МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. СЕМИНАРЫ

СМИРНОВ
СЕРГЕЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Оглавление

Семинар 1. Линейное пространство, линейная зависимость.

На протяжении всего курса в качестве задачника используется Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре под ред. Ю.М. Смирнова.

Начнем с понятия линейного пространства.

Задача 994. В каком из следующих случаев указанные операции на множестве X определены и задают на нем структуру линейного пространства над полем K:

1) $K=\mathbb{R}$, X – полуплоскость $y \geq 0$, операции сложения и умножения на числа стандартные (т.е. покоординатные).
   Ответ: нет, так как при умножении на отрицательное число мы выходим за пределы этого множества.
2) $K=\mathbb{R}$, X – множество векторов на плоскости, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной прямой; операции стандартные.
   Ответ: да, если прямая проходит через начало координат, нет в обратном случае.
3) $K=\mathbb{R}$, X – множество векторов на плоскости, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной прямой; операции сложения «$\hat{+}$» и умножения на числа «$\hat{\cdot}$» заданы формулами
$$u \hat{+} v = u + v - \tilde{x}$$
$$\lambda \hat{\cdot} u = \lambda u + (1-\lambda)\tilde{x}$$
   Решение.
   Пусть $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$, $\tilde{x}=(x_0,y_0)$ и уравнение прямой $Ax+By+C=0$.
   Так концы векторов лежат на прямой, то $Au_1+Bu_2+C=0$ и $Av_1+Bv_2+C=0$. Выясним, лежит ли на этой прямой конец вектора, являющегося их суммой:
$$u+v=w=(w_1,w_2)=(u_1+v_1-\tilde{x},u_2+v_2-\tilde{x})$$
   Так как $\tilde{x}=(x_0,y_0)$ лежит на прямой $Ax+By+C=0$, то
$$Ax_0+By_0+C=0$$
   Получаем систему
$$\begin{cases} Ax_0+By_0+C=0 \\ Au_1+Bu_2+C=0 \\ Av_1+Bv_2+C=0 \end{cases}$$
   Складывая первое и второе уравнения системы и вычитая третье, получаем
$$A(u_1+v_1-x_0)+B(u_2+v_2-y_0)+C=0$$
   То есть, конец вектора w действительно лежит на прямой $Ax+By+C=0$.
   Проверим умножение на λ:
   Должно быть:
$$\lambda \hat{\cdot} u = \lambda u + (1-\lambda)\tilde{x} = (\lambda u_1 + x_0 - \lambda x_0, \lambda u_2 + y_0 - \lambda y_0)$$
   Домножим первое уравнение системы на $(1-\lambda)$ и сложим со вторым уравнением системы, домноженным на λ:
$$(1-\lambda)(Ax_0+By_0+C)+\lambda(Au_1+Bu_2+C)=$$

$$A(\lambda u_1 + x_0 - \lambda x_0) + B(\lambda u_2 + y_0 - \lambda y_0) + C = 0$$

Действительно, конец вектора $\lambda \hat{\cdot} u$ лежит на прямой $Ax + By + C = 0$.

Таким образом, мы доказали, что операция корректна на этом множестве.

Теперь проверим, выполняются ли аксиомы линейного пространства:

Коммутативность и ассоциативность сложения очевидна, $\tilde{x}$ будет нулевым элементом. Проверим дистрибутивность:

- $\lambda \hat{\cdot} (u \hat{+} v) = \lambda \hat{\cdot} (u + v - \tilde{x}) = \lambda(u + v - \tilde{x}) + (1 - \lambda)\tilde{x} = \lambda u + \lambda v + (1 - 2\lambda)\tilde{x}$
  $\lambda \hat{\cdot} u \hat{+} \lambda \hat{\cdot} v = \lambda u + (1 - \lambda)\tilde{x} + \lambda v + (1 - \lambda)\tilde{x} = \lambda u + \lambda v + (1 - 2\lambda)\tilde{x}$
  Таким образом, $\lambda \hat{\cdot} (u \hat{+} v) = \lambda \hat{\cdot} u \hat{+} \lambda \hat{\cdot} v$.
- $(\lambda + \mu) \hat{\cdot} v = (\lambda + \mu)v + (1 - \lambda - \mu)\tilde{x}$
  $\lambda \hat{\cdot} v \hat{+} \mu \hat{\cdot} v = \lambda v + (1 - \lambda)\tilde{x} + \mu v + (1 - \mu)\tilde{x} - \tilde{x} = (\lambda + \mu)v + (1 - \lambda - \mu)\tilde{x}$
  Таким образом, $(\lambda + \mu) \hat{\cdot} v = \lambda \hat{\cdot} v \hat{+} \mu \hat{\cdot} v$, и дистрибутивность доказана.

Ответ: да.

4) $K = \mathbb{R}$, X – множество всех векторов плоскости, лежащих в первом и третьем координатных углах $(xy \geq 0)$; операции стандартные.
   Ответ: нет, так как сумма векторов, один из которых лежит в первом, а другой – в третьем координатном углу, может лежать во втором и четвертом координатном углу.
5) $K = \mathbb{R}$, X – все векторы пространства, кроме векторов, параллельных некоторой прямой; операции стандартные.
   Решение.
   Пусть $\bar{a}$ – направляющий вектор прямой, $\bar{b}$ – произвольный вектор. Тогда сумма векторов $\overline{a + b}$ + $\overline{a - b} = 2\bar{a}$ принадлежит прямой (которой не должна принадлежать).
   Ответ: нет.
6) $K = \mathbb{R}, X = \mathbb{Q}$; операции стандартные.
   Ответ: нет, так как умножение на иррациональное число выводит нас за пределы этого множества.

10) $K = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^2$, операции заданы следующим образом:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Ответ: нет, так как $1 \cdot (x, y) = (x, 0)$, то есть, 1 не является нейтральным элементом по умножению.

11) K – любое, X - множество многочленов над K степени ровно n; операции стандартные.

Ответ: нет, так как 0 не принадлежит этому множеству.

13) $K = \mathbb{R}$, X - множество монотонных функций на отрезке; операции стандартные.

Решение.

Рассмотрим, например, монотонные функции на отрезке $[-1,1]$:

$$f_1 = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in [-1,0] \end{cases} \text{ и } f_2 = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ x^2, & x \in [-1,0] \end{cases}$$

Их сумма, равная x^2, не является монотонной функцией на $[-1,1]$.

Ответ: нет.

14) $K = \mathbb{R}$, X - множество всех бесконечных арифметических прогрессий со стандартными операциями.

Ответ: да, все аксиомы линейного пространства выполняются.

15) $K = \mathbb{R}$, X - множество всех бесконечных геометрических прогрессий со стандартными операциями.

Ответ: нет, например, сумма геометрической прогрессии со знаменателем не равным 1 и геометрической прогрессии со знаменателем равным 1 (постоянной) не является геометрической прогрессией.

Определение. Система векторов называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и линейно независимой в противном случае.

Задача 997. Пусть система векторов $a_1, \cdots, a_k$ линейно независима, а система векторов $a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}$ линейно зависима.

Доказать: a_{k+1} линейно выражается через $a_1, \cdots, a_k$, причем единственным образом.

Решение.

Существование:

Так как $a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}) \neq (0, \cdots, 0)$

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} = 0$$

Причем $\lambda_{k+1} \neq 0$ (иначе $a_1, \cdots, a_k$ линейно зависимы). Тогда

$$a_{k+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} a_1 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} a_k = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k$$

Единственность:

Допустим, a_{k+1} выражается через $a_1, \cdots, a_k$ еще одним способом:

$$a_{k+1} = \nu_1 a_1 + \cdots + \nu_k a_k$$

Тогда, вычитая второе выражение из первого, получаем:

$$0 = (\mu_1 - \nu_1)a_1 + \cdots + (\mu_k - \nu_k)a_k$$

Тогда, так как $a_1, \cdots, a_k$ линейно независимы, то $\mu_i = \nu_i \quad \forall i$, то есть, a_{k+1} выражается через $a_1, \cdots, a_k$ единственным образом.

Задача 999. Пусть a, b, c – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно зависимы следующие системы векторов:

1) $a, a + b, a + b + c$
2) $a + b, b + c, c + a$
3) $a - b, b - c, c - a$

Решение.

1) Определим, существует ли нетривиальная линейная комбинация данных векторов:
$$\lambda_1(a + b + c) + \lambda_2(a + b) + \lambda_3 a = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)a + (\lambda_1 + \lambda_2)b + \lambda_1 c = 0$$
Должно выполняться
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$
Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то есть, система линейно независимая.
2) Определим, существует ли нетривиальная линейная комбинация данных векторов:
$$\lambda_1(a + b) + \lambda_2(b + c) + \lambda_3(c + a) = (\lambda_1 + \lambda_3)a + (\lambda_1 + \lambda_2)b + (\lambda_2 + \lambda_2)c = 0$$
Должно выполняться
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то есть, система линейно независимая.
3) При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ выполняется
$$\lambda_1(a - b) + \lambda_2(b - c) + \lambda_3(c - a) = 0$$
То есть, система линейно зависимая.

Ответ: 1) независимая, 2) независимая, 3) зависимая.

Рассмотрим более общий случай. Пусть a, b, c линейно независимы. Тогда система векторов p, q, r

$$\begin{cases} p = p_1 a + p_2 b + p_3 c \\ q = q_1 a + q_2 b + q_3 c \\ r = r_1 a + r_2 b + r_3 c \end{cases}$$

линейно независима тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Задача 1006. Доказать, что в пространстве многочленов всякая конечная система, состоящая из многочленов различных степеней и не содержащая нуля, линейно независима.

Решение.

В пространстве многочленов выберем систему $P_1, \dots, P_n$.

Допустим, существует нетривиальная линейная комбинация данных многочленов, равная нулю, тогда коэффициент при старшей степени x^k равен нулю, значит, и коэффициент при многочлене P_k, содержащем старшую степень x^k равен нулю.

Получаем нетривиальную линейную комбинацию многочленов меньших степеней, и применяем к ним то же самое рассуждение. И так далее, в итоге получаем, что все коэффициенты в линейной комбинации данных многочленов должны быть равны 0, то есть, они линейно независимы.

Задача 1005 п. 1,2,6,7. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций $(n > 0)$:

1) $1, \cos x, \dots, \cos nx$;
2) $1, \sin x, \dots, \sin nx$;
6) $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \dots, \sin^n x, \cos^n x$;
7) $1, \ln x, \ln 2x, \dots, \ln nx$.

Решение.

Пункты 1) и 2):

Верны следующие равенства (их можно доказать, например, по индукции):

$$\cos nx = P_n(\cos x)$$

Где P_n – многочлен, $\deg P_n = n$ (многочлен Чебышева)

$$\sin nx = \sin x\, Q_{n-1}(\cos x)$$

Где Q_{n-1} – многочлен, $\deg Q_{n-1} = n - 1$

Тогда из задачи 1006 вытекает, что системы из пунктов 1) и 2) линейно независимы.

Пункт 6):

Система линейно зависима, так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

Пункт 7):

Система линейно зависима, так как $\ln 2x = 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln x$.

Ответ: 1) независима, 2) независима, 6) зависима, 7) зависима.

Семинар 2. Ранг, базис, размерность, координаты и матрица перехода.

Задача 1005 п.3. Исследовать на линейную зависимость систему функций:

$$1, a_1 \cos x + b_1 \sin x, \dots, a_n \cos x + b_n \sin x$$

Решение.

На прошлом семинаре обсуждалось, что синусы и косинусы кратных углов можно представить в виде многочленов от $\cos x$:

$$\sin mx = \sin x\, Q(\cos x)$$

$$\cos mx = P(\cos x)$$

Тогда, если исходная система векторов линейно зависима, существует нетривиальная линейная комбинация:

$$\lambda_0 + \lambda_1(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + \lambda_n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \mu_0 + \mu_1(P(\cos x) + \sin x) + \dots + \mu_n\big(P_n(\cos x) + \sin x\, Q_n(\cos x)\big) = 0$$

Перепишем последнее равенство в виде:

$$\mu_0 + \mu_1 P(\cos x) + \dots + \mu_n P_n(\cos x) = -\sin x\,(\mu_1 Q_1(\cos x) + \dots + \mu_n Q_n(\cos x))$$

Слева стоит четная функция, а справа – нечетная, это возможно только тогда, когда обе они тождественно равны нулю.

Таким образом, исходная система векторов линейно независима.

Ответ: независима.

Задача 1005 п.8. Исследовать на линейную зависимость систему функций:

$$2^{\alpha_1 x}, 2^{\alpha_2 x}, \dots, 2^{\alpha_n x}$$

где все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ различны.

Решение.

Допустим, существует нетривиальная линейная комбинация этих функций. Тогда среди ненулевых выберем наибольшее α_i – функция $2^{\alpha_i x}$ растет на бесконечности быстрее всех – получаем противоречие.

Ответ: независима.

Задача 1004. Доказать линейную независимость всех геометрических прогрессий, начинающихся с единицы, в векторном пространстве бесконечных последовательностей.

Решение.

Если прогрессии линейно зависимы, значит, существует их нетривиальная линейная комбинация, значит, верно равенство (прогрессиям "обрубили хвост"):

$$\lambda_1(1, q_1, q_1^2, \dots, q_1^{n-1}) + \dots + \lambda_n(1, q_n, q_n^2, \dots, q_n^{n-1}) = 0$$

Отсюда получаем систему на $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_n q_n = 0 \\ \qquad \dots \\ \lambda_1 {q_1}^{n-1} + \dots + \lambda_n {q_n}^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы – определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ q_1 & \dots & q_n \\ \dots & \dots & \dots \\ {q_1}^{n-1} & \dots & {q_n}^{n-1} \end{vmatrix} = V(q_1, \dots, q_n) \neq 0$$

Таким образом, у системы есть только нулевое решение, и исходная система геометрических прогрессий линейно независима.

<u>Задача 1012 п.1</u>. Найти ранг системы векторов:

$$(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1), (-1, 0, 0, 1)$$

Решение.

Составляем из векторов матрицу и приводим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен 3.

Ответ: $rk = 3$.

<u>Задача 1013 п.1</u>. Найти какую-либо базу системы векторов:

$$(-1, 4, -3, -2), (3, -7, 5, 3), (3, -2, 1, 0), (-4, 1, 0, 1)$$

Решение.

База системы векторов – это минимальный набор векторов, через который выражаются остальные. Для решения этой задачи запишем векторы в матрицу по столбцам и приведем ее к ступенчатому виду. При этом при элементарных преобразованиях строк матрицы соотношения между столбцами останутся неизменными.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, первый и второй вектор системы можно выбрать в качестве базы.

Ответ: $(-1, 4, -3, -2), (3, -7, 5, 3)$.

Задача 1016 п.2. Проверить, что данная система векторов образует базис пространства $\mathbb{R}^4$ и найти координаты вектора x в этом базисе:

$e_1 = (1, 2, -1, 2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$, $x = (7, 14, -1, 2)$.

Решение.

Запишем векторы в матрицу по столбцам и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & | & 14 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & | & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & | & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица невырождена, значит, e_1, e_2, e_3, e_4 действительно образуют базис. Из ступенчатого вида матрицы легко находятся координаты вектора x в этом базисе:

$$x = (0, 2, 1, 2)$$

То есть, $x = 0e_1 + 2e_2 + e_3 + 2e_4$.

Ответ: $x = (0, 2, 1, 2)$.

Задача 1021 п.4. Найти координаты многочлена $f = t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в базисе

$1,\ t-1,\ (t-1)^2,\ (t-1)^3,\ (t-1)^4,\ (t-1)^5$.

Решение.

Разложим f в ряд Тейлора в окрестности $t = 1$:

$f = t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ $\qquad f(1) = 0$

$f' = 5t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t - 1$ $\qquad f'(1) = 1$

$f'' = 20t^3 - 12t^2 + 6t - 2$ $\qquad f''(1) = 12$

$f''' = 60t^2 - 24t + 6$ $\qquad f'''(1) = 42$

$f^{(4)} = 120t - 24$ $\qquad f^{(4)}(1) = 96$

$f^{(5)} = 120$ $\qquad f^{(5)}(1) = 120$

$$f = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(t-1) + \frac{f''(1)}{2!}(t-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(t-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(t-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(t-1)^5$$

$$f = (t-1) + 6(t-1)^2 + 7(t-1)^3 + 4(t-1)^4 + (t-1)^5$$

Ответ: $f = (0, 1, 6, 7, 4, 1)$.

Задача 1023. Найти размерность и базис пространства матриц порядка n:

1) Матрицы с нулевой последней строкой.
Данное множество является линейным пространством размерности $n(n-1)$, базис состоит из матричных единиц $E_{ij}, i \neq n$.
2) Матрицы с нулевой диагональю.
Данное множество является линейным пространством размерности $n^2 - n$, базис состоит из матричных единиц $E_{ij}, i \neq j$.
3) Диагональные матрицы.
Данное множество является линейным пространством размерности n, базис состоит из матричных единиц E_{ii}.
4) Верхнетреугольные матрицы.
Данное множество является линейным пространством размерности $\frac{n(n+1)}{2}$, базис состоит из матричных единиц $E_{ij}, j \geq i$.
5) Симметричные матрицы.
Данное множество является линейным пространством размерности $\frac{n(n+1)}{2}$ (так как значения элементов матрицы над главной диагональю однозначно задают значения элементов под главной диагональю), базис: $E_{ij} + E_{ji}, j \neq i$, E_{ii}.
6) Кососимметричные матрицы.
Данное множество является линейным пространством размерности $\frac{n(n-1)}{2}$ (так как значения элементов матрицы над главной диагональю однозначно задают значения элементов под главной диагональю, на главной диагонали стоят нули), базис: $E_{ij} - E_{ji}, j \neq i$.

Матрица перехода от одного базиса к другому

Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e_1', \dots, e_n'$ - два базиса в линейном пространстве V. Рассмотрим разложение произвольного вектора x в первом и втором базисе:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$x = x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n'$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Где C – матрица перехода от $e_1, \dots, e_n$ к $e_1', \dots, e_n'$ (по столбцам матрицы C стоят координаты векторов “нового” базиса $e_1', \dots, e_n'$ в “старом” базисе $e_1, \dots, e_n$).

Задача 1027. Найти матрицу перехода от e_1', e_2', e_3' к e_1'', e_2'', e_3'', где

$e_1' = (2, 3, -2)$, $e_2' = (5, 0, -1)$, $e_3' = (2, 1, -1)$

$e_1'' = (1, 1, -1)$, $e_2'' = (1, -1, 0)$, $e_3'' = (1, 1, 1)$

Решение.

Рассмотрим стандартный базис $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

С одной стороны,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = C_1^{-1} C_2 \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$

Найдем C_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & -4 & -7 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -8 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -8 & -15 \end{array}\right)$$

Получаем

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & -15 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$C_1^{-1} C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ -1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -26 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ -1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -26 \end{pmatrix}$.

Другой способ решения задачи 1027:

$$(C_1|C_2)\sim(E|C_1^{-1}C_2)$$

- приписать к матрице C_1 матрицу C_2 и элементарными преобразованиями привести C_1 к единичной матрице, попутно проделывая те же самые элементарные преобразования с матрицей C_2. Тогда в итоге справа получится матрица $C_1^{-1}C_2$.

Семинар 3. Линейные подпространства и операции над ними.

Задача 1024. Найти размерность и базис пространств однородных многочленов от четырех переменных степеней 1, 2, 3 и 4.

Решение.

1) $P = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4$

$dim\, V = 4$, в качестве базиса выбираем многочлены x_i.

2) $P = \sum_{1 \le i \le j \le 4} \alpha_{ij} x_i x_j$

$dim\, V = 10$ (будет 4 квадрата x_i^2 и 6 пар $x_i x_j$) – любой однородный многочлен выражается в виде их линейной комбинации, лишних, очевидно, нет.

3) Рассуждаем как в случае 2): $dim\, V = \frac{6!}{3!3!} = 20$ (выборка с повторениями), базис строится аналогично случаю 2)

4) $dim\, V = 35$ – считаем по формуле выборки с повторениями, или перебором, базис строится аналогично случаю 2).

Задача 1029. Найти матрицу перехода от базиса $1, t, \dots, t^n$ пространства $K_n[t]$ многочленов степени не выше n к базису $1, (t+a), \dots, (t+a)^n$.

Решение.

Чтобы найти матрицу перехода, нужно по столбцам записать разложение векторов нового базиса по старому базису:

$t + a$ раскладываем по степеням t, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^k & \dots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & \dots & C_k^1 a^{k-1} & \dots & C_n^1 a^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Подпространство линейного пространства

Для того, чтобы проверить, является ли линейным пространством некоторое подмножество линейного пространства (относительно тех же операций), нужно проверить, что:

- Подмножество замкнуто относительно операции сложения
- Подмножество замкнуто относительно умножения на скаляр

Остальные аксиомы линейного пространства будут выполнены автоматически (так как подмножество уже лежит в “большом” линейном пространстве).

Задача 1033. Является ли линейным подпространством в пространстве Mat_n матриц порядка n подмножество:

1) Матрицы с нулевой последней строкой
   Ответ: да (очевидно).
2) Матрицы с нулевой диагональю
   Ответ: да (очевидно).
3) Диагональные матрицы
   Ответ: да (очевидно).
4) Верхнетреугольные матрицы
   Ответ: да (очевидно).
5) Симметричные матрицы
   Ответ: да (очевидно).
6) Кососимметричные матрицы
   Ответ: да (очевидно).
7) Вырожденные матрицы
   Ответ: нет, так как сумма вырожденных матриц может быть матрицей невырожденной.
8) Невырожденные матрицы
   Ответ: нет, так как сумма невырожденных матриц может быть матрицей вырожденной.

Задача 1034. Найти какой-либо базис и размерность подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$, которое задается условиям $x_1+\ldots+x_n = 0$.

Решение.

Подпространство L состоит из всех векторов линейного пространства, сумма координат которых равна 0. Очевидно, это линейное подпространство (сумма таких векторов и умножение их на число не выведут нас за пределы множества векторов, у которых сумма координат равна 0).

В качестве базиса можно взять, например, векторы:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно также сказать, что уравнение $x_1+\ldots+x_n = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ задает гиперплоскость размерности $n-1$, проходящую через начало координат.

Если гиперплоскость не проходит через начало координат, то она уже не является линейным подпространством (хотя бы потому, что не содержит $\overline{0}$)

Полезно по данному подпространству уметь находить систему уравнений, которая его задает.

Задача 1049 п.4. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов:

$$(1,1,1,1),(1,2,1,3)$$

Решение.

Составим матрицу из этих векторов, записанных по строкам, и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&2\end{pmatrix}$$

Запишем фундаментальную систему решений (x_1 и x_2 – главные переменные, x_3 и x_4 – свободные переменные).

ФСР: $(-1,0,1,0),(1,-2,0,1)$

Отсюда получаем систему уравнений, задающую линейную оболочку исходной системы векторов:

$$\begin{cases}-x_1+x_3=0\\x_1-2x_2+x_4=0\end{cases}$$

(коэффициенты уравнений системы – координаты соответствующих векторов из ФСР).

Почему это так?

Дело в том, что если вектор является решением системы уравнений, то его скалярное произведение с вектором, составленным из коэффициентов каждого уравнения системы, равно 0.

Таким образом, ФСР – базис пространства, в котором все векторы будут ортогональны векторам, составленным из коэффициентов исходной системы.

Это не единственный способ решения данной задачи.

Можно записать исходные векторы по столбцам и приписать столбец с $x_1,\dots,x_n$. После приведения полученной матрицы к ступенчатому виду получим матрицу вида:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\1&2&x_2\\1&1&x_3\\1&3&x_4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&2&x_4-x_1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2x_1-x_2\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&0&x_1-2x_2+x_4\end{array}\right)$$

Ранг полученной матрицы должен быть равен 2 (ранг расширенной матрицы со столбцом $x_1,\dots,x_n$ должен быть равен рангу матрицы, составленной из исходных векторов). Поэтому должно выполняться

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Сумма и пересечение подпространств

Пусть V – линейное пространство, V_1 и V_2 – его подпространства. Их пересечение $V_1 \cap V_2$ тоже будет подпространством V.

Объединение $V_1 \cup V_2$ вообще говоря, не будет являться подпространством (легко понять на примере $\mathbb{R}^3$ – в этом случае подпространствами будут только прямые и плоскости, проходящие через начало координат. Очевидно, что объединение двух прямых не обязано быть подпространством – прямой, или плоскостью).

Однако, можно исправить эту ситуацию – придумать некое множество (сумму подпространств), содержащее V_1 и V_2, и являющееся подпространством.

$$V_1 + V_2 := \{v \in V:\ v = v_1 + v_2,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$

Ясно, что $V_1 + V_2$ содержит V_1 и V_2, и в нем нет “лишних” элементов – это минимальное множество, содержащее V_1 и V_2 и являющееся подпространством.

Задача 1054 п.1. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2:

$$L_1 = \langle (4,2,1), (-3,2,0), (-1,4,0) \rangle$$

$$L_2 = \langle (-2,3,1), (5,3,13), (7,0,12) \rangle$$

Решение.

Найдем базис суммы.

Запишем все вектора по столбцам в матрицу, и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & 12 \\ 0 & -3 & -1 & -6 & -42 & -41 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -23 & -24 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & 12 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & -93 & -98 \\ 0 & 0 & -10 & 9 & 163 & 172 \end{pmatrix}$$

Ранг полученной матрицы равен 3, то есть, $dim(V_1 + V_2) = 3$, и в качестве базиса $V_1 + V_2$ можно взять любые 3 вектора из $\mathbb{R}^3$.

В качестве базиса выбираем векторы исходной системы векторов, находящихся на тех же позициях, что и линейно независимые столбцы получившейся матрицы.

Базис суммы: $(4,2,1), (-3,2,0), (-1,4,0)$.

Найдем базис пересечения.

В данной задаче это совсем просто, так как $L_1 = \mathbb{R}^3$, поэтому $L_1 \cap L_2 = L_2$ и любой базис в пространстве L_2 будет являться базисом пересечения $L_1 \cap L_2$.

Однако, из методических соображений применим общий способ: найдем систему уравнений, задающую L_1 и систему уравнений, задающую L_2. Тогда решение объединенной системы будет задавать пересечение $L_1 \cap L_2$.

В нашей задаче $L_1 = \mathbb{R}^3$, поэтому его нельзя задать системой уравнений. Найдем систему уравнений, задающую L_2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 13 \\ 7 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 0 & 21 & 31 \\ 0 & -63 & -93 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 0 & 21 & 31 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(36,\ 31, -21)$.

Получили уравнение

$$36x_1 + 31x_2 - 21x_3 = 0$$

ФСР этого уравнения будут векторы $(1, 9, 15)$ и $(0, 21, 31)$, полученные ранее. Эти векторы и будут базисом $L_1 \cap L_2$.

Ответ: базис $L_1 + L_2$: $(4, 2, 1), (-3, 2, 0), (-1, 4, 0)$, базис $L_1 \cap L_2$: $(1, 9, 15), (0, 21, 31)$.

Задача 1054 п.10. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2:

$$L_1\colon \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad L_2\colon \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Найдем базис суммы:

L_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 1, 0. 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)$.

L_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, -2, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)$.

Теперь получившиеся 6 векторов записываем по столбцам в матрицу, и выбираем из них линейно независимые:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг получившейся матрицы равен 4, в качестве базиса можно взять первые четыре вектора исходной матрицы.

Базис суммы: $(-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 1, 0. 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0)$.

Найдем базис пересечения:

Объединим уравнения, задающие L_1 и L_2, и найдем ФСР получившейся системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В качестве свободных переменных выбираем x_4 и x_5.

ФСР: $(1, 1, -2, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)$ – базис пересечения.

Ответ: базис $L_1 + L_2$: $(-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 1, 0. 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0)$,
базис $L_1 \cap L_2$: $(1, 1, -2, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)$.

Обратите внимание, что всегда должно выполняться равенство

$$dim(V_1 + V_2) = dim\, V_1 + dim\, V_2 - dim(V_1 \cap V_2)$$

Семинар 4. Линейные функции и отображения.

Прямая сумма подпространств

Определение. Говорят, что пространство W – прямая сумма подпространств V и U (обозначение $W = V \bigoplus U$), если любой элемент пространства $w \in W$ можно единственным образом представить в виде $w = v + u$, где $v \in V,\ u \in U$.

Задача: доказать, что линейное пространство квадратных матриц является прямой суммой подпространств симметричных и кососимметричных матриц.

Решение.

Пусть U – подпространство симметричных матриц, V – подпространство кососимметричных матриц. Очевидно, что $U \cap V = 0$, так как только нулевая матрица является одновременно симметричной и кососимметричной. Таким образом,

$$dim(U + V) = dim\, U + dim\, V - dim(U \cap V) = dim\, U + dim\, V$$

Осталось показать, что любую матрицу можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной. Это так, потому что для любой матрицы A верно равенство:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

Здесь легко видеть, что:

- $\frac{A+A^T}{2}$ – симметричная матрица, так как $(A + A^T)^T = A + A^T$
- $\frac{A-A^T}{2}$ – кососимметричная матрица, так как $(A - A^T)^T = A^T - A$

(конечно, строго говоря, это верно только тогда, когда характеристика поля не равна 2, но в нашем курсе мы рассматриваем поля характеристики 0).

Линейные отображения

Определение. Пусть V_1 и V_2 – линейные пространства над полем K. Тогда $\varphi: V_1 \to V_2$ – линейное отображение, если оно “уважает” структуру линейного пространства:

1) $\forall u, v \in V_1: \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2) $\forall \lambda \in K, \forall v \in V_1: \quad \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$

Обратите внимание, что, строго говоря, операции “$\cdot$” и “$+$” в V_1 и V_2 могут быть разными.

Любое линейное отображение однозначно задается своими значениями на базисных векторах: пусть $\overline{e_1}, \dots, \bar{e}_n$ – базис в V_1:

$$\forall v \in V_1: \quad v = \lambda_1\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_n\bar{e}_n$$

Тогда (по свойствам линейности)

$$\varphi(v) = \lambda_1\varphi(\bar{e}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\bar{e}_n)$$

То есть, задание $\varphi(\bar{e_i}) \in V_2, \quad i = 1, \dots, n$ однозначно задает отображение φ.

Пусть $f_1, \dots, f_m$ – базис в V_2. Линейному отображению φ можно сопоставить матрицу $A_{m\times n}$ (которая называется **матрицей линейного отображения**), по столбцам которой стоят координаты образов базисных векторов пространства V_1 в пространстве V_2.

Частный случай: $V_2 = K$ (одномерное пространство, которое можно отождествить с полем). Тогда линейное отображение $\varphi: V_1 \to K$ называется **линейным функционалом** (линейной функцией).

Задача 1055. Какие из следующих отображений пространства $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n в себя являются линейными:

Решение.

1) $P(x) \to P(1) \cdot 1$

Ответ: да, так как $(P + Q)(1) = P(1) + Q(1)$ и $P(\lambda x) = \lambda P(x)$.

2) $P(x) \to P'(x)$

Ответ: да, так как операция дифференцирования линейна.

3) $P(x) \to \int_0^1 P(t)\,dt \cdot x^2, n \geq 2$

Ответ: да, так как операция интегрирования линейна.

4) $P(x) \to P(0)P(1) \cdot x, n \geq 1$

Ответ: нет, достаточно рассмотреть, например, $x + 1$ и $x + 2$.

5) $P(x) \to \frac{d^n}{dx^n}P(x^2)$

Вначале проверим, что данное отображение действительно оставляет нас в пространстве многочленов степени не выше n:

$deg\big(P(x^2)\big) \leq 2n \Rightarrow \deg\left(\frac{d^n}{dx^n}P(x^2)\right) \leq n$ – верно.

Теперь рассмотрим случай $n = 1$:

$$\varphi\big(P(x) + Q(x)\big) = \big(P(x^2) + Q(x^2)\big)' = \big(P(x^2)\big)' + \big(Q(x^2)\big)' = \varphi\big(P(x)\big) + \varphi\big(Q(x)\big)$$

$$\varphi\big(\lambda P(x)\big) = \big(\lambda P(x^2)\big)' = \lambda\big(P(x^2)\big)' = \lambda\varphi\big(P(x)\big)$$

Как мы видим, это действительно линейное отображение, случаи $n > 1$ рассматриваются аналогично.

Ответ: да.

6) $P(x) \to x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Тогда

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0 x^n$$

Легко проверить, что в этом случае условия линейности выполняются.

Ответ: да.

7) $P(x) \to \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,dt$

Ответ: да, так как данное отображение не выводит нас из пространства многочленов степени не выше n и операция интегрирования линейна.

Далее в курсе в основном будут рассматриваться линейные отображения пространства в себя – линейные операторы.

Сейчас обсудим множество линейных функций, заданных на линейном пространстве.

Линейные функционалы
Пусть V – линейное пространство над K.

Определение. $V^* \coloneqq \{\varphi: V \to K,\quad \varphi - \text{линейно}\}$ называется двойственным (сопряженным) к V. Это – множество линейных функционалов на пространстве V.

Пусть φ, ψ: $V \to K$ – линейные функционалы. Тогда

$$(\varphi + \psi)(v) \coloneqq \varphi(v) + \psi(v)$$

$$(\lambda\varphi)(v) \coloneqq \lambda\varphi(v)$$

Нетрудно проверить, что V^* действительно является линейным пространством.

Теорема. $\dim V = \dim V^*$.

Доказательство.

Построим базис в двойственном пространстве. Пусть $\overline{e_1}, \dots, \bar{e}_n$ – базис в V.
Введем $e^i \in V^*$: $e^i(e_j) = \delta^i_j$ – символ Кронекера.

Докажем, что e^i линейно:

$$e^i(v) = e^i(v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n) = v_1 e^i(\bar{e}_1) + \dots + v_n e^i(\bar{e}_n) = v_i$$

Попросту говоря, e^i — это функция взятия i-ой координаты.

Докажем, что $e^1, \dots, e^n$ – базис в V^*.

- линейная независимость: пусть $\lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_n e^n = 0$. Но $(\lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_n e^n)(e_i) = \lambda_i = 0$. Значит, e^i - линейно независимы.
- можно выразить произвольный $\varphi \epsilon V^*$ через $e^1, \dots, e^n$: обозначим $\mu_i \coloneqq \varphi(e_i)$. Тогда для произвольного $\varphi \epsilon V^*$ и $v \in V$ выполняется: $[\varphi - (\mu_1 e^1 + \dots + \mu_n e^n)](v) = v_1 \varphi(e_1) + \dots + v_n \varphi(e_n) - (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = 0$

<u>Второе двойственное пространство</u>

Теперь, по аналогии, можно определить второе двойственное пространство $(V^*)^* = V^{**}$. Отметим, что V канонически изоморфно V^{**} (т.е. между ними можно построить изоморфизм, не зависящий от выбора базиса).

Определим отображение $\Phi: V \to V^{**}$:

$$\forall v \in V \quad \Phi(v)\colon\ \forall \varphi \in V^* \ \big(\Phi(v)\big)[\varphi] \coloneqq \varphi(v)$$

То есть, $\Phi(v)\colon\ V^* \to K$.

Для корректности определения нужно доказать, что:

- $\Phi(v)$ линейно
- Φ – изоморфизм, т.е. а) Φ – биекция; б) Φ – линейно.

Доказательство просто и предоставляется читателю.

<u>Определение</u>. Пусть $\varphi \in V^*$. Тогда **ядро $\boldsymbol{\varphi}$**:

$$Ker\ \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$$

То есть, ядро φ – это все векторы, на которых φ зануляется. Очевидно, $Ker\varphi$ является линейным подпространством в V.

Для нетривиального линейного функционала его ядро всегда будет $(n-1)$-мерным подпространством V (гиперплоскостью, проходящей через начало координат).

<u>Пример</u>: $V = \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4$.

Найти: базис в $Ker\ \varphi$.

Решение.

Найти базис в $Ker\ \varphi$ – это то же самое, что найти ФСР системы уравнений, состоящей из одного уравнения $\varphi(x) = 0$. В нашем случае получаем

$$Ker\ \varphi = < \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} >$$

Семинар 5. Аффинные пространства.

Задача 1058. Доказать, что для произвольной линейной функции f на конечномерном линейном пространстве V можно найти такой базис $e_1', \dots, e_n'$, что $f(e_1') = 1,\ f(e_2') = \cdots = f(e_n') = 0$.

Решение.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – некий базис в линейном пространстве и пусть $f(e_1) \neq 0$ (иначе переименуем вектора, всегда найдется ненулевое значение f на каком-то базисном векторе).

В качестве e_1' выберем $e_1' = \frac{e_1}{f(e_1)}$. Тогда

$$f(e_1') = \frac{f(e_1)}{f(e_1)} = 1$$

В качестве $e_2', \dots, e_n'$ можно выбрать

$$e_i' = f(e_1)e_i - f(e_i)e_1$$

Или же, в качестве $e_2', \dots, e_n'$ можно выбрать произвольный базис ядра функции f.

Задача 1064. Доказать, что k линейных функций на n – мерном линейном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер является $(n-k)$ – мерным подпространством.

Решение.

Линейная независимость k функций означает, что матрица соответствующей системы (где по строкам стоят коэффициенты соответствующих линейных функций) имеет ранг k. Но, если она имеет ранг k, это означает, что ФСР этой системы состоит из $n-k$ линейно независимых векторов.

А вектор является решением этой системы тогда и только тогда, когда он является решением каждого из уравнений системы, то есть, лежит в ядре каждой линейной функции, соответствующей уравнению системы, то есть, лежит в пересечении ядер.

Задача 1076. В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n рассмотрим линейные функции l^i, $i = 1, \dots, n$, заданные формулой $l^i(P) = P(t_i)$, где $P(t) \in \mathbb{R}_n[t]$, а $t_0, t_1, \cdots, t_n$ – различные точки числовой прямой. Доказать, что эти функции образуют базис в пространстве линейных функций на $\mathbb{R}_n[t]$. Найти двойственный базис в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$.

Решение.

Пусть t_i – точки на прямой. $l^0, \dots, l^n$:

$$l^i(P) = P(t_i)$$

Нам достаточно подобрать такие многочлены $P_0, \dots, P_n$:

$$l^i(P_j) = \delta_j^i$$

Этого будет достаточно для того, чтобы доказать, что функции образуют базис в двойственном пространстве.

Это достаточно легко сделать (по аналогии с интерполяционными многочленами Лагранжа)

Например,

$$P_0(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2) \cdot \ldots \cdot (t - t_n)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) \cdot \ldots \cdot (t_0 - t_n)}$$

Тогда $P_0(t_0) = 1,\ P_0(t_i) = 0,\ i \neq 0.$

Аналогично

$$P_j(t) = \frac{(t - t_1) \cdot \ldots \cdot (t - t_{j-1})(t - t_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (t - t_n)}{(t_j - t_1) \cdot \ldots \cdot (t_j - t_{j-1})(t_j - t_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (t_j - t_n)}$$

Эти многочлены образуют базис в пространстве многочленов, значит, линейные функции l^j образуют базис в двойственном пространстве.

<u>Аффинные пространства.</u>
В линейном пространстве нет точек, только векторы. Если мы добавим точки, то получится новый объект - аффинное пространство.

<u>Определение</u>. Пусть V – линейное пространство над полем K. Множество X называется **аффинным пространством**, связанным с V, если задано отображение

$$\hat{+}: X \times V \to X$$

удовлетворяющее свойствам

- $\forall A \in X, \forall a \in V \quad \exists!\, B: \quad A \hat{+} a = B$ (формализация откладывания от т. А вектора $\bar{a} = \overline{AB}$)
- $\forall A \in X$ и $\forall a, b \in V: \quad (A \hat{+} a) \hat{+} b = A \hat{+} (a + b)$ – формализация правила сложения векторов, условие “согласования” операций “$\hat{+}$” и “$+$” – формально, в аффинном и линейном пространстве они могут быть различными.

С каждым линейным пространством связано аффинное пространство точек.

<u>Определение</u>. Аффинное подпространство – множество точек вида $A + U$, где U – подпространство линейного пространства V.

Размерность аффинного подпространства – размерность соответствующего линейного подпространства.

Одномерные аффинные подпространства называются прямыми, в случае больших размерностей аффинные подпространства будем называть плоскостями; если размерность подпространства на 1 меньше размерности V, будем называть его гиперплоскостью.

Определение. **Аффинная оболочка системы точек** – наименьшее аффинное подпространство, содержащее эти точки.

Аффинное подпространство задается решением неоднородной линейной системы уравнений.

Задача 1088. Составить параметрические уравнение плоскости

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -3 \end{cases}$$

Решение.

Вначале найдем частное решение неоднородной системы, затем общее решение однородной.

Частное решение неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 & 11 & 6 & | & 9 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 & | & 15 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 & | & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & -9 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 & | & 24 \end{pmatrix}$$

Частное решение $(0, 0, 0, 9, -15)$.

Общее решение однородной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 – главные переменные, x_3, x_4, x_5 – свободные переменные.

ФСР: $(0, -2, 0, 0, 3), (3, -6, 0, 3, 0), (0, 1, 3, 0, 0)$.

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – трехмерная плоскость в пятимерном пространстве.

Задача 1089. Составить параметрическое уравнение двумерной плоскости, проходящей через три точки: $A_1(0, 1, 0, 1, 5), A_2(3, -1, 3, 1, 0), A_3(2, 2, 7, 6, 1)$. Найти систему уравнений, задающую эту плоскость.

Решение.

В качестве точки плоскости выбираем A_1.
Тогда $\overline{A_1A_2} = (3, -2, 3, 3, -5)$, $\overline{A_1A_3} = (2, 1, 7, 5, -4)$.

Параметрическое уравнение плоскости:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Найдем систему уравнений, задающую эту плоскость:

Вначале находим ФСР однородной системы, задаваемой $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$, а затем подставляем в найденные уравнения координаты A_1 и находим правую часть:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 15 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 – главные переменные, x_3, x_4, x_5 – свободные переменные.

ФСР: $(13, 2, 0, 0, 7), (-13, -9, 0, 7, 0), (17, 15, -7, 0, 0)$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 + 7x_5 = 37 \\ -13x_1 - 9x_2 + 7x_4 = -2 \\ 17x_1 + 15x_2 - 7x_3 = 15 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 + 7x_5 = 37 \\ -13x_1 - 9x_2 + 7x_4 = -2. \\ 17x_1 + 15x_2 - 7x_3 = 15 \end{cases}$

Задача 1090 п.2. Составить параметрические уравнения, а также найти систему линейных уравнений, которые задают аффинную оболочку объединения двух плоскостей:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = 1 - t_1 \\ x_3 = t_1 + 2t_2 \\ x_4 = t_1 \\ x_5 = t_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = 1 - t_1 - t_2 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 \\ x_5 = 1 - 2t_1 \end{cases}$$

Решение.

Запишем условие в виде:

Первая плоскость:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вторая плоскость:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь составляем матрицу (по строчкам) из направляющих векторов плоскостей и вектора, соединяющего точку одной плоскости с точкой второй плоскости (в качестве этих точек возьмем точки $(0, 1, 0, 0, 0)$ и $(0, 0, 1, 0, 1)$ – получим вектор $(0, -1, 1, 0, 1)$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получившаяся матрица невырождена, таким образом, аффинной оболочкой является все пространство. Уравнение, которое задает все пространство: $0 = 0$.

Ответ: $0 = 0$.

Взаимное расположение аффинных пространств

В трехмерном пространстве две прямые либо параллельны, либо совпадают, либо скрещиваются. Какое может быть взаимное расположение аффинных подпространств в пространствах высшей размерности?

Они могут совпадать как множества, пересекаться (как множества). Как быть, если у двух плоскостей нет общих точек?

Смотрим на ассоциированные линейные пространства. Если они совпадают, тогда говорят, что соответствующие аффинные пространства параллельны. Если они не пересекаются, тогда говорят, что соответствующие аффинные пространства скрещиваются по точке. Если они пересекаются по прямой, тогда говорят, что они скрещиваются по прямой и т.д.

Семинар 6. Линейные операторы.

Задача 1074. В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n рассмотрим линейные функции l^i, $i = 0, 1, \dots, n$, заданные формулой

$$l^i(P) = \int\limits_0^{i+1} P(t)\,dt$$

Доказать, что эти функции линейно независимы.

Решение.

Предположим обратное – существует нетривиальная линейная комбинация:

$$\alpha_0 l^0 + \dots + \alpha_n l^n = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 \int\limits_0^1 P(t)\,dt + \dots + \alpha_n \int\limits_0^{n+1} P(t)\,dt = 0$$

Перепишем полученное равенство в виде

$$\int\limits_0^1 (\alpha_0 + \dots + \alpha_n) P(t)\,dt + \int\limits_1^2 (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) P(t)\,dt + \dots + \int\limits_n^{n+1} \alpha_n P(t)\,dt = 0$$

Данное равенство должно выполняться для любого многочлена $P(t)$. Рассмотрим

$$P_0(t) = \big(t(t-1)\cdot \ldots \cdot (t-n)\big)'$$

Тогда при $k < n$ выполнено:

$$\int\limits_k^{k+1} P_0(t)\,dt = 0$$

В то же время

$$\int\limits_n^{n+1} P_0(t)\,dt \neq 0$$

Тогда, чтобы выполнялось равенство $\alpha_0 l^0 + \dots + \alpha_n l^n = 0$, должно выполняться $\alpha_n = 0$.

Аналогично рассматриваем многочлен

$$P_1(t) = \big(t(t-1)\cdot \ldots \cdot (t-n+1)\big)'$$

Получаем $\alpha_{n-1} = 0$ и так далее.

Таким образом, получаем, что все $\alpha_i = 0$, и исходные функции линейно независимы.

Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве

Рассмотрим несколько примеров взаимного расположения плоскостей в аффинном пространстве. Будем классифицировать их в терминах рангов соответствующих систем, составленных из векторов, на которых натянуты линейные оболочки, и вектора $\overline{P_1P_2}$.

Пример 1.

Рассмотрим одномерную и двумерную плоскость в $\mathbb{R}^4$:

$$X_1 = P_1 + \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$X_2 = P_2 + \langle b \rangle$$

Обозначим $r_1 = rk\{a_1,\ a_{2,}\ b\},\ r_2 = rk\{a_1,\ a_{2,}\ b,\ \overline{P_1P_2}\}$.

1) $r_1 = 2, r_2 = 2$
   В этом случае $X_1 \cap X_2 \neq \{0\}$ и $b_1 \in \langle a_1, a_2 \rangle$ - прямая X_2 полностью содержится в X_1
2) $r_1 = 2, r_2 = 3$
   В этом случае $b_1 \in \langle a_1, a_2 \rangle$, но общих точек нет – прямая X_2 параллельна X_1
3) $r_1 = 3, r_2 = 3$
   В этом случае $b_1 \notin \langle a_1, a_2 \rangle$, X_1 и X_2 имеют общую точку – в этом случае говорят, что X_1 и X_2 пересекаются по точке
4) $r_1 = 3, r_2 = 4$
   В этом случае $b_1 \notin \langle a_1, a_2 \rangle$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ - X_1 и X_2 скрещиваются по точке

Пример 2.

Рассмотрим две двумерные плоскости в $\mathbb{R}^5$:

$$X_1 = P_1 + \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$X_2 = P_2 + \langle b_1, b_2 \rangle$$

Обозначим $r_1 = rk\{a_1,\ a_{2,}\ b_1,\ b_2\},\ r_2 = rk\{a_1,\ a_{2,}\ b_1,\ b_2,\ \overline{P_1P_2}\}$.

1) $r_1 = 2, r_2 = 2$
   В этом случае $X_1 \cap X_2 \neq \{0\}$ и $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle$ – плоскости X_1 и X_2 совпадают
2) $r_1 = 2, r_2 = 3$
   В этом случае $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle$, но общих точек нет – плоскости X_1 и X_2 параллельны
3) $r_1 = 3, r_2 = 3$
   В этом случае X_1 и X_2 имеют общую прямую – говорят, что X_1 и X_2 пересекаются по прямой
4) $r_1 = 3, r_2 = 4$
   В этом случае нет общих точек, но есть общее направление – говорят, что X_1 и X_2 скрещиваются по направлению

5) $r_1 = 4, r_2 = 4$
   В этом случае X_1 и X_2 пересекаются по точке
6) $r_1 = 4, r_2 = 5$
   В этом случае X_1 и X_2 скрещиваются по точке

Задача 1097 п.1. Определить взаимное расположение плоскостей

$$X_1: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad X_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Решение.

Вначале для каждой из систем найдем частное решение неоднородной системы и ФСР однородной системы (перефразируя, можно сказать, что мы находим точку P_1 и базис в ассоциированном линейном пространстве).

$$X_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Частное решение: $P_1\ (1, 1, 0, 0, 0)$.

Находим ФСР однородной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_3 – главные неизвестные, x_2, x_4, x_5 - свободные

ФСР: $(1, -1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)$.

$$X_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Частное решение: $P_2\ (1, 0, 2, 0, 1)$.

Находим ФСР однородной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2, x_3 – главные неизвестные, x_4, x_5 - свободные

ФСР: $(-1, 1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0, 1)$

Теперь составляем матрицу из ФСР первой и второй системы, и находим ее ранг и ранг расширенной матрицы (добавляем $\overline{P_1P_2}$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Получили $r_1 = r_2 = 5$. Значит, данные плоскости пересекаются по точке. Координаты точки найдем, решив объединенную систему (объединяем системы, задающие X_1 и X_2):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Получаем координаты точки $(2, -1, 1, -1, 1)$.

Ответ: плоскости пересекаются по точке $(2, -1, 1, -1, 1)$.

Переходим к следующей теме – линейные операторы.

Определение. **Линейный оператор** – линейное отображение линейного пространства в себя.

Как и всякое линейное отображение, линейный оператор полностью определяется своими значениями на базисных векторах.

Матрица линейного оператора – матрица, по столбцам которой записаны образы базисных векторов после действия на них оператора.

Нужно различать матрицу оператора и сам оператор. При переходе к другому базису матрица оператора преобразуется по правилу $C^{-1}AC$, где C – матрица перехода к другому базису.

Задача 1099. Рассмотрим пространство $R_5[x]$ многочленов степени не выше 5 и его базис $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$. Найти матрицы следующих операторов:

Решение.

Смотрим, как действует оператор на базисные векторы и записываем их образы по столбцам:

1) Оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$

$\frac{d}{dx}1 = 0, \frac{d}{dx}x = 1, \frac{d}{dx}x^2 = 2x, \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3, \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4.$

Получаем матрицу оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $f(x) \to f(x+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $f(x) \to f(-x)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $f(x) \to \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Задача 1112. Линейный оператор в некотором базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти его матрицу в новом базисе, если $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

Решение.

Запишем матрицу перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Получаем $C^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица оператора в новом базисе:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Семинар 7. Ядро и образ линейного оператора.

Задача. Доказать, что след оператора не меняется при смене базиса.

Решение.

Это – следствие из теоремы, утверждающей, что характеристический многочлен матрицы оператора $\chi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A – матрица оператора в старом базисе, $\tilde{A}$ – матрица оператора в новом базисе.

Тогда

$$\tilde{A} = C^{-1}AC$$

где C – матрица перехода. Получаем в новом базисе:

$$\chi(\lambda) = det\left(\tilde{A} - \lambda E\right) = det(C^{-1}AC - \lambda E) = det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) =$$

$$= det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = det\, C^{-1}\, det(A - \lambda E)\, det\, C = det(A - \lambda E)$$

Таким образом, хотя характеристический многочлен и вычисляется по конкретной матрице оператора, это – свойство оператора, а не его матрицы – характеристический многочлен не зависит от матрицы оператора.

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr} A\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

То есть, в частности, $\operatorname{tr} A$ не зависит от выбора базиса.

Теперь обсудим два важных класса операторов – оператор проектирования и оператор отражения.

Оператор проектирования

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$. Это означает, что для $\forall v \in V$: $\quad v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Определим оператор

$$P: V \to V: \ P(v) = v_1$$

То есть, каждому вектору ставим в соответствие его компоненту в V_1 при разложении по прямой сумме. Такой оператор называется **оператором проектирования**.

Линейный оператор P – оператор проектирования $\Leftrightarrow P^2 = P$.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V,

$$V_1 = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

$$V_2 = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$$

В базисе $e_1, \dots, e_n$ матрица оператора P имеет вид

$$A_P = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Где 0 – нулевые матрицы, E_k – единичная матрица размера $k \times k$.

Оператор отражения
В тех же обозначениях, **оператор отражения**

$$R: V \to V: \ \ R(v) = v_1 - v_2$$

То есть, каждому вектору ставим в соответствие его отражение относительно V_2.

Линейный оператор R – оператор отражения $\Leftrightarrow R^2 = Id$.

В базисе $e_1, \dots, e_n$ матрица оператора R имеет вид

$$A_R = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_{n-k} \end{pmatrix}$$

Где 0 – нулевые матрицы, E_k – единичная матрица размера $k \times k$, E_{n-k} – единичная матрица размера $(n-k) \times (n-k)$.

Задача. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ подпространства

$$V_1 = \langle (1,0,-1,2), (0,1,3,1) \rangle$$

$$V_2 = \langle (-1,1,0,2), (1,2,1,0) \rangle$$

$\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$. Найти матрицу оператора P проектирования на V_1 параллельно V_2 в стандартном базисе.

Решение.

В базисе, составленном из векторов, задающих линейные оболочки V_1 и V_2, матрица оператора P будет иметь вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, обратная к матрице перехода к стандартному базису, будет иметь вид (по столбцам стоят базисные векторы V_1 и V_2):

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу перехода C к стандартному базису:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/28 & 13/28 & -3/28 & -1/7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 11/28 & -5/28 & -1/28 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/14 & -3/14 & 5/14 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/7 & 2/7 & -1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/28 & 13/28 & -3/28 & -1/7 \end{array}\right)$$

Итак,

$$C^{-1}\tilde{A}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/28 & -5/28 & -1/28 & 2/7 \\ 1/14 & -3/14 & 5/14 & 1/7 \\ -3/7 & 2/7 & -1/7 & 1/7 \\ 5/28 & 13/28 & -3/28 & -1/7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11/28 & -5/28 & -1/28 & 2/7 \\ 1/14 & -3/14 & 5/14 & 1/7 \\ -5/28 & -13/28 & 31/28 & 1/7 \\ 6/7 & -4/7 & 2/7 & 5/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 11 & -5 & -1 & 8 \\ 2 & -6 & 10 & 4 \\ -5 & -13 & 31 & 4 \\ 24 & -16 & 8 & 20 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 11 & -5 & -1 & 8 \\ 2 & -6 & 10 & 4 \\ -5 & -13 & 31 & 4 \\ 24 & -16 & 8 & 20 \end{pmatrix}$.

Ядро и образ линейного оператора

Ядро линейного оператора $KerA$ – всегда линейное подпространство. Если ядро тривиально (состоит только из $\bar{0}$), то матрица оператора невырождена, т.е. оператор переводит всякий базис в базис, или, что равносильно, его образ совпадает со всем пространством.

Размерность ядра равна $dimKerA = n - rkA$, где n – размерность пространства.

Образ линейного оператора $Im\,A$ также является линейным подпространством, его размерность совпадает с рангом матрицы оператора.

Таким образом,

$$dim\, KerA + dim\, Im\, A = n$$

Однако, нужно иметь в виду, что отсюда не следует, что $V = KerA \oplus Im\, A$ – ядро и образ оператора вполне могут пересекаться.

Рассмотрим, например, оператор дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше n. Его ядро – все константы, $dim\, KerA = 1$. Его образ – многочлены степени не выше $n - 1$. Таким образом, ядро лежит в образе.

<u>Задача 1118</u>. Найти ядро и образ следующих операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n.

Решение.

1) T: $f(x) \to f(x+1)$
   Очевидно, у оператора T есть обратный, поэтому $KerT = \{\bar{0}\}$, $Im\, T = \mathbb{R}_n[x]$.
2) R: $f(x) \to f(-x)$
   Очевидно, у оператора R есть обратный, поэтому $KerR = \{\bar{0}\}$, $Im\, R = \mathbb{R}_n[x]$.
3) D: $f(x) \to xf'(x)$
   $KerD = \langle 1 \rangle$, $Im\, D = \langle x, x^2, \dots, x^n \rangle$.
4) P: $f(x) \to f(0)x$
   $KerP = \langle x, x^2, \dots, x^n \rangle$, $Im\, P = \langle x \rangle$.

<u>Задача</u>. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \\ 6 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ – матрица оператора. Найти ядро и образ оператора.

Решение.

Находим ядро:

Находим ФСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \\ 6 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -6 & -16 \\ 0 & 3 & -9 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1,\ x_2,\ x_4$ – главные переменные, x_3 – свободная переменная.

ФСР: $(-2, 3, 1, 0)$.

$$KerA = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Находим образ:

Образ оператора – это линейная оболочка столбцов матрицы, так как по столбцам записаны образы базисных векторов.

При нахождении ФСР мы привели матрицу оператора к ступенчатому виду, при этом линейно независимые столбцы остались линейно независимыми. Таким образом, 1, 2, и 4 столбцы исходной матрицы линейно независимы, а 3 столбец через них выражается. Поэтому 1, 2, и 4 столбец образуют базис в образе.

$$Im\,A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ответ: $KerA = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, Im\,A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Определение. $v \neq \overline{0}$ – **собственный вектор** для оператора $f: V \to V$, если $\exists \lambda \in K$:

$$f(v) = \lambda v$$

λ называется **собственным значением**, соответствующим собственному вектору v.

Геометрически это означает, что под действием оператора f вектор v не поворачивается, а только изменяет свою длину (и направление, если $\lambda < 0$).

Пусть A_f – матрица оператора f. Тогда

$$A_f v = \lambda v \Leftrightarrow (A_f - \lambda E)v = 0$$

Отсюда следует, что

$$det(A_f - \lambda E) = 0$$

То есть, λ – корень характеристического многочлена.

Задача 1164. п.1. Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Находим собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0$$

Получаем $\lambda = -1$ – корень кратности 3. Ищем собственные векторы:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(A - \lambda E) = 2$. Получаем единственный собственный вектор $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Семинар 8. Жорданова форма.

Жорданова форма матрицы.

Нильпотентный оператор.

Пусть K – алгебраически замкнутое поле (например, поле комплексных чисел). Если над алгебраически замкнутым полем оператор f имеет единственное собственное значение λ, тогда $f - \lambda id$ - нильпотентный оператор (id – тождественный оператор).

Значит, для него существует базис $e_1, \dots, e_n$, в котором матрица оператора $f - \lambda id$ имеет вид:

$$A_{f-\lambda id} = \begin{pmatrix} A_1 & & \dots & 0 \\ & A_2 & \dots & \\ & & \dots & \\ 0 & & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

Где A_i – блоки вида (над главной диагональю - диагональ из 1, остальные элементы равны 0):

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда в этом же базисе матрица оператора f имеет вид:

$$A_f = \begin{pmatrix} A_1 & & \dots & 0 \\ & A_2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

Где A_i – блоки вида (на главной диагонали стоят λ, над главной диагональю - диагональ из 1, остальные элементы равны 0):

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Общий случай.

Здесь необходимо рассматривать различные корневые подпространства. Ограничиваясь на корневое подпространство, соответствующее собственному значению, получаем, что оператор $f - \lambda id$ – нильпотентный. Находим базис в корневом подпространстве. Объединение этих базисов дает базис всего пространства, так как пространство раскладывается в прямую сумму своих корневых подпространств.

Характеристический многочлен:

$$\chi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

Кратность корней k_i – суммарная размерность корневых подпространств, отвечающих k_i (всех блоков, отвечающих данному λ_i).

Как находить жорданов базис:

Находим характеристический многочлен, находим его корни, и для каждого корня определяем количество клеток, соответствующее данному λ (находим ранг $A - \lambda E$).

Для каждого λ отдельно возводим в степень жорданову клетку $A - \lambda E$, определяя таким образом размер клеток, соответствующих данному λ.

Рассмотрим на примерах:

Задача 1199 п.12. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение.

Находим собственные значения (раскладываем определитель по 1 строке):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5 - 3\lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^4 = 0$$

Получаем собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Таким образом, получаем одномерное корневое подпространство, соответствующее $\lambda_1 = 1$ и четырехмерное корневое подпространство, соответствующее $\lambda_2 = -1$.

$\lambda_2 = -1$:

Поймем, какие будут жордановы клетки. Найдем ранг матрицы $A - \lambda_2 E$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $rk(A - \lambda_2 E) \geq 4$ (первые 4 строки матрицы линейно независимы), также $rk(A - \lambda_2 E) \leq 4$ (т.к. матрица вырождена). Значит, $rk(A - \lambda_2 E) = 4$.

Блочная структура определена однозначно – один блок 4×4.

Таким образом, жорданова форма матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь ищем векторы жорданового базиса. Начнем с клетки 4×4. Нужно возвести эту клетку в 4 степень:

$$(A - \lambda_2 E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (A - \lambda_2 E)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор e_5 должен занулять матрицу $(A - \lambda_2 E)^4$, но не занулять $(A - \lambda_2 E)^3$. Легко видеть, что в качестве e_5 можно выбрать

$$e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вектор e_4 – результат действия матрицы $A - \lambda_2 E$ на e_5:

$$e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Вектор e_3:

$$e_3 = (A - \lambda_2 E)e_4 = (A - \lambda_2 E)^2 e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Вектор e_2:

$$e_2 = (A - \lambda_2 E)e_3 = (A - \lambda_2 E)^3 e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$:

Вектор e_1:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Находим e_1 из соотношения $(A - \lambda_1 E)\, e_1 = \overline{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В качестве e_1 подойдет

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы построили жорданов базис, соответствующий жордановой форме матрицы.

Ответ: жорданова форма $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, жорданов базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти жорданову форму и жорданов базис.

Решение.

Так как матрица A диагональная, и на ее диагонали стоят четыре единицы и четыре нуля, то ее характеристический многочлен равен

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 1)^4$$

Его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$.

$\lambda_1 = 0$:

В этом случае $A - \lambda E = A$, поэтому $rk(A - \lambda E) = rkA = 6$.

Значит, $\lambda_1 = 0$ соответствует две жордановы клетки, осталось выяснить – это клетки размера 2 и 2, или 1 и 3. Для этого вычислим rkA^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили $rkA^2 = 4$. Таким образом, мы при возведении в квадрат занулили корневое подпространство, соответствующее $\lambda_1 = 0$. Значит, $\lambda_1 = 0$ соответствуют две клетки размера 2×2. Часть жордановой формы, соответствующая $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем соответствующие собственные векторы – они должны занулять A^2, но не занулять A. Это, например, $e_2 = (0, 1,0,0,0,0,0,0)$ и $e_4 = (0, 0,0,1,0,0,0,0)$. Отсюда получаем e_1 и e_3:

$$e_1 = Ae_2 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$e_3 = Ae_4 = (-2,-2,1,0,0,0,0,0)$$

Вторая часть задачи – домашнее задание.

Семинар 9. Приложение жордановой формы – функции от матриц.

Обсудим приложение жордановой формы – вычисление функции от матриц. Как пример рассмотрим возведение матрицы в степень.

Допустим, нужно вычислить A^{100}. Приведем A к жордановой форме: $J = C^{-1}AC$. Тогда $A = CJC^{-1}$ и $A^{100} = (CJC^{-1})(CJC^{-1})\dots(CJC^{-1}) = CJ^{100}C^{-1}$.

Таким образом, достаточно возвести J в сотую степень, а сделать это намного проще, чем возвести в степень произвольную матрицу. Так как жордановы клетки возводятся в степень независимо друг от друга, достаточно понять, как возводится в степень жорданова клетка.

Пусть

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Тогда

$$J_1^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Нетрудно сообразить, что при возведении в степень n на главной диагонали будут стоять λ^n, а справа от λ^n в каждой строке будут члены разложения $(\lambda + 1)^n$.

<u>Задача 1206</u>. Вычислить A^{101}, где $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вначале найдем жорданову форму матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & -4 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

Получаем $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = -1$.

$\lambda_1 = 1$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В качестве собственного вектора выберем $e_1 = (-1, 1, 0)$.

$\lambda_2 = -1$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$rk(A - \lambda_2 E) = 2$, значит, имеем одну жорданову клетку 2×2, соответствующую значению $\lambda_2 = -1$. Возведем $A - \lambda_2 E$ в квадрат, и найдем вектор, который зануляет $(A - \lambda_2 E)^2$, но не зануляет $A - \lambda_2 E$:

$$(A - \lambda_2 E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким вектором будет $e_3 = (0, -1, 1)$.

Тогда $e_2 = (A - \lambda_2 E)e_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Таким образом,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода (по столбцам стоят $e_{1,}$ e_2, e_3):

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Находим C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем J^{101}:

$$J^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 101 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A^{101} = CJ^{101}C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 101 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -102 & -103 & -204 \\ -101 & -100 & -200 \\ 101 & 101 & 201 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{101} = \begin{pmatrix} -102 & -103 & -204 \\ -101 & -100 & -200 \\ 101 & 101 & 201 \end{pmatrix}$.

Функции от матриц.

Мы умеем складывать, вычитать, и умножать матрицы. Следовательно, мы умеем находить значение многочлена от матрицы. Но как вычислять другие функции от матриц?

Оказывается, для матриц, как и для чисел, справедливо разложение функций в ряды, например, равенство

$$e^X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

справедливо и для матриц.

Для того, чтобы научиться находить значение произвольной функции $f(A)$ от матрицы A, нужно научиться находить значение функции от жордановой клетки.

По определению,

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \\ 0 & f(\lambda) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$f(A) = Cf(J)C^{-1}$$

Где J – жорданова форма матрицы A.

Отметим, что не любую функцию можно взять от произвольной матрицы – должны быть определены функция и ее производные соответствующих порядков на всех собственных значениях матрицы (т.е. на спектре матрицы).

Например, если у матрицы A есть отрицательные собственные значения, то $\sqrt{A}$ не определён.

Задача 1207 п.2. Вычислить e^A, где:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вначале найдем жорданову форму матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0$$

Получаем $\lambda_{1,2,3} = 0$.

$$rk(A-\lambda E) = rkA = 2$$

Таким образом, собственному значению $\lambda_{1,2,3} = 0$ соответствует одна жорданова клетка, и жорданова форма матрицы имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$e^J = \begin{pmatrix} e^0 & \frac{e^0}{1!} & \frac{e^0}{2!} \\ 0 & e^0 & \frac{e^0}{1!} \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем жорданов базис:

$$(A-\lambda E)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$e_2 = (A-\lambda E)e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = (A-\lambda E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Находим C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$e^A = Ce^J C^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Есть и другой способ вычисления функции от матрицы. На самом деле, всякая функция от матрицы $A_{n\times n}$ – это многочлен от нее:

$f(A) = P(A)$, причем $degP(A) \leq n-1$

Этот многочлен должен совпадать с $f(A)$ на спектре A.

Пусть

λ_1 – корень характеристического многочлена кратности k_1

...

λ_m – корень характеристического многочлена кратности k_m

Тогда должно выполняться

$P(\lambda_1) = f(\lambda_1),\ P'(\lambda_1) = f'(\lambda_1), \dots, P^{(k_1-1)}(\lambda_1) = f^{(k_1-1)}(\lambda_1)$

...

$P(\lambda_m) = f(\lambda_m),\ P'(\lambda_m) = f'(\lambda_m), \dots, P^{(k_m-1)}(\lambda_m) = f^{(k_m-1)}(\lambda_m)$

В некоторых случаях этот подход гораздо удобнее, чем приведение матрицы к жордановой форме.

Задача 1207 п.1. Вычислить e^A, где:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0$$

Получаем $\lambda_{1,2} = \pm 3i$.

Ищем многочлен 1-ой степени $P(x) = ax + b$, совпадающий с e^A на спектре матрицы A.

Должно выполняться:

$$P(3i) = e^{3i}$$

$$P(-3i) = e^{-3i}$$

Подставляя в $P(x)$, получаем систему

$$\begin{cases} 3ai + b = e^{3i} \\ -3ai + b = e^{-3i} \end{cases}$$

Откуда

$$a = \frac{e^{3i} - e^{-3i}}{6i} = \frac{1}{3}\sin 3$$

$$b = \frac{e^{3i} + e^{-3i}}{2} = \cos 3$$

Тогда

$$P(A) = aA + bE = \frac{1}{3}\sin 3\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \cos 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3 & -\sin 3 \\ \sin 3 & \cos 3 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу поворота.

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} \cos 3 & -\sin 3 \\ \sin 3 & \cos 3 \end{pmatrix}$.

На самом деле, экспонента от кососимметрической матрицы всегда будет ортогональной матрицей. Это - частный случай экспоненциального отображения.

Семинар 10. Скалярное произведение.

Введем на линейном пространстве дополнительную структуру – скалярное произведение.

Определение. **Скалярное произведение** – функция от двух векторов, ставящая им в соответствие число (билинейная форма), и обладающая следующими свойствами (над полем $\mathbb{R}$):

- Линейность: $(\alpha a_1 + \beta a_2, b) = \alpha(a_1, b) + \beta(a_2, b)$
- Симметричность: $(a, b) = (b, a)$ для $\forall a, b \in L$
- Положительная определенность: $(a, a) \geq 0$ для $\forall a \in L$, $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = \bar{0}$

Если мы рассматриваем линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, говорят о т.н. полуторалинейной форме – она линейна по первому аргументу и антилинейна по второму (или наоборот – зависит от того, как мы определяем операцию), т.е. обладает следующими свойствами (над полем $\mathbb{C}$):

- Линейность по первому аргументу: $(\alpha a_1 + \beta a_2, b) = \alpha(a_1, b) + \beta(a_2, b)$
- Эрмитовость: $(a, b) = \overline{(b, a)}$ для $\forall a, b \in L$
- Положительная определенность: $(a, a) \geq 0$ для $\forall a \in L$, $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = \bar{0}$

Скалярное произведение задает некую геометрию на линейном пространстве L – введя его, можно придать смысл понятию длины вектора, угла между векторами и т.д. Если в аналитической геометрии скалярное произведение определялось через расстояние, то теперь мы действуем наоборот.

Длину вектора (норму) можно определить как

$$|a| = \sqrt{(a, a)}$$

угол между векторами как

$$cos\,\varphi = \frac{(a, b)}{|a||b|}$$

Задача 1273. Даны многочлены x^2 и x^4. Найти их длины и угол φ между ними в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 4 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Решение.

$$|x^2| = \sqrt{(x^2, x^2)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^4\, dx} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$|x^4| = \sqrt{(x^4, x^4)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^8\, dx} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$cos\, \varphi = \frac{(x^2, x^4)}{|x^2||x^4|} = \frac{\int_{-1}^{1} x^6\, dx}{|x^2||x^4|} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Откуда $\varphi = arccos\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Ответ: $|x^2| = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $|x^4| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\varphi = arccos\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Обратите внимание, что условие $|cos\,\varphi| \leq 1$ выполняется всегда (это следует из неравенства Коши-Буняковского).

Если ввести в линейном пространстве другое скалярное произведение, мы получим другие значения длин векторов и углов между ними. Однако, в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны между собой (см. определение эквивалентности норм), поэтому принципиально новой геометрии мы не получим.

Задача 1271 п.2. Найти длину вектора $(1, 1+i, 1-i)$ в эрмитовом пространстве $\mathbb{C}^3$.

Решение.

Если скалярное произведение явно не задано, имеется в виду стандартное скалярное произведение в эрмитовом пространстве:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_3}}$$

Получаем

$$|(1, 1+i, 1-i)| = \sqrt{1 + (1+i)(1-i) + (1-i)(1+i)} = \sqrt{5}$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Если в линейном пространстве задано скалярное произведение, возникает матрица Грама – матрица, состоящая из скалярных произведений базисных векторов: пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V, тогда **матрица Грама** $G = \left(g_{ij}\right)$, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$.

Тогда скалярное произведение векторов (в случае поля $\mathbb{R}$) $x = x^i e_i$ и $y = y^j e_j$ равно

$$(x, y) = x^i y^j g_{ij}$$

В матричной форме:

$$(x,y) = (x^1, \dots, x^n)G\begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

В случае поля $\mathbb{C}$:

$$(x,y) = \bar{x}^i y^j g_{ij}$$

В матричной форме:

$$(x,y) = \overline{(x^1, \dots, x^n)}G\begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

В случае стандартного скалярного произведения $G = E$:

- в вещественном случае $(x,y) = (x^1, \dots, x^n)E\begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = x^1y^1 + \dots + x^ny^n$
- в комплексном случае $(x,y) = \overline{(x^1, \dots, x^n)}E\begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = \overline{x^1}y^1 + \dots + \overline{x^n}y^n$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Из всякого базиса линейного пространства можно получить ортогональный, сохраняя на каждом шаге линейную оболочку. Пусть $a_1, \dots, a_n$ – базис V. Хотим построить ортогональный базис $e_1, \dots, e_n$ так, чтобы

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle \ \forall k$$

В качестве e_1 выбираем a_1.

Далее строим e_2:

$$e_2 = a_2 + \alpha_{21}e_1$$

Нужно подобрать коэффициент α_{21} таким образом, чтобы вектора e_1 и e_2 были ортогональны:

$$0 = (e_1, e_2) = (a_1, a_2 + \alpha_{21}e_1) = (a_2, e_1) + \alpha_{21}(a_1, e_1)$$

Значит,

$$\alpha_{21} = -\frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

Таким образом,

$$e_2 = a_2 - \frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражение для e_3. Пусть

$$e_3 = a_3 + \alpha_{32} e_2 + \alpha_{31} e_1$$

Домножим скалярно это равенство на e_1, получим

$$\alpha_{31} = -\frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

Домножим скалярно это равенство на e_2, получим

$$\alpha_{32} = -\frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$$

Таким образом,

$$e_3 = a_3 - \frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 - \frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$$

Рассуждая аналогично, можем получить выражение для всех векторов $e_1, \dots, e_n$.

Обратите внимание, что процесс ортогонализации Грама-Шмидта корректен – на каждом шаге мы получаем ненулевой вектор e_k (иначе это бы означало линейную зависимость базисных векторов $e_1, \dots, e_{k-1}$).

Для получения ортонормированного базиса нужно после процесса ортогонализации Грама-Шмидта каждый вектор разделить на его норму.

Задача 1291. Относительно евклидова скалярного произведения $(A, B) = tr(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$. проверить ортогональность следующей системы матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и дополнить ее до ортонормированного базиса всего пространства вещественных квадратных матриц второго порядка.

Решение.

Легко понять, почему скалярное произведение определено корректно: это – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n^2}$, если рассматривать матрицу как вектор длины n^2.

Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e_2$

Проверим, что данные матрицы ортогональны:

$$tr\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right) = 0$$

Дополним до ортонормированного базиса. Вначале добавим две матрицы, в совокупности с e_1 и e_2 образующие базис всего пространства, потом ортогонализуем получившуюся систему.

Заведомо подойдут матрицы

$$a_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ и } a_4 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ортогонализуем систему:

$$e_3 = a_3 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{31}e_1$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{tr({a_3}^T e_1)}{tr({e_1}^T e_1)} = 0$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{tr({a_3}^T e_2)}{tr({e_2}^T e_2)} = -\frac{1}{3}$$

Получаем

$$e_3 = a_3 - \frac{1}{3}e_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3 & 0\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

Для удобства вычислений возьмем

$$\widetilde{e_3} = 3e_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Найдем e_4:

$$e_4 = a_4 + \alpha_{43}e_3 + \alpha_{42}e_2 + \alpha_{41}e_1$$

$$\alpha_{43} = -\frac{(a_4, e_3)}{(e_3, e_3)} = -\frac{tr({a_4}^T e_3)}{tr({e_3}^T e_3)} = 0$$

$$\alpha_{42} = -\frac{(a_4, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{tr({a_4}^T e_2)}{tr({e_2}^T e_2)} = 0$$

$$\alpha_{41} = -\frac{(a_4, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{tr({a_4}^T e_1)}{tr({e_1}^T e_1)} = -\frac{1}{3}$$

Получаем

$$e_4 = a_4 - \frac{1}{3}e_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 0 & -1/3\end{pmatrix}$$

Для удобства вычислений возьмем

$$\widetilde{e_4} = 3e_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Нормируем базисные вектора:

$$\widetilde{\widetilde{e_1}} = \frac{e_1}{|e_1|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \widetilde{\widetilde{e_2}} = \frac{e_2}{|e_2|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\widetilde{e_3}} = \frac{\widetilde{e_3}}{|\widetilde{e_3}|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \widetilde{\widetilde{e_4}} = \frac{\widetilde{e_4}}{|\widetilde{e_4}|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\widetilde{\widetilde{e_1}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \widetilde{\widetilde{e_2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\widetilde{e_3}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \widetilde{\widetilde{e_4}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Задача 1296 п.1. Методом ортогонализации Грама-Шмидта построить ортогональный базис подпространства пространства многочленов, порожденного многочленами $a_1 = x^3, a_2 = x^4, a_3 = x^5, a_4 = x^6$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Решение.

$e_1 = a_1 = x^3$

Так как a_1 – нечётный многочлен, a_2 – чётный многочлен, то $(a_1, a_2) = 0$, и можно взять

$e_2 = a_2 = x^4$.

$$e_3 = a_3 - \frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 - \frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = a_3 - \frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = x^5 - \frac{\left.\frac{x^9}{9}\right|_{-1}^{1}}{\left.\frac{x^7}{7}\right|_{-1}^{1}} x^3 = x^5 - \frac{7}{9} x^3$$

$$e_4 = a_4 - \frac{(a_4, e_3)}{(e_3, e_3)} e_3 - \frac{(a_4, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 - \frac{(a_4, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = a_4 - \frac{(a_4, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = x^6 - \frac{\left.\frac{x^{11}}{11}\right|_{-1}^{1}}{\left.\frac{x^9}{9}\right|_{-1}^{1}} x^4 =$$

$$x^6 - \frac{9}{11} x^4$$

Ответ: $e_1 = x^3,\ e_2 = x^4,\ e_3 = x^5 - \frac{7}{9}x^3,\ e_4 = x^6 - \frac{9}{11}x^4.$

Семинар 11. Представление матрицы в виде произведения.

Представление невырожденной матрицы A в виде произведения ортогональной и верхнетреугольной.

Еще одно приложение процесса ортогонализации Грама-Шмидта – представление невырожденной матрицы A в виде произведения ортогональной и верхнетреугольной.

Можно интерпретировать A как матрицу перехода от стандартного базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $a_1, \dots, a_n$, координаты векторов которого в стандартном базисе записаны по столбцам матрицы A.

Базис $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный относительно стандартного скалярного произведения, к базису $a_1, \dots, a_n$ применяем процесс ортогонализации Грама-Шмидта и нормируем.

При этом матрица перехода R от базиса $a_1, \dots, a_n$ к ортогональному базису будет верхнетреугольной (следует из вида процесса ортогонализации Грама-Шмидта). После ортогонализации и нормирования из векторов $a_1, \dots, a_n$ получаем вектора $e'_1, \dots, e'_n$. Тогда переход от $e_1, \dots, e_n$ к $e'_1, \dots, e'_n$ будет осуществляться с помощью ортогональной матрицы U (так как оба базиса ортогональны).

Таким образом, $AR = U$, откуда $A = UR^{-1}$. Так как R верхнетреугольная, то и R^{-1} верхнетреугольная – мы получили искомое разложение.

Задача 1309. Представить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ в виде произведения ортогональной матрицы U на верхнетреугольную R.

Решение.

Базис: $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 0, -1)$, $a_3 = (5, -3, -7)$. Применим к нему процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

$e'_1 = a_1 = (1, -2, 2)$

$e'_2 = a_2 - \frac{(a_2, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} e'_1 = a_2 + \frac{1}{3} e'_1 = (-1, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

Для удобства вычислений возьмем $\widetilde{e'_2} = -3e'_2 = (2, 2, 1)$

$e'_3 = a_3 - \frac{(a_3, \widetilde{e'_2})}{(\widetilde{e'_2}, \widetilde{e'_2})} \widetilde{e'_2} - \frac{(a_3, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} e'_1 = a_3 + \frac{1}{3} \widetilde{e'_2} + \frac{1}{3} e'_1 = a_3 - e'_2 + \frac{1}{3} e'_1 =$

$= (5, -3, -7) - (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (6, -3, -6)$

Теперь нормируем полученные вектора:

$$e_1^* = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$$

$$e_2^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$e_3^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

Тогда

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Теперь находим R:

$$e_1^* = \frac{1}{3} a_1$$

$$e_2^* = -a_2 - \frac{1}{3} a_1$$

$$e_3^* = a_3 - e_2' + \frac{1}{3} e_1' = \frac{1}{9} a_3 - \frac{1}{9} a_2$$

Тогда

$$R = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Методом присоединенной матрицы находим R^{-1}:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Окончательно получаем

$$A = UR^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

<u>Объем n-мерного параллелепипеда</u>

Важный смысл матрицы Грама: объем параллелепипеда, натянутого на базисные вектора, равен корню из определителя матрицы Грама (доказательство аналогично трехмерному случаю):

$$V_{\Pi^n} = \sqrt{det\, G}$$

$\Pi^n \subset \mathbb{R}^n$ – n-мерный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$:

Пусть $a_1, \dots, a_n$ – базис. Тогда

$$V = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n, \quad 0 \le x_i \le 1$$

- параллелепипед, натянутый на вектора $a_1, \dots, a_n$.

Определим объем параллелепипеда:

Пусть $U \subset V$ – подпространство. Тогда **ортогональное дополнение** U:

$$U^\perp = \{v \in V : (u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$$

При этом

$$V = U \oplus U^\perp$$

Расстояние от вектора до подпространства

Определим расстояние от вектора v до подпространства.

Любой вектор $v \in V$ единственным образом можно представить в виде:

$$v = v^\parallel + v^\perp, \text{где } v^\parallel \in U, v^\perp \in U^\perp$$

Тогда расстояние от v до U равно длине (норме) вектора $v^\perp$.

Тогда объем параллелепипеда определяется индуктивно:

Объем одномерного параллелепипеда – длина вектора. Объем $(n+1)$-мерного параллелепипеда равен объему n-мерного параллелепипеда, натянутого на первые n векторов, умноженного на расстояние от $(n+1)$-го вектора до подпространства, натянутого на первые n векторов.

Определенный таким образом объем и равен $\sqrt{det\, G}$.

Задача 1346 п.1. Найти базис ортогонального дополнения $L^\perp$ подпространства L, натянутого на векторы: $a_1 = (1, 2, 0, -1)$, $a_2 = (0, -1, 1, 3)$, $a_3 = (3, 4, 2, 3)$.

Решение.

Так как векторы в ортогональном дополнении будут ортогональны каждому из векторов a_1, a_2, a_3, ищем их как решение системы линейных уравнений, коэффициенты которой – коэффициенты соответствующих векторов (записываем a_1, a_2, a_3 по строкам):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(-2,1,1,0)$, $(-5,3,0,1)$ – эти векторы и будут базисом в ортогональном дополнении.

Ответ: $(-2,1,1,0)$, $(-5,3,0,1)$.

Задача 1350. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора при проекции на подпространство:

$$x=(9,1,3,-1), L=\langle(3,0,4,1),(1,1,1,-1),(3,-3,5,5)\rangle$$

Решение.

Вначале найдем базис $L^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\3&0&4&1\\3&-3&5&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&-3&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ФСР: $(-1,4,0,3)$, $(-4,1,3,0)$ – базис $L^{\perp}$.

Так как $V=L\oplus L^{\perp}$, составим базис пространства V из векторов базиса L (берем любые два линейно независимых вектора из линейной оболочки L) и базиса $L^{\perp}$. Найдем координаты вектора x в этом базисе:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-4&9\\1&0&4&1&1\\1&4&0&3&3\\-1&1&3&0&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-4&9\\0&-3&5&5&-8\\0&1&1&7&-6\\0&4&2&-4&8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-4&9\\0&1&1&7&-6\\0&0&4&13&-13\\0&0&1&16&-16\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-4&9\\0&1&1&7&-6\\0&0&1&16&-16\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&0&0&5\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Как упоминалось ранее, при элементарных преобразованиях строк соотношения между столбцами не меняются, поэтому

$$x=\begin{pmatrix}9\\1\\3\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\1\\3\\0\end{pmatrix}$$

Таким образом, мы представили вектор x в виде $x=v^{\parallel}+v^{\perp}$, где $v^{\parallel}\in L, v^{\perp}\in L^{\perp}$.

$v^{\parallel}=2(1,1,1,-1)+(3,0,4,1)=(5,2,6,-1)$ – ортогональная проекция на L.

$v^{\perp}=(4,-1,-3,0)$ – ортогональная составляющая при проекции на L.

Ответ: $(5,2,6,-1)$ – ортогональная проекция на L, $(4,-1,-3,0)$ – ортогональная составляющая при проекции на L.

Замечание: в задаче 1350 ортогональное дополнение получилось двумерным. В случае одномерного ортогонального дополнения: $L^{\perp} = \langle a \rangle$ ортогональная проекция вектора v на $\langle a \rangle$ равна:

$$v^{\perp} = \frac{(a, v)}{(a, a)} a$$

Семинар 12. Проектирование вектора на подпространство.

Пусть $U \subset V$ – подпространство, $a_1, \dots, a_k$ – базис U. Есть еще один способ представить произвольный вектор $v \in V$ в виде:

$$v = v^{\parallel} + v^{\perp}, \text{где } v^{\parallel} \in U, v^{\perp} \in U^{\perp}.$$

Пусть $v^{\parallel} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$. Домножим скалярно это равенство поочередно на вектора из базиса $a_1, \dots, a_k$, получим:

$$(v^{\parallel}, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_1)$$

$$\dots$$

$$(v^{\parallel}, a_k) = \alpha_1(a_1, a_k) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k)$$

Так как $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$ и $(v^{\perp}, a_i) = 0$ для $\forall i$, то $(v^{\parallel}, a_i) = (v, a_i)$ для $\forall i$. Таким образом, получилась система линейных уравнений на коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, причем матрица этой системы – матрица Грама векторов $a_1, \dots, a_k$:

$$G(a_1, \dots, a_k)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \dots \\ (v_k, a_k) \end{pmatrix}$$

Таким образом, для нахождения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ достаточно найти $G^{-1}(a_1, \dots, a_k)$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix} (v_1, a_1) \\ \dots \\ (v_k, a_k) \end{pmatrix}$$

Если $e_1, \cdots, e_k$ – ортогональный базис, то матрица G будет диагональной, и:

$$\alpha_i = \frac{(v, a_i)}{(a_i, a_i)} \text{ (коэффициенты Фурье)}$$

Соответственно, если $e_1, \cdots, e_k$ – ортонормированный базис, то

$$\alpha_i = (v, a_i)$$

Задача 1354. Найти расстояние между v и L, где

$$v = (7, 1, 1, 1), L = \langle (1, 0, 1, 2), (3, -1, -1, -4) \rangle$$

Решение.

Спроектируем v на L. Составим матрицу Грама базисных векторов подпространства L:

$a_1 = (1, 0, 1, 2)$, $a_2 = (3, -1, -1, -4)$

$$G = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем скалярные произведения v и базисных векторов L:

$$(v, a_1) = 10$$

$$(v, a_2) = 15$$

Найдем G^{-1} (для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ верна формула $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$):

$$G^{-1} = \frac{1}{126}\begin{pmatrix} 27 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$v^{\parallel} = \frac{60}{21}a_1 + \frac{25}{21}a_2$$

Тогда проекция v на L равна

$$v^{\perp} = v - v^{\parallel} = v - \frac{60}{21}a_1 - \frac{25}{21}a_2 = \frac{1}{21}(12, 46, -14, 1)$$

Тогда

$$|v^{\perp}| = \frac{1}{21}\sqrt{12^2 + 46^2 + 14^2 + 1^2} = \frac{1}{7}\sqrt{819}$$

Ответ: $\frac{1}{7}\sqrt{819}$.

Задача 1355 п.1. Найти расстояние между v и L, где

$$v = (-1, 3, -3, 5), \qquad L\colon \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 5x - 2y + z - 9t = 0 \end{cases}$$

Решение.

Коэффициенты системы уравнений – базисные векторы $L^{\perp}$:

$a_1 = (1, 2, 1, 1)$, $a_2 = (5, -2, 1, -9)$

Тогда матрица Грама базисных векторов $L^{\perp}$:

$$G = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 111 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем скалярные произведения v и базисных векторов $L^{\perp}$:

$$(v, a_1) = 7$$

$$(v, a_2) = -59$$

Найдем G^{-1}:

$$G^{-1} = \frac{1}{728}\begin{pmatrix} 111 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{728}\begin{pmatrix} 111 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -59 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$v^{\perp} = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 = (-2, 2, 0, 5)$$

Расстояние между v и L:

$$|v^{\perp}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$

Ответ: $\sqrt{33}$.

Угол между вектором и подпространством – это угол между вектором и его проекцией на это подпространство.

<u>Задача 1358 п.4</u>. Найти угол между вектором x и подпространством L, если

$$x = (3, 1, 1, 1), L = \langle (1, 1, -1, 2), (1, -1, 0, 1), (1, -1, 0, -3) \rangle$$

Решение.

Вначале выясним размерность L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Ранг равен 3, поэтому $dim\, L = 3$ и $dim\, L^{\perp} = 1$ – удобнее проектировать на $L^{\perp}$. Сразу можно сказать, что $v^{\perp} = (1, 1, 2, 0)$ – базис $L^{\perp}$ (это – ФСР системы уравнений, задаваемой матрицей из векторов, составляющих базис в L, приведенной выше).

Теперь найдем проекцию x на $L^{\perp}$:

$$\alpha = \frac{(v^{\perp}, x)}{(v^{\perp}, v^{\perp})} = 1$$

Таким образом, ортогональная составляющая x равна:

$$x^{\perp} = v^{\perp} = (1, 1, 2, 0)$$

Тогда (из геометрических соображений) угол φ между x и L равен:

$$\varphi = arc\sin\frac{|v^{\perp}|}{|x|} = arc\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Еще один способ вычисления расстояния от вектора v до подпространства U: пусть $a_1, \dots, a_n$ – базис U. Тогда расстояние $d(v, U)$ можно вычислить, разделив объем параллелепипеда, натянутого на вектора $a_1, \dots, a_n, v$ на площадь основания этого параллелепипеда, то есть, на параллелограмм, натянутый на вектора $a_1, \dots, a_n$:

$$d(v, U) = \sqrt{\frac{\det G(a_1, \dots, a_n, v)}{\det G(a_1, \dots, a_n)}}$$

Теперь поговорим немного об аффинных пространствах. Если в ассоциированном линейном пространстве ввести скалярное произведение, тогда в аффинном пространстве естественным образом появляется расстояние между точками (длина вектора, их соединяющего), углы в треугольнике (угол между соответствующими векторами) и т.д.

Задача 1366. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC, где

$$M(5,1,0,8), A(1,2,3,4), B(2,3,4,5), C(2,2,3,7)$$

Решение.

Вектора $AB(1,1,1,1)$ и $AC(1,0,0,3)$ составляют базис в плоскости ABC. Найдем проекцию вектора, соединяющего точку M и какую-либо точку плоскости ABC (например, точку C): $CM(3,-1,-3,1)$

Матрица Грама базисных векторов плоскости ABC:

$$G = \begin{pmatrix} (AB, AB) & (AB, AC) \\ (AC, AB) & (AC, AC) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем скалярные произведения CM и AB, CM и AC:

$$(CM, AB) = 0$$

$$(CM, AC) = 6$$

Найдем G^{-1}:

$$G^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 6\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

Получаем

$$CM^{\parallel} = AC - AB = (0,-1,-1,2)$$

Тогда

$$CM^{\perp} = CM - CM^{\parallel} = (3,0,-2,-1)$$

Длина перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC:

$$|CM^{\perp}| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}$$

Основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC:

$$M - CM^{\perp} = (5,1,0,8) - (3,0,-2,-1) = (2,1,2,9)$$

Ответ: длина перпендикуляра $\sqrt{14}$, основание перпендикуляра $(2,1,2,9)$.

Задача 1368. Найти угол φ между прямой $x^1 = x^2 + 2x^3 - 2x^4$ и плоскостью

$$\begin{cases}3x^1 - 2x^2 + x^4 = 1\\ x^2 + x^3 = -1\end{cases}$$

Решение.

Прямая задается уравнением $x^1 - x^2 - 2x^3 + 2x^4 = 0$, вектор $(1,-1,-2,2)$, составленный из коэффициентов этого уравнения, является вектором нормали к этой прямой, значит, ее направляющий вектор $v = (2,2,1,1)$ (т.к. скалярное произведение направляющего вектора и вектора нормали равно 0).

Так как плоскость задается системой уравнений, удобно искать матрицу Грама не плоскости L, а ее ортогонального дополнения $L^{\perp}$.

Вектора $a_1 = (3,-2,0,1)$, $a_2 = (0,1,1,0)$ – базис $L^{\perp}$.

Тогда матрица Грама базисных векторов $L^{\perp}$:

$$G = \begin{pmatrix}(a_1,a_1) & (a_1,a_2)\\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

Теперь найдем скалярные произведения v и базисных векторов $L^{\perp}$:

$$(v,a_1) = 3$$

$$(v,a_2) = 3$$

Найдем G^{-1}:

$$G^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ортогональная составляющая v равна:

$$v^{\perp} = \frac{1}{2}a_1 + 2a_2 = (\frac{3}{2}, 1, 2, \frac{1}{2})$$

Тогда

$$sin\,\varphi = \frac{(v^{\perp}, v^{\perp})}{|v|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Семинар 13. Решение задач.

Задаче 1356. В пространстве многочленов степени не выше n рассмотрим три различных скалярных произведения:

$$(f,g)_0 = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,, \qquad (f,g)_1 = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx\,, \qquad (f,g)_2 = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Относительно каждого скалярного произведения найти расстояние от многочлена x^n до подпространства L многочленов степени не выше $n-1$.

Комментарий к решению.

Подпространство L многочленов степени не выше $n-1$ – это гиперплоскость, натянутая на вектора $x, \dots, x^{n-1}$. Нужно ортогонально спроектировать x^n на эту гиперплоскость и найти длину ортогональной составляющей x^n.

Удобно проектировать на ортогональное дополнение L (обратите внимание, что при скалярном произведении, заданном в условии, x^n не является ортогональным дополнением L).

Таким образом, по сути, задача сводится к нахождению ортонормированного базиса в L (например, в 3 случае это – многочлены Чебышева). Если $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис L, то расстояние от x^n до L равно $|(x^n)^\perp|$, где $(x^n)^\perp = x^n - (x^n)^\parallel$,

$$(x^n)^\parallel = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \quad \alpha_i = (x^n, e_i)$$

Задача 1370. Плоскость P проходит через три точки $A(1,1,1,1), B(2,2,0,0), C(1,2,0,1)$, а прямая l – через две точки $D(1,1,1,2), E(1,1,2,1)$. Определить взаимное расположение прямой l и плоскости P, написать уравнения и найти длину общего перпендикуляра.

Решение.

Плоскость P натянута на вектора AB и AC, прямая l – на вектор DE.

$AB = (1,1,-1,-1)$, $AC = (0,1,-1,0)$, $DE = (0,0,1,-1)$.

Определим взаимное расположение векторов: ранг матрицы, составленной из векторов AB, AC, DE равен 3, значит, l и P не параллельны – они скрещиваются.

Пусть $M \in P$ – произвольная точка плоскости P. Тогда верно равенство:

$$M = A + \lambda AB + \mu AC = (1+\lambda, 1+\lambda+\mu, 1-\lambda-\mu, 1-\lambda)$$

Пусть $N \in l$ – произвольная точка прямой l. Тогда верно равенство:

$$N = D + \nu DE = (1, 1, 1+\nu, 2-\nu)$$

Тогда вектор MN, соединяющий произвольные точки M и N прямой и плоскости, равен:

$$MN = (-\lambda, -\lambda - \mu, \nu + \lambda + \mu, 1 - \nu + \lambda)$$

Для того, чтобы MN являлся общим перпендикуляром к P и l, необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален векторам AB, AC, DE. Получаем систему:

$$\begin{cases} (MN, AB) = 0 \\ (MN, AC) = 0 \\ (MN, DE) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda - 2\mu - 1 = 0 \\ -2\lambda - 2\mu - \nu = 0 \\ \mu + 2\nu - 1 = 0 \end{cases}$$

Откуда

$$\lambda = 1/4, \mu = 0, \nu = 1/2.$$

Тогда

$MN = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1), N = (1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Уравнение общего перпендикуляра:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Длина общего перпендикуляра – это длина MN:

$$|MN| = \frac{1}{2}$$

Ответ: $|MN| = \frac{1}{2}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Задача 1372</u>. Найти расстояние между плоскостями, проходящими через точки:

$$A_1(4, 5, 3, 2), B_1(5, 7, 5, 4), C_1(6, 3, 4, 4)$$

$$A_2(1, -2, 1, -3), B_2(3, -2, 3, -2), C_2(2, -4, 1, -4)$$

Решение.

Найдем порождающие векторы плоскостей:

$$A_1B_1 = (1, 2, 2, 2), A_1C_1 = (2, -2, 1, 2)$$

$$A_2B_2 = (2, 0, 2, 1), A_2C_2 = (1, -2, 0, -1)$$

Теперь найдем размерность пространства, натянутого на эти вектора (вектора записываем по строкам для нахождения ортогонального дополнения):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 3$. ФСР: $(-2, -1, 2, 0)$ – базис в ортогональном дополнении.

Соединим две произвольные точки, одна из которых лежит в первой, а другая - во второй плоскости (например, точки A_1 и A_2), и спроектируем полученный вектор на ортогональное дополнение:

$$A_2A_1 = (3, 7, 2, 5)$$

$$\alpha = \frac{((-2, -1, 2, 0)\,, (3, 7, 2, 5))}{((-2, -1, 2, 0)\,, (-2, -1, 2, 0)\,)} = -1$$

Получаем $(2, 1, -2, 0)$ – проекция A_2A_1 на ортогональное дополнение, $|(2, 1, -2, 0)| = 3$. Это и будет расстоянием между плоскостями.

Ответ: 3.

<u>Задача 1377</u>. Найти расстояние между многочленом $\frac{3}{5}x$ и аффинным подпространством многочленов вида $x^3 + P(x)$, $deg\, P(x) \le 2$ в аффинном евклидовом пространстве многочленов степени не выше 3 со скалярным произведением, заданным интегралом

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

Решение.

$1, x, x^2$ - базис в аффинном подпространстве. Найдем ортогональное дополнение $P(x)$ и спроектируем на него вектор, соединяющий точку подпространства (например, x^3) и $\frac{3}{5}x$ (то есть, вектор $x^3 - \frac{3}{5}x$).

Пусть ортогональное дополнение порождается $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тогда скалярные произведения $Q(x)$ с базисными векторами $P(x)$ должны быть равны 0:

$$0 = (Q(x), x^\alpha) = \int\limits_{-1}^{1} (ax^{\alpha+3} + bx^{\alpha+2} + cx^{\alpha+1} + dx^\alpha)\, dx =$$

$$= \left(\frac{a}{\alpha+4}x^{\alpha+4} + \frac{b}{\alpha+3}x^{\alpha+3} + \frac{c}{\alpha+2}x^{\alpha+2} + \frac{d}{\alpha+1}x^\alpha\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\alpha = 0: \quad \frac{2}{3}b + 2d = 0$$

$$\alpha = 1: \quad \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = 0$$

$$\alpha = 2: \quad \frac{2}{5}b + \frac{2}{3}d = 0$$

Получаем $b = d = 0$, $3a = 5c$. Тогда

$$Q(x) = 5x^3 - 3x$$

задает ортогональное дополнение.

Получили, что вектор $x^3 - \frac{3}{5}x$ и $Q(x)$ коллинеарны:

$$x^3 - \frac{3}{5}x = \frac{1}{5}Q(x)$$

Таким образом, проекция $x^3 - \frac{3}{5}x$ на $Q(x)$ равна $\frac{1}{5}Q(x)$. Тогда

$$\left|\frac{1}{5}Q(x)\right| = \frac{1}{5}\big(Q(x), Q(x)\big) = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1} Q^2(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1}(x^3 - \frac{3}{5}x)^2\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$.

Семинар 14. Операторы в евклидовых пространствах.

Задача 1379. Найти расстояние от точки $M(x_0^1, \dots, x_0^n)$ аффинного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ до гиперплоскости, заданной уравнением $a_1x^1 + \dots + a_nx^n + b = 0$.

Решение.

Вектор $v = (a_1, \dots, a_n)$ ортогонален гиперплоскости: возьмем две произвольные точки гиперплоскости $(x_1^1, \dots, x_1^n)$ и $(x_2^1, \dots, x_2^n)$. Для них выполнены равенства

$$a_1x_1^1 + \dots + a_nx_1^n + b = 0$$

$$a_1x_2^1 + \dots + a_nx_2^n + b = 0.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$a_1(x_1^1 - x_2^1) + \dots + a_n(x_1^n - x_2^n) = 0 \Leftrightarrow ((a_1, \dots, a_n), (x^1 - x^2)) = 0$$

для произвольного вектора, лежащего в гиперплоскости.

Таким образом, $(a_1, \dots, a_n)$ – базис ортогонального дополнения к линейной части гиперплоскости.

Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 \neq 0$. Точка $O\left(-\frac{b}{a_1}, 0, \dots, 0\right)$ лежит в гиперплоскости,

$$OM = \left(x_0^1 + \frac{b}{a_1}, x_0^2, \cdots, x_0^n\right)$$

Проектируем вектор OM на $v = (a_1, \dots, a_n)$:

$$pr_v OM = \frac{(OM, v)}{|v|} = \frac{\left|a_1\left(x_0^1 + \dfrac{b}{a_1}\right) + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n\right|}{\sqrt{{a_1}^2 + \dots + a_n^2}}$$

Ответ: $\frac{\left|a_1\left(x_0^1 + \frac{b}{a_1}\right) + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n\right|}{\sqrt{{a_1}^2 + \dots + a_n^2}}$.

Правильные многогранники в $\mathbb{R}^n$

В $\mathbb{R}^3$ есть 5 правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Какие правильные многогранники существуют в $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$? В пространстве любой размерности можно построить:

- n-мерный куб. n-куб в $\mathbb{R}^n$ удобно задавать следующим образом:

Вершины находятся в точках с координатами $(\pm 1, \dots, \pm 1)$. У n-куба 2^n вершин.

Гиперграни задаются уравнениями $x_i = \pm 1,\ i = 1, \dots, n$. У n-куба $2n$ гиперграней. Непараллельные гиперграни перпендикулярны.

Длина диагонали n-куба (в нашем случае со стороной 2) равна $2\sqrt{n}$.

- гипероктаэдр (правильный многогранник, двойственный кубу, вершинами которого являются центры граней куба – строится аналогично октаэдру в $\mathbb{R}^3$).

Вершины гипероктаэдра находятся в точках с координатами $x_i = \pm 1, x_j = 0, i \neq j$ (точка пересечения грани с соответствующей осью координат).

<u>Упражнение</u>: найти уравнения гиперграней гипероктаэдра, найти углы между ними.

- n-мерный правильный симплекс (аналог правильного тетраэдра в $\mathbb{R}^3$). Его удобно задавать в $\mathbb{R}^{n+1}$ (по аналогии с правильным треугольником, вершины которого в $\mathbb{R}^3$ удобно располагать в точках $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$).

Вершины n-симплекса находятся в $\mathbb{R}^{n+1}$ в точках с координатами $x_i = 1, x_j = 0, i \neq j$. У n-симплекса $n+1$ вершина, он лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнением

$$x^1 + \cdots + x^{n+1} = 1$$

<u>Упражнение</u>: найти угол между гипергранями правильного n-симплекса.

Особенность n-симплекса: любые две его вершины соединены ребром. Многоугольником, двойственным n-симплексу тоже будет n-симплекс.

Оказывается, при $n \geq 5$ других правильных многогранников в $\mathbb{R}^n$ не существует.

При $n = 4$ есть еще 3 правильных многогранника.

<u>Метод наименьших квадратов</u>
Можно сказать, что метод наименьших квадратов – решение несовместной системы линейных уравнений. Пусть

$$Ax = b, \quad A \in Mat_{mxn}(R), x \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$$

v_i- i-ый столбец матрицы A. Спроектируем b на $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$:

$$b = b^{\parallel} + b^{\perp}$$

$$b^{\parallel} = x^1 v_1 + \cdots + x^m v_m$$

$(x^1, \dots, x^m)$ – псевдорешение исходной системы.

<u>Задача 1397 п.3.</u> Методом наименьших квадратов найти псевдорешение несовместной системы: $\begin{cases} 2x^1 - x^3 = 1 \\ x^2 + x^3 = -1 \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 - x^3 = -1 \end{cases}$

Решение.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найдем ранг столбцов системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $u = (-3, 1, 1, 5)$

$rk = 3$, значит, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ удобнее проектировать на u – ортогональное дополнение $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

$$b^{\perp} = \frac{(b, u)}{(u, u)} u = -\frac{1}{4} u = -\frac{1}{4}(-3, 1, 1, 5)$$

Тогда

$$b^{\parallel} = b - b^{\perp} = (1, -1, 0, -1) + \frac{1}{4}(-3, 1, 1, 5) = \frac{1}{4}(1, -3, 1, 1)$$

Теперь ищем псевдорешение системы, то есть, решаем исходную систему со столбцом $b^{\parallel}$ вместо b:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 \\ 1 & -1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 & 1/4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 \\ 0 & 2 & -3 & -1/4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем псевдорешение:

$$x_1 = 0, x_2 = -1/2, x_3 = -1/4.$$

Ответ: $(0, -1/2, -1/4)$.

Операторы в евклидовых пространствах.

Сопряженный оператор

Пусть V – евклидово пространство, $f: V \to V$ – линейный оператор. Оператор $g: V \to V$ называется **сопряженным** к f, если $\forall u, v \in V$ выполнено $(f(u), v) = \big(u, g(v)\big)$.

Почему это определение корректно (т.е. почему сопряженный оператор существует и единственен), обсудим позже.

Задача 1409. Найти сопряженный оператор к оператору f поворота евклидовой плоскости на угол α.

Решение.

Матрица оператора f (в стандартном базисе со стандартным скалярным произведением):

$$A_f = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Пусть $v = (v_1, v_2)^T$, $u = (u_1, u_2)^T$. Тогда

$$f(u) = \begin{pmatrix} u_1 \cos\alpha - u_2 \sin\alpha \\ u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$(f(u), v) = v_1(u_1 \cos\alpha - u_2 \sin\alpha) + v_2(u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha) =$$

$$= u_1(v_1 \cos\alpha + v_2 \sin\alpha) + u_2(-v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha)$$

Таким образом,

$$g(v) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

То есть, сопряженным к оператору поворота на угол α против часовой стрелки является оператор поворота на угол α по часовой стрелке.

Ответ: оператор поворота на угол $-\alpha$.

Задача. Рассмотрим пространство

$$V = \{P(x)e^{-x^2}, P(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

Со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx.$$

Найти $\left(\frac{d}{dx}\right)^*$ - оператор, сопряженный к оператору дифференцирования $\frac{d}{dx}: V \to V$.

Решение.

$$\left(\frac{d}{dx}f, g\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,df(x) = g(x)f(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)\,dx = \left(f, -\frac{d}{dx}g\right)$$

Таким образом, $\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования кососимметричен.

Ответ: $\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx}$.

Примеры сопряженных операторов:

- Оператор, сопряженный к произведению операторов:

$$(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$$

- Оператор умножения на функцию:

Пусть, например, $\varphi \in \mathbb{R}[x]$ (φ – многочлен). Рассмотрим оператор

$$A: f \to \varphi f$$

в пространстве V со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx.$$

Тогда $A^* = A$ – это самосопряженный оператор.

- Линейный дифференциальный оператор:

Рассмотрим оператор

$$L: \psi \to \varphi_n \psi^{(n)} + \dots + \varphi_1 \psi' + \varphi_0 \psi$$

В пространстве V со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx.$$

<u>Упражнение</u>: найти L^*.

<u>Существование сопряженного оператора</u>

Поймем, почему сопряженный оператор существует (в конечномерном случае):

Пусть $f: V \to V$ – линейный оператор, $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис V. Тогда

$$\forall u, v \in V \quad (f(u), v) = \big(u, g(v)\big).$$

В частности, это равенство выполнено для $e_1, \dots, e_n$:

$$\big(f(e_i), e_j\big) = \Big(e_i, g\big(e_j\big)\Big) \;\; \forall\, i, j = 1, \dots, n$$

Пусть $A_f = \big(a_{ij}\big), A_g = \big(b_{ij}\big)$. Так как $f(e_i)$ - i-ый столбец A_f, $g\big(e_j\big)$ - j-ый столбец A_g, получаем:

$$\left(a_i^k e_k, e_j\right) = \left(e_i, b_j^l e_l\right) \Leftrightarrow \bar{a}_i^k\left(e_k, e_j\right) = b_j^l(e_i, e_l) \Leftrightarrow \bar{a}_i^k \delta_{kj} = b_j^l \delta_{il} \Leftrightarrow \bar{a}_i^j = b_j^i$$

Таким образом,

$$A_g = \overline{A_f^T}$$

То есть, мы не только доказали, что самосопряженный оператор существует, но и указали в явном виде его матрицу в ортонормированном базисе – это транспонированная матрица оператора f (в евклидовом пространстве) и сопряженная к транспонированной матрице оператора f (в унитарном пространстве).

Семинар 15. Самосопряженные операторы.

Задача 1410. Пусть оператор f в некотором базисе евклидова (эрмитова) пространства имеет матрицу A_f, а скалярное произведение - матрицу Грама G. Найти матрицу сопряженного оператора в этом базисе.

Решение.

Пусть $f: V \to V$ – линейный оператор, $e_1, \dots, e_n$ – базис V. Тогда

$$\forall u, v \in V \quad (f(u), v) = \big(u, g(v)\big).$$

В частности, это равенство выполнено для $e_1, \dots, e_n$:

$$\big(f(e_i), e_j\big) = \Big(e_i, g\big(e_j\big)\Big) \ \forall\, i, j = 1, \dots, n$$

Пусть $A_f = \big(a_{ij}\big), A_g = \big(b_{ij}\big)$. Так как $f(e_i)$ - i-ый столбец A_f, $g\big(e_j\big)$ - j-ый столбец A_g, получаем:

$$\big(a_i^k e_k, e_j\big) = \big(e_i, b_j^l e_l\big) \Leftrightarrow \bar{a}_i^k\big(e_k, e_j\big) = b_j^l(e_i, e_l) \Leftrightarrow \bar{a}_i^k g_{kj} = b_j^l g_{il} \Leftrightarrow \overline{A_f^T} G = G A_g$$

Таким образом,

$$A_g = G^{-1}\overline{A_f^T}G$$

В евклидовом пространстве

$$A_g = G^{-1}A_f^T G$$

Обратите внимание – в унитарном пространстве ответ зависит от того, как определяется эрмитово скалярное произведение – в нашем случае мы приняли, что оно антилинейно по первому аргументу и линейно по второму.

Ответ: $A_g = G^{-1}\overline{A_f^T}G$.

Самосопряженный оператор
Самосопряженный оператор сопряжен сам себе: $f: V \to V$

$$\forall u, v \in V \quad (f(u), v) = \big(u, f(v)\big).$$

Свойства самосопряжённого оператора:

- Все собственные значения вещественны
- Собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям ортогональны
- $KerA_f \oplus \mathrm{Im}A_f = V$
- Для любого самосопряженного оператора существует ортонормированный базис (который называется каноническим), в котором его матрица диагональна

Задача 1449 п.3. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для самосопряженного оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение.

Находим собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9) = 0$$

Получаем корни: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Ищем собственные векторы:

$\lambda_1 = 3$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 6$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 9$:

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, канонический базис $e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Операторы, сохраняющие скалярное произведение

Унитарный оператор

V – эрмитово пространство. Оператор $f: V \to V$ – **унитарный**, если

$$\forall u, v \in V \quad (f(u), f(v)) = (u, v).$$

Для матрицы унитарного оператора A_f выполнено соотношение $\overline{A_f^T} A_f = E$ (доказательство аналогично задаче 1410). Отсюда следует, что все собственные значения унитарного оператора по модулю равны 1 (пусть $f(v) = \lambda v$, λ – собственное значение, тогда $\lambda\bar{\lambda}(v, v) = (\lambda v, \lambda v) = \big(f(v), f(v)\big) = (v, v)$, откуда $|\lambda| = 1$).

Для любого унитарного оператора существует ортонормированный базис (который называется каноническим), в котором его матрица диагональна.

Задача 1507 п.3. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для унитарного оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Находим собственные значения (для удобства вычислений вначале найдем собственные векторы для матрицы $3A$, затем разделим полученные значения на 3):

$$|3A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 15\lambda + 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 9) = 0$$

Получаем корни: $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2\sqrt{2}i$. Тогда собственные значения A:

$$\mu_1 = 1, \mu_{2,3} = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} i$$

Канонический вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1 + 2\sqrt{2}i}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1 - 2\sqrt{2}i}{3} \end{pmatrix}$$

Ищем собственные векторы:

$\mu_1 = 1$ $(\lambda_1 = 3)$:

$$3A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При нахождении собственных векторов, соответствующих $\mu_{2,3}$ для удобства приведения комплексной матрицы к ступенчатому виду занулим одну из строк (в обеих случаях это первая строка, так как она является линейной комбинацией второй и третьей строк)

$\mu_2 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} i$ $(\lambda_2 = 1 + 2\sqrt{2}i)$:

$$3A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{2}i & 1 & 2 \\ 1 & 1 - 2\sqrt{2}i & -2 \\ -2 & 2 & -2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - 2\sqrt{2}i & -2 \\ -2 & 2 & -2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - 2\sqrt{2}i & -2 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2}i & -2 - \sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{2}i \\ 2 + \sqrt{2}i \\ 2 - 2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем

$e_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{2}i \\ 2 + \sqrt{2}i \\ 2 - 2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$.

$\mu_3 = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} i$ $(\lambda_3 = 1 - 2\sqrt{2}i)$:

$$3A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2}i & 1 & 2 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2}i & -2 \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2}i & -2 \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2}i & -2 \\ 0 & 2 + 2\sqrt{2}i & -2 + \sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{2}i \\ 2 - \sqrt{2}i \\ 2 + 2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем

$e_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{2}i \\ 2-\sqrt{2}i \\ 2+2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2\sqrt{2}i}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\sqrt{2}i}{3} \end{pmatrix}$, канонический базис:

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2-\sqrt{2}i \\ 2+\sqrt{2}i \\ 2-2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{2}i \\ 2-\sqrt{2}i \\ 2+2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$.

Ортогональный оператор

V – евклидово пространство. Оператор $f: V \to V$ – **ортогональный**, если

$$\forall u, v \in V \quad (f(u), f(v)) = (u, v).$$

Для матрицы ортогонального оператора A_f выполнено соотношение $A_f^T A_f = E$ (доказательство аналогично задаче 1410). Отсюда следует, что все вещественные собственные значения ортогонального оператора равны ± 1 (пусть $f(v) = \lambda v$, λ – собственное значение, тогда $\lambda^2(v, v) = (\lambda v, \lambda v) = \big(f(v), f(v)\big) = (v, v)$, откуда $\lambda = \pm 1$).

В отличие от унитарного оператора, нельзя утверждать, что существует ортонормированный базис, в котором матрица ортогонального оператора диагональна, так как собственные значения могут быть комплексными.

Однако, для любого ортогонального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \pm 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Блоки 2×2 – матрицы поворота $\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$, блоки 1×1 – собственные значения ± 1.

Теоретический способ нахождения канонического базиса ортогонального оператора

Пусть λ – комплексное собственное значение:

$$A_f w = \lambda w$$

Сопрягая это равенство, получаем (т.к. A_f – вещественнозначная матрица):

$$A_f\overline{w} = \bar{\lambda}\overline{w}$$

Таким образом, если λ – комплексное собственное значение, то и $\bar{\lambda}$– комплексное собственное значение, и собственный вектор, соответствующий $\bar{\lambda}$ равен $\overline{w}$. Пусть

$$u := Re\,w, \quad v := Im\,w$$

Тогда

$$f(u+iv) = \lambda(u+iv)$$

$$f(u-iv) = \lambda(u-iv)$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$f(u) = \left(\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}\right)u + i\left(\frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2}\right)v = (Re\,\lambda)u - (Im\,\lambda)v$$

Аналогично (вычитая), получаем:

$$f(v) = \ (Im\,\lambda)u + (Re\,\lambda)v$$

Так как $|\lambda| = 1$, то $\exists\varphi$: $\quad \lambda = cos\,\varphi - i\,sin\,\varphi$

Таким образом, если w и $\overline{w}$ – базисные векторы соответствующего унитарного оператора, то из них можно получить базисные векторы для ортогонального оператора, взяв их вещественную и мнимую части $Re\,w$ и $Im\,w$.

Семинар 16. Полярное разложение.

Задача 1452. Доказать, что два самосопряженных оператора в евклидовом или эрмитовом пространстве коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий канонический базис.

Решение.

Пусть $f, g: W \to W$.

1) Докажем, что: $fg = gf \Rightarrow$ есть базис из общих собственных векторов.

Пусть V – собственное подпространство для f: $\forall v \in V$: $f(v) = \lambda v$. Тогда

$$fg(v) = gf(v) = \lambda g(v) \Rightarrow g(v) \in V$$

То есть, V – инвариантное подпространство для g.

Если V_i – собственное подпространство для f, то

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

Мы показали, что любое собственное подпространство для f инвариантно для g. Рассмотрим ограничение $g|_{V_i}$ – это будет самосопряженный оператор $V_i \to V_i$. Значит, для него существует канонический базис. Объединим теперь канонические базисы для всех пространств $V_i,\ i = 1, \dots, n$ – получим базис пространства W. Таким образом, у f и g есть базис, состоящий из общих собственных векторов.

2) Докажем, что: есть базис из общих собственных векторов $\Rightarrow fg = gf$.

Если у f и g есть базис из общих собственных векторов, значит, в этом базисе матрицы операторов f и g диагональны, значит, они коммутируют и $fg = gf$.

Ортогональный оператор в $\mathbb{R}^3$

Пусть $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – ортогональный оператор. Тогда его матрица в каноническом базисе:

1) $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ или 2) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

Причем можно считать, что случай 1) – это частный случай 2) при $\varphi = 0$, или $\varphi = \pi$. Таким образом, достаточно рассмотреть только случай 2).

Пусть e_1, e_2, e_3 – канонический базис оператора f. Тогда под действием оператора f происходит поворот на угол φ в плоскости, натянутой на вектора e_1 и e_2, с отражением относительно этой плоскости, если $\lambda_3 = -1$ и без отражения, если $\lambda_3 = 1$.

Таким образом, для нахождения канонического базиса для ортогонального оператора в $\mathbb{R}^3$ достаточно найти собственный вектор e_3, отвечающий собственному значению

$\lambda_3 = \pm 1$. Тогда векторы e_1 и e_2 - произвольный ортогональный базис в плоскости, перпендикулярной e_3.

Задача 1516 п.2. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

Находим собственные значения (для удобства вычислений вначале найдем собственные векторы для матрицы $3A$, затем разделим полученные значения на 3):

$$|3A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 18\lambda + 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 9) = 0$$

Получаем корни: $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = 3$ Тогда собственные значения A:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, \mu_3 = 1$$

Канонический вид (знаки $\pm$ определим чуть позже):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ищем собственные векторы:

$\mu_3 = 1$ $(\lambda_3 = 3)$:

$$3A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

В качестве v_1 выбираем любой вектор в плоскости, перпендикулярной e_3, например,

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В качестве v_2 выбираем векторное произведение векторов v_1 и v_3:

$v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2)$. Нормируя, получаем $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Теперь определим знаки $\pm$ в каноническом виде матрицы оператора: должно выполняться

$$f(e_1) = \frac{1}{2}e_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$$

$$f(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$f(e_1) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$$

И канонический вид матрицы оператора выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Можно сразу найти канонический вид матрицы 3×3 ортогонального оператора, не занимаясь поиском собственных значений.

Пусть A – ортогональная матрица 3×3. Ее канонический вид

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Знак ± 1 равен определителю матрицы B (а значит, и матрицы A, т.к. это инвариант):

$$\pm 1 = det\, B = det\, A$$

След матрицы – тоже ее инвариант, а зная след, мы можем найти $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$\pm 1 + 2\cos\varphi = \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A$$

Задача 1515 п.1. Не находя канонического базиса, найти канонический вид ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$det\, A = -1$$

$$\operatorname{tr} A = \frac{5}{7} = -1 + 2\cos\varphi\,, \text{откуда}$$

$$\cos\varphi = \frac{6}{7},\ \sin\varphi = \pm\frac{\sqrt{13}}{7}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{\sqrt{13}}{7} & 0 \\ \frac{\sqrt{13}}{7} & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Полярное разложение

Пусть A – матрица, $det\, A \neq 0$. Тогда A можно представить в виде произведения симметричной и ортогональной матриц:

$$A = S_1 Q_1 = Q_2 S_2$$

где $S_i^T = S_i$ – симметричная положительно определенная матрица, $Q_i^T Q_i = E$ – ортогональная матрица.

Это является в некотором смысле обобщением представления комплексного числа в виде

$$a + bi = Re^{i\varphi}.$$

Допустим, полярное разложение существует. Тогда выполняется

$$AA^T = S_1 Q_1 Q_1^T S_1^T = S_1^2$$

$$A^T A = S_2^T Q_2^T Q_2 S_2 = S_2^2$$

Чтобы найти S_1 (S_2), нужно извлечь квадратный корень из AA^T (A^TA). Это можно сделать, так как AA^T (A^TA) – симметрическая матрица: $(AA^T)^T = AA^T$ ($(A^TA)^T = A^TA$) с положительными собственными значениями.

Тогда $Q_1 = S_1^{-1}A$ (соответственно, $Q_2 = AS_2^{-1}$).

Задача 1550. Представить оператор A, заданный своей матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ в некотором ортонормированном базисе, в виде произведения положительного самосопряженного и ортогонального операторов.

Решение.

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & -100 \\ -100 & 125 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Находим собственные значения (для удобства вычислений вначале найдем собственные векторы для матрицы $\frac{1}{25}B$, затем умножим полученные значения на 25):

$$\left|\frac{1}{25}\mathrm{B} - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

Получаем корни: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$ Тогда собственные значения B:

$$\mu_1 = 25, \mu_2 = 225$$

Канонический вид матрицы B:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\tilde{S} = \sqrt{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы матрицы B:

$\mu_1 = 25$ ($\lambda_1 = 1$):

$$\frac{1}{25}\mathrm{B} - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mu_2 = 225$ ($\lambda_2 = 9$):

$$\frac{1}{25}\mathrm{B} - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица перехода:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Обратная к ней:

$$C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$S = C\tilde{S}C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

Обратная к ней:

$$S^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$Q = S^{-1}A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

<u>Приведение кососимметрического оператора к каноническому виду</u>

Данная задача аналогична задаче приведения ортогонального оператора к каноническому виду. Для любого кососимметрического оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Блоки 2×2 – матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}$, блоки 1×1 – нулевые.

Собственные значения кососимметрического оператора - чисто мнимые ia_k. Базис строится так же, как и для ортогонального оператора.

В случае $\mathbb{R}^3$ базис ищем так же, как и для ортогонального оператора: находим собственный вектор e_3, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$, затем выбираем произвольную пару ортогональных векторов в плоскости, перпендикулярной e_3.

Семинар 17. Билинейная функция.

Билинейная функция – функция $\varphi: V \times V \to K$, которая линейна по каждому аргументу.

Пусть $x = x^i e_i, y = y^j e_j$. Тогда $\varphi(x,y) = \varphi\left(x^i e_i, y^j e_j\right) = x^i y^j \varphi\left(e_i, e_j\right)$ – билинейная функция полностью определяется своими значениями на базисных векторах. Пусть $\varphi\left(e_i, e_j\right) = b_{ij}$. Тогда

$$\varphi(x,y) = x^i b_{ij} e_j = x^T B_\varphi y$$

Где $B_\varphi = (b_{ij})$ – матрица билинейной функции.

При переходе к новому базису $e_i \to \tilde{e}_i$ матрица билинейной функции преобразуется по закону

$$\tilde{B}_\varphi = C^T B_\varphi C$$

У билинейной функции есть левое и правое ядро:

$$LKer\varphi: \{x \in V: \varphi(x,y) = 0\ \forall y \in V\}$$

$$RKer\varphi: \{y \in V: \varphi(x,y) = 0\ \forall x \in V\}$$

Вообще говоря, $LKer\varphi \neq RKer\varphi$.

$B_\varphi y = 0 \Rightarrow y \in RKer\varphi$. Верно и в другую сторону:

$$y \in RKer\varphi \Rightarrow \forall i\ \varphi(e_i, y) = 0 \Rightarrow \forall i\ \ e_i B_\varphi y = 0 \Rightarrow B_\varphi y = \bar{0}$$

Таким образом,

$$y \in RKer\varphi \Leftrightarrow B_\varphi y = 0$$

Аналогично,

$$x \in LKer\varphi \Leftrightarrow B_\varphi^T x = 0$$

Пример билинейной функции φ такой, что $LKer\varphi \neq RKer\varphi$:

Пусть $B_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $LKer\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $RKer\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Однако, так как ранги B_φ и B_φ^T совпадают, для всякой билинейной функции верно

$$dimLKer\varphi = dimRKer\varphi = n - rkB_\varphi$$

Для приложений важны два вида билинейных функций: симметричные и кососимметричные (в дальнейшем будем рассматривать только их).

<u>Симметричная билинейная функция</u>:

$$\forall x, y \in V: \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \Rightarrow B_\varphi = B_\varphi^T$$

Кососимметричная билинейная функция:

$$\forall x, y \in V: \quad \varphi(x,y) = -\varphi(y,x) \Rightarrow -B_\varphi = B_\varphi^T$$

Для симметричных и кососимметричных билинейных функций $LKer\varphi = RKer\varphi$.

Упражнение: верно ли обратное, т.е. следует ли из $LKer\varphi = RKer\varphi$ симметричность или кососимметричность билинейной функции?

Пусть φ - симметричная или кососимметричная билинейная функция. Говорят, что вектора x и y **ортогональны относительно φ**, если $\varphi(x,y) = 0$.

Пусть $U \in V$ – подпространство. Тогда $U^{\perp_\varphi} = \{x \in V : \varphi(x,y) = 0\ \forall y \in U\}$ – **ортогональное дополнение относительно билинейной функции φ**. В случае вырожденной билинейной функции $U \cap U^{\perp_\varphi} \neq \{0\}$.

Квадратичные формы
С понятием билинейной функции тесно связано понятие квадратичной формы. Подставляя в билинейную функцию вектора x и x, где $x = x^i e_i$, получаем **квадратичную форму $\varphi(x,x)$** – однородный многочлен 2 степени относительно x^i.

Матрица квадратичной формы – матрица соответствующей билинейной функции $\varphi(x,x)$.

Таким образом, по билинейной функции $\varphi(x,y)$ однозначно строится квадратичная форма $\varphi(x,x)$. И наоборот – по квадратичной форме $\varphi(x,x)$ можно восстановить билинейную функцию $\varphi(x,y)$, если $charK \neq 2$:

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y), \text{откуда}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x,x) - \varphi(y,y))$$

Теорема. Над полем действительных чисел любая симметричная билинейная функция может быть приведена к диагональному виду: существует базис, в котором B_φ имеет вид:

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{над } \mathbb{R} \text{ и } B_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{над } \mathbb{C}$$

Пусть p – число “1”, q – число “-1”, r – число “0” в каноническом виде квадратичной формы. Тогда $p + q + r = n$.

Теорема инерции: p, q, r не зависят от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Задача 1258 п.6. Методом Лагранжа привести квадратичную функцию к нормальному виду, найти матрицу соответствующего линейного преобразования:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4$$

Решение.

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приводим квадратичную форму к нормальному виду методом Лагранжа:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_4 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 - 2(x_3 + x_4)^2 + 2x_4^2$$

Замена:

$$\tilde{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$\tilde{x}_2 = \sqrt{2}x_4$$

$$\tilde{x}_3 = \sqrt{2}(x_2 + x_3)$$

$$\tilde{x}_4 = \sqrt{2}(x_3 + x_4)$$

Нормальный вид:

$$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2$$

$$\tilde{B}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Обратите внимание: координаты базиса $\tilde{x_i}$ в базисе x_i записаны по строкам.

Ответ: $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2$.

Квадратичная форма $\varphi(x, x)$ называется **положительно определенной**, если

$$\varphi(x, x) > 0 \ \forall x \neq \bar{0}$$

Квадратичная форма $\varphi(x, x)$ называется **отрицательно определенной**, если

$$\varphi(x,x) < 0 \ \forall x \neq \bar{0}$$

Критерий Сильвестра (положительной определенности квадратичной формы):

Квадратичная форма $\varphi(x,x)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ все угловые миноры матрицы B_φ положительны.

Квадратичная форма $\varphi(x,x)$ отрицательно определена $\Leftrightarrow$ угловые миноры четного порядка матрицы B_φ положительны, а нечетного порядка – отрицательны.

Задача 1257 п.1. Для квадратичных функций f и g выяснить, существует ли линейное преобразование, переводящее функцию f в функцию g:

$$f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

$$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$$

Решение.

Такая замена будет существовать тогда и только тогда, когда у форм f и g будет одинаковый канонический вид. Приведем f и g к каноническому виду:

$$f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = 2(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (\,x_2 + x_3)^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2$$

$$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2 = 6(y_1 + y_2)^2 - y_1^2 = \tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2$$

Канонический вид квадратичных форм f и g не совпадает, значит, такой замены координат не существует.

Ответ: нет.

Семинар 18. Кососимметрическая билинейная функция.

Задача 1222. Пусть φ – невырожденная билинейная функция, l – линейная функция. Показать, что существует вектор b такой, что для всех векторов a имеет место равенство $l(a) = \varphi(a, b)$.

Решение.

Пусть

$$l(a) = \alpha_1 a^1 + \dots + \alpha_n a^n = (a^1, \dots, a^n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(a, b) == (a^1, \dots, a^n) B_\varphi \begin{pmatrix} b^1 \\ \dots \\ b^n \end{pmatrix}$$

Тогда должно выполняться

$$B_\varphi \begin{pmatrix} b^1 \\ \dots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Так как матрица B_φ невырождена, то для любого столбца $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ такая система будет иметь решение.

Задача 1265 п.1. Найти все значения параметра a, при которых данная квадратичная форма положительно определена:

$$5x_1^2 + x_2^2 + a x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Решение.

Матрица квадратичной формы:

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Воспользуемся критерием Сильвестра: все угловые миноры матрицы B_φ должны быть положительны.

$$|Q_1| = 5 > 0, |Q_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, |Q_3| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 2 > 0 \text{ при } a > 2.$$

Ответ: при $a > 2$.

Задача 1264. В пространстве $\mathbb{R}_1[x]$ многочленов степени не выше 1 дана квадратичная функция

$$\varphi(P) = \int_0^a P^2(x)(x-1)\,dx$$

где$a > 0$. В зависимости от значений параметра a найти индекс инерции квадратичной формы:

Решение.

Пусть $P(x) = \lambda + \mu x$. Тогда $\varphi(P)$ – квадратичная форма от λ и μ.

$$\int_0^a (\lambda + \mu x)^2(x-1)\,dx = \int_0^a (\mu^2 x^3 + (2\lambda\mu - \mu^2)x^2 + (\lambda^2 - 2\lambda\mu)x - \lambda^2)\,dx =$$

$$= \frac{\mu^2}{4}a^4 + \frac{(2\lambda\mu - \mu^2)}{3}a^3 + \frac{(\lambda^2 - 2\lambda\mu)}{2}a^2 - \lambda^2 a =$$

$$= \lambda^2\left(\frac{a^2}{2} - a\right) + 2\lambda\mu\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) + \lambda^2\left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3}\right)$$

Тогда

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} \left(\frac{a^2}{2} - a\right) & \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) \\ \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) & \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Получаем, что $\varphi(P)$ положительно определена (учитывая, что по условию , $a > 0$) при:

$$\begin{cases} |Q_1| = \frac{a^2}{2} - a > 0 \\ |Q_2| = detB_\varphi > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (2, +\infty) \\ a^2 - 6a + 6 > 0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (2, +\infty) \\ a \in \left(0, 3 - \sqrt{3}\right) \cup \left(3 + \sqrt{3}, +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a \in \left(3 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ - при таких значениях a получаем сигнатуру $(+,+)$.

$\varphi(P)$ отрицательно определена при:

$$\begin{cases} |Q_1| = \frac{a^2}{2} - a < 0 \\ |Q_2| = detB_\varphi > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (0, 2) \\ a^2 - 6a + 6 > 0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (2, +\infty) \\ a \in \left(0, 3 - \sqrt{3}\right) \cup \left(3 + \sqrt{3}, +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a \in \left(0, 3 - \sqrt{3}\right)$ - при таких значениях a получаем сигнатуру $(-,-)$.

Тогда при $a \in \left(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\right)$ $\varphi(P)$ знаконеопределенна – получаем сигнатуру $(+,-)$.

Из соображений непрерывности получаем, что в точках $a = 3 - \sqrt{3}$ и $a = 3 + \sqrt{3}$ $\varphi(P)$ имеет сигнатуру $(0,-)$ и $(+,0)$ соответственно.

Ответ: при $a \in \left(0, 3-\sqrt{3}\right)$ сигнатура $(-,-)$, при $a = 3-\sqrt{3}$ сигнатура $(0,-)$, при $a \in \left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$ сигнатура $(+,-)$, при $a = 3+\sqrt{3}$ сигнатура $(+,0)$, при $a \in \left(3+\sqrt{3}, +\infty\right)$ сигнатура $(+,+)$.

<u>Приведение кососимметрической билинейной функции к каноническому виду</u>

Для любой кососимметрической билинейной функции φ существует базис, в котором ее матрица имеет блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_2\tilde{y}_1 + \tilde{x}_3\tilde{y}_4 - \tilde{x}_4\tilde{y}_3 + \cdots$$

Отсюда, в частности, следует, что кососимметрическая билинейная функция в пространствах нечетной размерности всегда вырождена.

<u>Задача 1261 п.1</u>. Привести кососимметрическую билинейную функцию к каноническому виду (с нахождением преобразования):

$$x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 - 2y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2$$

Решение.

$$x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 - 2y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 =$$

$$= x_1(y_2 + 2y_3) - y_1(x_2 + 2x_3) + x_2y_3 - x_3y_2$$

Сделаем замену $\tilde{x}_2 = x_2 + 2x_3$, $\tilde{y}_2 = y_2 + 2y_3$, получим

$$x_1\tilde{y}_2 - y_1\tilde{x}_2 + (\tilde{x}_2 - 2x_3)y_3 - x_3(\tilde{y}_2 - 2y_3) = (x_1 - x_3)\tilde{y}_2 - (y_1 - y_3)\tilde{x}_2$$

Сделаем замену $\tilde{x}_1 = x_1 - x_3$, $\tilde{y}_1 = y_1 - y_3$, получим

$$\tilde{x}_1\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1\tilde{x}_2$$

Таким образом,

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Замена:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 - x_3 \\ \tilde{x}_2 = x_2 + x_3 \\ \tilde{x}_3 = x_3 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \\ x_2 = \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_3 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \end{cases} \text{ и матрица перехода } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\tilde{x}_1\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1\tilde{x}_2$.

Приведение пары форм к каноническому виду. 1 способ.
Пусть φ и ψ – квадратичные формы, φ – положительно определенная квадратичная форма.

Задача: одним преобразованием привести матрицу φ к единичной матрице, матрицу ψ к диагональному виду.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис.

1) Методом Лагранжа приводим φ к нормальному виду: $C_1: \{e_1, \dots, e_n\} \to \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$:

$$\varphi\colon\ \tilde{B}_\varphi = C_1^T B_\varphi C_1 = E$$

$$\psi\colon\ \tilde{B}_\psi = C_1^T B_\psi C_1$$

2) Ортогональной заменой приводим ψ к диагональному виду: $C_2: \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\} \to \{\widetilde{\tilde{e}_1}, \dots, \widetilde{\tilde{e}_n}\}$:

$$\varphi\colon\ \widetilde{\tilde{B}_\varphi} = C_2^T \tilde{B}_\varphi C_2 = E \text{ (так как } C_2 \ - \text{ ортогональная матрица)}$$

$$\psi\colon\ \widetilde{\tilde{B}_\varphi} = C_2^T \tilde{B}_\psi C_2 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Почему существует ортогональное преобразование, приводящее билинейную функцию к диагональному виду? Дело в том, что при ортогональных преобразованиях матрица оператора и матрица билинейной функции преобразуются одинаково:

Пусть ψ – билинейная функция, B_ψ – ее матрица в базисе $e_1, \dots, e_n$. В этом же базисе рассмотрим линейный оператор

$$f\colon V \to V\colon \quad A_f = B_\psi$$

$A_f = B_\psi$ – симметрическая матрица, значит, f – самосопряженный оператор (при стандартном скалярном произведении), значит, существует ортонормированный базис $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$, в котором $A_f = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Пусть C – матрица перехода (C ортогональна, так как это матрица перехода от одного ортогонального базиса к другому). Тогда

$$\tilde{B}_\psi = C^T B_\psi C = C^T A_f C = C^{-1} A_f C = \tilde{A}_f = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Таким образом, в этом базисе матрица билинейной функции тоже будет ортогональной. Значит, для любой симметричной билинейной функции существует ортогональное преобразование, с помощью которого она диагонализируется.

Задача 1661 п.9. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду и указать канонический вид:

$$3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+3x_4^2+2x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+2x_2x_4$$

Решение.

$$B_\varphi=\begin{pmatrix}3&0&1&-2\\0&3&-2&1\\1&-2&3&0\\-2&1&0&3\end{pmatrix}$$

Находим собственные значения (обратите внимание, что формально мы находим собственные значения матрицы соответствующего оператора, а не квадратичной формы):

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&0&1&-2\\0&3-\lambda&-2&1\\1&-2&3-\lambda&0\\-2&1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(3-\lambda)^4-10(3-\lambda)^2+9=0$$

Получаем корни: $\lambda_1=2,\lambda_2=4,\lambda_3=6,\lambda_4=0$.

Находим собственные векторы:

$\lambda_1=2$:

$$B_\varphi-\lambda_1E=\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&1&-2&1\\1&-2&1&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&1&-2&1\\0&-2&0&2\\0&1&2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&1&-2&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda_2=4$:

$$B_\varphi-\lambda_2E=\begin{pmatrix}-1&0&1&-2\\0&-1&-2&1\\1&-2&-1&0\\-2&1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&2&-1\\0&-2&0&-2\\0&1&-2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda_3=6$:

$$B_\varphi - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_4 = 0$:

$$B_\varphi - \lambda_4 E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Получаем

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ортогональное преобразование:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix}$$

Канонический вид:

$$2\tilde{x}_1^2 + 4\tilde{x}_2^2 + 6\tilde{x}_3^2$$

Ответ: $2\tilde{x}_1^2 + 4\tilde{x}_2^2 + 6\tilde{x}_3^2$.

Семинар 19. Приведение пары форм к каноническому виду.

Задача 1669 п.4. Для данной пары квадратичных функций выяснить, какая из них является положительно определенной, и найти преобразование координат, приводящее эту функцию к нормальному, а другую – к каноническому виду; указать этот канонический вид:

$$f = 15x_2^2 - 15x_3^2 - 36x_1x_2 - 60x_1x_3 + 16x_2x_3$$

$$g = 9x_1^2 + 13x_2^2 + 14x_3^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Решение.

Форма g положительно определена (по критерию Сильвестра). Методом Лагранжа приведем ее к каноническому виду:

$$g = 9x_1^2 + 13x_2^2 + 14x_3^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3 =$$

$$= (3x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 9x_2^2 + 13x_3^2 + 12x_2x_3 = (3x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (3x_2 + 2x_3)^2 + 9x_3^2$$

Замена:

$\begin{cases} \tilde{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \tilde{x}_2 = 3x_2 + 2x_3 \\ \tilde{x}_3 = 3x_3 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\tilde{x}_1 + \frac{2}{9}\tilde{x}_2 - \frac{7}{27}\tilde{x}_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}\tilde{x}_2 - \frac{2}{9}\tilde{x}_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}\tilde{x}_3 \end{cases}$ и матрица перехода

$$C_1 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -7 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\tilde{B}_f = C_1^T B_f C_1 = \frac{1}{729}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ -7 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -18 & -30 \\ -18 & 15 & 8 \\ -30 & 8 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -7 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь ортогональной заменой приводим квадратичную форму $\tilde{f}$ к диагональному виду.

Находим собственные значения:

$$\left|\tilde{B}_f - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(3-\lambda)(3+\lambda) = 0$$

Получаем корни: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 3$.

Ищем собственные векторы:

$\lambda_1 = 0$:

$$\tilde{B}_f - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$:

$$\tilde{B}_f - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = -3$:

$$\tilde{B}_f - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируя, получаем $e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$C_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Канонический вид f:

$$3\tilde{\tilde{x}}_2^2 - 3\tilde{\tilde{x}}_3^2$$

Замена, приводящая к этому каноническому виду:

$$C = C_1 C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -7 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -17 & -26 & 23 \\ -30 & -3 & 12 \\ 18 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $C = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -17 & -26 & 23 \\ -30 & -3 & 12 \\ 18 & 18 & 9 \end{pmatrix}$.

Приведение пары форм к каноническому виду. 2 способ.

Пусть φ и ψ – квадратичные формы, φ – положительно определенная квадратичная форма. **Обобщенный характеристический многочлен:**

$$det\left(B_\psi - \lambda B_\varphi\right) = 0$$

Его корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – коэффициенты при x_i^2 в каноническом виде ψ.

Обобщенные собственные вектора $\widetilde{e_i}$ – нормированные относительно φ вектора, удовлетворяющие условию

$$(B_\psi - \lambda_i B_\varphi)\widetilde{e_i} = 0$$

Тогда в базисе $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$

$$\varphi = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_n^2$$

$$\psi = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_n \tilde{x}_n^2$$

Задача 1669 п.1. Для данной пары квадратичных функций выяснить, какая из них является положительно определенной, и найти преобразование координат, приводящее эту функцию к нормальному, а другую – к каноническому виду; указать этот канонический вид:

$$f = x_1^2 + 6x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Решение.

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|B_f - \lambda B_g\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & 6-2\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -2-2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0$$

Получаем корни: $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 5$.

Матрица канонического вида f:

$$\tilde{B}_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ищем собственные векторы:

$\lambda_3 = 5$:

$$B_f - \lambda_3 B_g = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируем относительно g, получаем

$$v_3^T B_g v_3 = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Тогда $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_{1,2} = -1$:

$$B_f - \lambda_1 B_g = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выберем собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируем относительно g, получаем

$$v_1^T B_g v_1 = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Тогда $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ должен занулять матрицу $B_f - \lambda_1 B_g$ и быть ортогональным вектору v_1 относительно скалярного произведения, задаваемого матрицей B_g, то есть, должно выполняться:

$$v_1^T B_g v_2 = 0 \Leftrightarrow (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_2 + 2x_3 = 0$$

Получаем систему уравнений для определения x_1, x_2, x_3, ее матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Выберем собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируем относительно g, получаем

$$v_2^T B_g v_2 = (-4, 2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

Тогда $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Замена, приводящая к каноническому виду:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -4/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 0 & -4/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Гиперповерхности второго порядка в $\mathbb{R}^n$

В аналитической геометрии мы приводили к каноническому виду поверхности второго порядка в $\mathbb{R}^3$. Посмотрим, как обстоят дела в пространствах большей размерности.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – аффинное пространство, гиперповерхность 2 порядка задается уравнением

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$degF = 2, F = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + C$$

Приведение к каноническому виду с аффинной точки зрения: методом Лагранжа приводим квадратичную часть $\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$ к каноническому виду.

Приведение к каноническому виду ортогональными преобразованиями: приводим квадратичную форму $\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$ ортогональными преобразованиями к диагональному виду

$$Q = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_n \tilde{x}_n^2$$

Рассмотрим случаи:

- Все $\lambda_i \neq 0$. Избавляемся от линейной части $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ сдвигом, получаем

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_n \tilde{x}_n^2 = \tau$$

1) $\tau \neq 0$. В зависимости от знаков λ_i получаем аналог эллипсоида или гиперболоида.

2) $\tau = 0$. Получаем аналог конуса.

- $\lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0$, $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Избавляемся от линейной части $\sum_{i=1}^{k} b_i x_i$ сдвигом, делаем замену (ортогональную)

$$\widetilde{\widetilde{x_{k+1}}} \sim \tilde{b}_{k+1}\tilde{x}_{k+1} + \dots + \tilde{b}_n\tilde{x}_n$$

Получаем

$$\lambda_1 \widetilde{\widetilde{x_1}}^2 + \dots + \lambda_k \widetilde{\widetilde{x_k}}^2 + b\widetilde{\widetilde{x_{k+1}}} + \tilde{C} = 0$$

1) $b \neq 0$. Сдвигом избавляемся от $\tilde{C}$, получаем либо аналог параболоида, либо цилиндр над параболоидом.
2) $b = 0, \tilde{C} \neq 0$. Получаем цилиндр над эллипсоидом.
3) $b = 0, \tilde{C} = 0$. Получаем цилиндр над конусом (что бы это ни значило).

Таким образом, в $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$ не появляется принципиально новых гиперповерхностей второго порядка, классификация похожа на классификацию в $\mathbb{R}^3$.

Семинар 20. Операторы, сохраняющие билинейные функции.

Задача 1677. Определить аффинный тип сечения поверхности

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 2x_3 - 2x_4 + 1 = 0$$

плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

Решение.

Выразим из уравнения плоскости x_4 и подставим в уравнение поверхности:

$$x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + (1 - x_1 - x_2 - x_3)^2 - 2x_1(1 - x_1 - x_2 - x_3) - 2x_2x_3 + 2x_1 - 2x_3 -$$

$$-2(1 - x_1 - x_2 - x_3) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 - 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 1 = 0$$

Сделаем замену $\begin{cases} \tilde{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \tilde{x}_2 = x_2 + x_3 \\ \tilde{x}_3 = x_3 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\tilde{x}_1 - \frac{1}{2}\tilde{x}_2 \\ x_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \end{cases}$.

Получим:

$$\tilde{x}_1{}^2 - \tilde{x}_2{}^2 - 2\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\tilde{x}_1 - 1)^2 - (\tilde{x}_2 + 1)^2 - 2\tilde{x}_3 - 1 = 0$$

Сделаем замену $\begin{cases} \widetilde{\widetilde{x_1}} = \tilde{x}_1 - 1 \\ \widetilde{\widetilde{x_2}} = \tilde{x}_2 + 1 \\ \widetilde{\widetilde{x_3}} = \tilde{x}_3 + \frac{1}{2} \end{cases}$ получим:

$\widetilde{\widetilde{x_1}}^2 - \widetilde{\widetilde{x_2}}^2 = 2\widetilde{\widetilde{x_3}}$ – гиперболический параболоид.

Ответ: гиперболический параболоид.

Операторы, сохраняющие билинейные функции

Пусть φ – билинейная (полуторалинейная) функция на V, $f: V \to V$ – линейный оператор.

f* сохраняет *φ (обобщение класса операторов, сохраняющих скалярное произведение), если:

$$\forall x, y \in V \quad \varphi\big(f(x), f(y)\big) = \varphi(x, y)$$

Для базисных векторов:

$$\varphi\left(f(e_i), f(e_j)\right) = \varphi(e_i, e_j) = \varphi(a_i^k e_k, a_j^l e_l) = b_{ij}$$

Где $B_\varphi = (b_{ij})$ – матрица φ в этом базисе. Получаем необходимое и достаточное условие сохранения оператором f билинейной функции φ:

$$\bar{a}_i^k a_j^l b_{kl} = b_{ij}$$

Или, в матричном виде:

$$\overline{A^T} B_\varphi A = B_\varphi$$

Операторы, сохраняющие произвольную невырожденную билинейную функцию φ, образуют группу. Некоторые примеры:

Если $B_\varphi = E$, получаем ортогональные и унитарные операторы:

$O(n) = \{A \in Mat_n(\mathbb{R}): A^T A = E\}$ – ортогональная группа, $det\, A = \pm 1$,

$U(n) = \{A \in Mat_n(\mathbb{C}): \overline{A^T} A = E\}$ – унитарная группа, $|det\, A| = 1$,

Если $B_\varphi = E_{p,q}$, получаем псевдоортогональные и псевдоунитарные операторы:

$E_{p,q} = \begin{pmatrix} E_{p\times p} & 0 \\ 0 & -E_{q\times q} \end{pmatrix}$, $E_{p\times p}$ и $E_{q\times q}$ – единичные матрицы соответствующего размера,

$O(p,q) = \{A \in Mat_n(\mathbb{R}): A^T E_{p,q} A = E_{p,q}\}$ – псевдоортогональная группа, $det\, A = \pm 1$,

$U(p,q) = \{A \in Mat_n(\mathbb{C}): \overline{A^T} E_{p,q} A = E_{p,q}\}$ – псевдоунитарная группа, $|det\, A| = 1$,

Если B_φ - кососимметрическая матрица, получаем симплектическую группу:

$$B_\varphi = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_{n\times n} \\ -E_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$$

$Sp(2n) = \{A \in Mat_{2n}(\mathbb{R}): A^T \Omega A = \Omega\}$ – симплектическая группа, $det\, A = 1$.

Некоторые важные частные случаи:

$$SO(n) = \{A \in O(n): det\, A = 1\}$$

$$SU(n) = \{A \in U(n): det\, A = 1\}$$

$$SO(p,q) = \{A \in O(p,q): det\, A = 1\}$$

$$SU(p,q) = \{A \in U(p,q): det\, A = 1\}$$

Для полноты картины следует еще упомянуть о группах:

$$GL(n,K) = \{A \in Mat_n(K): \det A \neq 0\}$$

$$SL(n,K) = \{A \in Mat_n(K) : det\, A = 1\}$$

Опишем некоторые из этих групп в случае малой размерности.

Ортогональные матрицы
$n = 1$ – тривиальный случай:

$$O(1) = \{1, -1\}$$

$n = 2$ – ортогональные матрицы 2×2:

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Так как должно выполняться

$$A^T A = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Пусть $\varphi \in (0, \pi)$. Тогда из первого уравнения системы следует, что $a = cos\, \varphi, c = \pm\, sin\, \varphi$

Второе уравнение системы – условие ортогональности векторов (a, c) и (b, d), вкупе с третьим уравнением системы это дает нам два случая:

- $b = \mp\, sin\, \varphi, d = cos\, \varphi$ – поворот, $A = \begin{pmatrix} cos\, \varphi & \pm\, sin\, \varphi \\ \mp\, sin\, \varphi & cos\, \varphi \end{pmatrix}$
- $b = \pm\, sin\, \varphi, d = -\, cos\, \varphi$ – поворот с отражением, $A = \begin{pmatrix} cos\, \varphi & \pm\, sin\, \varphi \\ \pm\, sin\, \varphi & -\, cos\, \varphi \end{pmatrix}$

Таким образом, $O(2)$ состоит из двух подмножеств с $det\, A = 1$ и $det\, A = -1$.

Псевдоортогональные матрицы
Псевдоортогональные матрицы $O(1,1)$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Так как должно выполняться

$$A^T E_{1,1} A = E_{1,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ ab - cd = 0 \\ b^2 - d^2 = -1 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $a = \pm\, \mathrm{ch}\, \psi, c = \mathrm{sh}\, \psi$, из третьего уравнения системы следует, что $d = \pm\, \mathrm{ch}\, \theta, b = \mathrm{sh}\, \theta$.

Получаем 4 случая:

1) $a = \operatorname{ch}\psi\,,\ d = \operatorname{ch}\theta$

Тогда второе уравнение системы: $\operatorname{ch}\psi \operatorname{sh}\theta - \operatorname{sh}\psi \operatorname{ch}\theta = 0$, откуда $\theta = \psi$ и

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

2) $a = \operatorname{ch}\psi\,,\ d = -\operatorname{ch}\theta$

Тогда второе уравнение системы: $\operatorname{ch}\psi \operatorname{sh}\theta + \operatorname{sh}\psi \operatorname{ch}\theta = 0$, откуда $\theta = -\psi$ и

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

3) $a = -\operatorname{ch}\psi\,,\ d = \operatorname{ch}\theta$

Тогда второе уравнение системы: $-\operatorname{ch}\psi \operatorname{sh}\theta - \operatorname{sh}\psi \operatorname{ch}\theta = 0$, откуда $\theta = -\psi$ и

$$A = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

4) $a = -\operatorname{ch}\psi\,,\ d = -\operatorname{ch}\theta$

Тогда второе уравнение системы: $-\operatorname{ch}\psi \operatorname{sh}\theta + \operatorname{sh}\psi \operatorname{ch}\theta = 0$, откуда $\theta = \psi$ и

$$A = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

Таким образом, данная группа состоит из 4 видов матриц.

<u>Геометрия матриц $O(1,1)$.</u>

В евклидовой геометрии (группа $O(2)$) задавая ортогональное преобразование мы задаем образы ортогональных базисных векторов, концы которых лежат на единичной окружности. Если преобразование меняет ориентацию базиса, то $det\, A = -1$, если не меняет ориентацию, то $det\, A = 1$.

Для $O(1,1)$ аналогом единичной окружности является гипербола (так как вектор единичной длины должен удовлетворять уравнению $x^2 - y^2 = 1$) – образы базисных векторов лежат на гиперболе.

Данная группа состоит из 4 видов матриц, так как кроме смены ориентации базиса наше преобразование может поменять ветку гиперболы, на которой лежал конец базисного вектора. Эти матрицы иногда называют гиперболическими поворотами.

<u>Унитарные матрицы</u>
<u>$n = 1$ – тривиальный случай</u>:

$$U(1) = \{e^{i\varphi}\}$$

$$SU(1) = \{id\}$$

$n = 2$ – унитарные матрицы 2×2:

Рассмотрим $SU(2) = \{A \in U(2) \colon det\, A = 1\}$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Так как должно выполняться

$$\overline{A^T} A = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b + \bar{c}d \\ a\bar{b} + c\bar{d} & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \\ |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выражаем d и подставляем в третье уравнение системы:

$$|b|^2 + \frac{|a|^2|b|^2}{|c|^2} = 1 \Leftrightarrow |b|^2 \left(\frac{|a|^2 + |c|^2}{|c|^2} \right) = 1$$

Учитывая первое уравнение системы, получаем $|b| = |c|$.

Тогда

$$|d| = \frac{|a||b|}{|c|} = |a|$$

Подставляя в четвертое уравнение системы $d = \frac{-\bar{a}b}{\bar{c}}$ получаем

$$-\frac{|a|^2 b}{\bar{c}} - bc = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{\bar{c}}(|a|^2 + |c|^2) = -1$$

Учитывая первое уравнение системы, получаем $c = -\bar{b}$.

Тогда

$$d = \frac{-\bar{a}b}{-b} = \bar{a}$$

Получаем

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

где $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Симплектические матрицы
$n = 2$ – симплектические матрицы 2×2:

$Sp(2) = \{A \in Mat_2(\mathbb{R}): A^T \Omega A = \Omega\}$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Так как должно выполняться

$$A^T \Omega A = \Omega \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

получаем

$$ad - bc = 1$$

Таким образом,

$$Sp(2) = SL(2, \mathbb{R})$$

Все рассмотренные примеры – алгебраические многообразия в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ (если рассматривать матрицу $n \times n$ как вектор длины n^2).

Например, $SO(2)$ – окружность в четырехмерном пространстве, $SU(2)$ – трехмерная сфера в восьмимерном пространстве.

Семинар 21. Тензоры.

Задача 1635. Пусть $V_{\mathbb{R}}$ - овеществление некоторого комплексного псевдоэрмитова пространства V. Доказать, что если вещественный оператор A в пространстве $V_{\mathbb{R}}$ сохраняет псевдоевклидово скалярное произведение $Re(a,b)$ и симплектическое скалярное произведение $Im(a,b)$ (см. задачу 1633), то он является овеществлением некоторого псевдоэрмитова оператора в пространстве V. Таким образом, $U(p,q) = O(2p,2q) \cap Sp(2n)$, в частности, $U(n) = O(2n) \cap Sp(2n)$.

Решение.

Вначале проведем доказательство в обратную сторону.

Пусть V - комплексное псевдоэрмитово пространство сигнатуры (p,q), на нем задано $(\,,)$ - скалярное произведение. Пусть $\varphi(x,y) = Re(x,y)$ и $\psi(x,y) = Im(x,y)$.

Тогда $\varphi(x,y)$ задает евклидово скалярное произведение на $V_{\mathbb{R}}$ (овеществлении V), а $\psi(x,y)$ задает симплектическое скалярное произведение на $V_{\mathbb{R}}$.

То есть, $\varphi(x,y)$ – симметричная билинейная форма на $V_{\mathbb{R}}$ сигнатуры $(2p,2q)$, $\psi(x,y)$ – невырожденная кососимметричная билинейная форма на $V_{\mathbb{R}}$.

$$\varphi(x,y) - i\psi(x,y) = \overline{(x,y)} = (y,x) = \varphi(y,x) + i\psi(y,x)$$

Откуда

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

$$\psi(x,y) = -\psi(y,x)$$

Пусть $f \in U_{p,q}(V)$ – псевдоунитарный оператор. Тогда

$$\varphi\big(f(x),f(y)\big) + i\psi\big(f(x),f(y)\big) = \big(f(x),f(y)\big) = (x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, получаем

$$\varphi(x,y) = \varphi\big(f(x),f(y)\big)$$

$$\psi(x,y) = \psi\big(f(x),f(y)\big)$$

Таким образом, оператор f сохраняет билинейные формы $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$. Но овеществление оператора на все векторы действует так же, как и сам оператор (с теоретико-множественной точки зрения f и $f_{\mathbb{R}}$ - это один и тот же объект), поэтому, если f сохраняет билинейную форму $\varphi(x,y)$, то $f_{\mathbb{R}} \in O_{2p,2q}(V_{\mathbb{R}})$, а если f сохраняет билинейную форму $\psi(x,y)$, то $f_{\mathbb{R}} \in Sp_{2n}(V_{\mathbb{R}})$. Таким образом,

$$U_{p,q}(V) = O_{2p,2q}(V_{\mathbb{R}}) \cap Sp_{2n}(V_{\mathbb{R}})$$

Для решения задачи нужно двигаться в обратную сторону – по формам $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ можно построить комплексную форму $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$, которую будет сохранять оператор f.

Тензоры

Определение. **Тензор типа $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$**, $p>0,\ q>0$ – полилинейная функция p векторных и q ковекторных аргументов

$$T\colon\ V\times\ldots\times V\times V^*\times\ldots\times V^*\to\mathbb{R}$$

Полилинейность – линейность по каждому аргументу при фиксированных остальных (обобщение билинейности).

Примеры:

Тензоры типа $(1{,}0)$ – векторы (элементы V).

Тензоры типа $(0{,}1)$ – линейные функционалы (элементы V^*).

Тензоры типа $(2{,}0)$ – билинейные функции.

Пусть $e_1,\ldots,e_n$ – базис V, $v_k\in V$, $\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n$ – двойственный базис V^*, $\xi^l\in V^*$. Тогда (векторы нумеруем нижними, а ковекторы – верхними индексами)

$$T\left(v_1,\ldots,v_p,\xi^1,\ldots,\xi^q\right)=T\left(v_1^{i_1}e_{i_1},\ldots,v_p^{i_p}e_{i_p},\xi^1_{j_1}\varepsilon^{j_1},\ldots,\xi^q_{j_q}\varepsilon^{j_q}\right)=$$

$$=v_1^{i_1}\cdots v_p^{i_p}\xi^1_{j_1}\cdots\xi^q_{j_q}T\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_p},\varepsilon^{j_1},\ldots,\varepsilon^{j_q}\right)=v_1^{i_1}\cdots v_p^{i_p}\xi^1_{j_1}\cdots\xi^q_{j_q}T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}$$

Таким образом, полилинейная функция полностью задается своими значениями на произвольных наборах базисных векторов.

$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}$ – аналог матрицы ($p+q$ – мерный массив чисел).

Пусть мы перешли от базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$ к базису $\{e_1',\ldots,e_n'\}$, матрица перехода C.

Координаты вектора меняются как $\begin{pmatrix}\tilde{v}_1\\ \ldots\\ \tilde{v}_n\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}v_1\\ \ldots\\ v_n\end{pmatrix}$, координаты ковектора меняются как $\left(\widetilde{\xi_1},\ldots,\widetilde{\xi_n}\right)=(\xi_1,\ldots,\xi n)C^T$ (применим ε^j к вектору v: $\varepsilon^j(v)=v^j=c^j_l\tilde{v}^l=c^j_l\tilde{\varepsilon}^l(v)$, откуда $\varepsilon^j=c^j_l\tilde{\varepsilon}^l$), матрица билинейной функции меняется как $\tilde{B}_\varphi=C^TB_\varphi C$.

Пусть $C=\left(c^i_j\right)$, $C^{-1}=D=(d^i_j)$. Закон замены координат при переходе от одного базиса к другому:

$\tilde{v}^l=d^l_jv^j$ – вектор,

$\widetilde{\xi_k} = c_k^i \xi_i$ – ковектор,

$\tilde{b}_{k_1 k_2} = c_{k_1}^{i_1} b_{i_1 i_2} c_{k_2}^{i_2}$ – билинейная функция.

Каков общий закон преобразования T?

$$\tilde{T}_{k_1 \cdots k_p}^{l_1 \cdots l_q} = T\left(\tilde{e}_{k_1}, \dots, \tilde{e}_{k_p}, \tilde{\varepsilon}^{l_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}^{l_q}\right) = T\left(c_{k_1}^{i_1} e_{i_1}, \dots, c_{k_p}^{i_p} e_{i_p}, d_{j_1}^{l_1} \varepsilon^{j_1}, \dots, d_{j_q}^{l_q} \varepsilon^{j_q}\right) =$$

$$= c_{k_1}^{i_1} \dots c_{k_p}^{i_p} d_{j_1}^{l_1} \dots d_{j_q}^{l_q} T\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_q}\right)$$

Таким образом, получаем **тензорный закон преобразования**:

$$\tilde{T}_{k_1 \cdots k_p}^{l_1 \cdots l_q} = c_{k_1}^{i_1} \dots c_{k_p}^{i_p} d_{j_1}^{l_1} \dots d_{j_q}^{l_q} T\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_q}\right)$$

Тензоры типа $(1,1)$:

$$\tilde{T}_k^l = c_k^i d_j^l T_i^j = d_j^l T_i^j c_k^i$$

В матричной форме записи:

$$\tilde{A}_f = C^{-1} A_f C$$

Как мы видим, тензор типа $(1,1)$ преобразуется так же, как и матрица оператора, то есть, это один и тот же объект - существует канонический изоморфизм Ψ между пространством операторов $End(V)$ и пространством Θ_1^1 тензоров типа $(1,1)$:

Пусть $f \in End(V)$, $v \in V$, $\xi \in V^*$. Тогда

$$\Psi(f) = \xi(f(v))$$

<u>Упражнение</u>: проверить, что матрица, обратная к матрице билинейной функции, преобразуется по тензорному закону, как тензор типа $(0,2)$.

Введение понятия тензора может показаться излишним, ведь мы и так умеем преобразовывать координаты вектора, ковектора, линейного оператора и билинейной функции при переходе к другой системе координат. Однако, при $p + q \geq 3$ проявляются преимущества тензорного подхода.

<u>Пример</u>: пусть e_1, e_2, e_3 – базис в $\mathbb{R}^3$. Разложим векторное произведение базисных векторов по базису:

$$\left[e_{i_1}, e_{i_2}\right] = a_{i_1 i_2}^j e_j$$

Тогда набор $\left\{a_{i_1 i_2}^j\right\}$ – тензор типа $(2,1)$. Проверим это. Нужно доказать:

$$\tilde{a}_{k_1 k_2}^l = c_{k_1}^{i_1} c_{k_2}^{i_2} d_j^l a_{i_1 i_2}^j$$

Доказательство:

$$\tilde{a}_{k_1k_2}^l\tilde{e}_l = [\tilde{e}_{k_1}, \tilde{e}_{k_2}] = [c_{k_1}^{i_1}e_{i_1}, c_{k_2}^{i_2}e_{i_2}] = c_{k_1}^{i_1}c_{k_2}^{i_2}[e_{i_1}, e_{i_2}] = c_{k_1}^{i_1}c_{k_2}^{i_2}a_{i_1i_2}^j e_j = c_{k_1}^{i_1}c_{k_2}^{i_2}d_j^l a_{i_1i_2}^j \tilde{e}_l$$

Числа $a_{i_1i_2}^j$ называются структурными константами – они возникают, если мы введем на линейном пространстве операцию умножения векторов: $V \times V \to V$ (т.е. зададим алгебру Ли). Обратите внимание, что в нашем примере мы не использовали специфических свойств векторного произведения и фактически доказали, что структурные константы произвольной алгебры образуют тензор типа $(2,1)$.

Семинар 22. Решение задач, тензорные операции.

Задача. Выяснить, являются ли тензором символы Кронекера: а) δ_i^j; б) δ_{ij}.

Решение.

а) Должно выполняться: $\tilde{\delta}_k^l = c_k^i \delta_i^j d_j^l$.

Если $i = j$, получаем $\tilde{\delta}_k^l = c_k^i d_j^l = (E)_k^l = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k \end{cases}$.

Если $i \neq j$, получаем $\tilde{\delta}_k^l = 0$.

Таким образом, при переходе к другой системе координат действительно получили символ, который равен 1 при $l = k$ и 0 при $l \neq k$, то есть, δ_i^j – тензор.

б) Должно выполняться: $\tilde{\delta}_{k_1k_2} = c_{k_1}^{i_1} \delta_{i_1i_2} c_{k_2}^{i_2}$.

Если $i_1 = i_2$, получаем $\tilde{\delta}_{k_1k_2} = c_{k_1}^{i_1} c_{k_2}^{i_2} \neq 1$.

Чтобы в этом убедиться, достаточно взять замену $\widetilde{e_1} = 2e_1, \tilde{e}_i = e_i$ при $i > 1$. При такой замене $c_1^1 = 2, c_i^i = 1$ при $i > 1$ и $c_j^i = 0$ при $i \neq j$.

Тогда $\tilde{\delta}_{11} = c_1^{i_1} \delta_{i_1i_2} c_1^{i_2}$ – в этой сумме ровно одно ненулевое слагаемое $(c_1^1)^2 \delta_{11} = 4 \neq 1$.

Таким образом, δ_{ij} не является тензором.

Если переформулировать утверждение задачи на языке матриц:

а) равенство $\tilde{\delta}_k^l = c_k^i \delta_i^j d_j^l$ означает следующее: матрица тождественного оператора в любом базисе будет единичной: $E = C^{-1}EC$,

б) из того, что у билинейной функции единичная матрица в некоторой системе координат вовсе не следует, что у нее будет единичная матрица в другой системе координат: вообще говоря, $C^T EC \neq C$.

Ответ: а) да, б) нет.

Задача (упражнение с прошлого семинара). Проверить, что матрица, обратная к матрице билинейной функции, преобразуется по тензорному закону, как тензор типа (0,2).

Решение.

Пусть $b_{i_1i_2}$ – матрица билинейной функции, $t^{k_1k_2}$ – матрица, обратная к $b_{i_1i_2}$. Тогда $b_{i_1i_2} t^{i_2j_2} = \delta_{i_1}^{j_2}$. Покажем, что при переходе к другой системе координат это равенство будет выполнено.

При переходе к другому базису матрица билинейной функции меняется как

$$\tilde{b}_{k_1 k_2} = c_{k_1}^{i_1} b_{i_1 i_2} c_{k_2}^{i_2}$$

Должно быть выполнено:

$$\tilde{b}_{k_1 k_2} \tilde{t}^{k_2 l_2} = \delta_{k_1}^{l_2} \Leftrightarrow c_{k_1}^{i_1} b_{i_1 i_2} c_{k_2}^{i_2} \tilde{t}^{k_2 l_2} = \delta_{k_1}^{l_2} \qquad (*)$$

Покажем, что если

$\tilde{t}^{k_2 l_2} = d_{m_1}^{k_2} t^{m_1 m_2} d_{m_2}^{l_2}$ (то есть, матрица, обратная к матрице билинейной функции, преобразуется по тензорному закону), то равенство будет выполняться. Подставим в (*):

$$c_{k_1}^{i_1} b_{i_1 i_2} c_{k_2}^{i_2} d_{m_1}^{k_2} t^{m_1 m_2} d_{m_2}^{l_2} = c_{k_1}^{i_1} b_{i_1 i_2} \delta_{m_1}^{i_2} t^{m_1 m_2} d_{m_2}^{l_2} = c_{k_1}^{i_1} b_{i_1 m_1} t^{m_1 m_2} d_{m_2}^{l_2} = c_{k_1}^{i_1} \delta_{i_1}^{m_2} d_{m_2}^{l_2} =$$

$$= c_{k_1}^{i_1} d_{i_1}^{l_2} = \delta_{k_1}^{l_2}$$

Значит, матрица, обратная к матрице билинейной функции, преобразуется по тензорному закону как тензор $(0,2)$.

<u>Задача</u>. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ тензор $T_{ijk}^{ml} = 2(j-i)$, заданный в системе координат e_1, e_2, e_3.

Найти $\tilde{T}_{123}^{21}$ в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ после замены $\begin{cases} \tilde{e}_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ \tilde{e}_2 = e_2 - e_3 \\ \tilde{e}_3 = e_3 \end{cases}$.

Решение.

Матрица перехода C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица C^{-1}:

$$D = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}_{123}^{21} = c_1^i c_2^j c_3^k d_m^2 d_l^1 T_{ijk}^{ml}$$

В этой сумме $3^5 = 243$ слагаемых. Так как у матрицы C в третьем столбце только один ненулевой элемент, то $c_3^k = 0$ при $k \neq 3$, и можно заменить c_3^k на $c_3^3 = 1$.

Аналогично, у матрицы D в первой строке только один ненулевой элемент и можно заменить d_l^1 на $d_1^1 = 1$. Получим

$$\tilde{T}_{123}^{21} = c_1^i c_2^j d_m^2 T_{ijk}^{ml}$$

Теперь, учитывая что можно не рассматривать члены суммы с $i=j$ (так как тогда $T_{ijk}^{ml}=2(j-i)=0$), получаем:

$i=1$: $c_1^1c_2^2d_m^2T_{123}^{m1}+c_1^1c_2^3d_m^2T_{133}^{m1}$

$i=2$: $c_1^2c_2^3d_m^2T_{233}^{m1}$

$i=3$: $c_1^3c_2^2d_m^2T_{323}^{m1}$

В итоге

$$\tilde{T}_{123}^{21}=c_1^1c_2^2d_m^2T_{123}^{m1}+c_1^1c_2^3d_m^2T_{133}^{m1}+c_1^2c_2^3d_m^2T_{233}^{m1}+c_1^3c_2^2d_m^2T_{323}^{m1}=$$

$$=d_m^2T_{123}^{m1}-d_m^2T_{133}^{m1}+2d_m^2T_{233}^{m1}+d_m^2T_{323}^{m1}=$$

$$=d_1^2(T_{123}^{11}-T_{133}^{11}+2T_{233}^{11}+T_{323}^{11})+d_2^2(T_{123}^{21}-T_{133}^{21}+2T_{233}^{21}+T_{323}^{21})=$$

$$=2(T_{123}^{11}-T_{133}^{11}+2T_{233}^{11}+T_{323}^{11})+(T_{123}^{21}-T_{133}^{21}+2T_{233}^{21}+T_{323}^{21})$$

Наконец, подставляя в получившееся выражение $T_{ijk}^{ml}=2(j-i)$, получаем:

$$\tilde{T}_{123}^{21}=2(2-4+4-2)+(2-4+4-2)=0$$

Ответ: 0.

Новые обозначения

Договоримся далее обозначать $e_1,\dots,e_n$ старый базис, $e_{1'},\dots,e_{n'}$ - новый базис. **Тензорный закон** в этих обозначениях:

$$T_{i_1'\cdots i_p'}^{j_1'\cdots j_q'}=c_{i_1'}^{i_1}\dots c_{i_p'}^{i_p}d_{j_1}^{j_1'}\dots d_{j_q}^{j_q'}T_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}$$

Тензорные операции

1) Тензоры с одинаковым набором индексов можно покоординатно складывать и умножать на число – множество тензоров (p,q) образуют линейное пространство Θ_p^q.
   Пусть $T,R\in\Theta_p^q$. Тогда

$$(T+R)_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}=T_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}+R_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}$$

$$(\lambda T)_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}=\lambda T_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}$$

2) Тензорное умножение

Пусть $T\in\Theta_p^q$, $R\in\Theta_r^s$. Тогда $T\otimes R\in\Theta_{p+r}^{q+s}$

$$(T\otimes R)_{i_1\cdots i_{p+r}}^{j_1\cdots j_{q+s}}\coloneqq T_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}R_{i_{p+1}\cdots i_{p+r}}^{j_{q+1}\cdots j_{q+s}}$$

Пример: рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ тензоры $T,R\in\Theta_1^0$, $T_i=i$, $R_i=1-i$. Тогда

$$(T \otimes R)_{11} = T_1 R_1 = 0$$

$$(T \otimes R)_{12} = T_1 R_2 = -1$$

$$(T \otimes R)_{21} = T_2 R_1 = 0$$

$$(T \otimes R)_{22} = T_2 R_2 = -2$$

3) Свертка

Пусть $T \in \Theta_p^q$, $p > 0, q > 0$. Сверткой называется отображение $\Theta_p^q \to \Theta_{p-1}^{q-1}$, фиксирующее одинаковые значения одного из верхних и одного из нижних индексов.

Упражнение: доказать, что свертка – действительно тензорная операция (т.е. что в итоге действительно получается тензор).

Пример: $(cT)_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} = T_{i i_1 \cdots i_{p-1}}^{i j_1 \cdots j_{q-1}}$ – свертка по первому верхнему и первому нижнему индексу.

Пример: $tr\, A = a_i^i$ – след оператора A. Оператор – это тензор типа $(1,1)$, его свертка $tr\, A = a_i^i$ – это число, то есть, тензор типа $(0,0)$.

Семинар 23. Опускание и поднятие индексов, базис.

4) Опускание и поднятие индексов

Опускание индексов

Пусть g_{ij} – тензор типа $(2,0)$ – билинейная функция. **Опускание индексов** – операция $\Theta_q^p \to \Theta_{q+1}^{p-1}$:

$$S_{jj_1\cdots j_q}^{i_2\cdots i_p} := g_{ji_1} T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$$

Поднятие индексов

Пусть g^{ij} – тензор типа $(0,2)$. **Поднятие индексов** – операция $\Theta_q^p \to \Theta_{q-1}^{p+1}$:

$$S_{j_2\cdots j_q}^{ii_1\cdots i_p} := g^{ij_1} T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$$

Проверим, что опускание и поднятие индексов – действительно тензорная операция (т.е. что в итоге действительно получается тензор). Проверим для опускания индексов, для поднятия – аналогично.

$$S_{j'j_1'\cdots j_q'}^{i_2'\cdots i_p'} = g_{j'i_1'} T_{j_1'\cdots j_q'}^{i_1'\cdots i_p'} = c_{j'}^{j} \boldsymbol{c_{i_1'}^{k}} c_{j_1'}^{j_1} \dots c_{j_q'}^{j_q} \boldsymbol{d_{i_1}^{i_1'}} \dots d_{i_p}^{i_p'} g_{jk} T_{jj_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} =$$

$$= c_{j'}^{j} \delta_{i_1}^{k} c_{j_1'}^{j_1} \dots c_{j_q'}^{j_q} d_{i_2}^{i_2'} \dots d_{i_p}^{i_p'} g_{jk} T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} = c_{j'}^{j} c_{j_1'}^{j_1} \dots c_{j_q'}^{j_q} d_{i_2}^{i_2'} \dots d_{i_p}^{i_p'} g_{ji_1} T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} =$$

$$= c_{j'}^{j} c_{j_1'}^{j_1} \dots c_{j_q'}^{j_q} d_{i_2}^{i_2'} \dots d_{i_p}^{i_p'} S_{jj_1\cdots j_q}^{i_2\cdots i_p}$$

Таким образом, опускание индексов – действительно тензорная операция.

Как мы знаем, если V – евклидово пространство, то существует канонический изоморфизм между V и V^*: если g_{ij} – скалярное произведение, то $v \to (v,\ \cdot)$, то есть, вектору v ставится в соответствие линейная функция, задающаяся скалярным произведением с фиксированным первым аргументом v. Иначе можно сказать, что это – опускание индекса: $(v,\ \cdot) = g_{ij} v^j$.

Задача. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ тензор $T_{lm}^{ijk} = 2(j-l)$. Опусканием индексов получаем тензор $S_{rlm}^{jk} = g_{ri} T_{lm}^{ijk}$, с метрикой $G = (g_{ri}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти: S_{121}^{12}.

Решение.

$$S_{121}^{12} = g_{11} T_{21}^{112} + g_{12} T_{21}^{212} = T_{21}^{112} + T_{21}^{212} = -2 - 2 = -4$$

Ответ: $S_{121}^{12} = -4$.

На прошлом семинаре мы определили тензорное произведение, не используя понятие полилинейной функции, теперь сделаем это через полилинейные функции.

Пусть $T \in \Theta_q^p, R \in \Theta_s^r$ – полилинейные функции. Определим полилинейную функцию $T \otimes R \in \Theta_{q+s}^{p+r}$ – для этого достаточно определить, чему равно ее значение на произвольном наборе векторов и ковекторов:

$$T \otimes R\big(v_1, \dots, v_{q+s}, \xi^1, \dots, \xi^{p+r}\big) = T\big(v_1, \dots, v_q, \xi^1, \dots, \xi^p\big)R\big(v_{q+1}, \dots, v_{q+s}, \xi^{p+1}, \dots, \xi^{p+r}\big)$$

Это определение согласуется с тем, что мы давали в прошлый раз. На наборе базисных векторов и ковекторов:

$$T \otimes R\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_{q+s}}, \varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_{p+r}}\right) =$$

$$= T\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}, \varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_p}\right) R\left(e_{j_{q+1}}, \dots, e_{j_{q+s}}, \varepsilon^{i_{p+1}}, \dots, \varepsilon^{i_{p+r}}\right) =$$

$$= T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} R_{j_{q+1} \cdots j_{q+s}}^{i_{p+1} \cdots i_{p+r}}$$

<u>Базис в пространстве тензоров</u>

Любой тензор $T \in \Theta_q^p$ однозначно задается своими значениями на наборе базисных векторов $T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$. Рассмотрим тензор

$$T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q}$$

Значение этого тензора на наборе базисных векторов и ковекторов:

$$T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q} \left(e_{l_1}, \dots, e_{l_q}, \varepsilon^{k_1}, \dots, \varepsilon^{k_p}\right) =$$

$$= T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1}(\varepsilon^{k_1}) \dots e_{i_p}(\varepsilon^{k_p}) \varepsilon^{j_1}(e_{l_1}) \dots \varepsilon^{j_q}(e_{l_q}) = T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_p}^{k_p} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_q}^{j_q} = T_{l_1 \cdots l_q}^{k_1 \cdots k_p}$$

То есть, получили исходный тензор. Таким образом,

$$T = T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q}$$

Итак, $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q}$ – **базис $\boldsymbol{\Theta_q^p}$** (формально нужно еще доказать линейную независимость базовых тензорных произведений, это будет сделано на лекциях).

<u>Задача</u>. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ тензоры $T \in \Theta_1^1$ и $R \in \Theta_3^0$:

$$T = e_1 \otimes \varepsilon^2 + e_2 \otimes \varepsilon^3 + e_3 \otimes \varepsilon^1$$

$$R(v_1, v_2, v_3) = det\big(v_j^i\big)$$

Пусть $S = T \otimes R \in \Theta_4^1$, $Q = R \otimes T \in \Theta_4^1$.

Найти: S_{1213}^2 и Q_{1213}^2.

Решение.

$$S_{1213}^2 = S(e_1, e_2, e_1, e_3, \varepsilon^2) = T(e_1, \varepsilon^2)R(e_2, e_1, e_3) =$$

$$= (e_1 \otimes \varepsilon^2 + e_2 \otimes \varepsilon^3 + e_3 \otimes \varepsilon^1)(e_1, \varepsilon^2)\, det(e_2, e_1, e_3) =$$

$$= (e_1(\varepsilon^2)\varepsilon^2(e_1) + e_2(\varepsilon^2)\varepsilon^3(e_1) + e_3(\varepsilon^2)\varepsilon^1(e_1))(-1) = (0+0+0)(-1) = 0$$

$$Q_{1213}^2 = R(e_1, e_2, e_1)T(e_3, \varepsilon^2) = det(e_1, e_2, e_1)\, T(e_3, \varepsilon^2) = 0 \cdot T(e_3, \varepsilon^2) = 0$$

Ответ: $S_{1213}^2 = 0$, $Q_{1213}^2 = 0$.

Задача. Пусть $T \in \Theta_2^2$, $T(u, v, \xi, \eta) = det\begin{pmatrix} \xi(u) & \xi(v) \\ \eta(u) & \eta(v) \end{pmatrix}$. Разложить T по базису.

Решение.

$$T_{kl}^{ij} = T\big(e_k, e_l, \varepsilon^i, \varepsilon^j\big) = det\begin{pmatrix} \varepsilon^i(e_k) & \varepsilon^i(e_l) \\ \varepsilon^j(e_k) & \varepsilon^j(e_l) \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \delta_k^i & \delta_l^i \\ \delta_k^j & \delta_l^j \end{pmatrix} = \delta_k^i\delta_l^j - \delta_l^i\delta_k^j$$

Получаем

$$T = T_{kl}^{ij} e_i \otimes e_j \otimes \varepsilon^k \otimes \varepsilon^l = (\delta_k^i\delta_l^j - \delta_l^i\delta_k^j) e_i \otimes e_j \otimes \varepsilon^k \otimes \varepsilon^l$$

Ответ: $T = (\delta_k^i\delta_l^j - \delta_l^i\delta_k^j) e_i \otimes e_j \otimes \varepsilon^k \otimes \varepsilon^l$.

Семинар 24. Симметрирование и альтернирование.

Задача 1690. Пусть $v \in V, \varphi \in V^*$. Найти образ оператора в пространстве V, соответствующего тензору $v \otimes \varphi$.

Решение.

Как обсуждалось ранее, существует канонический изоморфизм Ψ между пространством операторов $End(V)$ и пространством Θ_1^1 тензоров типа $(1,1)$:

Пусть $f \in End(V)$, $v \in V$, $\varphi \in V^*$. Тогда

$$\Psi(f) = \varphi(f(v))$$

Рассмотрим действие оператора на базисных векторах:

$$v \otimes \varphi(\varepsilon^i, e_j) = v(\varepsilon^i)\varphi(e_j) = \varepsilon^i(\Psi(v \otimes \varphi)(e_j))$$

Так как $v(\varepsilon^i)\varphi(e_j) = v^i\varphi_j$ и $\Psi(v \otimes \varphi) = (a)_j^i$ – матрица оператора, получаем

$$v^i\varphi_j = \varepsilon^i(a_j^k e_k) = a_j^k \delta_k^i = a_j^i$$

То есть, $v^i\varphi_j$ стоит в матрице оператора на месте (i, j). Матрица оператора:

$$\begin{pmatrix} v^1\varphi_1 & \dots & v^1\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ v^n\varphi_1 & \dots & v^n\varphi_n \end{pmatrix}$$

Ее ранг равен 1, значит, размерность образа оператора равна 1. Действуя оператором на базисные вектора, получаем, что образ равен $\langle v \rangle$.

Ответ: $\langle v \rangle$.

Определение. Тензор $T \in \Theta_q^0$ – **симметрический**, если $T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_q)} = T_{i_1 \dots i_q}$ для $\forall\sigma \in S_q$.

Определение. Тензор $T \in \Theta_q^0$ – **кососимметрический,** если $T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_q)} = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}T_{i_1 \dots i_q}$
для $\forall\sigma \in S_q$.

В определении симметрического и кососимметрического тензора использовался тензор с нижними индексами, точно так же можно использовать тензор с верхними индексами.

Определим операции симметрирования и альтернирования, в результате которых произвольный тензор преобразуется в симметрический и кососимметрический соответственно.

Симметрирование Sym: $\Theta_q^0 \to \Theta_q^0$

$$(Sym(T))_{i_1\cdots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_q)}$$

Альтернирование Alt: $\Theta_q^0 \to \Theta_q^0$

$$(Alt(T))_{i_1\cdots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_q)}$$

С помощью операции альтернирования определим операцию внешнего произведения.

Внешнее произведение
Пусть $T \in \Theta_q^0, S \in \Theta_r^0$. Внешнее произведение T и S:

$$T \wedge S = Alt(T \otimes S)$$

В пространстве кососимметрических тензоров Λ_q^0 с помощью операции внешнего произведения удобно задавать базис:

$$\left\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}\right\}, i_1 < \dots < i_q \;-\; \text{базис } \Lambda_q^0$$

Пример:

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}(\xi^1, \dots, \xi^q) = \frac{q!}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} e_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_q)}(\xi^1, \dots, \xi^q) =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_q} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} e_{\sigma(i_1)}(\xi^1) \cdot \dots \cdot e_{\sigma(i_q)}(\xi^q) = \sum_{\sigma\in S_q} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \xi^1_{\sigma(i_1)} \cdot \dots \cdot \xi^q_{\sigma(i_q)}$$

Таким образом, получили соответствующий минор матрицы $\left(\xi_j^i\right)$. Если $q = n$, то

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_n(\xi^1, \dots, \xi^n) = det\left(\xi_j^i\right)$$

Задача. Вычислить $(2e_1 - 3e_2 + e_3) \wedge (e_2 - e_3) \wedge (e_1 + 3e_2)$ на наборе ξ^1, ξ^2, ξ^3, где $\xi^1 = (1, 2, 3)$, $\xi^2 = (-1, 0, 2)$, $\xi^3 = (1, 1, -1)$.

Решение.

Раскроем скобки – внешнее произведение линейно, в силу косой симметрии ненулевыми слагаемыми будут лишь те, где все сомножители различны:

$$(2e_1 - 3e_2 + e_3) \wedge (e_2 - e_3) \wedge (e_1 + 3e_2) =$$

$$= -6e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 + 3e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 =$$

$$= 6e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + 3e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = 8e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

Тогда

$$(2e_1 - 3e_2 + e_3) \wedge (e_2 - e_3) \wedge (e_1 + 3e_2)(\xi^1, \xi^2, \xi^3) =$$

$$= 8e_1 \wedge e_2 \wedge e_3(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = 8det\left(\xi_j^i\right) = 8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -24$$

Ответ: -24.

Как отмечалось выше, $\left\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}\right\}, i_1 < \cdots < i_q$ – базис в Λ_q^0 – пространстве кососимметрических тензоров. Если $dimV = n$, то в базисе C_n^q элементов, то есть,

$$dim\Lambda_q^0 = C_n^q$$

<u>Упражнение</u>: найти размерность пространства симметрических тензоров.

Естественно возникает вопрос: верно ли, что пространство тензоров с нижними индексами можно представить в виде прямой суммы пространства симметрических и пространства кососимметрических тензоров?

Оказывается, ответ отрицательный (это видно хотя бы из того, что сумма размерностей пространств симметрических и кососимметрических тензоров не равна размерности пространства тензоров с нижними индексами).

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ