



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. СЕМИНАРЫ

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТАГИРОВА МАГОМЕДА ДЖАБРАИЛОВИЧА



Содержание

1. Семинар 1. Кривизна	6
Кривизна прямой и окружности	6
Кривизна кривой для произвольного параметра	7
Задача. Кривизна параболы и эллипса	8
2. Семинар 2. Кручение	12
Кручение в произвольном параметре	12
Кривизна и кручение винтовой линии	13
Натуральные уравнения кривой	14
Задача 1	15
Задача 2	16
3. Семинар 3. Основные поверхности	17
Двумерная сфера	17
Стереографическая проекция	19
Тор вращения	21
4. Семинар 4. Первая и вторая квадратичные формы	23
Сфера	23
Тор	24
Поверхность вращения	25
5. Семинар 5. Гауссова и средняя кривизны	27
Гауссова и средняя кривизны сферы	27
Поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами	28
Интегральное среднее нормальных кривизн	29
Гауссова и средняя кривизны поверхности вращения	29
Поверхности вращения нулевой средней кривизны	30
6. Семинар 6. Задачи на производные	32
Задача 1. Производная функции вдоль векторного поля	32
Задача 2. Коммутатор	32
Задача 3. Формулы Френе	34
Задача 4. Тор Клиффорда	34
Задача 5. Исследование сферы (оператор Вейнгартена, вторая квадратичная форма, ковариантная производная)	36
7. Семинар 7. Ковариантная производная касательных полей	39
Символы Кристоффеля и формула для ковариантной производной	39
Двумерная сфера	39

Поверхность вращения	41
Кривые	42
8. Семинар 8. Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена	43
Двумерная поверхность в трехмерном пространстве	43
Гиперповерхность	44
Кривая в n-мерном пространстве	44
Оператор Вейнгартена для классических поверхностей	45
Сферическое отображение Гаусса	46
9. Семинар 9. Тензор Римана, изометрии и локальные изометрии	49
Тензор Римана для двумерных поверхностей в трехмерном пространстве .	49
Изометрии	50
Геликоид и катеноид	53
10.Семинар 10. Параллельный перенос	55
Цилиндр	55
Сфера	56
Поверхности, касающиеся вдоль кривой	59
11.Семинар 11. Геодезические. Часть 1	62
Плоскость	62
Сфера	62
Цилиндр	64
Конус	65
Задача 1	66
Задача 2	67
12.Семинар 12. Геодезические. Часть 2	68
Геодезические в плоскости Лобачевского	68
Формула Клеро (теорема Клеро)	70
13.Семинар 13. Геодезические триангуляции	73
Сфера	73
N-угольник	74
Тор	75
14.Семинар 14. Экспоненциальное отображение	78
Экспоненциальное отображение на касательном пространстве	78
Сюръективность и инъективность экспоненциального отображения	78
Свойства нормальных (геодезических) координат	79
Полугеодезические координаты	80

Полярные полугеодезические координаты	81
Свойства полярных полугеодезических координат	83
15.Семинар 15. Минимальные поверхности	84
Геликоид	84
Минимальные поверхности вращения	85
16.Семинар 16. Плоскость Лобачевского	89
Гауссова кривизна плоскости Лобачевского	89
Локальная изометрия псевдосферы Бельтрами и плоскости Лобачевского .	90
Дополнение	92

1. Семинар 1. Кривизна

На этом семинаре мы будем обсуждать то, что мы изучали в первой лекции: перепараметризация, натуральный параметр и кривизна кривой. Начнем с кривизны простых объектов: прямой и окружности.

Кривизна прямой и окружности

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ прямую с точкой A и вектором $\bar{v}$ с началом в точке A . В параметрическом виде такая прямая задается как $\bar{r}(t) = A + \bar{v}t$. Такая параметризация не обязательно будет натуральной, так как $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$. То есть такая параметризация будет натуральной, только если $|\bar{v}| = 1$. Пока что мы умеем считать кривизну только для натурального параметра, поэтому сделаем перепараметризацию $\bar{r}(s) = A + \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}s$. В таком случае $|\frac{d\bar{r}}{ds}| = |\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}| = 1$. Тогда s - натуральный параметр, и кривизна $k(s) = |\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}| = 0$. То есть мы получили, что кривизна прямой равна нулю.

Попробуем теперь найти кривизну окружности. Заметим некоторые особенности:

- 1) Наше определение кривизны инвариантно относительно сдвигов, так как если к $\bar{r}$ добавить константу (постоянный вектор), то уже после первого дифференцирования сдвиг исчезнет. Значит, мы можем всегда сдвинуть кривую, когда хотим посчитать кривизну.
- 2) Также кривую можно вращать, так как если повернуть кривую на постоянный вектор, не зависящий от значения параметра, то векторы скорости и ускорения будут вращаться также, а длина при вращении не меняется.

Тогда будем считать, что наша окружность имеет центр в начале координат. Мы находимся в плоскости $\mathbb{R}^2$, и окружность имеет вид $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, или $\bar{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$. Проверим, является ли параметр натуральным.

$$\bar{r}t = (-R \sin t, R \cos t) \Rightarrow \left| \bar{r}t \right| = R.$$

То есть, если радиус окружности не равен 1, то параметр не натуральный. В общем случае необходимо было бы параметризовать длину, посчитав интеграл, а потом найти обратную функцию. В нашем случае все проще. Скорость в этой параметризации постоянна и равна R . Для того, чтобы двигаться со скоростью 1, необходимо двигаться в R раз медленнее. Для этого запишем новую параметризацию

$$\bar{r}(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right) \Rightarrow \bar{r}s = \left(-\frac{R}{R} \sin \frac{s}{R}, \frac{R}{R} \cos \frac{s}{R} \right) \Rightarrow \left| \bar{r}s \right| = 1.$$

Тогда s - натуральный параметр.

Замечание

Если у нас есть параметризованная кривая, у которой скорость имеет постоянную величину, то довольно просто перейти к натуральному параметру: необходимо разделить параметр на скорость.

Наконец, найдем кривизну нашей окружности.

$$\bar{r}s^2 = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, \frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right) \Rightarrow k(s) = \left| \bar{r}s^2 \right| = \frac{1}{R}.$$

В самом деле, при очень большом радиусе дуга окружности все больше становится похожей на прямую, а $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0$.

Кривизна кривой для произвольного параметра

Мы рассмотрели прямую и окружность. Для других кривых уже не получится так просто посчитать кривизну, поэтому выведем формулу, которая позволит находить кривизну заданной параметризованной кривой, не переходя к натуральному параметру.

Для произвольного параметра в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

$$k(t) = \frac{|\dot{r}, \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}, \text{ где } \dot{r} = r', \ddot{r} = r''$$

Чтобы доказать эту формулу, проверим, что она верна для натурального параметра, а затем проведем перепараметризацию и увидим, что формула не изменится.

1) Пусть t - натуральный параметр (обозначим его s). Тогда

$$\frac{\left| \left[\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2} \right] \right|}{\left| \frac{dr}{ds} \right|^3} = \frac{|[v, kn]|}{|v|^3} = \frac{k|[v, n]|}{1},$$

где $\frac{d^2r}{ds^2} = kn$ по определению вектора нормали, а $|v| = 1$, так как параметр натуральный. Мы получили векторное произведение v и n - ортогональных друг другу единичных векторов. По определению векторного произведения, длина векторного произведения - площадь параллелограмма, натянутого на два этих вектора. Следовательно, $|[v, n]| = 1$ и $\frac{k|[v, n]|}{1} = k(s)$. Значит, формула верна для натурального параметра.

- 2) Рассмотрим теперь произвольный параметр t . В этом случае необходимо сделать замену. Пусть s - натуральный параметр. Тогда из формулы производной сложной функции мы получим, что $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$, так как $r(t) = r(s(t))$. Но в формуле кривизны также участвует вторая производная, поэтому аккуратно проведем вычисление. Так как $\frac{dr}{dt}$ - произведение, то его необходимо продифференцировать по тождеству Лейбница:

$$r'' = \left(\frac{dr}{ds} \right)' \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Теперь подставим найденные значения в формулу для кривизны:

$$\frac{\left| \left[\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2} \right] \right|}{\left| \frac{dr}{ds} \right|^3} = \frac{\left| \left[\frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}, \frac{d^2r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right] \right|}{\left| \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \right|^3} \quad \square$$

Вспомним, что векторное произведение является билинейным. Посмотрим отдельно на знаменатель. Его можно представить в виде $[\alpha \bar{a}, \beta \bar{b} + \gamma \bar{a}]$, где $\bar{a} = \frac{dr}{ds}$, $\bar{b} = \frac{d^2r}{ds^2}$, а α, β, γ - некоторые числа. Тогда $[\alpha \bar{a}, \beta \bar{b} + \gamma \bar{a}] = \alpha \beta [\bar{a}, \bar{b}] + \alpha \gamma [\bar{a}, \bar{a}] = \alpha \beta [\bar{a}, \bar{b}]$.

$$\square = \frac{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \left| \left[\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2} \right] \right|}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \left| \frac{dr}{ds} \right|^3}.$$

В итоге, мы получили то же выражение, как и для натурального параметра, а мы уже знаем, что оно равно кривизне.

Замечание

Мы получили выражение, которое не зависит от выбора параметризации. Оно называется дифференциальный инвариант. У кривой в плоскости есть только один дифференциальный инвариант - кривизна. У пространственных кривых появится еще один, который будет называться кручением.

Задача. Кривизна параболы и эллипса

Парабола

Рассмотрим параболу $y = x^2$. Введем параметризацию $r(t) = (t, t^2)$. Чтобы воспользоваться выведенной формулой для кривизны, необходимо немного подправить параметризацию. Если мы находимся в $\mathbb{R}^2$, то необходимо вложить нашу кривую как плоскость в $\mathbb{R}^3$. Тогда мы получим, что $r(t) = (t, t^2, 0)$.

Посчитаем необходимые производные:

$$\dot{r} = (1, 2t, 0) \Rightarrow |\dot{r}| = \sqrt{1 + 4t^2}, \quad \ddot{r} = (0, 2, 0).$$

Теперь вычислим векторное произведение:

$$[\dot{r}, \ddot{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2) \Rightarrow |[\dot{r}, \ddot{r}]| = 2.$$

Теперь мы можем вычислить кривизну: $k = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$

Эллипс

Рассмотрим теперь эллипс с полуосями a и b . Для него параметризация легко записывается в виде $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Тогда $r(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$. Снова считаем производные:

$$\dot{r} = (-a \sin t, b \cos t, 0) \Rightarrow |\dot{r}| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \quad \ddot{r} = (-a \cos t, -b \sin t, 0).$$

Можем заметить, что так как производные лежат в плоскости xy , то их векторное произведение будет лежать вдоль оси z , поэтому первые две координаты векторного произведения равны нулю (как и в случае параболы). Тогда

$$[\dot{r}, \ddot{r}] = (0, 0, ab \sin^2 t - ab \cos^2 t) = -(0, 0, ab \cos 2t) \Rightarrow |[\dot{r}, \ddot{r}]| = ab |\cos 2t|.$$

Следовательно, кривизна эллипса равна $k = \frac{ab |\cos 2t|}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. Сделаем важное наблюдение.

Замечание

У эллипса кривизна в точках пересечения с осью x отличается от кривизны в точках пересечения с осью y . Зададимся вопросом: почему кривизна должна быть обязательно определена с использованием длины? Можем ли мы обойтись без длины? Оказывается, что нет. У окружности кривизна во всех точках одинаковая, а переход от окружности к эллипсу - простое аффинное преобразование, которое сжимает окружность вдоль одной из осей. Такое аффинное преобразование отличается от ортогонального только тем, что не сохраняет длину. Мы выяснили, что при ортогональных преобразованиях кривизна не меняется, но как только мы делаем самое простое аффинное преобразование, кривизна не сохраняется.

Упражнение

Мы знаем, что через две различные точки можно провести единственную прямую. Есть еще одно похожее утверждение: через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную окружность.

Теперь рассмотрим кривую и три точки $r(s)$, $r(s + \varepsilon)$ и $r(s - \varepsilon)$ на этой кривой. В общем случае для произвольной кривой эти три точки не будут лежать на одной прямой. Тогда проведем через эти три точки окружность радиуса $R(s, \varepsilon)$.

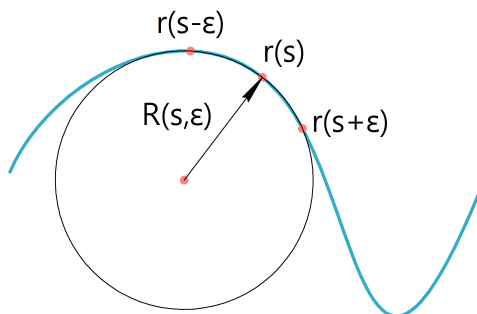


Рис. 1.1

Вопрос: чему равен $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(s, \varepsilon)$?

Когда $\varepsilon \rightarrow 0$ эта окружность начинает превращаться в так называемую соприкасающуюся окружность (окружность с наилучшим касанием к кривой).

Подсказка к решению

Проведем три отрезка, которые будут попарно соединять наши три точки. Тогда наша окружность будет описанной для треугольника с вершинами в указанных трех точках.

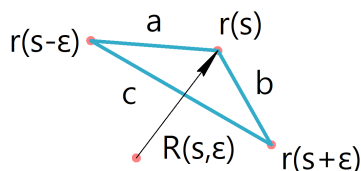


Рис. 1.2

Вспомним, что радиус описанной вокруг треугольника окружности $R = \frac{abc}{4S}$, где a, b, c - стороны треугольника, S - площадь треугольника.

Посчитаем длину, например, стороны b (здесь мы воспользуемся формулой Тейлора):

$$b = |r(s + \varepsilon) - r(s)| = \left| \varepsilon \dot{r}(s) + \frac{\varepsilon^2}{2} \ddot{r}(s) + o(\varepsilon^2) \right| = \dots$$

Также можно найти длины сторон a и c .

Чтобы посчитать площадь треугольника вспомним, что это половина площади параллелограмма. Тогда

$$S = \frac{1}{2}[r(s + \varepsilon) - r(s), r(s) - r(s - \varepsilon)] = \dots$$

Остается найти все значения и подставить их в формулу $R = \frac{abc}{4S}$. В этой задаче можно увидеть еще один способ определения кривизны: геометрический (через соприкасающиеся окружности).

2. Семинар 2. Кручение

На этом семинаре мы будем заниматься кривыми в $\mathbb{R}^3$.

Кручение в произвольном параметре

Пусть t - произвольный параметр, тогда

$$\kappa(t) = \frac{(\dot{r}(t), \ddot{r}(t), \dddot{r}(t))}{|[\dot{r}(t), \ddot{r}(t)]|^2}.$$

Доказательство этой формулы проведем также, как доказательство формулы для кривизны. Сначала убедимся, что формула работает для натурального параметра, а затем сделаем переход от произвольного параметра к натуральному.

- 1) Пусть параметр натуральный. Тогда сведем все к реперу Френе:

$$\dot{r} = v, \quad \ddot{r} = \dot{v} = kn, \quad \dddot{r} = \dot{k}n + k\dot{n} = \dot{k}n + k(-kv + \kappa b).$$

Подставим найденные производные в формулу:

$$\frac{(v, kn, \dot{k}n + k(-kv + \kappa b))}{|[v, kn]|^2} \stackrel{=}{=}$$

Смешанное произведение трилинейно, поэтому мы можем разложить его на слагаемые. Первые два слагаемых $k\dot{k}(v, n, n)$ и $-k^3(v, n, v)$ равны нулю. Тогда останется одно слагаемое $k^2\kappa(v, n, b)$, где (v, n, b) - ориентированный объем единичного куба, и v, n, b - положительно ориентированная тройка, поэтому $(v, n, b) = 1$. В знаменателе вынесем k^2 из векторного произведения, а $[k, n] = b$:

$$\stackrel{=}{=} \frac{k^2\kappa(v, n, b)}{k^2|b|^2} = \kappa.$$

- 2) Пусть теперь параметр произвольный. Сделаем замену параметра $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$. На прошлом семинаре мы вычислили, что при такой замене $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$. Найдем теперь третью производную:

$$r t^3 = r s^3 + \left(st\right)^3 + r s^2 + t \left(st\right)^2 + r s^2 s t s t^2 + r s s t^3.$$

Перед тем, как подставить производные в формулу кручения, заметим, что можно представить смешанное произведение в виде

$(a\bar{v}, b\bar{w} + c\bar{v}, d\bar{u} + e\bar{v} + f\bar{w})$, где $\bar{v} = \frac{dr}{ds}$, $\bar{w} = \frac{d^2r}{ds^2}$, а $\bar{u} = \frac{d^3r}{ds^3}$. Тогда, так как

ориентированный объем равен нулю, если два вектора пропорциональны, в смешанном произведении останется только $abd(\bar{v}, \bar{w}, \bar{w})$. Теперь подставим все необходимое в формулу кручения:

$$\frac{\left(\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \frac{d^3r}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right]\right|^2} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \left(\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \frac{d^3r}{ds^3}\right)}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \left|\left[\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}\right]\right|^2} = \kappa.$$

Мы доказали, что кручение не меняется при замене параметра, то есть это дифференциальный инвариант.

Кривизна и кручение винтовой линии

Как мы уже знаем, кривизна и кручение не меняются при сдвигах и вращениях кривой. Будем считать, что ось винтовой линии - ось z .

Винтовая линия характеризуется радиусом R и шагом (высота, на которую мы поднимаемся при повороте на 2π) h . Тогда параметризация винтовой линии имеет вид $r(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)$. Проверим, является ли параметр t натуральным: $\dot{r}(t) = (-R \sin t, R \cos t, h)$ и $|\dot{r}| = \sqrt{R^2 + h^2}$. В общем случае это выражение не равно 1, но так как это всегда константа, то мы легко сможем перейти к натуральному параметру. Введем новую параметризацию:

$$r(s) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

Теперь посчитаем производные:

$$\dot{r}(s) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

$$\ddot{r}(s) = \left(-\frac{R}{R^2 + h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, -\frac{R}{R^2 + h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, 0 \right).$$

Посчитаем кривизну:

$$k = |\ddot{r}(s)| = \frac{R}{R^2 + h^2}.$$

Чтобы посчитать кручение, разберемся с векторами репера Френе: $v = \dot{r}$,

$$n = \frac{\ddot{r}}{k} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, 0 \right),$$

$$\dot{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, -\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, 0 \right).$$

Остается найти b . Введем для удобства обозначение $\alpha = \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$. Тогда

$$b = [v, n] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \sin \alpha & \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cos \alpha & \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \begin{pmatrix} h \sin \alpha, -h \cos \alpha, R \end{pmatrix}.$$

Мы нашли все необходимое для вычисления кручения:

$$\kappa = \frac{1}{R^2 + h^2} (h \sin^2 \alpha + h \cos^2 \alpha) = \frac{h}{R^2 + h^2}.$$

Натуральные уравнения кривой

Попробуем решить некоторые натуральные уравнения кривой:

- 1) Кривизна $k(s) = k_0 > 0$ постоянна в $\mathbb{R}^2$.
- 2) Кривизна $k(s) = k_0 > 0$ и кручение $\kappa(s) = \kappa_0$ постоянны в $\mathbb{R}^3$.

1. Мы знаем, что кривизна окружности постоянна и равна $\frac{1}{R}$, следовательно $R = \frac{1}{k_0}$. Воспользовавшись этим фактом мы сразу получим ответ: это окружность радиуса $\frac{1}{k_0}$.

2. Мы решали задачу про кривизну и кручение винтовой линии и выяснили, что у винтовой линии эти значения постоянны. Сведем нашу задачу к такому вопросу: можем ли мы найти винтовую линию с некоторым радиусом и некоторым шагом такую, что ее кривизна и кручение равны $k_0 = \frac{R}{R^2 + h^2}$ и $\kappa_0 = \frac{h}{R^2 + h^2}$? То есть, всегда ли можно найти такие R и h , чтобы эти уравнения были выполнены?

Попробуем поделить кривизну на кручение. Тогда мы получим соотношение $\frac{k_0}{\kappa_0} = \frac{R}{h}$, откуда $R = \frac{k_0}{\kappa_0} h$. Подставим найденное R в уравнение для κ_0 , чтобы получить уравнение только относительно h :

$$\kappa_0 \left(\frac{k_0^2}{\kappa_0^2} h^2 + h^2 \right) = h \Rightarrow \kappa_0 \left(\frac{k_0^2}{\kappa_0^2} + 1 \right) h^2 = h \Rightarrow h = \frac{1}{\kappa_0 \left(\frac{k_0^2}{\kappa_0^2} + 1 \right)} = \frac{\kappa_0}{k_0^2 + \kappa_0^2}.$$

В таком случае $R = \frac{k_0}{\kappa_0} \frac{\kappa_0}{k_0^2 + \kappa_0^2} = \frac{k_0}{k_0^2 + \kappa_0^2}$. В итоге, мы получили, что если мы хотим найти пространственную кривую с заданными постоянными кривизной и кручением, то необходимо взять винтовую линию с найденными радиусом и шагом.

Задача 1

Доказать, что если $k \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ и кривая (параметризация натуральная) лежит на сфере радиуса R , то

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2} \right). \quad (*)$$

Дополнительно, можно попробовать решить следующую задачу.

Упражнение*

Если $k \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ и $k' \neq 0$, то из (*) следует, что кривая лежит на сфере радиуса R .

Решение

Будем считать, что центр сферы лежит в начале координат. Идея решения состоит в том, чтобы использовать базис Френе. Тогда $r(s) = \alpha(s)v(s) + \beta(s)n(s) + \gamma(s)b(s)$. Это удобно, так как кривая постоянно лежит на сфере и $|r(s)|^2 = R^2$, а базис Френе ортонормированный, следовательно $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Необходимо найти α, β и γ .

Мы знаем, что кривая лежит на сфере. Запишем это условие в таком виде $(r, r) = R^2$ и продифференцируем его: $2(r, \dot{r}) = 0$. По определению $\dot{r} = v$, следовательно $(r, v) = 0$. Это так, потому что вектор скорости направлен по касательной к сфере, и он ортогонален радиусу. Из этого следует, что $\alpha = 0$, так как $(r, v) = \alpha$.

Попробуем еще раз продифференцировать тождество $(r, v) = 0$: $(\dot{r}, v) + (r, \dot{v}) = 0$. Из формул Френе мы знаем, что $\dot{v} = kn$. Тогда $(v, v) + (r, kn) = 0$. Вынесем k из второго произведения, а так как $(r, n) = \beta$, то в итоге мы получим, что $1 + k\beta = 0$, следовательно $\beta = -\frac{1}{k}$.

Мы уже нашли α и β . Попробуем таким же способом найти γ . Продифференцируем равенство $(v, v) + (r, kn) = 0$. При дифференцировании (v, v) станет равным нулю, поэтому остается только второе слагаемое $(\dot{r}, kn) + (r, \dot{kn} + k\dot{n}) = 0$. В силу формул Френе $\dot{n} = -kv + \varkappa b$, тогда $(v, kn) + \dot{k}(r, n) - k^2(r, v) + k\varkappa(r, b) = 0$. $(v, kn) = 0$, $(r, n) = \beta$, $(r, v) = 0$, а $(r, b) = \gamma$. В итоге, мы получили, что $\dot{k}\beta + k\varkappa\gamma = 0$, следовательно $\gamma = \frac{\dot{k}}{k^2\varkappa}$. Подставим найденные α, β и γ в $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$:

$$R^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{\dot{k}^2}{k^4\varkappa^2} = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2} \right).$$

Задача 2

Доказать, что

- 1) Если $k = 0$, то это прямая.
- 2) Если $\kappa = 0$, то эта кривая плоская (находится в $\mathbb{R}^3$, но есть плоскость, в которой эта кривая лежит).
- 3) Если кривая лежит на сфере, и ее кривизна постоянна, то это окружность.

Решение

1. Если $k = 0$, то $|\ddot{r}(s)| = 0$, а длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда сам вектор равен нулю, то есть $\ddot{r}(s) = 0$. Проинтегрируем это тождество, которое, на самом деле, содержит в себе три уравнения относительно трех координат $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$. Тогда мы получим, что $\dot{r}(s) = A$, где A - постоянная точка. Проинтегрировав еще раз, мы получим уравнение прямой $r(s) = B + As$.

2. Если кручение равно нулю, то это значит, что кручение определено, значит, у нас есть базис Френе и мы можем воспользоваться формулами Френе. Из третьей формулы Френе $\dot{b} = -\kappa n$ мы можем понять, что вектор $b = b_0$ постоянный. Попробуем найти плоскость, в которой лежит наша кривая. Эта плоскость ортогональна вектору b , но таких плоскостей очень много. Рассмотрим функцию $f(s) = (r(s) - r(s_0), b_0)$, $f(s_0) = 0$. Тогда $\dot{f}(s) = (\dot{r}, b_0) = (v, b_0) = 0$. Функция f равна нулю в некоторой точке и ее производная равна нулю, значит, $f(s) \equiv 0$. Тогда $(r(s) - r(s_0), b_0) = 0$. Из этого следует, что $(r(s), b_0) = (r(s_0), b_0)$, то есть $r(s)$ лежит в плоскости. Последнее тождество - линейное соотношение на координаты r , а это значит, что $xb_0^1 + yb_0^2 + zb_0^3 = c$ - плоскость, в которой лежит наша кривая, где $b_0 = (b_0^1, b_0^2, b_0^3)$, а c - константа.

3. Пусть центр сферы лежит в начале координат. Тогда $(r, r) = R^2$, и после дифференцирования мы получим, что $(r, v) = 0$. Снова продифференцируем последнее выражение $(v, v) + (r, \kappa n) = 0$, откуда следует, что $(r, n) = -\frac{1}{\kappa}$, где κ - константа. Продифференцируем еще раз $(v, n) + (r, -\kappa v + \kappa b) = 0$. Так как $v \perp n$, то останется только $\kappa(r, b) = 0$. Далее, могут возникнуть два случая:

- 1) Если $\kappa = 0$, то кривая плоская. Но так как эта кривая лежит на сфере, значит, кривая лежит на пересечении сферы и некоторой плоскости, то есть эта кривая - окружность.
- 2) Если $(r, b) = 0$, то r пропорционально n , и мы знаем, что $(r, n) = -\frac{1}{\kappa}$, следовательно $r = -\frac{1}{\kappa}n$. Продифференцировав это выражение, мы получим, что $v = \frac{1}{\kappa}kv - \frac{1}{\kappa}\kappa b$, то есть $\kappa = 0$ - это случай 1.

3. Семинар 3. Основные поверхности

Двумерная сфера

Сфера задается в неявном виде уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ или $F(x, y, z) = 0$, где $F = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. На лекции мы выяснили, что это гладкая, неявно заданная поверхность и обсудили, что ее можно задать параметрически, с помощью квадратного корня.

Комментарий

Параметрическое задание с помощью квадратного корня не очень популярное, в связи с неудобством дифференцирования корня. С другой стороны, такое задание в основном используется для открытой полусферы, так как мы не можем задать больший кусок сферы. Тогда возникает вопрос: можно ли задать всю сферу, как образ параметризованной поверхности? Вообще говоря нет. Представим, что у нас есть некоторая плоская область, которую мы отображаем на сферу. Такое отображение не может быть взаимно-однозначным, так как если выколоть точку на сфере, то любую замкнутую кривую можно стянуть в точку. Если же выколоть точку на плоской области, то любую замкнутую кривую, окружающую эту точку, стянуть уже не получится.

Рассмотрим некоторые более удобные виды параметризации сферы.

Тригонометрическая параметризация А.

Расположим центр сферы в начале системы координат $Oxyz$. У точки A на сфере есть проекция на плоскость xy . Обозначим ее через A' . Пусть $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (широта) - угол между OA и OA' . Тогда $z = R \sin \theta$.

Введем теперь $\varphi \in [0, 2\pi)$ (долгота) - угол между OA' и осью Ox . Тогда параметризация сферы будет выглядеть следующим образом:

$$r(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

Такая параметризация часто используется в географии и астрономии.

Тригонометрическая параметризация Б.

Эта параметризация чаще используется в физике и механике, чем в геометрии. Она отличается тем, что угол $\theta \in (0, \pi)$ отсчитывается теперь от оси z . В таком случае

параметризация выглядит так:

$$r(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

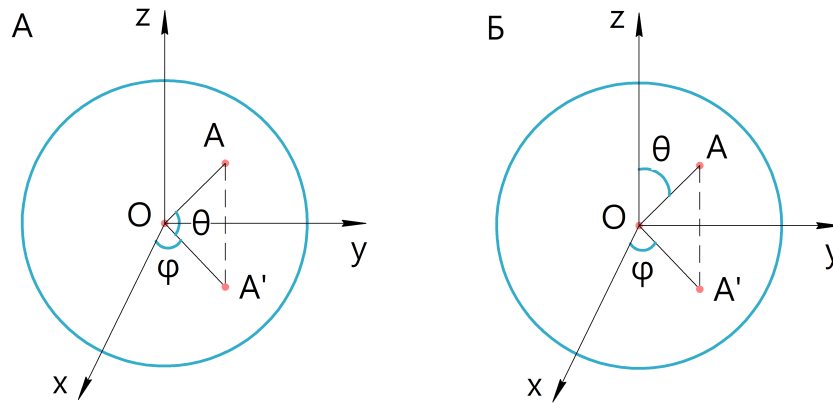


Рис. 3.1 Тригонометрическая параметризация сферы

Мы чаще будем пользоваться тригонометрической параметризацией A: $r(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta)$. Проверим, что эта параметризация гладкая действительно гладкая и регулярная.

Эта параметризация, очевидно, гладкая, так как мы пользуемся тригонометрическими функциями: гладкими и бесконечно дифференцируемыми.

Проверим теперь регулярность. Для этого посчитаем необходимые производные:

$$r_\varphi = (-R \sin \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \cos \theta, 0), \quad r_\theta = (-R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta).$$

Посмотрим, где может нарушаться линейная независимость.

- 1) Если $\cos \theta \neq 0$, то r_φ и r_θ линейно независимы, значит, параметризация регулярная.
- 2) Пусть теперь $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда $r_\varphi = (0, 0, 0)$ и регулярности, очевидно, нет.

Параметризация регулярна везде, кроме точек $\pm \frac{\pi}{2}$ (северного и южного полюсов). В этих точках необходимо брать другую параметризацию.

Вектора r_φ и r_θ порождают касательное пространство. Рассмотрим точку A, в которой $\varphi = 0$, а $\theta = \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$r_\varphi(A) = \left(0, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad r_\theta(A) = \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, 0, \frac{R}{\sqrt{2}}\right).$$

Значит, касательное пространство к сфере в точке A порождается этими двумя векторами:

$$T_A S^2 = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ R \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{R}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ R \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$$

Стереографическая проекция

Рассмотрим стереографическую проекцию из северного полюса. Возьмем сферу и плоскость, проходящую через центр сферы. Выберем произвольную точку A на сфере и проведем прямую через точку N (северный полюс) и точку A . Эта прямая пересечет нашу плоскость в некоторой точке B . Тогда точка B - стереографическая проекция северного полюса от точки A : $p_N(A) = B$. Стереографическая проекция из северного полюса - это функция такого вида: $p_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

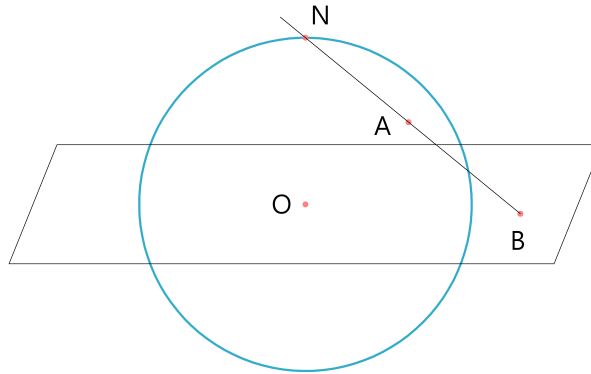


Рис. 3.2 Стереографическая проекция

Попробуем вывести явные формулы. Пусть R - радиус сферы. Тогда $N = (0, 0, R)$, и пусть $A = (x_0, y_0, z_0)$. Напишем уравнение прямой NA в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 0 + x_0 t \\ y = 0 + y_0 t \\ z = R + (z_0 - R)t \end{cases}$$

Точка B лежит на этой прямой и координата z точки B равна 0. Подставим $z = 0$ в $z = R + (z_0 - R)t$ и получим, что $t = \frac{R}{R - z_0}$. Запишем x и y координаты точки B : $x = \frac{x_0 R}{R - z_0}$, $y = \frac{y_0 R}{R - z_0}$. Теперь мы можем отождествить плоскость, пусть она имеет координаты (u, v) , с нашей плоскостью $(u, v, 0)$:

$$u = \frac{Rx}{R - z}, \quad v = \frac{Ry}{R - z}.$$

Эти формулы задают стереографическую проекцию: по точке (x, y, z) на сфере можно найти координаты (u, v) точки на плоскости.

Попробуем теперь решить задачу в обратную сторону: найти точку на сфере по координатам точки на плоскости. Пусть $B = (u, v, 0)$. Тогда прямая NB устроена следующим образом:

$$\begin{cases} x = 0 + ut \\ y = 0 + vt \\ z = R + (-R)t \end{cases}$$

Необходимо найти точку A . Это точка сферы, лежащая на прямой NB . Подставим точку с координатами $(ut, vt, R + (-R)t)$ в уравнение сферы: $u^2t^2 + v^2t^2 + (R - Rt)^2 = R^2$. Раскроем скобку и приведем подобные, тогда $u^2t^2 + v^2t^2 + R^2t^2 - 2R^2t = 0$. Мы можем поделить это выражение на t , так как $t = 0$ отвечает за точку N . Тогда $(u^2 + v^2 + R^2)t = 2R^2$. Осталось выразить t через u, v и R и подставить в уравнения прямой NB . В итоге:

$$x = \frac{2uR^2}{R^2 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2vR^2}{R^2 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{R(u^2 + v^2 - R^2)}{R^2 + u^2 + v^2}$$

Такая параметризация сферы называется параметризацией с помощью стереографической проекции северного полюса. Аналогично можно получить стереографическую проекцию из южного полюса, которая является параметризацией сферы без южного полюса. Используя две эти параметризации, можно покрыть всю сферу.

Упражнение

Проверить регулярность.

Тор вращения

Тор вращения определяется как параметрическая поверхность.

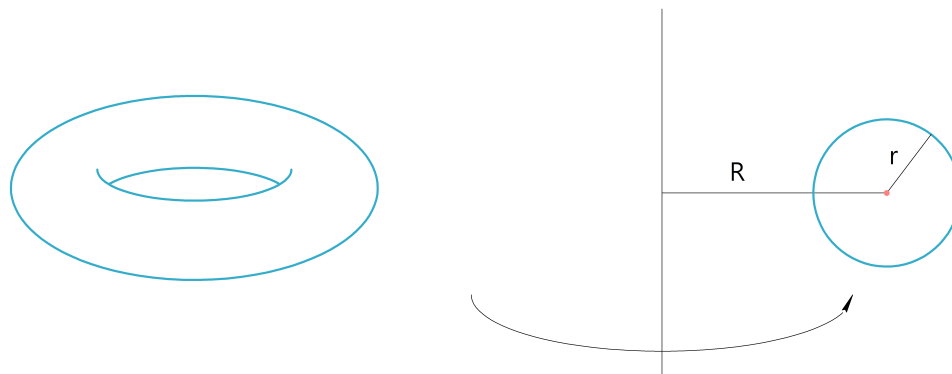


Рис. 3.3 Тор вращения

Построим эту параметризацию. Рассмотрим сначала окружность радиуса r : $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Сдвинув эту окружность на R вдоль оси x мы получим $x = R + r \cos \theta$, а z останется тем же. Теперь повернем окружность на угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ вокруг оси z .

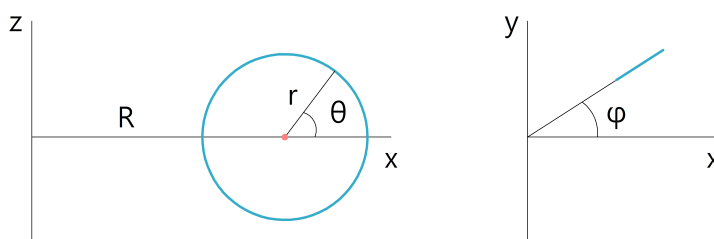


Рис. 3.4

В итоге, мы получим:

$$r(\varphi, \theta) = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

Эта параметризация гладкая. Проверим регулярность:

$$r_\varphi = (-(R + r \cos \theta) \sin \varphi, (R + r \cos \theta) \cos \varphi, 0), \quad r_\theta = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Если $\cos \theta \neq 0$ (то есть $\theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$), то параметризация, очевидно, регулярная. Подставим теперь $\cos \theta = 0$: $r_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)$, $r_\theta = (\mp r \cos \varphi, \mp r \sin \varphi, 0)$.

Эти два вектора линейно независимы. Значит, для любых φ и θ параметризация регулярная.

Попробуем теперь задать тор в неявном виде. Посмотрим на параметрические уравнения тора, как на систему с пятью неизвестными: x, y, z, φ, θ . Исключив из нее φ и θ , мы получим три уравнения на x, y, z . Воспользуемся тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Чтобы исключить φ , необходимо возвести в квадрат и сложить уравнения на x и y :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (R + r \cos \theta)^2 \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

Теперь прибавим к первому уравнению квадрат второго: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2Rr \cos \theta + r^2$. Чтобы исключить полностью θ сделаем следующее: перенесем R^2 и r^2 в левую часть, возведем все выражение в квадрат и прибавим z^2 с соответствующим множителем:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + (2Rz)^2 = 4R^2r^2 \cos^2 \theta + 4R^2r^2 \sin^2 \theta = 4R^2r^2.$$

Значит, неявное уравнение тора имеет следующий вид:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + (2Rz)^2 - 4R^2r^2 = 0.$$

Из курса аналитической геометрии мы знаем, что поверхность, которая задается алгебраическим уравнением степени n , может иметь не больше, чем n точек пересечения с прямой. Тор может иметь 4 точки пересечения с прямой, поэтому уравнение, описывающее тор, не может быть меньше 4ой степени, что мы и получили. Это уравнение гладкое. Проверим регулярность. Для этого необходимо найти градиент. Пусть $F = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + (2Rz)^2 - 4R^2r^2$, а $\alpha = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2$, тогда

$$\text{grad } F = (2\alpha 2x, 2\alpha 2y, 2\alpha 2z + 4R^2z).$$

Ситуации $x = y = 0$ не может быть, так как эта ситуация отвечает оси z . Тогда, если $x^2 + y^2 + z^2 \neq R^2 + r^2$, то $\text{grad } F \neq 0$. Ситуации $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + r^2$ отвечают верхняя и нижняя окружности тора, а там $z = \pm r$, значит, $\text{grad } F \neq 0$. Условие регулярности $\text{grad } F \neq 0$ выполнено.

4. Семинар 4. Первая и вторая квадратичные формы

Сфера

Возьмем сферу радиуса R , и воспользуемся тригонометрической параметризацией A с прошлого семинара: $r(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta)$.

Нам нужно найти базис в касательном пространстве:

$$r_\varphi = (-R \sin \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \cos \theta, 0), \quad r_\theta = (-R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta).$$

Найдем теперь коэффициенты первой квадратичной формы. φ - это первая координата, θ - вторая, тогда

$$\begin{aligned} E &= (r_\varphi, r_\varphi) = R^2 \cos^2 \theta \\ F &= (r_\varphi, r_\theta) = 0 \\ G &= (r_\theta, r_\theta) = R^2 \end{aligned} \Rightarrow I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Далее, найдем нормаль. Для этого посчитаем векторное произведение r_φ и r_θ :

$$\begin{aligned} [r_\varphi, r_\theta] &= R^2 \cos \theta \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \cos \theta (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

$$m = \frac{[r_\varphi, r_\theta]}{|[r_\varphi, r_\theta]|} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta).$$

Для вычисления второй квадратичной формы найдем вторые производные:

$$\begin{aligned} r_{\varphi\varphi} &= (-R \cos \varphi \cos \theta, -R \sin \varphi \cos \theta, 0) \\ r_{\varphi\theta} &= (R \sin \varphi \sin \theta, -R \cos \varphi \sin \theta, 0) \\ r_{\theta\theta} &= (-R \cos \varphi \cos \theta, -R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= (r_{\varphi\varphi}, m) = -R \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - R \sin^2 \varphi \cos^2 \theta = -R \cos^2 \theta \\ M &= (r_{\varphi\theta}, m) = R \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - R \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta = 0 \\ N &= (r_{\theta\theta}, m) = -R \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - R \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - R \sin^2 \theta = -R \end{aligned}$$

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

Позже, когда мы будем обсуждать формулу Эйлера, мы увидим, что из некоторых простых геометрических соображений можно вывести вид второй квадратичной

формы из первой.

С помощью первой квадратичной формы можно вычислять различные длины, углы, расстояния и т.д. Попробуем сейчас вычислить длину параллели, широта которой 45° , то есть $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда $\dot{\varphi} = 1$, $\dot{\theta} = 0$, и следовательно

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\theta} \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}} dt, \quad \text{где } \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi = t.$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{2}} dt = \frac{2\pi R}{\sqrt{2}} = \pi R\sqrt{2}.$$

Теперь попробуем найти площадь всей сферы по формуле с лекции. Заметим, что $\sqrt{\det I} = \sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos \theta$, так как $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, значит, мы можем вынести $\cos$ из под корня. Тогда

$$S(S^2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2 (1 - (-1)) = 4\pi R^2.$$

Тор

Параметризацию тора мы вывели на прошлом семинаре:

$$r(\varphi, \theta) = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta).$$

Также, как и для сферы, найдем первую и вторую квадратичные формы. Сначала необходимо найти базисные вектора в касательном пространстве:

$$r_\varphi = (-(R + r \cos \theta) \sin \varphi, (R + r \cos \theta) \cos \varphi, 0), \quad r_\theta = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Вычислим теперь коэффициенты первой квадратичной формы, а затем и саму форму:

$$\begin{aligned} E &= (r_\varphi, r_\varphi) = (R + r \cos \theta)^2 \\ F &= (r_\varphi, r_\theta) = 0 \\ G &= (r_\theta, r_\theta) = r^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Нормаль можно найти из геометрических соображений: она коллинеарна радиус-вектору окружности, которая получается при разрезе тора. Но мы воспользуемся формулой:

$$[r_\varphi, r_\theta] = (R + r \cos \theta) r \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{vmatrix} =$$

$$= r(R + r \cos \theta)(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta).$$

Так как $|(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)| = 1$, то $m = \frac{[r_\varphi, r_\theta]}{||[r_\varphi, r_\theta]||} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$.

Теперь найдем вторые производные для коэффициентов второй квадратичной формы:

$$r_{\varphi\varphi} = (-(R + r \cos \theta) \cos \varphi, -(R + r \cos \theta) \sin \varphi, 0)$$

$$r_{\varphi\theta} = (r \sin \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$r_{\theta\theta} = (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$$

$$L = (r_{\varphi\varphi}, m) = (R + r \cos \theta)(-\cos \theta \cos^2 \varphi - \cos \theta \sin^2 \varphi) = -(R + r \cos \theta) \cos \theta$$

$$M = (r_{\varphi\theta}, m) = 0$$

$$N = (r_{\theta\theta}, m) = r(-\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta) = -r$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R + r \cos \theta) \cos \theta & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

Поверхность вращения

Сфера и тор - частные случаи поверхности вращения. Посмотрим, что происходит в случае произвольной поверхности вращения. Пусть вращение происходит вокруг оси x .

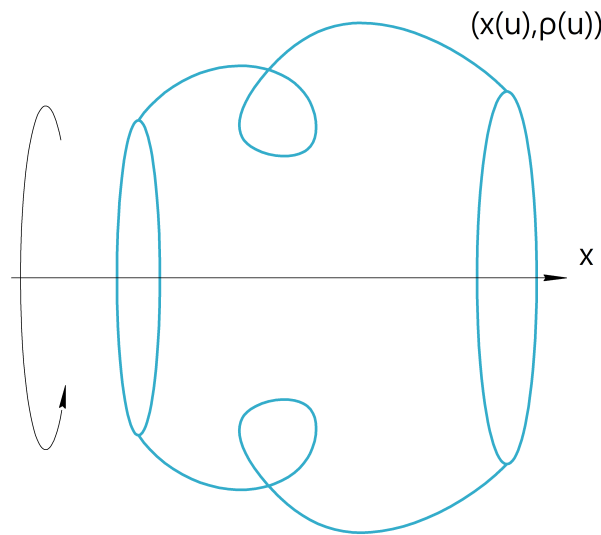


Рис. 4.1 Поверхность вращения

Запишем параметризацию: $r(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi)$. Производные по u будем отмечать штрихом. Тогда:

$$r_u = (x', \rho' \cos \varphi, \rho' \sin \varphi), \quad r_\varphi = (0, -\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$$

Тогда мы можем вычислить первую квадратичную форму:

$$\begin{aligned} E &= (x')^2 + (\rho')^2 \\ F &= 0 \\ G &= \rho^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad I = \begin{pmatrix} (x')^2 + (\rho')^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

Дальше все аналогично сфере и тору: ищем нормаль, считаем коэффициенты второй квадратичной формы, а затем и саму форму:

$$[r_u, r_\varphi] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & \rho' \cos \varphi & \rho' \sin \varphi \\ 0 & -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = (\rho' \rho, -\rho x' \cos \varphi, -\rho x' \sin \varphi).$$

$$m = \frac{[r_\varphi, r_\theta]}{||[r_\varphi, r_\theta]||} = \frac{(\rho', -x' \cos \varphi, -x' \sin \varphi)}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}}.$$

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (x'', \rho'' \cos \varphi, \rho'' \sin \varphi) \\ r_{u\varphi} &= (0, -\rho' \sin \varphi, \rho' \cos \varphi) \\ r_{\varphi\varphi} &= (0, -\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$L = (r_{uu}, m) = \frac{\rho' x'' - x' \rho'' \cos^2 \varphi - x' \rho'' \sin^2 \varphi}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}} = \frac{\rho' x'' - x' \rho''}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}}$$

$$M = (r_{u\varphi}, m) = 0$$

$$N = (r_{\varphi\varphi}, m) = \frac{\rho x' \cos^2 \varphi + \rho x' \sin^2 \varphi}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}} = \frac{\rho x'}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}}$$

$$II = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}} \begin{pmatrix} \rho' x'' - x' \rho'' & 0 \\ 0 & \rho x' \end{pmatrix}$$

5. Семинар 5. Гауссова и средняя кривизны

Гауссова и средняя кривизны сферы

На прошлом семинаре мы считали первую и вторую квадратичные формы для сферы с параметризацией $r(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta)$:

$$I = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} -R \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

Комментарий

Разберемся, почему I имеет именно такой вид. На сфере у нас есть параллели и меридианы. Вектора r_φ и r_θ - касательные вектора к параллелям и меридианам соответственно. Так как параллели и меридианы ортогональны на сфере, то на побочной диагонали матрицы стоят нули. На последнем месте стоит R^2 , так как r_θ - касательный вектор к меридиану (окружности радиуса R), следовательно его длина равна R . На первом месте стоит $R^2 \cos^2 \theta$, так как радиус параллели зависит от угла θ (чем ближе к экватору, тем больше радиус параллели).

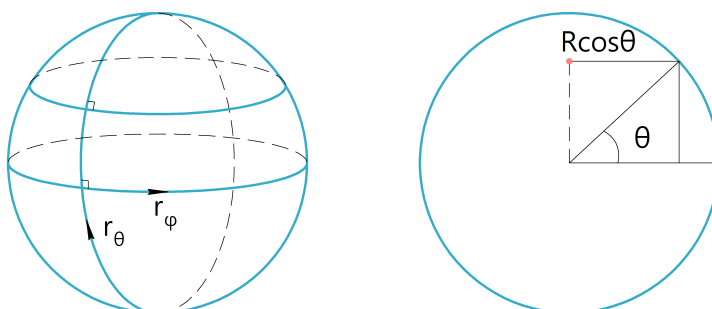


Рис. 5.1

Чтобы найти главные кривизны, необходимо посчитать выражение $\det(II - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -R \cos^2 \theta - \lambda R^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & -R - \lambda R^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{R}$$

Тогда гауссова кривизна $K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{R^2}$, а средняя кривизна $H = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2}{R}$. На лекции мы считали кривизны через формулу Эйлера и средняя кривизна получилась с другим знаком. Это зависит от выбора нормального вектора. В этом случае мы взяли внешнюю нормаль, а когда считали по формуле Эйлера, нормаль была внутренней.

Посмотрим, куда направлена нормаль средней кривизны: $\frac{Hm}{|Hm|}$. Так как $H < 0$, то на сфере нормаль средней кривизны направлена внутрь.

Так как в этом случае матрицы квадратичных форм диагональные, то найти K и H через формулы с определителем и следом довольно просто. Попробуем это сделать:

$$K = \frac{\det \Pi}{\det I} = \frac{R^2 \cos^2 \theta}{R^4 \cos^2 \theta} = \frac{1}{R^2}$$

$$H = \text{tr} (\Pi \ I^{-1}) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} -R \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2 \cos^2 \theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} = -\frac{2}{R}$$

Поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами

Опишем поверхности с $K = H = 0$. В этом случае $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Это значит, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В базисе w_1, w_2 Π имеет нулевую матрицу. Тогда и в любом другом базисе

$$\Pi = C^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в том числе и в базисе r_u, r_v . Тогда $L = (r_{uu}, m) = 0$, $N = (r_{uv}, m) = 0$, $M = (r_{vv}, m) = 0$.

Когда мы изучали кривые с нулевым кручением, мы выяснили, что такие кривые оказывались плоскими, потому что они всегда лежали в плоскости, ортогональной постоянной бинормали. Проверим, постоянная ли нормаль в нашем случае.

Поле единичных нормалей состоит из единичных векторов. У нас была лемма: если длина вектора постоянна и равна 1, то его вектор скорости ортогонален самому вектору. Рассмотрим две ситуации. Возьмем кривую $m(u, v_0)$, где v_0 - фиксирована. Тогда вектор скорости $m_u \perp m$. Теперь зафиксируем u , тогда $m_v \perp m$.

Далее, продифференцируем по u выражение $(r_u, m) = 0$ (произведение равно нулю, так как r_u - касательный вектор, а m - нормальный): $(r_{uu}, m) + (r_u, m_u) = 0$. Так как $(r_{uu}, m) = L = 0$, то $r_u \perp m_u$. Теперь продифференцируем $(r_v, m) = 0$ по u : $(r_{uv}, m) + (r_v, m_u) = 0$, тогда $r_v \perp m_u$. Мы получили, что $m_u \perp r_u$ и $m_u \perp r_v$. Но мы также знаем, что $m_u \perp m$. r_u, r_v - базис в касательной плоскости, а если добавить к нему m , то мы получим базис во всем пространстве, следовательно $m_u = 0$. Аналогично $m_v = 0$, значит, $m \equiv \text{const}$, то есть у поверхности с $K = H = 0$ вектор нормали постоянный.

Рассмотрим функцию $f(u, v) = (r(u, v) - r(u_0, v_0), m)$. $f(u_0, v_0) = 0$. Продифференцируем эту функцию по u : $f_u = (r_u, m) = 0$. Аналогичная ситуация при дифференцировании по v . Значит, $f = (r(u, v) - r(u_0, v_0), m) \equiv \text{const}$. Если записать последнее тождество как линейное уравнение через x, y, z , мы получим уравнение плоскости (или части плоскости).

Интегральное среднее нормальных кривизн

Найти интегральное среднее нормальных кривизн со знаком по всем касательным векторам в данной точке.

Мы хотим проинтегрировать нормальную кривизну как функцию от угла, то есть посчитать

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{k}_n(\varphi) d\varphi.$$

Эта задача сводится к вычислению интеграла. Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{k}_n(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cos^2 \varphi) d\varphi \equiv$$

Воспользуемся формулой для косинуса двойного угла: $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$. Тогда

$$\equiv \lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 2\varphi d\varphi = \lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 2H.$$

Гауссова и средняя кривизны поверхности вращения

Возьмем параметризацию с прошлых семинаров: $r(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi)$.

$$I = \begin{pmatrix} (x')^2 + (\rho')^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \quad II = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}} \begin{pmatrix} \rho' x'' - x' \rho'' & 0 \\ 0 & \rho x' \end{pmatrix}$$

Гауссову кривизну найдем с помощью определителей квадратичных форм:

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{(x'' \rho' - x' \rho'') \rho x'}{((x')^2 + (\rho')^2)^2 \rho^2}$$

Для средней кривизны воспользуемся формулой через след:

$$H = \text{tr}(\text{II } \Gamma^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}} \left(\frac{x''\rho' - x'\rho''}{(x')^2 + (\rho')^2} + \frac{\rho x'}{\rho^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho((x')^2 + (\rho')^2)^{\frac{3}{2}}} (x''\rho'\rho - x'\rho''\rho + (x')^3 + x'(\rho')^2)$$

Заметим, что мы не считали, куда направлены главные направления и главные кривизны, но в этом нет необходимости. Рассмотрим произвольную поверхность вращения и сечение плоскостью через точку на этой поверхности.

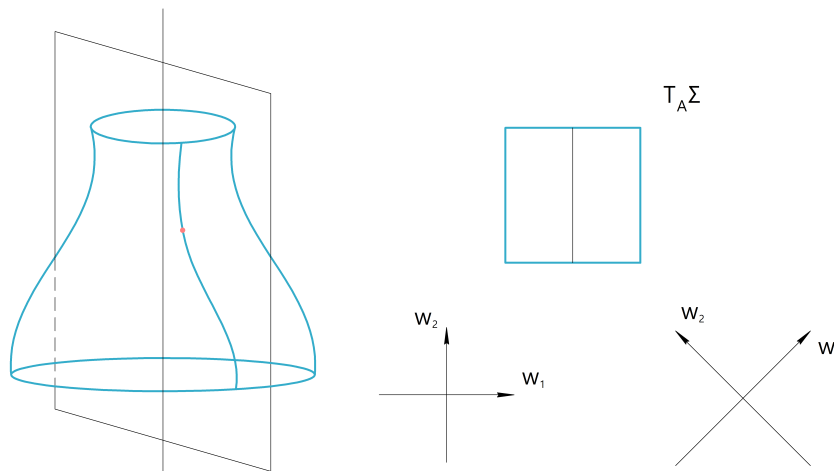


Рис. 5.2

Возьмем в этой точке касательную плоскость $T_A \Sigma$, на которой все инвариантно относительно отражения, так как поверхность вращения симметричная.

Какие есть варианты расположения главных направлений? На самом деле, варианта два: либо одно из направлений ортогонально плоскости отражения (w_1 - касательное к параллели), а другое направлено вдоль плоскости отражения (w_2 - касательное к меридиану); либо при $\lambda_1 = \lambda_2$ может возникнуть частный случай, когда направления лежат под углом к плоскости отражения.

Поверхности вращения нулевой средней кривизны

С помощью полученных формул решим одну задачу: описать поверхности вращения нулевой средней кривизны.

В геометрии есть минимальные поверхности. Они устроены таким образом, что если взять небольшой контур на поверхности и пошевелить поверхность внутри этого контура (вне контура поверхность остается прежней), то площадь будет только увеличиваться. Оказывается, что минимальная поверхность - в точности поверхность вращения нулевой средней кривизны.

Заметим, что наша параметризация немного избыточная. Сейчас мы вращаем кривую, заданную параметрически как $x(u), \rho(u)$. На самом деле, локально кривую можно задать как график $\rho = \rho(x)$. В таком случае $x(u) \equiv u$, и формула для средней кривизны упростится. Тогда условие $H = 0$ будет эквивалентно условию:

$$-\rho''\rho + 1 + (\rho')^2 = 0.$$

Для описания поверхности вращения нулевой кривизны необходимо решить это уравнение.

Замечание

Одно решение мы здесь потеряли. Это случай, когда $x(u) \neq u$, а $x(u) = \text{const}$. Когда мы вращаем такую кривую, она будет заметать плоскость. Плоскость - это тоже поверхность вращения нулевой средней кривизны.

Вернемся к решению уравнения. Это нелинейное ОДУ 2-го порядка. В общем случае решение такого уравнения невозможно, но наше уравнение специфическое: оно не зависит явно от u , то есть оно автономное. Для решения автономных нелинейных ОДУ необходимо понизить степень. Пусть $\rho' = f(\rho)$, тогда

$$\rho'' = \frac{d}{du}\rho' = \frac{d}{du}f(\rho) = \frac{df}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = f\frac{df}{d\rho}.$$

Подставим замену в наше уравнение:

$$-ff\rho + 1 + f^2 = 0.$$

Теперь мы можем разделить переменные и получить, что

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{f df}{1 + f^2} \Rightarrow \ln \rho = \frac{1}{2} \ln(1 + f^2) \Rightarrow f = \sqrt{C\rho^2 - 1}.$$

Вспомним теперь, что $f = \frac{d\rho}{du}$, и получим уравнение $\frac{d\rho}{\sqrt{C\rho^2 - 1}} = du$. Интегрирование этого уравнения оставляется в качестве упражнения. Ответом к этой задаче будет катеноид - поверхность, которая получается при вращении графика гиперболического косинуса.

6. Семинар 6. Задачи на производные

Задача 1. Производная функции вдоль векторного поля

Найти $\partial_X f$. Рассмотрим окружность $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, тогда φ - локальная координата. Касательное векторное поле $X = r_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$.

Возьмем функцию $f = y$ и вычислим производную в локальных и в глобальных координатах.

Локальные координаты

Наше векторное поле уже дано в локальных координатах - это $1 \cdot r_\varphi$, а функция задана в глобальных координатах, поэтому перепишем ее в локальных: $f = y = \sin \varphi$. Тогда

$$\partial_X f = \partial_{r_\varphi} \sin \varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin \varphi = \cos \varphi.$$

Глобальные координаты

Мы обсуждали, что если мы хотим сделать вычисления с векторным полем на поверхности в глобальных координатах, то необходимо найти какое-то продолжение в окрестность окружности. Рассмотрим векторное поле $(-y, x)$, которое отвечает вращениям, то есть это касательное поле к соответствующей окружности в каждой точке. В самом деле, при $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ это поле превращается в $(-\sin \varphi, \cos \varphi) = r_\varphi$. Тогда

$$\partial_X f = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = -y \cdot 0 + x \frac{\partial y}{\partial y} = x = \cos \varphi.$$

Задача 2. Коммутатор

Рассмотрим сферу с уже знакомой нам параметризацией

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

Возьмем два векторных поля в локальных координатах $X = \cos \theta r_\varphi$ (касательное векторное поле к параллелям, на северном полюсе обращается в 0), $Y = r_\theta$ (касательное векторное поле к меридианам). Найдём чему равен $[X, Y]$ двумя способами.

По определению

У нас есть функция $f(\varphi, \theta)$ и мы хотим посчитать

$$\partial_{[X,Y]}f = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f = \partial_{\cos \theta r_\varphi} \partial_{r_\theta} f - \partial_{r_\theta} \partial_{\cos \theta r_\varphi} f \quad \square$$

Вспомним, что $\partial_{r_u} = \frac{\partial}{\partial u}$, тогда $\partial_{r_\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}$. С $\partial_{\cos \theta r_\varphi}$ сделаем следующее: мы обсуждали, что производная вдоль вектора линейна по вектору. Тогда $\partial_{\cos \theta r_\varphi} = \cos \theta \partial_{r_\varphi}$.

$$\square \partial_{\cos \theta r_\varphi} f \theta - \partial_{r_\theta} \cos \theta f \varphi = \cos \theta \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta}} + \sin \theta f \varphi - \cos \theta \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta}} = \sin \theta \partial_{r_\varphi} f = \partial_{\sin \theta r_\varphi} f.$$

Значит, $[\cos \theta r_\varphi, r_\theta] = \sin \theta r_\varphi$.

По формуле

Пусть $u^1 = \varphi$, $u^2 = \theta$, тогда

$$[X, Y]^1 = \sum_j X^j Y^1 u^j - Y^j X^1 u^j \quad \square$$

Так как $X = \cos \theta r_\varphi$, то $X^1 = \cos \theta$ (координата при r_φ), $X^2 = 0$ (координата при r_θ). Аналогично $Y^1 = 0$, $Y^2 = 1$. Тогда

$$\square -Y^2 X^1 u^2 = -1(-\sin \theta) = \sin \theta.$$

$$[X, Y]^2 = \sum_j X^j Y^2 u^j - Y^j X^2 u^j = 0.$$

В итоге: $[X, Y] = \sin \theta r_\varphi$.

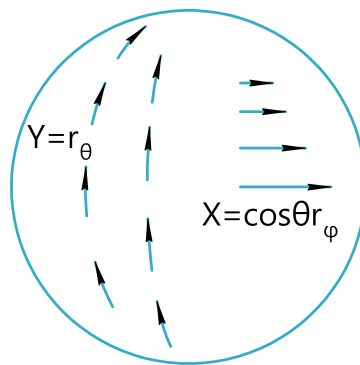


Рис. 6.1

Задача 3. Формулы Френе

Посмотрим на два вида формул Френе и сопоставим их. Известные формулы Френе имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{v} = kn \\ \dot{n} = -kv \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \partial_v v = kn \\ \partial_v n = -kv \end{cases}$$

Теперь выпишем формулы Френе с лекции:

$$\text{Касательное векторное поле: } \partial_X Y = P(\partial_X Y) + (\text{Id} - P)(\partial_X Y),$$

где $P(\partial_X Y)$ - касательная часть, которую мы обозначили как $\nabla_X Y$ и назвали ковариантной производной, $(\text{Id} - P)(\partial_X Y)$ - нормальная часть, которую мы обозначили как $B(X, Y)$ и назвали второй квадратичной формой.

$$\text{Нормальное векторное поле: } \partial_X \eta = P(\partial_X \eta) + (\text{Id} - P)(\partial_X \eta),$$

где $P(\partial_X \eta)$ - проекция на касательную часть, которую мы назвали оператором Вейнгартена $-W_\eta(X)$, $(\text{Id} - P)(\partial_X \eta)$ - нормальная часть, которую мы назвали ковариантной производной $\nabla_X \eta$. Сопоставим теперь эти формулы. Распишем $\partial_v v = kn$ (нормальную часть):

$$\partial_v v = \nabla_v v + B(v, v) = 0 + kn.$$

Также распишем $\partial_v n = -kv$:

$$\partial_v n = -W_n(v) + \nabla_v n = -kv + 0.$$

В итоге мы получили следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla_v v &= 0 \\ B(v, v) &= kn \\ W_n(v) &= kv \\ \nabla_v n &= 0 \end{aligned}$$

Задача 4. Тор Клиффорда

Мы еще не рассматривали касательные и нормальные пространства для поверхностей произвольной размерности (до этого были или кривые или двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$).

Рассмотрим тор Клиффорда - это декартово произведение окружностей:

$S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. Проще всего задать такой тор в неявном виде. Пусть в $\mathbb{R}^4$ есть переменные x, y, z, t , где x, y - переменные в одной плоскости, а z, t - в другой. Тогда зададим две окружности в каждой плоскости

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$$

Такая система задает тор Клиффорда. Убедимся, что это действительно гладкая и неявно заданная поверхность. Гладкость очевидна, проверим регулярность. Пусть $F^1 = x^2 + y^2 - 1$, $F^2 = z^2 + t^2 - 1$. Необходимо найти ранг матрицы из частных производных:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial t} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial t} \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2t \end{pmatrix}$$

Первая строка матрицы не может быть нулевой, так как $x^2 + y^2 = 1$. Аналогично вторая строка не может быть нулевой. Строки непропорциональны, следовательно $\text{rk} = 2$. Значит, это действительно гладкая неявно заданная поверхность.

Теперь разберемся с тем, как найти касательное пространство в точке. Мы обсуждали на лекции (когда доказывали, что коммутатор касательных векторных полей - снова касательное векторное поле), что если поверхность задана неявно, то ее касательное пространство ортогонально всем градиентам правых частей уравнений. Тогда

$$T_A \Sigma = \text{span}(\text{grad } F^1, \text{grad } F^2)^\perp \Rightarrow N_A \Sigma = \text{span} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)$$

Чтобы найти касательное пространство воспользуемся параметрическим заданием: $r(\varphi, \psi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi)$.

Тогда $r_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0)$, $r_\psi = (0, 0, -\sin \psi, \cos \psi)$ и $T_A \Sigma = \text{span}(r_\varphi, r_\psi)$.

Попробуем теперь найти метрику. Посчитаем первую квадратичную форму:

$$I = \begin{pmatrix} (r_\varphi, r_\varphi) & (r_\varphi, r_\psi) \\ (r_\varphi, r_\psi) & (r_\psi, r_\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В координатах φ и ψ метрика на торе Клиффорда евклидова, и она отличается от метрики на торе вращения.

Замечание

Скоро мы увидим, что гауссову кривизну можно считать по первой квадратичной форме (Theorema Egregium Гаусса).

В зависимости от набора локальных координат матрица первой квадратичной формы будет разная. Это одна и та же квадратичная форма, но записанная в разных базисах. Например, если взять евклидову метрику на плоскости, но записать ее в полярных координатах, то матрица уже не будет единичной, но это все равно метрика плоскости. А метрики на Клиффордовом торе и на торе вращения не могут быть сведены друг к другу выбором разных локальных координат.

Задача 5. Исследование сферы (оператор Вейнгартена, вторая квадратичная форма, ковариантная производная)

Возьмем сферу S^2 радиуса R :

$$r(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta).$$

Из геометрических соображений мы знаем, что вектор нормали к сфере m - единичный вектор пропорциональный r . Пусть нормаль внешняя, тогда

$$m = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta).$$

Проектор

Мы хотим понять, как устроены объекты на сфере, который мы обсуждали. Для этого поймем, как устроен проектор от вектора X .

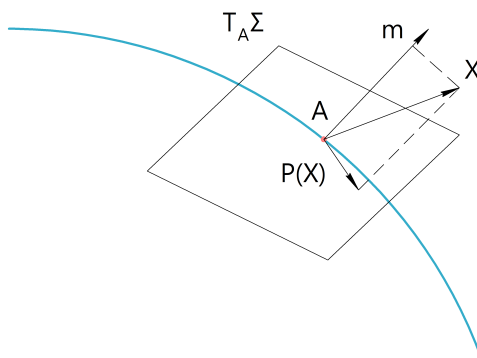


Рис. 6.2

Возьмем касательное пространство в точке на сфере. Нормальное пространство

порождено вектором m . Если мы хотим для некоторого вектора X проекцию $P(X)$, то необходимо вычесть проекцию X на нормальное направление:

$$P(X) = X - \frac{(X, m)}{(m, m)}m = X - (X, m)m.$$

Так устроено на сфере поле проекторов на касательное пространство.

Оператор Вейнгартена

По определению $W_m(X) = -P(\partial_X m)$. X - какой-то касательный вектор. Возьмем точку на северном полюсе сферы и направим m вверх из этой точки. Вектора X , выходящий из этой точки, и m образуют плоскость, которая пересекает сферу по окружности.

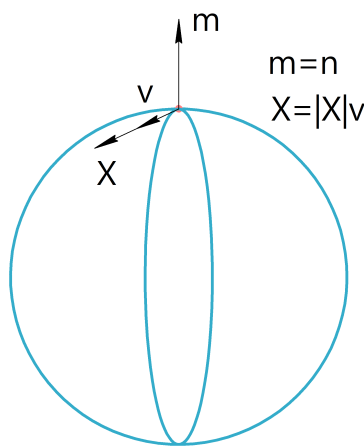


Рис. 6.3

Тогда

$$\partial_X m = \partial_{|X|v} n = |X| \partial_v n = -|X|kv = -\frac{1}{R}X.$$

Мы получили, что $\partial_X m = -\frac{1}{R}X$. Тогда $W_m(X) = \frac{1}{R}X$, то есть $W_m = \frac{1}{R}\text{Id}$.

Ковариантная производная

Вычислим ковариантную производную: $\nabla_X m = (\text{Id} - P)(\partial_X m)$, но мы выяснили, что $\partial_X m = -\frac{1}{R}X$ - касательная, соответственно ее нормальная часть равна нулю, поэтому $\nabla_X m = 0$.

То есть ковариантная производная от нормального вектора вдоль любого вектора X по определению равна нулю.

Вторая квадратичная форма

Попробуем посчитать $B(r_\varphi, r_\varphi)$. Мы знаем, что $r_\varphi = (-R \sin \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \cos \theta, 0)$. Тогда

$$\partial_{r_\varphi} r_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} r_\varphi = r_{\varphi\varphi} = (-R \cos \varphi \cos \theta, -R \sin \varphi \cos \theta, 0).$$

Теперь вычислим вторую квадратичную форму:

$$\begin{aligned} B(r_\varphi, r_\varphi) &= (\text{Id} - P)(\partial_{r_\varphi} r_\varphi) = (r_{\varphi\varphi}, m)m = (-R \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - R \sin^2 \varphi \cos^2 \theta)m = \\ &= -R \cos^2 \theta m. \end{aligned}$$

Можно вычислить ковариантную производную $\nabla_{r_\varphi} r_\varphi$ (это вычисление мы не доведем до ответа, но это возможно):

$$\begin{aligned} \nabla_{r_\varphi} r_\varphi &= P(\partial_\varphi \partial_\varphi) = r_{\varphi\varphi} - (r_{\varphi\varphi}, m)m = \\ &= (-R \cos \varphi \cos \theta, -R \sin \varphi \cos \theta, 0) + R \cos^2 \theta (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta) = \dots \end{aligned}$$

В будущем мы не будем считать ковариантные производные таким образом, а будем использовать более эффективные методы. Сейчас мы показали, что все эти вычисления можно выполнить напрямую по формулам.

7. Семинар 7. Ковариантная производная касательных полей

Символы Кристоффеля и формула для ковариантной производной

Вспомним формулу для ковариантной производной касательных полей. Для этого сначала напомним, что такое символы Кристоффеля.

Пусть у нас есть базис $e_1, \dots, e_k$ в касательных векторных полях. Тогда ковариантная производная $\nabla_{e_i} e_j$ - снова какое-то касательное векторное поле. Оно расписывается в соответствующем базисе и его координаты записываются через символы Кристоффеля $\Gamma_{ij}^l e_l$, e_l - разложение в базисе. Здесь подразумевается суммирование $\sum_{l=1}^k$. Тогда формула для ковариантной производной имеет вид:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lp} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j} \right).$$

В правой части подразумевается суммирование $\sum_{p=1}^k$. Эта формула верна только для частного случая $e_1 = r_{u^1}, \dots, e_k = r_{u^k}$. В случае произвольного базиса эта формула станет сложнее.

Напоминание

g_{ij} - коэффициенты первой квадратичной формы (компоненты метрики), $g_{ij} = (r_{u^i}, r_{u^j})$. В частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$: $g_{11} = E$, $g_{12} = F$, $g_{22} = G$. g^{lp} - элементы матрицы, обратной к матрице $g = (g_{ij})$.

Двумерная сфера

Будем рассматривать двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса 1. Возьмем уже знакомую нам параметризацию:

$$r(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \cos \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \cos \theta \\ z = \sin \theta \end{cases}$$

где $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - широта, $\varphi \in [0, 2\pi)$ - долгота. Эта параметризация регулярная везде, кроме северного и южного полюса.

Для использования нашей формулы, необходимо найти метрику (первую квадратичную форму). Посчитаем базисные векторы:

$$r_\varphi = (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0), \quad r_\theta = (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

Пусть $u^1 = \varphi$, $u^2 = \theta$, тогда $g_{11} = E = (r_\varphi, r_\varphi) = R^2 \cos^2 \theta$, $g_{12} = F = (r_\varphi, r_\theta) = 0$, $g_{22} = G = (r_\theta, r_\theta) = R^2$, следовательно

$$g = g(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислив обратную матрицу, мы можем выписать g^{ij} : $g^{11} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$. Напомним формулу, по которой мы будем вычислять символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lp} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j} \right).$$

В этой формуле достаточно много слагаемых, так как в правой части стоит еще и суммирование по p , но большая часть из них равна 0. Обычно, у "хороших" поверхностей (сфера, тор, эллипсоид, поверхности вращения) метрики имеют специфические черты. Например, в нашем случае метрика диагональная, один из коэффициентов постоянный, а другой зависит только от одной переменной. То есть g диагональная, следовательно g^{-1} диагональная, следовательно $g^{lp} \neq 0$ только при $l = p$. Заметим, что g_{ij} зависят только от θ , а 3 из них - константы, следовательно из всех $\frac{\partial g_{ab}}{\partial u^c} \neq 0$ только $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = -2 \cos \theta \sin \theta$. Тогда в нашей главной формуле мы можем получить не 0 только если среди $i, j, p = l$ есть две 1 и одна 2. Сфера двумерная, следовательно каждый индекс пробегает от 1 до $k = 2$. Значит, всего 8 символов Кристоффеля, среди которых не равны нулю:

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \cos \theta \sin \theta,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2 \cos^2 \theta} (-2 \cos \theta \sin \theta) = -\operatorname{tg} \theta.$$

Мы докажем этот факт на следующей лекции: для $e_i = r_{u^i}$ верно $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$. Тогда $\Gamma_{21}^1 = -\operatorname{tg} \theta$. Все остальные символы Кристоффеля: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$ в силу наших рассуждений.

Поверхность вращения

Мы перечисляли много поверхностей: тор, сфера, конус и т.д. Это все - поверхности вращения. Это хорошие примеры, так как из-за вращательной симметрии у них есть много хороших свойств. Рассмотрим поверхность вращения с параметризацией, которую выбрали ранее: пусть $u^1 = u$, $u^2 = \varphi$, тогда

$$r(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi).$$

Вычислим теперь базисные векторы:

$$r_u = (x', \rho' \cos \varphi, \rho' \sin \varphi), \quad r_\varphi = (0, -\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

Тогда $g_{11} = (r_u, r_u) = (x')^2 + (\rho')^2$, $g_{12} = (r_u, r_\varphi) = 0$, $g_{22} = (r_\varphi, r_\varphi) = \rho^2$. И в этом случае матрица первой квадратичной формы диагональна, и ее элементы зависят только от одной переменной u .

Сделаем одно упрощение: u - параметр на кривой, которую мы вращаем. Предположим, что u - натуральный параметр на кривой $(x(u), \rho(u))$. Тогда $g_{11} = |\dot{\gamma}|^2 = 1$. В рассмотренных ранее примерах (тор - вращаем окружность; конус - вращаем наклонную прямую) легко перейти к натуральному параметру, поэтому для обычных поверхностей такое предположение естественно. Тогда

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $g^{11} = 1$, $g^{12} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{\rho^2}$. Заметим, что верны следующие наблюдения: g диагональна, следовательно g^{-1} тоже диагональна, следовательно $g^{lp} \neq 0$ только если $p = l$. Из всех $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \neq 0$ только $\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 2\rho\rho'$. Тогда из всех $\Gamma_{ij}^l \neq 0$ только те, у которых среди индексов одна 1 и две 2:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} \right) = \rho\rho',$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2\rho^2} 2\rho\rho' = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Остальные символы Кристоффеля: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$.

Кривые

Плоская кривая в натуральной параметризации

У нас есть первая формула Френе $\dot{v} = kn$. Вспомним, что производная по натуральной параметру на кривой - это производная вдоль v , тогда $\partial_v v = kn$, v - касательное векторное поле, n - нормальное. Тогда в общем случае эта формула имеет вид $\partial_v v = \nabla_v v + B(v, v) = 0 + kn$. Значит, для плоской кривой в натуральном параметре $\nabla_v v = 0$, $B(v, v) = kn$.

С другой стороны, в качестве базиса в касательных векторных полях можно выбрать $e_1 = v = r_s$, так как локальная координата одна $u^1 = s$. В нормальных векторных полях $\eta_1 = n$. Значит, $\Gamma_{11}^1 = 0$, так как $\nabla_{e_1} e_1 = 0$, а $b_{11}^1 = k$, так как $B(e_1, e_1) = b_{11}^1 \eta_1$. То есть в случае плоской кривой символ Кристоффеля и коэффициент второй квадратичной формы можно найти с помощью формулы Френе.

Плоская кривая в произвольной параметризации

В этом случае $u^1 = t$. Пусть $e_1 = r_{u^1} = r_t$ - базис в касательных векторных полях, $\eta_1 = n$ - базис в нормальных векторных полях. Мы можем попытаться посчитать символы Кристоффеля с помощью нашей формулы. Для этого посчитаем коэффициент метрики $g_{11} = (r_{u^1}, r_{u^1}) = |r_t|^2$. Тогда матрица метрики имеет один элемент, и $g^{11} = \frac{1}{|r_t|^2}$, поэтому

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \frac{d \ln g_{11}}{dt} = \frac{1}{2} (\ln |r_t|^2)_t.$$

Теперь попробуем найти коэффициент второй квадратичной формы:

$$B(e_1, e_1) = (\text{Id} - P)(\partial_{e_1} e_1) = (\text{Id} - P)(\partial_{u^1} r_{u^1}) = (\text{Id} - P)(r_{u^1 u^1}) = (\text{Id} - P)(r_{tt}).$$

Необходимо взять от полученного выражения нормальную производную, но мы не знаем, какой вид имеет n , поэтому вычтем проекцию на касательное направление. Тогда

$$(\text{Id} - P)(r_{tt}) = r_{tt} - \frac{(r_{tt}, r_t)}{(r_t, r_t)} r_t,$$

и b_{11}^1 - координата полученного вектора в базисе нормального пространства n : $b_{11}^1 = (r_{tt}, n)$. Этот ответ нас не очень удовлетворяет, так как в случае кривой в натуральной параметризации все выражалось явно через кривизну.

Упражнение

Докажите, что в общем случае верна формула $k = \left| \frac{b_{11}^1}{g_{11}} \right|$.

8. Семинар 8. Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена

На этом семинаре мы обсудим деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена в некоторых важных классических случаях.

Двумерная поверхность в трехмерном пространстве

Рассмотрим случай $k = 2$, $n = 3$ (двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$). Возьмем стандартные базисы в касательных и нормальных полях: $e_1 = r_u$, $e_2 = r_v$, $\eta_1 = m$.

Деривационные формулы Гаусса

Так выглядит сама формула:

$$\partial_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^p e_p + b_{ij}^\alpha \eta_\alpha.$$

Мы уже знаем, как считать символы Кристоффеля и, так как $B(X, Y) = \Pi(X, Y)\overline{m}$, то $b_{11}^1 = L$, $b_{12}^1 = b_{21}^1 = M$, $b_{22}^1 = N$. Теперь разберемся с левой частью:

$$\partial_{r_{u^i}} r_{u^j} = \frac{\partial}{\partial u^i} r_{u^j} = r_{u^i u^j}.$$

Рассмотрим все возможные случаи:

$$\begin{aligned} i = j = 1 : \quad r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + Lm, \\ i = 1, j = 2 : \quad r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + Mm, \end{aligned}$$

Когда $i = 2$, $j = 1$ все будет аналогично случаю $i = 1$, $j = 2$, так как символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам. Остается последний случай:

$$i = j = 2 : \quad r_{vv} = \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + Nm.$$

Деривационные формулы Вейнгартена

Общий вид формулы:

$$\partial_X \xi = -W_\xi(X) + \nabla_X \xi.$$

Заметим, что m - единичный вектор, значит, производная m всегда ортогональна самому m . Тогда $\partial_{e_i} m = m_{u^i} \perp m$. Так как нормальное направление порождается одним m , то из этого следует, что m_{u^i} всегда касательные, поэтому $\nabla_X m = (\text{Id} - P)(\partial_X m) = 0$. Ковариантная производная от единичного нормального векторного поля на двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ всегда 0. Тогда нас интересует только следующая часть формулы:

$$\partial_{e_i} \eta_\alpha = -b_{ij}^\beta g^{jp} g_{\alpha\beta} e_p.$$

Заметим, что $g_{\alpha\beta} = (m, m) = 1$, так как $\alpha = \beta = 1$. Также мы знаем коэффициенты b_{ij}^β , так как $\beta = 1$: $b_{11}^1 = L$, $b_{12}^1 = b_{21}^1 = M$, $b_{22}^1 = N$. Осталось выяснить чему равны g^{jp} . Вспомним, что в стандартных обозначениях

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Rightarrow (g^{jp}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

поэтому $g^{11} = \frac{G}{EG - F^2}$, $g^{12} = g^{21} = -\frac{F}{EG - F^2}$, $g^{22} = \frac{E}{EG - F^2}$. Подставим все полученные значения в нашу формулу. α всегда равно 1, пусть $i = 1$:

$$\begin{aligned} m_u &= -b_{1j}^1 g^{jp} e_p = -(b_{11}^1 g^{11} + b_{12}^1 g^{21}) e_1 - (b_{11}^1 g^{12} + b_{12}^1 g^{22}) e_2 = \\ &= \frac{-LG + MF}{EG - F^2} r_u + \frac{LF - ME}{EG - F^2} r_v. \end{aligned}$$

Это первая дериwационная формула Вейнгартена. Вторая формула для m_v оставляется в качестве **упражнения**.

Гиперповерхность

Разовьем наше наблюдение про двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$ на случай гиперповерхности, то есть $k = n - 1$ в $\mathbb{R}^n$.

m - единичное нормальное векторное поле. В силу того, что размерность нормального пространства $\dim N_A \Sigma = 1$ в каждой точке пространства, то любое нормальное поле записывается как функция $\eta = fm$. Так как $(m, m) = 1$, то $\partial_X(m, m) = 0$ и $(\nabla_X m, m) + (m, \nabla_X m) = 0$. Следовательно $\nabla_X m \perp m$, а так как пространство одномерное, то $\nabla_X m = 0$. Тогда

$$\nabla_X \eta = \nabla_X(fm) = \partial_X f \cdot m + f \nabla_X m = \partial_X f \cdot m.$$

Кривая в n-мерном пространстве

Возьмем произвольную кривую в $\mathbb{R}^n$. Если s натуральный параметр, то мы знаем, что $k = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right|$. Пусть t - произвольный параметр, тогда $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$. Базисный вектор в этом случае будет иметь вид $e_1 = \frac{dr}{dt}$. Тогда единственный метрический коэффициент

$$g_{11} = \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds} \right) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Теперь разберемся со второй производной:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Мы хотим сопоставить эту формулу с деривационной формулой Гаусса. Выберем произвольный базис в нормальных векторных полях $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$. Тогда

$$\partial_{e_1} e_1 = \Gamma_{11}^1 e_1 + b_{11}^1 \eta_1 + \dots + b_{11}^{n-1} \eta_{n-1}.$$

Сравним две полученные формулы. Так как $e_1 = \frac{dr}{dt}$, а $\partial_{e_1} = \frac{d}{dt}$, то левые части равны. Мы знаем, что $\frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}$ - касательная составляющая, так как $\frac{dr}{ds}$ - касательный вектор. Также мы знаем, что так как $\frac{dr}{ds}$ - единичный вектор, то его вторая производная ортогональна ему. Значит $\frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$ - нормальная составляющая. Так как $\Gamma_{11}^1 e_1$ - касательная часть, а $b_{11}^1 \eta_1 + \dots + b_{11}^{n-1} \eta_{n-1}$ - нормальная часть, и мы знаем, что умножив кривизну $k = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right|$ на $\left(\frac{ds}{dt} \right)^2$, мы получим нормальную часть, тогда

$$k = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right| = \left| \frac{b_{11}^1 \eta_1 + \dots + b_{11}^{n-1} \eta_{n-1}}{g_{11}} \right| \quad \square$$

так как $g_{11} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ - ортонормированный базис (с таким условием будет проще найти длину вектора), тогда

$$\square \sqrt{\left(\frac{b_{11}^1}{g_{11}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{b_{11}^{n-1}}{g_{11}} \right)^2}.$$

В итоге мы получили формулу для вычисления кривизны кривой в произвольной параметризации с базисом $e_1 = \frac{dr}{dt}$ в касательных векторных полях и ортонормированным базисом в нормальных векторных полях.

Если сопоставить касательные части, то должно получиться тождество о том, что символ Кристоффеля выразиться через логарифм от g_{11} , так как $e_1 = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$, следовательно:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} = d \ln \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \sqrt{g_{11}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln g_{11}.$$

Оператор Вейнгартена для классических поверхностей

Вспомним формулу:

$$(W_\xi, Y) = (B(X, Y), \xi).$$

Рассмотрим для начала случай $k = 2$, $n = 3$. Тогда все нормальные векторы пропорциональны m , поэтому достаточно считать только $W_m(X)$. Попробуем записать

нашу формулу в матричном виде. В силу симметрии скалярного произведения и B мы можем записать, что $(Y, W_m(X)) = (B(Y, X), m)$. Пусть W_m имеет матрицу A в базисе r_u, r_v . Это значит, что мы применяем этот оператор к столбцу координат вектора X . А дальше сделаем скалярное произведение с помощью первой квадратичной формы. Тогда $(Y, W_m(X)) = Y^T I A X$. С правой частью сделаем следующее: мы знаем, что $B(Y, X) = \Pi(Y, X)m$, значит $(B(Y, X), m) = Y^T \Pi X$. В итоге:

$$Y^T I A X = Y^T \Pi X \quad \Rightarrow \quad I A = \Pi.$$

Отсюда мы можем получить матрицу A : $A = I^{-1} \Pi$. Значит, матрица оператора Вейнгартена W_m в базисе r_u, r_v равна

$$I^{-1} \Pi = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Мы помним, что главные кривизны - корни уравнения $\det(\Pi - \lambda I) = 0$. Из этого следует, что $\det(I(I^{-1} \Pi - \lambda E)) = 0$. Тогда $\det I \cdot \det(I(I^{-1} \Pi - \lambda E)) = 0$, откуда мы видим, что главные кривизны - собственные числа оператора Вейнгартена.

Сферическое отображение Гаусса

Снова рассмотрим наш классический случай $k = 2, n = 3$ и посмотрим на сферическое отображение Гаусса. У нас есть поверхность Σ и единичное нормальное векторное поле. Сделаем отображение $G : \Sigma \rightarrow S^2$. Для этого возьмем единичный нормальный вектор в точке A на поверхности и поместим начало этого вектора в центр сферы. Тогда точка пересечения поверхности сферы и нормального вектора - это $G(A)$.

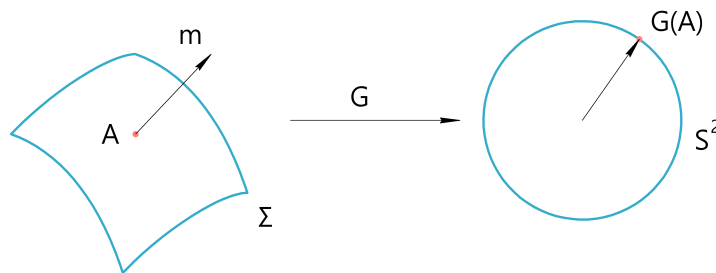


Рис. 8.1

То есть каждой точке на поверхности сопоставляется конец единичного нормального вектора в этой точке.

Теперь отметим следующее: если у нас есть отображение из поверхности в поверхность, то мы можем записать его дифференциал. Пусть $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, $F(A) = B$, то дифференциал $d_A F : T_A \Sigma_1 \rightarrow T_B \Sigma_2$. Его можно определить геометрически. Выпустим из точки A на Σ_1 вектор X и возьмем кривую γ , у которой X - вектор скорости.

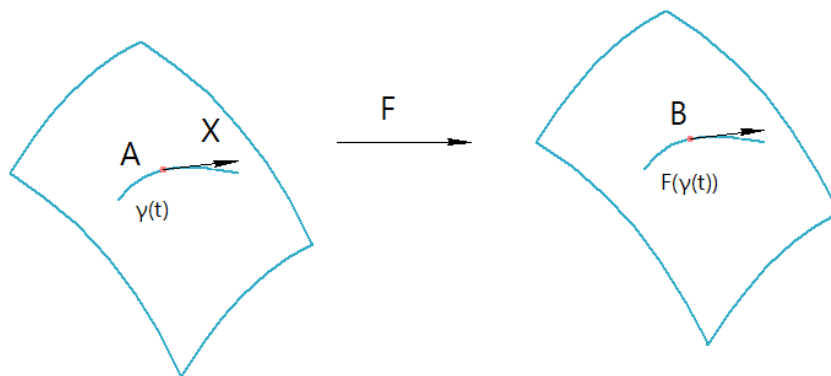


Рис. 8.2

Тогда $\gamma(0) = A$, $\dot{\gamma}(0) = X$, и $d_A F(X) = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))|_{t=0}$.

Можете проверить следующие утверждения:

- 1) От выбора γ ответ не зависит.
- 2) Это отображение - линейное.
- 3) Если в координатах $u^1, \dots, u^k$ на Σ_1 , и $w^1, \dots, w^l$ на Σ_2 F имеет вид

$$\begin{aligned} w^1 &= w^1(u^1, \dots, u^k) \\ &\vdots \\ w^l &= w^l(u^1, \dots, u^k) \end{aligned}$$

то у $d_A F$ в базисах $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$ и $\tilde{r}_{w^1}, \dots, \tilde{r}_{w^l}$ матрица состоит из частных производных $\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j} \right)$.

Вернемся к отображению G . Мы хотим понять, как устроен дифференциал отображения Гаусса. Возьмем в точке A вектор r_u . Это вектор скорости некоторой кривой, которая в локальных координатах устроена следующим образом: $u = t + u_0$, $v = v_0$, а $A = r(u_0, v_0)$. Тогда $\gamma(0) = A$, $\dot{\gamma}(0) = r_u$. Возьмем производную от нашего отображения:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} G(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} m(t + u_0, v_0) = m_u(A).$$

Значит $d_A G(r_u) = m_u$, $d_A G(r_v) = m_v$.

Заметим одну особенность. Возьмем на поверхности касательную плоскость, порожденную векторами r_u и r_v , в точке A . Так как на сфере вектор m выходит из центра, то касательная плоскость на сфере ортогональна m .

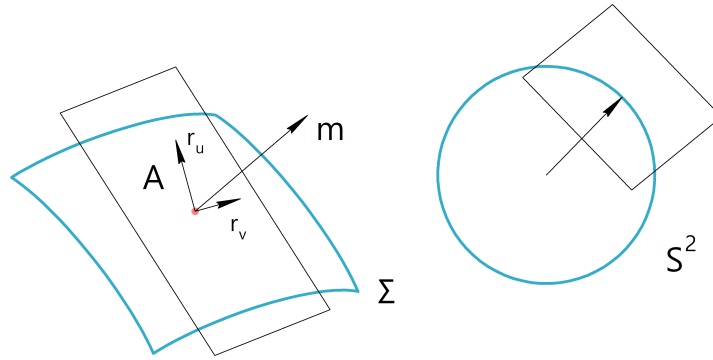


Рис. 8.3

Тогда она параллельна касательной плоскости на поверхности, то есть $T_{G(A)}S^2 \parallel T_A\Sigma$, поэтому в $T_{G(A)}S^2$ можно взять базис r_u, r_v . Матрица $d_A G : T_A\Sigma \rightarrow T_A\Sigma$ в базисе r_u, r_v устроена следующим образом: в первом столбце записываются координаты образа первого базисного вектора, то есть координаты m_u , соответственно, во второй столбец записываются координаты m_v . Это в точности то, как мы определяли оператор Вейнгартена, так как $W_m(r_u) = -P(m_u) = -m_u$, а $W_m(r_v) = -P(m_v) = -m_v$. Значит матрица дифференциала Гауссова отображения равна $\Gamma^{-1}\Pi$, и $W_m = -dG$.

9. Семинар 9. Тензор Римана, изометрии и локальные изометрии

Тензор Римана для двумерных поверхностей в трехмерном пространстве

Начнем с тождества, которым мы пользовались на лекции, но перенесем все в одну сторону:

$$\partial_X \partial_Y Z - \partial_Y \partial_X Z - \partial_{[X,Y]} Z = 0.$$

Теперь мы будем пользоваться определениями ковариантной производной, связности и других объектов, которые мы изучали до этого. Вспомним, что $\partial_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$. Тогда мы получим:

$$\partial_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) - \partial_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \nabla_{[X,Y]} Z - B([X, Y], Z) = 0.$$

В тензоре Римана мы оставляли только касательную часть. Рассмотрим детально полученное тождество:

- 1) От $\partial_X \nabla_Y Z$ останется только касательная часть $\nabla_X \nabla_Y Z$.
- 2) Вспомним формулу для нормального вектора: $\partial_X \xi = -W_\xi(X) + \nabla_X \xi$, где $-W_\xi(X)$ - касательная часть. Значит, $\partial_X B(Y, Z) = -W_{B(Y,Z)}(X)$.
- 3) Аналогично: $\partial_Y \nabla_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z$ и $\partial_Y B(X, Z) = -W_{B(X,Z)}(Y)$.
- 4) $\nabla_{[X,Y]} Z$ - касательная часть, а $B([X, Y], Z)$ - нормальная.

В итоге:

$$\underline{\nabla_X \nabla_Y Z} - W_{B(Y,Z)}(X) - \underline{\nabla_Y \nabla_X Z} + W_{B(X,Z)}(Y) - \underline{\nabla_{[X,Y]} Z} = 0.$$

Заметим, что подчеркнутые слагаемые образуют тензор Римана. Тогда

$$R(X, Y)Z = W_{B(Y,Z)}(X) - W_{B(X,Z)}(Y).$$

Пример: сфера S^2 радиуса R

Вспомним, что на сфере

$$B(Y, Z) = \Pi(Y, Z)\bar{m} = -\frac{1}{R}I(Y, Z)\bar{m}.$$

$\Downarrow$

$$W_{B(Y,Z)}(X) = W_{-\frac{1}{R}I(Y,Z)\bar{m}}(X) = -\frac{1}{R}I(Y, Z)W_{\bar{m}}(X) \equiv$$

Мы считали, как устроен оператор Вейнгартена на сфере: $W_{\overline{m}}(X) = -\frac{1}{R}X$, значит

$$\boxed{=} -\frac{1}{R}(Y, Z)X.$$

Теперь мы можем записать чему равен тензор Римана на сфере:

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{R^2}((Y, Z)X - (X, Z)Y).$$

Пример: произвольная поверхность в $\mathbb{R}^3$

Тензор Римана на произвольной поверхности не будет иметь такой же хороший вид, как в случае сферы. Сделаем несколько иное вычисление: посчитаем произведение $(R(X, Y)Z, W)$. Когда мы вычисляли символы Кристоффеля, мы обсуждали, что если мы знаем скалярное произведение некоторого вектора с любым, то этот вектор мы тоже знаем.

$$(R(X, Y)Z, W) = (W_{B(Y, Z)}(X), W) - (W_{B(X, Z)}(Y), W) \boxed{=}$$

Вспомним формулу, которую мы выводили: $(W_{\xi}(X), Y) = (B(X, Y), \xi)$. Тогда

$$\boxed{=} (B(X, W), B(Y, Z)) - (B(Y, W), B(X, Z)) = \Pi(X, W)\Pi(Y, Z) - \Pi(Y, W)\Pi(X, Z).$$

В итоге, для произвольной поверхности, мы получили формулу:

$$(R(X, Y)Z, W) = \Pi(X, W)\Pi(Y, Z) - \Pi(Y, W)\Pi(X, Z).$$

Это тождество - уравнение Гаусса, с помощью которого можно считать тензор Римана.

Изометрии

Мы можем взять лист и свернуть его в конус - это изометрия, так как мы не сжимаем и не растягиваем лист. Рассмотрим это понятие более строго.

Возьмем конус и параметризуем его как поверхность вращения:

$$\begin{cases} x = h \operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi \\ y = h \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi \\ z = h \end{cases} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}(x^2 + y^2).$$

Такая параметризация соответствует перевернутому конусу.

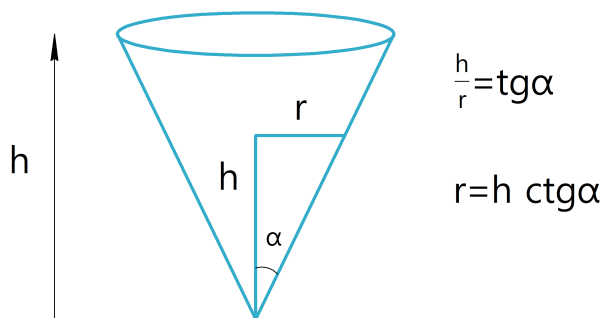


Рис. 9.1

Тогда $r(h, \varphi) = (h \operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi, h \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi, h)$. Найдем первую квадратичную форму:

$$r_h = (\operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi, \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi, 1), \quad r_\varphi = (-h \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi, h \operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi, 0)$$

$\Downarrow$

$$I_K = \begin{pmatrix} 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha & 0 \\ 0 & h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Это не совсем похоже на то, что происходит на плоскости. Но заметим следующее: от выбора координат сильно зависит вид метрики. Чтобы получить что-то похожее, необходимо записать метрику на плоскости в полярных координатах.

Рассмотрим плоскость $z = 0$ в полярных координатах: $\tilde{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$.

Тогда

$$\tilde{r}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \tilde{r}_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

$\Downarrow$

$$I_\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем заметить некоторые сходства: нули на побочной диагонали, первый элемент - константа, последний элемент - переменная в квадрате.

Для того, чтобы получить изометрию, у нас есть два метода: рассмотреть φ и h как функции ρ и θ и написать отображение, или подобрать другую параметризацию, для которой это отображение было бы тождественным. На самом деле, проще подобрать другую параметризацию для конуса, что мы и сделаем.

Когда мы сворачиваем поверхность в конус, то дуги окружностей, центр которых лежит на линии симметрии поверхности, переходят в параллельные окружности на конусе, и расстояния до окружности на поверхности переходят в расстояния до параллели на конусе.

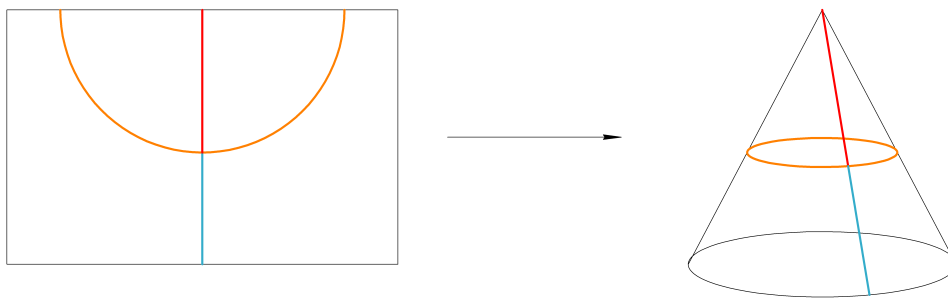


Рис. 9.2

Попробуем параметризовать конус не высотой h а расстоянием до параллели (красный отрезок на рис. 9.2).

$$F(\rho, \theta) = (\rho \sin \alpha \cos \frac{\theta}{\sin \alpha}, \rho \sin \alpha \sin \frac{\theta}{\sin \alpha}, \rho \cos \alpha).$$

Такая параметризация эквивалентна тому, что $h = \rho \cos \alpha$, $\varphi = \frac{\theta}{\sin \alpha}$, то есть это другая параметризация того же конуса. Остается найти первую квадратичную форму для конуса в такой параметризации и убедиться, что она устроена также, как и для поверхности:

$$F_\rho = (\sin \alpha \cos \frac{\theta}{\sin \alpha}, \sin \alpha \sin \frac{\theta}{\sin \alpha}, \cos \alpha), \quad F_\theta = (-\rho \sin \frac{\theta}{\sin \alpha}, \rho \cos \frac{\theta}{\sin \alpha}, 0)$$

$$\Downarrow$$

$$I'_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

Мы получили такую же первую квадратичную форму, то есть плоскость и конус локально изометричны.

Повторим еще раз весь процесс.

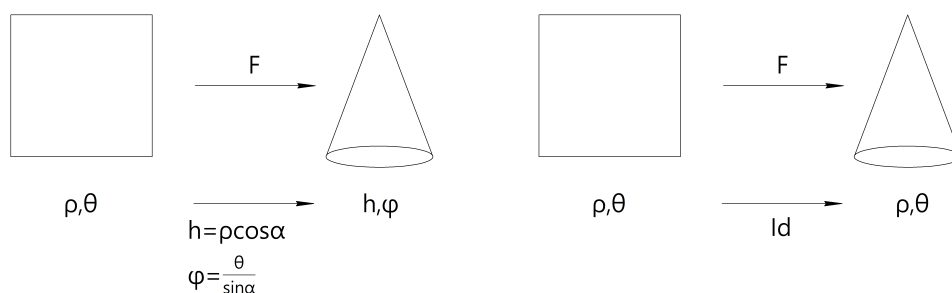


Рис. 9.3

У нас есть отображение из плоскости в конус. Мы можем параметризовать плоскость с помощью ρ, θ и конус с помощью h, φ , а затем написать отображение $h =$

$\rho \cos \alpha$, $\varphi = \frac{\theta}{\sin \alpha}$. Или мы можем параметризовать и плоскость и конус с помощью ρ, θ , тогда отображение будет тождественным. Второй способ удобнее, так как если записать формулу для первых квадратичных форм через матрицу перехода $I_{\Pi} = J^T I'_K J$, то так как отображение тождественное, $J^T = J = E$.

В первом способе необходимо проверять свойство $I_{\Pi} = J^T I'_K J$. Попробуем посчитать матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \rho} & \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \alpha} \end{pmatrix}$$

$$J^T I'_K J = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha & 0 \\ 0 & \rho^2 \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \alpha} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

Комментарий

В вычислениях была допущена ошибка: одна из тригонометрических функций была взята неверно.

Геликоид и катеноид

Эти поверхности замечательны тем, что они имеют нулевую среднюю кривизну (минимальные поверхности).

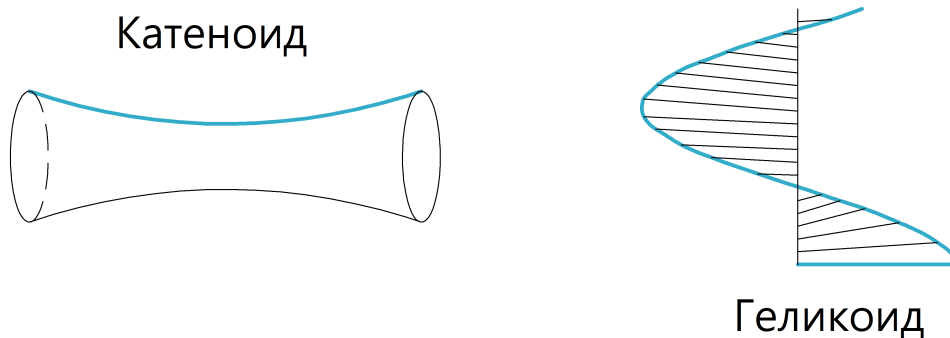


Рис. 9.4

Катеноид

Это поверхность создается вращением графика гиперболического косинуса $\operatorname{ch} v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}$. Запишем параметризацию этой поверхности так, чтобы ось вращения была вертикальной (для общего масштабирования будем еще использовать параметр a):

$$r(u, v) = (a \operatorname{ch} v \cos u, a \operatorname{ch} v \sin u, av).$$

Найдем первую квадратичную форму катеноида:

$$r_u = (-a \operatorname{ch} v \sin u, a \operatorname{ch} v \cos u, 0), \quad r_v = (a \operatorname{sh} v \cos u, a \operatorname{sh} v \sin u, a)$$

$\Downarrow$

$$I = \begin{pmatrix} a^2 \operatorname{ch}^2 v & 0 \\ 0 & a^2(1 + \operatorname{sh}^2 v) \end{pmatrix}$$

Заметим, что так как $\operatorname{sh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$, то

$$1 + \operatorname{sh}^2 v = \frac{4 + e^{2v} - 2 + e^{-2v}}{4} = \frac{e^{2v} + 2 + e^{-2v}}{4} = \operatorname{ch}^2 v.$$

Тогда первая квадратичная форма для катеноида имеет вид $I = a^2 \operatorname{ch}^2 v E$.

Геликоид

Это поверхность получается вращением прямой вокруг вертикальной оси (винтовая поверхность). Запишем параметризацию для геликоида:

$$\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{v} \cos \tilde{u}, \tilde{v} \sin \tilde{u}, a\tilde{u}).$$

Сделаем замену, чтобы упростить вид первой квадратичной формы: $\tilde{u} = u$, $\tilde{v} = a \operatorname{sh} v$. Тогда

$$\bar{r}(u, v) = (a \operatorname{sh} v \cos u, a \operatorname{sh} v \sin u, au)$$

$$\bar{r}_u = (-a \operatorname{sh} v \sin u, a \operatorname{sh} v \cos u, a), \quad \bar{r}_v = (a \operatorname{ch} v \cos u, a \operatorname{ch} v \sin u, a)$$

$\Downarrow$

$$I = \begin{pmatrix} a^2 \operatorname{ch}^2 v & 0 \\ 0 & a^2 \operatorname{ch}^2 v \end{pmatrix} = a^2 \operatorname{ch}^2 v E$$

10. Семинар 10. Параллельный перенос

На 10ой лекции мы рассматривали параллельный перенос и геодезические. Геодезическими мы будем заниматься еще некоторое продолжительное время, поэтому главная тема этого семинара - параллельный перенос.

Вспомним уравнения параллельного переноса:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{dY}{dt}\right) &= 0 \\ \nabla_j Y &= 0 \\ \dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j &= 0 \end{aligned}$$

Также для классического случая $k = 2$, $n = 3$ мы знаем, что $\frac{dY}{dt} \parallel m$.

Цилиндр

Пусть на цилиндре лежит кривая с началом в точке A и концом в точке B . Из точки A , параллельно образующей цилиндра, выходит вектор Y_0 .

Первый способ:

Возьмем векторное поле $Y(t) \equiv Y_0$. Тогда $\frac{dY}{dt} = 0$ и $P(\frac{dY}{dt}) = 0$. Значит это параллельное поле и вектор Y_1 , выходящий из точки B , тоже будет вертикальным. Заметим, что в этом случае параллельный не зависит ни от кривой, ни от точки.

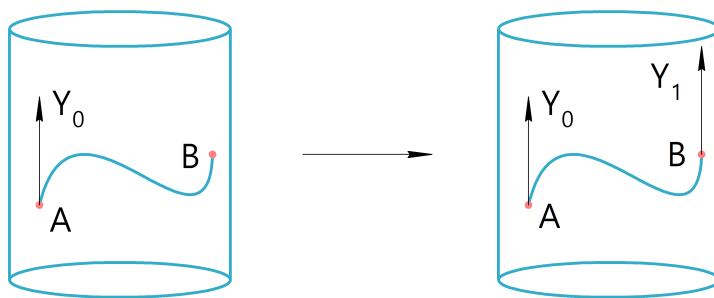


Рис. 10.1

Второй способ (в локальных координатах):

Рассмотрим параметризацию $r(h, \varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, h)$. Тогда $r_h = (0, 0, 1)$, $r_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)$ и

$$g = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что все производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 0$. Вспомним формулу для символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lp} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j} \right) = 0.$$

Тогда уравнение $\dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j = 0$ примет вид $\dot{Y}^l = 0$, следовательно $Y^l = \text{const}$. Если Y_0 имеет вид $Y_0 = Y_0^1 r_h + Y_0^2 r_\varphi$, то Y_1 будет иметь точно такой же вид. В этом базисе координаты параллельного векторного поля постоянны, но это не означает, что сам вектор будет постоянным: r_h всегда смотрит вверх, а r_φ вращается (вектор, касательный к параллели). То есть координаты вектора изменяться не будут, а сам вектор будет вращаться.

Если вектор Y_0 не вертикальный, то мы можем взять вектор, касательный к параллели в одном конце кривой. Этот вектор будет ортогонален вертикальному вектору. Тогда в другом конце кривой он также будет ортогонален вертикальному и иметь ту же длину.

Сфера

Возьмем сферу радиуса 1, $r(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$. Пусть θ_0 - широта некоторой параллели. Возьмем точки $A = (0, \theta_0)$ и $B = (\varphi_0, \theta_0)$ на этой параллели. Попробуем сделать параллельный перенос из A в B вдоль параллели, $\gamma(t) = (t, \theta_0)$, $t \in [0, \varphi_0]$.

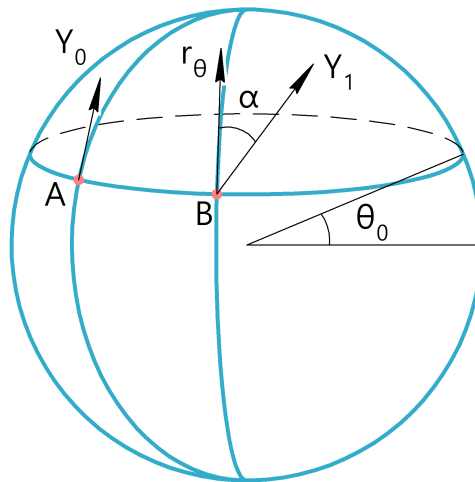


Рис. 10.2

Возьмем на меридиане, проходящем через точку A , вектор $r_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} = Y_0$ с началом

в точке A . Этот вектор переходит в вектор Y_1 в точке B . Проведем касательный вектор r_θ к меридиану, проходящему через точку B . Между векторами Y_1 и r_φ угол α .

Необходимо найти угол α - результат параллельного переноса.

Алгоритм:

- 1) Сначала необходимо найти метрику. Пусть $u^1 = \varphi$, $u^2 = \theta$.

$$r_\varphi = (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0), \quad r_\theta = (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

$\Downarrow$

$$(g_{ij}) = I = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2) Теперь необходимо найти символы Кристоффеля.

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lp} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j} \right).$$

Заметим, что $l = p$, так как матрица g диагональна. Из $\frac{\partial g_{ab}}{\partial u^c}$ только $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = -2 \cos \theta \sin \theta \neq 0$. Тогда

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \cos \theta \sin \theta.$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^2 \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = -\frac{1}{\cos^2 \theta} \cos \theta \sin \theta = -\operatorname{tg} \theta.$$

Остальные $\Gamma_{ij}^l = 0$.

- 3) Запишем уравнение для параллельного переноса:

$$\dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j = 0, \quad l = 1, 2.$$

В случае, когда $l = 1$:

$$\dot{Y}^1 + \Gamma_{12}^1 \dot{u}^1 Y^2 + \Gamma_{21}^1 \dot{u}^2 Y^1 = 0$$

В случае, когда $l = 2$:

$$\dot{Y}^2 + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^1 Y^1 = 0.$$

В итоге:

$$\begin{cases} \dot{Y}^1 - \operatorname{tg} \theta_0 Y^2 = 0 & (\dot{u}^2 = \dot{\theta}_0 = 0) \\ \dot{Y}^2 + \cos \theta_0 \sin \theta_0 Y^1 = 0 \end{cases}$$

Мы получили линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В общем случае было бы необходимо решать такую систему с помощью экспоненты от матрицы (2×2) , искать жорданову форму и т.д. В нашем случае все проще: попробуем продифференцировать второй раз наши уравнения:

$$\ddot{Y}^1 = \operatorname{tg} \theta_0 \dot{Y}^2 = -\operatorname{tg} \theta_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0 Y^1 = -\sin^2 \theta_0 Y^1.$$

Это уравнение гармонического осциллятора, решение которого:

$$Y^1 = A \cos(\sin \theta_0 t) + B \sin(\sin \theta_0 t).$$

Y^2 можно найти из первого уравнения:

$$\begin{aligned} Y^2 &= \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_0} \dot{Y}^1 = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} (-A \sin \theta_0 \sin(\sin \theta_0 t) + B \sin \theta_0 \cos(\sin \theta_0 t)) = \\ &= -A \cos \theta_0 \sin(\sin \theta_0 t) + B \cos \theta_0 \cos(\sin \theta_0 t). \end{aligned}$$

Мы получили общее решение уравнения параллельного переноса вдоль параллели. Константы зависят от начальных условий. В нашей задаче: $Y_0 = r_\theta$, значит $Y_0^1 = 0$, $Y_0^2 = 1$. Тогда

$$0 = Y^1(0) = A \Rightarrow A = 0$$

$$1 = Y^2(0) = B \cos \theta_0 \Rightarrow B = \frac{1}{\cos \theta_0}.$$

Искомое параллельное вдоль γ векторное поле:

$$Y^1(t) = \frac{1}{\cos \theta_0} \sin(\sin \theta_0 t), \quad Y^2(t) = \cos(\sin \theta_0 t).$$

Тогда

$$Y_1 = Y(\varphi_0) = \left(\frac{1}{\cos \theta_0} \sin(\varphi_0 \sin \theta_0), \cos(\varphi_0 \sin \theta_0) \right).$$

Теперь найдем угол α между Y_1 и r_θ :

$$\cos \alpha = \frac{(r_\theta, Y_1)}{|r_\theta| |Y_1|} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \theta_0} \sin(\varphi_0 \sin \theta_0) \\ \cos(\varphi_0 \sin \theta_0) \end{pmatrix} = \cos(\varphi_0 \sin \theta_0)$$

Ответ: $\alpha = \varphi_0 \sin \theta_0$.

Проверим наш ответ. Представим, что мы делаем параллельный перенос вдоль экватора. Экватор - это геодезическая (геодезические мы обсудим позже), а у них

есть такое свойство: угол при переносе вдоль геодезической сохраняется, тогда α должен быть равен 0. Так как широта экватора $\theta_0 = 0$, то все верно.

Замечание

Мы могли взять касательный к параллели вектор и выяснить, насколько мы отклонимся от параллели. Угол получился бы тот же.

Поверхности, касающиеся вдоль кривой

Два цилиндра

Рассмотрим два цилиндра, которые касаются вдоль образующей γ , $\gamma \subset \Sigma_1, \Sigma_2$. В каждой точке γ касательные поверхности совпадают: $T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$. Такие поверхности называются касающимися вдоль кривой.

Упражнение

Σ_1 касается Σ_2 вдоль $\gamma \stackrel{?}{\Rightarrow}$ результат параллельного переноса вдоль γ на Σ_1 и Σ_2 совпадает.

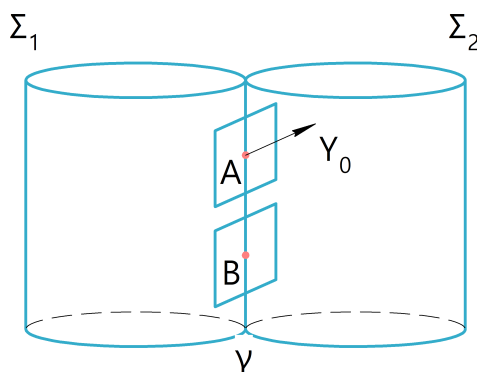


Рис. 10.3

Возьмем в точке A касательный вектор Y_0 . Далее мы можем сделать параллельный перенос в точку B вдоль γ на Σ_1 и на Σ_2 . В общем случае результат должен быть разным, так как параллельный перенос зависит не только от кривой, но и от поверхности. В нашем случае результат совпадает.

Запишем уравнение параллельного переноса в виде $P_{T_{\gamma}\Sigma_1}(\ddot{\gamma}) = 0$. Это уравнение эквивалентно уравнению $P_{T_{\gamma}\Sigma_2}(\ddot{\gamma}) = 0$, так как совпадают касательные плоскости. Уравнение параллельного переноса значит, что проекция ускорения на касательную

плоскость равна нулю, а если касательные плоскости совпадают, то и проекции совпадают.

Сфера и конус

Рассмотрим теперь сферу и конус, который надет на сферу и касается ее вдоль параллели. Пусть θ_0 - широта параллели. Сделаем параллельный перенос вектора Y_0 вдоль всей параллели в Y_1 . Между Y_0 и Y_1 угол $\alpha = 2\pi \sin \theta_0$.

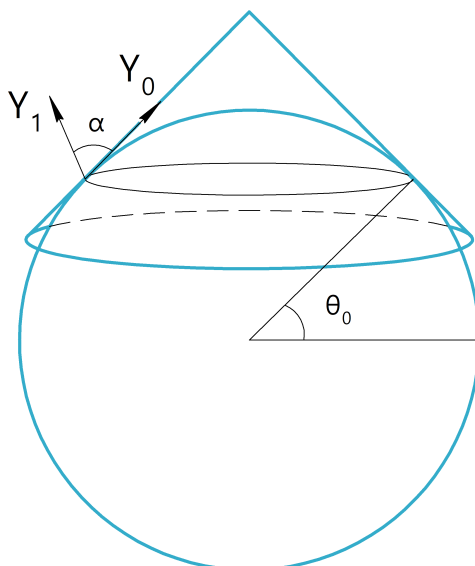


Рис. 10.4

Рассмотрим наши поверхности в разрезе. Угол раствора конуса - $2\theta_0$. Радиус параллели $r = \cos \theta_0$. Тогда длина параллели равна $2\pi r = 2\pi \cos \theta_0$.

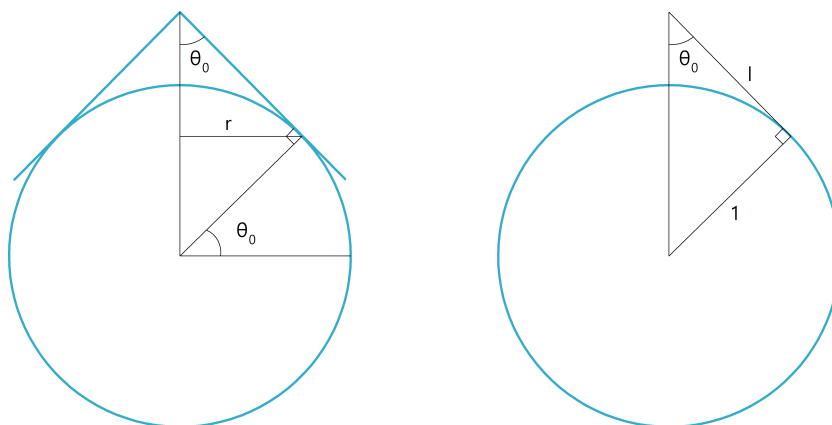


Рис. 10.5

Найдем теперь длину параллели другим образом. Пусть длина отрезка, соединяющего вершину конуса с точкой касания к сфере, равна l . Тогда $l = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0}$.

Далее, представим, что мы разрезали конус по образующей и сделали из него развертку с углом β при вершине. В таком случае параллель переходит в дугу окружности радиуса l . Тогда длина этой дуги равна $\beta l = \beta \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0}$. Теперь приравняем длину параллели, найденную двумя разными способами:

$$\beta \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = 2\pi \cos \theta_0 \Rightarrow \beta = 2\pi \sin \theta_0.$$

Мы получили, что β равна указанному в начале углу α .

Попытаемся понять, почему так произошло. В прошлый раз мы выяснили, что конус локально изометричен плоскости. В плоскости в декартовых координатах символы Кристоффеля равны нулю, так как метрика константа, и параллельный перенос - это просто сдвиг. Рассмотрим конус с точкой A на параллели и вектором Y_0 с началом в точке A . Сделаем разрез через точку A . Тогда на развертке будут две различные точки A' и A'' на разных сторонах развертки. Так как исходный вектор направлен вдоль образующей конуса, то после параллельного переноса вектора из точек A' и A'' должны быть направлены вдоль двух сторон развертки. Параллельно исходному Y_0 в точку A'' переносится Y_1 . Между Y_0 и Y_1 , которые выходят из A'' , угол α , который равен углу при вершине развертки.

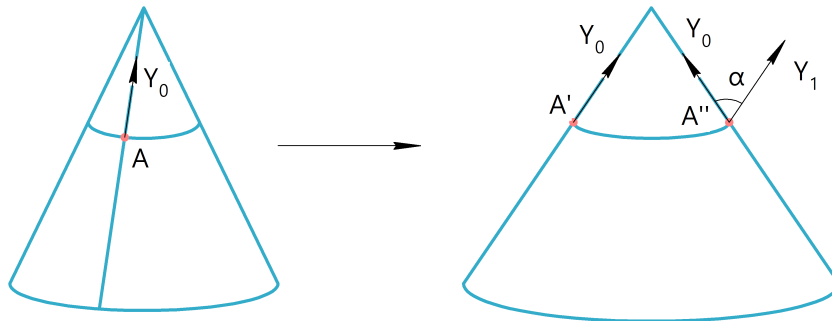


Рис. 10.6

11. Семинар 11. Геодезические. Часть 1

Плоскость

В плоскости метрика евклидова $g_{ij} = \delta_{ij}$. Далее вспомним, что символы Кристоффеля, которые вычисляются по формуле

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kp}\left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j}\right),$$

все равны нулю, так как коэффициенты метрики - константы.

Уравнение геодезических в координатах имеет следующий вид:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \Rightarrow \ddot{x}^k = 0.$$

Откуда мы получаем, что $x^k = a^k t + b^k$, то есть по каждой координате происходит равномерное движение по прямой с постоянной скоростью. Геодезические в плоскости - прямые, которые параметризованы так, что движение равномерное.

Сфера

Рассмотрим сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ произвольного радиуса.

Комментарий

Мы можем взять сферические координаты, найти в них метрику, найти символы Кристоффеля, и написать систему дифференциальных уравнений. Полученную систему можно решить, придумав правильные "трюки". Уравнения геодезических - это система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которую довольно сложно решить, поэтому применим некоторое геометрическое рассуждение.

Мы построим некоторое семейство. Из геометрических соображений докажем, что это геодезические, а затем воспользуемся теоремой существования и единственности, чтобы показать, что никаких других геодезических нет. Рассмотрим большие круги (сечение плоскостью Π , которая проходит через центр сферы) в натуральной параметризации. Возьмем касательный $\dot{\gamma}$ и нормальный m вектора в некоторой точке этого большого круга.

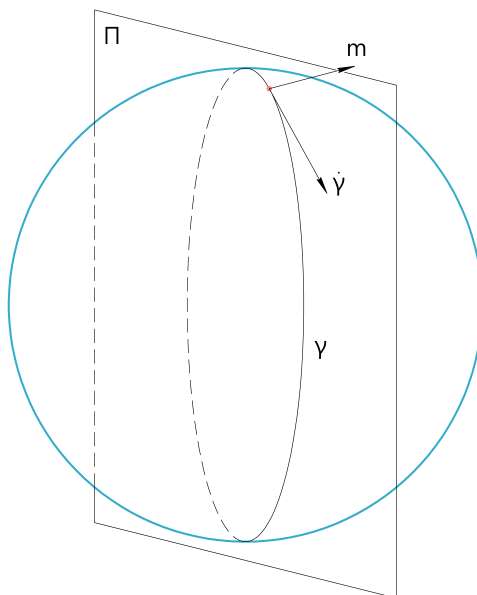


Рис. 11.1

Заметим, что $m, \dot{\gamma} \parallel \Pi$. γ - плоская кривая, поэтому γ лежит в Π , следовательно и $\ddot{\gamma} \parallel \Pi$. Но мы обсуждали раньше, что $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$. Отсюда выходит, что $\ddot{\gamma} \parallel m$. Тогда

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = P(\partial_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) = P\left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma}\right) = P(\ddot{\gamma}) = 0.$$

Значит, большие круги в натуральной параметризации - геодезические. Важно уточнить параметризацию, так как кривая без параметризации не является геодезической в смысле нашего определения.

Теперь докажем, что других геодезических на сфере нет. Возьмем на сфере с центром O точку A и касательный вектор X в этой точке. Проведем плоскость Π через точки O, A и параллельную X . Эта плоскость высечет большой круг, то есть $\Pi \cap S^2$ - большой круг, проходящий через A .

На геодезической нельзя менять параметр произвольно, но если мы сделаем аффинную замену (например, растяжение), то параметр останется натуральным. Выберем на круге такой аффинный натуральный параметр, что $\dot{\gamma}|_A = X$. Тогда этот большой круг $\gamma(t)$ - геодезическая, такая что $\gamma(t_0) = A$, $\dot{\gamma}(t_0) = X$. Мы получили условия задачи Коши для геодезической. Геодезическая - решение уравнения геодезических, то есть каждая из них решает задачу Коши. Мы для произвольных начальных данных A и X построили геодезическую, которая является большим кругом. Значит, в силу единственности задачи Коши, никаких других геодезических в аффинной натуральной параметризации нет.

Цилиндр

Рассмотрим цилиндр радиуса R , и пусть ось z - ось симметрии цилиндра. Тогда

$$\tilde{r}(\varphi, h) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, h).$$

Найдем метрику.

$$\tilde{r}_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0), \quad \tilde{r}_h = (0, 0, 1)$$

$\Downarrow$

$$u^1 = \varphi, \quad u^2 = h \quad \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили почти евклидову метрику, так как она диагональная, и на диагонали стоят константы. Возьмем другую параметризацию

$$r(\psi, h) = \left(R \cos \frac{\psi}{r}, R \sin \frac{\psi}{r}, h \right).$$

С такой параметризацией метрика получится евклидова. Это значит, что цилиндр локально изометричен плоскости, и изометрия устроена следующим образом: $F(\psi, h) = (psi, h)$. Изометрия локальная, так как ψ берется с точностью до сдвига на $2\pi R$. Значит, мы можем применить те же рассуждения, что и на плоскости, то есть $\Gamma_{ij}^k = 0$, следовательно $u^k = a^k t + b^k$. Локально получаются прямые, но они могут быть устроены по-разному. Например, прямые $h = t, \varphi = \varphi_0$, или окружности $h = const, \varphi = t$. Также могут быть винтовые линии. Это можно увидеть с помощью развертки. Разрежем цилиндр вдоль вертикальной образующей и развернем в плоскость.

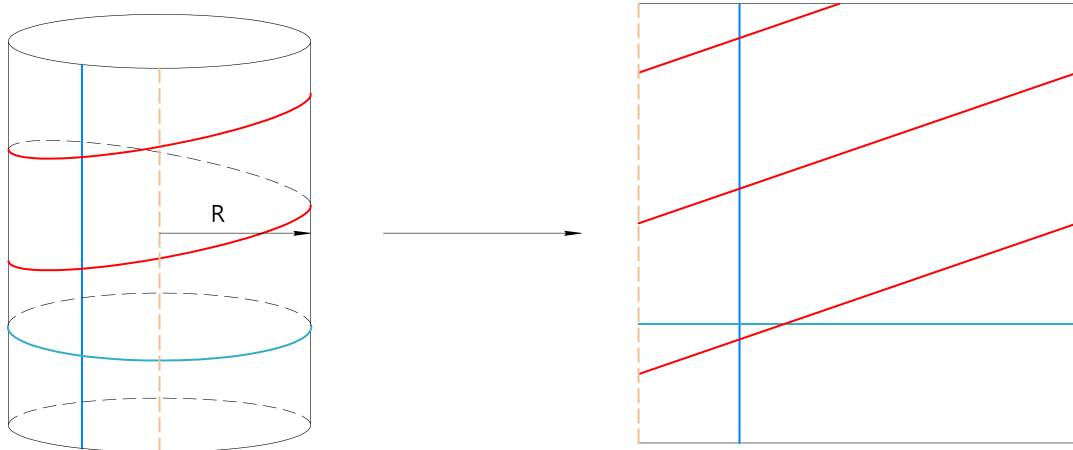


Рис. 11.2

Конус

Конус тоже можно получить склеиванием развертки. На развертке метрика евклидова, поэтому геодезическими будут различные прямые. Важно понять, что происходит, когда прямая пересекает образующую. Возьмем на образующей точку A и геодезическую, которая пересекает образующую в этой точке под углом α .

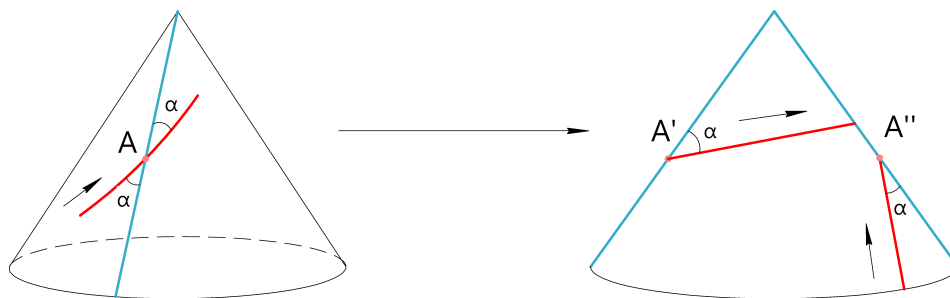


Рис. 11.3

На развертке мы имеем две точки A' и A'' , которые соответствуют точке A . Пусть мы входим в точку A'' под углом α . Тогда мы выйдем из точки A' с тем же углом α . То есть мы движемся вдоль прямой, пока не встретим разрез, а затем переходим в другую точку.

Заметим, что на конусе есть меридианы и параллели. На развертке меридианы переходят в геодезические, а параллели (точки, равноудаленные от вершины) перейдут в дуги окружностей. Параллель - не геодезическая.

Рассмотрим следующую задачу: на каких конусах есть самопересекающиеся геодезические?

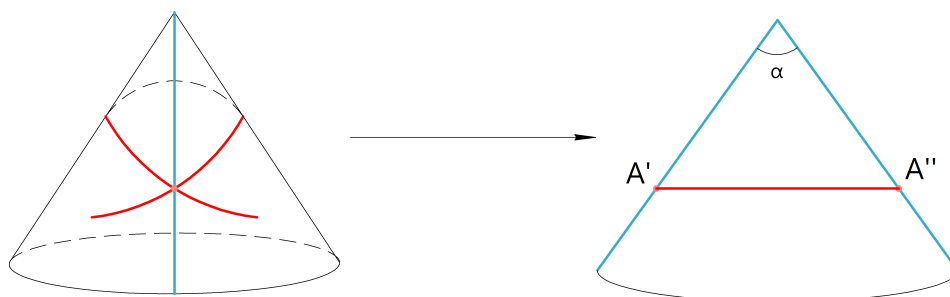


Рис. 11.4

Возьмем на конусе самопересекающуюся геодезическую (петлю) и сделаем разрез в точке самопересечения. На развертке она отобразится в некоторую геодезическую, которая является куском прямой, а точнее, прямой, соединяющей A' и A'' . Могут возникнуть два случая: когда угол развертки $\alpha < \pi$, и мы можем соединить две точки прямой; и когда угол развертки $\geq \pi$.

Если $\alpha \geq \pi$, то внутри развертки соединить точки A' и A'' нельзя, поэтому в этом случае самопересекающихся геодезических нет.

Упражнение

В каком случае геодезические могут самопересекаться дважды, трижды, k раз?

Задача 1

Мы уже знаем, что параллельный перенос и геодезические связаны. Мы обсуждали такую задачу, что параллельный перенос вдоль кривой, которая является кривой соприкосновения двух поверхностей, совпадает. Рассмотрим аналогичную задачу.

Упражнение

Доказать, что если Σ_1 и Σ_2 касаются вдоль γ , то есть $\gamma \subset \Sigma_1, \Sigma_2$, и $\forall t \ T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$, то если γ геодезическая на Σ_1 , то она и геодезическая на Σ_2 .

Решение

Рассмотрим два цилиндра, которые касаются вдоль образующей (рис. 10.3). В каждой точке $\gamma \ T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$. Это утверждение становится почти очевидным, если вспомнить один из способов задания уравнения геодезических, а именно, что $\ddot{\gamma} \perp T_{\gamma(t)}\Sigma_1$, а так как $T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$, то это условие эквивалентно для обеих касательных плоскостей.

Рассмотрим еще один пример. Впишем сферу в цилиндр. Тогда кривой соприкосновения будет параллель на цилиндре и экватор на сфере. Эта кривая - геодезическая и на сфере и на цилиндре.

Вспомним случай, который мы также рассматривали на прошлом семинаре: конус, надетый на сферу (рис. 10.4). В этом случае кривая соприкосновения не является геодезической на сфере и конусе, так как она не является геодезической на конусе.

Применим этот способ к следующему случаю. Рассмотрим некоторую поверхность

вращения. На такой поверхности есть параллели, у которых касательные вертикальные (параллельны оси вращения). Если такую поверхность вписать в цилиндр, то цилиндр и поверхность будут касаться вдоль этой параллели, и она будет являться геодезической.

Если параллель такая, что касательные к ней не вертикальные, то на поверхность вращения можно надеть конус, и они тоже будут касаться вдоль такой параллели, которая уже не будет являться геодезической.

То есть из касания поверхности вращения с цилиндром и конусом можно увидеть, какие параллели являются геодезическими, а какие нет.

Чтобы разобраться с меридианами нужно сделать небольшое рассуждение. Возьмем меридиан на поверхности вращения. В каждой точке меридиана возьмем прямую, ортогональную к меридиану в касательной плоскости. Совокупность таких прямых даст нам линейчатую поверхность, которая локально изометрична плоскости. Этот факт нужно проверить через параметризацию этой поверхности. Тогда меридиан будет соответствовать прямой на плоскости, которая является геодезической в евклидовой метрике, а так как изометрия локальная, то и на поверхности вращения меридиан - геодезическая.

Задача 2

Пусть две поверхности Σ_1 и Σ_2 пересекаются по кривой γ так, что $\forall t \ T_{\gamma(t)}\Sigma_1 \neq T_{\gamma(t)}\Sigma_2$. Доказать, что если γ - геодезическая на Σ_1 и Σ_2 , то это прямая.

Решение

Условие $T_{\gamma(t)}\Sigma_1 \neq T_{\gamma(t)}\Sigma_2$ называется условием трансверсальности. Вспомним, что γ - геодезическая на $\Sigma_1 \Leftrightarrow \ddot{\gamma} \parallel m_1$ и также γ - геодезическая на $\Sigma_2 \Leftrightarrow \ddot{\gamma} \parallel m_2$. В нашем случае $m_1 \neq \pm m_2$. Тогда это возможно только в том случае, если $\ddot{\gamma} = 0$. Значит $\gamma^k = a^k t + b^k$ - прямая.

12. Семинар 12. Геодезические. Часть 2

Геодезические в плоскости Лобачевского

Плоскость Лобачевского имеет разные изометричные модели. Мы будем пользоваться моделью в верхней полуплоскости и метрикой $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, то есть

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

Мы найдем уравнения геодезических в не параметризованном виде (по некоторым причинам, которые мы увидим позже, это окажется проще) и геодезически окажутся в точности прямые в модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости. Посчитаем символы Кристоффеля. Зафиксируем порядок координат $x^1 = x, x^2 = y$. Заметим, что из $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \neq 0$ только элементы при $i = j, k = 2$. Тогда

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = -\frac{2}{y^3}$$

Вспомним формулу для символов Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} - \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j} \right).$$

Так как обратная матрица диагональна, то $k = p$. $\Gamma_{ij}^k \neq 0$ только если $i = j = k = 2$ или два индекса равны 1, а третий 2. Тогда

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} y^2 \left(-\frac{2}{y^3} \right) = -\frac{1}{y}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{2}{y^3} \right) = \frac{1}{y}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} y^2 \left(-\frac{2}{y^3} \right) = -\frac{1}{y}$$

Напишем теперь уравнения геодезических $\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$.

$$\begin{aligned} k=1: \quad \ddot{x} - \frac{1}{y}(\dot{x}\dot{y} + \dot{y}\dot{x}) &= 0 \\ k=2: \quad \ddot{y} + \frac{1}{y}(\dot{x}\dot{x} - \dot{y}\dot{y}) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{y} = 0 \end{cases}$$

Мы получили систему из двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Обычно мы ищем первые интегралы, которые сохраняются на любом решении. Один из них мы уже знаем - это длина вектора скорости

$(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \text{const}$, а длина в нашей метрике это $I_1 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$. Чтобы проинтегрировать наши уравнения, нам нужен еще один первый интеграл. Их искать довольно сложно и в некотором смысле нужно угадывать, поэтому укажем второй без пояснений $I_2 = x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}y$. Проверим, что это действительно первый интеграл. Найдем $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_2 = \dot{x} + \frac{(\ddot{y}y + \dot{y}^2)\dot{x} - \dot{y}y\ddot{x}}{\dot{x}^2} \stackrel{=}{=}$$

На решениях $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ выражаются через уравнения системы, которую мы выписали ранее, поэтому $\ddot{y}y = \dot{y}^2 - \dot{x}^2$, а $\ddot{x}y = 2\dot{x}\dot{y}$, следовательно

$$\stackrel{=}{=} \dot{x} + \frac{(\dot{y}^2 - \dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x} - \dot{y}2\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} = \dot{x} + \frac{-\dot{x}^3 - 2\dot{x}\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = 0.$$

Заметим, что в I_2 предполагается, что $\dot{x} \neq 0$. Если $\dot{x} = 0$, то есть $x = \text{const}$, то первое уравнение нашей системы дифференциальных уравнений удовлетворяется, а второе дает уравнение на y , у которого есть решение - движение по вертикальным прямым $x = \text{const}$.

Разберемся со случаем $\dot{x} \neq \text{const}$. На решениях I_2 постоянный, то есть $x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}y = C$. Вспомним, что если мы хотим посмотреть на эти кривые, как на кривые $y(x)$, то по правилу дифференцирования сложной функции мы получим, что $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C - x}{y} \Rightarrow ydy = (C - x)dx.$$

Откуда после интегрирования и некоторых преобразований мы получим уравнение $x^2 - 2Cx + y^2 = C_1$. Это полуокружности (так как мы рассматриваем только верхнюю полуплоскость) $(x - C)^2 + y^2 = C_1 + C^2 = R^2$. В итоге мы получили, что геодезическими в плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости являются вертикальные прямые и полуокружности с центрами на оси x . Параметризация будет "хитрой", так как метрика имеет вид $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, то есть когда мы приближаемся к оси x величина y становится малой, следовательно расстояния становятся очень большими, поэтому движение по геодезическим получается неравномерное.

Геодезические в плоскости Лобачевского - это то, что в плоскости Лобачевского называют прямыми.

Формула Клеро (теорема Клеро)

Рассмотрим поверхность вращения и представим, что на ней есть геодезическая $\gamma(t)$. Возьмем параллель на поверхности вращения и в точке пересечения параллели и геодезической возьмем касательные к ним вектора. Пусть θ - угол между геодезической и параллелью на поверхности вращения (угол между кривыми - угол между векторами их скоростей в точке пересечения). И, наконец, пусть ρ - расстояние между точкой пересечения и осью вращения поверхности.

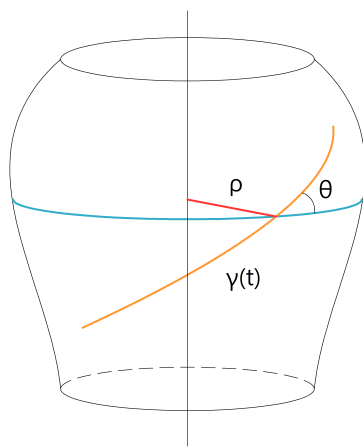


Рис. 12.1

Тогда утверждение теоремы следующее:

Для произвольной точки значение выражения $\rho(t) \cos \theta(t)$ постоянно.

Доказательство

Пусть поверхность вращения получена вращением вокруг оси Oz графика функции f . Для параметризации будем считать, что $v = z$, $u^1 = u$, $u^2 = v$, тогда

$$r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, v).$$

С такой параметризацией вектор скорости параллели ($u = s$, $v = \text{const}$) равен r_u . Разберемся теперь с вектором скорости геодезической. Мы знаем, что для любого вектора γ $\dot{\gamma} = \dot{u}r_u + \dot{v}r_v$.

Далее, посмотрим на наше выражение из условия теоремы. В нашей параметризации ρ - это $f(v(t))$. Косинус можно посчитать через скалярное произведение. Тогда

$$\rho(t) \cos \theta(t) = f(v(t)) \frac{(r_u, \dot{u}r_u + \dot{v}r_v)}{|r_u| |\dot{\gamma}(t)|} \equiv$$

Мы знаем, что у геодезической параметр всегда аффинный натуральный, значит мы можем считать, что параметр t - натуральный, следовательно пусть $|\dot{\gamma}(t)| = 1$. Теперь найдем первую квадратичную форму нашей поверхности.

$$r_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos(u), 0), \quad r_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin v, 1)$$

$\Downarrow$

$$I = g = \begin{pmatrix} f^2(v) & 0 \\ 0 & (f'(v))^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(f')^2 + 1} \end{pmatrix}$$

$$\equiv f(v(t)) \frac{f^2(v(t)) \dot{u}}{f(v(t))} = f^2(v(t)) \dot{u}.$$

Осталось доказать, что производная полученного выражения равна нулю. Чтобы это сделать заметим, что полученное равенство верно не для любой кривой, а на геодезических. Значит нам нужно найти уравнение геодезических. Посчитаем производную нашего выражения.

$$\frac{d}{dt}(f^2(v(t)) \dot{u}(t)) = f^2(v(t)) \ddot{u}(t) + 2f(v(t))f'(v(t))\dot{v}(t)\dot{u}(t).$$

Нам необходимо знать $\ddot{u}(t)$, то есть, на самом деле, нам нужно только одно уравнение геодезических, которое включает в себя $\ddot{u}(t)$. Найдем символы Кристоффеля, которые входят в нужное нам уравнение геодезических.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j} \right).$$

u - первая переменная, поэтому нас интересуют Γ_{11}^1 , $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, и Γ_{22}^1 . g^{-1} диагональная, поэтому $k = p$. Так как коэффициенты метрики не равны нулю только на диагонали и зависят только от v , поэтому

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 2ff', \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} = 2f'f'',$$

а остальные частные производные равны нулю. Значит $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$.

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \frac{f'}{f}.$$

Тогда запишем уравнения геодезических $\ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$ при $k = 1$:

$$\ddot{u} + \Gamma_{12}^1 \dot{u} \dot{v} + \Gamma_{21}^1 \dot{u} \dot{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \frac{2f'}{f} \dot{u} \dot{v} = 0.$$

Чтобы получить необходимое нам выражение умножим последнее равенство на $f^2(v(t))$

$$f^2 \ddot{u} + 2f' f \dot{u} \dot{v} = 0.$$

В итоге, мы получили ровно нашу производную, значит формула Клеро доказана.

Обсудим некоторые приложения для теоремы Клеро.

Мы знаем, что меридиан - это геодезическая. Для меридиана угол пересечения с параллелью $\frac{\pi}{2}$, поэтому утверждение теоремы Клеро становится очевидным, так как $\rho \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Рассмотрим теперь поверхность вращения, которая сужается к вершине, например, конус. В случае, когда мы рассматриваем не меридиан, $\cos \theta \neq 0$, следовательно $\cos \theta = \frac{const}{\rho}$, а так как $|\cos| \leq 1$, то и $|\frac{const}{\rho}| \leq 1$. Значит ρ не может быть сколь угодно маленьким, поэтому геодезические на таких поверхностях (кроме меридианов) могут продолжаться в сторону сужения до некоторой линии, где $\frac{const}{\rho} = 1$.

13. Семинар 13. Геодезические триангуляции

Сфера

Представим, что две точки сферы A и B соединены отрезком в пространстве. Если взять центр сферы и плоскость, порожденную этими тремя точками, то эта плоскость будет пересекать сферу по большому кругу, который будет проходить через точки A и B . Но если мы будем проецировать из центра сферы наш отрезок, то мы получим ровно этот большой круг, так как все лежит в одной плоскости.

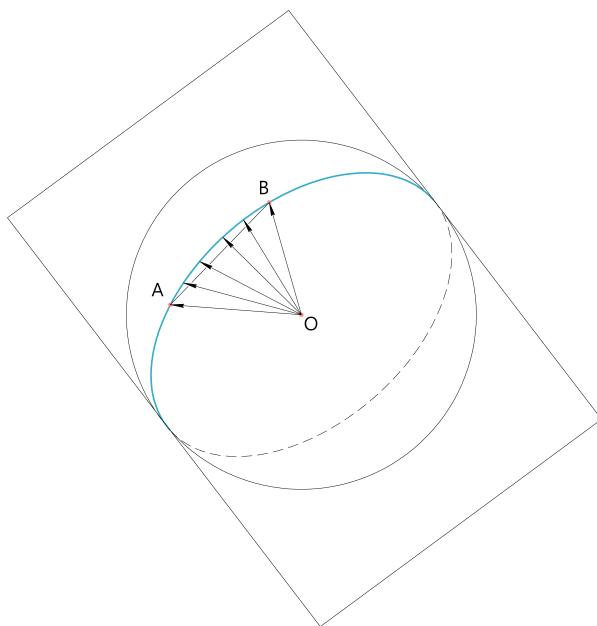


Рис. 13.1

То есть если $A, B \in S^2$ и не антиподальны (диаметрально противоположны), то проекция отрезка AB на сферу из ее центра дает большой круг, то есть геодезическую, соединяющую A и B .

Впишем теперь в сферу тетраэдр, а затем спроецируем каждое ребро и грань тетраэдра из центра на нашу сферу (рис. 13.2). Тогда мы получим геодезическую триангуляцию, где $V = 4$, $P = 6$, $\Gamma = 4$, следовательно Эйлера характеристика $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$.

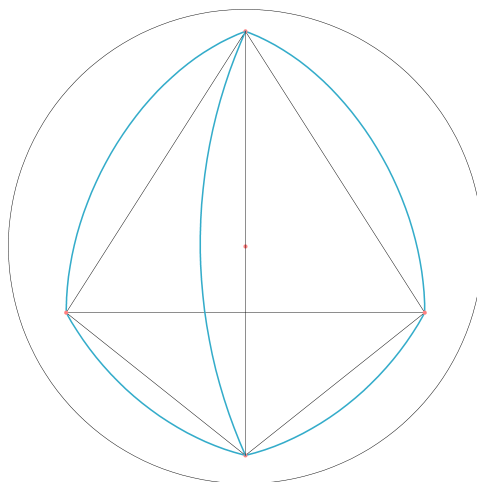


Рис. 13.2

Это не единственная геодезическая триангуляция сферы, которую можно легко получить. Можно вписать в сферу любое платоново тело (правильный многогранник) и подразделить грани. Впишем в сферу, например, куб. Грани куба - квадраты, но каждый можно по диагонали разделить на треугольники и спроецировать. Тогда мы получим другую геодезическую триангуляцию, где $B = 8$, $\Gamma = 6 \cdot 2 = 12$, $P = 12 + 6 = 18$, следовательно $\chi = 8 - 18 + 12 = 2$.

N-угольник

Заметим теперь, что не обязательно подразделять грани диагоналями. Рассмотрим пример с кубом и попробуем брать грани не только треугольные, но еще многоугольные, например, квадраты. Тогда $B = 8$, $P = 6$, $\Gamma = 6$, следовательно $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$. Почему так получается?

Представим, что у нас есть триангуляция, в которой есть не только треугольники, а, например, некоторый многоугольник. Чтобы у нас получилось сделать триангуляцию, нужно провести дополнительные ребра и разделить N -угольник на треугольники. В таком случае количество вершин не меняется $B' = B$. При проведении диагонали мы из N -угольника получаем один треугольник и один $N - 1$ -угольник. Так будет продолжаться, пока мы не дойдем до треугольника, поэтому в нашем случае (рис. 13.3) необходимо проводить диагональ $N - 3$ раза, тогда $P' = P + N - 3$. И, соответственно, каждая диагональ добавляет нам одну новую грань, поэтому $\Gamma' = \Gamma + N - 3$.

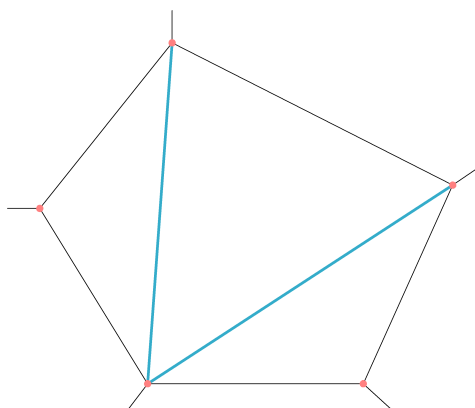


Рис. 13.3

В итоге, мы получили, что новая Эйлерова характеристика $\chi' = B' - P' + \Gamma' = B - P - n + 3 + \Gamma + n - 3 = B - P + \Gamma = \chi$. То есть, если мы считаем Эйлерову характеристику, разрешая граням быть не только треугольниками, то мы можем последовательно в каждой грани, проводя новые ребра, сделать триангуляцию, при этом Эйлерова характеристика не изменится.

Тор

Нарисуем некоторую фигуру и возьмем призму над этой фигурой.

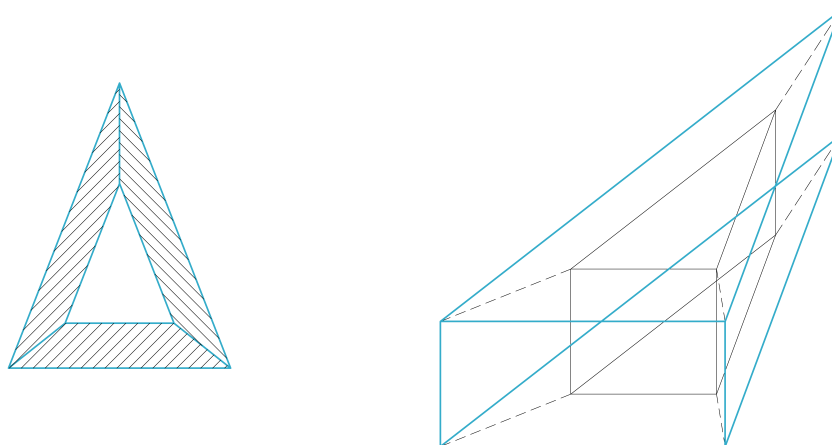


Рис. 13.4

Полученная фигура гомеоморфна тору, и можно получить, что Эйлерова характеристика $\chi = 0$. В плоской фигуре 6 вершин, поэтому $B = 12$. Число ребер равно удвоенному числу ребер плоской фигуры, к которому мы добавляем по 3 вертикальных внешних и внутренних ребра, значит $P = 9 + 9 + 6 = 24$. У плоской фигуры

3 грани, поэтому к 6 граням мы также добавляем по 3 вертикальные внешние и внутренние грани, следовательно $\Gamma = 6 + 3 + 3 = 12$. В итоге, $\chi = 12 - 24 + 12 = 0$.

Можно считать по еще более простым триангуляциям. Вспомним, что тор топологически получается склеиванием прямоугольника. Посчитаем, что будет из триангуляции, полученной таким склеиванием.

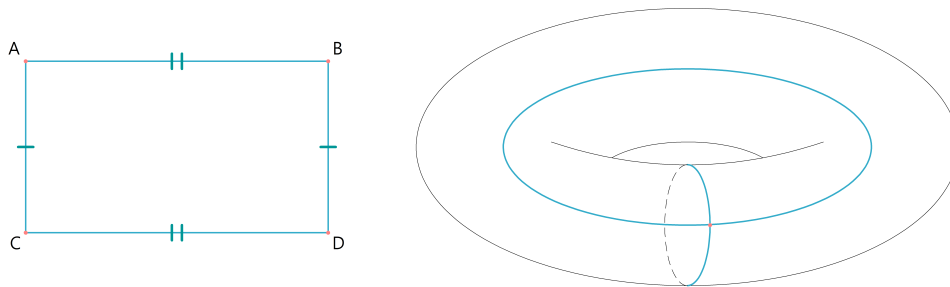


Рис. 13.5

Заметим, что из-за склеивания вершина A склеивается с вершиной B , и также вершины A и B склеиваются с C и D , поэтому, несмотря на то, что у прямоугольника 4 вершины, после склеивания остается $V = 1$. Аналогично число ребер после склеивания останется $P = 2$. Грань у тора одна, поэтому $\Gamma = 1$, следовательно $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$.

Посмотрим теперь на тор с аналитической точки зрения. Тор получается вращением окружности.

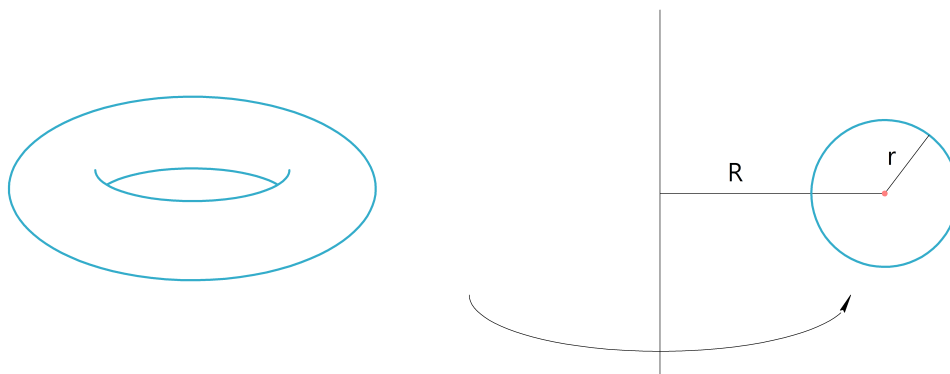


Рис. 13.6 Тор вращения

Запишем параметризацию:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$r(\varphi, \theta) = ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$$

Начнем с поиска базисных векторов.

$$r_\varphi = (-r \sin \varphi \cos \theta, -r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$$

$$r_\theta = (-(R + r \cos \varphi) \sin \theta, (R + r \cos \varphi) \cos \theta, 0)$$

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (R + r \cos \varphi)^2 \Rightarrow I = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos \varphi)^2 \end{pmatrix}$$

Можем сразу найти форму площади $dS = \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = r(R + r \cos \varphi) d\varphi d\theta$. Теперь осталось найти Гауссову кривизну. Для Гауссовой кривизны нам необходима вторая квадратичная форма. Найдем вектор нормали. В нашем случае его можно угадать, так как это будет единичный радиус-вектор окружности, только повернутый.

$$m = \frac{[r_\varphi, r_\theta]}{||[r_\varphi, r_\theta]||} = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$$

$$r_{\varphi\varphi} = (-r \cos \varphi \cos \theta, -r \cos \varphi \sin \theta, -r \sin \varphi) \Rightarrow L = (r_{\varphi\varphi}, m) = -r$$

$$r_{\theta\varphi} = (r \sin \varphi \sin \theta, -r \sin \varphi \cos \theta, 0) \Rightarrow M = (r_{\theta\varphi}, m) = 0$$

$$r_{\theta\theta} = (-(R + r \cos \varphi) \cos \theta, -(R + r \cos \varphi) \sin \theta, 0) \Rightarrow N = (r_{\theta\theta}, m) = -(R + r \cos \varphi) \cos \varphi$$

$$II = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -(R + r \cos \varphi) \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{r(R + r \cos \varphi) \cos \varphi}{r^2(R + r \cos \varphi)^2} = \frac{\cos \varphi}{r(R + r \cos \varphi)}$$

Тогда $K dS = \cos \varphi d\varphi d\theta$. Осталось посчитать интеграл.

$$\iint_{\text{Тор}} K dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Мы убедились, что для тора вращения Эйлера характеристика равна нулю.

14. Семинар 14. Экспоненциальное отображение

Экспоненциальное отображение на касательном пространстве

Рассмотрим примеры, когда экспоненциальное отображение определено на всем и не на всем касательном пространстве.

1. Возьмем евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, в котором геодезические - прямые. Тогда геодезическая с началом в точке A с начальным вектором X $\gamma_{A,X}(t) = A + tX$. Действительно, $\gamma_{A,X}(0) = A$, $\dot{\gamma}_{A,X}(0) = X$. Тогда $\exp_A X = \gamma_{A,X}(1) = A + X$ определено $\forall X$, то есть на всем $T_A \mathbb{E}^n \simeq \mathbb{E}^n$

2. Возьмем теперь евклидову плоскость без диска $\mathbb{E}^2 \setminus \mathbb{D}$ с евклидовой метрикой. Тогда рассмотрим некоторую точку. Если начальный вектор геодезической направлен не в сторону выреза, то геодезическая будет продолжаться бесконечно. А если взять начальный вектор, который направлен в сторону выреза, то мы получим не продолжаемую на всю $\mathbb{R}$ геодезическую.

Сюръективность и инъективность экспоненциального отображения

Рассмотрим примеры, когда экспоненциальное отображение в точке сюръективно или не сюръективно.

1. Возьмем также евклидову плоскость $\mathbb{E}^2$. Мы знаем, что $\exp_A X = A + X$, тогда мы можем получить любую точку, то есть $\exp_A^{-1} B = \overline{AB}$.

2. Для примера, когда отображение не сюръективно возьмем $\mathbb{E}^2 \setminus \mathbb{D}$. Тогда, если вырез лежит между точками A и B , то мы не сможем провести геодезическую так, чтобы попасть из одной точки в другую. То есть $\nexists X$ такой, что $\exp_A X = B$.

Теперь рассмотрим инъективность.

1. Снова рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{E}^2$, в которой $\exp_A X = A + X$. Тогда $\exp_A X = \exp_A Y \Leftrightarrow A + X = A + Y \Leftrightarrow X = Y$.

2. Случай не инъективного отображения не такой тривиальный, как предыдущие. Возьмем сферу S^2 радиуса $R = 1$ с точкой A в северном полюсе и начальным вектором X , выходящим из точки A . Мы знаем, что геодезические - это большие круги. Заметим, что длина геодезической (не только на сфере) $\exp_A tX$ от A до $\exp_A tX$ равна $t(X)$, так как $L = \int_0^t |\dot{\gamma}| dt = \int_0^t |\dot{\gamma}(0)| dt = |\dot{\gamma}(0)|t = t(X)$. Следовательно, $\exp_A X$ - это точка на геодезической на расстоянии $|X|$ от A . Это значит, что если $|X| = \pi$, то когда мы двигаемся вдоль большого круга, длина которого 2π , мы окажемся в антиподальной точке, тогда $\exp_A X = a(A)$ (антиподальная точка к A). Тогда если взять $X \neq Y$, но $|X| = |Y|$, то $\exp_A X \neq \exp_A Y$.

Свойства нормальных (геодезических) координат

Пусть точка $A \in \Sigma$. Построим нормальные (геодезические) координаты в окрестности A $v^1, \dots, v^k$, тогда

- 1) $v^1(A) = \dots = v^k(A) = 0$
- 2) $I_A = E$ в этих координатах
- 3) $\Gamma_{ij}^l(A) = 0$ в этих координатах

1. Мы знаем, что $\exp_A 0 = A$, значит $\exp_A^{-1} A = 0$, а так как нормальные координаты - это координаты в ортонормированном базисе от прообраза при экспоненциальном отображении, поэтому $v^1(A) = \dots = v^k(A) = 0$.

2. Мы знаем, что $d_0 \exp_A = \text{Id} : T_A \Sigma \rightarrow T_A \Sigma$, поэтому

$$I(r_{vi}, r_{vj}) = I(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

так как $d_0 \exp_A e_i = r_{vi}$.

3. Здесь необходимо заметить следующее: мы знаем, что $\exp_A tX$ - это геодезическая $\gamma_{A,X}(t)$. Это значит, что $\exp_A^{-1} \gamma_{A,X}(t) = tX$, то есть геодезическая $\gamma_{A,X}(t)$ имеет в нормальных координатах вид $v^1 = tX^1, \dots, v^k = tX^k$, то есть в нормальных координатах любая геодезическая, выходящая из A , имеет вид $v^i = tX^i$, где X^i - константа координаты начального вектора. Тогда, так как v^i удовлетворяют уравнению геодезических $\ddot{v}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{v}^i \dot{v}^j = 0$, где Γ_{ij}^l в нормальных координатах, то при $t = 0$, то есть в точке A , мы получаем

$$0 + \Gamma_{ij}^l(A) X^i X^j = 0, \quad \forall X^i, X^j \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^l(A) = 0.$$

Полугеодезические координаты

Докажем утверждение про координатные линии. Пусть $u^1, \dots, u^k$ - полугеодезические координаты. Доказать, что $u^1 = t, u^2 = \text{const}, \dots, u^k = \text{const}$ геодезическая.

По условию метрика должна иметь вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$$

Подставим нашу кривую в уравнение геодезических $\ddot{u}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$ и посмотрим, что необходимо для его выполнения.

$$\dot{u}^i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}, \quad \ddot{u}^i = 0,$$

поэтому при подстановке $u^1 = t, u^2 = \text{const}, \dots$ все уравнения геодезических будут иметь вид $\Gamma_{11}^l = 0$. Проверим это.

$$\Gamma_{11}^l = \frac{1}{2} g^{lp} \left(\frac{\partial g_{p1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{1p}}{\partial u^1} \right) = 0,$$

так как $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^p} = \frac{\partial 1}{\partial u^p} = 0$, а два других слагаемых равны либо 1 либо 0 в зависимости от p , но в любом случае g_{p1} и g_{1p} константы, поэтому производные равны нулю.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Возьмем евклидовы координаты x и y , тогда у нас кривые $x = t, y = \text{const}$ - вертикальные прямые, которые являются геодезическими.
2. Снова возьмем евклидову плоскость, но с полярными координатами r, φ . Первая квадратичная форма устроена следующим образом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, поэтому это действительно полугеодезические координаты. Линии $r = t, \varphi = \text{const}$ - лучи, выходящие из начала координат, которые тоже являются геодезическими.

Полярные полугеодезические координаты

Доказать, что полярные полугеодезические координаты являются геодезическими.

Пусть e_1, e_2 - ортонормированный базис в $T_A\Sigma$. Тогда v^1, v^2 - соответствующие нормальные координаты. Введем наши полярные полугеодезические координаты следующим образом $v^1 = \rho \cos \varphi$, $v^2 = \rho \sin \varphi$.

Пусть некоторый вектор $X \in T_A\Sigma$ фиксирован и $|X| = 1$. Тогда в касательном пространстве у нас есть луч tX , который направлен из 0 по направлению X . Этот луч переводится экспонентой в геодезическую $\gamma_{A,X}(t)$. Это значит, что $|\dot{\gamma}_{A,X}(t)| = |\dot{\gamma}_{A,X}(0)| = |X| = 1$.

Вектор X имеет координаты X^1, X^2 в базисе e_1, e_2 . Пусть $X^1 = \cos \varphi_0$, $X^2 = \sin \varphi_0$. Тогда в нормальных координатах геодезическая $\gamma_{A,X}(t)$ имеет вид $v^1 = tX^1$, $v^2 = tX^2$, так как мы берем ее прообраз при экспоненциальном отображении, который равен tX . Следовательно, в полярных геодезических координатах мы получим $\rho = t$, $\varphi = \varphi_0$. Тогда

$$r_\rho|_{\rho=t, \varphi=\varphi_0} = \frac{\partial}{\partial \rho}|_{\rho=t, \varphi=\varphi_0} \exp_A tX = \dot{\gamma}_{A,tX}(1) = \dot{\gamma}_{A,X}(t).$$

Тогда стандартный коэффициент метрики $E = g_{11} = (r_\rho, r_\rho) = |\dot{\gamma}_{A,X}(t)|^2 = |X| = 1$.

Разберемся с остальными коэффициентами метрики. Мы знаем, что на касательной плоскости лучи с началом в точке A ортогональны окружностям с центром в точке A . Применив экспоненциальное отображение лучи превратятся в геодезические, а окружности в произвольные замкнутые кривые. Докажем, что они лучи и окружности после отображения по-прежнему будут пересекаться под прямым углом.

Возьмем на касательной плоскости произвольную точку пересечения луча и окружности. Эта точка имеет полярные координаты (ρ_0, φ_0) , значит есть вектор $X_0 = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$, и эта точка - это $\rho_0 X_0$.

Мы хотим посмотреть на две кривые: tX_0 в T_AX (лучи) и $\exp_A tX_0 = \gamma_{A,X}(t)$ на Σ (геодезические); и $\rho_0 X(s)$, где $X(s) = (\cos s, \sin s)$, в $T_A\Sigma$ (окружности) и $\exp_A \rho_0 X(s) = \gamma_{A,X(s)}(\rho_0)$ (замкнутые кривые).

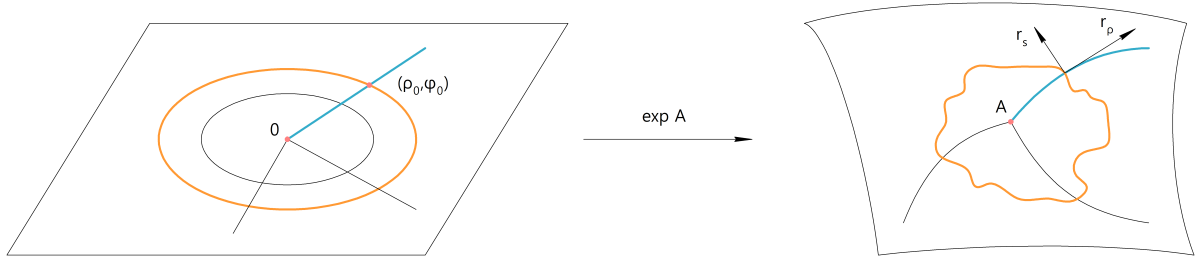


Рис. 14.1

Тогда

$$r_\rho = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{A,X(s)} t, \quad r_\varphi = \frac{\partial}{\partial s} \gamma_{A,X(s)} t.$$

Посчитаем $F(t, s)$ в точке ρ_0, φ_0

$$F = \left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{A,X(s)}(t), \frac{\partial}{\partial s} \gamma_{A,X(s)}(t) \right) \Big|_{t=\rho_0, s=\varphi_0}.$$

Проверим, что этот коэффициент равен нулю. Заметим, что если $t = 0$, то $F(0, s) = (X(s), 0) = 0$, так как при $t = 0$ $\gamma_{A,X(s)}(t) = A$, а $\frac{\partial}{\partial s} A = 0$. Если теперь доказать, что производная по t тоже равна нулю, то все будет выполнено.

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{A,X(s)}(t), \frac{\partial}{\partial s} \gamma_{A,X(s)}(t) \right) \equiv$$

Мы знаем, что производная по t - это производная вдоль вектора скорости соответствующей кривой, а также, что скалярное произведение согласовано со связностью, поэтому

$$\equiv \left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \equiv$$

$\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0$, так как $\forall s$ γ - геодезическая. Также заметим, что $\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial \gamma}{\partial t}$, так как они коммутируют.

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |X(s)|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} 1 = 0.$$

В итоге, мы получили, что $F = 0$ при $t = 0$ и $\frac{\partial}{\partial t} F = 0$, следовательно $F \equiv 0$. Значит наша метрика имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$. Про G мы ничего сказать не можем, так как лучи на $T_A \Sigma$ переходят в геодезические на Σ и у них скорость постоянная, поэтому $E = 1$. Ортогональность окружностям при отображении также сохраняется. Но длина вектора в каждой точке окружности постоянна, а при отображении длина вектора может быть разной. Это зависит от поверхности. Но во всяком случае мы получили, что это полугеодезическая система координат.

Свойства полярных полугеодезических координат

Здесь есть еще два свойства, которые нам пригодятся, когда мы будем работать с поверхностями постоянной гауссовой кривизны.

Доказать, что в полярных полугеодезических координатах

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$$

Пусть $\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$ в нормальных координатах. Мы знаем, что эта матрица в точке A имеет диагональный вид. Также у нас есть форма площади, которая устроена одинаково в любых координатах

$$\sqrt{EG - F^2} d\rho d\varphi = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} dv^1 dv^2$$

Между ρ, φ и $v^1 v^2$ формулы перехода такие же, как между стандартными евклидовыми и полярными координатами, поэтому $dv^1 dv^2 = \rho d\rho d\varphi$. Так как $E = 1, F = 0$, то мы получаем

$$\sqrt{G} = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \rho \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0,$$

так как матрица в точке A (условие $\rho = 0$) равна единичной, поэтому $\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = 1$.

Теперь посчитаем второй предел.

$$(\sqrt{G})_\rho = (\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2})_\rho \rho + \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1.$$

15. Семинар 15. Минимальные поверхности

Геликоид

Доказать, что геликоид - минимальная поверхность.

Запишем параметризацию геликоида (изображение геликоида есть в семинаре 9 рис. 9.4):

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv),$$

где h - это скорость, с которой вращающийся отрезок движется вверх. Чтобы увидеть, что это минимальная поверхность, посчитаем среднюю кривизну.

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad r_v = (-u \sin v, u \cos v, h)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} E = (r_u, r_u) &= 1 \\ F = (r_u, r_v) &= 0 \\ G = (r_v, r_v) &= u^2 + h^2 \end{aligned} \Rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + h^2 \end{pmatrix}$$

Для вычисления второй квадратичной формы нам необходим единичный вектор нормали и вторые производные

$$m = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & h \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{|[r_u, r_v]|} = \frac{(h \sin v, -h \cos v, u)}{\sqrt{h^2 + u^2}}$$

$$\begin{aligned} r_{uu} &= 0 & \Rightarrow L = (r_{uu}, m) &= 0 \\ r_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) & \Rightarrow M = (r_{uv}, m) &= -\frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}} \\ r_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) & \Rightarrow N = (r_{vv}, m) &= 0 \end{aligned}$$

$$II = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}} \\ -\frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Осталось посчитать среднюю кривизну.

$$H = \text{tr}(II I^{-1}) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}} \\ -\frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + h^2} \end{pmatrix} = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Мы получили, что геликоид - минимальная поверхность.

Минимальные поверхности вращения

Найдем поверхности вращения, которые являются минимальными.

Одну тривиальную поверхность вращения мы уже знаем. Если взять ось и вращать прямую, ортогональную этой оси, то мы получим плоскость, ортогональную оси вращения. Плоскость - минимальная поверхность.

Теперь рассмотрим произвольную кривую, которую мы будем вращать вокруг оси. Зададим в плоскости Ozx кривую $x = x(t)$, $z = z(t)$. В общем случае мы получим недоопределенную систему дифференциальных уравнений, так как мы можем перепараметризовывать кривую, и вместе с каждым решением будут идти параметризации, что неудобно. Заметим, что в окрестности любой точки, кроме тех, в которых к точке можно провести горизонтальную касательную, мы можем выразить x как функцию от z $x = x(z)$. Рассматривая кривые такого вида мы потеряем те кривые, у которых в каждой точке касательные горизонтальные, но позже мы увидим, что такая кривая - только плоскость, которую мы рассмотрели выше.

Мы не очень хотим брать z в качестве параметра, так как тогда мы получим z как локальную координату на поверхности и z как глобальную координату в пространстве. Поэтому в качестве параметра мы возьмем высоту кривой h . Тогда $z = h$, $x = f(h)$ - расстояние до z . Пусть угол вращения равен φ , тогда параметризация нашей поверхности вращения имеет следующий вид

$$r(\varphi, h) = (f(h) \cos \varphi, f(h) \sin \varphi, h) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = f(h) \cos \varphi \\ y = f(h) \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

Зафиксируем порядок переменных $u^1 = \varphi$, $u^2 = h$. Будем опускать аргумент у f , так как f зависит только от h , а штрих будет обозначать производную по h .

Минимальная поверхность - поверхность нулевой средней кривизны. Значит нам нужно найти первую и вторую квадратичную формы. Начнем с базиса в касательном пространстве.

$$r_\varphi = (-f \sin \varphi, f \cos \varphi, 0), \quad r_h = (f' \cos \varphi, f' \sin \varphi, 1)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} E &= (r_\varphi, r_\varphi) = f^2 \\ F &= (r_\varphi, r_h) = 0 \\ G &= (r_h, r_h) = 1 + (f')^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad I = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 + (f')^2 \end{pmatrix}$$

Первая квадратичная форма получилась диагональная, так как координатные линии, отвечающие φ и h , это параллели и меридианы на поверхности вращения, а они ортогональны. Теперь найдем вектор нормали и вторые производные для второй квадратичной формы.

$$m = \frac{[r_\varphi, r_h]}{|[r_\varphi, r_h]|} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -f \sin \varphi & f \cos \varphi & 0 \\ f' \cos \varphi & f' \sin \varphi & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{|[r_\varphi, r_h]|} = \frac{(\cos \varphi, \sin \varphi, -f')}{\sqrt{1 + (f')^2}}$$

$$\begin{aligned} r_{\varphi\varphi} &= (-f \cos \varphi, -f \sin \varphi, 0) \Rightarrow L = (r_{\varphi\varphi}, m) = -\frac{f}{\sqrt{1 + (f')^2}} \\ r_{\varphi h} &= (-f' \sin \varphi, f' \cos \varphi, 0) \Rightarrow M = (r_{\varphi h}, m) = 0 \\ r_{hh} &= (f'' \cos \varphi, f'' \sin \varphi, 0) \Rightarrow N = (r_{hh}, m) = \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}} \end{aligned}$$

$$II = \begin{pmatrix} -\frac{f}{\sqrt{1 + (f')^2}} & 0 \\ 0 & \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}} \end{pmatrix}$$

Мы нашли все необходимое для поиска средней кривизны.

$$\begin{aligned} H &= \text{tr}(II I^{-1}) = \text{tr} \begin{pmatrix} -\frac{f}{\sqrt{1 + (f')^2}} & 0 \\ 0 & \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + (f')^2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{f \sqrt{1 + (f')^2}} + \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1 - (f')^2 + f'' f}{f(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Значит поверхность минимальна тогда, когда $-1 - (f')^2 + f'' f = 0$. Необходимо, чтобы $f \neq 0$, поэтому потребуем, чтобы $f > 0$. Решим это уравнение, чтобы найти все минимальные поверхности вращения.

$$\frac{d^2 f}{dh^2} - \left(\frac{df}{dh} \right)^2 - 1 = 0$$

Заметим, что это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Перейдем к уравнению первого порядка. Это уравнение автономное, коэффициенты уравнения не зависят от h . Сделаем следующее: обратим нашу функцию

$f(h)$, чтобы получить $h(f)$ и подставим в производную. Тогда $\frac{df}{dh}(h(f)) = p(f)$, где p - пока что неизвестная функция. Аналогично со второй производной

$$\frac{d^2h}{df^2} = \frac{d}{dh} \left(\frac{df}{dh} \right) = \frac{d}{dh} p(f) = \frac{dp}{df} \frac{df}{dh} = p \frac{dp}{df}.$$

Таким образом первая производная выразилась через f , а вторая - через производную p . Тогда наше уравнение второго порядка превратилось в

$$p \cdot f \cdot \frac{dp}{df} - p^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p dp}{1 + p^2} = \frac{df}{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d(1 + p^2)}{1 + p^2} = \frac{df}{f}$$

Проинтегрируем полученное уравнение и возьмем экспоненту:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + p^2) = \ln f + C_1 \quad \Rightarrow \quad 1 + p^2 = e^{2C_1} f^2 = C_2 f^2.$$

Нам нужно найти f . Для этого нам нужна явная формула для p : $p = \sqrt{C_2 f^2 - 1}$ (можно убедиться, что отрицательное p не даст нового решения, поэтому мы его не берем). Вернемся назад:

$$\frac{df}{dh} = \sqrt{C_2 f^2 - 1}$$

Мы получили еще одно простое уравнение, которое также можно решить методом разделения переменных.

$$\frac{df}{\sqrt{C_2 f^2 - 1}} = dh$$

Рассмотрим функцию, обратную к гиперболическому косинусу (ареа-косинус), $arch$. Можно легко вычислить, что $arch't = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$. Поэтому интеграл от полученного нами уравнения будет ареа-косинусом, но для этого нужно выделить в знаменателе t^2 .

$$\frac{1}{\sqrt{C_2}} \frac{d(\sqrt{C_2} f)}{(\sqrt{C_2} f)^2 - 1} = dh \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{C_2}} arch(\sqrt{C_2} f) = h + C_3$$

Переобозначим $\sqrt{C_2} = \alpha$, $\sqrt{C_2} C_3 = \beta$, тогда

$$arch(\alpha f) = \alpha h + \beta \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\text{ch}(\alpha h + \beta)}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Мы получили функцию, которая дает нам минимальную поверхность вращения, отличную от плоскости. Значит

$$r(\varphi, h) = \left(\frac{\text{ch}(\alpha h + \beta)}{\alpha} \cos \varphi, \frac{\text{ch}(\alpha h + \beta)}{\alpha} \sin \varphi, h \right)$$

β здесь является сдвигом, поэтому достаточно посмотреть на $\frac{\text{ch}(\alpha h)}{\alpha}$.

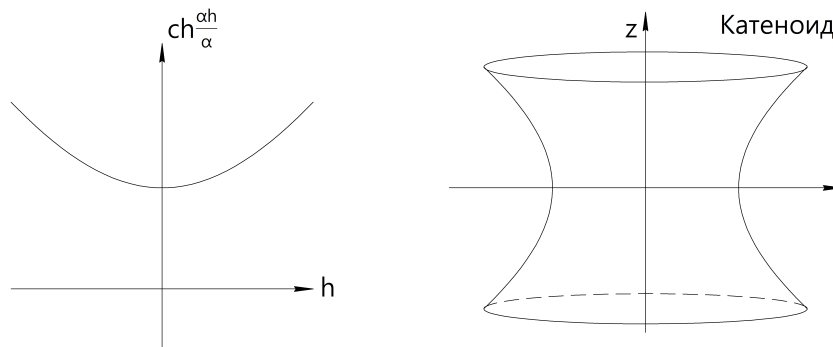


Рис. 15.1

График этой функции называют цепной линией. В наших координатах эта кривая повернута, и при вращении вокруг оси z мы получим катеноид.

16. Семинар 16. Плоскость Лобачевского

Гауссова кривизна плоскости Лобачевского

Найти гауссову кривизну плоскости Лобачевского.

Мы рассматриваем модель плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости, то есть точки $y > 0$ и метрику

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad I = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

У такой плоскости Лобачевского гауссова кривизна равна -1 , а мы хотим, чтобы гауссова кривизна была произвольной, поэтому рассмотрим метрику $g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ay^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ay^2} \end{pmatrix}$, где a - некоторая константа. В данном случае поверхность не дана нам как поверхность внутри трехмерного пространства, поэтому мы можем найти кривизну косвенно, через формулу, которая связывает гауссову кривизну с тензором Римана, который выражается через символы Кристоффеля. Нам необходимо по метрике найти символы Кристоффеля, затем посчитать гауссову кривизну через тензор Римана.

Вспомним формулу символов Кристоффеля. Пусть $x^1 = x$, $x^2 = y$, тогда

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \right).$$

Обратим внимание, что $g^{kl} = g_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} ay^2 & 0 \\ 0 & ay^2 \end{pmatrix}$ диагональна, поэтому в символах Кристоффеля $k = l$. Также заметим, что только диагональные элементы не являются константами, и они зависят только от $x^2 = y$, поэтому $\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = -\frac{2}{ay^3}$, а остальные частные производные равны нулю. Тогда $\Gamma_{ij}^k \neq 0$ только для Γ_{22}^2 , Γ_{11}^2 , $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} ay^2 \cdot \left(-\frac{2}{ay^3} \right) = -\frac{1}{y} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} ay^2 \cdot \frac{2}{ay^3} = \frac{1}{y} \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -\frac{1}{y} \end{aligned}$$

Приступим к вычислению гауссовой кривизны с помощью тензора Римана. Выпишем формулы для тензора Римана и для гауссовой кривизны через тензор Римана:

$$(R(e_p, e_i)e_j)^r = \partial_{e_p} \Gamma_{ij}^r - \partial_{e_i} \Gamma_{pj}^r + \Gamma_{ij}^q \Gamma_{pq}^r - \Gamma_{pj}^q \Gamma_{iq}^r - [e_p, e_i]^r \Gamma_{qj}^r$$

$$Kg_{22} = (R(e_1, e_2)e_2)^1$$

$$K \frac{1}{ay^2} = (R(e_1, e_2)e_2)^1 = \left| \begin{array}{c} p = 1 \\ i = 2 \\ j = 2 \\ r = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{22}^1 - \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{y^2}.$$

В итоге мы получили, что $K = ay^2 \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -a$. Это постоянная отрицательная кривизна, так как для положительной определенности метрики необходимо, чтобы $a > 0$. Действительно, плоскость Лобачевского область, которая имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну.

Локальная изометрия псевдосферы Бельтрами и плоскости Лобачевского

Выпишем параметризацию псевдосферы Бельтрами про которую мы уже знаем, что у нее отрицательная постоянная гауссова кривизна.

$$r(u, v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \cos u \right) \right)$$

Также мы знаем, что у плоскости Лобачевского отрицательная постоянная гауссова кривизна. На лекции мы выяснили, что в полярных полугеодезических координатах поверхности одинаковой постоянной отрицательной гауссовой кривизны устроены одинаково. Построим явно локальную изометрию псевдосферы Бельтрами и плоскости Лобачевского.

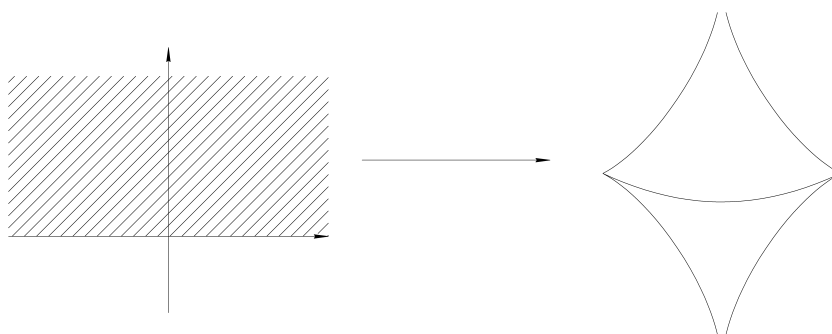


Рис. 15.2

На псевдосфере локальные координаты u и v , значит нам нужно выразить их через

x и y . Воспользуемся формулой (подобранной) $u = \arcsin \frac{1}{y}$, $v = x$. Заметим, что это отображение определено не на всей плоскости Лобачевского, так как $\sin$ принимает значения не больше 1, поэтому $\frac{1}{y} \leq 1$ или $y \geq 1$. Есть теорема, которая гласит, что даже локально нельзя всю плоскость Лобачевского поместить в трехмерное евклидово пространство. То есть мы берем часть верхней полуплоскости без полосы от 0 до 1.

Чтобы убедиться, что отображение изометрия, нужно взять метрику на псевдосфере, найти ее обратный образ на плоскости Лобачевского, и убедиться, что она будет совпадать с метрикой плоскости Лобачевского. Но мы поступим немного проще. Так как псевдосферу можно отобразить в $\mathbb{R}^3$, то мы возьмем композицию отображений плоскости в псевдосферу и псевдосферы в $\mathbb{R}^3$ и индуцируем метрику, которая получается после отображения в терминах x и y .

Начнем с некоторых вычислений. Подставив $u = \arcsin \frac{1}{y}$ в $r(u, v)$ мы получим очень сложное выражение, поэтому сделаем упрощения.

$$\sin u = \frac{1}{y} \Rightarrow \cos^2 u = 1 - \sin^2 u = 1 - \frac{1}{y^2} \Rightarrow \cos u = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}.$$

Здесь можно брать разные ветви, мы выберем с минусом (это упростит некоторые вычисления).

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{u}{2} &= \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}}{\frac{1}{y}} = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} &= \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}). \end{aligned}$$

Здесь укажем факт, который упростит нам вычисления, что полученная функция - это арча-косинус $\operatorname{arch} y$. Мы знаем, что $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ и $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Пусть $s = \operatorname{ch} t$, тогда обратной функцией $t = \operatorname{arch} s$. Чтобы его найти запишем уравнение

$$s = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow (e^t)^2 - 2se^t + 1 = 0$$

Это квадратное уравнение относительно e^t . его корни имеют вид $e^t = s \pm \sqrt{s^2 - 1}$ (обычно для арча-косинуса берется корень с плюсом). Тогда $t = \operatorname{arch} s = \ln(s + \sqrt{s^2 - 1})$. Мы воспользуемся арча-косинусом, так как с ним будет проще посчитать производную (с помощью теоремы об обратной функции)

$$\operatorname{arch}' s = \frac{1}{\operatorname{ch}' t} = \frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$$

Теперь мы можем записать нашу параметризацию в переменных x и y и посчитать метрику.

$$r(x, y) = \left(a \frac{1}{y} \cos x, a \frac{1}{y} \sin x, a \left(\operatorname{arch} y - \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \right) \right)$$

$$r_x = \left(-a \frac{\sin x}{y}, a \frac{\cos x}{y}, 0 \right) \Rightarrow E = g_{11} = (r_x, r_x) = \frac{a^2}{y^2}$$

Для производной по y посчитаем сначала отдельно производную третьей координаты.

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{arch} y - \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} - \frac{-(-2)y^{-3}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} - \frac{1}{y^2 \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y^2 - 1}{y^2 \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y^2} \\ r_y &= \left(-\frac{a \cos x}{y^2}, -\frac{a \sin x}{y^2}, \frac{a \sqrt{y^2 - 1}}{y^2} \right) \Rightarrow F = g_{12} = (r_x, r_y) = 0 \\ G = g_{22} = (r_y, r_y) &= \frac{a^2 \cos^2 x}{y^4} + \frac{a^2 \sin^2 x}{y^4} + \frac{a^2 (y^2 - 1)}{y^4} = \frac{a^2}{y^2} \\ &\Downarrow \\ I &= a^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Если $a = 1$, то мы получаем ровно ту метрику, которая получается на плоскости Лобачевского с гауссовой кривизной -1 . Если $a \neq 1$, то это будет отвечать постоянной гауссовой кривизне $-\frac{1}{a^2}$.

Обратим внимание на следующее: получившаяся параметризация в координатах x и y периодическая по x , а по y нет. Это похоже на отображение плоскости на цилиндр. То есть это не взаимно-однозначное соответствие, но локально - это изометрия, как у плоскости и цилиндра.

Дополнение

В завершение рассмотрим верхнюю полуплоскость и диск радиуса 1. Пусть плоскость комплексная $z = x + iy$, тогда верхней полуплоскости отвечает $\operatorname{Im} z > 0$. Дisku отвечает уравнение $|z| < 1$. Между ними есть преобразование, которое удобно записывается в комплексной форме $\frac{z-i}{z+i}$. Рассмотрим, куда переходят точки при этом отображении: $0 \rightarrow -1$, $1 \rightarrow \frac{1-i}{1+i} = -i$, $-1 \rightarrow \frac{-1-i}{-1+i} = i$, $\infty \rightarrow 1$, $i \rightarrow 0$. Это дробно-линейное преобразование. Они переводят окружности или прямые в прямые или окружности. В нашем случае прямая (вещественная ось) переходит в окружность, а верхняя полуплоскость переходит во внутренность окружности.

Нам не обязательно рассматривать поверхности в евклидовом пространстве. Возьмем $\mathbb{R}^3$ с псевдоевклидовой метрикой $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и рассмотрим гиперboloид $u^2 + v^2 - t^2 = -1$. У него есть асимптотический конус. Подберем такую плоскость, чтобы асимптотический конус высекал единичный диск. Рассмотрим такое отображение, когда точки верхней полуплоскости с помощью преобразования Кэли $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ переходят во внутренность диска. Каждой точке внутри диска будет соответствовать точка на верхней чаше гиперboloида следующим образом: мы проводим прямую через начало координат и внутреннюю точку диска и пересекаем верхнюю чашу гиперboloида в некоторой точке.

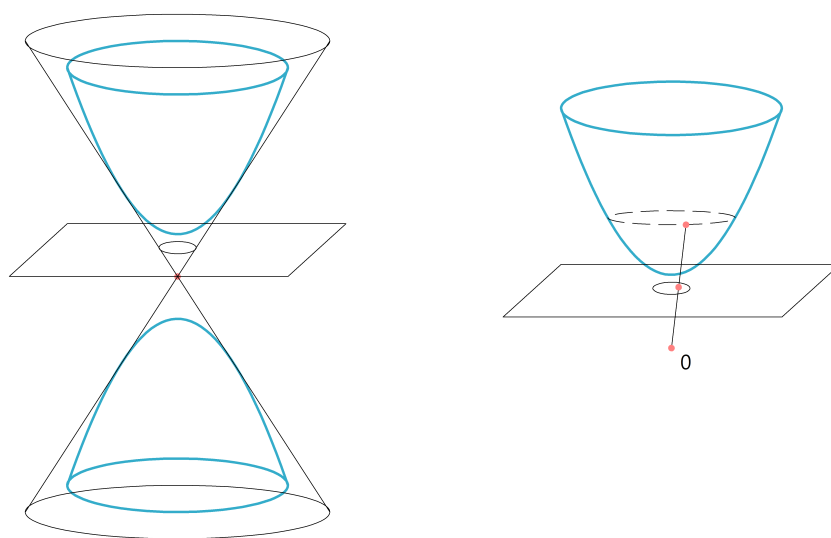


Рис. 15.3

Таким образом мы получим отображение точек верхней полуплоскости на верхнюю часть гиперboloида. Раньше мы занимались только двумерными поверхностями в $\mathbb{R}^3$. Но можно рассматривать и случай псевдоевклидова пространства. Мы также можем ограничиваться на касательное пространство в каждой точке и получить первую квадратичную форму. На каких-то поверхностях первая квадратичная форма будет положительно определена, а на каких-то нет. На рассмотренной поверхности квадратичная форма будет положительно определена. Если мы возьмем метрику, индуцированную на верхней чаше гиперboloида из псевдоевклидовой метрики в $\mathbb{R}^3$ и параметризуем ее через проекцию верхней полуплоскости во внутренность диска на гиперboloид, то метрика получится $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У