



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА



*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ЛАЗЕРОВ

САВЕЛЬЕВ-ТРОФИМОВ  
АНДРЕЙ БОРИСОВИЧ

---

ФИЗФАК МГУ

---

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**МАСЛЯНИЦЫНУ АНАСТАСИЮ ИГОРЕВНУ**



## Содержание

Лекция 1	5
Введение . . . . .	5
Двухуровневая система . . . . .	5
Трехуровневая система . . . . .	6
Создание лазера . . . . .	7
Свойства лазера . . . . .	8
Генератор сигналов . . . . .	10
Лекция 2	12
Потери в резонаторе . . . . .	12
Режимы генерации . . . . .	13
Активная среда – двухуровневая система . . . . .	14
Активная среда – трехуровневая система . . . . .	17
Активная среда – четырехуровневая система . . . . .	18
Лекция 3	19
Матрица плотности . . . . .	19
Вывод скоростных уравнений для двухуровневой системы . . . . .	21
Лекция 4	24
Оптический резонатор . . . . .	24
Распространение гауссова пучка . . . . .	25
Задача о фокусировке пучка линзой . . . . .	27
Волновое уравнение для пустого резонатора . . . . .	29
Расходимость . . . . .	31
Лекция 5	32
Моды резонатора . . . . .	32
Метод ABCD-матриц . . . . .	32
Описание плоского резонатора . . . . .	36
Обобщённый сферический резонатор . . . . .	40
Лекция 6	42
Смещение перетяжки . . . . .	42
Учет конечности поперечных размеров резонатора . . . . .	43
Примеры эквивалентных резонаторов . . . . .	45
Спектр лазера . . . . .	46
Неоднородное уширение . . . . .	47
Однородное уширение . . . . .	48
Активные среды . . . . .	48
Лекция 7	51
Эталон Фабри-Перо . . . . .	51
Использование эталона Фабри-Перо в резонаторе . . . . .	54
Другие инструменты селекции мод . . . . .	56

Дополнительные виды резонаторов . . . . .	59
Поляризация излучения . . . . .	60
Лекция 8 . . . . .	61
Скоростные уравнения . . . . .	61
Описание лазера в рамках простейшей модели . . . . .	63
Лазер на рубине . . . . .	66
Nd:YAG лазер . . . . .	67
Лекция 9 . . . . .	70
Оптимизация выходной мощности лазера . . . . .	70
Устойчивость стационарной генерации . . . . .	70
Оценка параметров релаксации . . . . .	73
Импульсная генерация . . . . .	74
Модуляция добротности . . . . .	75
Лекция 10 . . . . .	81
Математические основы модуляции добротности . . . . .	81
Метод синхронизации мод . . . . .	84
Лекция 11 . . . . .	88
Типы лазеров . . . . .	88

# Лекция 1

## Введение

На сегодняшний день треть публикаций по лазерной физике связана со сверхкороткими импульсами. В частности, сейчас уже получены оптические фемтосекундные импульсы. Оптический импульс с длительностью меньше одного периода, то есть одного колебания электро-магнитной (ЭМ) волны, создать невозможно: законы электродинамики требуют, чтобы интеграл поля ЭМ волны по времени был равен нулю. Для этого необходимо равенство времени, в котором поле принимает положительные и отрицательные значения. Очевидно, при длительности импульса в половину периода это не будет выполняться. В других диапазонах ЭМ волн это требование можно обойти, например в радио диапазоне легко генерируется прямоугольный сигнал. В акустике также возможны резкие импульсы давления, такие как цунами, у которых положительная и отрицательная части не равны. Так что для получения более коротких импульсов нужно уходить из оптического диапазона длин волн. Тогда в той же длительности нескольких фемтосекунд поместится много оптических периодов, и проблем с генерацией не возникнет. Сейчас самые короткие лазерные импульсы имеют длительность порядка 100 аттосекунд ( $10^{-14}$  с).

В этом курсе мы будем обсуждать стационарные режимы генерации в лазерах, в которых все процессы уже установились и протекают без изменений. Сначала мы рассмотрим основные компоненты лазера, дальше мы разберемся в них по отдельности, а затем совместим все вместе для создания общей простой модели работы лазера.

Поговорим об истории развития лазерной физики. Все началось с идей Эйнштейна, который в 1917 году описал спонтанные и вынужденные переходы в одиночном атоме. Далее, в 1940-х годах советский ученый В.А. Фабрикант показал возможность генерации вынужденного излучения, усиливающего изначальное излучение, за счет вынужденных переходов множества атомов. Затем, в 1953-1954 годах две группы ученых из СССР (А.М. Прохоров и Н.Г. Басов) и США (Дж. Вебер, Д. Гордон и Ч.Х. Таунс) независимо предположили, что вынужденное излучение можно наблюдать на молекулах аммиака ( $\text{NH}_3$ ). Остановимся на этом подробнее.

## Двухуровневая система

В аммиаке можно выделить два энергетических уровня в колебаниях молекул, с которых переходы на другие уровни очень маловероятны. Тогда можно применять модель двухуровневой системы, в которой мы «забываем» про остальные состояния. Нижний уровень называется основным, а верхний — возбужденным, и между ними возможны переходы (см. рис. 1.1).

В заданный момент времени в системе есть определенное число молекул, которые совершают колебания с энергиями  $E_1$  и  $E_2$ ; будем говорить что молекулы находятся на соответствующих уровнях. Важно понимать, что в равновесной системе число

молекул на уровнях определяется распределением Больцмана, а именно:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \quad (1)$$

где  $N_1, N_2$  — количество молекул на соответствующем уровне,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана.

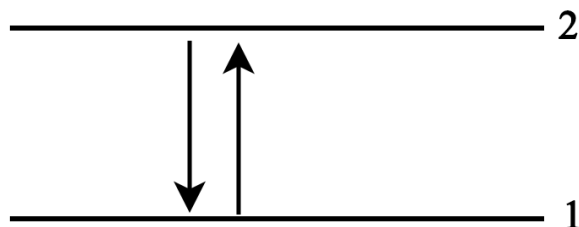


Рисунок 1.1: Двухуровневая система энергетических уровней. Стрелками показаны возможные переходы.

Таким образом, молекул на основном уровне в равновесной системе больше, чем на возбужденном, и в этом случае вынужденное излучение невозможно. Для его получения необходимо нарушить термодинамическое равновесие и создать такие условия, чтобы большинство молекул находилось на возбужденном уровне, при так называемой инверсии населенности уровней. Аммиак в этом плане оказался очень удобным: его молекулы можно возбудить электрическим разрядом и переместить в отдельный сосуд, где уже можно производить усиление излучения. Так как эти уровни описывают колебания молекул, разница между их энергиями достаточно мала, и создавалось микроволновое излучение. Генератор такого излучения называется мазером (аббревиатура от англ. microwave amplification by stimulated emission of radiation).

### Трехуровневая система

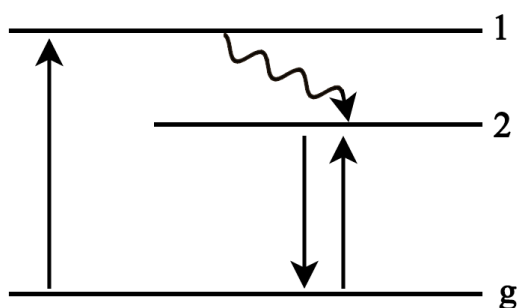


Рисунок 1.2: Трехуровневая система энергетических уровней. Стрелками показаны рассматриваемые переходы. Переход 1-2 безызлучательный.

В 1955 году Басов и Прохоров опубликовали статью, которая значительно расширила возможность создания излучающих систем. Это связано с тем, что в двухуровневой системе получить большую инверсию населенности сложно. Ученые предложили использовать трехуровневую систему (см. рис. 1.2).

В ней сначала происходит возбуждение из основного состояния на первый уровень, а затем происходит безызлучательный переход на второй уровень (энергия уходит в движение атомов). На втором уровне получается инверсия населенности по сравнению с основным состоянием. В трехуровневой системе гораздо легче создать такие условия, и в последующих лекциях мы подробно об этом поговорим.

## Создание лазера

В 1964 году Прохорову, Басову и Таунсу была присуждена Нобелевская премия по физике «за фундаментальные работы в области квантовой электроники, которые привели к созданию осцилляторов и усилителей, основанных на принципе лазера—мазера». В 1959 году А. Джаван и Дж. Сандерс показали, что можно получить инверсию населенности в смеси газов гелия (He) и неона (Ne) с помощью электрического разряда. В 1960 году Т.Х. Майман создал первый «настоящий» импульсный лазер на кристалле рубина. Рубин — не самая оптимальная среда для генерации, и сейчас лазеры на рубине можно найти только в музеях. Фактически одновременно с Майманом лазер на рубине запустили Басов и Прохоров, а в конце 1960 года Джаван создал гелий-неоновый лазер. Начался поиск других сред, в которых возможно получить лазерную генерацию. Советские ученые работали над использованием полупроводников для генерации излучения. Напомним, что в полупроводниках с p-n переходом в области n много электронов, а в p — дырок. С точки зрения электрона, попавшего в область p, он находится в сильно неравновесной среде, и он может совершить переход из свободной зоны в валентную зону. Этот переход может быть как и безызлучательным, передающим энергию решетке, а может быть и излучательным в оптическом или ИК диапазонах (из-за средней ширины запрещенной зоны). Однако, для того чтобы получить необходимую инверсию населенности, через полупроводник необходимо пропустить огромный ток, который просто расплавлял всю систему. В итоге полупроводниковый лазер был запущен, но с использованием более сложного гетероперехода. В 2000 году Ж. И. Алферов получил Нобелевскую премию за разработку полупроводниковых гетероструктур, и сейчас такие лазеры широко применяются.

Основные типы лазеров, такие как газовые (на гелий-неоне, аргоне и эксимерные лазеры) и твердотельные (использующие кристаллы и стекла), были изучены в 1960-х годах. В последующие годы происходила гонка по улучшению генерации и характеристик излучения. Если смотреть на современные публикации, то «новую» среду для лазеров предлагают примерно раз в год: в уже известную кристаллическую решетку добавляют атомы нового вещества, и получившаяся среда немного отличается по характеристикам от сред с другими примесями. Большим прорывом в этом смысле можно считать использование в 1970-х годах кристалла сапфира ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) с примесью ионов титана ( $\text{Ti}^{3+}$ ), который является вибранным кристаллом (непохожим на другие твердотельные) и позволяет генерировать короткие импульсы.

## Свойства лазера

Обсудим свойства и компоненты лазера. Само слово лазер — сокращение от английского *light amplification by stimulated emission of radiation*. В советской литературе использовалось обозначение ОКГ — оптический квантовый генератор. Это связано с тем, что, во-первых, лазер в первую очередь является генератором света, а не усилителем, а во-вторых, все публикации со словом «лазер» в СССР засекречивались в военных целях.

Какие сейчас есть лазеры, и какие у них характеристики?

- Длина волны  $\lambda$ . В основном лазеры работают в оптическом диапазоне (400-750 нм) и ИК (подразделяется на ближний, средний и дальний; 750 нм - 20 мкм). Также есть терагерцевые полупроводниковые лазеры, работающие на длинах волн до 300 мкм. В УФ существуют лазеры до 100 нм. Уменьшать длину волны далее проблематично, потому что фактически все среды ее поглощают. Однако, были созданы рентгеновские лазеры с  $\lambda$  до единиц нанометров, использующие в качестве среды плазму и основанные на более сложных принципах, о которых мы не будем говорить.
- Когерентность. ЭМ волну можно представить в виде:

$$E(x, t) = E_0 e^{ikx + i\omega_0 t + i\varphi}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — фаза колебаний. Именно в ней заключается принципиальное отличие лазерного излучения от света лампы накаливания: у лазера фаза постоянна (или в худшем случае медленно меняется во времени), а у остальных источников света это быстро и случайно меняющаяся величина. Существует пространственная когерентность, которая описывает когерентность двух точек волнового фронта, как в интерферометре Юнга, и временная когерентность, которая показывает, насколько когерентны два колебания в разные моменты времени, как в интерферометре Майкельсона. Типичное время когерентности для лазеров составляет порядка  $10^{-10}$  с, а длина когерентности — 1 м. Это означает, что в среднем лазер генерирует пуг волн одной фазы на протяжении  $10^{-10}$  с, а потом фаза скачком сбивается из-за флуктуаций внешней среды (вибраций оптического стола, флуктуаций температуры). У интерферометра LIGO, который использовался для детектирования гравитационных волн, время когерентности 10 с, где ученые тщательно старались минимизировать внешние воздействия.

- Спектр излучения. Если взять Фурье-преобразование от  $E(x, t)$  с пределами интегрирования  $\pm\infty$ , то получится дельта-функция, то есть идеально монохроматическое излучение на частоте  $\omega_0$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega - \omega_0) \quad (3)$$

Однако, в реальности существует конечное время измерения  $T$ , в пределах которого нужно интегрировать. Это приводит к уширению дельта-функции, то



есть к появлению новых частот в спектре. Причем ширина получившегося спектра обратно пропорциональна времени  $T$ , и в пределе  $T \rightarrow \infty$  ширина стремится к 0. Также, к уширению спектра приводит и зависимость амплитуды  $E_0(t)$  от времени, пусть даже и медленной по сравнению с  $\frac{1}{\omega_0}$  (когда за один период колебаний несущей частоты амплитуда изменяется мало). Несмотря на это, у непрерывных лазеров очень узкий спектр. Если  $E_0(t)$  имеет форму короткого прямоугольного сигнала (в случае генерации лазером коротких импульсов), то ширина спектра будет сопоставима с несущей частотой  $\omega_0$ . Также и зависимость фазы от времени приводит к уширению спектра. Так, при случайной фазе (дельта-коррелированной), спектр превращается в константу, и мы имеем просто белый шум. В лазерах фаза излучения на всех генерируемых частотах коррелирована, в чем и заключается свойство когерентности. Важно отметить, что для лазера волны с разными частотами могут интерферировать.

$$\begin{aligned} I &= |E_0 \cos \omega_1 t + E_0 \cos \omega_2 t|^2 = E_0^2 (\cos^2 \omega_1 t + \cos^2 \omega_2 t + 2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t) = \\ &= E_0^2 (\cos^2 \omega_1 t + \cos^2 \omega_2 t + \cos (\omega_1 + \omega_2)t + \cos (\omega_1 - \omega_2)t) \end{aligned}$$

При этом появляются частоты  $\omega_1 + \omega_2$  и  $\omega_1 - \omega_2$ , и вся интерференционная картина будет медленно меняться во времени.

- Направленность. Все приведенные выкладки справедливы и для случая зависимости  $E_0$  от поперечных пространственных координат  $x, y$ :

$$E(x, y, z, t) = E_0(x, y) e^{ikz + i\omega_0 t + i\varphi(x, y)},$$

Чтобы получить плоскую волну, необходимо задать зависимости по  $x, y$  до бесконечности, что опять же невозможно в реальных условиях из-за конечной апертуры и формы пучка. Из-за этих факторов происходит уширение спектра в пространстве волновых векторов  $k$ , и волна перестает быть плоской. Луч лазера, хоть и выглядит направленным на маленьких расстояниях, на самом деле испытывает дифракцию. Дифракция описывается отношением длины волны к диаметру пучка  $\frac{\lambda}{d}$ , что примерно соответствует углу расходимости пучка  $\theta$ . Например, для  $\lambda = 1$  мкм,  $d = 1$  мм,  $\theta = 10^{-3}$  рад. Если такой пучок направить на Луну, то пятно станет огромных размеров. Естественные источники света, например Солнце, не обладают пространственной когерентностью и излучают в  $4\pi$  стерадиан (полный телесный угол).

Можно ли создать излучение, похожее по характеристикам на лазерное, не используя лазерную генерацию? Возьмем тепловой некогерентный источник, поставим узкую диафрагму с диаметром  $a$  на расстоянии  $L$  от источника, которая будет задавать расходимость пучка. Если сделать так, что  $\theta = \frac{a}{L} \sim \frac{\lambda}{d} = 10^{-3}$ , то получаемое излучение будет в  $10^{-7}$  раз менее мощное, чем изначальный источник. Далее, нужно обеспечить узкий спектр излучения. Для обычного лазера несущая частота примерно  $3 \cdot 10^{14}$  Гц, ширина спектра  $10^{10}$  Гц, то есть выделение такого спектра внесет еще

$10^{-4}$  потерь в мощность. Получаем, что для того, чтобы создать пучок из теплового источника, эквивалентный по расходимости и спектру лазеру с мощностью 1 Вт, тепловой источник должен обладать мощностью порядка  $10^{11}$  Вт, что недостижимо на адекватных установках. И даже в этом случае, фаза такого излучения будет случайной. По этому видно, что лазеры дают уникальные характеристики излучения, которые невозможно получить другими способами.

## Генератор сигналов

Рассмотрим общий принцип работы генератора сигналов любой природы (см. рис. 1.3).

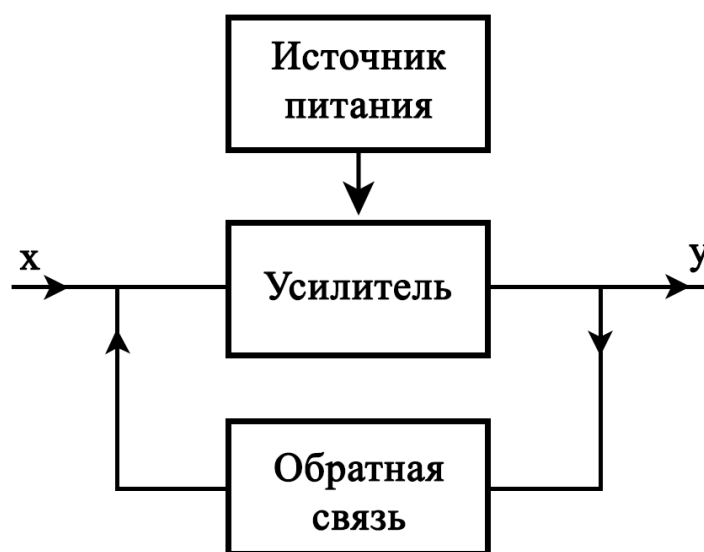


Рисунок 1.3: Общая схема генератора.

Пусть на вход нашей системы подается сигнал  $x$ . Этот сигнал попадает на абстрактный усилитель, который подключен к источнику питания, и на выходе получается сигнал  $y$ . Появляется коэффициент усиления  $K_y : y = K_y x$ . Что нужно добавить, чтобы создать генератор? Положительную обратную связь с коэффициентом  $K_{oc}$ . Тогда сигнал на выходе примет следующую форму:

$$y = K_y(x + K_{oc}y)$$

$$(K_y K_{oc} - 1)y + K_y x = 0 \quad (4)$$

Для генератора в общем случае входной сигнал не требуется, положим  $x = 0$ . Решение  $y = 0$  нас не интересует, тогда остается только одно:  $K_y K_{oc} = 1$ . Но все не так просто, в реальных системах  $K_y$  и  $K_{oc}$  — комплексные величины, зависящие от частоты:

$$K_{y,oc} = \tilde{K}_{y,oc}(\omega) e^{i\varphi_{K_{y,oc}}(\omega)}$$

Тогда условие  $K_y(\omega)K_{oc}(\omega) = 1$  невозможно гарантировать для всех частот. Получается интересный вывод — если усилитель и обратная связь линейны по входному сигналу, то генерации не будет. Если же положить, что  $K_y$  и  $K_{oc}$  также являются функциями входного сигнала, то есть нелинейными, тогда уравнение может иметь решение, хотя и получить его стало гораздо труднее. Это показывает важность нелинейных процессов, как и в лазерной физике, так и в остальной науке в целом.

## Лекция 2

### Потери в резонаторе

В самом простом случае лазер состоит из активной среды, двух зеркал по бокам и блока накачки (см. рис. 2.1).



Рисунок 2.1: Общая схема лазера.

Проведем аналогии с генератором, обсужденным на прошлой лекции: активная среда — усилитель, накачка — источник питания, зеркала (резонатор) обеспечивают наличие положительной обратной связи. Принципиальное отличие лазерного генератора от радиочастотного: лазер — распределенная (не сосредоточенная) система, где нужно учитывать волновые эффекты. Это связано с тем, что размеры резонатора много больше генерируемых длин волн. При больших допущениях лазер можно рассматривать как сосредоточенную систему, и в этом смысле аналогия между этими двумя генераторами работает.

Время обхода резонатора длиной  $L$  составляет  $\tau_0 = \frac{2L}{c}$ , то есть за один обход свет два раза проходит резонатор, в том числе активную среду, и возвращается в ту же точку. Время обхода будет изменяться в зависимости от наличия других элементов в резонаторе, скорости света в активной среде и прочих факторов.

Пустой резонатор — резонатор, состоящий только из двух зеркал. В глухом резонаторе оба зеркала имеют высокие коэффициенты отражения.

В резонаторе, как и в любых реальных системах, присутствуют потери. Для эффективной генерации нужно, чтобы число фотонов (интенсивность) после одного обхода резонатора было много больше изначального числа фотонов. Какие потери могут быть в резонаторе?

- Неидеальное отражение от зеркал. Даже у специальных оптических зеркал коэффициент отражения  $R = 0.99999 \neq 1$ , что приводит к значительным потерям при многократном обходе резонатора.
- Дифракция. Так как длина резонатора  $L \gg \lambda$ , пучок будет испытывать дифракцию, и его радиус будет постепенно увеличиваться. А зеркала в поперечном направлении имеют конечный размер, и рано или поздно радиус пучка станет сравнимым с ним. Часть энергии начнет уходить из резонатора.

- Полезные потери. Если оба зеркала будут глухими, то излучение из резонатора не выйдет, что делает такую установку практически бесполезной. В реальности оставляют глухим только одно зеркало, а второе делают с  $R = 0.2 \div 0.8$ , и именно через него и будет выходить полезное излучение.

Для количественного описания потерь введем коэффициент  $\delta$ , который задает интенсивность на  $N$ -ом проходе в пустом резонаторе:

$$I_N = I_{N-1}(1 - \delta) = I_0(1 - \delta)^N$$

Положим, что  $\delta$  не зависит от интенсивности (то есть потери линейны). Предположим также, что потери малы:  $\delta \ll 1$ .

$$\ln \frac{I_N}{I_0} = (1 - \delta) = N \ln(1 - \delta) \sim -N\delta$$

$$I_N \sim I_0 e^{-N\delta}$$

Для удобства преобразуем выражение так, чтобы получилась зависимость от дискретного времени  $t = N\tau_0$ .

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}, \quad (5)$$

где  $\tau_c = \frac{\tau_0}{\delta}$  — время жизни фотона в резонаторе. Если  $\delta \ll 1$ , то в среднем фотон покинет резонатор только через большое количество обходов. Индекс в  $\tau_c$  обозначает слово cavity — резонатор. Для перехода к непрерывной шкале времени положим, что  $t \gg \tau_0 \sim 10^{-8}$  с (для  $L = 0.15$  м).

## Режимы генерации

Запишем дифференциальное уравнение, описывающее интенсивность в сосредоточенном резонаторе (без учета продольной координаты):

$$\frac{dI}{dt} = \left( A(I) - \frac{1}{\tau_c} \right) I, \quad (6)$$

где  $A(I)$  — коэффициент усиления. Знак множителя перед  $I$  будет определять три возможных случая:

- $A(I) < \frac{1}{\tau_c}$ . При малом коэффициенте усиления сигнал со временем будет убывать, что делает генерацию невозможной.
- $A(I) = \frac{1}{\tau_c}$ . Пороговый случай — усиление компенсирует потери, сигнал будет постоянным.
- $A(I) > \frac{1}{\tau_c}$ . Сигнал со временем начнет расти. Это необходимое условие для того, чтобы система смогла генерировать излучение.

Величина  $A(0)$  определяется свойствами используемой активной среды. Зависимость  $A(I)$  должна быть нелинейной, а также стремиться к 0 при  $I \rightarrow \infty$ , потому что накачка способна дать конечную энергию системе. В зависимости от положения  $A(0)$  относительно  $\frac{1}{\tau_c}$  выделяют два режима генерации — мягкий и жесткий. Более наглядно они представлены на рис. 2.2. Для жесткого режима системе необходимо сообщить начальный сигнал, а мягкий «стартует» сам по себе.

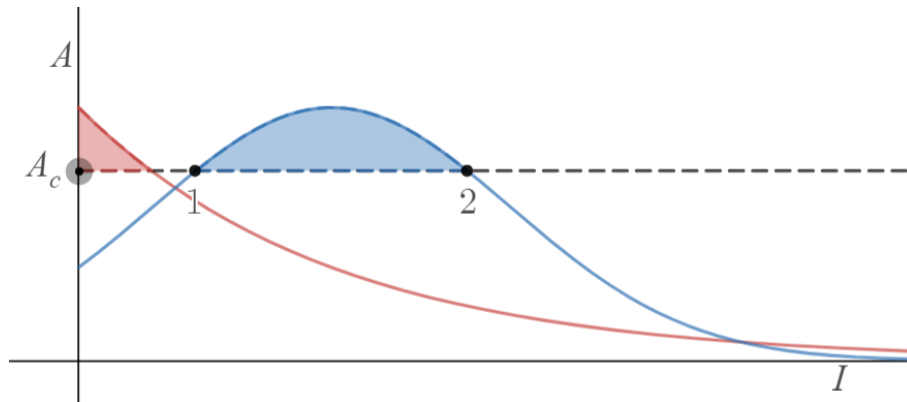


Рисунок 2.2: Зависимость коэффициента усиления  $A$  от интенсивности  $I$ . Значение  $A_c$  соответствует  $\frac{1}{\tau_c}$ . Красным цветом показан мягкий режим генерации, синим — жесткий. Цветными областями выделены области генерации.

Есть ли состояния с устойчивой генерацией (то есть с постоянной интенсивностью  $I$ )? Чтобы ответить на этот вопрос, проанализируем устойчивость точек  $A(0) = \frac{1}{\tau_c}$ , подставив в дифференциальное уравнение [6]  $I = \frac{1}{\tau_c} + \varepsilon I$  и разложив  $A(I)$  в ряд Тейлора до первого порядка.

$$\frac{d\varepsilon I}{dt} = \frac{\partial A}{\partial I} \varepsilon I \quad (7)$$

Если  $\frac{\partial A}{\partial I} > 0$  при  $\varepsilon I > 0$ , то отклонение будет увеличиваться, то есть точка нестационарная. Видно, что для жесткого режима точка 1 — нестационарная, а 2 — стационарная. В точке 2 при увеличении интенсивности усиление будет меньше, а при уменьшении интенсивности усиление будет больше. Для мягкого режима пороговая точка стационарна. Именно в этих точках и будет происходить генерация с постоянной интенсивностью.

### Активная среда – двухуровневая система

Рассмотрим среду, в которой можно выделить два невырожденных энергетических состояния атомов или молекул (см. рис. 2.3). Она находится при температуре  $T$ . Введем понятие населенностей уровней  $N_1$  и  $N_2$  — количества атомов в том или ином состоянии. Полное число атомов в системе  $N_0 = N_1 + N_2$ , тогда вероятность найти систему в определенном состоянии, усредненная по всему ансамблю атомов, будет равна  $\frac{N_i}{N_0}$ . Пусть в систему прилетает резонансный фотон с  $\hbar\omega_{12} = E_2 - E_1$ , который может спровоцировать вынужденный переход системы из одного состояния

в другое. Также существуют спонтанные переходы с нижнего на верхний уровень и наоборот.

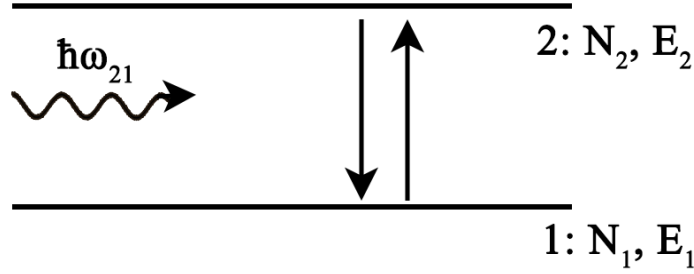


Рисунок 2.3: Двухуровневая схема уровней и резонансный фотон.

Напомним, что в термодинамическом равновесии населенности подчиняются распределению Больцмана:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \quad (8)$$

При выполнении условия  $E_2 - E_1 \gg kT$  можно пренебречь спонтанными переходами с нижнего уровня на верхний. При этом изменение мощности излучения можно записать через коэффициенты Эйнштейна:

$$dP_{21}^{(c)} = A_{21}dt$$

$$dP_{21}^{(B)} = B_{21}U_{\hbar\omega_{21}}dt$$

$$dP_{12}^{(B)} = -B_{12}U_{\hbar\omega_{21}}dt$$

Тогда отношение населенностей будет равно

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= \frac{UB_{21} + A_{21}}{UB_{12}} \\ UB_{12}e^{-\frac{E_1}{kT}} &= (UB_{21} + A_{21})e^{-\frac{E_2}{kT}} \end{aligned} \quad (9)$$

Устремим температуру к бесконечности, тогда экспоненты пропадают, спонтанными переходами можно пренебречь. Получаем  $B_{12} = B_{21} = B$ . Тогда получаем выражение для спектральной плотности мощности абсолютно черного тела:

$$U = \frac{A_{21}}{B} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{12}}{kT}} - 1}, \quad (10)$$

откуда можно выразить  $\frac{A_{21}}{B} = \frac{\hbar\omega_{12}^3}{4\pi^2c^2}$ . Однако, если есть безызлучательные переходы в системе, то это соотношение нарушится.

Условие  $E_2 - E_1 \gg kT$  означает, что  $N_2 \rightarrow 0$ , т.к.  $\frac{N_2}{N_1} \sim e^{-30}$  для оптических переходов. То есть ни о каком усилении при комнатной температуре в термодинамическом равновесии речи нет.

Запишем балансные уравнения для двухуровневой системы. Опустим индексы у коэффициентов  $A_{21}$  и  $B$ .

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 &= \overbrace{-AN_2}^{\text{Изменение числа атомов}} \overbrace{-BIN_2}^{\text{Вынужденные переходы вниз}} + \overbrace{BIN_1}^{\text{Вынужденные переходы вверх}} \\ &\quad \text{Спонтанные переходы вниз} \\ \dot{N}_1 &= AN_2 + BIN_2 - BIN_1 \\ \dot{N}_0 &= 0 = \dot{N}_1 + \dot{N}_2 \end{aligned}$$

Подстановка  $N_1$  как  $N_0 - N_2$  оставляет в этой системе только первое уравнение относительно  $N_2$ . Нас интересует установившееся состояние:

$$0 = -AN_2 - BIN_2 + BI(N_0 - N_2)N_2 = \frac{BIN_0}{A+2BI} \quad (11)$$

При  $I \rightarrow 0$ :  $N_2 \rightarrow 0$ , а при  $I \rightarrow \infty$ :  $N_2 \rightarrow \frac{N_0}{2}$ . В этой ситуации при большой резонансной оптической накачке  $N_1 = N_2$ , что не позволяет получить инверсию населенности и, следовательно, усиления. При другом типе накачки можно получить усиление, что было сделано, например, в первых лазерах на молекулах аммиака.

Учтем тот факт, что число фотонов меняется. Положим, что изначальный поток резонансных фотонов  $I_0$  падает на линейную цепочку двухуровневых атомов, расположенных вдоль оси  $z$ . Если атом совершил вынужденный переход, то число фотонов изменилось на  $\pm 1$ :

$$dI = -\frac{\hbar\omega}{2}(dN_2 - dN_1)$$

$$dN_2 = -BI dt(N_2 - N_1)$$

$$dN_1 = BI dt(N_2 - N_1)$$

$$dt = \frac{dz}{c}$$

Для достаточно большой интенсивности вероятность вынужденных переходов намного больше спонтанных переходов, поэтому  $A$  не учитываем. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dz} &= \frac{\hbar\omega}{c} B(N_2 - N_1)I \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= I_0 e^{\alpha z}, \quad \alpha = \frac{\hbar\omega}{c} B(N_2 - N_1) \end{aligned} \quad (12)$$

Если  $N_2 < N_1$ , получаем поглощение, описываемое законом Бугера. Если  $N_2 > N_1$ , получаем усиление сигнала.



## Активная среда – трехуровневая система

В трехуровневой схеме генерация идет на переходе 2-1, а накачка на переходе 1-3. Переход 3-2 — безызлучательный и быстрый. Схема изображена на рис. 2.4

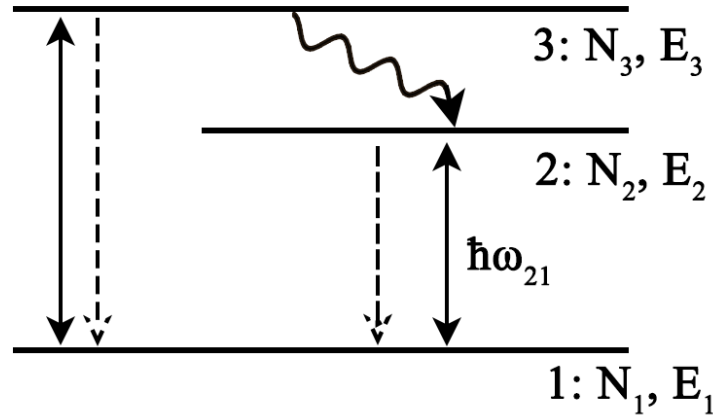


Рисунок 2.4: Трехуровневая схема уровней. Сплошными прямыми стрелками изображены вынужденные переходы, пунктирными — спонтанные, изогнутыми — безызлучательные.

Необходимо подобрать такие параметры, при которых система на 3 уровне имела бы большую вероятность перейти на 2, чем на 1. Запишем балансные уравнения:

$$\dot{N}_3 = -A_{31}N_3 - B_{31}I_H N_3 + B_{31}I_H N_1 - S_{32}N_3$$

$$\dot{N}_2 = -A_{21}N_2 - B_{21}I N_2 + B_{21}I N_1 + S_{32}N_3$$

$$\dot{N}_3 = A_{31}N_3 + B_{31}I_H N_3 - B_{31}I_H N_1 + A_{21}N_2 + B_{21}I N_2 - B_{21}I N_1$$

$$\dot{N}_0 = (\dot{N}_1 + \dot{N}_2 + \dot{N}_3) = 0$$

Упростим систему:  $N_3 = 0$ , т.к. переход 3-2 быстрый. Также мы уже пренебрегли переходами 2-3 из-за того, что  $E_3 - E_2 \gg kT$ . Далее, положим  $B_{31}I_H \ll S_{32}$  и  $A_{31} \ll B_{31}I_H$ . В итоге получаем:

$$N_2 - N_1 = N_0 \frac{B_{31}I_H - A_{21}}{B_{31}I_H + 2B_{21}I + A_{21}} \quad (13)$$

Рассмотрим предельные случаи. Если  $I_H \rightarrow \infty$ , то  $N_2 - N_1 = N_0$ , что означает, что все атомы на уровне 2. Это возможно, если уровень 2 метастабильный (с большим временем жизни). Необходимое условие генерации:  $B_{31}A_H > A_{21}$ , то есть в трехуровневой схеме выполняется жесткий режим генерации. Если формально положить  $I \rightarrow \infty$ , то усиления не будет.

## Активная среда – четырехуровневая система

Накачка происходит на переходе 1-4, генерация — на 3-2 (см. рис. 2.5). По аналогии с трехуровневой схемой вводятся требования на безызлучательный и быстрый переход 4-3 и на большое время жизни уровня 3. Дополнительно требуется быстрый безызлучательный переход 2-1.

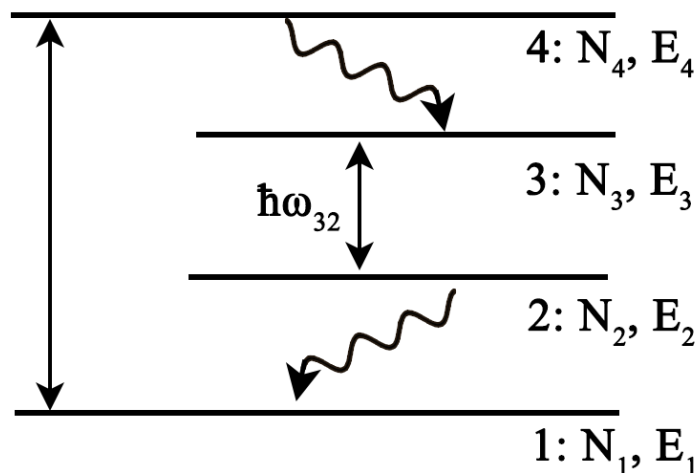


Рисунок 2.5: Четырехуровневая схема с двумя безызлучательными переходами. Спонтанные переходы стрелками не показаны.

В трехуровневой схеме возникала проблема с тем, что инверсия населенности создавалась по сравнению с основным уровнем, на котором много атомов, что требовало большой накачки. Здесь же, если переход 2-1 быстрый, то населенность  $N_2 = 0$ , и получить инверсию населенности очень легко (мягкий режим, без порога).

$$N_3 = N_0 = \frac{B_{41}I_H}{B_{41}I_H + A_{32} + B_{32}I} > 0 \quad (14)$$

Четырехуровневая схема популярна, но у нее есть один недостаток: два безызлучательных перехода, сильно нагревающих активную среду и уменьшающих КПД.

## Лекция 3

### Матрица плотности

На прошлой лекции мы оперировали дифференциальными уравнениями, построенными чисто на интуитивных соображениях о переходах между уровнями. Сейчас мы введем более строгое описание на примере двухуровневой системы с помощью нестационарного уравнения Шредингера для одиночного атома:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$
(15)

где  $\hat{H}_0$  — гамильтониан атома без внешних взаимодействий,  $\hat{H}'$  — учитывает только взаимодействия, которые мы перечислим позже. Тогда сначала мы можем решить задачу на собственные функции и собственные значения оператора  $\hat{H}_0$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi$$

$$\Rightarrow \psi_j^{(0)}; E_j^{(0)}$$

Верхний индекс (0) обозначает принадлежность к исходному гамильтониану. Получилась система ортонормированных волновых функций и соответствующих уровней энергии для атома, который ни с чем не взаимодействует. Мы рассматриваем ансамбль атомов, и в общем случае они все находятся в своих состояниях. Атомы находятся в термостате, и их распределение по энергиям должно соответствовать закону Больцмана, но только из уравнения Шредингера этого не вывести, т.к. учесть термостат в гамильтониане взаимодействий  $\hat{H}'$  сложно. Для описания ансамбля многоуровневых атомов существует формализм матриц плотности. Это позволяет по  $\psi_j^{(0)}$  и  $E_j^{(0)}$  провести классическое усреднение по всему ансамблю. Рассмотрим общий гамильтониан  $\hat{H}$  и разложим его собственные функции  $\Phi_n$  по базису  $\psi_j^{(0)}$ :

$$\Phi_n = \sum_j a_j^{(n)} \psi_j^{(0)}$$

Физический смысл коэффициентов  $a_j^{(n)}$ : их квадрат модуля определяет вероятность нахождения системы в состоянии  $\psi_j^{(0)}$ . Введем матрицу плотности, состоящую из следующих элементов:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{N} \sum_n a_j^{(n)*} a_i^{(n)}$$
(16)

Знак \* означает комплексное сопряжение. Фактически, матрица  $\hat{\rho}$  представляет собой классическое усреднение по ансамблю амплитуд вероятности. Ее можно также записать через  $\Phi_n$  с весовыми множителями, однако с учетом разложения  $\Phi_n$  по  $\psi_j^{(0)}$ , мы получаем формулу [16]. Рассмотрим подробнее свойства матрицы плотности.

- Размерность матрицы  $\hat{\rho}$  зависит от числа возможных состояний, в частности для двухуровневой системы это матрица  $[2 \times 2]$ .
- Эрмитовость:  $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$ .
- Единичный след:  $\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = 1$ . Иногда след обозначают как  $\text{Sp}$ . Физический смысл — нормировка диагональных элементов, которые соответствуют вероятностям нахождения на данном уровне.
- Для некой физической величины  $A$  выражение для квантово-механического и классического одновременных усреднений:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{ij} \sum_n a_j^{(n)*} a_i^{(n)} \psi_j^{(0)*} \hat{A} \psi_i^{(0)} = \sum_{ij} \left( \psi_j^{(0)*} \hat{\rho} \psi_i^{(0)} \right) \left( \psi_i^{(0)*} \hat{A} \psi_j^{(0)} \right) = \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{A}\} \quad (17)$$

Найдем уравнение, позволяющее рассчитывать матрицу плотности:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} &= \hat{H} \Phi_n \\ \frac{\partial a_i^{(n)}}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij} a_j^{(n)} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( a_i^{(n)*} a_j^{(n)} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( a_i^{(n)*} \right) a_j^{(n)} + \frac{\partial}{\partial t} \left( a_j^{(n)} \right) a_i^{(n)*} = -\frac{i}{\hbar} \sum_l \left( a_j^{(n)} a_l^{(n)*} H_{il} - H_{jl} a_l^{(n)} a_i^{(n)*} \right) \\ \frac{1}{N} \sum_n \frac{\partial}{\partial t} \left( a_i^{(n)*} a_j^{(n)} \right) &= \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H} \hat{\rho}] \\ i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= [\hat{H} \hat{\rho}] \end{aligned}$$

Это уравнение, описывающее временную динамику матрицы плотности, иногда называют именем Лиувилля. Далее, определим физический смысл элементов матрицы плотности. Для двухуровневой системы

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  — населенности соответствующих уровней. Недиагональные элементы запишем в виде:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{N} \sum_n |a_j^{(n)*}| |a_i^{(n)}| e^{i(\phi_i^{(n)} - \phi_j^{(n)})} \quad (18)$$

В силу эрмитовости  $\rho_{12} = \rho_{21}^*$ . Таким образом из четырех остается два независимых элемента. Если  $\rho_{12} = 0$ , то фазы  $\phi_i^{(n)} - \phi_j^{(n)}$  случайны, то есть излучение некогерентное, это происходит в термодинамическом равновесии. В степени когерентности и заключается смысл недиагональных элементов.

## Вывод скоростных уравнений для двухуровневой системы

Перейдем к описанию активной среды с помощью полученных выше уравнений. Положим, что гамильтониан системы в явном виде не зависит от времени, и будем писать полную производную по времени. Введем частоту  $\omega_{kl}$  резонансного перехода между уровнями в двухуровневой системе. Запишем уравнение Лиувилля в случае  $k \neq l$ :

$$\frac{d\rho_{kl}}{dt} + \underbrace{i\omega_{kl}\rho_{kl}}_{\text{из } H_0} = \frac{1}{i\hbar} \sum_m (H'_{km}\rho_{ml} - \rho_{km}H'_{ml})$$

Если положить  $H' = 0$ , то получается осциллирующее решение, а не термодинамическое равновесие, что соответствует отсутствию взаимодействий. Заметим, что  $H'$  состоит из частей, отвечающей за термостат и за взаимодействие с внешним ЭМ излучением. По нашим представлениям  $H_{\text{ТД}}$  должен вносить экспоненциальную релаксацию к равновесию при малых линейных потерях. Добавим это слагаемое:

$$\frac{d\rho_{kl}}{dt} + i\omega_{kl}\rho_{kl} + \frac{\rho_{kl}}{\tau_{kl}} = \frac{1}{i\hbar} \sum_m (H'_{km}\rho_{ml} - \rho_{km}H'_{ml})$$

Далее, уравнение для случая  $k = l := n$  должно давать распределение Больцмана в отсутствии внешнего поля:

$$\frac{d\rho_{nn}}{dt} + \underbrace{\sum (K_{nm}\rho_{nm} + K_{mn}\rho_{mn})}_{\text{Переход к равновесию}} = \frac{1}{i\hbar} \sum_m (H'_{nm}\rho_{mn} - \rho_{nm}H'_{mn})$$

Оставшаяся часть в  $H'$  описывает взаимодействие двухуровневой системы с ЭМ полем. Самая простая его модель — взаимодействие с диполем.

$$H'_{km} = -\mu_{km}\vec{E}, \quad \begin{cases} \mu_{km} \neq 0, & k \neq m \\ \mu_{km} = 0, & k = m \end{cases} \quad (19)$$

Напомним, что поляризация при взаимодействии излучения со средой выражается в виде:

$$\vec{P} = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{\mu}\} \quad (20)$$

С помощью этого выражения можно решать более общую задачу взаимодействия излучения с веществом через уравнения Максвелла. Мы же сразу запишем уравнения для двухуровневой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{12}}{dt} + i\omega_{12}\rho_{12} + \frac{\rho_{12}}{\tau_{12}} &= -\frac{1}{i\hbar}\mu_{12}(\rho_{22} - \rho_{11})\vec{E} \\ \text{Релаксация населенности сверху вниз} \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} + \underbrace{K_{21}\rho_{22}}_{\text{Релаксация населенности снизу вверх}} + \underbrace{K_{12}\rho_{11}}_{\text{Релаксация населенности снизу вверх}} &= \frac{1}{i\hbar}(\mu_{12}\rho_{12} - \mu_{21}\rho_{21})\vec{E} \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку  $E_2 - E_1 \gg kT$  слагаемое  $K_{12}\rho_{11} \rightarrow 0$ , а коэффициент  $K_{21}$  пропорционален коэффициенту Эйнштейна для спонтанных переходов. Представим поле накачки в

виде монохроматической волны с частотой  $\omega_0$  вдоль оси  $x$ :

$$E = \frac{1}{2} E^{(0)} e_x \left( e^{i\omega_0 t - ik_0 z} + \text{комплекс. сопр.} \right)$$

Если на систему осцилляторов падает гармоническая волна, можно использовать метод медленно меняющихся амплитуд. Представим решение  $\rho_{12}$  через амплитуду, медленно меняющуюся по сравнению с  $\frac{1}{\omega_0}$ .

$$\rho_{12} = \tilde{\rho}_{12} e^{i\omega_0 t - ik_0 z} + \text{комплекс. сопр.}$$

Подставим приближенные выражения для  $\rho_{12}$  и  $E$  в систему уравнений [21].

$$\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} + i(\omega_0 - \omega_{12})\tilde{\rho}_{12} + i(\omega_0 + \omega_{12})\rho_{12} + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tau_{12}} = \frac{i}{2\hbar} \mu_{12} e_x (\rho_{22} - \rho_{11}) E_0$$

Воспользуемся резонансным приближением:  $\omega_0 \sim \omega_{12}$  и будем искать стационарное решение этого уравнения  $\left( \frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = 0 \right)$ .

$$\tilde{\rho}_{12}^{(0)} = \frac{i}{2\hbar} \frac{\mu_{12} e_x (\rho_{22} - \rho_{11}) E_0}{i(\omega_0 - \omega_{12}) + \frac{1}{\tau_{21}}} = B_{12}(\omega_0) \quad (22)$$

Важно отметить, что слагаемое  $(\omega_0 + \omega_{12})$  было опущено, т.к. оно вносило малый вклад в  $\tilde{\rho}_{12}^{(0)}$ . В итоге недиагональный элемент был выражен через диагональные, то есть система свелась к одному уравнению. Однако, это было получено с многочисленными допущениями. Запишем искомое уравнение:

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} + K_{21}\rho_{22} = -B_{12}(\omega_0) (\rho_{22} - \rho_{11}) I_\omega, \quad (23)$$

где  $I_\omega$  — спектральная плотность мощности генерируемого излучения. Получаемое скоростное уравнение имеет вид:

$$\frac{dN_2}{dt} + A_{21}N_2 = -B_{12}(\omega_0) (N_2 - N_1) I_\omega,$$

Таким образом мы получили скоростное уравнение для двухуровневой системы. Коэффициент  $B_{12}(\omega_0)$  соответствует лоренцевской форме линии, которая определяет, насколько эффективно можно воздействовать на систему. Если релаксация не экспоненциальная, то форма линии будет другой.

Повторим используемые приближения:

1. Экспоненциальная релаксация за счет взаимодействия с термостатом;
2. Дипольное приближение взаимодействия с ЭМ полем;
3. Резонансное приближение;
4. Быстрая релаксация:  $\tau_{21} \ll \frac{1}{\omega_0}$ , система успевает «следить» за внешней вынуждающей силой;

5. Малые и линейные потери;
6. Монохроматическая накачка;
7. Приближение медленно меняющейся амплитуды;
8. Поиск стационарного решения.

Скоростные уравнения можно писать в рассматриваемом виде только при выполнении этих условий. Например, короткие импульсы не соответствуют этим условиям, и их нельзя описывать этими уравнениями.

## Лекция 4

### Оптический резонатор

После описания активной среды на прошлой лекции следующим шагом является обсуждение вопроса об обратной связи в генераторе, и как ее можно реализовать с помощью оптического резонатора. Рассмотрим пустой резонатор с большим количеством фотонов внутри. Самый простейший резонатор — два прямых зеркала. Важно отметить, что для СВЧ диапазона резонаторы выглядят по-другому. Формально можно записать уравнения Максвелла для распространяющейся ЭМ волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \cdot E = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \end{array} \right. \quad \text{— уравнения Максвелла} \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \varepsilon_0 E \\ B = \mu_0 H \end{array} \right. \quad \text{— материальные уравнения}$$

Такие простые материальные уравнения можно записать только при наличии локальной связи между  $D, E, B, H$  по времени и по пространству. В общем случае в них должно учитываться поле во всех точках пространства и во все прошедшие моменты времени. Этим можно пренебречь при отсутствии частотной и пространственной дисперсий в среде. Упростим задачу далее: пусть пустой резонатор находится в вакууме  $\Rightarrow \rho = 0, j = 0$ . Тогда волновое уравнение в вакууме имеет вид:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

Запишем решение, описывающее распространение волны в вакууме вдоль оси  $z$ :

$$E = \frac{1}{2} A(r, z) e^{i\omega_0 t - ik_0 z} + \text{комплекс. сопр.}, \quad t = 0 : A_0(r, z)$$

Тогда вторая производная  $E$  по  $z$  будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} - k_0^2 A \right) + \text{комплекс. сопр.}$$

Параболическое приближение (или приближение геометрической оптики) заключается в предположении:

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_0 \frac{\partial A}{\partial z} \right| \quad (26)$$



Это означает, что на масштабах длины волны вторая производная  $A$  меняется медленно. Учтем, что  $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ , подставим в волновое уравнение [25]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A = 0$$

Получившееся уравнение носит название параболического уравнения. Перейдем в пространство волновых векторов с помощью преобразования Фурье и запишем общее решение уравнения:

$$A(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\kappa}(z) e^{i\vec{\kappa}\vec{r}} d\vec{\kappa}$$

$$d\vec{\kappa} = d\kappa_x d\kappa_y, \quad \kappa = \kappa_x + \kappa_y$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{i\kappa^2}{2k_0} A_{\kappa} = 0$$

$$\Rightarrow A_{\kappa}(z) = \underbrace{A_{\kappa 0}(z)}_{\text{из начальных условий}} e^{\frac{i\kappa^2}{2k_0} z}$$

$$A(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(r') H(r - r', z) d^2 r', \quad \text{где}$$

$$H(r - r', z) = \frac{ik_0}{2\pi z} e^{-\frac{ikr^2}{2z}} \quad \text{— функция Грина в свободном пространстве.}$$

## Распространение гауссова пучка

Параболическое уравнение имеет аналитическое решение для некоторых случаев, в том числе для гауссова пучка (зависимость амплитуды по поперечным координатам задана функцией Гаусса). Рассмотрим гауссов пучок со следующим распределением поля:

$$A_0(r) = A_0 e^{-\frac{r^2}{2\rho_0^2}} \quad (27)$$

Важно понимать и не путаться в определении смысла  $\rho_0$ . Если для поля в [27] посчитать интенсивность (возвести в квадрат), то 2 из показателя экспоненты исчезнет, и таким образом  $\rho_0$  будет иметь смысл полуширины интенсивности по уровню  $\frac{1}{e}$ . В английской литературе это обозначается HWe<sup>-1</sup>M (half width e<sup>-1</sup> maximum), также есть FWe<sup>-1</sup>M (full width e<sup>-1</sup> maximum) =  $2\rho_0$ . Более распространенной является ширина на полувысоте: HWHM (half width half maximum) и FWHM (full width half maximum), которые равны  $\rho_0$  с точностью до множителя  $\ln 2$ . Далее, все эти 4 варианта возможны и для описания ширины поля, а не интенсивности, что внесет различие в  $\sqrt{2}$ . Для общего понимания, видимое человеком пятно света от лазера содержит интенсивность от максимума до уровня  $\frac{1}{e^2}$ .

Запишем решение для гауссова пучка:

$$A(r, z) = \frac{A_0}{1 + \frac{z}{ik_0\rho_0^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho_0^2\left(1 + \frac{z}{ik_0\rho_0^2}\right)}\right) \quad (28)$$

Мнимая часть этого решения определяет волновой фронт пучка, действительная — диаметр, для удобства следует их разделить. Для этого введем стандартные обозначения:

- Дифракционная длина  $z_d = k_0 \rho_0^2$ .
- Волновой параметр  $D = \frac{z}{z_d}$ . Если взять  $\frac{1}{D}$ , то получится число Френеля для данного пучка на данном расстоянии.
- Для удобства введем  $\alpha = \arctan D$ .
- Радиус пучка  $\rho(z) = \rho_0 \sqrt{1 + D^2}$ .
- Радиус кривизны волнового фронта пучка  $R(z) = z(1 + D^{-2})$ .

Тогда решение  $A$  расписывается в более понятном виде:

$$A(r, z) = \frac{\rho_0}{\rho(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho^2(z)}\right) \exp\left(ik_0 z - ik_0 \frac{r^2}{2R(z)} + i\alpha\right) \quad (29)$$

$A$  интенсивность, соответственно:

$$I = |A|^2 \sim \frac{\rho_0^2}{\rho^2(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{\rho^2(z)}\right)$$

Форма гауссова пучка сохраняется при распространении, а его амплитуда уменьшается, то есть суммарно пучок расходится. Если проинтегрировать  $I$  по  $r$ , получится мощность пучка, которая должна сохраняться. Смысл дифракционной длины — на этом расстоянии радиус возрастает в  $\sqrt{2}$  раз, и площадь, соответственно, в 2 раза.

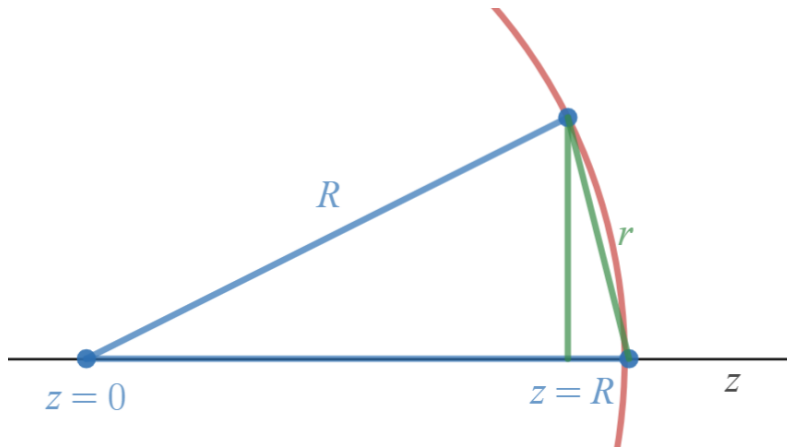


Рисунок 4.1: Геометрическое пояснение к понятию кривизны волнового фронта. При малых отклонениях от оси  $r \ll 1$  и зеленые линии почти одинаковы, что позволяет использовать теорему Пифагора для выражения  $R$ .

В фазовой части решения (второй экспоненте) параметр  $\alpha$  определяет сдвиг фазы всего волнового фронта как единого целого и связан с эффектом Тальбо и другими, однако сейчас он нам не интересен, т.к. он не зависит от радиуса. Радиус кривизны  $R$  обычно вводят для сферической поверхности, но и для нашего случая он имеет такой

же смысл. Для наглядной демонстрации запишем напряженность для сферической волны (см. рис. 4.1):

$$E = \frac{\text{const}}{R} \exp(i\omega t - ikR)$$

$$R^2 = z^2 + r^2 \text{ — из рисунка 4.1}$$

$$r \ll z \Rightarrow R \sim z(1 + \frac{r^2}{2z^2}) \sim z + R \frac{r^2}{2R^2}$$

$$E = \frac{\text{const}}{R} \exp\left(i\omega t - ikz - kR \frac{r^2}{2R^2}\right)$$

Это означает, что вблизи оптической оси фронт сферической волны описывается параболоидом вращения. Видно, что слагаемое в экспоненте  $k \frac{r^2}{2R}$  совпадает со слагаемым из параболического решения [29]. Важно понимать, что в экспериментах часто используются сферические оптические элементы, например зеркала, которые совпадают с формой волнового фронта только на маленьких расстояниях от оптической оси, а на больших возникнут сферические aberrации из-за набега фаз. Если в начальный момент времени взять плоский фронт ( $R \rightarrow \infty$ ), то сначала он будет искривляться, однако при  $z \rightarrow \infty$  он опять станет плоским.

### Задача о фокусировке пучка линзой

Пусть пучок излучения падает на тонкую линзу с фокусным расстоянием  $F$ . Если линза достаточно тонкая, чтобы пренебречь суммарным набегом фазы пучка, то можно ввести передаточную функцию линзы  $\Lambda$ , которая будет описывать преобразования пучка после прохода через нее. Если линза не поглощает, то амплитуда передаточной функции будет равна единице, а фаза будет изменяться согласно набегу фаз на сферической поверхности:

$$\Lambda(r) = e^{\frac{ikr^2}{2F}}$$

При этом от знака  $F$  зависит собирающая ли эта линза ( $F > 0$ ) или рассеивающая ( $F < 0$ ). Далее, запишем  $A_1(r) = \Lambda(r)A_0(r)$ , и  $A_1(r)$  можно подставить в качестве начальных условий в общее решение распространения пучка. Решение может быть записано через  $\rho_1$ :

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{ik_0}{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(r, z) = A_0 \frac{\rho_0}{\rho(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho^2(z)}\right) \exp\left(i\alpha - ik_0 \frac{r^2}{2R(z)}\right), \quad (30)$$

$$\rho(z) = \rho_0^2 \left( \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + D^2 \right), \quad \frac{1}{R(z)} = \frac{1}{z_d} \frac{D - \frac{z_d}{F} \left(1 - \frac{z}{F}\right)}{\left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + D^2}$$

Для проверки можно положить  $F \rightarrow \infty$ , что соответствует отсутствию линзы, и найти, что решение совпадет с видом пучка, распространяющимся в свободном пространстве.

Итак, видно, что форма гауссова пучка опять не изменилась, а его радиус изменяется. Из геометрической оптики мы ожидаем, что пучок фокусируется при  $z = F$ , однако в данном случае это не так. Минимум радиуса достигается на расстоянии:

$$\begin{aligned} z_w &= \frac{F}{1 + \left(\frac{F}{z_d}\right)^2} < F, \\ \rho_w &= \rho_0 \frac{F}{z_d \sqrt{1 + D^2}} \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь индекс  $w$  означает waist — перетяжку пучка. Если  $z_d \gg F$  (условие применимости параболической аппроксимации), то  $z_w \rightarrow F$  и  $\rho_w \rightarrow \frac{\lambda F}{2\pi\rho_0}$ . Это означает что диаметр перетяжки при некоторых условиях может быть меньше длины волны. Важно, опять же, понимать определение  $\rho_0$  — у нас оно по интенсивности.

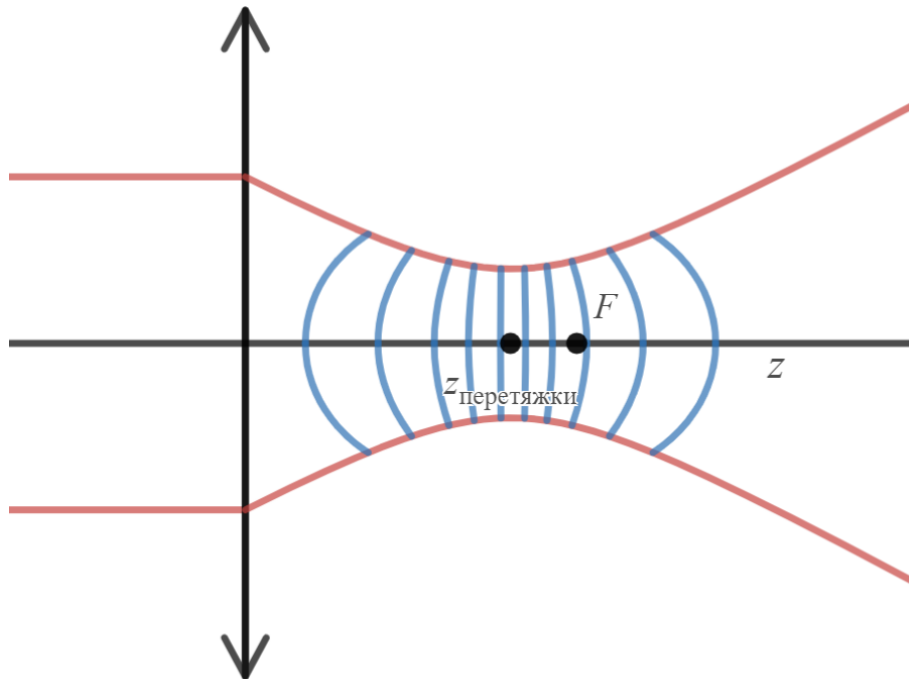


Рисунок 4.2: Фокусировка плоского пучка линзой с фокусным расстоянием  $F$ . Синими линиями условно отмечена кривизна  $R$  волнового фронта. Видно, что выполняется соотношение  $z_w < F$ .

При  $z = z_w$  фронт будет плоским,  $R \rightarrow \infty$ , до и после  $z_w$  фронт будет искривленным, хотя конечно при  $z \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow \infty$ .

Длина перетяжки (или длина Рэлея в англоязычной литературе) в данном случае будет выражаться как  $b_w = 2\frac{F^2}{z_d}$  — расстояние между точками, в которых радиус

становится  $\sqrt{2}\rho_w$ , то есть интенсивность становится в два раза меньше интенсивности перетяжки. В пределах длины перетяжки интенсивность слабо изменяется, и волновой фронт можно считать примерно плоским.

### Волновое уравнение для пустого резонатора

Воспользуемся простой моделью резонатора: трехмерный ящик с зеркальными внутренними поверхностями размерами  $a \times b \times c$  (см. рис. 4.3).

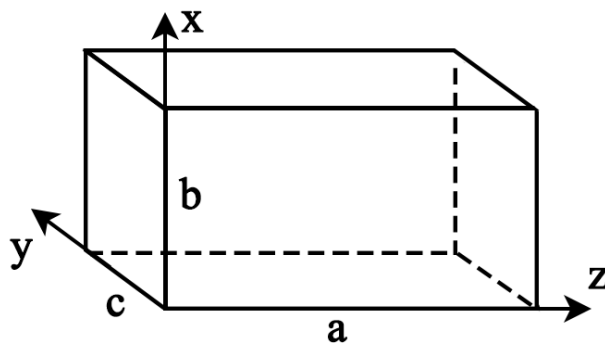


Рисунок 4.3: Рассматриваемая модель резонатора. Все грани параллелепипеда — идеальные зеркала.

Нам нужно найти устойчивые моды резонатора, форма в пространстве которых не зависит от времени. Именно они будут сохраняться в резонаторе, и если внутрь поместить активную среду, будут усиливаться. На поверхности зеркал напряженность поля равна 0, то есть узлы волны, и появляется стоячая волна по всем трем координатам. Запишем волновое уравнение и его решение по пространственным координатам:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$U(x, y, z) = U_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

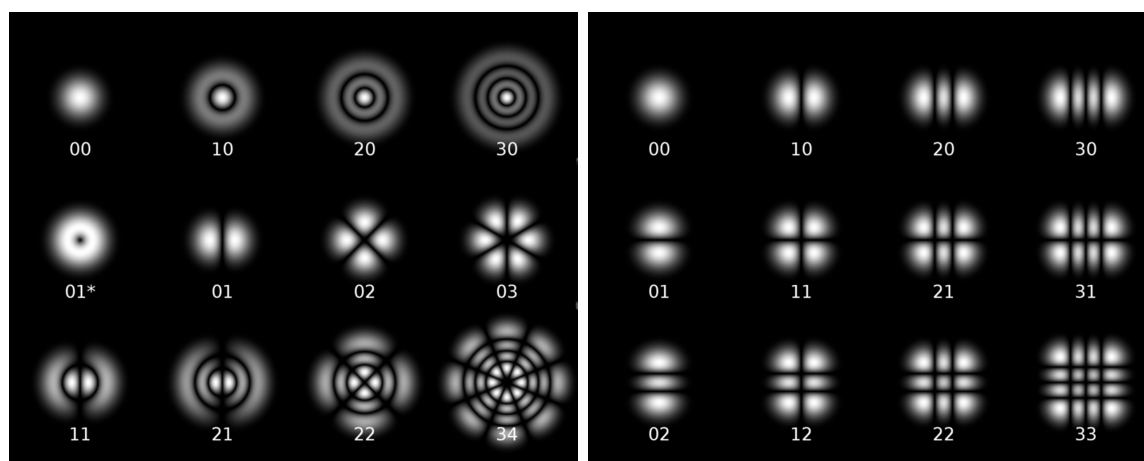
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \Rightarrow k_x = \frac{\pi}{2b}l, \quad k_y = \frac{\pi}{2c}m, \quad k_z = \frac{\pi}{2a}n,$$

где  $l, m, n \in \mathbb{Z}$ , то есть в резонатор должно укладываться целое число полуволен. Тогда можно записать длину волны собственной моды резонатора:

$$\lambda_{lmn} = \frac{2}{\sqrt{\frac{l^2}{4b^2} + \frac{m^2}{4c^2} + \frac{n^2}{4a^2}}} \quad (32)$$

Учтем, что резонатор — макрообъект (длина порядка метра, поперечные размеры — сантиметры), то есть много больше длины волны. Получается, что  $n$  — большая величина:  $n \gg m, l$ . Продольные моды резонатора определяет индекс  $n$ , а поперечные  $m$  и  $l$ . Гауссов пучок является решением при  $m, l = 0$ .

В реальных резонаторах зеркала стоят только на оси  $z$ , и тогда на остальных осях нужно поменять граничные условия на «естественные»: поле на бесконечности стремится к нулю, причем достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость интеграла энергии моды (минимальная сходимость как  $\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}, \varepsilon \rightarrow +0$ ). Симметрия профиля моды определяется симметрией резонатора. Изображения мод показаны на рис. 4.4a и 4.4b для различных типов зеркал. Нулевая мода — это всегда гауссов пучок, а дальше при увеличении  $m$  и  $l$  распределение интенсивности будет зависеть от формы зеркал резонатора. Например, для круглых зеркал (рис. 4.4a) распределение интенсивности будет задаваться полиномами Лагерра, а для квадратных (рис. 4.4b) — полиномами Эрмита. Чем выше поперечный индекс моды, тем сильнее она расходится, что означает, что в резонаторах конечных размеров такие моды не смогут долго оставаться.



(a) Распределение интенсивности в модах резонатора с круглыми зеркалами. (b) Распределение интенсивности в модах резонатора с квадратными зеркалами.

Рисунок 4.4: Различные моды резонаторов с подписанными индексами  $m$  и  $l$ .

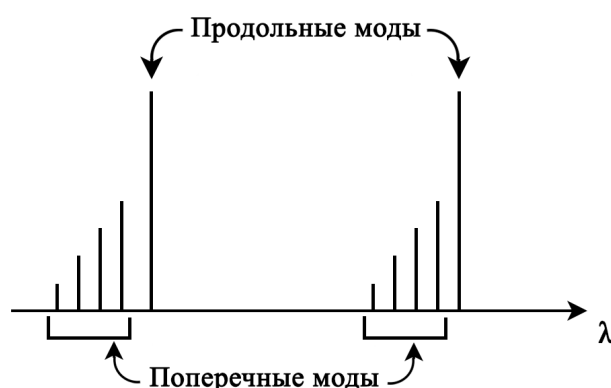


Рисунок 4.5: Условный спектр прямоугольного резонатора. Расстояние между продольными модами много больше расстояния между поперечными в силу вытянутой формы резонатора.

Спектр излучения в резонаторе представлен на рис. 4.5. Продольные моды отделены друг от друга, а поперечные появляются плотной группой рядом с продольными.

### Расходимость

Как уже было обсуждено, угловая расходимость пучка  $\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{d}$ . Рассмотрим резонатор из двух плоских зеркал с размерами  $a$  на расстоянии  $L$ , и запустим в него излучение (собственную моду) с диаметром  $d$ . Пучок начнет расходиться и в какой-то момент станет сравнимым по размерам с зеркалами.

$$\begin{aligned} \text{Увеличение диаметра за один обход} \\ \overline{\Delta\theta \cdot 2L \cdot N} = a \end{aligned} \tag{33}$$

$$N_{\max} = \frac{a}{2L\Delta\theta} = \frac{ad}{2L\lambda}$$

Сделаем оценку для резонатора длины  $L = 1$  м, с зеркалами  $a = 1$  см и пучком с диаметром  $d = 1$  мм :

$$N_{\max} = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 5,$$

то есть через всего 5 проходов диаметр пучка станет сравнимым с зеркалами, а в твердотельных лазерах нужно порядка 16 проходов для значительного усиления. Это означает, что плоский резонатор неустойчив. Даже если предположить большие зеркала, диаметр  $d \rightarrow \infty$ , то это делает такую систему неприменимой в реальных условиях. Отметим, что гауссов пучок расходится медленнее пучков другого профиля. Конечно, мы рассматриваем только пустой резонатор, если же в него поместить собирающую линзу или ее аналог, то плоские зеркала могут адекватно работать. Как сделать более устойчивый резонатор мы обсудим на следующей лекции.

## Лекция 5

### Моды резонатора

Создать резонатор, в котором усиливается только одна мода, не так сложно. Для каждой моды есть свой коэффициент потерь (из-за разной дифракционной расходимости), и используя эту разницу можно оставить только основную поперечную моду в резонаторе. Важно понимать, что у каждой моды своя частота, и проводя селекцию по поперечным модам, мы не убираем продольные моды, которые могут вносить дополнительные частоты. Таким образом одномодовая генерация не означает одночастотную генерацию.

Продольные моды отличаются по расположению максимумов и минимумов поля (см. рис. 5.1).

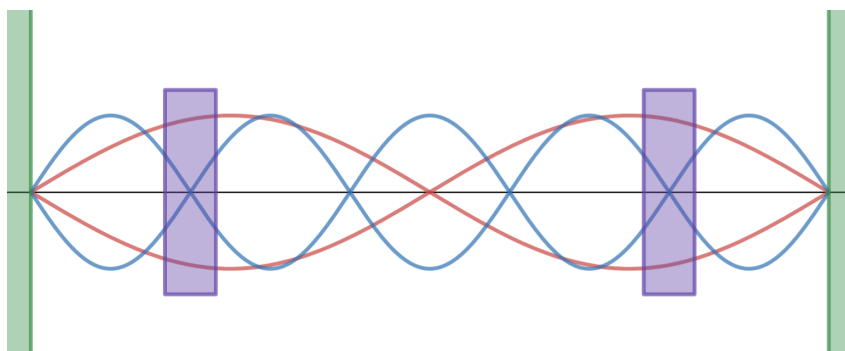


Рисунок 5.1: Две стоячие волны в резонаторе. Фиолетовые пластинки расположены в таких местах, где синяя волна имеет минимум амплитуды, а красная находится около максимума.

Из-за этого моды становятся неэквивалентными — при установке какого-либо элемента в резонатор, на его месте у одной моды может быть пучность, а у другой — узел (см. рис. 5.1). Однако, поскольку длина резонатора много больше длины волны излучения, положения максимумов от моды к моде будет сдвигаться плавно, то с точки зрения усиления в активной среде в «выигрышном» варианте будут находиться много близких по частоте мод.

Для многомодовой генерации характерна конкуренция мод. Инверсия населенности — ограниченный ресурс, который может усилить за один раз определенное число фотонов, и моды конкурируют между собой. Если учесть и случайные фазовые флуктуации, то в непрерывном лазере в один момент времени может генерироваться одна продольная мода, а в следующий — другая. И даже при селекции поперечных мод спектр такого лазера будет нестабилен во времени.

### Метод ABCD-матриц

Для математического описания генерации мод можно формально записать уравнения Максвелла и искать решения волнового уравнения, однако это тяжело, особенно для негауссовых пучков в резонаторе с дополнительными элементами. Когда лазеры



появились, и возникла потребность конструировать резонаторы, ученые разработали специальный подход, не требующий значительных вычислительных ресурсов. Речь идет о методе ABCD-матриц, в основе которого лежит геометрическая оптика. По началу, он покажется тривиальным, однако этот метод оказывается применимым и для значительно более сложных задач.

Пусть распространение луча из заданной точки описывается столбцом из двух элементов: радиус-вектора данной точки  $r$  и углом распространения  $r'$ . Тогда можно ввести ABCD-матрицу, которая преобразует этот вектор при перемещении из одной точки в другую.

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

- Свободное пространство. Определение ABCD-матрицы видно из рис. 5.2, на котором луч в приближении геометрической оптики, распространяется в свободном пространстве под углом из плоскости  $z_1$  в  $z_2$ .

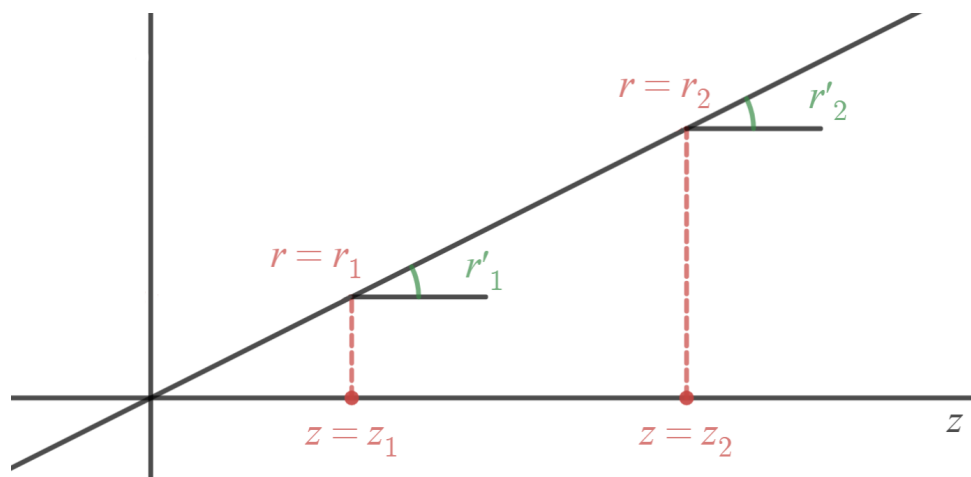


Рисунок 5.2: Расчет ABCD-матрицы в свободном пространстве. При распространении луча по прямой угол сохраняется, меняется радиус-вектор.

Запишем выражение для радиус-вектора для малых углов:

$$r_2 = r_1 + (z_2 - z_1)r'_1,$$

и далее учтем, что угол распространения луча не изменился:

$$r'_2 = r'_1$$

Тогда для свободного пространства мы получаем, положив  $z_2 - z_1 = L$ , следующее соотношение, определяющее ABCD-матрицу:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

- Тонкая линза. Рассмотрим преобразования, происходящие с пучком после прохождения плоскости тонкой линзы с фокусным расстоянием  $f$  (см. рис. 5.3):

$$r_2 = r_1$$

$$r'_2 = -\frac{r_2}{f} + r'_1$$

и далее получим выражения для соответствующего преобразования:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

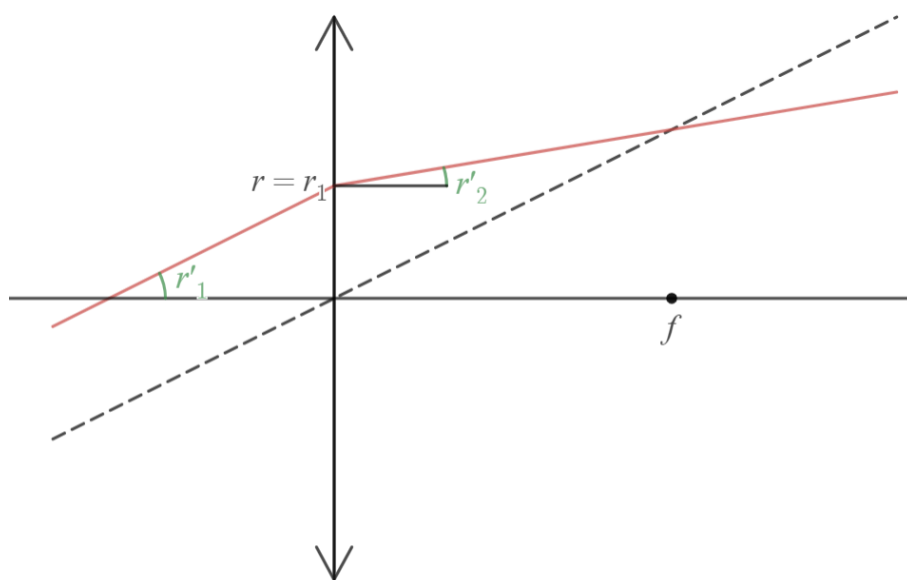


Рисунок 5.3: Расчет ABCD-матрицы в точке прохождения тонкой линзы с фокусным расстоянием  $f$ . Радиус вектор считаем неизменным.

- Тонкая линза и распространение в пространстве. Для того, чтобы описать состояние пучка, который сначала прошел линзу с фокусным расстоянием  $f$ , а затем распространился на расстояние  $L$  от нее, запишем (обратите внимание на порядок):

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

- Метод Когельника и Ли. Он заключается в переносе метода ABCD-матриц на описание распространения гауссовых пучков. На прошлой лекции мы получили решение [29], которое полностью описывает, что происходит с амплитудой и

волновым фронтом гауссова пучка. Рассмотрим два слагаемых из показателя экспоненты:

$$-\frac{r^2}{\rho^2} - i\frac{kr^2}{2R} = -\frac{ikr^2}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{i\lambda}{\pi\rho^2} \right)$$

Введем комплексный параметр пучка  $q$ , такой что:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi\rho^2(z)} \quad (38)$$

Тогда после прохождения оптической системы параметр  $q$  будет иметь вид:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (39)$$

$A, B, C, D$  — элементы соответствующей ABCD-матрицы перехода из плоскости 1 в плоскость 2.

- Граница преломления двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Здесь меняется только угол распространения пучка.

- Вогнутое сферическое зеркало. При попадании света на него, часть проходит сквозь зеркало, а часть отражается. Матрица для прошедшего пучка:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{Rn_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Матрица для отраженного пучка (сферическое зеркало в этом смысле эквивалентно линзе с фокусным расстоянием  $\frac{R}{2}$ ):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

- Случай, в которых метод ABCD-матриц работает плохо: толстая линза, элементы вдали от оптической оси, негауссов пучок. Также без дополнительных преобразований координат нельзя написать ABCD-матрицу для призмы, потому что в ней оптический ход для разных лучей отличается, что выражается в появлении неоднородного уравнения.

## Описание плоского резонатора

Рассмотрим резонатор, состоящий из двух плоских зеркал и тонкой собирающей линзы. Он изображен на рис. 5.4.

Комплексный параметр  $q$ , изначально описывающий состояние пучка на левом зеркале, будет меняться следующим образом:

$$q_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} q_1$$

$$\dots$$

$$q_n = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{n-1} q_1$$

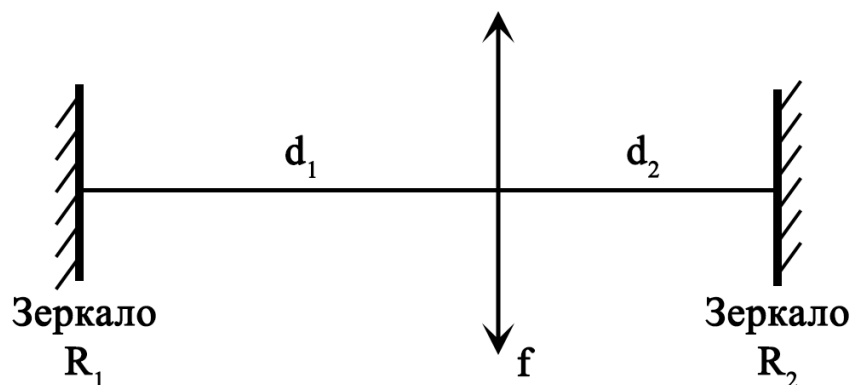


Рисунок 5.4: Резонатор с собирающей линзой.

Для того, чтобы распространение пучка было устойчиво, то есть радиус пучка не увеличивался, наложим условие на  $q$ :

$$q_n = q_1 \quad (43)$$

Это самое жесткое условие из возможных, в реальности условие устойчивости может быть в виде  $q_n \not\rightarrow \infty$ . Для выполнения [43] волновой фронт на зеркалах должен быть плоским. Причем если изначально плоский пучок дойдет до правого зеркала и там окажется тоже плоским, то обратно к левому зеркалу он гарантированно вернется плоским, поэтому обратный ход рассматривать не будем. Тогда запишем преобразования с  $q$  (обратите внимание на порядок):

$$q_2 = \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q_1$$

$$\frac{1}{q_1} = -i \frac{\lambda}{\pi \rho_1^2}, \quad q_1 = iz_1,$$

где  $z_1 = -\frac{\pi\rho_1^2}{\lambda}$  — конфокальный параметр. Аналогично,  $q_2 = iz_2$ . После раскрытия произведения получаем:

$$iz_2 = d_2 + \frac{iz_1 + d_1}{-\frac{1}{f}(iz_1 + d_1) + 1}$$

Заметим, что слева чисто мнимая величина, что означает:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(d_2 + \frac{iz_1 + d_1}{-\frac{1}{f}(iz_1 + d_1) + 1}) = 0 \\ \operatorname{Im}(d_2 + \frac{iz_1 + d_1}{-\frac{1}{f}(iz_1 + d_1) + 1}) = z_2 \end{cases}$$

Из этой системы можно выразить  $z_1$  и  $z_2$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{d_1 - f}{d_2 - f} ((d_1 + d_2)f - d_1 d_2)} \\ z_2 &= \sqrt{\frac{d_2 - f}{d_1 - f} ((d_1 + d_2)f - d_1 d_2)} \end{aligned} \quad (44)$$

Проанализируем полученное решение как зависимость от  $f$  с параметрами  $d_1$  и  $d_2$ . Решение существует не всегда:  $z_i$  должны быть действительными величинами, а для этого подкоренное выражение должно быть больше нуля. Отсутствие решения означает, что невозможно подобрать строение резонатора такое, что в нем пучок оставался бы плоским на зеркалах, то есть резонатор в таком случае неустойчив. Для определенности зададим  $d_1 > d_2$ . График решения приведен на рис. 5.5.

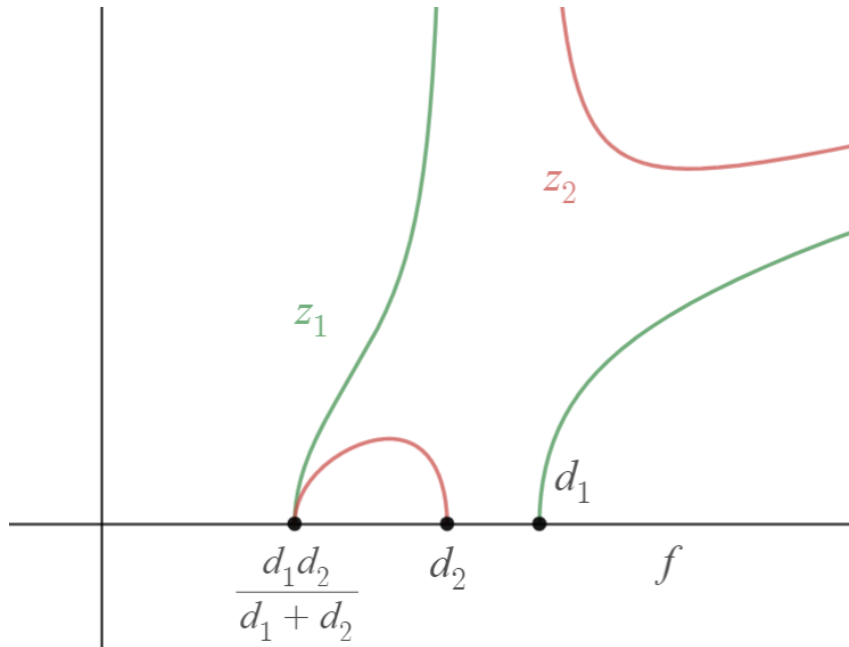


Рисунок 5.5: Зависимости конфокальных параметров  $z_1$  и  $z_2$  от фокусного расстояния линзы  $f$ .

Из-за трех сомножителей в подкоренном выражении зоны устойчивости (то есть существования реального решения) получаются при  $\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \leq f \leq d_2$  и  $d_1 \leq f$ . Для наглядности они представлены на рис. 5.6.

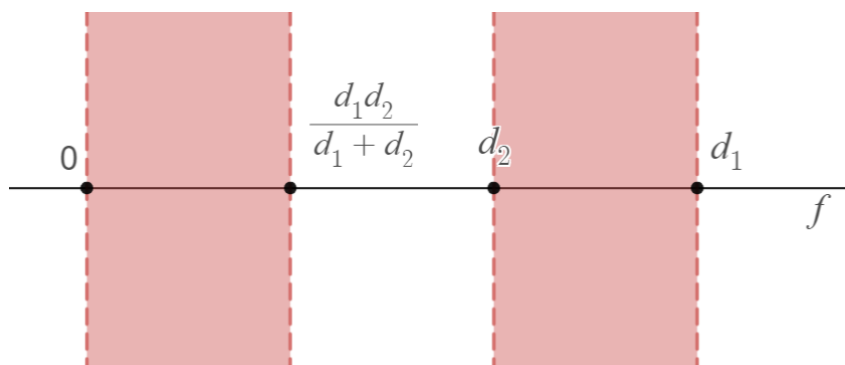


Рисунок 5.6: Зоны неустойчивости резонатора (выделены красным цветом). Они соответствуют отсутствию решений для конфокальных параметров  $z_1$  и  $z_2$ , как можно увидеть на рис. 5.5.

При  $f = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$  диаметр пучка на зеркалах стремится к нулю, а при  $f = d_2$  на одном зеркале пучок будет нулевого радиуса, а на втором — бесконечного. Эти графики показывают, что надо тщательно выбирать фокусное расстояние линзы. Слишком большой размер пучка потребует больших зеркал, а слишком маленький не даст развить достаточную мощность.

Итак, в плоском резонаторе с правильно подобранной собирающей линзой можно получить устойчивую моду. Однако, в реальных резонаторах линзы как отдельного элемента может и не быть. Это связано с активной средой, а именно с ее нагревом. Как было обсуждено в лекции 2, в активной среде присутствуют безызлучательные переходы, которые способствуют выделению тепла. Также оказывает влияние и накачка, например лампы и отражатели, расположенные вокруг активного элемента, которые сильнее нагревают его поверхность, чем внутреннюю его часть. В некоторых лазерах присутствует и система охлаждения, например поток воды у поверхности активной среды. В результате этого активная среда нагревается неравномерно по диаметру: градиент температуры в центре будет больше, а на краях меньше. Градиент температуры вызывает изменение показателя преломления из-за изменений самой температуры (тепловая рефракция), а также за счет напряжений, вызванных тепловым расширением среды, внутри кристалла и на его краях. Из-за этих причин в среде возникает так называемая тепловая линза. Параметры этой тепловой линзы зависят от накачки, поэтому в непрерывном лазере фокусное расстояние линзы меняется током накачки. Например, в Nd:YAG лазерах можно найти такую зависимость:

$$f[\text{см}] = \frac{1000}{I_H[\text{А}]}$$

Дополнительно, можно выделить случай, когда  $d_1 = d_2$ : одна область неустойчивости от  $d_2$  до  $d_1$  схлопнется в точку, про которую не нужно забывать. Поэтому, и из-за

ряда других причин, геометрический центр резонатора часто оставляют пустым.

Вернемся к вопросу селекции поперечных мод. В принципе, для успешной селекции необходимо выбрать элементы таким образом, чтобы основная мода была устойчива, а остальные испытывали большую дифракционную расходимость. Первый вариант — использовать зеркала с маленьким радиусом, но это приведет к большим потерям и на основной моде. Второй вариант — поставить в резонаторе диафрагму. Но есть более изящное и удобное решение, которое использует активную среду: ее поперечные размеры сами по себе играют роль диафрагмы, потому что излучение, прошедшее мимо активной среды, не будет усиливаться. Еще одним фактором, из-за которого имеет смысл сделать активную среду более тонкой, является требование равномерной накачки в центре среды, что трудно достижимо при ее больших размерах. Получаемые тепловые линзы показаны на рис. 5.7.

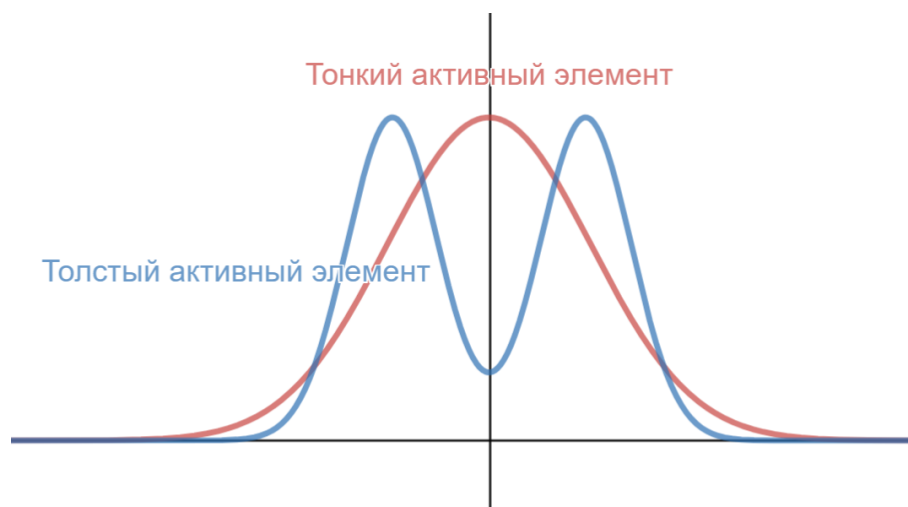


Рисунок 5.7: Зависимости показателей преломления тепловой линзы в активных элементах разной толщины от расстояния до центра.

Второй случай, соответствующий толстой активной среде, дает сложную тепловую линзу, из-за структуры которой возникнут проблемы с генерацией даже основной моды. В общем случае, выбирается  $d_{\text{пучка}} \sim 0.7 \cdot d_{\text{акт. среды}}$ , где диаметр пучка берется примерно по уровню интенсивности  $e^{-2}$ .

Так как активная среда играет роль диафрагмы, нужно учитывать количество зон Френеля, которая она открывает на поверхности зеркала. Если их число нечетное, в центре зеркала будет максимум поля, четное — минимум. Поэтому при конструировании резонатора выгоднее устанавливать такой диаметр активного элемента, который бы давал максимум, и тем самым делал бы резонатор более устойчивым.

Резонаторы могут состоять из неплоских зеркал, тогда условие на плоский волновой фронт не будет работать. Например, можно поставить сферическое зеркало и потребовать, чтобы на нем волновой фронт был сферическим с равным радиусом кривизны. Для генерации мод высокого порядка используются адаптивные зеркала, которые за счет своей гибкости могут изменять свою форму и отражать нужную моду. На самом деле, при отражении от зеркала происходит комплексное сопряжение волнового фронта, и для селекции мод можно использовать нелинейные эффекты.

Так, в жидкости с высоким нелинейным откликом происходит вынужденное рассеяние Мандельштама Бриллюэна — акустические колебания за счет воздействия лазерного излучения с жидкостью. Эти колебания образуют дифракционную решетку, которая способствует обращению волнового фронта. Кювета с такой жидкостью будет отражать назад любую моду, которая на нее попадет.

### Обобщённый сферический резонатор

Рассмотрим теперь более общий случай резонатора, состоящего из двух сферических зеркал с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  на расстоянии  $d$ . В таком случае можно ввести параметры

$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{d}{R_2} \quad (45)$$

С помощью метода ABCD-матриц можно найти области устойчивости такого резонатора. Приведем здесь сразу диаграмму устойчивости на рис. 5.8.

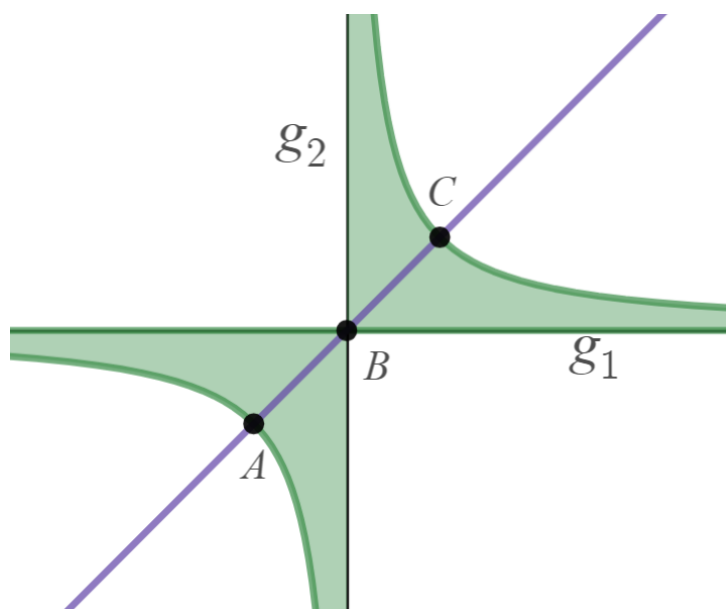


Рисунок 5.8: Диаграмма устойчивости для параметров  $g_1$  и  $g_2$ . Зеленым цветом отмечены зоны устойчивости. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответствуют определенным типам резонаторов и обсуждаются в тексте.

Получаются две симметричные области устойчивости, ограниченные гиперболами. Далее, проведем биссектрису  $g_1 = g_2$  и обозначим на ней точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$A$ :  $g_1 = g_2 = -1 \Rightarrow d = 2R_1 = 2R_2 = f$  — концентрический резонатор

$B$ :  $g_1 = g_2 = 0 \Rightarrow d = R_1 = R_2$  — конфокальный резонатор

$C$ :  $g_1 = g_2 = 1 \Rightarrow R_1, R_2 \rightarrow \infty$  — плоский резонатор



В реальности ни один из этих резонаторов в таких условиях использовать нельзя — они все находятся на границе зоны устойчивости. Если сместиться «вглубь» зоны устойчивости, отмеченной на рис. 5.8 зеленым цветом, изменив необходимые параметры системы, то генерация будет гораздо лучше, и часто используют смещенный в этом смысле конфокальный резонатор. Для пустого плоского резонатора расстояние  $d$  не играет роли, потому что  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$  и такой резонатор нелегко сместить в зону устойчивости по сравнению с остальными, что ограничивает его применение. Но и все три типа находят свое применения в спектре различных задач.

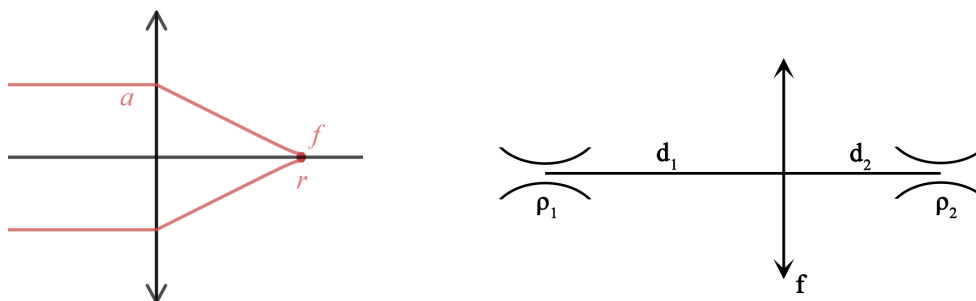
## Лекция 6

### Смещение перетяжки

В случае геометрической оптики параллельные лучи падают на собирающую линзу и сходятся в точку фокуса (см. рис. 6.1a). На самом деле в фокусе образуется перетяжка с радиусом:

$$r \sim \Delta\theta_d \cdot f \sim \frac{\lambda}{a} \cdot f,$$

где  $\Delta\theta_d$  — угол дифракционной расходимости,  $a$  — размер пучка,  $f$  — фокусное расстояние. Также, уже было отмечено, что перетяжка смещается относительно фокальной плоскости, и иногда этим можно пренебречь, а иногда нет. Это может играть роль как и внутри резонатора, так и снаружи при попытке сфокусировать лазерное излучение в какой-либо точке.



(a) Собирающая линза и перетяжка в фокусе. (b) Собирающая линза и две перетяжки.

Рисунок 6.1: Иллюстрации к задаче о фокусировке излучения линзой.

Рассмотрим подробнее ситуацию с линзой и местом перетяжки. Можно предположить, что пучок на зеркале плоский, и пытаться решить задачу из этих соображений, но лучше пойти по-другому. Пусть перетяжка пучка (в которой волновой фронт плоский) в резонаторе находится на расстоянии  $d_1$  от линзы, а следующая перетяжка, формируемая линзой, — на расстоянии  $d_2$  (рис. 6.1b). Такая система описывает и линзу внутри резонатора (тогда две перетяжки находятся на зеркалах) и вне резонатора, когда правая перетяжка расположена на внешнем объекте. В прошлой лекции мы получили решение для параметров  $z_{1,2}$ :

$$z_{1,2} = \sqrt{\frac{d_{1,2}-f}{d_{2,1}-f} ((d_1 + d_2)f - d_1 d_2)}$$

Выразим через нее  $d_1$  и  $d_2$ :

$$\begin{aligned} d_1 &= f \pm z_1 \sqrt{\frac{f}{f_0} - 1} \\ d_2 &= f \pm z_2 \sqrt{\frac{f}{f_0} - 1} \\ f_0 &= \sqrt{z_1 z_2} \end{aligned} \tag{46}$$

По сути, это уже является решением задачи. Если параметры  $d_1, f, \rho_1$  и  $\rho_2$  известны, можно рассчитать  $d_2$ . Условие существования перетяжки:  $f \geq f_0$ , иначе подкоренное выражение станет отрицательным, и получится расходящийся пучок с мнимой перетяжкой. В граничном случае  $f = f_0, d_1 = d_2 = f$ , что совершенно не похоже на геометрическую оптику — здесь перетяжка в фокусе линзы переходит в фокус, а не становится плоским пучком.

Сделаем некоторые оценки, чтобы понять получившиеся зависимости. Рассмотрим пучок с радиусом перетяжки  $\rho_1 = 1$  мм, длиной волны  $\lambda = 1$  мкм (расстояние до линзы  $d_1$  не нужно задавать). Теперь рассмотрим три параметра  $\rho_2$ , которые мы хотели бы получить, и значения  $f_0$ , позволяющие получить  $\rho_2$ :

$$\begin{cases} \rho_{2a} = 0.01 \text{ мм} \\ \rho_{2b} = 0.1 \text{ мм} \\ \rho_{2c} = 1 \text{ мм} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{2a} = 0.03 \text{ см} \\ z_{2b} = 3 \text{ см} \\ z_{2c} = 3 \text{ м} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{0a} = 3 \text{ см} \\ f_{0b} = 30 \text{ см} \\ f_{0c} = 3 \text{ м} \end{cases}$$

Обсудим эти оценки для заданного фокусного расстояния, которое позволяет найти  $d_1$  и  $d_2$ . Например, в случае  $c$ , если мы хотим сохранить изначальный радиус пучка в 1 мм ( $\rho_1 = \rho_{2c} = 1$  мм), то мы сможем это получить только на  $d_1 + d_2 = 3 + 3 = 6$  метрах от лазера. В случае  $a$  нам потребуется очень короткофокусная линза, которая вызовет сильные аберрации, и сфокусировать пучок в 0.01 мм не получится в реальных условиях. Случай  $b$  реализуем.

Из-за этого важно учитывать эти формулы распространения гауссова пучка и то, что на линзе волновой фронт не плоский. Когда можно не учитывать это? При достаточно большом отношении  $\frac{f}{\rho}$ , но это не всегда выполняется. Для решения этой проблемы в остальных случаях можно построить телескоп — установить линзу, которая расширит пучок, и затем уже расширенный пучок пытаться сфокусировать собирающей линзой.

## Учет конечности поперечных размеров резонатора

Рассмотрим систему, представленную на рис. 6.2. Необходимо учитывать конечные размеры зеркал, которыми раньше мы пренебрегали. Для этого вводится число Френеля

$$N = \frac{a_1 a_2}{\lambda d}, \quad (47)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — радиусы зеркал,  $d$  — расстояние между ними. Эта формула получается из следующих соображений:

$$\begin{aligned} \text{Расходимость пучка} \quad \overline{\Delta\theta_d} &= \frac{\lambda}{a_1} \Rightarrow \underbrace{\Delta\rho_d}_{\text{Увеличение радиуса}} = \Delta\theta_d \cdot d \\ \frac{\Delta\rho_d}{a_2} &= \Delta\theta_d \frac{d}{a_2} = \frac{\lambda d}{a_1 a_2} = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Таким образом, видно, что число Френеля  $N$  описывает, насколько пучок увеличивается относительно размеров второго зеркала. Дифракционные потери будут

пропорциональны  $N^2$ , потому что для них важна площадь пучка. Расчеты показывают, что для того, чтобы получить в резонаторе стабильную основную поперечную моду, необходимо иметь  $N \sim 1.3$ . Это примерно соответствует требованию, которое мы обсуждали раньше для селекции мод:  $d_{\text{пучка}} \sim 0.7 \cdot d_{\text{акт. среды}}$ . Если  $N$  будет больше 2, то появятся уже более высокие поперечные моды, а если меньше 1.3 — возникнут слишком большие потери.

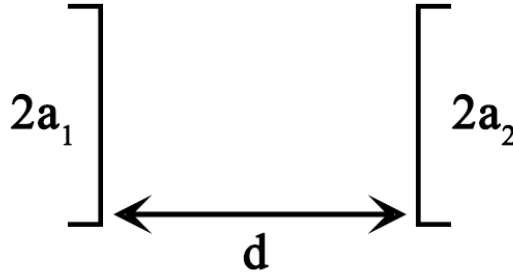


Рисунок 6.2: Зеркала с ограниченным размером.

Далее, обобщим параметры, которые описывают резонатор. Введем радиус кривизны зеркал, но при этом оставим их конечных размеров. Тогда можно ввести следующие параметры обобщенного резонатора:

$$G_1 = \frac{a_1}{a_2} g_1, \quad G_2 = \frac{a_2}{a_1} g_2, \quad \text{где} \quad (48)$$

$$g_i = 1 - \frac{d}{R_i}.$$

Совокупность  $N, G_1$  и  $G_2$  полностью определяет обобщенный сферический резонатор.

Два резонатора называются эквивалентными, если:

$$N' = N'', \quad G'_1 = \pm G''_1, \quad G'_2 = \pm G''_2 \quad (49)$$

Знаки  $\pm$  должны принимать одинаковые значения для заданной пары эквивалентных резонаторов, то есть либо оба плюсы, либо оба минусы. Для эквивалентных резонаторов свойства излучения, которое они генерируют, будут одними и теми же, хотя выглядеть сами резонаторы могут совершенно по-разному.

Если резонатор не пустой, тогда пишется ABCD-матрица всех его внутренних элементов, и применяются следующие формулы:

$$N = \frac{a_1 a_2}{B \lambda}, \quad G_1 = \frac{a_1}{a_2} \left( A - \frac{B}{R_1} \right), \quad G_2 = \frac{a_2}{a_1} \left( D - \frac{B}{R_2} \right)$$

Заметим, что в случае пустого резонатора формулы переходят в предыдущие при подстановке матрицы распространения в свободном пространстве.

## Примеры эквивалентных резонаторов

- Резонатор с диафрагмой (рис. 6.3) и сферическими зеркалами. Диафрагма расположена в центре системы. Задача о генерируемом излучении решается путем расчета новых размеров зеркал с учетом диафрагмы с использованием формул для гауссовых пучков. Фактически, это решение состоит в конструировании эквивалентного резонатора. Получится, что  $a_1 = a_2$ , если диафрагма стоит в середине резонатора.

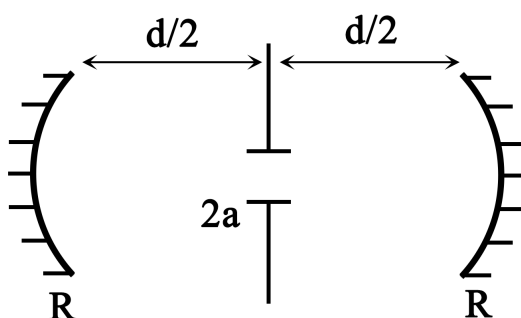


Рисунок 6.3: Сферический резонатор с диафрагмой.

- Эквивалентный первому резонатор получается в результате «переноса» ограничений на размер пучка, накладываемых диафрагмой, на размеры зеркал. В итоге получится эквивалентный пустой резонатор с конечными размерами зеркал (см. рис. 6.4).

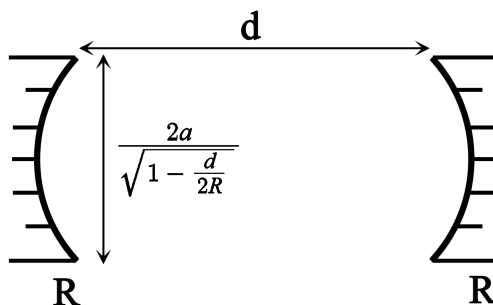


Рисунок 6.4: Сферический резонатор с ограниченными размерами зеркал.

- Плоский резонатор с линзой (см. рис. 6.5).

Линза в центре резонатора считается бесконечной по размерам, и тогда просто применяется метод ABCD-матриц. Получается, что при  $f = \frac{R}{2}$ , этот резонатор эквивалентен двум предыдущим. Для них всех выполняется:

$$N = \frac{a^2}{\lambda d \left(1 - \frac{d}{2R}\right)}$$

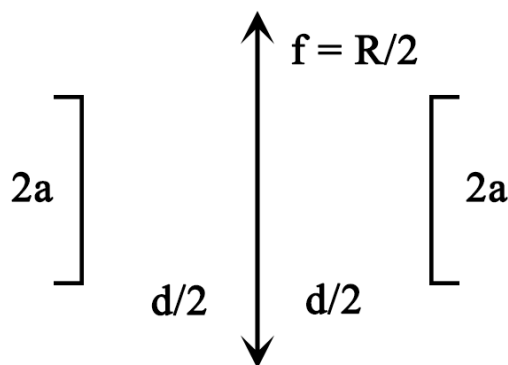


Рисунок 6.5: Плоский резонатор с линзой.

## Спектр лазера

Наличие поперечных мод портит расходимость пучка, но и продольные моды также оказывают негативный эффект. Возникает конкуренция мод при их усилении в активной среде, которая приводит к уменьшению длины когерентности излучения. В целом низкая когерентность также находит применение в ряде задач, связанных с биологией и физикой взаимодействия, однако мы рассмотрим способы повысить ее, проводя селекцию продольных мод.

Число продольных мод определяется спектральной селективностью резонатора. Моды имеют разные длины волн, и при конструировании резонатора, хотим мы этого или нет, будут использованы элементы которые работают не на всем диапазоне длин волн. Какие это могут быть элементы?

- **Зеркала.** Зеркала бывают двух типов: металлические и диэлектрические. В металлических зеркалах в тонком слое металла срабатывает скин-эффект, и происходит отражение. Различные металлы имеют разную зонную структуру и работают в разных областях спектра. Например, золото и медь хорошо отражают волны ИК диапазона, а в оптическом и УФ лучше работает алюминий. Металлические зеркала сложно сделать глухими (с высоким коэффициентом отражения, у них максимум порядка 90%), но их можно использовать в качестве выходного зеркала резонатора.

Второй тип зеркал — диэлектрический — реализуется в виде периодической слоистой структуры с разными показателями преломления. Принцип действия основан на конструктивной интерференции лучей, отраженных от каждого слоя структуры. Естественно, этот процесс сильно зависит от длины волны. При фиксированном угле падения такое зеркало будет отражать в спектральном диапазоне  $\Delta\omega$ , задаваемым функцией Лауэ, и он будет определяться числом слоев. Получается, что если слоев много, то отражаться излучение будет хорошо, но в узком диапазоне, и наоборот, если слоев мало, то отражение будет посредственное в широком диапазоне.

- **Спектральная ширина усиления активной среды.** Активный элемент не способен усиливать излучение на любых длинах волн. Обычно, стараются сделать ширину спектральной полосы для зеркал шире, чем для активного элемента:

$\Delta\omega > \Delta\Omega$ . Конечно, бывают разные активные среды, способные усиливать несколько длин волн, и это нужно учитывать при выборе зеркал. Например, He-Ne лазер генерирует на 0.63, 1 и 3 мкм.

Далее, обсудим ширину спектральных линий. Атом, который ни с чем не взаимодействует, обладает естественной шириной линии, связанной с взаимодействием с ядром, флуктуациями ЭМ вакуума и т.д. Через время жизни возбужденного состояния атома  $\tau_0$  ширина линии выражается как  $\frac{1}{\tau_0}$ . Теперь, если атом помещается в среду и начинает взаимодействовать с другими атомами, то возникает дополнительное уширение спектральных линий. Уширения делятся на два фундаментальных типа: однородные и неоднородные. При однородном каждый атом одинаково подвергается уширению линий, а при неоднородном сдвигается центральная частота каждого конкретного атома.

### Неоднородное уширение

Самый распространенный пример — доплеровское уширение. Например, молекулы газа (или атомы) в комнате движутся хаотически, и прилетающие или излучаемые фотоны будут зависеть от проекции скорости движения атома  $v_{||}$  на направление волнового вектора фотона.

$$\omega'_0 = \omega_0 \left(1 \pm \frac{v_{||}}{c}\right) \quad (50)$$

Поскольку движение атомов хаотично, величина  $v_{||}$  случайна, но подчинена какому-то распределению. Из-за этого и итоговые частоты  $\omega'_0$  случайны. В результате эффекта Доплера получается, что каждый атом будет поглощать на своей уникальной частоте в зависимости от его скорости и направления движения. В равновесном газе молекулы подчиняются распределению Максвелла.

$$p_v dv = \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} dv \quad (51)$$

Далее, выразим скорость  $v_{||}$  через частоту, подставим в распределение и усредним.

$$v_{||} = \frac{c}{\omega_0} \Delta\omega, \quad \Delta\omega = \omega'_0 - \omega_0$$

$$G(\omega - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{Mc^2}{2kT} \frac{\Delta\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$G(\omega - \omega_0)$  — спектральная форма линии, которая получилась распределением Гаусса. Основным параметром, определяющим ширину линии, является температура: чем выше температура, тем шире линия. Помимо доплеровского, любое неоднородное уширение в конечном счете приводит к гауссовской форме линии, просто потому что мы усредняем случайные факторы по большому ансамблю. Оценка для уширения при комнатной температуре в оптическом диапазоне:  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-6}$ . А ширина, связанная с естественным типом, на 3-5 порядков меньше. Важно помнить, что хоть и общая форма линии гауссова, каждый атом продолжает работать в узком спектральном диапазоне.

## Однородное уширение

Самый простой случай — столкновительное уширение, которое можно наблюдать, рассмотрев упругие столкновения атомов в газе. В квазиклассическом описании можно сказать, что возбужденный атом начинает излучать пуг с протяженностью во время жизни уровня. Если с этим атомом в процессе излучения произойдет упругое столкновение, то произойдет сбой фазы излучателя, то есть две части пуга перестанут быть когерентными. Для такой задачи применим подход с корреляционными функциями. Напомним, что автокорреляционная функция бесконечного долгого гармонического излучения является косинусом. В нуле корреляционная функция всегда равна единице (то есть точки на нулевом расстоянии друг от друга скоррелированы). Введем вероятность столкновения:

$$P_\tau = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

Здесь  $\tau_0$  играет роль среднего времени между столкновениями и нормирует вероятность. Тогда вероятность того, что только что столкнувшаяся частица испытает еще одно столкновение через время  $\tau$  будет равна

$$\int_{\tau}^{\infty} P_\tau d\tau = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

Корреляционная функция всего процесса выражается как произведение функций влияния столкновений и гармонического излучения, потому что он является их сверткой:

$$G(\tau) = \underbrace{e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}}_{\text{влияние столкновений}} \overbrace{\cos(\omega_0 \tau)}^{\text{корреляция гармонического излучения}}$$

Для того, чтобы из  $G(t)$  посчитать спектральную форму линии, используем теорему Винера-Хинчера: автокорреляционная функция и спектральная плотность мощности связаны преобразованием Фурье. Получаем лоренцевскую функцию:

$$S(\omega - \omega_0) \sim \frac{1}{1 + \Delta\omega^2 \tau_0^2} \quad (52)$$

Все атомы в ансамбле имеют такой контур. При комнатной температуре и нормальных условиях ширина спектра получается  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-8}$ , что все равно больше естественного уширения, но меньше доплеровского. Столкновительным уширением можно управлять с помощью изменений давления и температуры газа. При условиях, далеких от нормальных, например в  $\text{CO}_2$  лазерах высокого давления, преобладающим фактором уширения является как раз однородное, а в He-Ne — неоднородное.

## Активные среды

Ширину спектральных линий измеряют в  $\text{см}^{-1}$  (с нормировкой на скорость света). Рассмотрим следующие распространенные типы активных сред.



- Газовые лазеры. Основной механизм уширения — доплеровский. Пример: He-Ne лазер.
- Кристалл. В кристаллическую матрицу вставляют ионы другого вещества. Эти ионы примеси находятся в одинаковом состоянии, поэтому уширение спектра однородное и связано с внешним электростатическим полем. Если газ охлаждать, то спектральная линия будет сужаться. Пример: Nd-YAG лазер.
- Стекло. Ионы вставляются в аморфную матрицу. Поле, действующее на примесь, флуктуирует, таким образом создается неоднородное уширение.
- Красители. Вещества красителей растворяются в воде, и в их атомах получают рабочие переходы. Уширение неоднородное.

Вспомним, что в резонаторе длины  $L$  есть продольные моды, из которых мы хотим оставить только одну. В обратных сантиметрах справедливо соотношение для двух соседних мод:

$$\nu_{m+1} - \nu_m = \frac{1}{2L} = \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$$

Получается, что даже в газовых лазерах в ширину спектральной линии укладывается очень много мод. Длина резонатора  $L$ , в котором получится генерация только одной моды, представлена в таблице 6.1.

Среда	Ширина $\Delta\nu$ , $\text{см}^{-1}$	$L$ для 1 моды, см
Газ	20	5
Кристалл	$10^3$	0.1
Стекло	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^{-3}$
Красители	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^{-4}$

Таблица 6.1: Ширина линии усиления и длина резонатора, генерирующего одну моду, для разных активных сред.

Если установку запустить вблизи от порога генерации, то усиления по краям спектральной линии не хватит, чтобы генерация мод началась, и будет работать только самый максимум графика (см. рис. 6.6). Это оставит порядка 10 мод, но не одну. Для получения одномодовой генерации можно уменьшать длину резонатора, но из таблицы видно, что столь маленькие резонаторы невозможно сделать (кроме газовых лазеров). В этом играет роль то, что длинная активная среда нужна для большого коэффициента усиления и высокой мощности излучения.

$$\rho \sim \sqrt{L}, K_{\text{ус}} \sim L \Rightarrow P_{\text{вых}} \sim L^2$$

Поэтому с помощью уменьшения длины резонатора нельзя построить мощный лазер. Видно, что необходимо ввести еще какие-то спектрально-селективные элементы, то есть внести сильные потери на всех частотах, кроме одной. Диэлектрическими зеркалами такого добиться невозможно — нужно  $10^{10}$  слоев. Здесь нужно использовать интерферометры, например Фабри-Перо, о которых речь пойдет в следующей лекции.

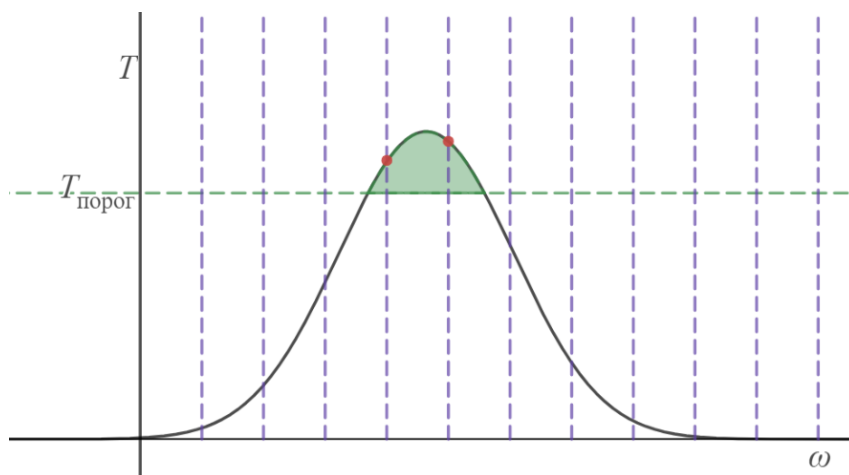


Рисунок 6.6: График зависимости коэффициента пропускания резонатора  $T$  от частоты излучения  $\omega$ . Вертикальные линии условно обозначают отдельные моды. Только те моды, попадающие в область над порогом генерации, будут усиливаться.

## Лекция 7

### Эталон Фабри-Перо

Эталон Фабри-Перо — удобный способ выделения одной пространственной моды в резонаторе. Он состоит из двух параллельных зеркал и технически обладает четырьмя поверхностями, от которых может происходить отражение света. Для простоты рассмотрим бесконечно тонкие зеркала, то есть всего две поверхности. У этих двух зеркал есть коэффициенты пропускания излучения  $T_1, T_2$  (от англ. transmission) и отражения  $R_1$  и  $R_2$  (reflection). Отметим, что эти коэффициенты относятся к амплитуде, а не к интенсивности. Положим, что между зеркалами находится вакуум (показатель преломления равен единице), что излучение падает по нормали на зеркало и что в системе нет потерь:

$$\begin{aligned} |R_1|^2 + |T_1|^2 &= 1 \\ |R_2|^2 + |T_2|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (53)$$

Эту задачу можно решить точно, записав волновое уравнение в одномерном случае для плоских волн. Такое решение похоже на задачу из квантовой физики о частице в прямоугольной потенциальной яме, поскольку волновое уравнение в этом случае совпадает с уравнением Шредингера, а зеркала обеспечивают необходимые граничные условия. Второй способ более наглядный, и мы воспользуемся им (см. рис. 7.1).

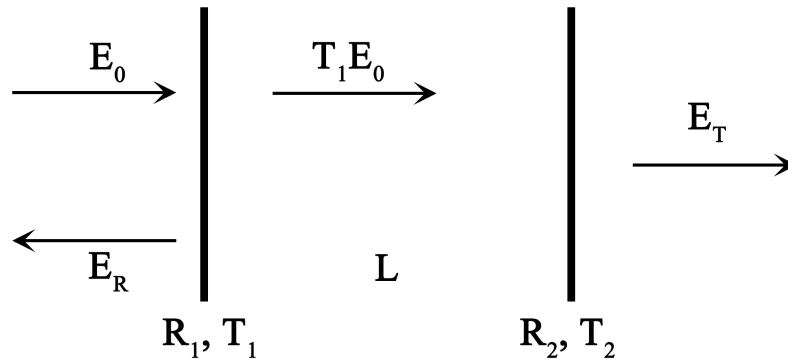


Рисунок 7.1: Схема эталона Фабри-Перо с зеркалами 1 и 2 на расстоянии  $L$ . Мы рассматриваем амплитуды волн, которые отразились или прошли через систему.

Падающая волна  $E_0$  частично пройдет, частично отразится, и в итоге суммарно отразится  $E_R$ , а суммарно пройдет —  $E_T$ . Тогда можно записать геометрическую прогрессию из вкладов лучей,  $n$  раз отразившихся внутри двух зеркал:

$$\begin{aligned} E_R &= E_0 \left( R_1 + T_1^2 R_2 e^{2ikL} + \dots + T_1^2 R_2 (R_1 R_2)^n \cdot e^{(n+1)2ikL} \right) \\ E_T &= E_0 \left( T_1 T_2 e^{ikL} + \dots + T_1 T_2 (R_1 R_2)^n \cdot e^{(2n+1)ikL} \right) \end{aligned}$$

С помощью суммирования получившихся геометрических прогрессий ответ запишется в виде:

$$E_R = E_0 \left( R_1 + T_1^2 R_2 \frac{e^{2ikL}}{1 - R_1 R_2 e^{2ikL}} \right)$$

$$E_T = E_0 T_1 T_2 \frac{e^{2ikL}}{1 - R_1 R_2 e^{2ikL}}$$

Тогда коэффициенты  $R$  и  $T$  для всей системы в целом:

$$|R| = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(2kL)}{1 + R_1^2 R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(2kL)}}$$

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (54)$$

$$|T| = \sqrt{\frac{(1 - R_1^2)(1 - R_2^2)}{1 + R_1^2 R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(2kL)}}$$

Качественно эти зависимости представлены на рис. 7.2.

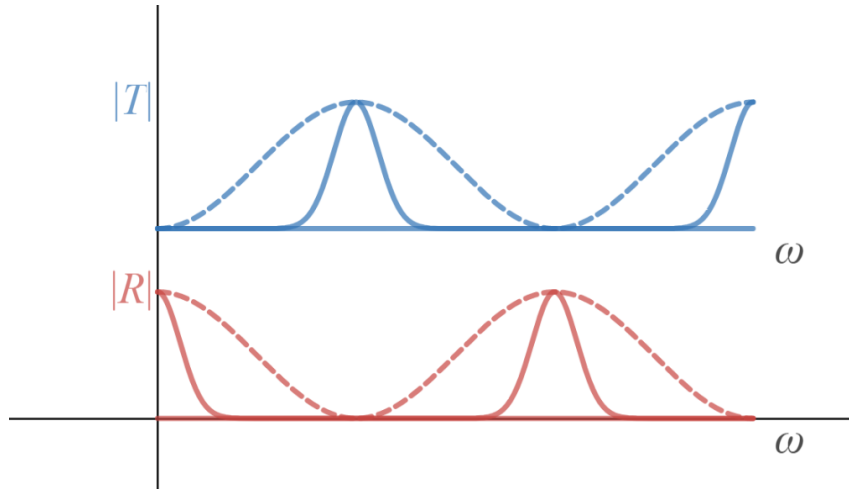


Рисунок 7.2: Качественная зависимость коэффициентов отражения  $|R|$  и пропускания  $|T|$  от частоты. Сплошными линиями показаны случаи при  $R_{\text{зер}} \rightarrow 1$ .

Еще раз обратим внимание на то, что коэффициенты  $R_i$  в формулах берутся по амплитуде, а не по интенсивности. Из формул Френеля мы получаем коэффициент отражения при нормальном падении, рассмотрим стекло как пример:

$$R_{\text{стекла по ампл.}} = \left| \frac{n-1}{n+1} \right| = \left| \frac{1.5-1}{1.5+1} \right| = \frac{1}{5} = 20\% \text{ — по амплитуде}$$

$$R_{\text{стекла по инт.}} = R_{\text{стекла по ампл.}}^2 = \frac{1}{25} = 4\% \text{ — по интенсивности}$$

Если учитывать зависимость коэффициента от угла падения, то необходимо знать поляризацию излучения. График зависимости  $|R|^2$  от угла  $\theta$  для излучения с разными поляризациями представлен на рис. 7.3.

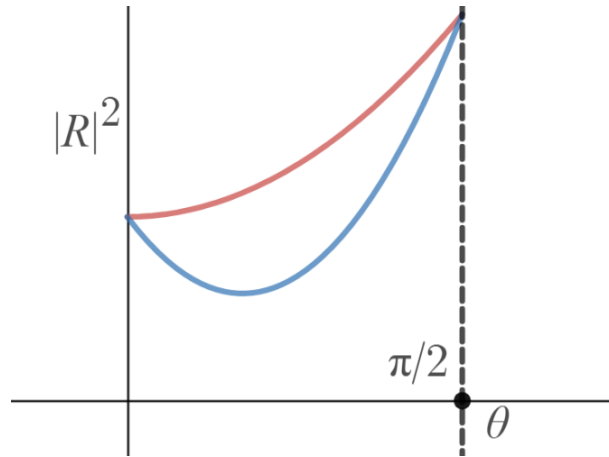


Рисунок 7.3: Качественная зависимость коэффициента отражения по амплитуде от угла падения излучения. Синим цветом отмечена р-поляризация (вектор  $E$  лежит в плоскости падения), s-поляризация — красным.

Нас интересует спектральная селективность прибора, то есть зависимость коэффициентов  $R$  и  $T$  от волнового вектора  $k$  (или частоты  $\nu$ ). Она представлена на рис. 7.2. Видно, что она является периодической функцией, и положения максимума одного коэффициента совпадают с минимумом другого. Можно провести аналогию с рассмотренным ранее резонатором с плоскими зеркалами, если в нем укладывается целое число полуволн, то получается стоячая волна, и при пучности на выходном зеркале будет максимум пропускания и наоборот. Поэтому расстояние между максимумами выражается как  $\frac{c}{2L}$ , что совпадает с расстоянием между продольными модами резонатора. Важно, что в резонаторе мы не можем сделать  $L$  достаточно маленьким, а для эталона Фабри-Перо можем.

Максимальные и минимальные значения коэффициентов получаются заменой косинуса на  $\pm 1$ :

$$\begin{aligned} \cos(2kL) = +1 &\Rightarrow T = T_{\max} = \sqrt{\frac{(1 - R_1^2)(1 - R_2^2)}{1 - 2R_1R_2 + R_1^2R_2^2}} = \frac{\sqrt{(1 - R_1^2)(1 - R_2^2)}}{1 - R_1R_2} \\ |R_{\min}| &= \frac{|R_1 - R_2|}{1 - R_1R_2} \\ \cos(2kL) = -1 &\Rightarrow T = |T_{\min}| = \frac{\sqrt{(1 - R_1^2)(1 - R_2^2)}}{1 + R_1R_2} \\ |R_{\max}| &= \frac{|R_1 + R_2|}{1 + R_1R_2} \end{aligned} \quad (55)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

$$R_1 = 1 \Rightarrow T = 0; \quad R = 1 \text{ система теряет спектральную селективность};$$

$$R_1 = R_2 \neq 1 \Rightarrow T_{\max} = 1, \quad R_{\min} = 0 \text{ режим максимального контраста.}$$

Для подробного описания эталона Фабри-Перо в литературе вводятся дополнительные параметры.

- Период спектральной селективности  $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$ .
- Контраст  $\eta = \frac{|T_{\max}|}{|T_{\min}|}$ . Если коэффициенты отражения зеркал совпадают и равны  $R_{\text{зер}}$ , то

$$\eta = \frac{1+R_{\text{зер}}^2}{1-R_{\text{зер}}^2}$$

Контраст  $\eta$  характеризует систему по амплитуде, а  $\eta^2$  — по интенсивности. Для  $R_{\text{зер}}^2 = 0.5, \eta^2 = 9$ , а  $R_{\text{зер}}^2 = 0.9, \eta^2 = 400$ . То есть чем ближе отражение зеркал к единице, тем лучше спектральная селективность системы. Заметим, что при изменении  $R_{\text{зер}}$  значения максимумов и минимумов изменяются, но расстояния между ними остаются теми же, это говорит о существенном изменении самой формы зависимости коэффициентов от частоты. При  $R_{\text{зер}} \rightarrow 1$  зависимости становятся очень узкими, поскольку в таком случае лучи долго отражаются между двумя зеркалами и большое их количество вносит вклад в интерференцию (см. рис 7.2).

- Резкость резонатора (на англ. finesse). Если обозначить ширину пиков в зависимости  $R$  и  $T$  от частоты за  $\delta\nu$ , то  $F = \frac{\Delta\nu}{\delta\nu}$  описывает относительную ширину полосы пропускания по сравнению с периодом.

$$F = \frac{\pi \sqrt[4]{R_1 R_2}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\pi \sqrt{R_{\text{зер}}}}{1 - R_{\text{зер}}}$$

### Использование эталона Фабри-Перо в резонаторе

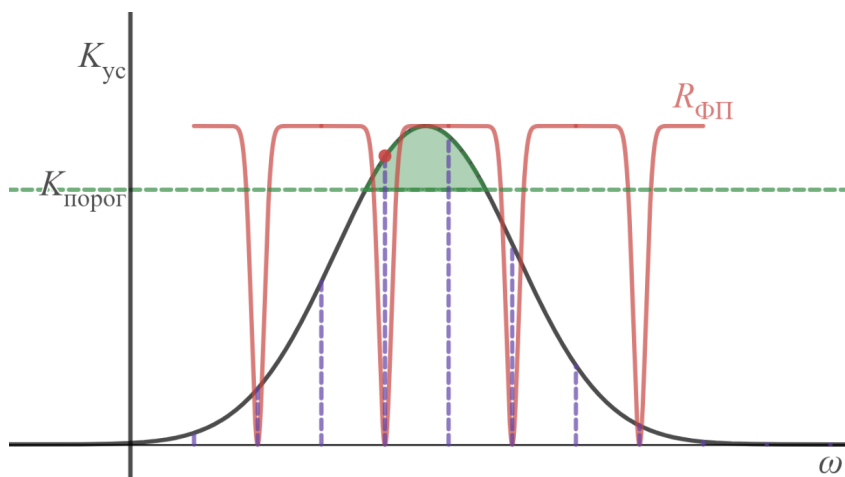


Рисунок 7.4: График коэффициента усиления активной среды и коэффициента отражения эталона Фабри-Перо. Красной точкой отмечена генерирующая мода.

Коэффициент усиления активной среды в резонаторе зависит от частоты, поэтому при установке внутрь резонатора эталона Фабри-Перо нужно учитывать уже существующую спектральную селективность. Такой случай качественно представлен на рис. 7.4, где отражение эталона накладывается на коэффициент усиления активной

среды. Изменяя расстояние между зеркалами  $L$ , можно выбирать интересующую нас моду, для которой усиление активной среды превышает пороговое. Если ширина пропускания маленькая, то сложнее попасть на нужную частоту.

Если зеркала эталона становятся непараллельными, то все приведенные выше формулы необходимо модифицировать, и вычисления становятся гораздо сложнее. Чтобы это обойти, можно взять плоско-параллельную пластину и использовать ее целиком в качестве эталона.

На поверхностях пластины должны быть расположены зеркала. На заре появления лазеров были доступны только металлические зеркала, которые обладали низкой лучевой стойкостью. Если просто оставить стеклянную пластинку, то с  $R = 0.2$  резкость будет мала, но достаточна для некоторых задач.

Можно использовать две плоско-параллельные пластины, как например это делают в так называемой стопе (см. рис. 7.5). Сначала надо удостовериться, что пластины параллельны, для этого между ними делают специальную вставку с отверстием на пути излучения. Однако, для анализа такой системы нужно честно расписать уравнения для получившихся четырех поверхностей, хотя в некоторых случаях этим можно и пренебречь. Стопа хороша тем, что для нее резкость выше, чем для одиночной стеклянной пластины, а также возможностью легкого регулирования зазора между зеркалами (изменяя прослойку, а не изготавливая каждый раз новую пластину целиком).

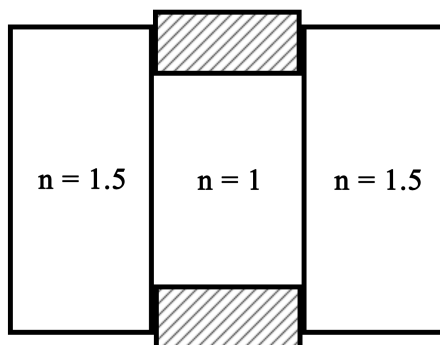


Рисунок 7.5: Стопа из нескольких пластинок.

Далее, возникает вопрос об установке эталона в резонатор. Например, можно ли использовать глухое зеркало резонатора как одно из зеркал эталона? Нет, потому что при  $R \rightarrow 1$  система теряет спектральную селективность. Теперь, если мы поставим эталон из двух собственных зеркал в резонатор, то для «плохой» частоты он будет сильно отражать излучение, тем самым возвращая ее к активному элементу, то есть фактически просто укоротив резонатор. Конечно, для «хорошей» частоты резонатор будет длиннее, и в этом смысле какая-то спектральная селективность появилась, но нам бы хотелось именно подавить генерацию дополнительных частот. Отсюда следует вывод, что эталон Фабри-Перо всегда нужно ставить под углом к падающему излучению (см. рис. 7.6). При малом угле зависимости  $R(\nu)$  не сильно изменятся, однако появится дополнительный эффект: «плохие» частоты будут отра-

жаться от эталона под углом и уходить из резонатора. В целом, достаточно и очень малого угла, при котором отраженное излучение не проходит через активную среду, что приведет к огромным потерям. Если увеличить расстояние между активным элементом и эталоном, необходимый угол наклона будет порядка  $1-2^\circ$ .

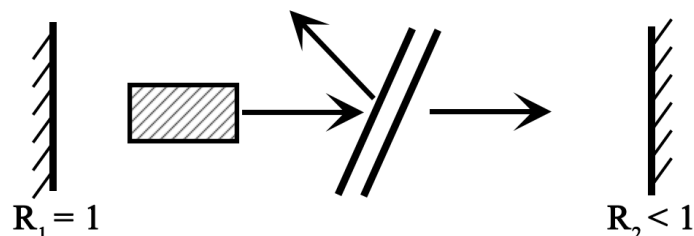


Рисунок 7.6: Расположение эталона Фабри-Перо в резонаторе под углом к оси позволяет вносить большие потери для некоторых частот, которые будут отражаться от него.

У эталона Фабри-Перо есть две основные проблемы:

- Он обладает маленькой, но конечной шириной, и из-за этого излучение проходит большое расстояние, переотражаясь в нем. Поэтому необходимо учитывать дифракцию луча, и в общем случае диаметр входного и выходного пучков будет разный.
- При наклоне эталона даже на малый угол, выходной пучок будет смещаться относительно оси резонатора, особенно когда много отражений, и если смещение будет сравнимо с диаметром пучка, то пропадут интерференционные эффекты, и эталон будет вносить большие потери. Из-за этого фактора следует минимизировать угол наклона эталона.

Для решения этих проблем иногда прибегают к усложнению эталона Фабри-Перо, например конструированием его из сферических зеркал, которые обеспечивают его устойчивость. Также, можно «вложить» одно сферическое зеркало в другое так, чтобы у них был общий центр. В таком случае, если волновой фронт входного пучка совпадает с формой зеркала, то расходимость пучка будет маленькая. Однако и в этих двух решениях присутствуют свои сложности, связанные в том числе с наклоном к оси резонатора, абберациями и т.д.

Сделаем оценки спектральной селективности эталона Фабри-Перо при различных размерах  $L$ . Из таблицы 7.1 видно, что для газового лазера, например He-Ne, достаточно сантиметрового эталона для выделения одной моды.

## Другие инструменты селекции мод

Эталон Фабри-Перо — суть интерферометр, и можно использовать другие похожие системы для селекции мод в резонаторе.



Расстояние $L$	Ширина $\Delta\nu$ , $\text{см}^{-1}$
1 см	0.5
1 мм	5
0.1 мм	50
0.01 мм	500

Таблица 7.1: Зависимость расстояния между частотами пропускания эталона Фабри-Перо от расстояния между зеркалами. В заданных размерностях определяется формулой  $\Delta\nu = \frac{1}{2L}$ .

- Например, на рис. 7.7. представлен интерферометр Майкельсона. Заметим, что зеркало, разделяющее пучок, должно стоять строго определенным образом, чтобы короткие плечи интерферометра были от него с одной стороны. Разность длин коротких плеч будет определять расстояние между модами, поэтому важными параметрами, помимо коэффициентов  $R$  зеркал, будет и расстояние до нижнего зеркала.

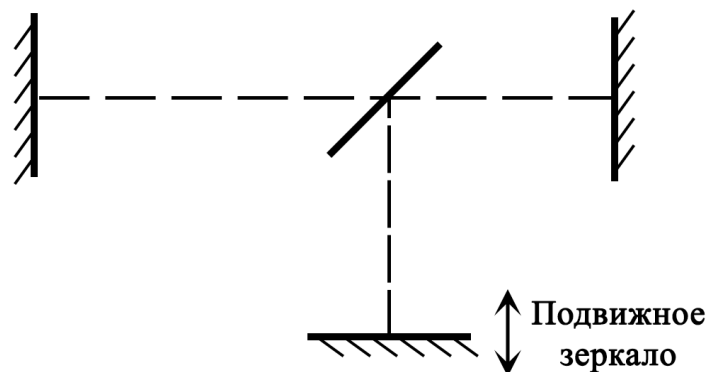


Рисунок 7.7: Интерферометр Майкельсона с подвижным зеркалом.

- Возможны и более экзотические схемы, например модификации интерферометра Майкельсона (см. рис. 7.8). В такой системе угол наклона делительной пластинки уже не важен. Разность длин вертикальных плеч будет определять расстояние между модами. Интересно, что все три основных зеркала могут быть глухими ( $R = 1$ ), а система будет работать, потому что резкость и контраст будут определяться делительной пластинкой с  $R \sim 0.5$ .
- Можно использовать любые интерферометры, например Маха-Цендера, для селекции мод резонатора, но обычно для большинства задач хватает Фабри-Перо.

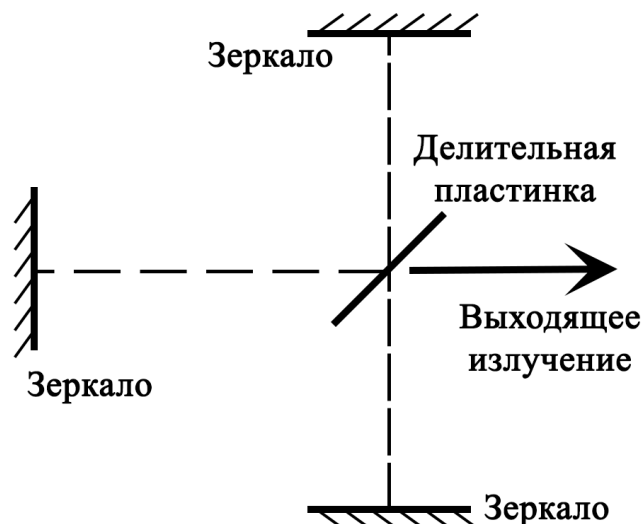


Рисунок 7.8: Резонатор с тремя зеркалами и делительной пластинкой.

- Призма (см. рис. 7.9). Принцип работы основан на том, что призма преломляет по-разному свет с разной длиной волны, и правильно поставив зеркала, можно получить большие потери для некоторых частот. Однако из-за дифракционной расходимости резкость будет низкой. Система с призмой позволяет решать и другую задачу, а именно своим поворотом изменять длину волны, на которой генерирует лазер в диапазоне усиления активной среды. Например, лазеры на красителях обладают большой шириной линии усиления, и если в резонаторе нет других спектрально селективных предметов, то такой лазер может перестраиваться в достаточно широком диапазоне, что нужно в спектроскопии и ряде других задач.

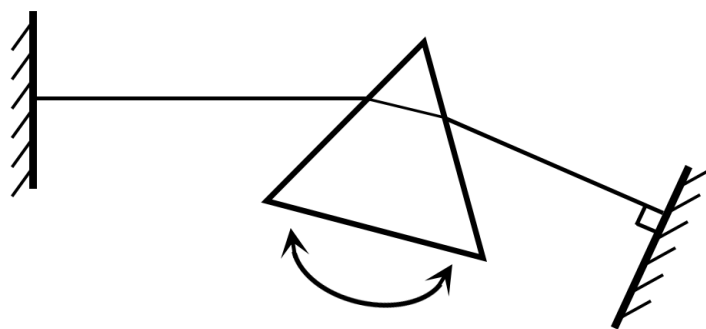


Рисунок 7.9: Резонатор с призмой.

- Набор призм под углом друг к другу. Такая система хоть и сложна для расчетов, но она повышает спектральную селективность.
- Дифракционная решетка. Схема работы похожа на резонатор с призмой: устанавливается дифракционная решетка на отражение, и на нужный порядок ди-

фракции для нужной длины волны ставится зеркало резонатора. Дифракционная решетка с большим числом штрихов обладает большей спектральной селективностью по сравнению с призмой. Недостатком решеток является металл, из которого они изготавливаются, и который обладает низкой лучевой стойкостью.

- Существуют автоколлимационные решетки, которые отражают определенный порядок дифракции ровно по направлению изначального пучка. Это достигается специальной формой штрихов. В такой системе можно использовать другой порядок дифракции для вывода полезного излучения.

Таким образом, любой спектральный элемент формально можно поместить в резонатор и получить селективность, однако ту гибкость и эффективность, которую обеспечивает эталон Фабри-Перо, получить достаточно сложно.

### Дополнительные виды резонаторов

Рассмотрим некоторые моменты о резонаторах, которым мы не уделяли много внимания на прошлых лекциях. Например, при описании резонатора мы требовали его устойчивости для повышения количества его обходов и более мощного излучения. Всегда ли это нужно? Нет, в некоторых средах ( $\text{CO}_2$  лазеры высокого давления, эксимерные лазеры) коэффициент усиления очень большой, а инверсия населенности существует малое время, поэтому больше одного или двух проходов в таких системах не нужно. Поэтому делают заведомо неустойчивые резонаторы, например с выпуклыми глухими зеркалами, и то излучение, которое мы считали как потери, здесь является полезным излучением. Конечно, пространственная и временная когерентность такого излучения уступает схемам с устойчивыми резонаторами, потому что в нем будет много поперечных и продольных мод со случайными фазами.

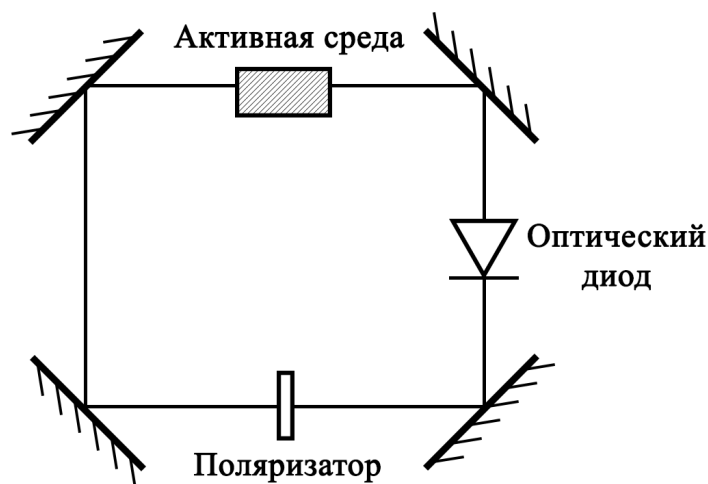


Рисунок 7.10: Кольцевой резонатор, селектирующий волны, распространяющиеся в определенном направлении.

Далее, существуют кольцевые резонаторы, где излучение распространяется по кругу (см. 7.10). В такой схеме помимо различных мод появляется разделение на волны,

бегущие в резонаторе по часовой стрелке и против. Можно поставить так называемый оптический диод, который запретит распространение волны в определенном направлении. Таким диодом может выступать ячейка Фарадея, которая способна поворачивать плоскость поляризации, и поляризационная пластинка. Самая интересная характеристика такого резонатора — свойства волн, бегущих в разных направлениях, различаются в поле силы тяжести. Именно так и конструируют лазерные гироскопы на спутниках, самолетах и так далее.

## Поляризация излучения

И еще одним вопросом, который мы не обсуждали, является поляризация генерируемого излучения. В рассматриваемых резонаторах не было никаких элементов, селективирующих определенную поляризацию, однако если она случайна, то теряется когерентность излучения. Для обеспечения необходимой поляризации можно использовать эффект Брюстера. Он выражается в появлении минимума коэффициента  $R$  для определенной поляризации при определенном угле падения. Этот угол  $\alpha_{\text{Бр}}$  выражается следующим образом:

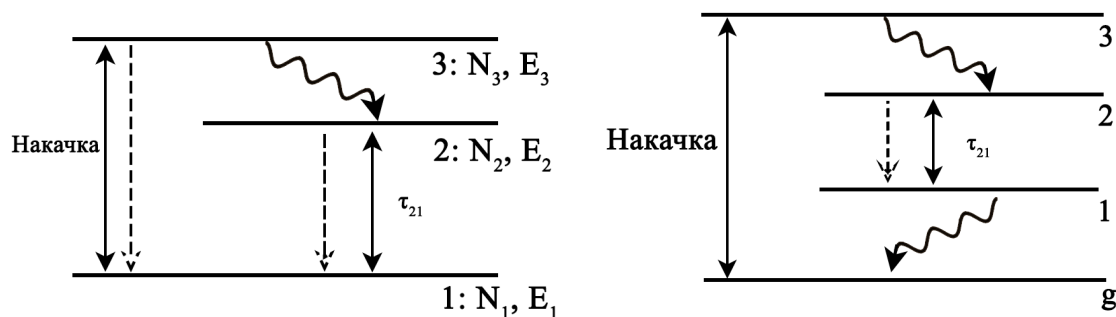
$$\text{tg}(\alpha_{\text{Бр}}) = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_1$  — показатель преломления среды, из которой распространяется луч,  $n_2$  — на которую он падает. Так, для стекла в воздухе ( $n_1 = 1$  и  $n_2 = 1.5$ ) угол Брюстера примерно равен  $57^\circ$  от нормали к поверхности пластинки. Если вектор поляризации лежит в плоскости падения луча, то коэффициент  $R$  маленький, если она перпендикулярна плоскости —  $R$  в 10 раз больше, и излучение уйдет из резонатора. С помощью специальных интерференционных напыляемых покрытий можно добиться значительной разницы коэффициентов отражения для двух случаев, порядка сотен раз. В итоге полезное излучение будет обладать линейной поляризацией в плоскости падения луча на пластинку Брюстера. Необязательно использовать отдельный элемент в качестве такой пластинки, например в He-Ne лазере торцы газовой трубки расположены под углом Брюстера, так как внутрь самой среды вставить что-либо сложно. Если активная среда твердая, то торцы кристалла или стекла также могут быть выточены под этим углом. Важно также учитывать анизотропность кристаллов — изменения их свойств для излучения с разной поляризацией, что может привести к маленькому коэффициенту усиления при неправильной установке кристалла в резонатор, а также к генерации только той поляризации, для которой этот коэффициент максимален. Дополнительно, поляризация играет роль при взаимодействии излучения с дифракционной решеткой в резонаторе.

## Лекция 8

### Скоростные уравнения

Описание лазера включает в себя как и механизмы работы активной среды, так и устройство резонатора.



(a) Трехуровневая схема уровней с рассматриваемыми переходами. (b) Четырехуровневая схема уровней с рассматриваемыми переходами.

Рисунок 8.1: Используемые для анализа генерации излучения схемы энергетических уровней.

В активной среде есть несколько уровней, накачка и генерация полезного излучения. Для трехуровневой системы (см. рис. 8.1a) рабочим переходом является 2-1, и важным параметром является время жизни  $\tau_{21}$  возбужденного уровня атома. Тогда можно записать балансное уравнение для населенности уровней:

$$N_2 + N_1 = N_0$$

$$\dot{N}_2 = W_p N_1 - Bq(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau_{21}},$$

где  $W_p = [c^{-1}]$  — скорость накачки любой природы,  $q$  — плотность числа фотонов с энергией  $E_{21}$  в резонаторе.

Для четырехуровневой схемы (см. рис. 8.1b) обозначим основное состояние  $g$  (от англ. ground level), тогда 2-1 будет рабочим переходом. Тогда с учетом  $N_1 = N_3 = 0$  запишем:

$$N_2 + N_g = N_0$$

$$\dot{N}_2 = W_p N_g - Bq N_2 - \frac{N_2}{\tau_{21}}$$

В таком виде уравнения для трех- и четырехуровневых систем похожи. Балансные уравнения записываются для ансамбля частиц, однако в предыдущих лекциях пространственной протяженностью мы пренебрегали, а это принципиально при наличии резонатора. Возникает неприятный момент, что даже с однородной накачкой  $W_p$ , параметр  $q$  и населенности будут зависеть от  $x, y, z$  координат и времени, что вынуждает писать балансные уравнения в частных производных, а не в полных.

Плотность числа фотонов  $q$  также задается уравнением. В предположении, что генерируется одна гауссова мода, это уравнение можно проинтегрировать по поперечным координатам  $x, y$  и ввести число фотонов на единицу длины резонатора. Для дальнейшего упрощения задачи следует избавиться и от зависимости от продольной координаты  $z$ , что можно сделать в непрерывном лазере за счет относительно малого усиления излучения за один проход.

$$K_{yc} = 1 + \delta, \quad \delta \ll 1$$

$$q = q_0(t)e^{K_{yc}z} \rightarrow q(t)$$

Тогда за один проход число фотонов не меняется сильно, и под  $q$  можно понимать полное число фотонов в резонаторе. Также можно поступить и с населенностями уровней. В результате вместо балансных уравнений получаются скоростные уравнения для величин, усредненных по объему резонатора. Тогда для 3 и 4 уровневой системы в наших обозначениях получится

$$\dot{q} = \overbrace{V_a B q (N_2 - N_1)}^{\text{Усиление в активной среде}} - \underbrace{\frac{q}{\tau_c}}_{\text{Релаксация}}, \quad (56)$$

где  $V_a$  — объем активной среды, возникающий в результате интегрирования по объему резонатора ( $V_a \leq V_{\text{рез}}$ ),  $\tau_c$  — параметр, описывающий потери. Для полного описания системы необходимо взять уравнение для  $q$  и соответствующее скоростное уравнение 3 или 4 уровневой схемы.

Коэффициент Эйнштейна  $B$  не является константой, а зависит от частоты в наших приближениях. В литературе для описания активных сред используются другие параметры. Запишем изменение интенсивности за один проход:

$$\Delta I = I_0 \left( (1 - T_1)(1 - T_2) \overbrace{(1 - T_i)^2}^{\text{Дифракционные потери дважды за обход}} \underbrace{\exp(2\sigma_{yc}(N_2 - N_1)l_a)}_{\text{Усиление дважды за обход}} - 1 \right) \quad (57)$$

$l_a$  — длина активной среды,  $\sigma_{yc}$  — сечение усиления, физический смысл которого состоит в области взаимодействия фотона и возбужденного атома. Это уравнение при малом усилении можно линеаризовать. Введем характеристику скорости затухания

$$\gamma_c = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_i),$$

где  $\gamma$  связаны с  $T_1, T_2$  и  $T_i$  и являются результатом логарифмирования уравнения. Затем, выразим  $\tau_c$  следующим образом:

$$\tau_c = \frac{L_{\text{рез}}}{c\gamma_c}$$

В конце получаем уравнение для интенсивности, похожее по виду на уравнение для  $q$  [56]:

$$\dot{I} = \frac{1}{L} \sigma_{yc} l_a c (N_2 - N_1) I - \frac{I}{\tau_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sigma_{yc} c}{V_{рез}}$$

Введем обозначение для инверсии населенности  $N = N_2 - N_1$  и запишем относительно нее скоростные уравнения:

$$\dot{N} = W_p(N_0 - N) - 2BqN - \frac{N_0 + N}{\tau_{21}} \quad \text{— трехуровневая система} \quad (58)$$

В слагаемом  $2BqN$  двойка нужна затем, чтобы учесть изменения инверсии населенности на 2 при переходе одного атома на нижнее состояние в трехуровневой схеме. Для 4 уровней двойка не нужна:

$$\dot{N} = W_p(N_0 - N) - BqN - \frac{N}{\tau_{21}} \quad \text{— четырехуровневая система} \quad (59)$$

$$\dot{q} = V_a B q N - \frac{q}{\tau_c} \quad (60)$$

В результате, трехуровневая схема описывается уравнениями [58] и [60], а четырехуровневая — [59] и [60]. При выводе скоростных уравнений помимо приближений, которые были использованы для балансных уравнений, добавилось еще и требование  $K_{yc} \sim 1$ .

## Описание лазера в рамках простейшей модели

Рассмотрим режим стационарной генерации, когда параметры  $N$  и  $q$  не зависят от времени. Важно различать непрерывную генерацию и непрерывную накачку — эти два режима не зависят друг от друга, например для генерации фемтосекундных импульсов используется непрерывная накачка. Тогда, в случае стационарной генерации получим:

$$0 = q \left( V_a B N - \frac{1}{\tau_c} \right) \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ \left( V_a B N - \frac{1}{\tau_c} \right) = 0 \end{cases}$$

Получаются два возможных решения уравнения. Рассмотрим их для трех- и четырехуровневой систем по отдельности.

1. Трехуровневая система. В случае  $q = 0$  при подстановке в уравнение для трехуровневой схеме получаем:

$$0 = W_p(N_0 - N) - \frac{N_0 + N}{\tau_{21}} \rightarrow N = N_0 \frac{W_p - \frac{1}{\tau_{21}}}{W_p + \frac{1}{\tau_{21}}}$$

В случае  $(V_a B N - \frac{1}{\tau_c}) = 0$   $N$  принимает определенное значение  $N_c$ , такое что:

$$V_a B N_c = \frac{1}{\tau_c} \Rightarrow N_c = \frac{1}{V_a B \tau_c}$$

$$0 = W_p(N_0 - N_c) - 2BqN_c - \frac{N_0 + N_c}{\tau_{21}}$$

Поведение системы, которое видно из анализа приведенных уравнений, показано на рис. 8.2.

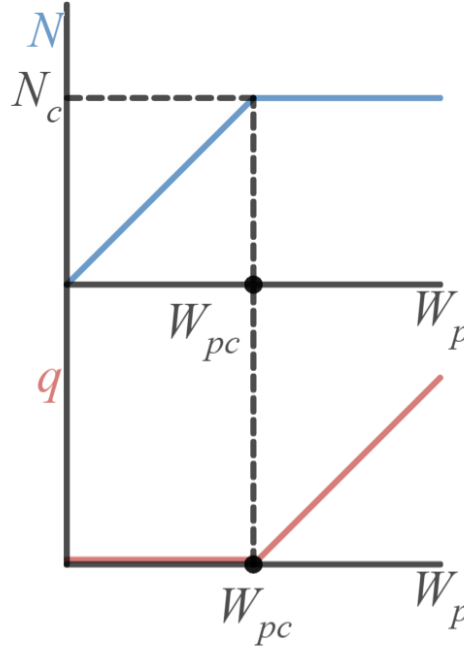


Рисунок 8.2: Графики зависимостей инверсии населенности  $N$  и числа фотонов  $q$  от скорости накачки  $W_p$ .

При малых значениях скорости накачки меньше порогового  $W_{pc}$  инверсия населенности линейно зависит от накачки, но излучения нет. После превышения порога  $W_{pc}$  начинается генерация, инверсия населенности достигает максимума  $N = N_c$  и число фотонов линейно увеличивается с накачкой. Для расчета порогового значения воспользуемся полученными формулами:

$$N = N_0 \frac{W_{pc} - \frac{1}{\tau_{21}}}{W_{pc} - \frac{1}{\tau_{21}}} = N_c = \frac{1}{V_a B \tau_c} \Rightarrow$$

$$W_{pc} = \frac{1}{\tau_{21}} \frac{N_0 + N_c}{N_0 - N_c} \quad (61)$$

Параметр  $N_0$  имеет смысл исходной концентрации активных атомов в среде и, как правило,  $N_c \ll N_0$ , в таком случае

$$W_{pc} \sim \frac{1}{\tau_{21}} \left(1 + \frac{N_c}{N_0}\right)$$



Тогда число фотонов в резонаторе при  $W_p > W_{pc}$ :

$$q = \frac{V_a \tau_c}{2} \left( W_p (N_0 - N_c) - \frac{N_0 + N_c}{\tau_{21}} \right) = \frac{1}{2\tau_{21}} V_a (N_0 + N_c) \tau_c \left( \frac{W_p}{W_{pc}} - 1 \right)$$

Обозначим  $\frac{W_p}{W_{pc}} \equiv x$ , тогда  $x - 1$  — превышение над порогом генерации. Если  $x$  большой, то в системе будет большой коэффициент усиления на различных продольных модах, и их придется специально устранять, иначе начнется сильная конкуренция мод. Далее, большой коэффициент усиления нарушает требования, вводимые при выводе скоростных уравнений и интегрировании их по координатам. Из-за перечисленных факторов для одномодового режима  $x$  должен быть чуть больше единицы, например  $0 < x - 1 < 0.1$ , то есть  $W_p$  чуть больше порогового значения  $W_{pc}$ .

2. Четырехуровневая среда. Для нее также справедливы два решения уравнения [60], но скоростные уравнения отличаются. Сразу запишем ответы, но читателям очень рекомендуем проверить их самим.

$$\begin{aligned} N &= N_0 \frac{W_p}{W_p + \frac{1}{\tau_{21}}} \\ W_{pc} &= \frac{1}{\tau_{21}} \frac{N_c}{N_0 - N_c} \end{aligned} \quad (62)$$

Поведение системы в этом случае ничем не отличается принципиально от трехуровневой схемы, и зависимости, изображенные на рис. 8.2 ее хорошо описывают. Также, для нее сохраняется требование  $0 < x - 1 < 0.1$ .

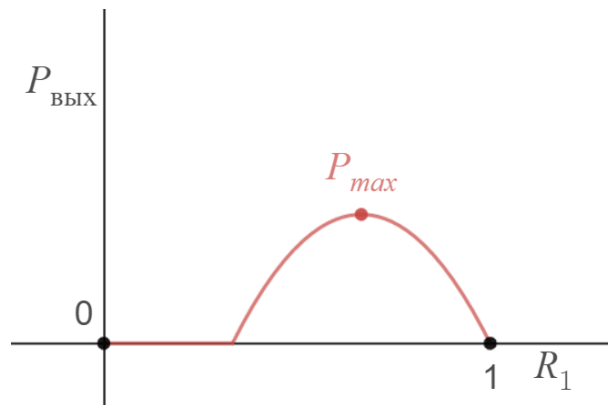


Рисунок 8.3: График зависимости мощности выходного излучения  $P_{\text{вых}}$  от коэффициента отражения зеркала  $R_1$ .

Выходная мощность является измеряемым параметром, в отличие от полного числа фотонов в резонаторе. Если зеркало с индексом 1 полупрозрачное (выходное), то величина  $P_{\text{вых}}$  определяется как

$$P_{\text{вых}} \sim \gamma_1 q \hbar \omega_{21} \frac{c}{2L} \quad (63)$$

Далее возникает вопрос, можно ли оптимизировать резонатор для получения максимальной выходной мощности при фиксированных параметрах активной среды? Эта задача имеет смысл, потому что  $P_{\text{вых}}(R_1)$  будет обладать максимумом (см. рис. 8.3): при малых  $R_1$  потери в резонаторе слишком велики для генерации, и  $P_{\text{вых}} = 0$ , но и при  $R_1 = 1$   $P_{\text{вых}} = 0$ , поскольку излучение не будет выходить из резонатора.

Для нахождения максимума необходимо посчитать производную  $\frac{dP_{\text{вых}}}{dR_1}$  с учетом зависимостей  $\gamma_1(R_1)$ ,  $\tau_c(R_1)$ ,  $N_c(R_1)$  и  $W_{pc}(R_1)$ . Почти во всех случаях получается, что для достижения максимума мощности превышение над порогом  $x$  должно быть очень большим, например порядка 100, что лишает возможности получить одномодовый режим.

## Лазер на рубине

Остановимся подробнее на лазере с трехуровневой активной средой. Именно на рубине ( $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$ ) был сконструирован первый лазер. Кристалл  $\text{Al}_2\text{O}_3$  — прозрачный, а рубиновый цвет ему дают ионы хрома. Важно понимать условность в обозначениях: сам кристалл обозначается как  $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$ , а лазер, работающий на его основе, как  $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ .

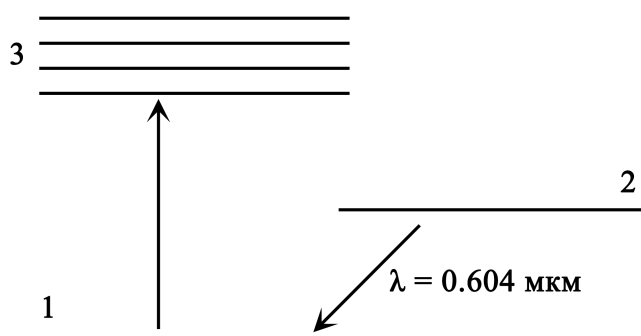


Рисунок 8.4: Схема уровней лазера на рубине. Уровень 3 представляет из себя полосу из множества уровней, тем самым давая возможность варьировать длину волны накачки.

На рис. 8.4. представлена структура уровней атомов хрома. Все приведенные далее числа являются приближенными. Переход 2-1 происходит на длине волны  $\lambda_{21} = 0.604$  мкм (энергия  $\hbar\omega_{21} = 1.8$  эВ), время жизни  $\tau_{21} = 3$  мс (метастабильный уровень), а  $\tau_{32} \sim 10^{-7}$  с. Таким образом требования к скорости переходов, которые мы вводили при описании трехуровневой схемы, здесь выполняются. Сечение усиления на переходе 2-1:  $\sigma_{21} = 2.5 \cdot 10^{-20}$  см<sup>2</sup>, что лежит в среднем диапазоне значений для активных сред. На самом деле, в рубине можно получить генерацию и на других длинах волн, в частности около одного микрометра, однако это требует дополнительных манипуляций с кристаллом, его охлаждения и т.п. Накачка на переходе 1-3 производится мощной вспышкой от лампы.

Для дальнейших оценок нам необходимо ввести какие-то параметры резонатора. Пусть сама активная среда имеет форму цилиндра с длиной  $l = 2.5$  см и площадью торцов  $a^2 = 0.5 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>. Далее, торцы цилиндра можно использовать как зеркала, тогда длина резонатора  $L$  и кристалла  $l$  будут совпадать. В такой системе очень трудно получить какую-либо селекцию мод. Типичные значения потерь в резонаторе:

$$\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-2}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_i = 4 \cdot 10^{-2}$$

Теперь оценим, что будет происходить в системе в режиме непрерывной генерации.

$$\gamma_c = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_i) = 7 \cdot 10^{-2}$$

$$N_c = \frac{1}{V_a B \tau_c} = \frac{\gamma_c}{\sigma L} = 1.1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$$

$$N_0 = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_c}{N_0} \sim 2.2 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

$$W_{pc} = \frac{1}{\tau_{21}} \frac{N_0 + N_c}{N_0 - N_c} \sim \frac{1}{\tau_{21}} = 330 \text{ с}^{-1}$$

Значение  $W_{pc}$  получилось достаточно большим — атом должен 330 раз в секунду переходить в инверсное состояние для работы лазера, что требует большой мощности накачки. В первом лазере Т.Х. Майман смог решить эту проблему специальной системой охлаждения кристалла. Также, большое значение  $W_{pc}$  вынуждает использовать импульсную накачку с низкой частотой следования вспышек лампы. Мощность лазера на рубине:

$$P_{\text{вых}} = 1.1(x - 1)[\text{Вт}]$$

В результате получается, что такой лазер требует мощной накачки и при этом его выходная мощность порядка единиц ватт, то есть он неэффективен, и сейчас нигде не применяется. Это объясняется тем, что рубин — трехуровневая среда, которой нужна большая инверсия населенности.

## Nd:YAG лазер

По сравнению с трехуровневой схемой гораздо меньшей инверсии населенности и скорости накачки требует четырехуровневая, которую мы рассмотрим на примере распространенного лазера с активным элементом из иттрий-алюминиевого граната ( $\text{Y}_3\text{Al}_3\text{O}_{12}:\text{Nd}^{3+}$ ).

Концентрация ионов неодима в гранате порядка составляет около 1%, это связано с тем, что размер атомов Nd больше атомов Al, что приводит к нарушению структуры решетки при больших концентрациях примеси. В непрерывном режиме работы концентрация составляет порядка 0.3% для того, чтобы обеспечить требование на маленький коэффициент усиления.

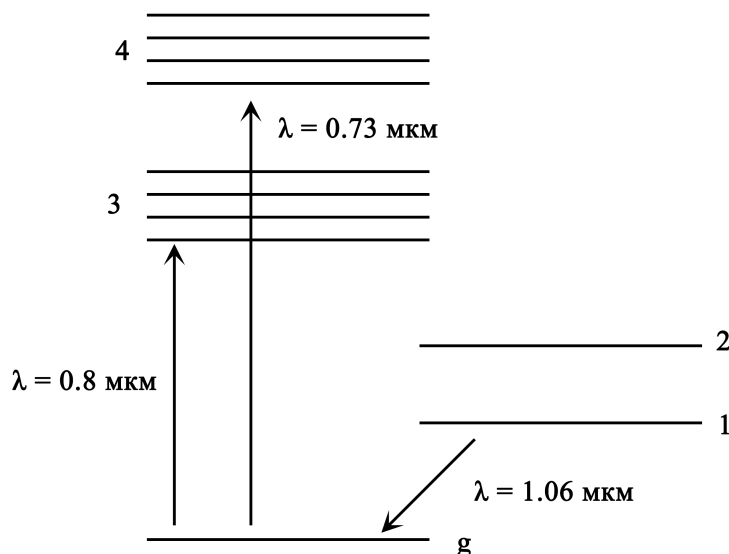


Рисунок 8.5: Схема уровней Nd:YAG лазера.

Схема уровней представлена на рис. 8.5. Накачка может осуществляться в две полосы с длинами волн 0,8 и 0,73 мкм; генерация осуществляется на рабочем переходе 2-1 с  $\lambda_{21} = 1.06$  мкм ( $\hbar\omega_{21} = 1.1$  эВ). Более точно эти значения определять бессмысленно, поскольку они могут поменяться на величины порядка 0.01 мкм за счет изменений во внутрекристаллическом поле.

Например, существует похожий кристалл алюмината иттрия с примесью неодима, который излучает на 1.058 мкм. Время жизни рабочего уровня  $\tau_{21} = 0.2$  мс. Ширина линии усиления  $\Delta\nu = 6.5$  см<sup>-1</sup>. Возьмем цилиндрический кристалл с такими же геометрическими размерами, как и у рубина в предыдущем разделе.

$$N_0 = 6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}, \frac{N_c}{N_0} \ll 1$$

$$\sigma = 8.8 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$$

$$\gamma_1 = 6 \cdot 10^{-3}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_i = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$W_{pc} = 0.72 \text{ с}^{-1}$$

Отметим, что сечение  $\sigma$  у этого лазера достаточно большое по сравнению с другими активными средами. Пороговая скорость накачки здесь  $W_{pc}$  гораздо ниже чем для рубина, это связано как раз с использованием четырехуровневой схемы. В этом смысле стабильность и одномодовость лазерного излучения и накачку легко реализовать, однако из-за этого мощность выходного излучения становится гораздо меньше:

$$P_{\text{вых}} = 5(x - 1)[\text{мВт}]$$

И, конечно, не стоит забывать про сильный нагрев активной среды из-за наличия двух безызлучательных переходов.

Таким образом, формулы и уравнения, которые мы получили на этой лекции, позволяют делать практические оценки параметров интересующих нас активных сред и рассуждать об их применениях в тех или иных задачах.



## Лекция 9

### Оптимизация выходной мощности лазера

На прошлой лекции была затронута проблема оптимизации выходной мощности лазера  $P_{\text{вых}}(R_1)$  с помощью нахождения оптимального коэффициента  $R_1$  выходного зеркала. График приведен на рис. 8.3. Для трехуровневой схемы можно записать следующее выражение:

$$P_{\text{вых}}(R_1) = \frac{1}{2\tau_{21}} \hbar \omega V_a (N_0 + N_c) \tau_c(R_1) (x(R_1) - 1) \gamma_1(R_1)$$

$$\frac{dP_{\text{вых}}}{dR_1} = 0 \Rightarrow R_1 = R_1^{(\text{опт})} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_1^{(\text{опт})}$$

$$\gamma_1^{(\text{опт})} = 2W_p N_0 \tau_{21} \sigma l - 2\gamma_i = 2\gamma_i(x - 1)$$

Для оценки возьмем известные характеристики лазера на рубине из прошлой лекции и положим  $W_p \sim 10^2$ . Тогда

$$x = \frac{1}{\gamma_i} W_p N_0 \tau_{21} \sigma l = 120$$

Этот результат подтверждает, что при максимальной выходной мощности нельзя ожидать одномодовой генерации. И в целом, такой подход к оптимизации не самый удобный, поскольку после такой процедуры в резонаторе возникнет конкуренция мод и уменьшится длина когерентности.

### Устойчивость стационарной генерации

Мы рассмотрели стационарное решение скоростных уравнений в виде режима непрерывной генерации. Следующий вопрос, который нужно задать к этому решению: устойчиво ли оно? Ведь если решение не устойчиво, то с точки зрения практики у лазера будут меняющиеся во времени параметра излучения, такие как мощность, что делает такой режим неприменимым.

Вспомним материал первой лекции. Интересующая нас часть зависимости коэффициента усиления  $K_{yc}$  от скорости накачки  $W_p$  приведена на рис. 9.1 (полный вид см. на рис. 2.2).

При достаточно больших  $W_p$  видна нелинейная зависимость с отрицательной производной, и на ней лежит точка стационарного решения. Вопрос устойчивости заключается в рассмотрении поведения системы при ее отклонении из стационарного положения. В реальности все параметры лазера, и в частности резонатора, испытывают мелкие случайные флуктуации с разными временными масштабами: зеркала дрожат под действием воздуха и внешних факторов, длина резонатора чувствительна к температуре, накачка не является постоянной величиной.

Мы уже получили, что по законам математики точка на убывающем участке функции будет устойчива, однако необходимо рассмотреть, что будет с системой, выведенной из состояния равновесия, и по какому закону она в него будет возвращаться.

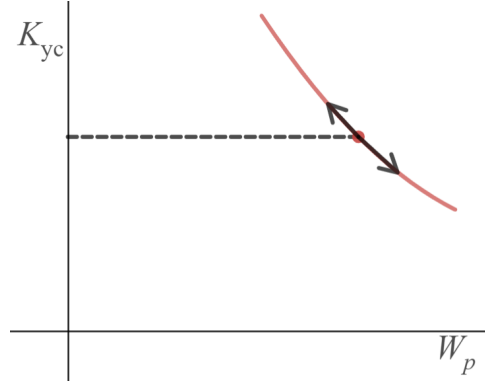


Рисунок 9.1: Часть зависимости коэффициента усиления  $K_{yc}$  от скорости накачки  $W_p$ . Стрелками обозначены отклонения от изначального положения.

Поскольку генератор является автоколебательной системой, при его выводе из положения равновесия будут происходить релаксационные колебания его параметров:

$$\overbrace{\sin(\Omega_r t + \Phi)}^{\text{Автоколебания}} \underbrace{e^{-\frac{t}{t_0}}}_{\text{Затухание во времени}},$$

где  $\Omega_r$  — релаксационная частота,  $t_0$  — время релаксации. Этот закон может приводить к двум физически разным картинам. Если  $t_0 \gg \frac{1}{\Omega_r}$ , то будут происходить квазипериодические колебания. Если  $t_0 \ll \frac{1}{\Omega_r}$ , то процесс станет апериодическим.

Положим при решении скоростных уравнений, что в задаче флуктуируют инверсия населенности  $N$  и число фотонов  $q$ , потому что изменения внешних параметров именно к этому и приводят. Введем  $\delta N, \delta q$  как некие флуктуации.

$$N = N_{\text{стац}} + \delta N, \quad q = q_{\text{стац}} + \delta q$$

Заметим, что при увеличении  $N$  число фотонов  $q$  уменьшается, и наоборот, то есть в этих процессах наблюдается сдвиг фазы на  $\frac{\pi}{2}$ . Далее, положим:

$$N_{\text{стац}} = \text{const}, \quad q_{\text{стац}} = q_{\text{стац}}(W_p) \text{ — линейная зависимость}$$

Подставим  $N$  и  $q$  в исходные скоростные уравнения для трехуровневой системы [58, 60]. В правой части уравнений можно сгруппировать члены, связанные с  $N_{\text{стац}}$  и  $q_{\text{стац}}$ , и использовать условия  $\frac{dN_{\text{стац}}}{dt} = \frac{dq_{\text{стац}}}{dt} = 0$ . Тогда получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \delta \dot{N} &= -\delta N \left( W_p + \frac{1}{\tau_{21}} \right) - 2B(q_{\text{стац}} \delta N + N_{\text{стац}} \delta q) \\ \delta \dot{q} &= BV_a q_{\text{стац}} \delta N \end{aligned}$$

Идея решения такой системы: продифференцировать второе уравнение по времени и подставить в него получившееся  $\delta \dot{N}$  из первого уравнения, а  $\delta N$  выразить через

$\delta\dot{q}$ . В результате получается дифференциальное уравнение второго порядка для  $\delta q$ , можно таким же образом записать его и для  $\delta N$ .

$$\delta\ddot{q} + \underbrace{\left(W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + 2Bq_{\text{стац}}\right)}_{2\alpha} \delta\dot{q} + \underbrace{2B^2q_{\text{стац}}N_{\text{стац}}V_a}_{\Omega_r^2} \delta q = 0$$

Это уравнение для гармонического осциллятора с затуханием. Для него известно решение:

$$\delta q = \delta q_0 e^{-\alpha t} \sin(\Omega_r t + \Phi_0),$$

$$\delta N = \delta N_0 e^{-\alpha t} \sin\left(\Omega_r t + \Phi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (64)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + 2Bq_{\text{стац}}\right), \quad \Omega_r^2 \approx 2B^2q_{\text{стац}}N_{\text{стац}}V_a$$

Напомним, что это справедливо для трехуровневой схемы. При больших амплитудах колебаний в выражении для релаксационной частоты необходимо учитывать поправку, связанную с затуханием. Видно, что и  $\alpha$  и  $\Omega_r$  зависят от скорости накачки через  $q_{\text{стац}}(W_p)$ . Эти зависимости представлены на рис. 9.2.

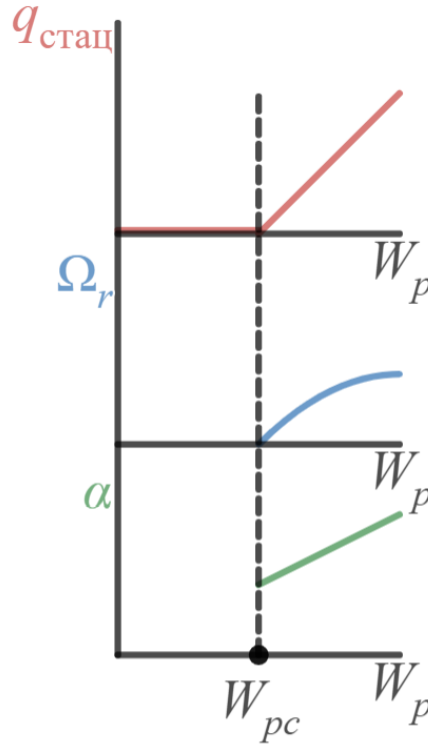


Рисунок 9.2: Зависимости  $q_{\text{стац}}$ ,  $\Omega_r$  и  $\alpha$  от скорости накачки  $W_p$ .

При  $W_p = W_{pc}$  частота  $\Omega_r = 0$ , а  $\alpha \neq 0$ , то есть в этом случае выход в равновесие будет аperiодическим. Чем больше накачка, тем больше  $\alpha$ , тем меньше время релаксации и больше частота колебаний. Напомним, что все решение следует рассматри-



вать вблизи  $W_{pc}$ , так как мы исходили из скоростных уравнений, хотя и качественно зависимости при больших  $W_p$  будут такими же.

В результате мы описали релаксационные процессы в лазерах, работающих в режиме стационарной генерации. Для того чтобы их увидеть в реальной жизни, нужно измерить спектральную плотность мощности излучения, где будет видна постоянная компонента на нулевой частоте, и небольшой пик на релаксационной частоте, то есть мощность флуктуирует именно на ней вокруг среднего значения. Существуют синхронные детекторы, где сигнал модулируется на определенной частоте, что увеличивает отношение «сигнал-шум», однако если эта частота совпадет с релаксационной то отношение значительно уменьшится. Поэтому значение релаксационной частоты важно как и непрерывных лазеров, так и импульсных с когерентной последовательностью импульсов для ряда задач, например в терагерцовой технике и спектроскопии.

Для четырехуровневой схемы справедливы следующие формулы:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + Bq_{\text{стац}} \right), \quad \Omega_r^2 \approx B^2 q_{\text{стац}} N_{\text{стац}} V_a \quad (65)$$

### Оценка параметров релаксации

1. Лазер на рубине. Параметры активной среды такие же, как и в предыдущей лекции. Пусть длина резонатора 1 м,  $x = 1.1$ .

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} = 1.7 \text{ мс}, \quad \frac{2\pi}{\Omega_r} = T_r = 60 \text{ мкс} \ll t_0, \quad \frac{\Omega_r}{2\pi} = 10^5 \text{ Гц},$$

На самом деле ширина релаксационного максимума мала, и если для синхронного детектора выбрать частоту  $0.9 \cdot 10^5$  Гц, то прибор будет работать нормально. Теперь, увеличим накачку,  $x = 2$ :

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} = 340 \text{ мкс}, \quad \frac{2\pi}{\Omega_r} = T_r = 7,7 \text{ мкс} \ll t_0, \quad \frac{\Omega_r}{2\pi} = 10^6 \text{ Гц}$$

2. Nd:YAG лазер. Параметры активной среды такие же, как и в предыдущей лекции. Пусть длина резонатора 1 м,  $x = 1.4$ .

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} = 300 \text{ мкс}, \quad \frac{2\pi}{\Omega_r} = T_r = 57 \text{ мкс} \sim t_0, \quad \frac{\Omega_r}{2\pi} = 10^5 \text{ Гц}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что релаксационные колебания происходят в диапазоне  $10^4 \div 10^5$  Гц.

Формально, можно считать стационарное решение скоростных уравнений нулевым приближением, релаксационные поправки — первым приближением, и на этом можно не останавливаться. Если подробно расписать дальнейшие поправки, то получится описание нелинейных процессов, возникающих при больших скоростях накачки и

связанных с ангармоническими колебаниями. Например, могут появиться колебания на второй гармонике релаксационной частоты и так далее.

На этом мы завершаем обсуждение непрерывной генерации и связанных с ней физических эффектов и переходим к импульсной генерации.

## Импульсная генерация

Первый лазер на рубине, запущенный Мейманом, был импульсный, потому что по-другому накачать рубин трудно. В первую очередь импульсный режим в приложении к практическим задачам необходим для того, чтобы поднять энергию и мощность излучения. В частности, это важно для воздействия на вещество, например для резки металла, который в случае непрерывного излучения нагревается за счет процесса теплопроводности по всему объему. В спектроскопических задачах импульсные лазеры позволяют увеличить временное разрешение. В 1999 году А. Зевейлу была дана Нобелевская премия за «исследование переходных состояний, возникающих во время химических реакций, с использованием фемтосекундной спектроскопии».

В режиме одномодовой непрерывной генерации при скорости накачки  $W_p > W_{pc}$  инверсия населенности  $N$  будет константой, и высокой мощности из-за этого не получить. При импульсной накачке и специально подобранных спектрально селективных элементов можно надеяться на более мощное излучение. Например, на рис. 9.3а представлена зависимость скорости накачки от времени в виде прямоугольного импульса и мощность выходного излучения как более сглаженный прямоугольный импульс. Однако, если длительность импульса накачки будет больше, чем время жизни рабочего уровня в активной среде, то установка будет плохо работать, потому что населенность начнет уменьшаться в процессе накачки. Поэтому для всех импульсных режимов справедливо  $\tau_{\text{pump}} < \tau_{21}$ .

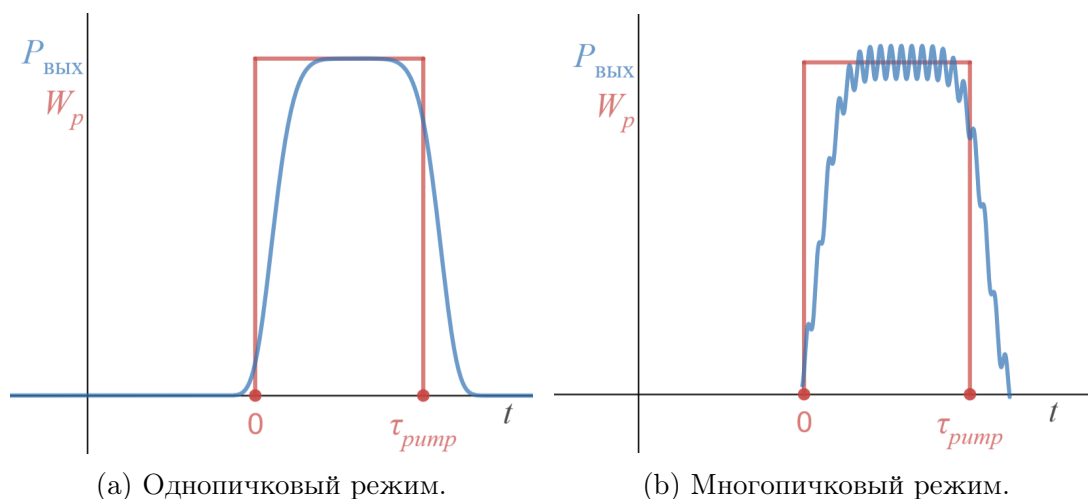


Рисунок 9.3: Зависимости скорости накачки  $W_p$  и выходной мощности  $P_{\text{вых}}$  от времени  $t$  в импульсном режиме генерации.

При многомодовой генерации в зависимости  $P(t)$  появятся небольшие пики — временная и спектральная интерференция, вызванная конкуренцией мод. Из-за такого вида графика этот режим называется многопиковый, в котором каждый пик

примерно соответствует своей продольной моде. В этом случае излучение обладает сравнительно плохими качествами.

Для получения однопикового режима необходимо создать в системе инверсию населенности чуть большую порогового значения, причем этого значения нужно достичь в конце импульса накачки. Тогда, за время накачки в системе накапливается энергия, и после превышения над порогом начинается генерация одного импульса с достаточно большой мощностью, на который тратится вся накопленная инверсия населенности. За счет накачки система принудительно выводится из положения равновесия, за счет излучаемого импульса она возвращается обратно, то есть релаксирует, поэтому длительность импульса определяется периодом релаксационных колебаний. Однако, при импульсном режиме генерации не выполняются многие требования, которые мы вводили для описания релаксационных процессов, поэтому они являются здесь скорее грубой оценкой. В однопиковом режиме существуют несколько проблем, например трудности при получении высоких мощностей излучения. Также, присутствует так называемый джиттер (от англ. jitter — дрожание), то есть флуктуация времени начала излучаемого импульса, связанная с малыми изменениями в накачке.

Видно, что эти два режима из-за своих недостатков не совсем подходят для современных задач.

## Модуляция добротности

Самым эффективным и распространенным способом генерации импульсного излучения является модуляция добротности (в англ. литературе Q-switching). Идея этого метода заключается в разбиении процесса генерации на два этапа.

На первом этапе происходит накачка активной среды в резонаторе с низкой добротностью  $Q$  (низким  $\tau_c$ ).

$$N_{\text{стац}} \sim \frac{1}{V_a B \tau_c}$$

При низких  $\tau_c$  стационарная инверсия населенности велика, и генерация не происходит, позволяя получить инверсию в активной среде порядка  $N_0$ . При этом требование  $\tau_{\text{pump}} \ll \tau_{21}$  здесь также сохраняется.

Во время второго этапа добротность резко повышается, а накачка прекращается. Это можно представить как то, что экспериментатор вынимает зеркало из резонатора, накачивает активный элемент, а потом вставляет зеркало обратно. Конечно, так просто сделать это не получится, потому что экспериментатору придется вынимать и возвращать зеркало сотни раз в секунду. Так или иначе, после резкого увеличения добротности система оказывается в сильно неравновесном положении и начинает излучать. В результате получится так называемый гигантский импульс. Используя модуляцию добротности, можно получить и одномодовый режим генерации, внося соответствующие спектрально селективные элементы. Альтернативным способом получения одной моды будет внешняя дополнительная «затравка» от одномодового лазера, по интенсивности во много раз превосходящая шум.

Импульс, получаемый методом модуляции добротности, представлен на рис. 9.4.

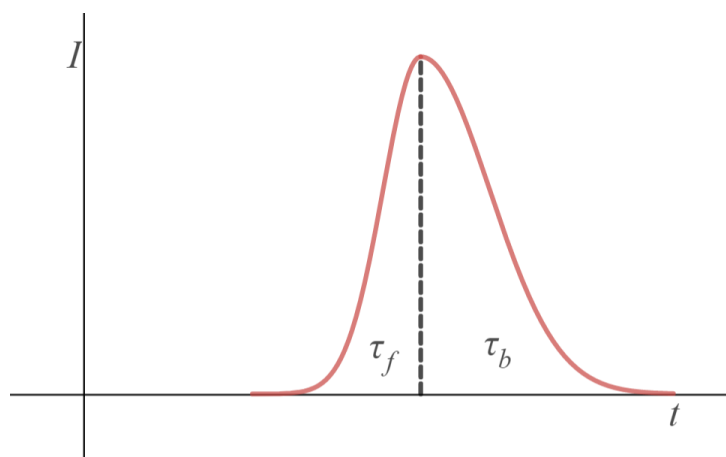


Рисунок 9.4: Вид импульса, получаемого методом модуляции добротности. Важно, что он обладает несимметричной формой.

У него есть две временные характеристики: время фронта импульса  $\tau_f$  и спада  $\tau_b$ .

$$\tau_f \sim \frac{2L}{c} N_{\text{стац}}, \quad \tau_b \approx \frac{2\pi}{\Omega_r}$$

При сильной накачке системы  $\tau_f$  будет увеличиваться, а  $\tau_b$  — уменьшаться. Получается асимметричный генерируемый импульс.

Модуляция добротности бывает активной и пассивной. Сначала приведем примеры активной модуляции. Каким образом можно получить такую модуляцию добротности?

1. Первое, что можно представить, это различные механические системы. Например, на рис. 9.5. показан резонатор с вращающимся выходным зеркалом.

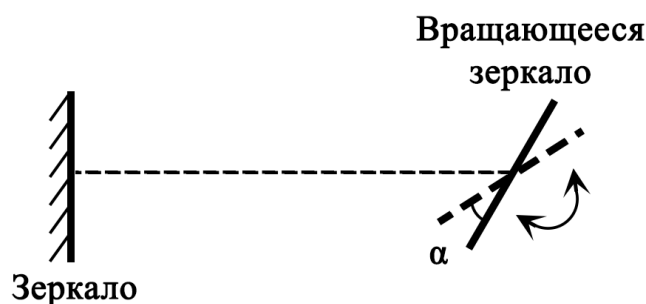


Рисунок 9.5: Резонатор со вращающимся зеркалом, в котором реализуется модуляция добротности.

Когда оно становится параллельно другому зеркалу, добротность резко повышается. Если угол отклонения зеркала от параллельного положения меньше, чем угол дифракционной расходимости пучка, то добротность будет высокая. Из этого факта следует оценка на необходимую частоту вращения такого зеркала:  $3 \cdot 10^4 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$ . Такое большое число представляет собой определенную проблему,

потому что любой мотор на таких оборотах, сравнимых с двигателем в самолетах, сильно шумит и создает много помех.

2. Другой способ, представленный на рис. 9.6. заключается во вращении непрозрачного диска с прорезями. Когда диск встает в такое положение, при котором отверстие лежит на оптической оси резонатора, его добротность повышается. Регулировкой размеров отверстия достигаются некоторые параметры генерации. Можно сделать на диске несколько дополнительных отверстий, тем самым уменьшив необходимую скорость его вращения, однако от шума мотора не избавиться. На таких установках получали импульсы 50 нс с энергией импульса 1 Дж.

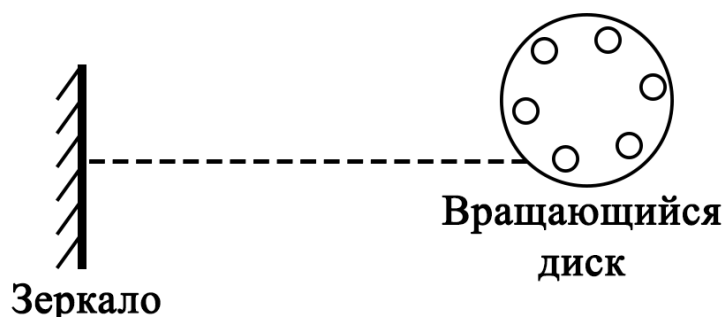


Рисунок 9.6: Резонатор со вращающимся диском, в котором реализуется модуляция добротности.

3. Третий способ — электро-оптический затвор. В двулучепреломляющей среде есть определенная оптическая ось, относительно которой существует обыкновенная (перпендикулярная поляризация) и необыкновенная (параллельно оптической оси) волны, и показатель преломления для необыкновенной волны  $n_e \neq n_o$ . В положительных кристаллах  $n_e > n_o$ , в отрицательных наоборот. Показатель  $n_e$  зависит от угла падения волны,  $n_o$  — не зависит. В результате этих эффектов, две волны приобретают разные набеги фаз при прохождении через кристалл. При правильно подобранной длине кристалла с учетом разных  $n$  эта система начинает работать как пластинка  $\frac{\lambda}{2}$  или  $\frac{\lambda}{4}$ . Когда сдвиг фаз между волнами с разной поляризацией равен  $\frac{\lambda}{4}$ , то линейная поляризация становится круговой, и наоборот. Когда сдвиг равен  $\frac{\lambda}{2}$  поляризация поворачивается на 90 градусов.

Нелинейная оптика описывает эффект Поккельса, который заключается в зависимости показателя преломления от внешнего электрического поля:

$$n(E) \sim \alpha E$$

Если взять кристалл с таким свойством, и напылить электроды на торцы, перпендикулярные распространению луча, и создать поле  $E$ , то показатель преломления именно в перпендикулярном направлении изменится. Тогда получится регулируемый эффект двулучепреломления, а сам кристалл с электродами будет называться ячейкой Поккельса.

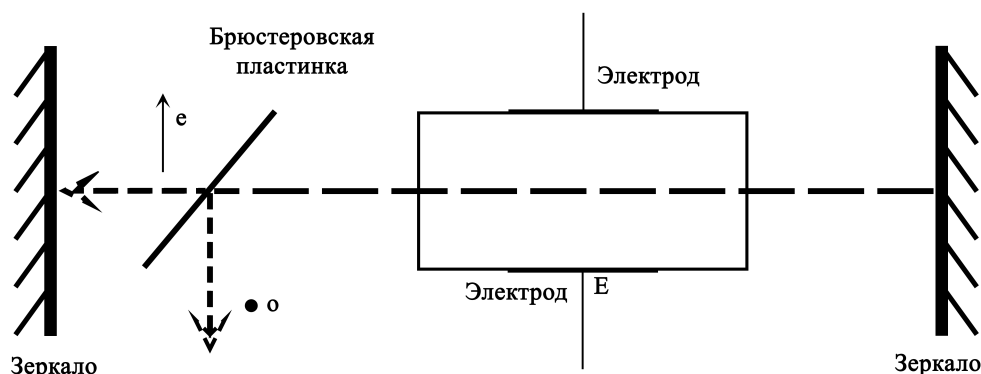


Рисунок 9.7: Резонатор с ячейкой Поккельса.

Для модуляции добротности в резонаторе это используется следующим образом. Схема представлена на рис. 9.7. Правое зеркало — глухое, слева от ячейки Поккельса ставится брьюстеровская пластинка. Она выводит из резонатора излучение с поляризацией, перпендикулярной плоскости падения, и пропускает излучение с параллельной поляризацией. Таким образом, для двух ортогональных поляризаций резонатор имеет разную добротность. Ячейку Поккельса, также как и активный элемент, никогда не ставят в центр резонатора, поскольку ее края — отражающие поверхности.

Когда добротность должна быть высокой, ячейка работает в режиме  $\frac{\lambda}{2}$ : за два прохода через нее во время одного обхода резонатора фаза сдвинется на целое число волн, и поляризация не изменяется. Если же ячейка будет работать в режиме  $\frac{\lambda}{4}$ , то за два прохода фаза сдвинется на  $\frac{\lambda}{2}$ , и сработает брьюстеровская пластинка, понижающая добротность.

Для генерации импульсов необходимо подавать базовое напряжение на ячейку Поккельса, обеспечивающее режим  $\frac{\lambda}{4}$ , с периодическими прямоугольными импульсами, которые увеличат добротность при  $\frac{\lambda}{2}$ . Типичная амплитуда таких импульсов от базового уровня составляет порядка 1 кВ. Далее, для уменьшения времени генерации необходимо подавать короткие электрические импульсы. Можно сделать оценку, представив себе экспериментальную схему как RC-контур, где конденсатор — ячейка Поккельса, причем с большим расстоянием между обкладками. Типичная длительность импульса получается порядка 1-10 нс. Вообще говоря, важно только быстро включать резонатор, а выключать его можно медленно, так как инверсия населенности вся ушла на импульс. Энергии импульсов получаются до нескольких джоулей. Периодичность импульсов определяется быстротой следования электрических импульсов, а также теплоотводом активного элемента. Например, Nd:YAG лазер хорошо работает на частотах около 10 Гц, а около 100 Гц уже гораздо хуже. Для более высокой частоты следования используют другие среды, например Nd:YLF.

4. Акусто-оптические модуляторы (начало 10 лекции). В основе такого метода используется акусто-оптический эффект, для получения которого нужно взять

специальную среду, например кварцевое стекло, и установить с одного бока тонкий пьезоэлемент. Такое стекло выбирается из-за его однородных качеств. С изменением напряжения на пьезоэлементе он изменяется в размерах, создавая в основном кристалле акустическую волну. В зависимости от условий на второй границе акустическая волна может быть стоячей при отражении на ней или бегущей при поглощении. Такая волна представляет собой чередование областей повышенного и пониженного давления, что влечет за собой модуляцию показателя преломления. Если в кристалл запустить излучение перпендикулярно существующей акустической волне, то она будет играть роль фазовой решетки. Важно понимать отличие такой решетки от амплитудной. В результате на фазовой решетке происходит дифракция, и у излучения в разных точках сдвигается фаза. При наличии акустической волны в первые и последующие порядки дифракции уходит много энергии, а при выключении — все излучение проходит без отклонений. Можно ставить зеркало резонатора у нулевого максимума, тогда при выключении сигнала добротность увеличивается, или у первого, тогда наоборот. Однако, интенсивность дифрагированной компоненты невелика, так как сильно модулировать преломление не позволяет опасность разрушения стекла, поэтому чаще всего используют первый вариант (см. рис. 9.8).

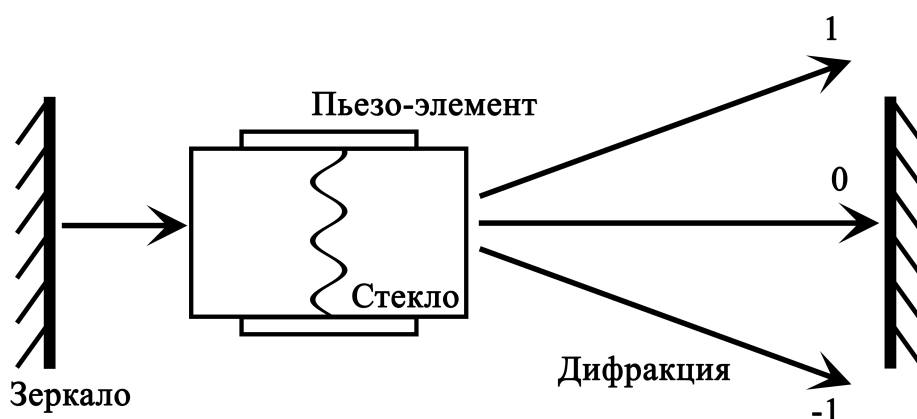


Рисунок 9.8: Резонатор с акусто-оптическим модулятором.

Проблемой является акустическая природа волны — период получаемой решетки будет определяться скоростью звука в среде.

$$c_s \sim 1000 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \nu_s = 1 \text{ МГц} \Rightarrow \lambda_s = \frac{c_s}{\nu_s} = 1 \text{ мм}$$

При обычных длинах волн в лазере порядка микрометров, видно, что угол дифракции получается малым, а он должен быть больше угла расходимости пучка для эффективной работы. Для решения этой проблемы уходят от удобного диапазона частот звука в более высокий, что влечет за собой другие трудности, например большую необходимую мощность. Далее, для модуляции нужно



периодически выключать управляющий сигнал, возникает время включения, сопоставимое со временем распространения звуковой волны в среде, которое может сильно ограничить временной масштаб.

Теперь о пассивной модуляции добротности. Основным элементом такого резонатора выступает так называемый насыщающийся поглотитель (см. рис. 9.9). В его качестве может выступать двухуровневая среда, энергия перехода которой совпадает с энергией рабочего уровня. Часто в качестве такой среды используются растворы красителей. В резонатор с активным элементом помещается кювета с таким поглотителем. Из-за поглощения полезного излучения в начале будут сильные потери. Населенности уровней в двухуровневой среде при интенсивном входном излучении будут стремиться к  $\frac{N_0}{2}$ , то есть инверсия населенности  $N \rightarrow 0$ . Далее, коэффициент поглощения среды описывается как  $\alpha \sim -N$ , следовательно среда перестает поглощать при достижении порогового значения входной интенсивности. Это нелинейный эффект, который называется насыщением поглощения. Важно правильно подобрать концентрацию поглощающих частиц, чтобы спонтанного излучения в резонаторе с потерями хватало на превышение порога. Видно, что резонатор открывается и закрывается сам, нет необходимости во внешних импульсах и так далее. Однако момент появления импульса случаен и вне нашего контроля из-за спонтанного характера интенсивности при закрытом резонаторе, что сильно сужает область применения таких лазеров.

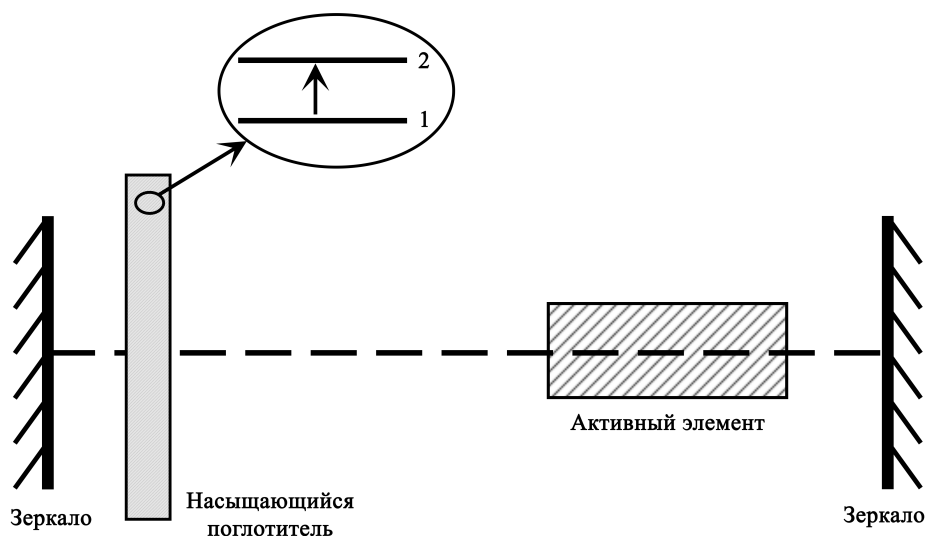


Рисунок 9.9: Резонатор с ячейкой Погкельса.



## Лекция 10

### Математические основы модуляции добротности

Вся идея метода модуляции добротности заключается в том, чтобы система стала сильно неравновесной, то есть с огромной инверсией населенности. Все предыдущие формулы, которые мы выводили, справедливы для малого превышения инверсии над порогом генерации. По этой причине выкладки в этой лекции, которые будут основываться на предыдущих, следует воспринимать как сильно приближенные или даже качественные оценки поведения системы.

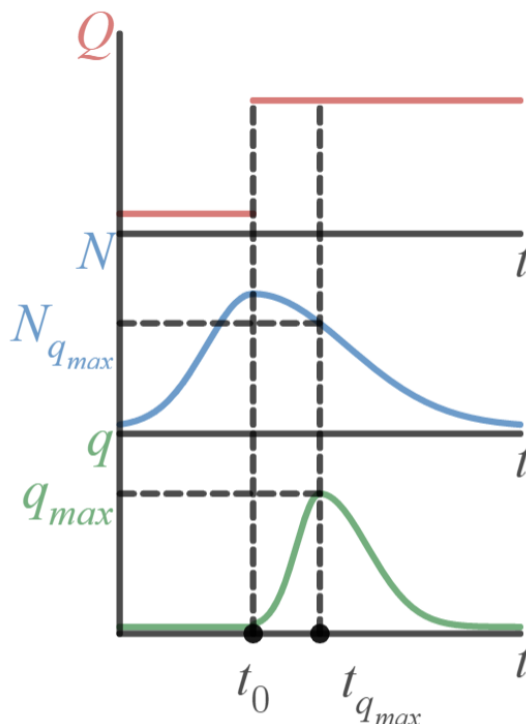


Рисунок 10.1: Графики зависимости добротности  $Q$ , инверсии населенности  $N$  и числа фотонов  $q$  от времени  $t$ .

Модуляция добротности состоит из двух этапов, рассмотрим сначала первый из них, в котором добротность  $Q$  низкая (до момента  $t_0$ , см. рис. 10.1). Скоростное уравнение для трехуровневой системы будет иметь вид:

$$\dot{N} = W_p(N_0 - N) - 2BqN - \frac{N_0 + N}{\tau_{21}}$$

При достаточно долгой длительности этого этапа устанавливается стационарное

ПОЛОЖЕНИЕ:

$$Q \ll 1 \Rightarrow q \rightarrow 0, \dot{N} \rightarrow 0,$$

$$N_I(t_0) = N_0 \frac{W_p \tau_{21} - 1}{W_p \tau_{21} + 1} \sim N_0 \text{ при } W_p \gg \tau_{21}$$

$$q(t_0) \approx q_0 \text{ — спонтанные шумы резонатора}$$

Таким образом, нам известны примерные начальные условия второго этапа. Распишем теперь уравнения для него.

$$\dot{N} = W_p(N_0 - N) - 2BqN - \frac{N_0 + N}{\tau_{21}}$$

$$\dot{q} = (V_a B N - \frac{1}{\tau_c})q$$

$$N(t_0) = N_0, \quad q(t_0) = q_0$$

Эту систему можно точно решать численными методами, здесь же мы сделаем несколько приближений для получения примерного ответа. Считаем, что в момент  $t_0$  накачка выключилась ( $W_p = 0$ ), а также, что число фотонов на этом этапе огромно, и процессами релаксации можно пренебречь. Тогда уравнение для  $N$  становится:

$$\dot{N} = -2BqN$$

Рассмотрим точку, при которой  $q$  принимает максимальное значение.

$$\dot{q} = 0 \Rightarrow V_a B N - \frac{1}{\tau_c} = 0 \Rightarrow N = \frac{1}{\tau_c V_a B} = N_{q \max}$$

Обозначим получившееся значение  $N$  как  $N_{q \max}$ , чтобы понимать, что оно соответствует моменту времени, при котором  $q$  имеет максимум, а не  $N$  (см. рис. 10.1). Параметр  $\tau_c$  здесь соответствует высокой добротности резонатора. Значение  $N_{q \max}$  соответствует пределу инверсии населенности при режиме непрерывной генерации, рассмотренному на прошлых лекциях.

Далее, разделим уравнение с  $\dot{N}$  на  $\dot{q}$ . Получим:

$$\frac{dN}{dq} = -\frac{2BN}{V_a B N - \frac{1}{\tau_c}} = f(N)$$

Это выражение можно проинтегрировать и получить параметрическую зависимость между двумя величинами. Чтобы избавиться от коэффициентов, произведем процедуру нормировки в начальных уравнениях:

$$t' = \frac{t}{\tau_c}, \quad q' = \frac{q}{V_a N_{q \max}}, \quad N' = \frac{N}{N_{q \max}}$$

Тогда имеем следующее:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{N}' = -2q'N' \\ \dot{q}' = (N' - 1)q' \end{cases} &\Rightarrow \frac{dN'}{dq'} = -2\frac{N'}{N'-1} \\ \int_{N'_0}^{N'} dN' \frac{N'-1}{N'} &= \int_{q'_0}^{q'} -2dq' \\ N' - \ln N' \Big|_{N'_0}^{N'} &= -2q' \Big|_{q'_0}^{q'} \\ q' - q'_0 &= -\frac{1}{2} \left( \ln \frac{N'}{N'_0} + N' - N'_0 \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые точки:

$$N' = N'_0 \Rightarrow q' = q'_0$$

$$N' = 1 \ (N = N_{q \max}) \Rightarrow q' \gg q'_0$$

Максимальное число фотонов будет соответствовать пиковой мощности лазера.

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \hbar \omega \gamma_1 V_a N_0 \left( 1 - \frac{\gamma_c}{\sigma l N_0} \ln \frac{\sigma l N_{q \max}}{\gamma_c} \right) \quad (66)$$

Также, саму зависимость мощности от времени можно проинтегрировать по времени от  $t_0$  до  $\infty$  и получить энергию импульса, что будет соответствовать изменению населенности от  $N_0$  до 0. При этом  $q'_0$  можно пренебречь.

$$E_{\text{вых}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_c} \hbar \omega V_a \frac{N_0}{2}$$

Следующий момент, который стоит обсудить, это расчет длительности импульса. Зависимость заднего фронта  $q(t)$  носит релаксационный характер, и его длительность можно оценить как  $\frac{1}{\Omega_r}$ . Передний фронт отличается от заднего, он более резкий, что приводит к асимметрии импульса. Для лазера Nd:YAG с метровым резонатором и другими стандартными величинами длина импульса получается 10 нс. Для ее увеличения до 100 нс можно уменьшить частоту релаксации, удлинив резонатор. Дальнейшее увеличение длительности представляется затруднительным. Нижний предел длительности импульса определяется межмодовым интервалом  $\frac{c}{2L}$ . Для импульса длиной  $\tau$  с шириной спектра  $\Delta\nu$  выполняется  $\tau \Delta\nu \approx 1$ . Тогда

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau} < \frac{c}{2L} \Rightarrow \tau > \frac{2L}{c} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 10^8} \approx 7 \text{ нс}$$

Импульс примерно меньше нескольких наносекунд таким образом сделать невозможно. Важно осознавать, что релаксационный процесс не обязан быть аperiодическим: могут возникнуть колебания, которые приведут к генерации нескольких импульсов после главного с меньшей амплитудой (так называемые пост-импульсы). Их частота следования будет зависеть от релаксационных колебаний, и они будут появляться даже при вовремя выключенной накачке. Если накачку не выключать, то амплитуда дополнительных пиков сильно увеличится.

## Метод синхронизации мод

Метод синхронизации мод (англ. mode locking) позволяет получать импульсы короче, чем при модуляции добротности, используя много мод одновременно. При наличии нескольких мод вокруг центральной можно записать выходной сигнал как сумму сигналов, отстроенных на  $m\delta\omega$  от центральной частоты  $\omega_0$ :

$$E(t) = \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \left( \frac{1}{2} E_m \exp\{i\omega_0 t + im\delta\omega t + \varphi_m\} + \text{комплекс. сопр.} \right) \quad (67)$$

Мы предположили, что моды в резонаторе расположены эквидистантно по частоте, в сложных резонаторах это может быть не так. Число рассматриваемых мод  $M$  ограничено полосой усиления активной среды. Случайная фаза  $\varphi_m$  является определяющим моментом в этой системе. Если фазы случайны, а  $E_m = E_0$ , то выходной сигнал будет представлять собой шум с небольшими выбросами около некоего постоянного значения  $ME_0^2$ . Однако, если каким-то образом сделать  $\varphi_m = \varphi_0$ , то есть синхронизировать моды, то при расчете интенсивности это слагаемое в показателе экспоненты перестает играть роль, и сигнал будет следующего вида:

$$E(t) = \exp\{i\omega_0 t + i\varphi_0\} \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \left( \frac{1}{2} E_0 \exp\{i\delta\omega t \cdot m\} + \text{комплекс. сопр.} \right)$$

$$E(t) = E_0 \frac{\sin\left(\frac{M}{2}\delta\omega t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\delta\omega t\right)} \exp\{i\omega_0 t + i\varphi_0\}$$

То есть получается гармонический сигнал с модуляцией амплитуды. Интенсивность будет иметь вид больших периодичных импульсов на фоне шума около нуля. Расстояние между импульсами определяется интервалом  $\delta\omega$ , что соответствует времени обхода резонатора  $\frac{2L}{c}$ . Длительность самого импульса определяется  $\frac{1}{M\delta\omega}$ . При описании метода модуляции добротности используется одна мода, и это выражение являлось нижним пределом длительности импульса. Здесь же число используемых мод велико и определяется  $\frac{\Delta\nu}{\delta\omega}$ .

Среда	Ширина полосы усиления $\Delta\nu$ , см <sup>-1</sup>	Длительность импульса
Nd:YAG	5	5 пс
Nd:GLASS	100	0.1 пс
Ti:Sapphire	1000	10 фс

Таблица 10.1: Наименьшая длина импульса при синхронизации всех мод в полосе усиления для разных активных сред.

Важно понимать, что внутри резонатора существует только один импульс, а последовательность импульсов высокой интенсивности получается только после выходного зеркала.

Примерные значения длительности импульсов представлены в табл. 10.1. В последнем случае для достижения фемтосекунд необходимо синхронизировать  $\sim 10^5$  мод.

Как же получить синхронизацию мод? С математической точки зрения ее можно получить промодулировав исходный сигнал  $E(t)$  с помощью умножения его на  $\sin(\Omega t)$ . Это приведет к появлению сигналов на сдвинутых частотах  $\omega \pm \Omega$ . Теперь, если положить  $\Omega = \delta\omega$ , то моды начнут «переплетаться»: часть сигнала одной моды будет распространяться на частоте соседней моды, что приведет к равенству фаз.

Можно изначально сигнал модулировать не по амплитуде, а по фазе, например  $\sin(\omega t + a \sin \Omega t)$ , тогда от одной частоты появится бесконечный ряд частот, сдвинутых на  $\pm n\Omega$ , которые будут затухать по мере удаления от центральной. Чем больше параметр  $a$ , тем больше энергии переходит в боковые гармоники. То есть с фазовой модуляцией фаза одной моды закрепляется за всеми остальными модами сразу, однако ее сложнее получить в реальных установках.

Рассмотрим примеры способов реализации метода синхронизации мод. Как и модуляция добротности, он может быть активный и пассивный.

1. Электро-оптический затвор (активная синхронизация). В таких системах используется ячейка Поккельса, на которую подается гармонический сигнал. Это приводит к гармонической модуляции амплитуды генерируемого излучения. Конечно, это не так просто, поскольку после генерации полезного импульса может произойти синхронизация мод шумового сигнала, что приведет к сильным помехам. Это решается импульсной модуляцией, которая модулирует только полезное излучение, когда оно проходит через ячейку.

Далее, саму ячейку следует конструировать очень тонкой, порядка длины импульса. Так, для пикосекундных импульсов ее толщина должна быть примерно  $10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^{-4}$  м. Также нужно учитывать, что при обходе резонатора излучение дважды попадает в ячейку, и для облегчения регулировки модуляции имеет смысл ставить ячейку в одну из двух удобных позиций. Первая — вплотную к зеркалу резонатора, что позволит включать ее один раз за обход на удвоенное время. Вторая — ровно в центре резонатора, чтобы включать ячейку на удвоенной частоте. В других местах придется подавать на ячейку сигнал с неэквидистантными импульсами, что тяжело реализовать.

Таким образом, по расположению и виду ячейки Поккельса можно определить, не включая лазер, каким образом получается импульсная генерация. Если ячейка достаточно толстая и расположена вблизи глухого зеркала — это модуляция добротности. Если ячейка тонкая и либо в центре либо у одного из зеркал, используется синхронизация мод.

2. Акусто-оптический затвор (активная синхронизация). В этом случае акустическую волну нужно модулировать на частоте межмодовых биений для модуляции самого сигнала. Здесь проблемой является необходимость точной подстройки модулирующей частоты под межмодовый интервал, хотя это также нужно учитывать и в электро-оптике.
3. Модуляция инверсии населенности (активная синхронизация). Именно населенность отвечает за фазы мод. Этот способ использует накачку, запущенную на

частоте межмодовых биений. В качестве такой накачки может выступать дополнительный лазер, генерирующий импульсы на нужной частоте с помощью модуляции добротности. Те моды, которые попадают в правильную фазу в активную среду, усиливаются, а другие — нет. Именно этот способ использовался в первых фемтосекундных генераторах: лазерах на красителях с синхронной накачкой.

4. Насыщающийся поглотитель (пассивная синхронизация). Для его применения в синхронизации мод поглотитель должен иметь широкую полосу поглощения. Концентрация красителя подбирается таким образом, чтобы интенсивность на уровне сигнала со случайными фазами не пропускалась. Если из-за случайных процессов несколько мод попадают в кювету в одной фазе, то их интенсивность будет много больше, и они смогут пройти и усилятся. Облегчает этот процесс тот факт, что фазы не должны идеально совпадать: существует некий допустимый диапазон. Если время жизни верхнего уровня красителя меньше, чем время обхода резонатора, то есть если краситель успевает «закрыться», то шумы будут подавляться, а полезный импульс — спокойно проходить, и спектр усиливаемых мод будет постепенно расширяться.

При запуске установки с активной синхронизацией мод из-за случайного фактора конкуренции мод может появиться не последовательность импульсов, а шумы с большими перепадами интенсивности. Поэтому хорошие системы снабжены специальными блоками, контролирующими запуск.

В начале 80-х годов прошлого века был открыт новый способ осуществления синхронизации мод на линзе Керра (англ. Kerr lense mode locking). Для этого в резонаторе не нужно сложных дополнительных элементов, кроме диафрагмы и призм (см. рис. 10.2). Берется активная среда с широкой полосой усиления (Ti:Sapphire), и при достаточно высокой интенсивности излучения начинает проявляться эффект Керра. Это нелинейный эффект зависимости показателя преломления от интенсивности, который приводит к самофокусировке излучения. Диаметр пучка уменьшается, и он проходит через диафрагму. А если интенсивность недостаточная, то пучок без самофокусировки испытывает значительные потери. Необходимо заметить, что высокоинтенсивная мода, которая сможет распространяться в резонаторе, будет учитывать в себе нелинейность кристалла и не будет совпадать с модами в обычном резонаторе, которые мы рассматривали на предыдущих лекциях.

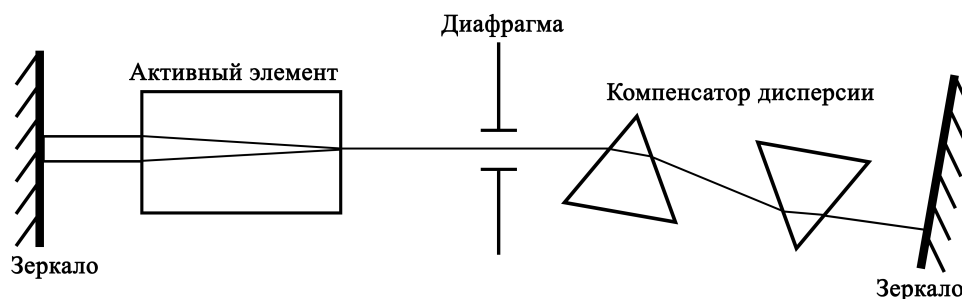


Рисунок 10.2: Резонатор, использующий эффект Керра для синхронизации мод.

Из-за того, что длина импульса очень короткая, помимо дисперсии самого пучка начинает играть роль и дисперсия групповой скорости. Тогда разные спектральные компоненты будут иметь разное время обхода резонатора. Для уменьшения этого негативного эффекта используются компенсаторы дисперсии, например на основе призм. Меняя взаимное положение призм, можно регулировать оптический путь различных спектральных компонент. Без этого импульс получится chirпированным, то есть с несинхронизированными спектральными компонентами.

Возникает вопрос по поводу того, как же изначально получить импульс с высокой интенсивностью. Интересным решением является внесение шумов в резонатор, например осторожным стуком по крышке лазера или зеркала. Акустические колебания, которые возникнут в результате стука, будут достаточно широкими по частоте и скорее всего попадут в межмодовый интервал, который обеспечит необходимую первоначальную модуляцию фазы мод.

Существуют современные системы SESAM, в которых на одно из зеркал наносят специальную пленку из квантовых точек. Квантовая точка — система, в которой возникает квантование уровней за счет ее малых размеров. С помощью таких точек конструируется двухуровневая система на частоте генерации, что фактически аналогично насыщающемуся поглотителю. Это запрещает непрерывную генерацию в установке, тем самым для получения коротких импульсов необходимо просто подождать. Такие лазеры называют самостартующими.



## Лекция 11

### Типы лазеров

Первый лазер был запущен на твердотельном кристалле рубина. Далее были сконструированы газовые лазеры на смеси гелия и неона. В настоящий момент каждое из четырех агрегатных состояний вещества так или иначе используется для лазерной генерации. Подробнее все виды лазеров представлены на таблице 11.1. Важно понимать, что принцип работы лазеров очень сильно изменяется от типа к типу, и даже от одной активной среды к другой.

Газовые лазеры подразделяются на типы по тому, из каких частиц состоит рабочий газ. Так, атомарные лазеры работают на переходах электронов в атоме, и в них выделяется отдельная группа лазеров на парах металлов, отличающаяся от обычных газов. Далее, молекулярные лазеры используют переходы между различными колебательными состояниями молекул для генерации излучения. В этой группе все тоже не так просто, например эксимерные лазеры работают на нестабильных молекулах, которые невозможно получить в обычных условиях. И последний тип газовых лазеров — ионные лазеры, они работают на переходах в ионизированных газах, в первую очередь благородных.

Далее, твердотельные лазеры можно разделить на две группы. Первая — это лазеры, работающие на диэлектрических средах, которые могут быть кристаллами или аморфными средами. Вторая — это полупроводниковые лазеры, такие как лазерные диоды. В их конструкции существует много особенностей. Если просто взять p-n диод и попробовать получить на нем генерацию, то такую установку невозможно будет охладить до рабочей температуры, поэтому в диодах используется гетеропереход.

Также существуют лазеры, использующие жидкость в качестве активного элемента. Обычно под этим понимают наличие определенного жидкого растворителя, в котором находятся молекулы активного вещества, например красителя.

И, конечно, существуют и другие типы лазеров, такие как плазменные лазеры. В них в качестве активной среды используется плазма, и генерации способствуют электронные переходы в многозарядных ионах (следует понимать различие между лазерами на плазме и ионизированном газе). Принципиальная особенность этих лазеров состоит в том, что получаемое излучение находится в рентгеновском диапазоне частот, чего нельзя достичь другими активными средами.

Также, стоит упомянуть лазер на свободных электронах. Если пучок свободных электронов при определенных условиях поместить в магнитное поле, то в такой системе получается двухуровневая схема уровней. И в этом случае длина волны получаемого излучения будет зависеть от изначальных свойств электронов и поля, что позволяет генерировать в терагерцевом диапазоне мощные и короткие импульсы. Лазеры на свободных электронах в оптических частотах уступают другим активным средам, однако в настоящее время они продвинулись в рентгеновский диапазон, где энергии пучков электронов достигают нескольких ГэВ. Такие мощные установки поистине редки и уникальны. В 2017 году в Гамбурге был запущен Европейский рентгеновский лазер на свободных электронах, самый крупный лазер этого типа в мире на текущий момент.

В этом курсе мы обсудили самые простые модели лазерной генерации, которые



с некоторыми оговорками описывают как газовые и твердотельные лазеры, так и лазеры на красителях. Для описания лазеров, использующих плазму и свободные электроны, необходимо подробно обсуждать и другие разделы, например физику плазмы и квантовую физику, которые выходят за рамки этого курса.



Газовые лазеры		
Атомарные	Молекулярные	Ионные
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Гелий-неон (He-Ne)</li> <li>• Гелий-кадмий (He-Cd)</li> </ul> <p>На парах металла:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Пары меди (Cu)</li> <li>• Пары золота (Au)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Углекислый газ (CO<sub>2</sub>)</li> <li>• Азот (N<sub>2</sub>)</li> <li>• Химический лазер (HF-DF)</li> <li>• Эксимеры</li> <li>• Терагерцовые лазеры (Far-infrared laser, FIR)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Аргон (Ar<sup>+</sup>)</li> <li>• Криптон (Kr<sup>+</sup>)</li> <li>• Ксенон (Xe<sup>+</sup>)</li> </ul>
Твердотельные лазеры		
Диэлектрики	Полупроводники	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Редкоземельные (Nd:YAG, Nd:Glass и др.) — волоконные лазеры, лазеры на микрочипах</li> <li>• Рубиновый лазер</li> <li>• Лазеры на центрах окраски</li> <li>• Александритовый лазер</li> <li>• Титан-сапфир (Ti:Sapphire)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Лазерные диоды</li> </ul>	
Жидкостные	Другие типы	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Лазеры на красителях</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Лазеры на свободных электронах</li> <li>• Рентгеновские лазеры</li> </ul>	

Таблица 11.1: Типы лазеров.



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА



*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ