_0. *Если это условие заменить условием* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, *то утверждение теоремы остаётся в силе.*

Замечание 20.3. *Правило Лопиталя применимо также к односторонним пределам и к пределам при* $x\to\infty$.

Пример 20.2. *Рассмотрим предел:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}, \qquad \text{где } \alpha>0$$

Здесь неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. *Применим правило Лопиталя:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$$

Этот пример говорит о том, что $\ln x$ *стремится к бесконечности медленнее, чем любая положительная степень* x. *Это можно записать следующим образом:*

$$\ln x << x^{\alpha} \quad \text{при } x\to+\infty$$

Пример 20.3. *Рассмотрим предел:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}, \qquad \text{где} \quad n\in\mathbb{N}, a>1$$

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}$$

Так как снова пришли к неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ *(при всех* $n>1$*), то применим правило Лопиталя повторно* ($n-1$ *раз):*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0$$

Если взять n не натуральное, а любое положительное, то ситуация не изменится:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0, \quad \textit{если} \quad \alpha>0, a>1$$

Тогда $x^{\alpha} << a^{x}$ при $x\to+\infty$.

Если объединить оба примера, то получим:

$$\ln x << x^{\alpha} << a^{x}$$

Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $n+1$-го порядка $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности точки x_0. В таком случае говорят, что функция $n+1$ **раз непрерывно дифференцируема** в окрестности точки x_0.

Пусть x — произвольное значение аргумента из заданной окрестности, причём $x\neq x_0$. Воспользуемся следующим равенством (применив формулу Ньютона-Лейбница):

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(t)\Big|_{x_0}^{x} = f(x)-f(x_0)$$

Отсюда следует, что:

$$f(x) = f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)dt \tag{20.3}$$

Применим к интегралу формулу интегрирования по частям (заменив dt на $-d(x-t)$):

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}(x-t)d(f'(t))$$

Дифференциал $d(f'(t)) = f''(t)dt$, тогда:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt$$

Рассмотрим полученный интеграл (заменив $(x-t)dt$ на $-\frac{1}{2}d(x-t)^2$) и применим интегрирование по частям:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)d(x-t)^2 = -\frac{1}{2}\left[f''(t)(x-t)^2\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^2 d(f''(t)) \right] =$$

$$= \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2dt$$

Используя полученные равенства, запишем равенство (20.3):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2dt$$

Аналогично раскладывается и последний интеграл. Продолжая дальше процедуру интегрирования по частям, через n шагов придём к равенству:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ &+ \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \end{aligned}$$

Слагаемое $\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ обозначим как $R_{n+1}(x)$. Запишем сумму первых n слагаемых в виде ряда и получим:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

Здесь предполагается, что $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ и $0! = 1$. Многочлен, который стоит в виде суммы, можно обозначить как $P_n(x)$ и тогда получим:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{20.4}$$

Формула (20.4) называется ***формулой Тейлора*** для функции $f(x)$ с центром разложения в точке x_0. Многочлен $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется ***многочленом Тейлора*** функции $f(x)$, а функция $R_{n+1}(x)$:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \tag{20.5}$$

называется ***остаточным членом формулой Тейлора***. $R_{n+1}(x)$, полученная в форме (20.5), так же называется ***остаточным членом в интегральной форме***.

Теорема 20.3. *Если функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, то для любого x из этой окрестности функцию $f(x)$ можно представить в виде формулы Тейлора (20.4), где $P_n(x)$ — многочлен Тейлора, $R_{n+1}(x)$ — остаточный член в интегральной форме.*

Следствие 20.3.1. *Применяя к интегралу (20.5) формулу среднего значения, получим:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $\xi \in (x_0,x)$. Получим ***остаточный член в форме Лагранжа:***

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{20.6}$$

Остаточный член в такой форме удобнее, чем в интегральной, так как он похож на слагаемые многочлена Тейлора. Точку ξ часто записывают как $\xi = x_0 + (\xi - x_0) = x_0 + \Theta(x-x_0)$, где $\Theta \in (0,1)$ (см. рис. 20.2).

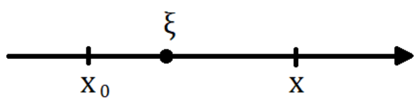

Рис. 20.2. Формула среднего значения.

Следствие 20.3.2. *По условию, функция имеет непрерывную $n+1$-ую производную в точке x_0. Тогда предел $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(x_0)$. Отсюда следует,* *что производную $n+1$-го порядка в точке ξ можно представить следующим образом: $f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Поэтому формулу (20.5) можно записать как:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{\alpha(x)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка, чем любая из них. Последний член можно записать как $o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$. Тогда получим остаточный многочлен вида:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \tag{20.7}$$

Если подставим этот член в формулу (20.4), то получим:

$$f(x) = P_{n+1}(x) + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \tag{20.8}$$

Эта формула была получена при условии, что функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0. Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, то справедливо равенство:

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \tag{20.9}$$

Получили формулу Тейлора с ***остаточным членом в форме Пеано****.*

Теорема 20.4. *Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, то для $f(x)$ справедливо равенство (20.9) — формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Для интегральной формы остаточного члена и формы Лагранжа можно не требовать, чтобы функция имела непрерывную производную $n+1$-го порядка — достаточно просто производной $n+1$-го порядка.

Теперь формулу Тейлора применим к элементарным функциям: экспоненте, тригонометрическим функциям и т. д.

Формула Маклорена (начало)

Формула Тейлора с разложением в точке $x_0 = 0$ называется ***формулой Маклорена***.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{20.10}$$

где $R_{n+1}(x)$:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{где} \quad 0 < \Theta < 1$$

Или в другой форме:

$$R_{n+1}(x) = o(x^n)$$

Лекция 21. Исследование поведения функций. Часть 1.

Формула Маклорена

Формула Маклорена для произвольной функции $f(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) = &\ f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \\ = &\ P_n(x) + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Для остаточного члена $R_{n+1}(x)$ существует несколько форм. В форме Пеано:

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0$$

Эта форма удобна при рассмотрении некоторых пределов, которые вычисляются с помощью формулы Маклорена. Остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x) x^{n+1}, \quad \text{где} \quad \Theta \in (0,1)$$

Пример 21.1. *Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.*

Мы знаем, что для любого n верно, что $f^{(n)}(x) = e^x$. Тогда $f^{(n)}(0) = 1$. По формуле Маклорена мы получаем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) \tag{21.1}$$

Остаточный член в форме Пеано: $R_{n+1}(x) = o(x^n)$. Остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Для любого фиксированного x верно, что:

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x^{n+1}|$$

Вспомним, что число $e < 3$, тогда $|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{3}{(n+1)!}|x^{n+1}|$. Если устремить n к бесконечности, то будет два случая. Если $|x| > 1$, то модуль $|x^{n+1}| \to \infty$ как показательная функция. Тогда $\frac{3|x^{n+1}|}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда остаточный член $|R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Чем больше n, тем меньше функция e^x отличается от многочлена Тейлора, поскольку остаточный член стремится к нулю. Это позволяет вычислять e^x с любой наперёд заданной точностью с помощью многочлена Тейлора, если взять достаточно большое n.

Пример 21.2. *Вычислим число e с точностью 10^{-6}. Полагаем $x = 1$ и получаем:*

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Оценка для остаточного члена $R_{n+1}(1) \leqslant \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$. Если взять $n = 9$, то неравенство выполняется: $R_{10}(1) < 10^{-6}$. Получается:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{9!} \quad \textit{с точностью } 10^{-6}$$

Пример 21.3. *Рассмотрим функцию $f(x) = \sin(x)$.*

Производная $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Производная в нуле:

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Общий член формулы Маклорена для данной функции:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Запишем формулу Маклорена для данной функции:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x) \tag{21.2}$$

Остаточный член по Пеано: $R_{2n+1}(x) = o(x^{2n})$, по Лагранжу:

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin\left(\Theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Проведём оценку остаточного члена. Для любого фиксированного x верно, что:

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \quad \text{при } x \to \infty,$$

так как факториал растёт быстрее показательной функции. Это даёт возможность вычислять $\sin(x)$ приближённо с любой наперёд заданной точностью с помощью многочлена Тейлора, если взять достаточно большое n.

Пример 21.4. *Рассмотрим* $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$. *Вычислим* $\sin(x)$ *с точностью* 10^{-4}. *Можно записать, что:*

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} < 10^{-4}$$

Достаточно взять $n = 3$. *Тогда многочлен Тейлора:*

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \text{\textit{с точностью} } 10^{-4}\, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Пример 21.5. *Рассмотрим функцию* $f(x) = \cos(x)$.

Известно, что $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда в нуле:

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases}$$

Запишем формулу Маклорена для данной функции:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n+2}(x) \tag{21.3}$$

Остаточный член в форме Пеано $R_{2n+2}(x) = o(x^{2n+1})$ при $x \to \infty$, в форме Лагранжа:

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\cos\left(\Theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Оценим остаточный член: для любого фиксированного x верно, что

$$|R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

Это даёт возможность вычислять $\cos(x)$ приближённо с любой наперёд заданной точностью с помощью многочлена Тейлора, если взять достаточно большое n.

Связь между e^x, $\sin(x)$ и $\cos(x)$

Перепишем формулы Маклорена для e^x, $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Связь между e^x, $\sin(x)$ и $\cos(x)$ стоит в области комплексных чисел. Рассмотрим e^{ix}, где i — мнимая единица. Будем считать, что для любого показателя степени формула Маклорена верна. Тогда:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

Тем самым получаем:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{21.4}$$

Записанная формула так же называется ***формулой Эйлера***.

Для $\sin(x)$ мы написали формулу Маклорена и сказали, что отбрасывая остаточный член, мы получаем многочлен Тейлора, который даёт приближённое значение для синуса. Рассмотрим, как это будет выглядеть на графике.

Изобразим на графике функцию $f(x) = \sin(x)$ и многочлены $P_1(x) = x$, $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ (рис. 21.1).

По этому графику видно, что с ростом номера многочлена Тейлора не только его близость к функции увеличивается, но и промежуток, на котором этот многочлен близок к синусу. Такой же график для косинуса изображён на рис. 21.2.

Пример 21.6. *Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x)$, где $x > -1$.*

Вычислим последовательно несколько производных.

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}, \quad f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!(1+x)^{-3}$$

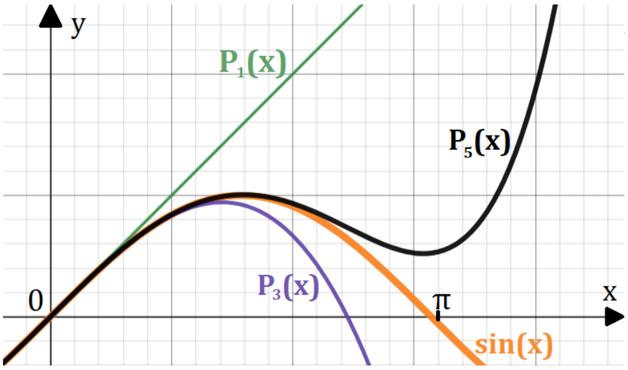

Рис. 21.1. Графики $\sin(x)$ (оранжевый цвет), $P_1(x)$ (зелёный цвет), $P_3(x)$ (фиолетовый цвет) и $P_5(x)$ (чёрный цвет).

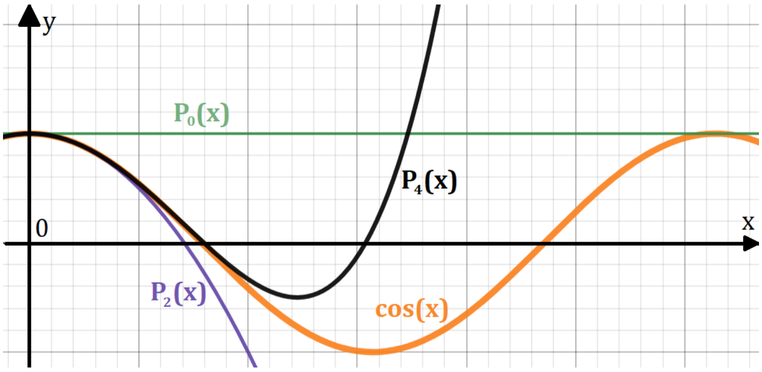

Рис. 21.2. Графики $\cos(x)$ (оранжевый цвет), $P_0(x)$ (зелёный цвет), $P_2(x)$ (фиолетовый цвет) и $P_4(x)$ (чёрный цвет).

Когда мы продифференцируем ещё раз, то выйдет множитель $(-1)^3 3!$. Тогда производная $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^n$. Производная в нуле $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Тогда общий член формулы Маклорена:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

Тогда формула Маклорена для данной функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x) \tag{21.5}$$

Остаточный член в форме Пеано $R_{n+1}(x) = o(x^n)$ при $n \to \infty$.

Упражнение 21.1. *Выписать остаточный член $R_{n+1}(x)$ для функции $f(x) = \ln(1+x)$ в форме Лагранжа.*

Можно доказать, что $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x \in (-1, 1]$. Это доказывается в теории функций комплексной переменной. В частности, если положить $x = 1$, то:

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Пример 21.7. *Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, где $x > -1$ и α — любое действительное число.*

Распишем производные.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ &\ldots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Производная в нуле $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. Запишем формулу Маклорена для данной функции:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \quad (21.6)$$

Остаточный член в форме Пеано $R_{n+1}(x) = o(x^n)$ при $n \to \infty$.

Упражнение 21.2. *Выписать остаточный член $R_{n+1}(x)$ для функции $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ в форме Лагранжа.*

Можно доказать, что остаточный член $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x \in (-1, 1)$. Отметим один частный случай: если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n, \quad R_{n+1}(x) \equiv 0$$

Пример 21.8. *Рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{tg}(x)$.*

Мы уже знаем, что $\mathrm{tg}(x) = x + o(x)$. Нетрудно заметить, что в разложении тангенса будут присутствовать только нечётные степени x, так как эта функция нечётная.

$$\mathrm{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^3 + \ldots \quad (21.7)$$

Вывести эти коэффициенты можно прямым способом, вычисляя производные в нуле. Но есть другой способ.

$$\sin(x) = \cos(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right) \cdot \left(x + k_3x^3 + k_5x^5 + \ldots\right)$$

Приравняем соответствующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&x: \quad 1 = 1, && k_1 = 1 \\
&x^3: \quad -\frac{1}{6} = k_3 - \frac{1}{2}, && k_3 = \frac{1}{3} \\
&x^5: \quad \frac{1}{120} = k_5 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}, && k_5 = \frac{2}{15} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Этот способ намного удобнее, чем просчитывать все производные.

Формулы (21.1), (21.2), (21.3), (21.5) и (21.6) называются ***основными 5 разложениями***.

Пример 21.9. *Вычислить предел:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\sin(x)} - \cos(x)}{x^2}$$

Доказательство. Дробь имеет неопределённость вида $\frac{0}{0}$ при $x \to 0$. Правило Лопиталя здесь применять неудобно, найдём предел с помощью формул Маклорена. Разложим числитель по формулам Маклорена.

$$(1+x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(1+x)} = e^{(x+o(x))\cdot(x+o(x))} = e^{x^2+o(x^2)}$$

Запишем разложение для полученной экспоненты:

$$e^{x^2+o(x^2)} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

Разложение второго слагаемого числителя:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Находим искомый предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\sin(x)}-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+o(x^2)-1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}$$

□

Пример 21.10. *Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}$. Разложить эту функцию по формуле Маклорена с остаточным членом $o(x^3)$.*

Доказательство. Запишем разложение для тангенса:

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Получили выражение типа $(1+x)^{\alpha}$. Тогда можно разложить по формуле (21.6):

$$f(x)=1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\frac{1}{8}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{16}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)$$

$$f(x)=1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{11}{48}x^3+o(x^3)$$

□

Исследование поведения функций и построение графиков. Точки локального экстремума и промежутки монотонности

Определение 21.1. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет* ***локальный максимум (минимум)*** *в точке c, если существует окрестность точки c, в которой $f(x)<f(c)$ $(f(x)>f(c))$ при $x\neq c$.*

Раннее была доказана теорема Ферма:

Теорема 21.1. ***(теорема Ферма)*** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в точке c локальный экстремум, то $f'(c)=0$.*

Замечание 21.1. *Условие $f'(c)=0$ только необходимое, но не достаточное условие локального экстремума дифференцируемой в точке c функции.*

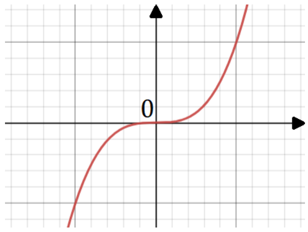

Рис. 21.3. График функции $f(x) = x^3$.

Пример 21.11. *У функции $f(x) = x^3$ производная $f'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ функция $f(x)$ не имеет локального экстремума (см. рис. 21.3).*

Замечание 21.2. *Функция $f(x)$ может иметь экстремум в точке c, но при этом не быть дифференцируемой в этой точке, тем самым условие $f'(0) = 0$ не будет выполнено.*

Пример 21.12. *Функция $f(x) = |x|$ имеет локальный минимум в точке $x = 0$, но функция в этой точке не дифференцируема (см. рис. 21.4).*

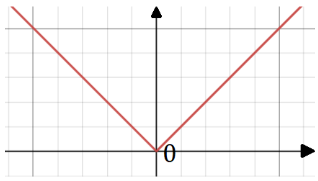

Рис. 21.4. График функции $f(x) = |x|$.

Определение 21.2. *Будем называть* ***точками возможного экстремума*** *функции $f(x)$ точки двух типов:*

1) *такие точки c, в которых $f'(c) = 0$;*

2) *такие точки c, в которых $f'(c)$ не существует, но сама функция в этой точке непрерывна.*

При нахождении точек возможного экстремума, чтобы ответить на вопрос, являются ли они точками локального экстремума, необходимо проверить достаточные условия.

Теорема 21.2. ***(I достаточное условие экстремума)*** *Пусть точка c — точка возможного экстремума функции $f(x)$ и пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности точки c. Тогда:*

1) *если* $f'(x) > 0$ *при* $x < c$ *и* $f'(x) < 0$ *при* $x > c$, *то в точке* c *функция* $f(x)$ *имеет локальный максимум;*

2) *если* $f'(x) < 0$ *при* $x < c$ *и* $f'(x) > 0$ *при* $x > c$, *то в точке* c *функция* $f(x)$ *имеет локальный минимум;*

3) *если справа и слева от точки* c *производная* $f'(x)$ *имеет один и тот же знак, то в точке* c *локального экстремума нет.*

Лекция 22. Исследование поведения функций. Часть 2.

Точки локального экстремума и промежутки монотонности функции (окончание)

В прошлом разделе была разобрана теорема:

Теорема 22.1. ***(I достаточное условие экстремума)*** *Пусть точка c — точка возможного экстремума функции $f(x)$ и пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности точки c. Тогда:*

1) *если $f'(x) > 0$ при $x < c$ и $f'(x) < 0$ при $x > c$, то в точке c функция $f(x)$ имеет локальный максимум;*

2) *если $f'(x) < 0$ при $x < c$ и $f'(x) > 0$ при $x > c$, то в точке c функция $f(x)$ имеет локальный минимум;*

3) *если справа и слева от точки c производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак, то в точке c локального экстремума нет.*

Замечание 22.1. *Условие теоремы 22.1 является только достаточным, но не необходимым условием экстремума функции в точке c.*

Пример 22.1. *Рассмотрим функцию:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 - \sin\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Если $x \neq 0$, то значение функции $f(x) > 0$ в любой точке. Поэтому в точке $x = 0$ функция достигает минимум. Однако, не существует такой окрестности точки $x = 0$, в которой $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$. Рассмотрим выражение для производной.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 2x\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Необходимое условие экстремума выполнено. Какую бы малую окрестность точки $x = 0$ *мы ни взяли, найдутся точки слева от неё, где производная больше нуля, и точки справа от неё, где производная меньше нуля, за счёт бесконечных колебаний косинуса.*

Теорема 22.2. ***(II достаточное условие экстремума)*** *Пусть функция* $y = f(x)$ *дважды дифференцируема в точке* c *(то есть имеет в этой точке первую и вторую производные) и пусть первая производная* $f'(c) = 0$*, а вторая производная* $f''(c) \neq 0$*. Тогда в точке* c *функция* $y = f(x)$ *имеет локальный экстремум, причём:*

1) если $f''(c) > 0$*, то локальный минимум;*

2) если $f''(c) < 0$*, то локальный максимум.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f''(c) > 0$. Вторая производная это производная от первой производной. Мы знаем. что если производная какой-то функции в точке c положительна, то функция в этой точке возрастает. Значит, если вторая производная положительна, то возрастает первая производная $f'(c)$, то есть существует окрестность точки c, в которой $f'(x) < f'(c) = 0$ при $x < c$ и $f'(x) > f'(c) = 0$ при $x > c$. Отсюда по теореме 22.1 следует, что в точке c функция $f(x)$ имеет локальный минимум, что и требовалось доказать. Для случая $f''(c) < 0$ всё аналогично. □

Пример 22.2. *Рассмотрим функцию* $y = x^3 - 3x^2$*. Первая производная* $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$*. Знаки* $f'(x)$ *изображены на рис. 22.1.*

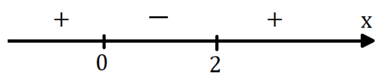

Рис. 22.1. Знаки производной $f'(x)$

Вычислим вторую производную: $f''(x) = 6x - 6$*. В точках* 0 *и* 2 *вторая производная:* $f''(0) = -6 < 0$*, то есть в точке* $x = 0$ *достигается локальный максимум;* $f''(2) = 6 > 0$*, то есть в точке* $x = 2$ *достигается локальный минимум (по теореме 22.2).*

В предыдущем разделе была сформулирована теорема:

Теорема 22.3. *Для того чтобы дифференцируемая на промежутке X функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in X$ выполнялось неравенство $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$.*

Замечание 22.2. *Для строго возрастания (убывания) достаточно, но не необходимо, чтобы $\forall x \in X$ выполнялось неравенство $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.*

Пример 22.3. *Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Её график изображён на рис. 22.2.*

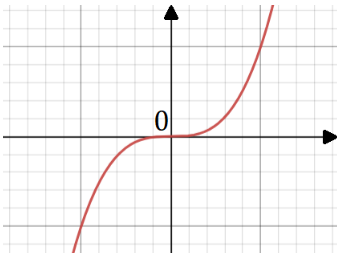

Рис. 22.2. График функции $f(x) = x^3$

Наглядно видно, что эта функция возрастает на всей числовой прямой. Но её производная $f'(x) = 3x^2$ не строго положительна во всех точках, в частности $f'(0) = 0$.

Следовательно, для отыскания промежутков монотонности функции нужно найти промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$.

Пример 22.4. *Рассмотрим функцию $y = x^3 - 3x^2$. Знаки $f'(x)$ изображены на рис. 22.1. При $x < 0$ функция возрастает, при $0 < x < 2$ убывает, при $x > 2$ возрастает.*

Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Рассмотрим понятие выпуклости функции. В качестве примера рассмотрим две функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, их графики изображены на рис. 22.3.

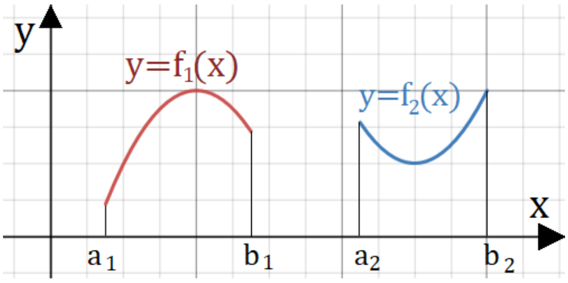

Рис. 22.3. Графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

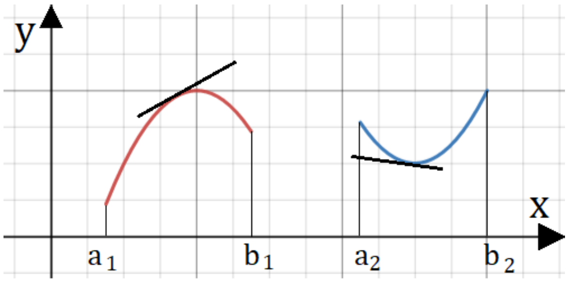

Рис. 22.4. Касательные к $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$

График первой функции направлен выпуклостью вверх, а второй функции — выпуклостью вниз. Проведём произвольную касательную к первому графику: график функции $f_1(x)$ расположен не выше касательной на промежутке $[a_1, b_1]$. Если мы проведём произвольную касательную ко второму графику, то график функции $f_2(x)$ расположен не ниже касательной на промежутке $[a_2, b_2]$ (см. рис. 22.4).

Определение 22.1. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b). Тогда в каждой точке $M(x, f(x))$ существует касательная к графику функции. Говорят, что график функции $y = f(x)$* ***направлен выпуклостью вверх (вниз)*** *на интервале (a, b), если в пределах интервала (a, b) график функции лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.*

Теорема 22.4. *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда если $\forall x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$, то на интервале (a, b) график функции направлен выпуклостью вниз (выпуклостью вверх).*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f''(x) \geqslant 0 \, \forall x \in (a, b)$. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, её график изображён на рис. 22.5.

Возьмём какую-нибудь точку $M(c, f(c))$ на интервале (a, b). Проведём касательную к графику функции в точке M. Требуется доказать, что на интервале (a, b) график функции лежит не ниже этой касательной.

Уравнение касательной имеет вид $Y - f(c) = f'(c)(x - c)$ или:

$$Y = f(c) + f'(c)(x - c) \tag{22.1}$$

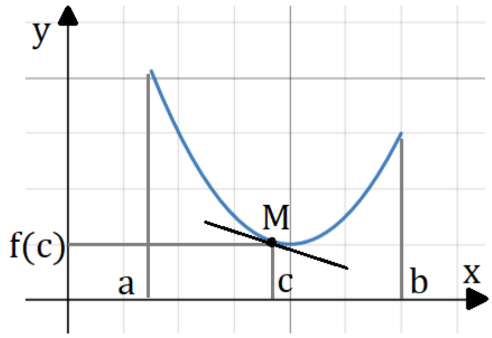

Рис. 22.5. График функции $y = f(x)$.

Требуется доказать, что $\forall x \in (a,b)$ верно, что $Y(x) \leqslant f(x)$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и центром разложения в точке c:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2, \tag{22.2}$$

где точка $\xi \in (c,x)$. Вычитая (22.1) из (22.2), получим:

$$f(x) - Y(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2$$

По условию, вторая производная во всех точках неотрицательна. Значит, правая часть равенства тоже неотрицательна. Отсюда следует, что $f(x) \geqslant Y(x)$, что и требовалось доказать. □

Пример 22.5. *Рассмотрим функцию $y = x^3 - 3x^2$. Первая производная $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Знаки производной изображены на рис. 22.1. Вторая производная $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Знаки второй производной изображены на рис. 22.6.*

Тогда для $x < 1$ выпуклость вверх, а для $x > 1$ выпуклость вниз. Можно построить график функции, опираясь на эти данные, он изображён на рис. 22.7.

Заметим, что в точке $M(1,-2)$ произошло изменение направления выпуклости графика функции $y = x^3 - 3x^2$. Такая точка называется ***точкой перегиба*** *графика функции.*

Определение 22.2. *Точка $M(a, f(a))$ называется* ***точкой перегиба*** *графика функции $y = f(x)$, если выполнены два условия:*

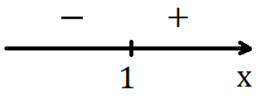

Рис. 22.6. Знаки второй производной $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$.

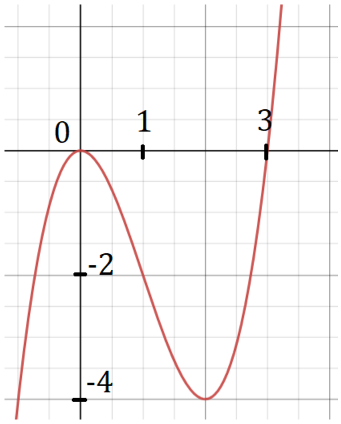

Рис. 22.7. График функции $y = x^3 - 3x^2$.

1) *в точке $M(a, f(a))$ существует касательная к графику;*

2) *в некоторой окрестности точки a слева и справа от точки a график функций имеет разные направления выпуклости.*

Теорема 22.5. ***(необходимое условие точки перегиба)*** *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке a непрерывную вторую производную и пусть в точке $M(a, f(a))$ график функции имеет перегиб. Тогда $f''(a) = 0$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $f''(a) > 0$. Тогда, в силу устойчивости знака непрерывной функции, $f''(x) > 0$ в некоторой окрестности точки a слева и справа от этой точки. Тогда по теореме 22.4 в пределах этой окрестности график функции направлен выпуклостью вниз слева и справа от точки a. Это противоречит тому, что в точке $M(a, f(a))$ график функции имеет перегиб. Аналогично для предположения $f''(a) < 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Определение 22.3. *Назовём* ***точками возможного перегиба*** *графика функции $y = f(x)$ такие точки $M(a, f(a))$, для которых либо $f''(a) = 0$, либо $f''(a)$ не существует, но существует касательная к графику функции в точке M.*

Упражнение 22.1. *Рассмотрим функцию:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ -x^2, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Доказать, что в точке $M(0,0)$ *график функции имеет перегиб, но* $f''(0)$ *не существует. (Для этого нужно доказать, что в точке* M *есть касательная и что справа и слева разные направления выпуклости).*

Отметим, что условие $f''(a) = 0$ только необходимое, но не достаточное условие перегиба функции в точке $M(a, f(a))$.

Пример 22.6. *Рассмотрим функцию* $y = x^4$*, её график изображён на рис. 22.8.*

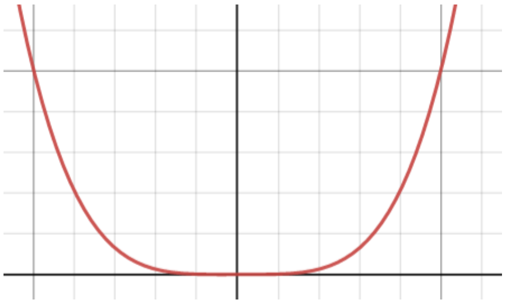

Рис. 22.8. График функции $y = x^4$.

Весь график функции направлен выпуклостью вниз. Вторая производная $f''(0) = 0$*, но в точке* $M(0,0)$ *перегиба графика нет.*

Теорема 22.6. ***(I достаточное условие перегиба)*** *Пусть точка* $M(a, f(a))$ *— точка возможного перегиба графика функции* $y = f(x)$ *и пусть в некоторой проколотой окрестности точки* a *функция* $f(x)$ *имеет вторую производную, причём знак второй производной различен справа и слева от точки* a*. Тогда в точке* $M(a, f(a))$ *график функции имеет перегиб.*

Доказательство. Если точка $M(a, f(a))$ — точка возможного перегиба и знак второй производной различен справа и слева от точки a, значит слева и справа разные направления выпуклости, то есть в точке $M(a, f(a))$ график функции имеет перегиб. □

Теорема 22.7. ***(II достаточное условие перегиба)*** *Пусть функция* $y = f(x)$ *трижды дифференцируема в точке* a *и пусть* $f''(a) = 0$*, а* $f'''(a) \neq 0$*. Тогда в точке* $M(a, f(a))$ *график функции имеет перегиб.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 22.2.

Асимптоты графика функции

Определение 22.4. *Прямая $x = a$ называется* ***вертикальной асимптотой*** *графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.*

Пример 22.7. *Рассмотрим график функции $y = \frac{1}{x}$. Предел $\lim\limits_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$. Значит, $x = 0$ — вертикальная асимптота.*

Определение 22.5. *Прямая $Y = kx + b$ называется* ***наклонной асимптотой*** *графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha(x) = 0$.*

Пример 22.8. *Рассмотрим функцию $y = \dfrac{x^2 + \sin(x)}{x}$. Её так же можно записать как $f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$. Второе слагаемое стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, поэтому прямая $Y = x$ является наклонной асимптотой графика данной функции при при $x \to \pm\infty$. График функции и асимптота изображены на рис. 22.9.*

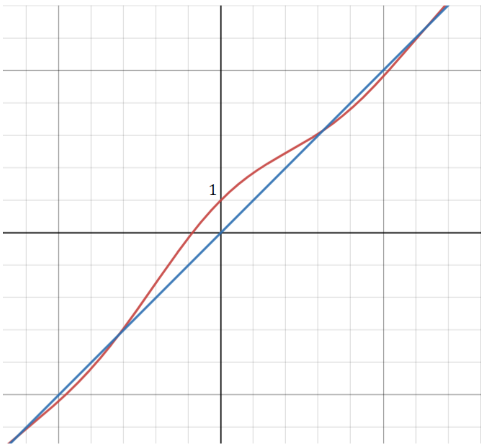

Рис. 22.9. График функции $f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$ (красный цвет) и её наклонная асимптота $Y = x$ (синий цвет).

Теорема 22.8. *Для того чтобы прямая $Y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы* *существовали два предела:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \tag{22.3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b \tag{22.4}$$

Доказательство. **1. Необходимость.** Пусть прямая $Y=kx+b$ — наклонная асимптота графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$. Тогда по определению функцию можно представить в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Отсюда следует, что выполняются равенства (22.3) и (22.4):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b$$

□

Упражнение 22.2. *Доказать* ***достаточность*** *теоремы 22.8.*

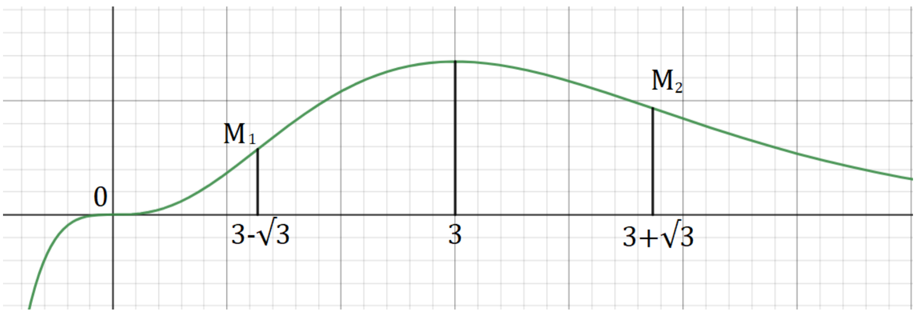

Рис. 22.10. График функции $y=x^3e^{-x}$.

Схема построения графика функции

Дана функция $y=f(x)$. Надо построить её график. Нужно определить:

1) область определения;

2) асимптоты;

3) промежутки монотонности и точки локального экстремума (с помощью первых производных);

4) направления выпуклости и точки перегиба (с помощью вторых производных);

5) другие особенности графика (пересечение графиком оси координат, чётность и ось симметрии и т. д.).

Упражнение 22.3. *Рассмотрим функцию $y = x^3 e^{-x}$. Её график изображён на рис. 22.10. Обосновать по пунктам построение графика.*

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ