ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ШИШКИН
АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
БЕЛОВА МИХАИЛА АНАТОЛЬЕВИЧА

Содержание

Лекция 1. Линейное пространство. Определение и свойства

Зачем физикам линейная алгебра

На физическом факультете программу обучения составляют физики, а это значит, что линейная алгебра является необходимым предметом для изучения.

В 1923 году в Англии вышла книга Дирака «Принципы квантовой механики». Эта книга начинается с алгебры, а если точнее – с линейной алгебры. В первых главах Дирак образовал некий алгебраический аппарат и с его помощью описал все элементарные частицы, которые были известны на момент 1923 года. Кроме того, на основе этого аппарата он получил, что могут существовать и другие элементарные частицы, однако никто их никогда не видел. Спустя 34 года, выпускник физического факультета Логунов Алексей на синхрофазотроне получил все предсказанные Дираком частицы. Тогда Дирак прибыл на физический факультет, где прошел семинар физиков-теоретиков. Один из аспирантов задал вопрос Дираку о том, как он смог из чистой абстрактной математики получить такой изумительный физический результат. В ответ Дирак улыбнулся и ответил, что это красиво! Отсюда можно заключить, что физик должен знать линейную алгебру досконально, глубоко и по-настоящему для того, чтобы получить какой-либо значимый результат в своих исследованиях.

Литература по курсу

Для полного освоения линейной алгебры можно посоветовать учебник Б.Л. ван дер Вардена «Алгебра». Однако перед изучением данного учебника необходимо как минимум прослушать данный курс лекций.

Существует другая книга, которая выпущена на факультете – «Линейная алгебра и аналитическая геометрия с приложениями» авторов Крутицкой Н.Ч., Тихонравова А.В. и Шишкина А.А. Рекомендуется для прочтения первая часть.

Также можно использовать учебник С.Б. Кадомцева «Аналитическая геометрия и линейная алгебра».

Другой фундаментальный труд В.А. Ильина и Э.Г. Позняка «Линейная алгебра». Учебник написан в то время, когда физиков интересовали только два поля, в то время как в данных лекциях речь пойдет о произвольных полях. Однако для тех, кто работает с полями из учебника Ильина и Позняка, книга очень полезная.

И, наконец, еще один учебник авторов Бадьина А.В., Левашовой Н.Т. и Шишкина А.А. «Знакомство с теорией групп. Основные понятия. Группы преобразований». В данной работе очень подробно и понятно описаны понятия групп с примерами.

Теперь перейдем к задачнику. «Линейная алгебра в вопросах и задачах» авторов Бутузова В.Ф., Крутицкой Н.Ч. и Шишкина А.А.

Числовое поле

При изложении материалов лекций будут использоваться разные объекты: матрицы, многочлены, функции и др., которые определяются на некотором множестве чисел. Для более общего изложения множества этих чисел будем обозначать буквой K. Над числами, которые принадлежат множеству K, мы можем производить четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление.

Определение

Числовым полем называется множество чисел K, на котором однозначно выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление, причем

$$\forall x, y \in K: \quad x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}(y \neq 0) \in K$$

То есть иначе – требование корректности.

В случае множества натуральных числе мы получаем, что корректность будет нарушена $(2 - 5 = -3)$. Также получается и с полем целых чисел $(2/3)$.

А вот множества $\mathbb{Q} -$ рациональных чисел, $K_0 -$ вещественный чисел и $\mathbb{C} -$ комплексных чисел – примеры числовых полей.

Кроме того, можно показать, что множество является числовым полем

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}: \quad a + b\sqrt{2}$$

Определение линейного пространства

Сразу обговорим, что в случае, когда мы читаем книги по линейной алгебре, которые написаны математиками, понятие линейного пространства построено для векторов, так как вектор для математиков является удобной абстракцией. Для физиков вектор – вполне определенный конкретный объект. Поэтому при построении линейного пространства введем термин «элемент». Под элементом мы подразумеваем числа, матрицы, тензоры, векторы и другое.

Определение

Множество R элементов любой природы $x, y, z, \ldots$ называется линейным пространством (ЛП) над числовым полем K, если

I. Указано правило, с помощью которого
$$\forall x, y \in R \;\; z \in R: \; z = x + y$$
II. Есть еще одно правило, с помощью которого
$$\forall x \in R \;\; \forall \lambda \in K \;\; u \in R: \; u = \lambda x = x\lambda$$
III. Две данные операции удовлетворяют следующим 8 требованиям:
   1. $\forall x, y \in R \;\; x + y = y + x$
   2. $\forall x, y, z \in R \;\; (x + y) + z = x + (y + z)$
   3. $\exists \theta \in R: \forall x \in R \;\; x + \theta = x$
   4. $\forall x \in R \; \exists x' \in R \;\; x + x' = \theta$
   5. $\forall x \in R \;\; 1x = x$
   6. $\forall x \in R \; \forall \lambda, \mu \in K \;\; \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
   7. $\forall x \in R \; \forall \lambda, \mu \in K \;\; (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
   8. $\forall x, y \in R \; \forall \lambda \in K \;\; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

Замечание 1.

Данные восемь требований называются аксиомами линейного пространства.

Замечание 2.

Как мы отметили $R -$ это множество элементов любой природы, но одной.

Замечание 3.

В аксиоме №6 выражение $\lambda\mu$ представлено в смысле операции в числовом поле. И в аксиоме №7 выражение $(\lambda + \mu)$ есть сумма обычных чисел.

Теперь рассмотрим структуру самого линейного пространства. Это множество, которое определено двумя правилами. Только объединение этих трех элементов дает понятие линейного пространства.

Данное определение сразу дает возможность оценить количество элементов в линейных пространствах. Всего на выбор два случая, когда в линейном пространстве бесконечно много элементов или элемент всего один (θ).

В жизненной учебной практике люди уже сталкиваются с понятиями линейного пространства со школы. Сначала это пространство рациональных чисел над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$. Далее в старших классах вводится $K_0(K_0)$. В университете в курсе аналитической геометрии добавляется пространство радиус-векторов B_3. Также известно пространство матриц H_n^m. Из матанализа можно вспомнить пространство непрерывных на сегменте функций $C_{[a,b]}$.

Простейшие свойства линейного пространства

Немного отойдем от основной темы и вспомним определение векторного произведения двух векторов. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда векторное произведение это вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем требованиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
2. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$
3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку

Данное определение работает следующим образом. Первое требование указывает длину нового вектора. Потом с помощью второго требования мы выделяем только одно направление. И третье требование выделяет только один объект, который образует именно правую тройку.

Теорема 1

В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент.

Доказательство:

В качестве доказательства выбираем метод «от противного». Предположим, что в ЛП R существует два нулевых элемента θ_1 и θ_2. Рассмотрим аксиому №3 сумму этих двух элементов: $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$. Также по аксиоме №1 имеем: $\theta_2 + \theta_1 = \theta_2$. Получаем, что $\theta_1 = \theta_2$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2

У каждого элемента ЛП существует единственный противоположный элемент.

Доказательство:

Пусть в ЛП R существует x, у которого два противоположных элемента a, b: $x + a = \theta$ и $x + b = \theta$ и $a \neq b$. Тогда рассмотрим комбинацию вида $x + a + b = (x + a) + b = \theta + b = b + \theta = b$. Теперь можно сделать так $x + a + b = (x + a) + b = (a + x) + b = a + (x + b) = a + \theta = a$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 3

Для любого элемента $x \in R$ имеет место равенство $0x = 0$.

Доказательство:

Будет использован прямой способ доказательства. Согласно аксиоме №5 имеем $1x = (1 + 0)x =$ аксиома №7 $= 1x + 0x =$ аксиома №5 $= x + 0x$. И согласно аксиоме №3 мы знаем, что такое уравнение выполняется тогда и только тогда, когда это нулевой элемент. То есть $0x = \theta$.

Теорема 4

Для любого элемента x линейного пространства противоположный элемент есть элемент $(-1)x$, то есть $x' = (-1)x$.

Доказательство:

$x + (-1)x =$ аксиома №5 $= 1x + (-1)x =$ аксиома №7 $= (1 - 1)x = 0x = \theta$. И элемент $(-1)x$ удовлетворяет аксиоме №4, то есть является противоположным.

Обозначим $(-1)x = -x$. Теперь можно ввести понятие разности элементов линейного пространства: $y - x = y + (-1)x = y + x'$. То есть разность элементов y и x есть сумма y и противоположного элемента x.

Линейная зависимость элементов линейного пространства

Рассмотрим элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in R(K)$. Пусть $c^1, c^2, \dots, c^n \in K$.

Определение

Элемент $y = x_k c^k$ называется линейной комбинацией элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ с коэффициентами $c^1, c^2, \dots, c^n$.

Если $c^k = 0, k = \overline{1, n}$, то в силу теоремы 3 и аксиомы №3 получаем $y = \theta$.

Определение

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in R(K)$ называются линейно зависимыми, если некоторая их линейная комбинация, не все коэффициенты которой равны нулю, дает элемент θ.

Определение

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in R(K)$ называются линейно независимыми, если $x_k c^k = \theta$ выполняется тогда и только тогда, когда все $c^k = 0, k = \overline{1, n}$.

Теорема 5

Для того чтобы элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in R(K)$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство:

Сначала докажем необходимость. Существуют числа $c^1, c^2, \dots, c^n \in K$ не все равные нулю, что $c^k x_k = \theta$. Выберем элемент $c^n \neq 0$. Тогда существует число $-\frac{1}{c^n}$. Умножим равенство на данное число. Также обозначим через $b_k = -\frac{c^k}{c^n}$. В результате получаем $b^k x_k - x_n = \theta$. Далее добавим слева и справа x_n и получим $b^k x_k = x_n$. Данное равенство означает, что один из элементов есть линейная комбинация остальных. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Заранее известно, что один из элементов является линейной комбинацией остальных. Тогда переходим к соотношению $b^k x_k - x_n = \theta$, которое означает, что эти элементы линейно зависимы, потому что хотя бы один коэффициент при x_n отличен от нуля. Теорема доказана.

Теорема 6

Если к элементам $x_1, x_2, \dots, x_n \in R(K)$ добавить нулевой элемент пространства, то совокупность этих элементов всегда линейно зависимо.

Доказательство:

Перед всеми x_k подставляем нули, а перед нулевым элементом единицу. Тогда получается линейная зависимость.

Теорема 7

Если элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in R(K)$ линейно зависимы, то элементы $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_s \in R(K)$ будут тоже линейно зависимы.

Доказательство:

Если n первых элементов линейно зависимы, то по определению существуют числа $c^1, c^2, \dots, c^n \in K$ не все равные нулю, которые образуют линейную комбинацию. Тогда оставим эти числа, а перед остальными элементами поставим нули. Что и требовалось доказать.

Далее приведем некоторые примеры.

1. Рассмотрим пространство столбцов T_m.

$$e_k = \left(\delta_k^i\right)^m$$

$$c^k e_k = (c^k)^m = \theta = (0)^m$$

Это пример m линейно независимых столбцов.

2. Рассмотрим далее пространство матриц

$$H_n^m: \quad E_i^j = \left(\delta_s^j \delta_i^s\right)_n^m$$
$$c_j^i E_i^j = \left(c_j^i\right)_n^m$$

Получили $m * n$ линейно независимых матриц.

3. Линейное пространство непрерывных функций

$$e_1 = 1, e_2 = \sin^2 x, e_3 = \cos^2 x$$

В этом пространстве можно указать любое наперед заданное число линейно независимых элементов.

Базис и координаты элементов линейного пространства

Определение

Упорядоченное множество линейно независимых элементов $e_1, e_2, \dots, e_n \in R(K)$ называется базисом этого пространства, если

$$\forall x \in R \quad \exists x^1, \dots, x^n: \; x = x^k e_k, \qquad k = \overline{1, n}$$

Числа $x^1, \dots, x^n$ – координаты элемента в заданном базисе.

Теорема 8

Разложение элемента линейного пространства по базису единственно.

Доказательство:

Пусть в ЛП R есть элемент x, у которого в заданном базисе $(e_k)_n$ есть два разложения $x = x^k e_k$ и $x = y^k e_k$, $k = \overline{1, n}$. Далее получим

$$\theta = (x^k - y^k) e_k$$

Тогда получается, что это возможно тогда и только тогда, когда $x^k - y^k = 0$. Противоречие доказывает теорему.

В пространстве столбцов получим разложение по базису

$$(a^k)^m = \left(a^k \delta_k^i\right)^m$$

В пространстве матриц аналогично

$$\left(a_j^i\right)_n^m = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_j^i E_i^j$$

Лекция 2. Подпространства линейных пространств. Линейная оболочка

Продолжение

Теорема 9

При сложении двух элементов линейного пространства их координаты складываются. При умножении элемента на число все его координаты умножаются на это число.

Доказательство:

Пусть в ЛП $R(K)$ есть базис $(e_k)_n$. Тогда можно разложить элемент x по базису: $x = x^k e_k, k = \overline{1.n}$. Точно также можно разложить $y = y^k e_k$. Далее сложим эти два элемента. $x + y =$ аксиомы $= (x^k + y^k)e_k$. Согласно определению, выражение в круглых скобках – координаты данного элемента, которые представляют сумму координат элементов слагаемых. Теперь умножим первый элемент на число λ. $\lambda x = \lambda(x^k e_k) = (\lambda x^k)e_k$. Снова в строгом соответствии с определением базисов получаем разложение элемента по базису. Теорема доказана.

Разложение некоторого элемента по базису имеет вид

$$x = x^k e_k, \qquad k = \overline{1,n}$$

Также есть строка, составленная из элементов линейного пространства

$$e = (e_1, \dots, e_n)$$

Столбец координат запишем как

$$(x^k)^n = X_e$$

Тогда разложение элемента можно также переписать в матричной форме следующим образом

$$x = eX_e$$

Лемма 1

Пусть элементы $x_1, x_2, \dots, x_m \in R$ разложены по базису $(e_k)_n$: $x_k = eX_{ke}, k = \overline{1,m}$ Тогда из линейной зависимости столбцов $X_1, \dots, X_m$ следует линейная зависимость самих элементов.

Доказательство:

Так как столбцы линейно зависимы, то существуют такие числа $C^k, k = \overline{1,m}$, что $C^k X_{ke} = \theta = (0)^n$. Рассмотрим далее линейную комбинацию с выбранными коэффициентами C^k : $C^k X_k = C^k(eX_{ke}) = e(C^k X_{ke}) = e\theta = \theta$. Лемма доказана.

Размерность линейного пространства

Определение

Натуральное число n называется размерностью линейного пространства R, если в этом пространстве имеется n линейно независимых элементов, а любые $n + 1$ элементов линейно зависимы. Записывается размерность так: $dimR = n$.

Также отметим, что размерность нуль пространства равно нулю $dim\theta = 0$.

Определение

Линейное пространство R называется бесконечномерным, если в этом пространстве можно указать любое наперед заданное число линейно независимых элементов.

Например, линейное пространство $C_{[a,b]}$ бесконечномерное.

Теорема 10

Если размерность линейного пространства равна n, то в этом пространстве имеется базис из n элементов, причем в качестве базиса можно взять любые n линейно независимых элементов.

Доказательство:

Согласно определению, существует n линейно независимых элементов. Тогда при добавлении к ним некоторого элемента x они в совокупности станут линейно зависимыми. То есть $\exists C^0, \dots, C^n : C^0 x + C^k e_k = \theta$. Рассмотрим случай $C^0 = 0$. Тогда $C^k e_k$ должны быть линейно зависимыми, что противоречит условию. Очевидно, что $C^0 \neq 0$. По доказательству теоремы 5 получаем, что $x = x^k e_k, k = \overline{1,n}$. Теорема доказана.

Теорема 11

Если в линейном пространстве R есть базис из n элементов, то $dimR = n$.

Доказательство:

Пусть $(e_k)_n$ – базис. Требуется доказать, что любые $n+1$ элементов будут линейно зависимы. Разложим элемент по базису $x_k = eX_{ke}, k = \overline{1, n+1}$. Рассмотрим матрицу $(X_1, \dots, X_{n+1})$. По Лемме 1 имеем, что из линейной зависимости столбцов следует линейная зависимость элементов. Теорема доказана.

Изоморфизм линейных пространств

С точки зрения алгебры линейные пространства одной и той же размерности неразличимы.

Определение

Соответствие Г между элементами двух пространств R, R' называется взаимно-однозначным, если

1. Каждому элементу $x \in R$ соответствует строго определенный элемент $x' \in R'$.
2. Каждому элементу $x' \in R'$ соответствует строго определенный элемент $x \in R$.

Определение

Линейные пространства R, R' называются изоморфными, если между элементами этих двух пространств устанавливается взаимно-однозначное соответствие такое, что если элементам $x, y \in R$ соответствуют элементы $x', y' \in R'$, то

1. $x + y \in R$ соответствует $x' + y' \in R'$
2. $\forall \lambda \in K\ \lambda x \in R \sim \lambda x' \in R'$

Понятие изоморфизма $\Gamma: R \leftrightarrow R'$

1. $\Gamma(x + y) = \Gamma(x) + \Gamma(y)$
2. $\Gamma(\lambda x) = \lambda \Gamma(x)$

Лемма 2

Изоморфизм переводит нулевой элемент пространства R в нулевой элемент R'.

Доказательство:

При $\lambda = 0$ получим, что $\Gamma(0x) = 0\Gamma(x)$, где $(0x) = \theta \in R$, а $\Gamma(x) = \theta' \in R'$.

Теорема 12

Линейные пространства одной и той же размерности изоморфны.

Доказательство:

Для доказательства возьмем два пространства $R_n(K)$ и $T_n(K)$. В пространстве размерностью n $\exists (e_k)_n$. Тогда $\forall x \in R: x = eX_e, X_e = (x^k)^n = x' \in T_n$. Устанавливается соответствие. Теорема доказана.

Теорема 13

Линейные пространства неравных размерностей не изоморфны.

Доказательство:

Возьмем два пространства R_n и R'_m, причем $n > m$. Доказательство проведем «от противного». В первом пространстве существует базис $(e_k)_n$. Применив изоморфизм, получаем $(f_k)_n \in R'_m$. Этих элементов n, а размерность R'_m равна m. Значит они линейно зависимые. Теперь применим изоморфизм в обратную сторону. Тогда получаем, что числа $C^1, \ldots, C^n$ не все равны нулю, а элементы являются линейно зависимыми. Получаем противоречие, которое доказывает теорему.

Преобразование базиса и координат элементов линейного пространства

Пусть дано линейное пространство $R_n(K)$, в котором задано два базиса $(e_k)_n$ и $(f_k)_n$. Разложим элементы второго базиса по первому базису $f_k = a_k^i e_i, k = \overline{1,n}, i = \overline{1,n}$. Или в матричной форме получим $f = (f_1, \ldots, f_n), e = (e_1, \ldots, e_n), A = \left(a_k^i\right)_n^n$

$$f = eA$$

Матрица A – матрица перехода от одного базиса к другому. Каждый столбец матрицы – координаты базисных элементов. То есть определитель отличен от нуля и у матрицы A есть обратная матрицы A^{-1} и можно совершить переход в обратном направлении.

$$f = eA^{-1}$$

Разложим элемент x по первому базису $x = x^k e_k = eX_{ke}$ и по второму $x = \bar{x}^k f_k = f\bar{X}_{kf}$.

Тогда получим, что

$$eX_e = eAX_f \to X_e = AX_f$$
$$X_f = A^{-1}X_e$$

Подпространства линейного пространства

Определение

Непустое множество $M \subset R(K)$ называется подпространством пространства $R(K)$, если на этом множестве сохраняются те операции, которые введены в линейном пространстве (сложение и умножение на число) и выполнены два условия:

1. $\forall x, y \in M \qquad x + y \in M$
2. $\forall x \in M \ \ \forall \lambda \in K \qquad \lambda x \in M$

Свойство 1

Подпространство линейного пространства является линейным пространством.

Доказательство:

Необходимо проверить только аксиомы №3-4, так как другое очевидно из определения. Возьмем $\lambda = 0$, так как $x \in M$, то и $0x = \theta \in M$. Во втором случае берем $\lambda = -1$ и из $x \in M$ имеем $(-1)x \in M$. Свойство доказано.

Примеры:

В любом линейном пространстве наименьшим по размерности подпространством является нуль пространство. А самым максимальным по размерности является само пространство.

Также можно рассмотреть пространство T_n. Пусть $k < n$. M – множество всех элементов $(a^p)^n$ из T_n, для которых $a^1 = \cdots = a^k = 0$.

Свойство 2

$dimM \leq dimR_n = n$

Доказательство:

Возьмем элементы $x_1, \dots x_{n+1} \in M$. Эти же элементы и принадлежат самому пространству R_n. По определению размерности пространства R_n эти элементы линейно зависимы. Свойство доказано.

Свойство 3

Пусть $e_1, \dots, e_s$ базис в M линейного пространства R_n, где $n > s$. Тогда можно указать такие элементы $e_{s+1}, \dots, e_n \in R_n$ такие, что в совокупности с s они дадут базис во всем пространстве.

Доказательство:

$\exists e_{s+1} \in R_n : e_1, e_2, \dots, e_s, e_{s+1}$ будут линейно независимы. Докажем это «от противного». Если они линейно зависимы, то $\exists C^1, \dots C^{s+1}$ не все равные нулю, что $C^k e_k = \theta$. Пусть $C^{s+1} = 0$. В таком случае наблюдается противоречие условию теоремы. Очевидно отсюда, что $C^{s+1} \neq 0$. И по теореме 5 получаем, что e_{s+1} есть линейная комбинация базисных элементов, то есть $dimR = s$, что неверно. Полученные противоречия доказывают существование элемента e_{s+1}. В случае, когда $s + 1 = n$ теорема доказана, а когда $s + 1 < n$ необходимо повторить данную процедуру. Свойство доказано.

Линейные оболочки

Определение

Пусть в линейном пространстве R_n заданы элементы $x_1, x_2, \dots x_m$. Линейной оболочкой называется все множество всевозможных линейных комбинаций данной системы элементов.

$$C^i x_i, \qquad i = \overline{1, m}$$

Сама система называется порождающей системой линейно оболочки и обозначается $L(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Свойство 1

Любая линейная оболочка является подпространством линейного пространства

Доказательство:

Достаточно показать корректность относительно множества L операций сложения и умножения на число, введенных в пространстве R_n

1. $c^i x_i + d^i x_i = \text{аксиомы} = (c^i + d^i) x_i$
2. $\lambda(c^i x_i) = \text{аксиомы} = (\lambda c^i) x_i$

Утверждение верно.

Свойство 2

Любая линейная оболочка $L(x_1, x_2, \dots, x_m)$ является наименьшим подпространством, содержащим элементы $x_1, \dots, x_m$.

Доказательство:

Очевидно, что $x_1, \dots, x_m \in L(x_1, x_2, \dots, x_m)$, которая в силу свойства 1 является подпространством линейного пространства R_n. С другой стороны, любое подпространство пространства R_n, содержащее эти элементы, включает в себя все их линейные комбинации, т.е. содержит в себе $L(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Свойство 3

Если какой-либо элемент из порождающей системы элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ есть линейная комбинация остальных элементов этой системы, то его можно убрать из порождающей системы, не изменив линейной оболочки.

Лекция 3. Система линейных уравнений. Евклидовы и унитарные пространства

Критерий совместности неоднородной системы линейных уравнений

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными вида

$$AX = B,$$

где $A = \left(a_k^i\right)_n^m, X = (x^k)^n, B = (b^k)^m$.

Эту систему можно записать иначе

$$A_k x^k = B, \qquad k = \overline{1, n}$$

Матрица A называется основной матрицей данной системы уравнений, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Кроме того, если к матрице A добавить еще один столбец B, то получим расширенную матрицу $A^* = (A_1 \dots A_n B)$.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли)

Для того чтобы система $AX = B$ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $rangA = rangA^*$.

Доказательство:

Сначала докажем необходимость. Так как система совместная, то у нее есть решения $C^1, \dots, C^n$. При подстановке их в систему уравнений получим $A_k C^k = B, k = \overline{1, n}$ Отсюда следует, что столбец B является линейной комбинацией столбцов матрицы A, то есть можно вычеркнуть этот столбец из матрицы A^*, не изменив при этом ранга. Таким образом, $rangA = rangA^*$.

Далее докажем достаточность. Пусть $rangA = rangA^*$. Это значит, что базисный минор матрицы A является базисным минором матрицы A^*. Следовательно, по теореме о базисном миноре столбец свободных членов B является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A, а значит и остальных столбцов этой матрицы. Теорема доказана.

Однородная система уравнений

Однородная система уравнений в матричной форме записывается как:

$$AX = \theta,$$

где A, X – те же, что и в прошлом пункте, а θ – нулевой столбец высоты m.

Множество всех решений этой системы является подмножеством множества T_n. Также понятно, что если x_1и x_2 – решения данной системы, то их сумма $x_1 + x_2$ – также решение данной системы. Можно убедиться, что и λx_1 будет решением системы. Таким образом, множество всех решений однородной системы – подпространство пространства T_n.

Определение

Фундаментальной совокупностью решений (ФСР) однородной системы уравнений называется базис в пространстве решений.

Пусть $rangA = r$. Сделаем допущение, что базисный минор матрицы A расположен в первых r строчках и в первых r столбцах этой матрицы. Следовательно, по теореме о базисном миноре $n - m$ последних строк – линейная комбинация базисных. С точки зрения системы уравнений последние $n - m$ уравнений – следствия первых r, то есть их можно исключить из системы. Кроме того, в левой части уравнений оставим только те неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, а остальные $n - r$ перенесем в правую часть и зададим их следующим образом $x^{r+1} = c^{r+1}, \dots, x^n = c^n$. Тогда система будет выглядеть так:

$$a_k^i x^k = -a_j^i c^j, \qquad i, k = \overline{1, r}, \qquad j = \overline{r+1, n}$$

Запишем первое решение

$$X_1 = (c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^r, 1\ 0 \dots 0)^T$$

Второе решение имеет вид:

$$X_2 = (c_2^1, c_2^2, \dots, c_2^r, 0\ 1 \dots 0)^T$$

Продолжая такое построение, получим последнее решение

$$X_{n-r} = (c_{n-r}^1, c_{n-r}^2, \dots, c_{n-r}^r, 0\ 0 \dots 1)^T$$

Если построить матрицу по данным решениям, то ее ранг будет равен $n - r$.

Далее докажем, что решение

$$X^* = (d^k)^n$$

можно представить как линейную комбинацию данных линейно независимых элементов. Для этого построим следующую линейную оболочку

$$X = d^{r+k} X_k, \qquad k = \overline{1, n-r}$$

Все $n - r$ – решения системы $a_k^i x^k = -a_j^i c^j$. Кроме того, X – тоже решение системы. Общее в этих решениях то, что последние $n - r$ значений совпадают. Итак, мы построили базис и можем утверждать, что множество всех решений однородной системы уравнений образует подпространство размерности $n - r$.

Замечание

Фундаментальная совокупность решений, построенная выше, называется нормальной ФСР.

Таким образом, было получено все множество решений

$$X = c^k X_k, \qquad k = \overline{1, n-r}$$

Общее решение неоднородной линейной системы уравнений

Снова рассмотрим систему $AX = B$ и будем считать, что она совместна, то есть $rangA^* = rangA = r$. Пусть X_0 – решение системы (частное решение). Пусть $X_1, \dots, X_{n-r}$ – ФСР, соответствующая системе $AX = B$ однородной системы уравнений. Все множество решений можно записать в виде $c^k X_k, k = \overline{1, n-r}$.

Теорема 2

Общее решение совместной неоднородной системы уравнений, ранг матрицы которой равен r имеет вид:

$$X = X_0 + c^k X_k, \qquad k = \overline{1, n-r}$$

Доказательство:

Необходимо доказать две вещи: 1) при любых c^k данная формула будет всегда решением системы и 2) каждое из решений X^* системы при определенном выборе $n-r$ постоянных задается данной формулой.

1) Умножим $X = X_0 + c^k X_k$ на A и получим

$$AX = AX_0 + A(c^k X_k) = B + \theta = B$$

2) Рассмотрим решение X^*. По условию теоремы $X^* - X_0$ тоже решение.

Умножим эту разность на матрицу A

$$A(X^* - X_0) = AX^* - AX_0 = B - B = \theta$$

то есть $X^* - X_0$ – решение однородной системы, а значит существуют такие числа $c^1, c^2, \dots, c^{n-r}$, что $X^* - X_0 = c^k X_k$. Теорема доказана.

Замечание

Для того чтобы найти какое-нибудь частное решение X_0 оставим только те уравнения, коэффициенты которого входят в базисный минор, в левой части оставим только те неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор. Остальные неизвестные переносим в правую часть и полагаем их нулями. Тогда остается столбец свободных членов B. Матрица такой системы имеет определитель равный базисному минору. Следовательно, система имеет единственное решение.

Определение

Пусть M – подпространство пространства R, x – любой элемент из M, а x_0 – фиксированный элемент пространства R. Тогда множество H всех элементов вида $x + x_0$ называется результатом сдвига подпространства M вдоль элемента x_0 или гиперплоскостью.

Далее рассмотрим случай, когда $x_0 \in M$ и $x_0 \in R$. Тогда гиперплоскость H – подпространство той же размерности или просто само подпространство M.

Утверждение

В случае, когда $x_0 \neq M$ и $x_0 \in R$ получаем, что такое образование не является линейным пространством, так как там нет нулевого элемента.

Доказательство:

Пусть $\forall x \in M : x + x_0 = \theta \in M$. Из этого равенства получаем, что

$$x_0 = -x = (-1)x$$

Тогда по аксиоме №4 противоположный элемент также принадлежит M. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Таким образом, мы убедились в том, что множество всех решений неоднородной линейной системы уравнений не образует линейного пространства, это гиперплоскость.

Евклидовы и унитарные пространства

Определение

Линейное пространство над числовым полем K_0 называется евклидовым $\mathcal{E}$, если в нем указано правило, ставящее в соответствие каждым двум элементам x, y число, которое обозначим (x, y) и назовем скалярным произведением этих элементов. Это правило удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $(x, y) = (y, x)$
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3) $\forall \lambda \in K_0 \ \ (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4) $(x, x) > 0$ при $x \neq \theta$ и $(x, x) = 0$ при $x = \theta$

Лемма

$\forall x \in \mathcal{E} \ (x, \theta) = (\theta, x) = 0$

Доказательство:

Рассмотрим равенство $(\theta, x) = (0y, x) = 0(y, x) = 0$. Что и требовалось доказать.

Напомним также, как вводится скалярное произведение двух векторов

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$$

Теперь обратимся к пространству T_n. Введем скалярное произведение следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x^k y^k$$

Далее рассмотрим пространство $C_{[a,b]}$ и функции $x(t), y(t) \in C_{[a,b]}$. Для них введем скалярное произведение как

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

Выполнение первых трех аксиом – свойства определенного интеграла. Четвертую аксиому разберем ниже

$$(x, x) = \int_a^b x^2(t)dt$$

Первый случай $x(t) = 0$:

$$\int_a^b 0dt = C - C = 0$$

Во втором случае соответственно $x(t) \neq 0$:

$$\exists t_0 \ \ x^2(t_0) = \alpha > 0$$
$$\exists (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \ \ x^2(t) > 0$$

Теперь можно записать, что

$$\int_a^b x^2(t)dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} x^2(t)dt$$

И по теореме о среднем значении получим

$$\exists\xi \in (t_0-\delta, t_0+\delta): \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} x^2(t)dt = x^2(\xi)2\delta > 0$$

Определение

Линейной пространство, определенное над полем комплексных чисел, называется унитарным E, если в этом пространстве введено правило, по которому любым двум элементам $x, y \in E$ ставится в соответствие число из $\mathbb{C}$, называемое скалярным произведением и обозначаемое (x, y), причем выполняется 4 аксиомы:

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$
2) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$
3) $\forall\lambda \in K_0 \ \ (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
4) $(x,x) > 0$ при $x \neq \theta$ и $(x,x) = 0$ при $x = \theta$

Свойство

$\forall x \ (x,x) = \overline{(x,x)}$. Это означает, что $(x,x) \in K_0$.

Рассмотрим задачу, где $x, y \in \mathcal{E}$ и $\lambda \in K_0$:

$$(x,\lambda y) = (\lambda y, x) = \lambda(y,x) = \lambda(x,y)$$

А в случае унитарного пространства получим

$$(x,\lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda}\,\overline{(y,x)} = \bar{\lambda}\,\overline{\overline{(x,y)}} = \bar{\lambda}\,(x,y)$$

В пространстве $T_n(\mathbb{C})$ нельзя ввести скалярное произведение на подобии с евклидовым пространством. Необходимо изменить формулу на следующую:

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x^k \bar{y}^k$$

В пространстве $\mathcal{E}_n$ введем базис $(e_k)_n$. Тогда любой элемент можно разложить по этому базису

$$x = x^k e_k = eX_e$$
$$y = y^i e_i = eY_e$$

Тем самым, скалярное произведение имеет вид

$$(x,y) = \left(x^k e_k, y^i e_i\right) = (e_k, e_i) x^k y^i, \qquad i,k = \overline{1,n}$$
$$(x,y) = b_{ki} x^k y^i, \qquad i,k = \overline{1,n}$$
$$(x,y) = X_e^T B Y_e$$

Таким образом, мы получили формулы представления скалярного произведения в произвольном базисе и матричном виде.

Метрические отношения в евклидовом пространстве

Определение

Нормой элемента $x \in \mathcal{E}$ называется $\sqrt{(x,x)} = \left|\left|x\right|\right|$. Если норма элемента равна 1, то такой элемент называется нормированным.

Норма вектора – длина вектора. Нормированный вектор – орт.

Рассмотрим пространство T_n. В нем норма имеет вид

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2}$$

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма элемента x есть

$$||x|| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$$

Определение

Углом между ненулевыми элементами $x, y \in \mathcal{E}$ называется угол ϕ, который определяется условиями:

$$\begin{cases} \cos\phi = \dfrac{(x,y)}{||x||||y||} \\ 0 < \phi < \pi \end{cases}$$

Лекция 4. Евклидово пространство

Неравенство Коши-Буняковского

В 1821 году Коши доказал это неравенство для пространства столбцов, а в 1869 году Буняковский доказал выполнимость этого неравенства для пространства $C_{[a,b]}$. Через 24 года немец Шварц повторил результаты Буняковского и во всей иностранной литературе данное неравенство называется неравенством Шварца.

Теорема 1

$\forall x, y \in \mathcal{E}$ выполнено неравенство Коши-Буняковского

$$|(x,y)| \leq |x||y|$$

Доказательство:

Возьмем $x, y \in \mathcal{E}, \lambda \in K_0$ и рассмотрим элемент $\lambda x - y$. Применим к нему скалярное произведение и умножим его на этот же элемент

$$(\lambda x - y)(\lambda x - y) \geq 0$$

Применяя первые 3 аксиомы, преобразуем скалярное произведение

$$(x,x)\lambda^2 - 2(x,y)\lambda + (y,y) \geq 0$$

Для того чтобы неравенство было верно для любых λ, необходимо и достаточно, чтобы

$$(x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$$

Это уже вид неравенства Коши-Буняковского. Теорема доказана.

Теорема 1*

Для любых элементов $\forall x, y \in E$ выполняется неравенство Коши-Буняковского

Доказательство:

Возьмем $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ и рассмотрим элемент $\lambda x - y$. Проведем такие же процедуры и получим

$$(\lambda x - y)(\lambda x - y) \geq 0$$

Применяя вторую и первую аксиомы, имеем

$$\lambda(x, \lambda x - y) - (y, \lambda x - y) = \lambda\overline{(\lambda x - y, x)} - \overline{(\lambda x - y, y)} =$$
$$= \lambda\bar{\lambda}\,\overline{(x,x)} - \lambda\overline{(y,x)} - \bar{\lambda}\overline{(x,y)} + \overline{(y,y)} =$$
$$= \lambda\bar{\lambda}(x,x) - \lambda(x,y) - \bar{\lambda}\overline{(x,y)} + (y,y)$$

Мы помним, что в тригонометрической форме скалярное произведение и значение вещественного числа имеют вид

$$(x,y) = |(x,y)|(\cos\phi + i\sin\phi), \qquad \lambda = b(\cos\phi - i\sin\phi)$$

При данных условиях получаем

$$\lambda\bar{\lambda} = b^2, \qquad \lambda(x,y) = \bar{\lambda}\,\overline{(x,y)} = b|(x,y)|$$

И подставляя все в исходное равенство, имеем

$$(x,x)b^2 - 2|(x,y)|b + (y,y) \geq 0$$

Снова получено квадратичное неравенство относительно b, которое верно при соблюдении неравенства Коши-Буняковского. Теорема доказана.

Ортонормированный базис в евклидовом пространстве

Определение

Два элемента $x, y \in \mathcal{E}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равняется нулю $(x, y) = 0$.

Лемма 2

Взаимно ортогональные ненулевые элементы $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{E}_n$ линейно независимы.

Доказательство:

Пусть это не так, то есть $\exists c^i$ не все равные нулю, что $c^i x_i = \theta, i = \overline{1, m}$. Пусть у нас $c^1 \neq 0$. Умножим уравнение на x_1:

$$\left(c^i x_i, x_1\right) = (\theta, x_1)$$
$$c^1(x_1, x_1) = 0$$

Так как c^1 отличен от нуля, то x_1 должен быть нулевым элементом, что противоречит условию. Теорема доказана.

Определение

Базис $(e_k)_n$ евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ называется ортонормированным (ОНБ), если выполнено условие $(e_k, e_i) = \delta_{ki}$.

Теорема 2

В евклидовом пространстве размерности $n, n \geq 1$, существует ОНБ.

Доказательство:

Докажем при помощи алгоритма Шмидта. Возьмем в $\mathcal{E}_n$ базис $(f_k)_n$.

Шаг 1. Нормируем элемент e_1: $e_1 = \frac{f_1}{||f_1||}$

Шаг 2. Будем искать e_2 так: $e_2 = af_2 + be_1$. Причем должны соблюдаться следующие условия:

1) $(e_1, e_2) = 0$
2) $(e_2, e_2) = 1$

Тогда получим следующее выражение

$$a(f_2, e_1) + b = 0 \to b = -a(f_2, e_1)$$
$$e_2 = ag_2, \qquad g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1$$
$$e_2 = \frac{1}{||g_2||} g_2$$

Шаг 3. Для e_3 имеем:

$$e_3 = af_3 + be_2 + ce_1$$

Причем выполняются следующие три условия:

1) $(e_3, e_1) = 0$
2) $(e_3, e_2) = 0$
3) $(e_3, e_3) = 1$

Тогда по условиям получим следующее:

$$a(f_3, e_1) + c = 0 \to c = -a(f_3, e_1)$$
$$a(f_3, e_2) + b = 0 \to b = -a(f_3, e_2)$$
$$e_3 = a g_3, \qquad g_3 = f_3 - (f_3, e_2)e_2 - (f_3, e_1)e_1 \neq 0$$
$$e_3 = \frac{1}{||g_3||} g_3$$

По методу полной математической индукции получим следующие выражения.

Шаг k.

$$e_k = \frac{1}{||g_k||} g_k, \qquad g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} (f_k, e_i) e_i$$

Шаг $k+1$.

$$e_{k+1} = \frac{1}{||g_{k+1}||} g_{k+1}, \qquad g_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (f_{k+1}, e_i) e_i$$

В выражении для g_{k+1} присутствуют все построенные нами базисные элементы, которые представляют собой линейную комбинацию $f_1, f_2, \dots$. Также все они принадлежат базису. Элемент f_{k+1} входит в выражение единственным образом с коэффициентом отличным от нуля.

Далее докажем, что (g_{k+1}, e_j), $j = \overline{1,k}$ равно нулю:

$$(g_{k+1}, e_j) = (f_{k+1}, e_j) - \sum_{i=1}^{k} (f_{k+1}, e_i)(e_i, e_j) = (f_{k+1}, e_j) - (f_{k+1}, e_j) = 0$$

Теорема доказана.

Замечание

В любом евклидовом пространстве существует бесконечно много ОНБ.

Следствие 1

Если $(e_k)_n$ – ОНБ евклидова пространства и $x = x^k e_k, y = y^i e_i$, $i, k = \overline{1,n}$, то имеет место формула для скалярного произведения:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x^k y^k$$
$$(x, y) = X_e^T Y_e$$

Согласно определению скалярного произведения в произвольном базисе запишем формулу

$$(x, y) = (e_i, e_j) x^i y^j = \delta_{ij} x^i y^j$$
$$(x, y) = X_e^T B Y_e$$

Следствие 2

Если в некотором базисе $(e_k)_n$ евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ скалярное произведение имеет вид

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x^k y^k$$
$$(x, y) = X_e^T Y_e$$

то этот базис ортонормированный.

Доказательство:

Если $(e_k)_n$ – произвольный базис, то скалярное произведение выглядит так:

$$(x, y) = (e_i, e_j) x^i y^j$$

В нашем случае оставлены только те слагаемые, когда $i = j$, то есть

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Что и требовалось доказать.

Разложение евклидова пространства на прямую сумму его подпространств

Определение

Пусть M – подпространство $\mathcal{E}$. Тогда множество всех элементов $x \in \mathcal{E} \perp \forall y \in M$ называется ортогональным дополнением подпространства M.

Теорема 3

Если M – подпространство размерности m, евклидово пространство $\mathcal{E}_n$, то ортогональное дополнение тоже является подпространством евклидова пространства размерности $n - m$.

Доказательство:

Пусть в M_m задан базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Тот факт, что $\forall x \in M^\perp$ означает, что выполняется соотношение

$$(x, e_k) = 0, \qquad k = \overline{1, m}$$

Это означает, что $\forall y \in M_m : (y, x) = 0$. Докажем это:

$$y = y^i e_i, \qquad (y, x) = (y^i e_i, x) = y^i (e_i, x) = 0$$

Также можно сказать, что ортогональное дополнение – это подпространство евклидова пространства, так как

$$x_1, x_2 \in M^\perp, \qquad x_1 + x_2 \in M^\perp, \qquad \alpha x_1 \in M^\perp$$

Далее рассмотрим ОНБ $(f_k)_n$. Разложим x по этому базису

$$x = x^k f_k, \qquad k = \overline{1, n}$$
$$e_i = a_i^j f_j, \qquad i = \overline{1, m}, \qquad j = \overline{1, n}$$
$$(x, e_i) = (x^k f_k, a_i^j f_j) = a_i^j x^k (f_k, f_j) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k x^k$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_i^k x^k = 0, \qquad i = \overline{1, m}$$

Ранг матрицы a равен m. То есть пространство всех решений имеет размерность $n-m$. Что и требовалось доказать.

Замечание

$a_i^j=(A^T)_i^j$. Тогда в матричной форме получаем запись

$$A^TX=\theta$$

Определение

Евклидово пространство $\mathcal{E}_n$ называется прямой суммой двух подпространств P и M, если $\forall x\in\mathcal{E}_n$ может быть представлен единственным образом $y\in P, z\in M$ в виде $x=y+z$.

Символически это записывается так: $E=M\oplus P$.

Возьмем для примера пространство B_2. Тогда любые две прямые, проходящие через начало координат L_1 и L_2 являются прямой суммой $B_2=L_1\oplus L_2$.

Теперь рассмотрим пространство B_3. Возьмем две плоскости, проходящие через начало координат P_1 и P_2. Если взять любой вектор $\bar{c}$, то его можно разложить как $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=\left(\bar{a}+\bar{d}\right)+(\bar{b}-\bar{d})$. Таким образом, мы не можем записать $B_3\neq P_1\oplus P_2$.

Теорема 4

Евклидово пространство можно разложить на прямую сумму любого его подпространства и ортогонального дополнения.

Доказательство:

Пусть подпространство M имеет размерность m. Тогда в этом подпространстве существует ОНБ $(e_k)_m$. Теперь воспользуемся тем, что базис любого подпространства можно дополнить до базиса всего пространства, причем до ортонормированного базиса.

То есть получаем, что $(e_k)_n$ – ОНБ в $\mathcal{E}_n$. Элементы $e_{m+1},\dots,e_n$ являются базисом в ортогональном дополнении к этому подпространству.

$$\forall x\in M^\perp\quad x=c^ke_k,\qquad k=\overline{m+1,n}$$

Таким образом, эти $m+1\dots n$ элементов являются линейно независимыми и базисом.

$$\forall x\in\mathcal{E}_n\qquad x=c^ke_k=y+z$$
$$y=c^ke_k,\qquad k=\overline{1,m},\qquad y\in M$$
$$z=c^ke_k,\qquad k=\overline{m+1,n},\qquad z\in M^\perp$$

Теорема доказана.

Далее введем обозначение

$$AX=B,$$

где $A=\left(a_k^i\right)_n^n,\ X=(x^k)^n,\ B=(b^k)^n$

Кроме того, рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений и сопряженную систему уравнений.

$$AX=\theta$$
$$A^TX=\theta$$

Теорема 5 (Альтернатива Фредгольма)

Или однородная система уравнений имеет единственное ненулевое решение, и тогда система $AX = B$ имеет единственное решение для любой правой части. Или однородная система уравнений имеет ненулевое решение, и тогда система $AX = B$ имеет решение тогда и только тогда, когда столбец B ортогонален ко всем решениями сопряженной системы $A^T B = \theta$.

Доказательство:

Если у системы $AX = \theta$ только нулевое решение, а матрица квадратная, то определитель матрицы A отличен от нуля. Значит система $AX = B$ имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера.

В случае, когда существует ненулевое решение системы $AX = \theta$, то $rangA = r < n$. Более того, множество всех решений системы $AX = \theta$ образует подпространство пространства T размерности $n - r$. Система $AX = B$ должна быть совместной. Чтобы данная система имела решения необходимо, чтобы $\exists x^1, \dots, x^n$:

$$x^i A_i = B, \qquad B \subset L_A$$

У линейной оболочки есть ортогональное дополнение. Мы доказали теорему, что

$$T_n = L_A \oplus L_A^{\perp}$$

Таким образом, тот факт, что B принадлежит линейной оболочке означает, что B ортогонален к любому элементу $L_A^{\perp}$. Теорема доказана.

Ортогональные и унитарные матрицы

Определение

Матрица $Q = \left(q_j^i\right)_n^n$, где $q_j^i \in K_0$ называется ортогональной, если выполнено соотношение

$$QQ^T = E,$$

где E – единичная матрица.

Свойство 1

Если Q – ортогональная матрица, то имеет место соотношение $Q^T = Q^{-1}$.

Доказательство:

Применим определитель к соотношению $QQ^T = E$.

$$detQ^T detQ = detQ^T Q = detE = 1$$

Следовательно, $detQ \neq 0$. Поэтому матрица Q имеет обратную матрицу Q^{-1}. Теперь умножим выражение на Q^{-1}

$$Q^{-1}QQ^T = Q^{-1}E \to Q^T = Q^{-1}$$

Свойство доказано.

Замечание 1

Обратные матрицы определяются как $QQ^{-1} = Q^{-1}Q = E$. Поэтому можно получить формулу $Q^T Q = E$.

Свойство 2

Определитель ортогональной матрицы по модулю равен 1.

Лекция 5. Ядро и образ линейного оператора. Собственные значения и собственные функции

Операторы

Из алгебры матриц известно, что $AB \neq BA$. Пространство операторов изоморфно пространству матриц, то есть для операторов получаем $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Введем оператор коммутатор:

$$< \hat{A}, \hat{B} > = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Примеры:

Если в качестве основного взять тождественный оператор $\hat{E}$ и любой $\hat{A}$, то коммутатор для этих двух операторов есть

$$< \hat{A}, \hat{E} > = \hat{\theta}$$

Далее рассмотрим пространство радиус-векторов B_2. Возьмем там ОНБ $\overline{e_1}, \overline{e_2}$. Будем работать с оператором проектирования любого радиус-вектора на направление $\overline{e_1}$ $(\hat{A})$ и оператором поворота против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ $(\hat{B})$.

$$\hat{A}\hat{B}\,\overline{e_1} = \bar{\theta}$$
$$\hat{B}\hat{A}\,\overline{e_1} = \overline{e_2}$$
$$< \hat{A}, \hat{B} > \,\overline{e_1} = -\overline{e_2}$$

Свойство 1 (сочетательное относительно числового множителя)

$\forall \hat{A}, \hat{B} \in S, \forall \lambda \in K$: $\quad \lambda(\hat{A}\hat{B}) = (\lambda\hat{A})\hat{B}$

Свойство 2 (сочетательное относительно трех операторов)

$\forall \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in S$: $\quad \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$

Свойство 3 (распределительное свойство)

$\forall \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in S$: $\quad (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}$

$$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$$

Докажем свойство 1.

Операторы равны тогда, когда

$$\forall x \in R: [\lambda(\hat{A}\hat{B})]x = [(\lambda\hat{A})\hat{B}]x$$

Далее используем свойства самих линейных операторов

$$(\hat{A}\hat{B})\lambda x = \hat{A}\left(\hat{B}(\lambda x)\right)$$

$$[(\lambda\hat{A})\hat{B}]x = [\hat{A}(\lambda\hat{B})]x = \hat{A}\left(\hat{B}(\lambda x)\right)$$

Свойство доказано.

Замечание

При умножении нескольких n одинаковых операторов возможна следующая запись

$$\hat{A} \dots . \hat{A} = \hat{A}^n$$

Определение

Линейный оператор $\hat{C}$ называется обратным к оператору $\hat{A}$, если

$$\hat{A}\hat{C} = \hat{C}\hat{A} = \hat{E}$$

Утверждение 8

Если $\hat{A}$ с матрицей A_e имеет обратный оператор, то в том же самом базисе e обратный оператор имеет такую матрицу A_e^{-1}.

Доказательство:

Выберем базис e и запишем

$$A_e C_e = C_e A_e = E$$

Утверждение доказано.

Утверждение 9

Если в некотором базисе матрица оператора невырожденная, то у этого оператора есть обратный оператор.

Доказательство:

Если матрица невырожденная в одном базисе, то она невырожденная в любом другом базисе. Тогда если она всегда невырожденная, то для нее существует обратная и по теореме 2 для этой матрицы существует оператор, который в силу утверждения 8 является обратным.

Ядро и образ линейного оператора

Определение

Ядром оператора $\hat{A}$ называется множество элементов $x \in R_n$ тех и только тех, для которых

$$\hat{A}x = \theta$$

Причем ядро записывается как $ker\hat{A}$.

Определение

Образом линейного оператора $\hat{A}$ называется множество элементов $y \in R_n$, которое задается таким образом

$$y = \hat{A}x$$

Образ обозначается как $Im\hat{A} = \hat{A}(R_n)$.

Определение

Рангом оператора $\hat{A}$ называется ранг его матрицы.

$$rang\hat{A} = rangA_e$$

Лемма 2

Размерность образа линейного оператора равняется рангу оператора.

Доказательство:

Множество (образ) определяется соотношением

$$y = \hat{A}x = \hat{A}(x^k e_k) = x^k A_k \in L_a$$

Размерность линейной оболочки столбцов матрицы равняется рангу этой матрицы. Лемма доказана.

Лемма 3

Если размерность пространства равняется n, то

$$dimker\hat{A} + dimIm\hat{A} = n$$

Доказательство:

Ядро определяется как

$$\hat{A}x = \theta, \qquad A_e X_e = 0$$

Получается однородная система уравнений. Ее размерность будет равна

$$dimker\hat{A} = n - rangA_e = n - dimIm\hat{A}$$

Что и требовалось доказать.

Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть в линейном пространстве R_n действует линейный оператор $\hat{A}$ и существует некоторое подпространство M данного пространства R_n.

Определение

Подпространство M называется инвариантным подпространством относительно оператора $\hat{A}$, если

$$\forall x \in M: \ \ \hat{A}x \in M$$

Примеры таких подпространств:

1) Для нулевого оператора $\hat{\theta}$ инвариантное подпространство – любое подпространство.
2) Для тождественного оператора $\hat{E}$ рассуждения такие же.
3) Рассмотрим пространство $C^1_{[a,b]}$ и оператор дифференцирования $\hat{D}$. Далее рассмотрим линейную оболочку $\{asinx + bcosx\}$. Продифференцируем ее:
$$\hat{D}\{asinx + bcosx\} = acosx - bsinx$$
Производная будет также элементом линейной оболочки.

Лемма 4

Оператор, примененный к нулевому элементу есть нуль.

Доказательство:

Нулевой элемент – любой элемент пространства, умноженный на нуль.

$$\hat{A}\theta = \hat{A}(0x) = 0\hat{A}x = \theta$$

Лемма доказана.

Определение

Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в $R_n(K)$. Тогда $\lambda \in K$ называется собственным значением (СЗ) оператора $\hat{A}$, если $\exists x \neq 0 \in R_n$:

$$\hat{A}x = \lambda x$$

при этом x – собственный вектор (СВ) оператора $\hat{A}$, соответствующим данному собственному значению λ.

Замечание 1

Возможна запись в виде $\lambda x = \lambda \hat{E} x$. Тогда получается выражение

$$\left(\hat{A} - \lambda \hat{E}\right) x = \theta$$

Замечание 2

Ранее было доказано, что пространство операторов и матриц изоморфно. Поэтому только что введённые понятия собственных значений и векторов имеют право на существования и для матриц.

Утверждение 10

Если x, y – СВ $\hat{A}$, соответствующие λ, то $ax + by \neq \theta$ является СВ $\hat{A}$, соответствующий λ.

Доказательство:

Подействуем оператором $\hat{A}$ на эту линейную комбинацию

$$\hat{A}(ax + by) = a\hat{A}x + b\hat{A}y = a\lambda x + b\lambda y = \lambda(ax + by)$$

Строго по определению получаем, что линейная комбинация и есть СВ $\hat{A}$, соответствующий λ.

Следствие

Любому СВ $\hat{A}$ соответствует одномерное инвариантное относительно оператора подпространство.

Доказательство:

Пусть x – СВ $\hat{A}$, соответствующий СЗ λ. Рассмотрим линейную оболочку $L = \{bx\}$ Так как x – СВ, причем $x \neq 0$, то размерность этого подпространства 1. Теперь покажем инвариантность:

$$\hat{A}(bx) = b\hat{A}x = b(\lambda x) = \lambda(bx)$$

Что и требовалось доказать.

Далее рассмотрим, что является СВ для некоторых операторов:

1) Оператор $\hat{\theta}$. Любой $x \neq 0 \in R_n$ является СВ. Это будет соответствовать одному и тому же СЗ $\lambda = 0$.
2) Оператор $\hat{E}$. Любой $x \neq 0 \in R_n$ является СВ. Это будет соответствовать одному и тому же СЗ $\lambda = 1$.
3) Пространство B_2 с оператором поворота на угол α: $\hat{A}_\alpha$, $0 < \alpha < \pi$. В этом случае нет ни СЗ, ни СВ. Однако если в такой задаче взять $\alpha = \pi$, то коллинеарность будет выполнена, СЗ $\lambda = -1$.

4) В случае пространства $C^2_{[a,b]}$ возьмем функцию $sinax$. Применим к ней оператор $\widehat{D}^2\colon -a^2 sinax$. То есть $\lambda = -a^2$. Таким образом, получается бесконечно много таких СВ.

Теорема 4

Множество M_λ, содержащее θ и все СВ оператора $\hat{A} \sim \lambda$, образует инвариантное подпространство пространства R.

Доказательство:

Отметим, что $\forall x \in M_\lambda\colon \hat{A}x = \lambda x$. Если x – нулевой элемент, то мы доказали Лемму 4. Докажем, что выполнено первое требование определения подпространства.

$$x_1, x_2 \in M_\lambda \; \hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$$

Также получим выполнение с любым числом $\mu \in K$. Теперь проверим, что это подпространство инвариантно:

$$\hat{A}(\hat{A}x) = \hat{A}(\lambda x) = \lambda(\hat{A}x)$$

Теорема доказана.

Теорема 5

СВ оператора $\hat{A}$, соответствующие различным СЗ, линейно независимы.

Доказательство:

Пусть мы имеем СВ $x_1, \dots x_s$, а их СЗ $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ не равны друг другу. Возьмем $k = 1\colon x_1$. По определению этот СВ линейно независимый. Мы предполагаем, что у нас линейно независимы все вектора $x_1, \dots, x_k$. Добавим следующий элемент $k+1$. Рассмотрим линейную комбинацию $c^i x_i = \theta, i = \overline{1, k+1}$. Применим к равенству оператор $\hat{A}$ и получим: $c^i \lambda_i x_i = \theta$. Теперь получим выражение такого типа

$$c^i(\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i = \theta, \qquad i = \overline{1, k}$$

По предположению индукции элементы линейно независимы. Равенство возможно только тогда, когда все $c^i = 0$.

$$c^{k+1} x_{k+1} = \theta$$

Такое возможно, когда $c^{k+1} = 0$. Теорема доказана.

Следствие

В линейном пространстве размерности n не может быть $n+1$ и больше СВ, которым соответствуют не равные СЗ.

Доказательство:

Пусть нашлись $x_1, \dots, x_{n+1}$ СВ, которым соответствуют $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ СЗ. Эти СВ по теореме 5 линейно независимы. То есть они либо образуют базис, либо входят в базис, где гораздо больше, чем $n+1$ элементов. Размерность $dimR_m \geq n+1$. Однако такого быть не может, так как размерность равна n. Следствие доказано.

Определение

Пусть в R_n действует линейный оператор $\hat{A}$, который в некотором базисе e имеет матрицу A_e. Тогда

$$\det(A_e - \lambda E) = 0$$

называется характеристическим уравнением оператора $\hat{A}$.

Утверждение 11

Характеристическое уравнение не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Выберем еще один базис f и получим

$$\det\left(A_f - \lambda E\right) = 0$$

Переход от одного базиса к другому осуществляется с помощью матрицы C:

$$f = eC, \qquad A_f = C^{-1}A_eC$$

$$E = C^{-1}EC$$

$$\det(C^{-1}A_eC - \lambda C^{-1}EC) = detC^{-1}(A_e - \lambda E)C = \det(A_e - \lambda E)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 6

Для того чтобы число λ было СЗ оператора $\hat{A}$, действующим в $R_n(K)$ необходимо и достаточно, чтобы λ являлось решением характеристического уравнения и принадлежала числовому полю K.

Доказательство:

Необходимость. У оператора $\hat{A}$ λ – СЗ. Выполнено соотношение

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)x = \theta$$

Выберем в пространстве какой-нибудь базис и получим

$$(A_e - \lambda E)X_e = \theta$$

Однородная система уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен 0. Необходимость доказана.

Достаточность. Теперь мы знаем, что характеристическое уравнение имеет решение, принадлежащее полю K. Это означает, что в некотором базисе равны координаты, стоящие слева и справа. Тогда из равенства координат следует равенство самих операторов. Что и требовалось доказать.

Следствие

Если характеристическое уравнение имеет различные n решений, то существует базис, в котором матрица оператора $\hat{A}$ записывается в диагональной форме.

$$\hat{A}e_k = \lambda_k e_k, \qquad k = \overline{1,n}$$

$$A_e = \left(\lambda_k \delta_k^i\right)_n^n$$

Замечание 2

Не всякий линейный оператор имеет СЗ.

Рассмотрим пространство $R_2(\mathbb{Q})$. Пусть оператор $\hat{A}$ имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 = 7 \to \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$$

Алгоритм нахождения СВ и СЗ оператора:

1) Решаем характеристическое уравнение.
2) Отбираем те решения, которые принадлежат нужному числовому полю K.
3) Затем вместо λ подставляем найденные значения, решаем уравнения и таким образом находим координаты всех СВ.
4) Составляем по координатам СВ вид самих СВ.

Примеры:

Во всех случаях рассматриваем пространство $R_3(\mathbb{Q})$ с выбранным базисом e_1, e_2, e_3.

Случай 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем решения вида

$$\lambda = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \in \mathbb{Q}$$

Все три решения легко строят ФСР. Так, для $\lambda = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 - e_3$$

$$C(e_2 - e_3), \qquad C \in \mathbb{Q}, \qquad C \neq 0$$

Случай 2

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \in \mathbb{Q}$$

Получили кратный корень. Это приводит к тому, что останется только первое уравнение

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0$$

ФСР будет состоять из двух линейно независимых решений

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$C^1(-e_1+e_2)+C^2(-e_1+e_3),\qquad (C^1)^2+(C^2)^2\neq 0$$

Случай 3

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\lambda=\begin{cases}2\\2\in\mathbb{Q}\\2\end{cases}$$

Кратность равна 3. Размерность инвариантного подпространства равняется 1. И решение будет только одно.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Вывод

1) Если λ – простое СЗ, то инвариантное подпространство одномерно
2) Если λ – СЗ, являющееся кратным решением характеристического уравнения кратности s, то соответствующее инвариантное подпространство имеет размерность от 1 до s.

Жорданова матрица

Матрица вида:

$$\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}=\Lambda_k$$

называется Жордановой клеткой.

Матрица A имеет Жорданову форму, если она имеет такое строение

$$A=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_m\end{pmatrix}$$

Теорема о Жордановой форме

Для любого линейного оператора в $R_n(\mathbb{C})$ существует базис, в котором матрица оператора имеет Жорданову форму.

Замечание

Это теорема верна и в случае линейного пространства над полем K_0.

Определение

Элемент x_k, который удовлетворяет условию

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^k x^k \neq \theta$$
$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)^{k+1} x^k = \theta$$

называется присоединенным элементом оператора $\hat{A}$ k-го порядка, соответствующий СЗ $\hat{A}$.

Лекция 6. Линейный оператор в евклидовом и унитарном пространстве

Линейные операторы в евклидовом пространстве: сопряженный оператор

Определение

Оператор $\hat{A}^*$ называется сопряженным с оператором $\hat{A}$ в $\mathcal{E}$, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E}: (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^* y)$$

Утверждение 12

Если в ортонормированном базисе матрица оператора $\hat{A}$ есть A, то у сопряженного оператора в этом же базисе будет A^T.

Доказательство:

Пользуемся только что введённым соотношением

$$(\hat{A}x, y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = (x, \hat{A}^* y) = X^T A^* Y$$

Отсюда следует, что матрица сопряженного оператора равна A^T.

Следствие

У любого линейного оператора $\hat{A}$ есть сопряженный оператор.

Доказательство:

Любой линейный оператор в базисе ортонормированном имеет матрицу A, которую мы можем транспонировать. Тогда по теореме 2 ей соответствует линейный оператор.

Утверждение 13

СЗ сопряженного оператора совпадают с СЗ самого оператора $\hat{A}$.

Доказательство:

Для оператора СЗ есть решение уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

А для сопряженного – решение такого уравнения

$$\det(A^T - \lambda E) = 0$$

Докажем, что это одно и тоже. Перепишем последнее уравнение в виде

$$\det(A^T - \lambda E^T) = \det(A - \lambda E)^T = \det(A - \lambda E) = 0$$

Что и требовалось доказать.

Утверждение 13*

СВ, соответствующие одинаковым СЗ этих операторов, будут разными.

Доказательство:

Запишем уравнения системы для координат элементов оператора

$$(A - \lambda E)X = 0$$

И для сопряженного имеем систему

$$(A^T - \lambda E)X = 0$$

А так как $A^T \neq A$, то собственные векторы будут различные. Утверждение доказано.

Свойства:

1) $\forall \hat{A} : \left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$
2) $\forall \hat{A}, \hat{B} : \left(\hat{A} + \hat{B}\right)^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$
3) $\forall \hat{A}\ \forall b \in K_0 : \left(b\hat{A}\right)^* = b\hat{A}^*$
4) $\forall \hat{A}, \hat{B} : \left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$
5) $\forall \hat{A}$, если $\exists \hat{A}^{-1} : \left(\hat{A}^*\right)^{-1} = \left(\hat{A}^{-1}\right)^*$

Задача

Имеем выражение $\hat{A}x = \lambda x + b$.

По альтернативе Фредгольма получим: или λ не является СЗ, и тогда это уравнение имеет единственное решению для любых b, или λ является СЗ оператора $\hat{A}$, и тогда данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда b ортогонален СВ оператора $\hat{A}$, соответствующим именно этому СЗ λ.

Линейные операторы в евклидовом пространстве: симметричный оператор

Определение

Оператор $\hat{A}$, действующий в $\mathcal{E}$, называется симметричным, если он совпадает со своим сопряженными. Также можно определить его таким образом:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}y\right)$$

Утверждение 14

В ОНБ матрица симметричного оператора симметричная.

Доказательство:

Применяя формулу представления скалярного произведения в ОНБ, получим

$$\left(\hat{A}x, y\right) = (AX)^T Y = X^T A^T Y$$
$$\left(x, \hat{A}y\right) = X^T A Y$$

Получаем, что матрица $A^T = A$. Утверждение доказано.

Утверждение 15

Если в некотором ОНБ матрица оператора $\hat{A}$ симметричная, то и сам оператор симметричный.

Доказательство:

$$\left(\hat{A}x, y\right) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T A Y = \left(x, \hat{A}y\right)$$

Утверждение доказано.

Утверждение 16

Симметричный оператор, действующий в $\mathcal{E}_n$ является симметричным в каждом инвариантным относительного этого оператора подпространстве пространства $\mathcal{E}_n$.

Доказательство:

По определению инвариантного подпространства имеем

$$\mathcal{E}_n > M\ \forall x, y \in M:\ \hat{A}x, \hat{A}y \in M$$

Так как соотношение $\big(\hat{A}x, y\big) = \big(x, \hat{A}y\big)$ выполняется для всех элементов в $\mathcal{E}_n$, то оно будет выполняться и для всех элементов пространства M.

Теорема 7

Все решения характеристического уравнения симметричного оператора – это вещественные числа (все СЗ симметричного оператора – действительные числа).

Доказательство:

Пусть у $\hat{A}$ $\exists \lambda = a + ib,\ a, b \in K_0,\ b \neq 0$. Это означает, что

$$\hat{A}(y + iz) = (a + ib)(y + iz)$$
$$\hat{A}y = ay - bz$$
$$\hat{A}z = by + az$$
$$0 = b(y, y) + a(z, y) - a(y, z) + b(z, z)$$
$$0 = b\left(||y||^2 + ||z||^2\right)$$

По определению СВ ненулевой, то есть $b = 0$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 1

Симметричный оператор всегда имеет СВ.

Замечание

Теорема 7 верна в любом инвариантом относительно оператора $\hat{A}$ подпространстве евклидова пространства.

Теорема 8

Если x – СВ симметричного оператор $\hat{A}$, соответствующий СЗ λ, то множество M элементов $y \in \mathcal{E}_n$, ортогональных к x, образует инвариантное относительно оператора $\hat{A}$ подпространство размерности $n - 1$.

Доказательство:

В следствии утверждения 10 было доказано, что линейная оболочка – инвариантное одномерное подпространство пространство $\mathcal{E}_n$. Множество M элементов, ортогональных к x – ортогональное дополнение к этой линейной оболочке, которое есть подпространство самого пространства размерности $n - 1$. Осталось показать только инвариантность.

$$\forall y \in M\ \hat{A}y \in M$$
$$\big(x, \hat{A}y\big) = \big(\hat{A}x, y\big) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

Получили множество всех элементов, ортогональных x. Скалярное произведение равно 0. Теорема доказана.

Теорема 9

Для того чтобы линейный оператор $\hat{A}$, действующий в $\mathcal{E}_n$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{E}_n$ существовал ОНБ из СВ этого оператора.

Доказательство:

Необходимость. У каждого симметричного оператора есть СВ. Возьмем СВ x_1. По теореме 8 существует M_{n-1} инвариантное относительно оператора $\hat{A}$ и состоящее из элементов, которые все ортогональны к x_1. Также здесь существует СВ x_2. К этому СВ все множество самого пространство уже будет образовывать подпространство инвариантно относительно оператора M_{n-2}. В нем существует СВ x_3. Продолжая эту процедуру, получим ровно n СВ, которые взаимно ортогональны. По Лемме получаем, что ненулевые взаимно ортогональные элементы линейно независимы. Этих элементов ровно столько, какова размерность пространства, то есть это базис. Далее нужно привести его к ортонормированному виду.

$$e_k = \frac{1}{||x_k||} x_k$$

Таким образом, базис $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ из СВ симметричного оператора. Необходимость доказана.

Достаточность. Базис существует, нужно доказать, что $\hat{A}$ симметричный. Для этого построим его матрицу

$$\hat{A}e_k = \lambda_k e_k, \qquad k = \overline{1, n}$$
$$A = \left(\lambda_k \delta_k^i\right)_n^n$$

Получили диагональную матрицу, которая не изменится при транспонировании. То есть оператор симметричный. Теорема доказана.

Утверждение 17

СВ симметричного оператора, соответствующие различным СЗ ортогональны.

Доказательство:

Пусть x – СВ $\hat{A}$, соответствующий СЗ λ, а y – СВ $\hat{A}$, соответствующий СЗ μ, причем $\lambda \neq \mu$.

$$\left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}y\right)$$
$$(\lambda x, y) = (x, \mu y)$$
$$\lambda(x, y) = \mu(x, y)$$
$$(\lambda - \mu)(x, y) = 0$$

Получаем, что $(x, y) = 0$, что и требовалось доказать.

Линейные операторы в евклидовом пространстве: ортогональный оператор

Определение

Оператор $\hat{G}$, действующий в $\mathcal{E}$ называется ортогональным, если $\forall x, y \in \mathcal{E}$:

$$\left(\hat{G}x, \hat{G}y\right) = (x, y)$$

Утверждение 18

В ОНБ матрица ортогонального оператора ортогональная матрица.

Доказательство:

$$(\hat{G}x, \hat{G}y) = (GX)^T GY = X^T G^T GY$$
$$(x, y) = X^T EY$$

Утверждение доказано.

Утверждение 19

СЗ ортогонального оператора равны ± 1.

Доказательство:

Пусть x – СВ $\hat{G}$, соответствующий СЗ λ.

$$(\hat{G}x, \hat{G}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x) = (x, x)$$
$$\lambda^2 = 1$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 10

Для того чтобы оператор $\hat{G}$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы для него существовал обратный $\hat{G}^{-1}$ и выполнялось соотношение $\hat{G}^* = \hat{G}^{-1}$.

Доказательство:

Необходимость. В ОНБ матрица $\hat{G}$ ортогональная $G^T = G^{-1}$. Матрицы равны, то и сами операторы тоже равны.

Достаточность. Из равенства операторов в ОНБ следует равенство их матриц. Это фактически определение ортогональной матрицы. Если матрица ортогональная, то и оператор ортогонален. Достаточность доказана.

Замечание

Соотношение $\hat{G}^* = \hat{G}^{-1}$ можно записать в другой форме:

$$\hat{G}^* \hat{G} = \hat{G} \hat{G}^* = \hat{E}$$

Пример:

Рассмотрим пространство B_2 с $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ и матрицей

$$G = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

Для ортогональной матрицы имеем:

$$\begin{cases} q_{11}^2 + q_{21}^2 = 1 \\ q_{12}^2 + q_{22}^2 = 1 \\ q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22} = 0 \end{cases}$$
$$q_{11} = cos\phi, \qquad q_{12} = sin\phi$$
$$q_{21} = cos\alpha, \qquad q_{22} = sin\alpha$$
$$\cos(\alpha - \phi) = 0$$
$$\alpha = \left[\begin{array}{l} \phi + \dfrac{\pi}{2} \\ \phi + \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

В первом случае получаем поворот на угол ϕ

$$det\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix} = 1$$

Во втором случае имеем симметричную матрицу

$$det\begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi \\ sin\phi & -cos\phi \end{pmatrix} = -1$$

Собственные значения матрицы λ и μ. В новом базисе $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

В базисе f получаем матрицу

$$G_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Это преобразование симметрии относительно прямой, направление которой определяется базисным вектором $\overline{f_2}$.

Свойства:

1) Если $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$ – ортогональные операторы, то $\hat{G}_1\hat{G}_2$ – тоже ортогональный оператор.
2) Если $\hat{G}$ – ортогональный оператор, то $\hat{G}^{-1}$ и $\hat{G}^*$ – тоже ортогональные операторы.
3) Ортогональный оператор переводит ОНБ в ОНБ. Если некий оператор $\hat{G}$ переводит ОНБ в ОНБ, то $\hat{G}$ – ортогональный оператор.

Докажем 1 свойство:

$$\left(\hat{G}_1\hat{G}_2x, \hat{G}_1\hat{G}_2y\right) = \left(\hat{G}_2x, \hat{G}_2y\right) = (x, y)$$

Подобным образом доказывается 2 свойство.

Линейные операторы в унитарном пространстве

В унитарном пространстве рассмотрим аналоги только что приведенных операторов: сопряженный, эрмитов и унитарный операторы.

Определение

Оператор $\hat{A}^*$ в E называется сопряженным к оператору $\hat{A}$, если выполнено соотношение

$$\forall x, y \in E: \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}^*y\right)$$

Утверждение 12*

Повторяет дословно условие и доказательство утверждения 12 за исключением одного факта. Матрица $\hat{A}^* = \overline{A^T}$ носит название эрмитово сопряженной к матрице A.

$$(x, y) = X^T\overline{Y}$$

Свойства:

1) $\forall \hat{A}\ in\ E : \left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$
2) $\forall \hat{A}, \hat{B}\ in\ E : \left(\hat{A} + \hat{B}\right)^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$
3) $\forall \hat{A}\ in\ E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \left(\lambda\hat{A}\right)^* = \bar{\lambda}\hat{A}^*$

4) $\forall \hat{A}, \hat{B}\ in\ E : \left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$
5) $\forall \hat{A}\ \exists \hat{A}^{-1} : \left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}$
6) λ – СЗ $\hat{A}$, то $\bar{\lambda}$ – СЗ $\hat{A}^*$

Для доказательства свойств воспользуемся изоморфизмом пространства линейных операторов и матриц.

Так как для матриц доказательства уже были приведены, то подобные свойства и верны для операторов.

Эрмитов оператор

Определение

Оператор $\hat{A}$, действующий в унитарном пространстве называется эрмитовым, если он совпадает со своим сопряженным.

Свойства:

1) В ОНБ матрица эрмитова оператора является эрмитовой матрицей.

$$A = \overline{A^T}$$

Если в ОНБ матрица оператора удовлетворяет условие выше, то оператор эрмитов.

2) Если $\hat{A}$ – эрмитов оператор, то

$$\forall x \in E : \left(\hat{A}x, x\right) \in K_0$$

3) СЗ эрмитова оператора – вещественные числа.
4) СВ эрмитова оператора, соответствующие различным СЗ, ортогональны.
5) Эрмитов оператор, действующий в n-мерном унитарном пространстве, имеет n линейно независимых попарно ортогональных СВ.

Если в n-мерном унитарном пространстве существует ОНБ из собственных векторов оператора $\hat{A}$, все СЗ которого вещественные числа, то $\hat{A}$ – эрмитов оператор.

Пример:

Рассмотрим $E_2(\mathbb{C})$ с ОНБ $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ и матрицей

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Построим ОНБ:

$$\begin{vmatrix} i - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda = \left[\begin{matrix} 0 \\ i \end{matrix}\right.$$

Выписываем систему для нахождения СВ и получим:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Доказательства свойств:

Первое свойство доказывается по схеме утверждений 14-15.

Рассмотрим подробнее второе свойство:

$$\overline{\left(\hat{A}x, x\right)} = \overline{\left(x, \hat{A}x\right)} = \overline{\overline{\left(\hat{A}x, x\right)}} = \left(\hat{A}x, x\right)$$

Для третьего свойства имеем:

$$(\hat{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x)$$
$$(x, \hat{A}x) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$
$$\lambda = \bar{\lambda}$$

Четвертое свойство совпадает с утверждением 17.

Пятое доказывается по аналогии с теоремой 9.

Лекция 7. Квадратичные и билинейные формы. Приведение к каноническому виду

Унитарный оператор

Определение

Линейный оператор $\widehat{U}$, действующий в E, называется унитарным, если

$$\forall x, y \in E : \left(\widehat{U}x, \widehat{U}y\right) = (x, y)$$

Свойства:

1) Матрица U унитарного оператора в ОНБ является унитарной, то есть удовлетворяет условию

$$U\overline{U^T} = \overline{U^T}U = \hat{E}$$

Если в ОНБ матрица линейного оператора $\widehat{U}$ унитарная, то и оператор унитарный.

2) Если $\widehat{U}$ – унитарный оператор, то для него существует обратный оператор $\widehat{U}^{-1}$ и выполняется соотношение

$$\widehat{U}^{-1} = \widehat{U}^*$$

$$\widehat{U}\widehat{U}^* = \hat{E}, \qquad \widehat{U}^*\widehat{U} = \hat{E}$$

3) Унитарный оператор не меняет норму элемента.

$$\forall x \in E : \left|\left|\widehat{U}x\right|\right| = ||x||$$

4) Если $\widehat{U}_1$ и $\widehat{U}_2$ унитарные, то и $\widehat{U}_1\widehat{U}_2$ тоже унитарный оператор.
5) Если $\widehat{U}$ – унитарный оператор, то и $\widehat{U}^*$ и $\widehat{U}^{-1}$ тоже унитарные операторы.
6) Унитарный оператор переводит ОНБ в ОНБ.

Если линейный оператор переводит ОНБ в ОНБ, то это унитарный оператор.

7) Норма СЗ унитарного оператора равняется 1.

Доказательство свойств:

Свойство 4.

$$\left(\widehat{U}_1\widehat{U}_2x, \widehat{U}_1\widehat{U}_2y\right) = \left(\widehat{U}_2x, \widehat{U}_2y\right) = (x, y)$$

Квадратичные и билинейные формы. Основные понятия

Определение

Квадратичной формой называется функция n переменных вида

$$f(x^1, \dots, x^n) = a_{ik}x^ix^k, \qquad i, k = \overline{1, n}$$

$$a_{ik} = a_{ki}$$

Матрица $A = (a_{ik})_{n,n}$ называется матрицей квадратичной формы.

При записи квадратичной формы стоит учитывать, что

$$2a_{12}x^1x^2 = a_{12}x^1x^2 + a_{21}x^2x^1$$

Для примера возьмем следующую квадратичную форму:

$$4(x^1)^2 - 6x^1x^2 + 4x^2x^3 - 7(x^3)^2$$

Запишем матрицу для этой квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Каждой квадратичной форме соответствует единственная симметричная матрица этой формы.

В матричном виде квадратичная форма записывается как

$$X^T AX$$

Изменение квадратичной формы при линейном преобразовании переменных

Определение

Линейным преобразованием переменных $y^1, \dots, y^n \to x^1, \dots, x^n$ называется преобразование вида

$$X = CY,$$

где $C = \left(c_k^i\right)_n^n$.

При этом если C невырожденная, то преобразование называется невырожденным, а в противном случае – вырожденным.

Если преобразование невырожденное, то существует C^{-1} и можно совершить обратный переход

$$Y = C^{-1}X$$

Существует цепочка преобразований

$$Z \to Y \to X$$

$$Y = QZ$$

Также возможно совершить одно преобразование сразу от Z к X

$$X = BZ, \qquad B = CQ$$

Теорема 1

Квадратичная форма $X^T AX$ в результате невырожденного преобразования переходит в квадратичную форму $Y^T BY$, где

$$B = C^T AC$$

Доказательство:

Берем исходную квадратичную форму и применяем преобразование

$$X^T AX = (CY)^T ACY = Y^T(C^T AC)Y = Y^T BY$$

Теперь докажем, что B – симметричная матрица. Возьмем эту матрицу и найдем

$$B^T = (C^T AC)^T = C^T A^T C^{T^T} = C^T AC = B$$

Теорема доказана.

Теорема 2

При невырожденном преобразовании переменных определитель матрицы квадратичной формы не меняет своего знака.

Доказательство:

Матрица $A \to B$ в результате невырожденного преобразования, причем

$$B = C^T AC$$

Требуется доказать, что $\det(C^T AC)$ не меняет знак.

$$\det(C^T AC) = detC^T detA\, detC = (detC)^2 detA$$

Так как было применено невырожденное преобразование, то $detC \neq 0$, значит знак определителя совпадает со знаком матрицы C.

Определение

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы.

Теорема 3

При невырожденном преобразовании переменных ранг квадратичной формы не меняется.

Доказательство:

$$rangC^T AC = rangC^T A = rangA$$

Теорема доказана.

Далее применим невырожденное преобразование и получим следующую квадратичную форму:

$$b_{kk}(y^k)^2$$

Определение

Вышеприведенная запись называется каноническим видом квадратичной формы. Коэффициенты b_{kk} называются каноническими коэффициентами квадратичной формы.

Теорема 4

Число канонических коэффициентов квадратичной формы, отличных от нуля, равняется рангу квадратичной формы.

Доказательство:

Пусть ранг матрицы квадратичной формы равен r. Из теоремы 3 можно сделать вывод, что для $b_{kk}(y^k)^2$ это верно. То есть ранг равен r. Так как матрица такого вида является диагональной, то на главной диагонали ровно r чисел. Теорема доказана.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Теорема 5

Любую квадратичную форму невырожденным преобразованием можно привести к каноническому виду.

Доказательство:

Доказательство проведем методом полной математической индукции.

$$n = 1 : a_{11}(x^1)^2$$

Ситуация А:

$$\exists k\; a_{kk} \neq 0, \qquad a_{nn} \neq 0$$

Тогда выделим все слагаемые, которые содержат x^n

$$a_{nn}(x^n)^2 + 2a_{nk}x^n x^k + a_{ij}x^i x^j, \qquad i,j = \overline{1, n-1}$$

Дополним до полного квадрата слагаемыми, которые не содержат x^n

$$a_{nn}\left[\frac{1}{a_{nn}}a_{nk}x^k\right]^2 + f(x^1, \dots, x^{n-1})$$

Утверждается, что существует такая матрица $C_{n-1,n-1}$, что позволяет замену переменных

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^{n-1} \end{pmatrix} = C_{n-1,n-1}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$b_{kk}(y^k)^2, \qquad k = \overline{1, n-1}$$

Добавим к матрице C преобразование

$$y^n = \frac{1}{a_{nn}}a_{nk}x^k$$

Таким образом, мы построили новую матрицу, которая выглядит так

$$C_{n,n} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} & 0 \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$detC_{n,n} = detC_{n-1,n-1}$$

Для случая А теорема доказана.

Случай Б:

$$\forall k\ a_{kk} = 0, \qquad a_{12} \neq 0$$
$$x^1 = z^1 - z^2$$
$$x^2 = z^1 + z^2$$
$$x^k = z^k, \qquad k = \overline{3, n}$$

Получили следующее:

$$2a_{12}x^1x^2 = 2a_{12}(z^1)^2 - 2a_{12}(z^2)^2$$

То есть мы свели случай Б к случаю А, который уже был доказан выше. Теорема доказана.

Способ дополнения до полного квадрата называется методом Лагранжа.

Пример:

Рассмотрим следующую квадратичную форму

$$2x^1x^2 + 2x^2x^3$$

Матрица такой формы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Если убрать один столбец, который пропорционален другому, то ранг матрицы не изменится ($rangA = 2$).

Применим алгоритм случая Б:

$$2(z^1)^2 - 2(z^2)^2 + 2z^1z^3 + 2z^2z^3$$

И дополняем до полного квадрата методом Лагранжа

$$2\left(z^1+\frac{z^3}{2}\right)^2-2\left(z^2-\frac{z^3}{2}\right)^2=2(y^1)^2-2(y^2)^2$$

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Теорема 6

Существует преобразование $X = QY$, где Q – ортогональная матрица, приводящее квадратичную форму $X^T AX$ к каноническому виду.

Доказательство:

Рассмотрим евклидово пространство $\mathcal{E}_n$ и выберем ОНБ e. Зададим линейный оператор $\hat{A}$ такой, что $A_e = A$. Тогда по утверждению 15 оператор является симметричным. По теореме 9 существует ОНБ $f = eQ$ из СВ данного оператора. Также матрица оператора $A_f = \left(\lambda_k \delta_j^i\right)_n^n$ будет диагональной. Переход от e к f осуществляется с помощью ортогональной матрицы. Кроме того, можно записать, что

$$A_f = Q^{-1}A_eQ = Q^TAQ$$

По теореме 1 при линейном преобразовании матрица квадратичной формы станет именно такого вида. Что и требовалось доказать.

Замечание

Каноническими коэффициентами квадратичной формы являются СЗ матрицы A.

Матрица Q состоит из координат нормированных СВ.

Пример:

Запишем вид матрицы квадратичной формы

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$-\lambda^3+2\lambda=0$$

$$\lambda=\left[\begin{array}{c}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{array}\right.$$

Канонический вид квадратичной формы запишем следующим образом

$$\sqrt{2}(y^1)^2-\sqrt{2}(y^2)^2$$

При $\lambda = 0$ получим

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^1 + x^3 = 0 \end{cases} \to X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad ||X_1|| = \sqrt{2}$$

Далее поступаем аналогичным образом, ищем решения при оставшихся λ.
Довести до конца решение.

Пример:
Рассмотрим следующую квадратичную форму

$$2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3$$

Матрица такой формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение находим из

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \left[\begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

Получили в таком случае кратные корни. При построении матрицы ортогонального преобразования получаем проблему вырождения системы. При $\lambda = -1$:

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Однако такие вектора не ортогональны. В данном случае необходимо применять метод Шмидта.

$$e_1 = \frac{1}{||X_1||} X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{||g_2||} g_2, \qquad g_2 = X_2 - (X_2, e_1)e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$||g_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Билинейные формы. Связь билинейной формы с квадратичной формой

Пусть в линейном пространстве R $\forall x, y \in R$ по правилу B поставлено в соответствие число u, тогда $u = B(x, y)$ – числовая функция двух аргументов.

Определение

Числовая функция $B(x, y)$ называется билинейной формой, если $\forall x, y, z \in R$ $\forall \lambda \in K_0$ выполняются следующие условия:

1) Линейность по первому аргументу при фиксированном втором аргументе

$$B(x+z, y) = B(x, y) + B(z, y)$$
$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$$

2) Линейность по второму при фиксированном первом аргументе

$$B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z)$$
$$B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$$

Из этого определения можно получить следующее соотношение

$$x = a^i u_i, \qquad i = \overline{1, k}$$
$$y = b^j v_j, \qquad j = \overline{1, s}$$
$$B(x, y) = B\left(a^i u_i, b^j v_j\right) = a^i b^j B\left(u_i, v_j\right)$$

Доказать самостоятельно.

В линейном пространстве R возьмем некий базис e

$$x = x^i e_i, \qquad y = y^j e_j, \qquad i, j = \overline{1, n}$$
$$B\left(e_i, e_j\right) = b_{ij}$$
$$B(x, y) = b_{ij} x^i y^j, \qquad i, j = \overline{1, n}$$

Данная формула называется представлением билинейной формы в заданном базисе.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = B(\bar{x}, \bar{y})$$
$$B = \left(b_{ij}\right)_{nn}$$

Выше привели запись матрицы билинейной формы в заданном базисе.

В математическом анализе выпишем билинейную форму вида

$$B(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$$

В матричной форме можно переписать вышеизложенные соотношения следующим образом:

$$B(x, y) = X_e^T B_e Y_e$$

Теорема 7

Пусть B_e, B_f – матрицы билинейной формы $B(x, y)$ в двух базисах e, f. Переход от одного базиса к другому $f = eC$. Тогда имеет место формула

$$B_f = C^T B_e C$$

Доказательство:

Пусть в базисе e x имеет координат X_e, а y - Y_e. В f аналогично X_f, Y_f. Если переход от одного базиса к другому осуществляется с помощью невырожденной матрицы C, то имеют место формулы

$$X_e = CX_f$$
$$Y_e = CY_f$$
$$B(x,y) = X_e^T B_e Y_e = \left(CX_f\right)^T B_e C Y_f = X_f^T C^T B_e C Y_f = X_f^T B_f Y_f$$

Что и требовалось доказать.

Определение

Билинейная форма называется симметричной, если

$$\forall x, y : B(x,y) = B(y,x)$$

Теорема 8

Для того чтобы билинейная форма была симметричной, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица была симметричной.

Доказательство:

Необходимость.

$$b_{ij} = B\left(e_i, e_j\right) = B\left(e_j, e_i\right) = b_{ji}$$

Достаточность.

$$B(x,y) = b_{ij}x^i y^j = b_{ji} y^j x^i = B(y,x)$$

Теорема доказана.

Далее возьмем билинейную форму $B(x,y)$ и положим $y = x$. Тогда получаем квадратичную функцию с коэффициентами

$$b_{ij}x^i x^j \text{ и } b_{ji}x^j x^i$$

Построим для квадратичной функции симметричную матрицу

$$a_{ij} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$$

После данной процедуры получаем, что $B(x,x) = A(x,x)$.

Рассмотрим следующую билинейную форму

$$A(x+y, x+y) = A(x, x+y) + A(y, x+y) = A(x,x) + A(x,y) + A(y,x) + A(y,y)$$
$$A(x,y) = \frac{1}{2}[A(x+y, x+y) - A(x,x) - A(y,y)]$$

Определение

Базис e линейного пространства R называется канонический для билинейной формы $B(x,y)$, если выполнено условие

$$B\left(e_i, e_j\right) = 0, i, \qquad j = \overline{1,n}, i \neq j$$

Лекция 8. Критерий Сильвестра. Тензор и его простейшие свойства

Билинейные формы. Продолжение

Теорема 9

Для того чтобы билинейная форма была симметричной, необходимо и достаточно, чтобы эта форма имела канонический базис.

Доказательство:

Необходимость. В некотором базисе e билинейную форму можно записать в виде

$$X^T AY$$

Соответствующая ей квадратичная форма будет выглядеть как

$$X^T AX$$

По теореме 5 данная форма невырожденным преобразованием может быть приведена к каноническому виду

$$C^T AC, \qquad X = CZ$$

$$f = eC, \qquad C^T AC$$

Получаем, что матрица билинейной формы диагональная

$$X^T AY = a_{kk} x^k y^k, \qquad a_{ki} = 0, \qquad k \neq i$$

Достаточность. У билинейной формы есть канонический базис. В нем матрица диагональная, которая не меняется при транспонировании. Тогда по теореме 8 билинейная форма симметрична. Что и требовалось доказать.

Метод Якоби. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичная форма – частный случай билинейной формы.

$$X^T AX = A(x, x)$$

Построим новый базис f с помощью следующего преобразования:

$$f_1 = e_1$$

$$f_2 = c_{21} e_1 + e_2$$

$$\dots$$

$$f_n = c_{n1} e_1 + c_{n2} e_2 + \dots + e_n$$

У матрицы данного преобразования определитель равен 1. То есть построенные нами элементы линейно независимы и их ровно столько, какова размерность пространства. Поэтому это базис. Необходимо сделать теперь канонический базис.

В базисе e квадратичная форма имеет матрицу A. Рассмотрим угловые миноры этой матрицы

$$\det\left(a_{ij}\right)_{kk} = \Delta_k$$

В случае, если $k = 1$ и $k = n$, имеем:

$$\Delta_1 = a_{11}, \qquad \Delta_n = detA$$

Теорема 10

Пусть угловые миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ матрицы A квадратичной формы $X^T AX$ отличны от нуля, тогда существует единственное преобразование, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду.

Доказательство:

$$b_{ij} = A(f_i, f_j), \qquad a_{ij} = A(e_i, e_j)$$

Нам нужно построить канонический базис, то есть должно соблюдаться условие

$$A(f_i, f_j) = 0, \qquad i = \overline{1, j-1}, \qquad j = \overline{2, n}$$

Рассмотрим следующий случай

$$A(f_1, f_j) = A(e_i, f_j) = 0$$

$$A(f_2, f_j) = A(c_{21}e_1 + e_2, f_j) = c_{21}A(e_1, f_j) + A(e_2, f_j) = 0$$

$$A(e_2, f_j) = 0$$

Если продолжать такую цепочку, то можно получить, что

$$A(e_i, f_j) = 0$$

Распишем данное соотношение подробнее:

$$f_j = c_{j1}e_1 + c_{j2}e_2 + \dots + c_{jj-1}e_{j-1} + e_j$$

$$a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \dots + a_{i,j-1}c_{j,j-1} + a_{ij} = 0$$

Зафиксируем j, а i будем менять

$$a_{11}c_{j1} + a_{12}c_{j2} + \dots + a_{1j-1}c_{jj-1} = -a_{1j}$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$a_{j-11}c_{j1} + a_{j-12}c_{j2} + \dots + a_{j-1,j-1}c_{jj-1} = -a_{j-1j}$$

Получена система, решение которой полностью определяет нужные коэффициенты. Докажем, что система имеет единственное решение

$$detA = \Delta_{j-1} \neq 0$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение, представимое по формулам Крамера. Теорема доказана.

Теперь воспользуемся формулами Крамера и решим данную систему:

$$c_{ji} = \frac{\Delta_{j-1,j}}{\Delta_{j-1}} = (-1)^{i+j}\frac{\delta_{j,i}}{\Delta_{j-1}} = \frac{A_{ji}}{A_{jj}}$$

Далее выпишем вид канонических коэффициентов

$$\lambda_1 = b_{11} = A(f_1, f_1) = A(e_1, e_1) = \Delta_1$$

$$\lambda_2 = b_{22} = A(f_2, f_2) = A(e_2, f_2) = A(e_2, c_{21}e_1 + e_2) = a_{21}c_{21} + a_{22} =$$

$$= -a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} + a_{22} = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

$$\lambda_k = b_{kk} = A(f_k, f_k) = A(e_k, c_{k1}e_1 + \dots + c_{kk-1}e_{k-1} + e_k) = a_{k1}c_{k1} + a_{k2}c_{k2} + \dots$$

$$+ a_{kk-1}c_{kk-1} + a_{kk} = \frac{1}{A_{kk}}[a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kk-1}A_{kk-1} + a_{kk}A_{kk}]$$

В квадратной скобке находится разложение определителя по одной из строк. И окончательно получаем

$$\lambda_{kk} = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$$

Пример:

Рассмотрим квадратичную форму

$$(x^1)^2 - 3x^1x^2 + x^2x^3$$

Приведем ее к каноническому виду методом Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем ее угловые миноры.

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = -\frac{9}{4}, \qquad \Delta_3 = -\frac{1}{4}$$

И по ранее полученным формулам запишем канонические коэффициенты:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -\frac{9}{4}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{9}$$

Тогда квадратичная форма имеет вид

$$(y^1)^2 - \frac{9}{4}(y^2)^2 + \frac{1}{9}(y^3)^2$$

Закон инерции квадратичной формы

Теорема 11

Число положительных и отрицательных канонических коэффициентов не зависит от того, каким образом квадратичная форма приведена к каноническому виду.

Доказательство:

Можно найти в рекомендованной литературе.

Классификация квадратичных форм

Определение

Квадратичная форма X^TAX называется положительно (отрицательно) определенной, если $\forall x \neq 0 : X^TAX > 0\ (< 0)$. Такие формы также называются знакоопределенными квадратичными формами.

Определение

Квадратичная форма X^TAX называется квазиположительно (квазиотрицательно) определенной, если $\forall x \neq 0 : X^TAX \geq 0\ (\leq 0)$

Определение

Квадратичная форма X^TAX называется знаконеопределенной, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 12

Для того чтобы квадратичная форма $X^T AX$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы ее канонические коэффициенты были > 0 (< 0).

Доказательство:

Необходимость. Дана квадратичная форма, удовлетворяющая условию $X^T AX > 0, \forall x \neq 0$. По ранее доказанному известно, что $\exists\ X = CY$:

$$X^T AX = \sum_{k=1}^{n} a_k (y^k)^2$$

Далее зафиксируем некоторое k и потребуем, чтобы $y^k = 1,\ y^i = 0,\ i \neq k$.

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \theta \rightarrow X_0 \neq \theta$$

Подставим в сумму найденное X_0:

$$0 < X_0^T AX_0 = a_k$$

Так как можно выбрать любое k, то все канонические коэффициенты в данном случае положительны.

Достаточность. Имеем, что $\forall a_k > 0$. Невырожденным преобразованием можно привести форму к каноническому виду

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (y^k)^2$$

Так как X – любой, но ненулевой элемент, то в силу невырожденного преобразования и Y будет ненулевым. Отсюда получаем, что хотя бы одно y^k отлично от нуля и все $a_k > 0$. Квадратичная форма положительно определена.

Следствие

Если квадратичная форма положительно определенная, то существует преобразование, приводящее данную квадратичную форму к виду

$$\sum_{k=1}^{n} (z^k)^2$$

Доказательство:

Проведем замену $\sqrt{a_k} y^k = z^k$.

Теорема 13 (Критерий Сильвестра)

Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы квадратичной формы были больше нуля.

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы A чередовались, причем $\Delta_1 = a_{11} < 0$.

Доказательство:

Необходимость. Пусть найдется такое k, что $\Delta_k = 0$. Рассмотрим систему

$$a_{ij}x^i = 0, \qquad i,j = \overline{1,k}$$

Нетривиальное решение системы обозначим как

$$x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k$$

Далее подставим решение в систему и получим

$$a_{ij}x_0^i x_0^j = 0$$

Это означает, что квадратичная форма на $x_0 = \left(x_0^1, \dots, x_0^k, 0 \dots 0\right)^T$ обращается в ноль. Получили противоречие и доказали следующие: если квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то все угловые миноры ее матрицы не равны нулю. Тогда воспользуемся теоремой Якоби и получим, что знаки будут чередоваться.

Достаточность. Из условия следует, что все угловые миноры не равны нулю. Применяем теорему Якоби и получаем, что все миноры положительны, а из теоремы 12 следует, что и все коэффициенты будут положительными. В случае, если угловые миноры меняют знак, то все канонические коэффициенты будут меньше нуля. Теорема доказана.

Задача о двух квадратичных формах

Теорема 14

Пусть даны две квадратичные формы $A_1(x,x)$ и $A_2(x,x)$, причем вторая – положительно определенная квадратичная форма, тогда существует преобразование, приводящее обе квадратичные формы к каноническому виду.

Доказательство:

Шаг 1. Существует преобразование $X = CY$, которое приведет квадратичную форму к $A_2(x,x) = \sum_{k=1}^{n}(y^k)^2$. Матрица первой квадратичной формы преобразуется как

$$A_1 \to C^T A_1 C$$

Шаг 2. Применим к первой квадратичной форме ортогональное преобразование

$$Y = QZ$$

Тогда первая форма перейдет в каноническую, а матрица второй будет иметь вид

$$Q^T E Q = Q^T Q = E$$

То есть вторая останется канонической.

Теорема доказана.

Замечание

В общем случае задача приведения двух квадратичных формах к каноническому виду неразрешима.

Применение теории квадратичных форм к исследованию кривых второго порядка

Глава 11 из книги «Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями» авторов Крутицкой Н.Ч., Тихонравова А.В. и Шишкина А.А.

В самом общем виде уравнение второй степени на плоскости можно записать как

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

Первые три слагаемых – квадратичная форма. Существует ортогональное преобразование, которое переведет эти слагаемые к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$$

У данного уравнения существует три инварианта:

$$J_1 = a_{11} + a_{22}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$$

Если $J_2 > 0$, а J_1J_3 имеет определенный знак, то можно сказать, что именно описывает данное уравнение:

$$J_3 > 0 - \text{эллипс}$$

$$J_3 = 0 - \text{точка}$$

$$J_3 > 0 - \text{нет образа}$$

Если $J_2 < 0$ и при

$$J_3 \neq 0 - \text{гипербола}$$

$$J_3 = 0 - \text{пара пересекающихся прямых}$$

Если $J_2 = 0$ и при

$$J_3 \neq 0 - \text{парабола}$$

$$J_3 = 0 - \text{пара параллельных прямых, мнимых или совпадающих прямых}$$

Знания инвариантов позволяет сразу выписать коэффициенты канонического уравнения.

Тензоры в конечномерном линейном пространстве

Рассмотрим n мерное пространство и возьмем в нем два базиса e и f. Переход от одного к другому осуществляется с помощью матрицы $C : f = eC$

$$f_k = C_k^i e_i, \qquad i,k = \overline{1,n}$$

Так как $detC \neq 0$, то

$$C^{-1} = \left(\bar{C}_k^i\right)_n^n$$

$$e_k = \bar{C}_k^i f_i$$

Рассмотрим линейную форму:

$$F(x), \qquad x = x^k e_k$$

$$F(x) = F(x^k e_k) = F(e_k)x^k b_k x^k$$

В другом базисе этот же элемент можно разложить как

$$x = \tilde{x}^k f_k$$

$$F(x) = F(\tilde{x}^k f_k) = F(f_k)\tilde{x}^k = \tilde{b}_k \tilde{x}^k$$

$$\tilde{b}_k = F(f_k) = F\left(c_k^i e_i\right) = b_i c_k^i$$

Получили, что координаты преобразуются точно также, как базисные элементы.

Возьмем элемент x линейного пространства и разложим его по базису

$$x = x^k e_k = \tilde{x}^k f_k$$

$$X_e = \tilde{x}^k = \bar{c}_i^k x^i$$

В первом примере преобразование происходит ковариантно с базисными элементами и индексы у координат ставят внизу. Во втором примере изменения происходят с помощью обратной матрицы или контрвариантно с базисными элементами и индексы у координат ставят вверху.

Возьмем билинейную форму $B(x, y)$ и разложим по базису

$$B(x, y) = B\left(x^i e_i, y^k e_k\right) = b_{ik} x^i y^k$$

$$b_{ik} = B(e_i, e_k)$$

$$\tilde{b}_{ik} = B\left(f_i, f_j\right) = B\left(c_i^k e_k, c_j^s e_s\right) = b_{ij} c_i^k c_j^s$$

И, наконец, рассмотрим пример линейного оператора $\hat{A}$.

$$\left(a_k^i\right)_n^n$$

При переходе к новому базису матрица преобразуется как

$$C^{-1} A_e C = A_f$$

Определение тензора и простейшие свойства тензора

Определение

Геометрический объект $[A]_p^q$, который в базисе e описывается n^{p+q} чисел вида

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q},$$

где верхние индексы независимо друг от друга изменяются от 1 до n, называется тензором типа pq, если при переходе к новому базису по формуле

$$f = eC$$

эти координаты преобразуются как

$$\bar{a}_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = C_{i_1}^{h_1} C_{i_2}^{h_2} \dots C_{i_p}^{h_p} \dots C_{m_1}^{-j_1} C_{m_2}^{-j_2} \dots C_{m_q}^{-j_q} a_{h_1, \dots, h_p}^{m_1, \dots, m_q}$$

Число $r = p + q$ называется рангом тензора. Верхние индексы – контравариантные, а нижние – ковариантные.

Скаляр тоже можно отнести к тензорам нулевого ранга.

Примеры:

Числа $b_1, \dots, b_n$ из линейной формы – координаты ковариантного тензора ранга 1. Далее числа $x_1, \dots, x_n$ линейного пространства – координаты контравариантного тензора ранга 1. Билинейная форма – координаты дважды ковариантного тензора ранга 2.

Лекция 9. Операции над тензорами. Группы

Продолжение о свойствах тензора

Определение

Тензор, координаты которого не меняют свои значения при перестановке двух верхних или двух нижних индексов, называется симметричным по этим индексам.

Утверждение 1

Свойство тензора быть симметричным не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Рассмотрим тензор ранга 3 $[B]_2^1$. В некотором базисе e его координаты имеют вид b_{ij}^k, а свойство симметрии означает, что

$$b_{ij}^k = b_{ji}^k$$

Воспользуемся определением и перейдем к новому базису

$$\bar{b}_{ij}^k = C_i^\alpha C_j^\beta \bar{C}_\gamma^k b_{\alpha\beta}^\gamma = C_i^\alpha C_j^\beta \bar{C}_\gamma^k b_{\beta\alpha}^\gamma = C_i^\beta C_j^\alpha \bar{C}_\gamma^k b_{\alpha\beta}^\gamma = C_j^\alpha C_i^\beta \bar{C}_\gamma^k b_{\alpha\beta}^\gamma = \bar{b}_{ji}^k$$

Утверждение доказано.

Определение

Тензор, координаты которого при перестановке двух верхних или двух нижних индексов по абсолютной величине не меняются, а меняется только знак, называется кососимметричный.

Утверждение 2

Свойство быть кососимметричным тензором не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Провести самостоятельно.

Действие над тензорами

Возьмем два тензора $[A]_p^q, [B]_p^q$. В некотором базисе e они имеют координаты

$$a_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}, \qquad b_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}$$

Определение

Суммой (разностью) двух тензоров называется новый тензор $[D]_p^q$, координаты которого выглядят как

$$d_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = a_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} \pm b_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}$$

Корректность преобразования координат здесь проверяется достаточно просто.

Возьмем два тензора $[A]_p^q$ и $[B]_m^l$. В базисе e они имеют координаты

$$a_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}, \qquad b_{\beta_1,\dots,\beta_m}^{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$$

Перемножим их произвольным образом и получим

$$a_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}\, b_{\beta_1,\dots,\beta_m}^{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$$

Теперь заменим $\alpha_1 = j_{q+1}, \dots, \alpha_l = j_{q+l}, \beta_1 = i_{p+1}, \dots, \beta_m = i_{p+m}$.

Определение

Произведением двух тензоров называется новый тензор $[D]_{p+m}^{q+l}$, если в том же базисе e он будет иметь координаты

$$d_{i_1,\dots,i_{p+m}}^{j_1,\dots,j_{q+l}} = a_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} b_{i_{p+1},\dots,i_{p+m}}^{j_{q+1},\dots,j_{q+l}}$$

Преобразование координат проверить самостоятельно.

Далее умножим тензор типа $[A]_p^q$ на константу. Тогда получится тензор исходного типа pq.

Легко установить, что при умножении двух тензоров порядок множителей должен сохраняться, так как

$$[A]_p^q\,[B]_m^l \neq [B]_m^l [A]_p^q$$

Возьмем тензор $[A]_p^q$ в базисе e и выделим среди всех верхних и нижних индексов один j_α и i_β. Рассмотрим те координаты, для которых $i_\alpha = i_\beta = k$. Сложим их.

$$a_{i_1,\dots,i_{\beta-1},k,i_{\beta+1},\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_{\alpha-1},k,j_{\alpha+1},\dots,j_q}$$

Набор этих чисел есть координаты нового тензора. Данная процедура называется свертыванием тензора по указанным индексам. $[B]_{p-1}^{q-1}$ – новый тензор или свертка тензора $[A]_p^q$ по указанным двум индексам.

Пример:

Возьмем тензоры $[F]_1^0$ и $[X]_0^1$. Произведем свертку. Пусть в базисе e они имеют координаты

$$b_i \text{ и } x^j$$
$$F(x) = b_i x^i$$

Удобно записывать координаты тензоров ранга 1 и 2 в виде матриц. Если задан тензор с $p = q = 1$, то ему соответствует оператор.

Пример:

Положение индексов играет важную роль. Рассмотрим тензор $[D]_1^1$, который в базисе e имеет координаты

$$d_j^i = \delta_j^i$$

Сменим базис и получим

$$\bar{d}_j^i = c_j^\alpha \bar{c}_\beta^i \delta_\alpha^\beta = c_j^\alpha \bar{c}_\alpha^i = (c^{-1}c)_j^i = \delta_j^i$$

Данный тензор описывает тождественный оператор.

Пример:

Возьмем тензор $[D]_2^0$ и пусть $d_{ij} = \delta_{ij}$. Снова перейдем к новому базису

$$\bar{d}_{ij} = c_i^\alpha c_j^\beta \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_i^\alpha c_j^\alpha = (cc^T)_{ij}$$

В данном случае координаты тензора не меняются и описывает он билинейную форму.

Тензоры в евклидовом пространстве

Пусть в данном пространстве заданы элементы x, y и базис e. Разложим элементы по базису и получим

$$x = x^i e_i, \qquad y = y^i e_i$$
$$(x, y) = g_{ij} x^i y^j, \qquad g_{ij} = (e_i, e_j)$$

Здесь тензор $[G]_2^0$ – метрический тензор евклидова пространства.

Задача:

Рассмотрим свертку метрического тензора и тензора $[X]_0^1$.

$$x_i = g_{ij} x^j, \qquad i, j = \overline{1, n}$$

Получается, что тензору X поставлен в соответствие набор из n чисел. Таким образом, если задается контравариантный тензор, то для него получается единственным образом строго определенный контравариантный тензор.

Ковариантные соотношения

$$x_i = (e_i, e_j) x^j = (e_i, x)$$

В ОНБ $x_i = x^j$.

Если рассмотреть определитель метрического тензора, то он отличен от нуля. То есть у нее есть обратная матрица. Элементы этой матрицы обозначим как g^{ij}. Они образуют координаты $[G]_0^2$, при этом запишем

$$g^{ij} g_{im} = \delta_m^i$$
$$g^{ki} x_i = g^{ki} g_{ij} x^j = \delta_j^k x^j = x^k$$

Произошло поднятие индекса.

Физические примеры использования тензоров

Рассмотрим абсолютно твердое тело G в системе координат $Ox^1x^2x^3$ с ОНБ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Выделим некоторую точку M и найдем значение ее скорости

$$\bar{v} = \bar{V} + [\bar{\Omega}, \bar{r}]$$

Введем также координаты вектора $\bar{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}, \bar{r} = \overline{OM} = \{x^1, x^2, x^3\}$

Запишем кинетическую энергию тела

$$E = \frac{1}{2} \iiint \rho(M)\, \bar{v}^2 d\tau$$
$$\bar{v}^2 = \bar{V}^2 + 2(\bar{V}, [\bar{\Omega}, \bar{r}]) + [\bar{\Omega}, \bar{r}]^2$$
$$(\bar{V}, [\bar{\Omega}, \bar{r}]) = ([\bar{\Omega}, \bar{r}], \bar{V})$$

$$\left([\overline{\nabla},\overline{\Omega}], \iiint \rho(M)\, \Sigma d\tau\right) = 0$$

Также рассмотрим и последнее слагаемое

$$[\overline{\Omega},\bar{r}]^2 = \overline{\Omega}^2\bar{r}^2 - (\overline{\Omega},\bar{r})^2 = \left(\Omega_i\Omega_j\delta^{ij}\right)\bar{r}^2 - \left(\Omega_i x^i\right)\left(\Omega_j x^j\right) =$$
$$= \Omega_i\Omega_j\left[\delta^{ij}\bar{r}^2 - x^i x^j\right]$$

Кинетическая энергия вращения имеет вид

$$T_b = \frac{1}{2}\Omega_1\Omega_2 \iiint \rho(M)\left[\delta^{ij}\bar{r}^2 - x^i x^j\right] d\tau = \frac{1}{2}\Omega_1\Omega_2 I$$
$$I^{11} = \iiint \rho(M)\,[(x^2)^2 + (x^3)^2] d\tau$$

Данный тензор является симметричным. То есть существует такой ОНБ в этом пространстве, в котором

$$\tilde{I}^{ij} = 0, \qquad i \neq j$$

В этом случае кинетическая энергия вращательного движения имеет вид

$$T_b = \frac{1}{2}\Omega_i^2 I^i$$

Группы

Определение

Множество G элементов любой природы называется группой, если на этом множестве задана операция, с помощью которой $\forall x, y \in G : z \in G$

$$z = x \circ y$$

при условии, что выполняются три аксиомы:

1) $\forall x, y, z \in G : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
2) $\exists e \in G\ \forall x \in G : x \circ e = e \circ x = x$
3) $\forall x \in G\ \exists x^{-1} : x \circ x^{-1} = e$

Определение

Группа называется коммутативной или абелевой группой, если выполнено еще одно требование:

$$\forall x, y \in G : x \circ y = y \circ x$$

Число элементов группы – порядок группы.

Если операция, с помощью которой вводится группа, называется сложением, то принято эту группу называть аддитивной. При этом

$$x \circ y = x + y, \qquad e = \theta, \qquad x^{-1} = -x$$

Если операция, с помощью которой вводится группа, называется умножением, то принято эту группу называть мультипликативной. При этом

$$x \circ y = xy, \qquad e = 1, \qquad x^{-1} = -x$$

Теорема 1

В любой группе имеется единственный нейтральный элемент.

Теорема 2

Для каждого элемента группы существует единственный обратный элемент.

Примеры:

Пусть G – множество всех вещественных чисел, отличных от нуля. Операцию возьмем умножения. Тогда получим абелевую группу.

Пусть имеется множеств, состоящее из одного элемента $\{0\}$. Данное множество с операцией сложения является абелевой группой.

В случае множества $\{1\}$ получим группу по операции умножению.

Как известно, в линейном пространстве возможно производить операцию сложения. Тогда множество всех элементов линейного пространства есть группа по сложению.

Группы преобразований

Определение

Движение – такое преобразование плоскости или пространства, при котором расстояние между точками не меняется.

$$A \to A_1$$
$$B \to B_1$$
$$AB = A_1B_1$$

Примеры таких преобразований:

Симметрия на плоскости относительно какой-либо прямой, симметрия относительно точки и т.д.

Множество всех преобразований данного типа образует группу, так как выполняются все необходимые аксиомы.

Лекция 10. Псевдоевклидово пространство. Группа преобразований Лоренца

Подгруппы

Определение

Подгруппой группы G называется множество $P \subset G$, которое само является группой с той же самой групповой операцией, что и группа G.

Примером подгруппы является группа параллельных переносов.

$$\bar{b}\ T_b : A \to C : \overline{AC} = \bar{b}$$
$$T_b(A) = C$$
$$T_b(D) = B$$

Это в свою очередь означает, что

$$\overline{AC} = \bar{b}$$
$$\overline{DB} = \bar{b}$$

То есть расстояние между точками не изменяется, поэтому такое преобразование есть движение.

Теперь покажем, что это группа:

$$T_b, T_c : T_b \circ T_c = T_{b+c}$$

Если совершен перенос на вектор $\bar{b}$, то возможно совершить переноси и на вектор $-\bar{b}$.

Кроме того, выполняется соотношение

$$T_{b+c} = T_{c+b}$$
$$T_b \circ T_c = T_c \circ T_b$$

Получена абелева подгруппа преобразования на плоскости.

Преобразование линейного пространства

Возьмем невырожденный оператор $\hat{A}$, действующий в R_n. Он образует группу относительно операции умножения. Среди всех таких операторов есть $\hat{E}$, который является нейтральным элементом данной группы.

Существует международное обозначение группы преобразований конкретного линейного пространства размерности n:

$$GL(n)$$

В данной группе есть подгруппа ортогональных операторов.

Определение

Две группы G и G' называются изоморфными, если между элементами этих групп существует взаимно-однозначное соответствие

$$\forall x, y \in G \ \sim x', y' \in G' :$$
$$(x \circ y)' = x' \circ y'$$

Такое соответствие называется изоморфизмом.

Группа преобразований Лоренца

Рассмотрим линейное пространство R_n размерности n и симметричную билинейную форму $A(x, y)$ такую, что соответствующая ей квадратичная форма $A(x, x)$ знаконеопределенная.

С помощью такой билинейной формы нельзя определить скалярное произведение, так как нарушена аксиома №4. Введем скалярное произведение следующим образом:

$$(x, y) = A(x, y)$$

Определение

Линейное пространство R_n со скалярным произведением, записанным выше, называется псевдоевклидовым пространством.

Символьное обозначение такого пространства – $\mathcal{E}_n^{(p,q)}$.

Далее будем работать в пространстве Минковского $\mathcal{E}_4^{(1,3)}$.

Положение точки в этом пространстве описывается координатами

$$x^0, x^1, x^2, x^3$$

$$x^0 = ct$$

Основная система координат – система координат Галилея.

$$(x, y) = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$$

$$(x, x) = {x^0}^2 - {x^1}^2 - {x^2}^2 - {x^3}^2 = S^2(x)$$

Матрица билинейной формы имеет структуру

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Числа, которые образуют данную матрицу, являются координатами дважды ковариантного тензора.

$$S^2(x) = X^TJX$$

Далее совершим преобразование внутри данной системы координат:

$$X = B\tilde{X}$$

$$S^2(x) = \left(B\tilde{X}\right)^T JB\tilde{X} = \tilde{X}^TB^TJB\tilde{X}$$

$$S^2(x) = \tilde{X}^TJ\tilde{X}$$

Для такого равенства необходимо соблюдение условия

$$B^TJB = J$$

Определение

Преобразование координат в системе Галилея с помощью матрицы B, удовлетворяющее соотношению $B^TJB = J$, называется преобразованием Лоренца.

Множество всех таких преобразований образует группу. Покажем, что композиция двух преобразований Лоренца снова будет преобразованием Лоренца.

$$B_1 : B_1^TJB_1 = J$$

$$B_2 : B_2^TJB_2 = J$$

Докажем, что композиция есть преобразование Лоренца

$$B = B_1 B_2$$

$$B^T J B = (B_1 B_2)^T J B_1 B_2 = B_2^T B_1^T J B_1 B_2 = B_2^T J B_2 = J$$

В силу ассоциативности операции умножения матриц данное соотношение будет справедливо для преобразований Лоренца. Также выполнено условие нейтрального элемента. Теперь покажем существование обратного преобразования Лоренца

$$B^{-1} : (B^{-1})^T J B^{-1} = J$$

$$(B^T)^{-1} B^T J B B^{-1} = (B^T)^{-1} J B^{-1} \to J = (B^{-1})^T J B^{-1}$$

Полностью доказано, что преобразование Лоренца образует группу.

Подгруппа группы преобразования Лоренца

Две переменные x^2, x^3 не изменяются в подгруппе. Преобразование Лоренца в таком случае записывается в виде

$$\tilde{x}^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \tilde{x}^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

При этом $-1 < \beta < 1$ и

$$x^0 = ct, \qquad \tilde{x}^0 = c\tilde{t}, \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\tilde{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2} x^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \tilde{x}^1 = \frac{x^1 - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Получены формулы Лоренца преобразования координат.

При условии, что $v \ll c$ получим, что

$$\tilde{t} = t, \qquad \tilde{x}^1 = x^1 - vt$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ