



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ



Содержание

Лекция 1	6
1. Геометрия кривых	6
Что такое кривая?	6
Перепараметризация кривой	7
Обозначения отображений	7
Кривизна кривой	8
Лекция 2	9
2. Геометрия кривых	9
Формулы Френе для трехмерного случая	9
Лекция 3	10
3. Поверхности	10
Параметрически заданные двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$	10
Связь параметризованной и неявно заданной поверхностей	10
Сфера	11
Многомерный случай	12
Терминология	12
Кривые на поверхности	12
Утверждение об эквивалентности описаний кривых	13
Касательные векторы	14
Касательная плоскость	14
Лекция 4	16
4. Перепараметризация поверхностей	16
Двумерный случай	16
Перепараметризация поверхности	16
Выбор локальных координат	17
Маломерный случай	17
Площадь	19
Вторая квадратичная форма	20
Случай произвольного параметра	21
Лекция 5	22
5. Кривизна поверхности	22
Нормальное сечение	22
Вторая квадратичная форма поверхности	24
Инварианты пары форм	25
Явный вид второй формы	27
Теория плоских сечений гиперповерхности	28

Формула Эйлера	30
Лекция 6	31
6. Современный взгляд на классическую дифференциальную геометрию	31
Внешняя геометрия кривой	33
Касательная. Нормаль. Касание k -ого порядка	33
Теорема о соприкасающейся окружности	34
Плоские формулы Френе	35
Репер Френе. Многомерные формулы Френе	36
Коммутатор векторных полей	38
Лекция 7	40
7. Производная функции вдоль касательного векторного поля и производная векторного поля вдоль касательного векторного поля	40
Ковариантная производная и ее свойства	40
Свойства ковариантной производной	41
Вычисление ковариантных производных	42
Преобразование символов Кристоффеля при замене координат	44
Лекция 8	45
8. Символы Кристоффеля	45
Преобразование символов Кристоффеля при замене координат	46
Операции, определяемые с помощью аффинной связности	46
Свойства связности	48
Вторая квадратичная форма, оператор Вейнгартена	48
Лекция 9	50
9. Тензор кривизны Римана	50
Симметрии тензора Римана	50
Симметрии тензора Римана в координатах	51
Зависимость плоскости поверхности от тензора Римана	51
Уравнения Петерсона—Майнард—Кодацци	52
Лекция 10	53
10. Параллельный перенос и геодезические	53
Параллельный перенос касательных векторов	53
Свойства параллельного переноса вектора вдоль кривой	54
Геодезические на поверхностях	55
Свойства геодезических	55
Лекция 11	57

11. Вариационный подход к геодезическим	57
Экспоненциальное отображение	57
Лемма Гаусса	58
Геодезические как локально кратчайшие	59
12. Лекция 12. Продолжение обсуждения геодезических и параллель-	
ного переноса	61
Функционал энергии (к предыдущей лекции)	61
Утверждение об угле поворота вокруг области. Дифференциальные формы	62
Базис	63
Гладкость векторного поля. Гладкость формы	64
Дифференциальная 2-форма. Внешний дифференциал	65
Применение дифференциальных форм. Формула Грина. Особый случай .	67
13. Лекция 13. Следствие теоремы 12 лекции	72
Повторение. Замечание	72
Триангуляция	72
Параллельный перенос вокруг одного геодезического треугольника	74
Суммирование равенств по всем геодезическим треугольникам геодезиче-	
ской триангуляции. Теорема Гаусса-Бонне	75
Пример	77
Утверждение о гомеоморфности компактной ориентированной поверхно-	
сти без края	77
Утверждение о геодезическом двуугольнике	78
14. Лекция 14. Экспоненциальное отображение	79
Экспоненциальное отображение	79
Теорема о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных дан-	
ных и от параметров	80
Определение экспоненциального отображения	81
Построение систем координат на поверхности	84
Случай двумерной поверхности	84
15. Лекция 15. Минимальные поверхности. Поверхности постоянной (гаус-	
совой) кривизны	86
Минимальные поверхности	86
Зависимость первой квадратичной формы от второй	88
Обращение в ноль средней кривизны	89
Поверхность постоянной (гауссовой) кривизны. Теорема о классификации	
поверхностей постоянной (гауссовой) кривизны	90
16. Лекция 16. Теорема о поверхности постоянной гауссовой кривизны	92

Лекция 1

1. Геометрия кривых

Начать курс необходимо с небольшого объяснения, что такое дифференциальная геометрия и, более точно, классическая дифференциальная геометрия. Эта наука довольно «старая»: ей почти двести лет. В течение времени взгляды на ее предмет менялись. Вначале это было изучение кривизны кривых, затем изучения кривизны связности в расслоениях. Общее здесь — кривизна. На данном этапе наша цель понять на простых объектах и примерах, что она из себя представляет, как ее можно описать, измерить, а также что с ней можно делать в математическом смысле. Слово «классическая» в названии означает, что мы будем рассматривать только объекты, которые возникли в XIX веке, а именно: кривые и поверхности.

Что такое кривая?

Это непростой вопрос. В курсе аналитической геометрии были кривые второго порядка. Пусть у нас есть некоторый многочлен второй степени $F(x, y) = 0$. Далее были тонкости: у нас было множество точек, чьи координаты удовлетворяют этому уравнению (проще говоря, заданные этим уравнением). Однако мы работали не с ними, а с некоторыми классами эквивалентности уравнений. То есть уже в аналитической геометрии связь между точками и уравнениями была косвенная. Например, были разные квадрики, которые задавали одно и то же множество.

Так что же мы можем назвать гладкой кривой? Первое, что приходит в голову — это график гладкой функции. Степень гладкости может быть разная.

Мы в прошлых курсах встречали два описания кривых. Во-первых, это *неявное описание (задание) кривой* $F(x, y) = 0$ (когда есть соотношение на x и y). Однако все не так просто. Например, кривая $xy = 0$ представляет собой координатный крест (рис.), который нельзя назвать гладкой кривой. С другой стороны, есть *параметрическое описание кривой*. Это значит, что x и y заданы как функции некоторой новой переменной, которая называется параметр:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

С таким способом задания кривой можно столкнуться, например, в механике при описании траектории движения тела. Кроме того, такой способ параметризации используется и в аналитической геометрии. Например, параметризация окружности единичного радиуса выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Комментарий 1. В курсе аналитической геометрии рассказывают следующий интересный факт. Пусть у нас есть некоторая точка на квадрике и прямая a , не пересекающая квадрику. Далее если мы проводим прямую через точку O , которая

пересекает прямую a , то точке пересечения A' будет соответствовать точка A на квадрике. Теперь если мы введем некоторую параметризацию на прямой a : например, $A'(a+bt, c+dt)$, то можно вычислить координаты точки A : это будут некоторые рациональные функции

$$x = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad y = \frac{R(t)}{S(t)},$$

которые будут иметь степень не больше двух. Это называется рациональная параметризация квадрики.

Оказывается, в разных разделах геометрии предпочтительны разные способы задания кривой. В каких-то удобно решать системы уравнений, в дифференциальной же геометрии удобен параметрический способ описания.

Пример 1. Однако даже если кривые $x(t)$ и $y(t)$ гладкие, можно создать кривую, у которой будет излом. В чем же дело? Построим их явным образом.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (x'(t), y'(t))$$

Определение 1. Гладкая регулярная параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$ — это отображение $\vec{r}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, причем

$$\vec{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

все $x^i(t)$ гладкие и для всякого $t \in (a, b)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) \neq 0.$$

Перепараметризация кривой

Пусть у нас есть кривая $\vec{r}(t)$. Мы хотим параметризовать ее с помощью параметра τ , где $t = \phi(\tau)$. И $\vec{r}(\phi(\tau))$ — перепараметризация кривой $\vec{r}(t)$. Имеем

$$\frac{d}{d\tau} \vec{r}(\phi(\tau)) = \frac{d\vec{r}}{dt}(\phi(\tau)) \phi'(\tau).$$

Утверждение 1. Если $\phi'(\tau) \neq 0$, то $\vec{r}(\phi(\tau))$ — тоже регулярная кривая.

Обозначения отображений

Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{E}$, $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(P) = |\vec{OP}|$, $P(x, y)$. Имеем

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$f(r, \varphi) = r.$$

Можно построить отображения $\Phi : \mathbb{R}^2(x, y) \rightarrow \mathbb{E}^2$ и $\Psi : \mathbb{R}^2(r, \varphi) \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$f \circ \Phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$f \circ \Psi(r, \varphi) = r.$$

Функция f в координатах x, y имеет вид $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, но в координатах $f(r, \varphi) = r$.

Сделаем параметрическую замену

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$x = x(r, \varphi), \quad y = y(r, \varphi).$$

Имеем

$$f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = f(r, \varphi),$$

$$\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r,$$

$$f \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \Psi = f \circ \Psi.$$

Кривизна кривой

Пусть $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$, пусть $m = 1$, $|\dot{\vec{r}}| = 1$, $k = |\ddot{\vec{r}}|$.

Определение 2. Параметр s на кривой называется натуральным, если $|\ddot{\vec{r}}| = 1$.

Длина кривой

$$l = \int_a^b |\dot{\vec{r}}| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^1(t))^2 + \dots + (\dot{x}^n(t))^2} dt.$$

Утверждение 2. Длина l — натуральный параметр.

Доказательство.

$$\frac{dr}{dl} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dl} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{\frac{dl}{dt}} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} \Rightarrow \left| \frac{dr}{dl} \right| = 1.$$

□

Лекция 2

2. Геометрия кривых

Формулы Френе для трехмерного случая

Первая формула Френе

$$n(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{k(s)} = \frac{\dot{v}(s)}{k(s)},$$

$$\dot{v}(s) = k(s)n(s).$$

Имеем $|n| = 1 \implies \dot{n} \perp n \implies$

$$\dot{n} = \lambda(s)v(s) + \kappa(s)b(s),$$

$$(v, n) = 0,$$

$$(\dot{v}, n) + (v, \dot{n}) = 0,$$

$$(kn, n) + (v, \lambda v + \kappa b) = 0,$$

$$k + \lambda = 0 \implies \lambda = -k.$$

Определение 3. Пусть s — натуральный параметр. Тогда кручение $\kappa(s) = (\dot{n}(s), b(s))$,

$$\dot{n}(s) = -k(s)v(s) + \kappa(s)b(s),$$

$$b = [v, n] \implies \dot{b} = [\dot{v}, n] + [v, \dot{n}] = [kn, n] + [v, -kv + \kappa b] = \kappa[v, b] = -\kappa n.$$

Теорема 1 (формулы Френе).

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = k(s)n(s), \\ \dot{n}(s) = -k(s)v(s) + \kappa(s)b(s), \\ \dot{b}(s) = -\kappa(s)n(s). \end{cases}$$

Лекция 3

3. Поверхности

В курсе аналитической геометрии мы привыкли описывать поверхности в $\mathbb{R}^3$ в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0$$

— неявное задание поверхности.

В этом курсе мы будем работать чаще всего с параметрически заданными поверхностями. Это обобщение параметризованных кривых. Поговорим сначала про трехмерный случай.

Параметрически заданные двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим отображение некоторого множества $U \subset \mathbb{R}^2(u, v)$ в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$:

$$r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

— параметрическое задание поверхности. В дальнейшем это отображение будем считать гладким.

Определение 4. Гладкая регулярная параметризованная поверхность — это такое гладкое отображение

$$\vec{r} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad U \subset \mathbb{R}^2,$$

что

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

в каждой точке U .

Определение 5. Гладкая неявно заданная поверхность — это множество точек, заданное уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — гладкая функция и $\text{grad } F \neq 0$ в точках, где $F = 0$.

Связь параметризованной и неявно заданной поверхностей

Теорема 2. Пусть $F(x, y, z) = 0$ гладкая неявно заданная поверхность. Тогда для любой точки этой поверхности в некоторой её окрестности это множество точек является образом гладкой регулярной параметризованной поверхности.

Доказательство. Рассмотрим такую точку $A(x_0, y_0, z_0)$, что $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и

$$\text{grad } F(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то есть

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \neq 0.$$

Следовательно, хотя бы одна из координат $\text{grad } F(x_0, y_0, z_0)$ не равна нулю. Пусть, например,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции можно выразить z как функцию от x, y в некоторой окрестности, то есть существует такая функция $\varphi(x, y)$, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) имеем $F(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y)$. Тогда

$$r(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$$

задает искомую регулярную параметризованную поверхность. Проверим ранг:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} = 2.$$

□

Сфера

Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$F(x, y, z) = 0$$

задает сферу S^2 . Градиент будет равен

$$\text{grad } F = (2x, 2y, 2z),$$

тогда

$$\text{grad } F = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

не на сфере. По теореме о неявной функции мы получаем, что на верхней («северной») полусфере имеем

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

а на нижней («южной»)

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Таким образом, параметризация, например, верхней полусферы выглядит следующим образом:

$$r(u, v) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}).$$

Многомерный случай

Определение 6. Гладкая регулярная параметризованная k -мерная поверхность в n -мерном пространстве — это такое отображение

$$\vec{r}: U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^k,$$

что r — гладкое и

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} = k.$$

Определение 7. Гладкая неявно заданная k -мерная поверхность в n -мерном пространстве — это множество точек, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0, \end{cases}$$

причем все F^i гладкие и

$$\text{rk} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) = n - k.$$

Задача 1. У любой точки гладкой неявно заданной поверхности есть окрестность, в которой точки этой поверхности являются образом гладкой регулярной параметризованной поверхности.

Терминология

Есть разные подходы к тому, как изучать кривизну поверхности. Первый подход был введен Эйлером: если мы хотим изучать кривизну поверхности, то нужно изучать кривизну кривых, лежащих в этой поверхности.

Кривые на поверхности

$$r(t) = r(u(t), v(t)),$$

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$$r(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Функции $u(t)$, $v(t)$ — гладкие, следовательно, $r(t)$ тоже гладкая. Продифференцируем

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u(t), v(t)) \dot{v}(t) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \dot{u}(t) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \dot{v}(t) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Ранг матрицы J равен 2. Итак, полученное произведение не ноль, следовательно, наша кривая регулярна.

Утверждение об эквивалентности описаний кривых

Пусть у нас есть отображение r и

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, в каждой точке есть невырожденный минор 2×2 , пусть, например,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по теореме об обратной функции можно выразить

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

в некоторой окрестности. Следовательно, получаем кривую

$$\begin{aligned} u(t) &= u(x(t), y(t)), \\ v(t) &= v(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Итак, доказали утверждение:

Утверждение 3. *Оба описания регулярных кривых на поверхности эквивалентны.*

Когда у нас есть $u(t)$, $v(t)$, то будем считать, что кривая задана в локальных координатах. Если есть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, то кривая задана в глобальных координатах. В этом курсе для нас приоритетным будет первый способ описания кривых.

Касательные векторы

Посмотрим на такие координаты $u(t)$, $v(t)$, что $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$. Рассмотрим

$$r(t) = r(u(t), v(t)),$$

$$r(0) = r(u(0), v(0)) = r(u_0, v_0) = A,$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial r}{\partial u}(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \frac{\partial r}{\partial v}(u(t), v(t))\dot{v}(t) \Big|_{t=0} = \vec{r}_u(u_0, v_0)\dot{u}(0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)\dot{v}(0),$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u(t), v(t)) = r_u(u(t), v(t)), \quad \frac{\partial r}{\partial v}(u(t), v(t)) = r_v(u(t), v(t)).$$

Векторы $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ зависят только от точки A , но не от кривой, а $\dot{u}(0)$, $\dot{v}(0)$ — числа, зависящие от кривой.

Утверждение 4. Векторы $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ линейно независимы.

Доказательство. Из регулярности ранг матрицы частных производных равен двум. Следовательно, $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ линейно независимы. $\square$

Утверждение 5. Вектор скорости в точке A любой кривой, лежащей на поверхности, лежит в плоскости, порожденной $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Касательная плоскость

Определение 8. Касательная плоскость в точке A к данной поверхности Σ (будем обозначать $T_A\Sigma$) по определению

$$T_A\Sigma = \text{span}(r_u(A), r_v(A)).$$

Утверждение 6. Касательная плоскость $T_A\Sigma$ состоит в точности из векторов скорости кривых, лежащих на поверхности.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\dot{r}(0) = r_u(A)\dot{u}(0) + r_v(A)\dot{v}(0) \in T_A\Sigma,$$

$$X \in T_A\Sigma \implies X = ar_u(A) + br_v(A).$$

Рассмотрим кривую

$$u(t) = u_0 + at,$$

$$v(t) = v_0 + bt.$$

Имеем

$$\dot{u}(0) = a, \quad \dot{v}(0) = b,$$

следовательно,

$$\dot{r}(0) = ar_u(A) + br_v(A) = X,$$

что и требовалось. $\square$

В общем случае имеем

$$r(u^1, \dots, u^k),$$

то есть

$$r(t) = r(u^1(t), \dots, u^k(t)).$$

Получим

$$\dot{r}(0) = r_{u^1}(A)\dot{u}^1(0) + \dots + r_{u^k}(A)\dot{u}^k(0),$$

$$T_A \Sigma = \text{span}(r_{u^1}(A), \dots, r_{u^k}(A))$$

— k -мерное касательное пространство, где r_{u^i} и r_{u^j} линейно независимы.



Лекция 4

4. Перепараметризация поверхностей

Двумерный случай

Рассмотрим поверхность $r(u, v)$ и замену

$$(u, v) = \Phi(s, t),$$

где

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t).$$

На самом деле мы рассматриваем композицию

$$r \circ \Phi(s, t) = r(u(s, t), v(s, t)),$$

$$r(s, t) = r(u(s, t), v(s, t)).$$

Перепараметризация поверхности

Замена параметризации поверхности (перепараметризация/репараметризация) — нужно потребовать, чтобы Φ был диффеоморфизмом (т.е. Φ, Φ^{-1} гладкие)

Утверждение 7. Поверхность $r(s, t)$ тоже гладкая регулярная поверхность.

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = 2,$$

так как вторая матрица невырождена. □

В многомерном случае при рассмотрении поверхности $r(u^1, \dots, u^k)$ с диффеоморфизмом

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(v^1, \dots, v^k) \\ &\vdots \\ u^k &= u^k(v^1, \dots, v^k) \end{aligned}$$

имеем

$$r(v^1, \dots, v^k) = r(u^1(v^1, \dots, v^k), \dots, u^k(v^1, \dots, v^k)).$$

Выбор локальных координат

$$T_A \Sigma = \text{span}(r_u(A), r_v(A)),$$

$$r(s, t) = r(u(s, t), v(s, t)),$$

$$r_s = r_u \frac{\partial u}{\partial s} + r_v \frac{\partial v}{\partial s},$$

$$r_t = r_u \frac{\partial u}{\partial t} + r_v \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Получаем

$$\text{span}(r_s(A), r_t(A)) = \text{span}(r_u(A), r_v(A)).$$

то есть касательная плоскость (касательное пространство) не зависит от выбора локальных координат.

Рассмотрим отображение

$$r : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^k.$$

То есть $\Sigma = r(U)$. Пусть для всякого A касательная плоскость $T_A \Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задано евклидово скалярное произведение

$$(a, b) = a^1 b^1 + \dots + a^n b^n.$$

Ограничение

$$(\cdot, \cdot)|_{T_A \Sigma} = I$$

— первая I квадратичная форма. Мы будем называть ее *римановой метрикой* и обозначать g .

Напоминание. Если у нас есть векторное пространство V с базисом $e_1, \dots, e_k$ и некоторая билинейная форма Ψ . Пусть Φ — матрица билинейной формы Ψ в базисе $e_1, \dots, e_k$. Имеем

$$\Phi_{ij} = \Psi(e_i, e_j),$$

$$\Psi(a, b) = (a^1 \dots a^k)(\Phi_{ij}) \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^k \end{pmatrix}.$$

Маломерный случай

У касательной плоскости $T_A \Sigma$ есть базис $r_u(A), r_v(A)$. У первой квадратичной формы есть матрица

$$\begin{pmatrix} (r_u, r_u) & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_u) & (r_v, r_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g_{12} = g_{21}.$$

Кроме того,

$$\begin{pmatrix} (r_u, r_u) & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_u) & (r_v, r_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Более полно, имея

$$r = (x, y, z),$$

получаем

$$r_u = \left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u} \right),$$

$$r_v = \left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v} \right).$$

Итак,

$$E = g_{11} = (r_u, r_u) = \left(\frac{x}{u} \right)^2 + \left(\frac{y}{u} \right)^2 + \left(\frac{z}{u} \right)^2,$$

$$F = g_{12} = (r_u, r_v) = \frac{x}{u} \cdot \frac{x}{v} + \frac{y}{u} \cdot \frac{y}{v} + \frac{z}{u} \cdot \frac{z}{v},$$

$$G = g_{22} = (r_v, r_v) = \left(\frac{x}{v} \right)^2 + \left(\frac{y}{v} \right)^2 + \left(\frac{z}{v} \right)^2.$$

Напомним, что этот базис зависит от точки A , то есть являются функциями от u и v .

Если у нас есть два вектора

$$a = a^1 r_u + a^2 r_v, \quad b = b^1 r_u + b^2 r_v,$$

тогда

$$(a, b) = I(a, b) = (a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Длина вектора

$$|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{(a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}}.$$

Угол между векторами:

$$\cos \alpha = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{(a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}} \sqrt{(b^1 \ b^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}}}.$$

Длина кривой:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{r}| dt = ?$$

$$r(t) = r(u(t), v(t)),$$

$$\dot{r} = r_u \dot{u} + r_v \dot{v},$$

следовательно, в базисе r_u, r_v вектор имеет координаты $(\dot{u}, \dot{v})$. Тогда

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{u} \ \dot{v}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}} dt,$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt.$$

Площадь

Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S(\Sigma) = \int \int_U \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

или $du \wedge dv$.

Традиционная форма записи первой квадратичной формы с помощью дифференциалов. У нас есть запись дифференциала

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial u} a^1 + \frac{\partial f}{\partial v} a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \ \frac{\partial f}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix},$$

где

$$du(a) = a^1, \quad dv(a) = a^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(a, a) &= (a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \\ &= E(a^1)^2 + 2Fa^1a^2 + G(a^2)^2 = \\ &= E(du(a))^2 + 2Fdu(a)dv(a) + G(dv(a))^2 = \\ &= (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)(a). \end{aligned}$$

Итак,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Вторая квадратичная форма

Как известно, на сфере нет прямых и кривых с кривизной 0. Идея Эйлера: давайте будем рассматривать различные кривые, лежащие на поверхности, изучать их кривизну, и тогда мы сможем понять что-то про кривизну поверхности.

Рассмотрим произвольную двумерную поверхность в трехмерном пространстве. Рассмотрим касательную плоскость $T_A\Sigma$. Пусть m — нормаль к поверхности (она зависит от точки A , и есть выбор ее направления — есть поле единичных нормалей). Имеем

$$m = \pm \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}.$$

Рассмотрим также векторы: $\text{pr}_{T_A\Sigma} \vec{a}$ — ортогональная проекция $\vec{a}$ на $T_A\Sigma$; и $\text{pr}_m \vec{a}$ — ортогональная проекция $\vec{a}$ на m ,

$$\text{pr}_m \vec{a} = \frac{(m, \vec{a})}{(m, m)} m = (m, \vec{a}) m.$$

Здесь (с учетом использования натурального параметра) $k_n = |\text{pr}_m \ddot{r}|$ — нормальная кривизна, $k_g = |\text{pr}_{T_A\Sigma} \ddot{r}|$ — геодезическая кривизна. По теореме Пифагора

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}.$$

Напомним, что

$$\text{pr}_m \ddot{r} = (m, \ddot{r}) m.$$

Тогда

$$\pm k_n = (m, \ddot{r}),$$

знак «+» будет, если $(m, \ddot{r}) > 0$; знак «-» будет, если $(m, \ddot{r}) < 0$. Вспомним формулу

$$\dot{r} = r_u \dot{u} + r_v \dot{v},$$

следовательно,

$$\ddot{r} = (r_{uu} \dot{u} + r_{uv} \dot{v}) \dot{u} + r_u \ddot{u} + (r_{vu} \dot{u} + r_{vv} \dot{v}) \dot{v} + r_v \ddot{v}.$$

Имеем

$$\pm k_n = (m, \ddot{r}) = (r_{uu}, m)(\dot{u})^2 + 2(r_{uv}, m)\dot{u}\dot{v} + (r_{vv}, m)(\dot{v})^2 = (\dot{u} \ \dot{v}) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \Pi(\dot{r}, \dot{r}),$$

где

$$L = (r_{uu}, m),$$

$$M = (r_{uv}, m),$$

$$N = (r_{vv}, m).$$

Определение 9. Вторая квадратичная форма Π — билинейная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

в базисе r_u, r_v .

Случай произвольного параметра

Мы только что вывели формулу

$$\pm k_n = \Pi \left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds} \right)$$

где s — натуральный параметр. Пусть теперь t — некоторый произвольный параметр. Имеем

$$\pm k_n = \frac{\Pi \left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds} \right)}{1} = \frac{\Pi \left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds} \right)}{I \left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds} \right)} = \frac{\Pi \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right)}{I \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right)} = \frac{\Pi \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)}{I \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)} \cdot \frac{\left(\frac{dt}{ds} \right)^2}{\left(\frac{dt}{ds} \right)^2} = \frac{\Pi \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)}{I \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)}.$$

Итак,

Утверждение 8. *Имеет место формула*

$$\pm k_n = \frac{\Pi \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)}{I \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)},$$

где t — произвольная параметризация.

Заметим, что существует такая параметризация, что для всякого вектора ξ имеет место равенство $\dot{r} = \xi$. Тогда

$$\pm k_n = \frac{\Pi(\xi, \xi)}{I(\xi, \xi)}.$$

Поэтому мы можем взять кривые, у которых одинаковая нормальная кривизна, но разные k_g и k .

Лекция 5

5. Кривизна поверхности

Нормальное сечение

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, и пусть V^{n-1} — гладкое подмногообразие размерности $n - 1$ (или, как говорят, «коразмерности один»), вложенное в $\mathbb{R}^n$. В настоящем параграфе мы будем в основном интересоваться только локальными свойствами этой гиперповерхности, не интересуясь ее глобальной структурой, поэтому можно считать, что у нас просто имеется гладкое вложение диска D^{n-1} в $\mathbb{R}^n$.

Выше мы уже обсуждали различные способы задания многообразий, в том числе гиперповерхностей. Для удобства выберем параметрическое задание V^{n-1} , т. е. будем считать, что V^{n-1} (или вложенный диск D^{n-1}) определяется гладким радиус-вектором $r = r(u^1, \dots, u^{n-1})$ с $\mathbb{R}^n$, где параметры (координаты) $u^1, \dots, u^{n-1}$ меняются в некотором диске в евклидовом пространстве параметров $\mathbb{R}^{n-1}(u^1, \dots, u^{n-1})$. Поскольку мы считаем, что радиус-вектор определяет гладкое подмногообразие, то это означает, что векторы $\frac{dr}{du^1}, \dots, \frac{dr}{du^{n-1}}$ линейно независимы в каждой точке области определения. Напомним, что эти векторы являются касательными к соответствующим координатным линиям, проходящим через выбранную точку P на поверхности V^{n-1} . Как было показано выше, гладкое вложение V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ порождает на V^{n-1} индуцированную риманову метрику. Напомним эту конструкцию. Пусть $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$; тогда радиус-вектор r задается набором гладких функций $x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$, $1 \leq i \leq n$. Пусть $ds^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$; тогда возникает следующая квадратичная форма:

$$\begin{aligned} ds^2|_{V^{n-1}} &= \sum_{i=1}^n (x^i(u^1, \dots, u^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} du^k du^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p, \\ g_{kp} &= \left\langle \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^p} \right\rangle; \end{aligned}$$

здесь через $\langle, \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение 10. Первой квадратичной формой гиперповерхности V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ называется форма $ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p$, где функции $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ определены выше.

Функции g_{kp} зависят от радиус-вектора гиперповерхности и меняются, вообще говоря, при изменении радиус-вектора, т.е. при деформации гиперповерхности. Первая квадратичная форма определена на векторах, касательных к V^{n-1} . Более точно: если $a, b \in T_P V^{n-1}$ — два произвольных касательных вектора, то определено

скалярное произведение

$$\langle a, b \rangle_{ds^2(V^{n-1})} = g_{kp} a^k b^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp} a^k b^p.$$

Напомним, что для упрощения обозначений мы опускаем знак суммирования, когда суммирование ведется по совпадающим верхним и нижним индексам. Из геометрического смысла функций g_{kp} следует, что скалярное произведение $\langle a, b \rangle_{ds^2(V^{n-1})}$ просто совпадает с обычным евклидовым скалярным произведением векторов a и b , рассматриваемых как векторы объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$. Матрица метрического тензора G , составленная из функций $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь, какой вид приобретает первая квадратичная форма для различных способов задания гиперповерхности.

Пример 2. Пусть V^{n-1} задана в виде графика $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Имеем:

$$\begin{aligned} ds^2|_V^{n-1} &= \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + (dx^n(x^1, \dots, x^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} dx^k dx^p = \\ &= \sum_{k,p=1}^{n-1} \left(\delta_{kp} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} \right) dx^k dx^p = g_{kp}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^k dx^p. \end{aligned}$$

Иногда будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ через f_{x^α} .

Пример 3. Пусть теперь поверхность V^{n-1} задана с помощью неявной функции, т.е. в виде $F(x^1, \dots, x^n) = 0$, где $\frac{\partial F}{\partial x^n} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует (локально) решение уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ вида $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = - \frac{\partial F}{\partial x^i} / \frac{\partial F}{\partial x^n}.$$

Подставляя вместо f_{x^α} выражение вида

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} / \frac{\partial F}{\partial x^n},$$

получаем $G = (g_{kp})$, где

$$g_{kp} = \left(\frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial F}{\partial x^p} \right) / \left(\frac{\partial F}{\partial x^n} \right)^2 + \delta_{kp}.$$

Вторая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим V^{n-1} — гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, заданная радиус-вектором вида $r = r(u^1, \dots, u^{n-1})$. Пусть $n = n(P)$ — единичный вектор, ортогональный поверхности V^{n-1} в точке P . Определим квадратичную форму $Q(a, a)$, задав ее значения $Q(a, a)$ для произвольного вектора $a \in T_P(V^{n-1})$. Для этого рассмотрим произвольную гладкую кривую $\gamma(t)$ лежащую на V^{n-1} и проходящую через точку P , причем так, что $\gamma(0) = P, \dot{\gamma}(0) = a$. Такая кривая всегда существует, хотя и определена неоднозначно. Так как вдоль кривой $\gamma(t)$ радиус-вектор r является функцией от t , то $a = \left. \frac{dr}{dt} r(u(t)) \right|_{t=0}$. Рассмотрим радиус-функцию $\dot{r} = \frac{dr}{dt} r(u(t))$ и ее производную по t , т. е. $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} r(u(t))$. Обозначим через $\ddot{r}_a$ значение $\ddot{r}$ при $t = 0$. Это и есть вторая производная радиус-вектора r по направлению вектора a .

Определение 11. Положим $Q(a, a) = \langle \ddot{r}_a; a \rangle$.

Определенное нами число является величиной проекции вектора $\ddot{r}_a$ на вектор нормали n в точке P . Вычислим значение $Q(a, a)$ в явном виде через координаты вектора r . Имеем

$$\frac{dr}{dt} = r_{u^k} \frac{du^k(t)}{dt}; \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = r_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt} + r_{u^k} \frac{d^2 u^k(t)}{dt^2};$$

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2} r(u(t)), n \right\rangle = \left\langle r_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, n \right\rangle + 0,$$

так как

$$\left\langle r_{u^k} \frac{d^2 u^k(t)}{dt^2}, n \right\rangle = \frac{d^2 u}{dt^2} \langle r_{u^k}, n \rangle = 0;$$

$$r_{u^k} \in T_P(V^{n-1}); \quad n \perp T_P(V^{n-1});$$

отсюда получаем

$$\left\langle \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{t=0}, n \rangle = \left\langle r_{u^k, u^p} \right|_{t=0}, n \rangle \frac{du^k}{dt} \bigg|_{t=0} \frac{du^p}{dt} \bigg|_{t=0} = Q(a, a).$$

При этом следует помнить, что вектор a имеет координаты

$$\left(\frac{du^1(0)}{dt}, \dots, \frac{du^{n-1}(0)}{dt} \right),$$

т.е. окончательно $Q(a, a) = \left\langle n, r_{u^k, u^p} \right|_{t=0} \rangle a^k a^p$.

Эта квадратичная форма однозначно определяет билинейную форму $Q(a, b)$, значение которой на паре произвольных векторов $a, b \in T_P(V^{n-1})$ определяется так: $Q(a, b) = q_{kp}(P) a^k b^p$, где

$$q_{kp}(P) = \left\langle r_{u^k, u^p} \right|_{t=0}, n \rangle.$$

Лемма 1. Выражение $Q(a, b) = q_{kp} a^k b^p$, где $a, b \in T_P(V^{n-1})$ определяет билинейную форму.

Доказательство. Имеем

$$q_{k'p'} = \left\langle r_{u^{k'}, u^{p'}} \right|_{t=0}, n \rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} \left\langle \frac{\partial^2 r(0)}{\partial u^k \partial u^p} \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} q_{kp}.$$

т.е. функции q_{kp} преобразуются при замене координат как коэффициенты билинейной формы, что и требовалось доказать. $\square$

Определение 12. Билинейная форма $Q(a, b)$ называется *второй квадратичной формой* поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Ясно, что форма Q зависит от способа вложения V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, т.е. при гладкой деформации V^{n-1} эта форма, вообще говоря, будет меняться. При этом форма уже не является инвариантной относительно изометрий V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Так, например, при изгибании V^{n-1} , т.е. при гладкой деформации, при которой первая форма не меняется, форма Q будет, вообще говоря, изменяться. Например, пусть V^2 — двумерная плоскость в $\mathbb{R}^3$; тогда радиус-вектор $r(u, v)$ можно считать линейной функцией от параметров u, v . Следовательно, первая форма является евклидовой плоской метрикой: $du^2 + dv^2$.

Теперь рассмотрим изометрическое преобразование V^2 — свертывание плоскости $\mathbb{R}^2$ в цилиндр, ось которого параллельна оси ox . Ясно, что вторая форма цилиндра отлична от нуля, так как отлично от нуля число $\langle r_{vv}, n \rangle$. В то же время вторая форма плоскости $\mathbb{R}^2$ тождественно равна нулю, следовательно, при изгибании (т.е. при изометрии) вторая форма изменилась.

Инварианты пары форм

Рассмотрим фиксированное подмногообразие $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, пусть $P \in V^{n-1}$. В каждой точке P определена пара форм G и Q (первая и вторая формы). С этой парой связан набор числовых инвариантов, позволяющих изучать V^{n-1} независимо от введенной на ней системы координат. Обозначим через G и Q матрицы соответствующих форм и рассмотрим полином по переменной λ : $\det(Q - \lambda G)$. Поскольку форма G невырождена, то существует матрица G^{-1} , обратная к G ; следовательно, уравнение $\det(G^{-1}Q - \lambda E) = 0$ эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda G) = 0$.

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ собственные числа матрицы $G^{-1}Q$, т.е. корни уравнения $\det(Q - \lambda G) = 0$. Вскоре мы докажем, что все они вещественны. Запишем характеристический полином $F(\lambda)$ в виде $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \lambda^k$, где σ_k — симметрические функции от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Лемма 2. *Функции $\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ являются инвариантами пары форм G и Q , т.е. сохраняются при произвольной невырожденной замене координат в окрестности точки $P \in V^{n-1}$.*

Доказательство. При регулярной замене координат $x \rightarrow x'$ в окрестности точки P в касательном пространстве $T_P V^{n-1}$ возникает индуцированное линейное невырожденное преобразование с помощью матрицы Якоби: $J : T_P \rightarrow T_P$. При этом

матрицы G и Q подвергаются преобразованию: $G \longrightarrow JGJ^T = G'$; $Q \longrightarrow JQJ^T = Q'$. Следовательно:

$$\det((G')^{-1}Q' - \lambda E) = \det[(J^T)^{-1}(G^{-1}Q - \lambda E)J^T] = \det(G^{-1}Q - \lambda E),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Нас будут особенно интересовать инварианты:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k, \quad \sigma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \det(G^{-1}Q).$$

Остальные σ_k , $2 \leq k \leq n-2$ описывают более тонкие свойства V^{n-1} , которыми мы сейчас заниматься не будем. Поскольку $G^{-1}Q \neq 0$, если $Q \neq 0$, то существует хотя бы один инвариант σ_k , отличный от нуля. Инварианты σ_1 и σ_{n-1} являются «крайними» инвариантами.

Определение 13. Функция $H(P) = \sigma_1(P) = \sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется *средней кривизной поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $P \in V^{n-1}$. Функция $K(P) = \sigma_{n-1}(P) = \sigma_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется *гауссовой кривизной поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в точке P .

Если $n = 3$ и $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, то $H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$, $K(P) = \lambda_1 \lambda_2$.

Теорема 3. Все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ пары форм G, Q вещественны. В том случае, когда все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ парно различны, все собственные векторы $e_1, \dots, e_{n-1}$ матрицы $G^{-1}Q$ взаимно ортогональны, как относительно объемлющей евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$, так и относительно римановой метрики, индуцированной на V^{n-1} вложением $V^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Доказательство. По известной теореме из алгебры собственные числа симметрической матрицы вещественны, и все ее собственные векторы взаимно ортогональны для различных собственных чисел. Пока что эта теорема не может быть применена в нашей ситуации, так как матрица $G^{-1}Q$, вообще говоря, не симметрична. Симметрия $G^{-1}Q$ имела бы, например, место, если бы G и Q коммутировали. Так как форма $G(P)$ симметрична при каждом P , то в некоторой окрестности P существует регулярная замена координат $x \longrightarrow x'$ такая, что в одной точке P форма $G(P)$ приводится к диагональному виду. Такое приведение возможно, вообще говоря, только в одной точке. Поскольку приведение к диагональному виду необходимо осуществить только в одной точке, то в качестве искомой замены достаточно взять линейную замену. Приведя G к диагональному виду, можно затем привести ее к единичной матрице, применяя растяжения вдоль главных осей формы. Пусть A — линейный оператор $A: T_P V^{n-1} \longrightarrow T_P V^{n-1}$, осуществляющий приведение G к единичной матрице; тогда $G = AEA^T = AA^T$. Матрица E , возникающая после выполнения A , определяет ортобазис $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ в $T_P V^{n-1}$. Получаем $\det(Q - \lambda G) = \det[A(A^{-1}Q(A^{-1})^T - \lambda E)A^T]$. Рассмотрим форму $\tilde{Q} = BQB^T$, где $B = A^{-1}$. Исходное уравнение $\det(Q - \lambda G) = 0$ запишется в базисе $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ в виде $\det(\tilde{Q} - \lambda E) = 0$, так как $\det A \neq 0$. При этом $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T$, так как $Q^T = Q$.

Следовательно, все собственные числа и собственные векторы у формы $\tilde{Q}$ и матрицы $G^{-1}Q$ одни и те же. Так как форма $\tilde{Q}$ симметрична, то все ее собственные числа (т.е. $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$) вещественны, и в случае, когда все они попарно различны, все ее собственные векторы взаимно ортогональны. Это следует из известной теоремы алгебры. Ортобазис $e_1, \dots, e_{n-1}$ не обязан совпадать с ортобазисом $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$. Теорема доказана. $\square$

Определение 14. Векторы $e_1, \dots, e_{n-1}$ (определены однозначно, если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$) называются *главными направлениями* гиперповерхности V^{n-1} в точке P , или *главными осями*.

Явный вид второй формы

Рассмотрим частный случай. Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ задана в виде графика $x^n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$; пусть плоскость $T_P V^{n-1}$ в некоторой точке $P \in V^{n-1}$ совпадает с плоскостью переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$. Тогда нормаль $n(P)$ к V^{n-1} в точке P имеет координаты $(0, \dots, 0, 1)$; радиус-вектор r , описывающий поверхность V^{n-1} имеет вид

$$r = r(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Так как гиперплоскость $(x_1, \dots, x_{n-1}) = T_P V^{n-1}$ касается V^{n-1} в точке P , то вполне соотнесено соотношение $\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_P = 0$, $1 \leq i \leq n-1$; отсюда: $G(P) = E$, так как $g_{ij} = f_{x^i} f_{x^j} + \delta_{ij}$. Рассмотрим матрицу $Q = (q_{ij})$, где

$$q_{ij} = \langle r_{x^i x^j}, n \rangle = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Итак, $Q = (f_{x^i x^j}(P))$ совпадает с матрицей гессиана функции f в точке P . Средняя кривизна $H(P)$ имеет вид

$$H(P) = \text{tr}(G^{-1}Q) = \text{tr } Q = \sum_{k=1}^{n-1} f_{x^k x^k}.$$

для гауссовой кривизны $K(P)$ получаем

$$K(P) = \det(G^{-1}Q) = \det Q = \det(f_{x^i x^j}(P)).$$

Для двумерной поверхности (при $n = 3$) получаем

$$z = f(x, y); \quad H(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$;

$$K(P) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$



Теория плоских сечений гиперповерхности

Рассмотрим произвольную точку $P \in V^{n-1}$, и пусть $n(P)$ — нормаль к гиперповерхности V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольную двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, проходящую через P и пересекающую V^{n-1} по некоторой гладкой кривой $\gamma(t) = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ (по-прежнему нас интересуют только события, происходящие в малой окрестности точки P).

Определение 15. Гладкая кривая $\gamma(t) = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ называется *плоским сечением гиперповерхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Через точку P проходит бесконечно много плоских сечений. В то же время далеко не всякая гладкая кривая $\gamma \subset V^{n-1}$ является плоским сечением V^{n-1} . Для того чтобы $\gamma \subset V^{n-1}$ не была плоским сечением, достаточно, чтобы γ имела ненулевое кручение. Пусть γ — плоское сечение V^{n-1} (зафиксируем содержащую ее плоскость $\mathbb{R}^2$), и пусть точка O — начало координат, из которого выходит радиус-вектор $r = r(u^1, \dots, u^{n-1})$, описывающий поверхность V^{n-1} , принадлежит плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $m(P)$ — вектор нормали к плоской кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$, содержащийся в $\mathbb{R}^2$. Поскольку мы рассматриваем произвольное плоское сечение, то нормали n и m , вообще говоря, не совпадают.

Введем на кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ натуральный параметр $s : \gamma = \gamma(s)$ (s — длина дуги). Тогда в плоскости $\mathbb{R}^2$ кривая $\gamma(s)$ задается радиус-вектором $r = r(s)$, где $r(s) = r(u^1(s), \dots, u^{n-1}(s))$. В силу формул Френе для плоских кривых имеем

$$k(s) = \left| \frac{d^2 r(s)}{ds^2} \right|,$$

где $k(s)$ — кривизна кривой $\gamma(s)$ в точке P . Напомним также, что $\frac{d^2 r(s)}{ds^2} = mk(s)$, где $m = m(P)$, $P \in \gamma(s)$. С другой стороны, если $a = \frac{dr}{ds}(s)$ — вектор скорости кривой $\gamma(s)$ в точке P , то (в силу определения второй формы Q) имеем

$$Q(a, a) = \left\langle \frac{d^2 r}{ds^2}, n \right\rangle = \langle km, n \rangle = k \langle m, n \rangle = k \cos \theta,$$

где θ — угол между нормальми m и n в точке P . С другой стороны,

$$Q(a, a) = Q\left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds}\right) = Q\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2} Q\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right),$$

где t — произвольный гладкий параметр вдоль кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$. Здесь $\frac{dr}{dt} = \alpha$ — произвольный касательный вектор к кривой γ в точке P . Если $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$, то

$$k \cos \theta = \frac{Q(\alpha, \alpha)}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j} = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j}.$$

Поскольку в направлении любого касательного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ можно провести кривую γ , являющуюся плоским сечением, то, следовательно, нами доказана.

Теорема 4 (Первая теорема Менье). Для любого касательного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ и любого плоского сечения γ (такого, что $\dot{\gamma} = \alpha$) отношение второй формы к первой равно $k \cos \theta$, т.е.

$$\frac{Q(\alpha, \alpha)}{G(\alpha, \alpha)} = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j} = k \cos \theta.$$

Кривизна k называется *кривизной плоского сечения*. Среди плоских сечений выделен класс нормальных сечений.

Определение 16. Плоское сечение $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ в точке P называется *нормальным*, если $n(P) \in \mathbb{R}^2$, т.е. $\theta = 0$.

Таким образом, каждое нормальное сечение γ в точке $P \in V^{n-1}$ взаимно-однозначно задается касательным вектором $\alpha \in T_P V^{n-1}$, т.е. двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$, определяющая это сечение, натянута на два вектора: нормаль $n(P)$ и вектор $\alpha \in T_P V^{n-1}$. Вращая плоскость $\mathbb{R}^2$ вокруг $n(P)$, получаем все нормальные сечения гиперповерхности V^{n-1} в точке P .

Для нормального сечения $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ доказанная в первой теореме Менье формула принимает вид

$$k = \frac{Q(\alpha, \alpha)}{G(\alpha, \alpha)} = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j},$$

так как $\theta = 0$. Так как кривизна плоского сечения (вдоль вектора α), образующего угол θ с нормалью $n(P)$, зависит от θ , то эту функцию следует записать в виде $k(\theta, \alpha)$. В силу доказанного утверждения: $k(\theta, \alpha) \cos \theta = k(0, \alpha)$, где $k(0, \alpha)$ — кривизна нормального сечения (вдоль вектора α).

Таким образом, если известна кривизна нормального сечения $k(0, \alpha)$, то кривизна любого плоского сечения (вдоль α), образующего угол θ с n , находится из формулы $k(\theta, \alpha) = \frac{1}{\cos \theta} k(0, \alpha)$.

Теперь напомним, что в касательной плоскости $T_P V^{n-1}$ всегда определены главные направления $e_1(P), \dots, e_{n-1}(P)$, определяющиеся однозначно, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим эти «главные оси» $e_1(P), \dots, e_{n-1}(P)$ и построим по каждому из них соответствующее нормальное плоское сечение $\gamma_i = \mathbb{R}_i^2 \cap V^{n-1}$, где плоскость $\mathbb{R}_i^2$ натянута на $n(P), e_i(P)$. Все главные направления $e_i(P)$ взаимно ортогональны в евклидовой метрике на $T_P V^{n-1}$. Обозначим через $k_i(P)$ кривизну нормального сечения γ_i (эти сечения иногда называются главными нормальными сечениями).

Теорема 5 (Вторая теорема Менье). Собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ совпадают с кривизнами $k_1, \dots, k_{n-1}$ главных нормальных сечений.

Доказательство. Из первой теоремы Менье имеем

$$k \cos \theta = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j};$$

так как $\theta = 0$ для нормального сечения, то

$$k = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j},$$



где α — определяющий вектор нормального сечения. Фиксируем в $T_P V^{n-1}$ ортобазис $e_1, \dots, e_{n-1}$; тогда $g_{ij} = \delta_{ij}$; $q_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$; следовательно

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}.$$

Если $\alpha \in T_P V^{n-1}$ совпадает с одним из e_i , то $k_i = \lambda_i$, что и требовалось. $\square$

Формула Эйлера

Рассмотрим в $T_P V^{n-1}$ произвольный вектор α и рассмотрим нормальное сечение вдоль α . Обозначим через φ_i ($1 \leq i \leq n-1$) углы, образуемые α с главными направлениями $e_1, \dots, e_{n-1}$.

Теорема 6. Для нормального сечения вдоль произвольного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ выполнено соотношение (формула Эйлера)

$$k = k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$

Доказательство. В силу второй теоремы Менье имеем

$$k(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

где

$$\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|},$$

где через $|\alpha|$ обозначена длина α . То, что $\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}$ очевидно. $\square$

Лекция 6

6. Современный взгляд на классическую дифференциальную геометрию

Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Зафиксируем на ней стандартные евклидовы координаты x_1, x_2 .

Если задана функция $f(y)$ и $y \in [a, b]$, тогда можно рассмотреть на плоскости множество точек $x_2 = f(x_1)$, и если функция непрерывна, то ее график будет представлять из себя кривую.

Не все кривые представляют собой график — $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Такой способ задания кривых называется *неявным* $F(x_1, x_2) = 0$.

Определение 17. Гладкая регулярная элементарная плоская кривая — это множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемое параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases},$$

причем выполнено следующее условие:

- 1) $t \in [a, b]$,
- 2) $\gamma(t) \in C^\infty([a, b])$
- 3) $\dot{\gamma} \neq 0$
- 4) $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2$

Назовем $\dot{\gamma}$ — вектор скорости γ .

Замечание 1. Первое свойство отражено в определении термином «элементарная», т.е. параметризуется отрезком. Второе условие отражено термином «гладкая». Это условие можно заменить на дифференцируемость нужного порядка или на непрерывность. Третье условие означает отсутствие у кривой изломов.

Пример 4. Пример кривой с изломами, задаваемой бесконечно дифференцируемой функцией.

$$\begin{cases} x_1 = t^3, \\ x_2 = t^2, \end{cases} \\ t \in [-1; 1].$$

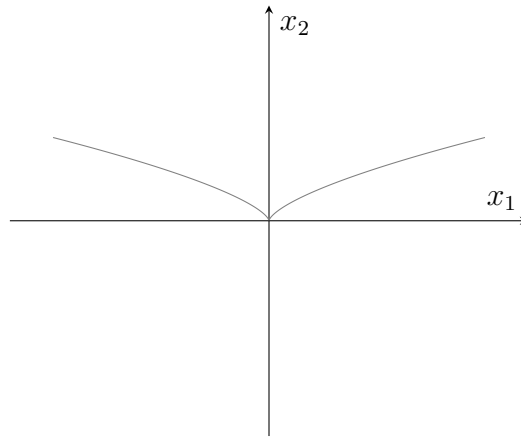
Это плоская кривая (в силу $x_3 = 0$). Из первого уравнения выражаем t и подставляем во второе. Получим

$$x_2 = x_1^{2/3}$$

Вектор скорости

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

обращается в 0 при $t = 0$.



Задача 2. Пусть γ — прямой угол. Задать γ параметрическим уравнением

$$x = \gamma(t) \in C^\infty,$$

т.е. есть точка излома в вершине угла. (Нужно оперировать функциями, которые с некоторого момента тождественно равны нулю).

Если γ не регулярна (т.е. не выполнено условие 3), то точки, в которых $\dot{\gamma} = 0$ — особые. Остальные — регулярные.

Определение 18. Длина дуги, заключенной между двумя значениями $t_1 < t_2$ параметра — число l :

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}| dt.$$

Задача 3. Доказать, что l не зависит от параметризации.

Зафиксируем на кривой точку t_0 и рассмотрим функцию

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}| dt.$$

Утверждение 9. Верно, что $s(t) \in C^\infty([a, b])$ и $\dot{s} > 0$; кроме того $\dot{s} = |\dot{\gamma}|$, $t = t(s)$,

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}.$$

Следствие 1. Эта формула определяет корректную замену параметра (существует обратная замена $t = t(s)$).

Определение 19. Параметр s — натуральный параметр. Его физический смысл — длина дуги, отсчитываемой от фиксированной точки.

Определение 20. Пусть s — натуральный параметр на γ . Тогда $l = |s_2 - s_1|$.

Замечание 2. Вектор скорости в натуральной параметризации равен 1:

$$\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| = 1.$$

Внешняя геометрия кривой

Утверждение 10. Пусть $a(t) \in \mathbb{R}^n$ — гладкая вектор-функция, и пусть $|a(t)| = \text{const}$. Тогда $\dot{a} \perp a$.

Доказательство. Так как длина — константа, значит, и скалярный квадрат тоже константа: $(a, a) = \text{const}$. Продифференцируем равенство: $2(a, \dot{a}) = 0$ — условие перпендикулярности. $\square$

Следствие 2. Если γ параметризована натуральным параметром, то $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$.

Утверждение 11. Пусть $Q(t)$ и $A(t)$ — гладкие $n \times n$ функции и пусть $\dot{Q} = QA$. Тогда

- 1) если $Q(t)$ ортогональна, то $A(t)$ кососимметрично,
- 2) если A кососимметрично и существует t_0 : $Q(t_0)$ ортогональна, то $Q(t)$ ортогональна для любого t

Доказательство. Продифференцируем произведение

$$(QQ^*)' = \dot{Q}Q^* + Q\dot{Q}^* = QAQ^* + QA^*Q^* = Q(A + A^*)Q^*.$$

$\square$

Касательная. Нормаль. Касание k -ого порядка

Определение 21. Касательная к γ в точке t — прямая, проходящая через $\gamma(t)$ в направлении $\dot{\gamma}(t)$

Замечание 3. Параметрическое уравнение касательной имеет вид

$$x = \gamma(t_0) + \tau \dot{\gamma}(t_0),$$

Замечание 4. Через каждую точку кривой проходит одна прямая перпендикулярно касательной. Она называется нормалью. Уравнение нормали имеет вид

$$(x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0.$$

Вообще говоря, касательная — это прямая, которая имеет с нашей кривой касание первого порядка.

Определение 22. Кривые γ_1 и γ_2 , параметризованные натуральным параметром, имеют в точке s_0 касание порядка k , если s можно выбрать так, что

$$\gamma_1 - \gamma_2 = o((s - s_0)^k).$$

Утверждение 12. Кривые γ_1 и γ_2 имеют в точке s_0 касание порядка $k \iff \gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0), \dot{\gamma}_1(s_0) = \dot{\gamma}_2(s_0), \dots, \gamma_1^{(k)}(s_0) = \gamma_2^{(k)}(s_0).$

Доказательство. Разложим разность по формуле Тейлора

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (\gamma_1^{(j)}(s_0) - \gamma_2^{(j)}(s_0)) (s - s_0)^j + o((s - s_0)^k)$$

□

Теорема о соприкасающейся окружности

Пусть γ — окружность радиуса R .

$$x = x_0 + R \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = x_0 + R \begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\sin s/R \\ \cos s/R \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos s/R \\ -\sin s/R \end{pmatrix}$$

$$|\ddot{x}| = \frac{1}{R}.$$

Теорема 7. Пусть $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$. Тогда существует единственная окружность, имеющая с кривой γ касание второго порядка в точке s_0 . Ее центр лежит на нормали кривой в направлении $\ddot{\gamma}$, а радиус равен $1/|\ddot{\gamma}|$.

Доказательство. Рассмотрим кривую, у которой вектор ускорения в точке не равен нулю. Нужно найти окружность, у которой скорость и ускорение будут такие же, как у выбранной кривой. Ускорение кривой в натуральной параметризации перпендикулярно. У окружности ускорение перпендикулярно скорости и направлено в центр. Значит, центр должен лежать на прямой, которая содержит вектор $\ddot{\gamma}$. Длина вектора ускорения равна $1/R \implies r = 1/|\ddot{\gamma}|$. □

Определение 23. Это окружность — соприкасающаяся окружность к γ . Ее центр — центр кривизны γ в точке s_0 , ее радиус — радиус кривизны; $1/R = |\ddot{\gamma}|$ — кривизна; $k = |\ddot{\gamma}|$.

Замечание 5. Кривизна в каждой точке своя. Эта функция, вообще говоря, не гладкая, потому что на кривой могут быть точки, в которых вектор ускорения обращается в ноль. Если таких точек нет, то кривизна — гладкая функция.

Плоские формулы Френе

Определение 24. Вектор нормали к γ в точке s

$$n(s) = \frac{\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|}, \quad \ddot{\gamma} \neq 0,$$

векторы v, n — репер Френе.

Утверждение 13 (плоские формулы Френе).

$$\begin{cases} \dot{v} = kn \\ \dot{n} = -kv \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &= (v, n), \\ (\dot{v}, n) + (v, \dot{n}) &= 0, \end{aligned}$$

Так как вектор n единичный, то производная от него ортогональна самому этому вектору. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \alpha v, \\ k(n, n) + \alpha(v, v) &= 0. \end{aligned}$$

□

Замечание 6. Кривизна определена во всех точках кривой, а репер Френе только в тех, в которых кривизна не обращается в ноль. Модифицируем определение репера Френе, чтобы он был определен во всех точках, а также определение кривизны, приписав ей знак.

Зафиксируем на плоскости ориентацию. Построим вектор n так, что $n \perp v$:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

а кривизну определим следующим образом

$$\tilde{k} = \begin{cases} 0, & \ddot{\gamma} = 0, \\ k, & n = \tilde{n}, \\ -k, & n = -\tilde{n}. \end{cases}$$

Замечание 7. Новый вид формул Френе

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{v} = \tilde{k}\tilde{n} \\ \dot{\tilde{n}} = -\tilde{k}v \end{cases} \\ \tilde{k} = (v, \tilde{n}). \end{aligned}$$

Репер Френе. Многомерные формулы Френе

Пусть γ — регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$; $x = \gamma(t)$, $\dot{\gamma} \neq 0$.

Определение 25. Кривая γ — s -регулярна, если $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(s)}$ линейно независимы.

Задача 4. Доказать, что свойство s -регулярности не зависит от параметризации.

Пусть γ — $(n-1)$ -регулярна. Рассмотрим векторы $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)} \rightarrow v_1, \dots, v_{n-1}$ (применили процедуру Грама–Шмидта); дополняем полученные вектора до базиса $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ — ортонормированный, право ориентированный базис.

Определение 26. Набор $v_1, \dots, v_n$ — репер Френе кривой γ .

Теорема 8 (многомерные формулы Френе). Верны следующие формулы

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = k_1 v_2, \\ \dot{v}_2 = k_2 v_3 - k_1 v_1, \\ \dot{v}_3 = k_3 v_4 - k_2 v_2, \\ \dot{v}_{n-1} = k_{n-1} v_n - k_{n-2} v_{n-2}, \\ \dot{v}_n = -k_{n-1} v_{n-1}. \end{cases}$$

$$k_p = \frac{V_{p-1} V_{p+1}}{V_p^2},$$

где V_p — объем p -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$.

$$k_1 = \frac{1 \cdot V_2}{V_1^2}, \quad V_0 = 1$$

$$k_{n-1} = \frac{V_{n-2} \dot{V}_n}{V_{n-1}^2},$$

где $\dot{V}_n$ — ориентированный n -мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы

$$\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n)}.$$

Доказательство. Рассмотрим ортогональную матрицу $Q = (v_1, \dots, v_n)$, которая состоит из столбцов v_i . Продифференцируем ее:

$$\dot{Q} = QA,$$

где A — кососимметричная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 & & \\ -\alpha_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -\beta_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & -\beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

По процедуре Грама-Шмидта вектор v_p является линейной комбинацией $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$. Кроме того, $\dot{v}_p$ — линейная комбинация $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}, \gamma^{(p+1)}$.

Рассмотрим вектор v_j , где $j \leq p-2$. Для него $\dot{v}_j$ — линейная комбинация v_i , где $i \leq p-1$. Тогда получаем

$$0 = (v_j, v_p).$$

Продифференцируем это равенство:

$$0 = (\dot{v}_j, v_p) + (v_j, \dot{v}_p),$$

$$(\dot{v}_j, v_p) = 0 = (v_j, \dot{v}_p).$$

Тем самым, если мы считаем вектор $\dot{v}_p$ и раскладываем его по базису v , то в разложение векторы с номерами $j \leq p-2$ входить не будут, так как вектор $\dot{v}_p$ ортогонален векторам с такими номерами. Это означает, что в матрице A все коэффициенты, кроме коэффициентов α равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & \\ -\alpha_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Осталось найти явный вид коэффициентов k_i .

Рассмотрим вектор v_p и рассмотрим его разложение по γ :

$$v_p = \frac{V_{p-1}}{V_p} \gamma^{(p)} + \dots$$

Продифференцируем это равенство:

$$\dot{v}_p = \frac{V_{p-1}}{V_p} \gamma^{(p+1)} + \dots$$

Напомним, что

$$v_{p+1} = \frac{V_p}{V_{p+1}} \gamma^{(p+1)} + \dots$$

Тогда

$$\gamma^{(p+1)} = \frac{V_{p+1}}{V_p} v_{p+1} + \dots$$

Следовательно,

$$\dot{v}_p = k_p v_{p+1} + \dots$$

Доказано все, кроме последней формулы для $p = n-1$.

Рассмотрим векторы

$$\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}, \gamma^{(n)}.$$

Возможны две ситуации:

- 1) вектор $\gamma^{(n)}$ линейно независим с остальными векторами — тогда весь набор векторов $v_1, \dots, v_n$ получается из набора γ посредством процедуры ортогонализации Грама–Шмидта с одной деталью: последний вектор может отличаться знаком, и тогда формула для k_{n-1} остается справедливой с точностью до знака;
- 2) вектор $\gamma^{(n)}$ — линейная комбинация $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}$. Тогда рассмотрим вектор

$$v_{n-1} = \alpha_{n-1}\gamma^{(n-1)} + \alpha_{n-2}\gamma^{(n-2)} + \dots$$

Продифференцируем это равенство:

$$\dot{v}_{n-1} = \alpha_{n-1}\gamma^{(n)} + \dots = \sigma_{n-1}\gamma^{(n-1)} + \dots$$

Тогда

$$\dot{v}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_j.$$

В этом случае $k_{n-1} = 0$.

□

Комментарий 2. 1) Числа $k_p > 0$, где $p < n - 1$, k_p — кривизны кривой γ в параметризации t .

- 2) Пусть t — натуральный параметр. Тогда

$$k_1 = |\ddot{\gamma}| = k,$$

$$k_2 = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2^2} = \frac{V_3}{V_2^2} = \frac{V(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{k^2}.$$

Коммутатор векторных полей

Пусть ξ — векторное поле,

$$f \longrightarrow \partial_\xi(f) = \xi^i(u) \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

Тогда можно определить коммутатор векторных полей:

$$[\partial_\xi, \partial_\eta] = \partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi.$$

Утверждение 14. $[\partial_\xi, \partial_\eta]$ — линейный дифференциальный оператор первого порядка.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \partial_\xi \partial_\eta(f) &= \partial_\xi(\eta^i \frac{\partial f}{\partial u^i}) = \xi^j(u) \frac{\partial}{\partial u^j}(\eta^i \frac{\partial f}{\partial u^i}) = \xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} + \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} \\ \partial_\eta \partial_\xi(f) &= \xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} + \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} \\ [\partial_\xi, \partial_\eta]f &= (\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}) \frac{\partial f}{\partial u^i} = \zeta^i(u) \frac{\partial f}{\partial u^i}. \end{aligned}$$

□

Определение 27. Поле ζ — коммутатор ξ и η , $\zeta = [\xi, \eta]$.

Замечание 8. $[\xi, \eta]^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}$.

$$\partial_{[\xi, \eta]} = [\partial_\xi, \partial_\eta].$$

Свойства:

1) Билинейная операция.

2) $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$.

3) Верно равенство

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0.$$

4) $[f\xi, \eta] = f[\xi, \eta] - \xi\partial_\eta(f)$,

$$\begin{aligned} \partial_{f\xi}\partial_\eta - \partial_\eta\partial_{f\xi} &= f\partial_\xi\partial_\eta - \partial_\eta(f\partial_\xi) = \\ &= f\partial_\xi\partial_\eta - f\partial_\eta(\partial_\xi) - \partial_\eta(f) \cdot \partial_\xi = f\partial_{[\xi, \eta]} - \partial_{\partial_\eta(f)\xi} = \partial_{f[\xi, \eta] - \partial_\eta(f)\xi}. \end{aligned}$$

Лекция 7

7. Производная функции вдоль касательного векторного поля и производная векторного поля вдоль касательного векторного поля

Ковариантная производная и ее свойства

Понятие ковариантной производной позволяет определить дифференцирование тензорных полей по направлению касательного вектора какого-либо многообразия. Подобно производной по направлению, ковариантная производная в качестве аргументов принимает вектор, определённый в некой точке P , и векторное поле, определённое в окрестности P . Результатом является вектор, также определённый в P . Основное отличие от производной по направлению заключается в том, что ковариантная производная не должна зависеть от выбора системы координат.

Пусть M — n -мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, ξ — гладкое векторное поле; пусть на M заданы $x = r(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $\xi = \xi(u)$.

Определение 28. Ковариантная производная вектора ξ :

$$\nabla_j \xi = \Pi \left(\frac{d\xi}{du_j} \right),$$

где $\eta \in T_P M$; $\dot{\gamma}(t) = \eta$, $\gamma(t)$ — кривая на M .

$$\widehat{\xi}(t) = \xi(\gamma(t)), \quad \nabla_\eta \xi = \Pi \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \widehat{\xi} \right).$$

Утверждение 15. Вектор $\nabla_\eta \xi$ — касательный вектор к M в точке P , не зависящий от γ . Если u — координаты на M и $P = (u_1^0, \dots, u_n^0)$, то

$$\nabla_\eta \xi = \sum_{j=1}^n \eta_j \nabla_j \xi.$$

Доказательство. $\gamma: u_i = u_i(t)$, $u_i(t_0) = u_i^0$; $M: x = r(u)$.

$$\widehat{\xi}(t) = \xi(u(t)); \quad \frac{d}{dt} \widehat{\xi} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial u_j} \dot{u}_j, \quad \dot{u}_j = \eta_j,$$

$$\nabla_\eta \xi = \Pi \left(\frac{d}{dt} \widehat{\xi} \right) = \sum_{j=1}^n \eta_j \Pi \left(\frac{d\xi}{du_j} \right).$$

□

Свойства ковариантной производной

Пусть $P \in M$, $\eta \in T_P M$,

$$\nabla_\eta \longrightarrow T_P M.$$

Утверждение 16. 1) $\nabla_\eta(c\xi + \tilde{c}\tilde{\xi}) = c\nabla_\eta\xi + \tilde{c}\nabla_\eta\tilde{\xi}$, $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$.

$$2) \nabla_{c\eta + \tilde{c}\tilde{\eta}}\xi = c\nabla_\eta\xi + \tilde{c}\nabla_{\tilde{\eta}}\xi.$$

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_\eta(f\xi) = f(P)\nabla_\eta\xi + \partial_\eta f \cdot \xi(P),$$

где

$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j} \eta_j$$

— производная f вдоль η .

4) Пусть $\xi, \tilde{\xi}$ — векторные поля на M .

$$\partial_\eta(\xi, \tilde{\xi}) = (\nabla_\eta\xi, \tilde{\xi}) + (\xi, \nabla_\eta\tilde{\xi}).$$

Доказательство.

$$\nabla_\eta\xi = \sum_{j=1}^n \eta_j \nabla_j \xi = \sum_{j=1}^n \Pi \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} \right).$$

1) очевидно,

2) очевидно

3) Вычислим в явном виде

$$\begin{aligned} \nabla_\eta(f\xi) &= \sum_{j=1}^n \eta_j \Pi \left(\frac{\partial}{\partial u_j}(\xi f) \right) = \sum_{j=1}^n \eta_j \Pi \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} f + \xi \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) = \\ &= f(P)\nabla_\eta\xi + \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial f}{\partial u_j} \xi \end{aligned}$$

4) Вычислим в явном виде

$$\partial_\eta(\xi, \tilde{\xi}) = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}(\xi, \tilde{\xi}) = \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial \xi}{\partial u_j}, \tilde{\xi} \right) + \left(\xi, \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial u_j} \right) = \star.$$

Так как

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_j} = \Pi \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} \right) + w_j, \quad w_j \perp T_P M,$$

то

$$\star = \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \Pi \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} \right), \tilde{\xi} \right) + \left(\xi, \sum_{j=1}^n \eta_j \Pi \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial u_j} \right) \right)$$



□

Рассмотрим поверхность M и отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим точку $P \in M$, вектор $\eta \in T_P M$; пусть γ — гладкая кривая на M такая, что $\dot{\gamma}(t_0) = \eta$.

Задача 5. Доказать, что

$$\partial_\eta f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

Вычисление ковариантных производных

Рассмотрим поверхность M с координатами u и параметризацией $x = r(u)$. Тогда вектор ξ будет иметь вид

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j(u) r_j(u); \quad r_j = \frac{\partial r}{\partial u_j}.$$

Найдем ковариантную производную этого вектора:

$$\begin{aligned} \nabla_j \xi &= \Pi \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} \right) = \Pi \left(\frac{\partial}{\partial u_j} \sum_{i=1}^n \xi_i r_i \right) = \\ &= \Pi \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \xi_i \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_j + \sum_{i=1}^n \xi_i \Pi \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right). \end{aligned}$$

То есть зная производные

$$\frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j} = r_{ij},$$

мы можем находить ковариантные производные. Тогда

$$\Pi(r_{ij}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k r_k.$$

Определение 29. Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля (2-го рода) — коэффициенты связности Леви-Чивиты.

$$(\Pi(r_{ij}), r_m) = (r_{ij}, r_m) = \Gamma_{ij,m}$$

— символы Кристоффеля 1-го рода.

Теорема 9. Для риманова многообразия верно равенство

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right), \quad g_{ij}(u) = (r_i, r_j). \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right), \end{aligned}$$

где g^{km} — обратная матрица.

Доказательство. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} = (r_{im}, r_j) + (r_i, r_{jm}) = \Gamma_{im,j} + \Gamma_{jm,i},$$

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} = \Gamma_{ji,m} + \Gamma_{mi,j},$$

$$\frac{\partial g_{mi}}{\partial u_j} = \Gamma_{mj,i} + \Gamma_{ij,m}.$$

Так как $g_{ij} = g_{ji}$, то $\Gamma_{ij,m} = \Gamma_{ji,m}$.

В таком случае имеем

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} = 2\Gamma_{ij,m}.$$

Вторая формула доказывается аналогично. Либо с помощью первой части доказательства.

Рассмотрим два вектора

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^n \end{pmatrix}, \quad Z_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij,1} \\ \vdots \\ \Gamma_{ij,n} \end{pmatrix}$$

По формуле для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{ij,m} = \sum_{k=1}^n g_{km} \Gamma_{ij}^k.$$

Тогда

$$z_{ij} = G w_{ij}, \quad w_{ij} = G^{-1} z_{ij},$$

где

$$G = (g_{km}).$$

□

Еще раз запишем формулы ковариантной производной:

$$\begin{aligned} \nabla_j \xi &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \sum_{i=1}^n \xi_i \Pi(r_{ij}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k r_k = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma_{jk}^i \xi_k \right) r_i. \end{aligned}$$

Формула ковариантного дифференцирования вдоль вектора:

$$\nabla_\eta \xi = \sum_{i=1}^n \eta_j \nabla_j \xi = \sum_{i,j=1}^n \eta_j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma_{jk}^i \xi_k \right) r_i.$$

Если задано векторное поле $\xi_1(u), \dots, \xi_n(u)$, то имеет место формула

$$(\nabla_j \xi)_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma_{jk}^i \xi_k.$$

Если заданы локальные координаты x^i , то можем определить канонический базис $\partial/\partial x^i$. Тогда можно найти ковариантную производную по базисному вектору

$$\nabla_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Определение 30. $\Gamma_{jk}^i(x)$ — коэффициенты связности или символы Кристоффеля.

Пусть

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \xi &= (\nabla_\eta \xi^i(x)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \nabla_\eta \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_\eta(\xi^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \eta^j \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \Gamma_{jk}^i \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Преобразование символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля не являются тензорами!

Пусть есть две системы координат: x^i и $x^{i'}$. Тогда имеют место

$$\Gamma_{jk}^i(x), \quad \Gamma_{j'k'}^{i'}(x')$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma_{j'k'}^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k}. \\ \frac{\partial}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

Итак,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma_{j'k'}^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В итоге получаем

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Лекция 8

8. Символы Кристоффеля

Рассмотрим многообразие M^n с римановой метрикой и аффинной связностью.

Определение 31. Будем говорить, что на многообразии M задана аффинная связность, если для любой точки P и вектора $\eta \in T_P M$ определено отображение

$$\nabla_\eta : v \longrightarrow T_P M,$$

причем выполнены свойства 1–3.

Напомним свойства ковариантного дифференцирования:

1) Верно равенство

$$\nabla_\eta(c\xi + \tilde{c}\tilde{\xi}) = c\nabla_\eta\xi + \tilde{c}\nabla_\eta\tilde{\xi},$$

где $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$.

2) Верно равенство

$$\nabla_{c\eta + \tilde{c}\tilde{\eta}}\xi = c\nabla_\eta\xi + \tilde{c}\nabla_{\tilde{\eta}}\xi.$$

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_\eta(f\xi) = f(P)\nabla_\eta\xi + \partial_\eta f \cdot \xi(P),$$

где

$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j} \eta_j$$

— производная f вдоль η .

Если заданы локальные координаты x^i , то можем определить канонический базис $\partial/\partial x^i$. Тогда можно найти ковариантную производную по базисному вектору

$$\nabla_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Определение 32. $\Gamma_{jk}^i(x)$ — коэффициенты связности или символы Кристоффеля.

Пусть

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \xi &= (\nabla_\eta \xi^i(x)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \nabla_\eta \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_\eta(\xi^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \eta^j \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \Gamma_{jk}^i \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Преобразование символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля не являются тензорами!

Пусть есть две системы координат: x^i и $x^{i'}$. Тогда имеют место

$$\Gamma_{jk}^i(x), \quad \Gamma_{j'k'}^{i'}(x')$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma_{j'k'}^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Итак,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma_{j'k'}^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В итоге получаем

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Операции, определяемые с помощью аффинной связности

С помощью аффинной связности можно производить следующие операции:

- 1) Ковариантные производные векторных полей.
- 2) Параллельный перенос касательных векторов вдоль кривых.

Определение 33. Гладкое семейство касательных векторов к M вдоль кривой γ — соответствие, сопоставление каждой точке t касательный вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$, гладко зависит от t .

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) r_i(u(t))$$

Определение 34. Семейство $\xi(t)$ — параллельно вдоль γ , если $\nabla_{\dot{\gamma}} \xi = 0$.

Уравнение параллельного переноса:

$$\dot{\xi}_i + \Gamma_{jk}^i \xi_k \dot{x}^j = 0.$$

- 3) Геодезические

Определение 35. Кривая γ называется геодезической, если

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

$$\begin{cases} \ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \\ x^i(t_0) = x_0^i \\ \dot{x}^i(t_0) = \xi_0^i \end{cases}$$

- 4) Ковариантные производные произвольных тензорных полей. Пусть на многообразии задана аффинная связность.

Пусть α — $(0, 1)$ -тензорное поле (1-форма); ξ — векторное поле; $\alpha(\xi)$ — гладкая функция

$$\alpha(\xi) = \alpha_j(x) \xi^j(x).$$

Пусть $\eta \in T_P M$. Как определить

$$\nabla_{\eta} \alpha = ?$$

Определение 36. Ковариантная производная от 1-формы α вдоль η — 1-форма $\nabla_{\eta} \alpha$, такая что для любого векторного поля ξ

$$(\nabla_{\eta} \alpha)(\xi) = \partial_{\eta} \alpha(\xi) - \alpha(\nabla_{\eta} \xi).$$

- а) Верно равенство

$$\nabla_{\eta}(c\alpha + \tilde{c}\tilde{\alpha}) = c\nabla_{\eta}\alpha + \tilde{c}\nabla_{\eta}\tilde{\alpha},$$

где $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$.

- б) Верно равенство

$$\nabla_{c\eta + \tilde{c}\tilde{\eta}} \alpha = c\nabla_{\eta} \alpha + \tilde{c}\nabla_{\tilde{\eta}} \alpha.$$

- в) Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_{\eta}(f\alpha) = f(P)\nabla_{\eta}\alpha + \partial_{\eta} f \cdot \alpha(P),$$

где

$$\partial_{\eta} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j} \eta_j$$

— производная f вдоль η .

$$\begin{aligned} (\nabla_{\eta} \alpha)_i &= (\nabla_{\eta} \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \partial_{\eta} \alpha_i(x) - \alpha\left(\nabla_{\eta} \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \\ &= \eta^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \eta^j \alpha\left(\nabla_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \eta^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \eta^j \alpha\left(\Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \eta^j \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^k \alpha_k\right). \end{aligned}$$

Итак,

$$\nabla_{\eta} \alpha = \eta^j \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^k \alpha_k\right) dx^i.$$

Теперь можно определить ковариантную производную тензора:

Определение 37. Ковариантная производная (p, q) -тензорного поля T вдоль η — (p, q) -тензорное поле $\nabla_\eta T$, такое что для любого набора векторных полей $\xi_1, \dots, \xi_q$ и 1-формы выполнено следующее:

$$\begin{aligned} \partial_\eta(T(\alpha, \xi)) = (\nabla_\eta T)(\alpha, \xi) + \sum_{s=1}^p T(\alpha^1, \dots, \nabla_\eta \alpha^s, \dots, \alpha^p, \xi) + \\ + \sum_{s=1}^q T(\alpha, \xi_1, \dots, \nabla_\eta \xi_s, \dots, \xi_q). \end{aligned}$$

Свойства связности

Определение 38. Связность симметрична (связность без кручения), если для всякой локальной системы координат

$$\Gamma_{jk}^i(x) = \Gamma_{kj}^i(x).$$

Вторая квадратичная форма, оператор Вейнгартена

Обозначим через Q риманово объемлющее многообразие. Пусть $\dim Q = N$. Для него метрика и связность соответственно g^Q и ∇^Q . Пусть ∇^Q — риманова связность на Q .

Обозначим через M — n -мерное многообразие ($n < N$), вложение $f : M \rightarrow Q$. Есть три векторных расслоения:

- 1) $TM = (P, X)$, $P \in M$, $X \in T_P M$.
- 2) Нормальное расслоение NM , (P, ξ) , $P \in M$, $\xi \in N_P M$

$$m = \dim N_P M = N - n.$$

- 3) Q -расслоение, (P, ξ) , $P \in M$, $\xi \in T_P Q$

$$T_P Q = T_P M \oplus N_P M.$$

Пусть ∇^Q — риманова связность на Q . Пусть Y — касательное векторное поле на M . Пусть $X \in T_P M$.

$$\nabla_X^Q Y = \Pi(\nabla_X^Q Y) + b(X, Y),$$

где Π — ортогональная проекция на $T_P M$. Пусть ξ — сечение NM .

$$\nabla_X^Q \xi = \Pi^N(\nabla_X^Q \xi) - B(X, \xi),$$

где Π^N — ортогональная проекция на NM . Отметим, что $b(X, Y) \in N_P M$, $B(X, \xi) \in T_P M$.

Утверждение 17. *Отображение b и B билинейны и $\mathcal{F}$ -линейны. Кроме того,*

$$(b(X, Y), \xi) = (B(X, \xi), Y).$$

Доказательство. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}\nabla_X^Q(fY) &= \nabla_X^M(fY) + b(X, fY), \\ f\nabla_X^Q Y + \partial_X(f)Y &= f\nabla_X^M Y + \partial_X(f)Y + fb(X, Y), \\ f\nabla_X^Q Y &= f\nabla_X^M Y + fb(X, Y) \\ b(X, fY) - fb(X, Y) &= 0.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}(\nabla_X^Q Y, \xi) + (\nabla_X^Q \xi, Y) &= (\nabla_X^M Y, \xi) + (b(X, Y), \xi) - (\nabla_X^N \xi, Y) - (B(X, Y), Y), \\ (\nabla_X^Q Y, \xi) + (\nabla_X^Q \xi, Y) &= (b(X, Y), \xi) - (B(X, Y), Y).\end{aligned}$$

Посмотрим на левую часть

$$\begin{aligned}\partial_W(u, v) &= (\nabla_W^Q u, v) + (u, \nabla_W^Q v), \\ \partial_x(U, \xi) &= (\nabla_X^Q Y, \xi) + (Y, \nabla_X^Q \xi) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(b(X, Y), \xi) - (B(X, Y), Y) = 0.$$

□

Определение 39. Отображение $b(X, Y)$ — вторая фундаментальная форма M . Оператор $B(X, Y)$ — оператор Вейнгартена. Формулы

$$\begin{aligned}\nabla_X^Q Y &= \Pi(\nabla_X^Q Y) + b(X, Y), \\ \nabla_X^Q \xi &= \Pi^N(\nabla_X^Q \xi) - B(X, \xi)\end{aligned}$$

называются деривационными формулами Гаусса—Вейнгартена.

В координатах эти два оператора примут вид

$$\begin{aligned}b(X, Y) &= b_{ij}^p(x) e_p(x) X^i Y^j, \\ B(X, \xi) &= B_{ip}^j \xi^p X^i \frac{\partial}{\partial x^j}.\end{aligned}$$

Лекция 9

9. Тензор кривизны Римана

Симметрии тензора Римана

Напомним определение тензора Римана:

$$R(\xi, \eta)\zeta = (\nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi, \eta]})\zeta$$

$$R(\xi, \eta)\zeta = R_{ij,k}^q \xi^i \eta^j \zeta^k \frac{\partial}{\partial u^q}.$$

Теорема 10 (симметрия тензора Римана). 1) $R(\xi, \eta) = -R(\eta, \xi)$.

2) $R(\xi, \eta)\zeta + R(\eta, \zeta)\xi + R(\zeta, \xi)\eta = 0$ (тождество Бьянки).

Доказательство. Пусть

$$\xi = \frac{\partial}{\partial u^i}; \quad \eta = \frac{\partial}{\partial u^j}; \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta + \nabla_\eta \nabla_\zeta \xi - \nabla_\zeta \nabla_\eta \xi + \nabla_\zeta \nabla_\xi \eta - \nabla_\xi \nabla_\zeta \eta = \\ = \nabla_\xi (\nabla_\eta \zeta - \nabla_\zeta \eta) + \nabla_\eta (\nabla_\zeta \xi - \nabla_\xi \zeta) + \nabla_\zeta (\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi). \end{aligned}$$

Представление в координатах имеет вид:

$$\nabla_\eta \zeta = \nabla_j \frac{\partial}{\partial u^k} = \Gamma_{jk}^s \frac{\partial}{\partial u^s}; \quad \nabla_\zeta \eta = \Gamma_{kj}^s \frac{\partial}{\partial u^s}$$

□

3) $(R(\xi, \eta)\zeta, \omega) = -(\zeta, R(\xi, \eta)\omega)$.

Доказательство. По определению имеем

$$\begin{aligned} (R(\xi, \eta)\zeta, \omega) &= ((\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) \frac{\partial}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^s}) \\ \partial_\xi (\zeta, \omega) &= (\nabla_\xi \zeta, \omega) + (\zeta, \nabla_\xi \omega) \\ \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} (\zeta, \omega) &= (\nabla_\eta \nabla_\xi \zeta, \omega) + (\nabla_\xi \zeta, \nabla_\eta \omega) + (\nabla_\eta \zeta, \nabla_\xi \omega) + (\zeta, \nabla_\eta \nabla_\xi \omega). \\ \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} (\zeta, \omega) &= \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta, \omega + (\zeta, \nabla_\xi \nabla_\eta \omega) + (\nabla_\xi \zeta, \nabla_\eta \omega) + (\nabla_\eta \zeta, \nabla_\xi \omega). \\ 0 &= (R(\xi, \eta)\zeta, \omega) + (\zeta, R(\xi, \eta)\omega). \end{aligned}$$

□

$$4) (R(\xi, \eta)\zeta, \omega) = (R(\zeta, \omega)\xi, \eta).$$

Доказательство.

$$(R(\xi, \eta)\zeta, \omega) + (R(\eta, \zeta)\xi, \omega) + (R(\zeta, \xi)\eta, \omega) = 0,$$

$$(R(\eta, \zeta)\omega, \xi) + (R(\zeta, \omega)\eta, \xi) + (R(\omega, \eta)\zeta, \xi) = 0,$$

$$(R(\zeta, \omega)\xi, \eta) + (R(\omega, \xi)\zeta, \eta) + (R(\xi, \zeta)\omega, \eta) = 0,$$

$$(R(\omega, \xi)\eta, \zeta) + (R(\xi, \eta)\omega, \zeta) + (R(\eta, \omega)\xi, \zeta) = 0.$$

Складывая первые две строчки и вычитая из нее две вторые, получаем

$$2(R(\xi, \eta)\zeta, \omega) - 2(R(\zeta, \omega)\xi, \eta) = 0.$$

□

Симметрии тензора Римана в координатах

$$1) R_{ij,k}^q = -R_{ji,k}^q.$$

$$2) R_{ij,k}^q + R_{jk,i}^q + R_{ki,j}^q = 0.$$

$$3) R_{ij,kq} = R_{ij,k}^m g_{mq}.$$

$$4) R_{ij,kq} = -R_{ij,kq}.$$

$$5) R_{ij,kq} = R_{kq,ij}.$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} &= \\ = \frac{n(n-1)(6+6n-12+n^2-5n+6)}{12} &= \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

Итак, число независимых компонент равно

$$\boxed{\frac{n^2(n^2-1)}{12}}.$$

Зависимость плоскости поверхности от тензора Римана

Рассмотрим риманову метрику и преобразование ее компонент

$$g_{i'j'} = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}$$

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0) = 0$$

в количестве $\frac{n^2(n-1)}{2}$.

Утверждение 18. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in T_P M$, $u = \xi t$. Тогда

$$\ddot{u}^i + \Gamma_{jk}^i(u(t))\dot{u}^j\dot{u}^k = 0$$

$$\Gamma_{jk}^i(\xi t)\xi^j\xi^k = 0 \implies \Gamma_{jk}^i(0)\xi^j\xi^k = 0 \implies \Gamma_{jk}^i(0) = 0.$$

□

Рассмотрим тензор $T_{i_1 i_2 i_3}$ и вычислим количество его компонент

$$T_{i_1 i_2 i_3} \quad C_{n+2}^3,$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^2(n+1)(3n+3-2n-4)}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Задача 6. *Доказать, что в нормальных координатах*

$$g_{ij}(u) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ik,lj}u^k u^l + o(|u|^2).$$

Уравнения Петерсона—Майнардс—Кодацци

Пусть

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Имеем:

$$\nabla_X^N(b(Y, Z)) = \nabla_{\partial/\partial x^i} b_{jk}^p e_p = \frac{b_{jk}^p}{\partial x^i} e_p + \Gamma_{ip}^q e_p b_{jk}^p.$$

Так как

$$\nabla_X^M Y = \Gamma_{ij}^s \frac{\partial}{\partial x^s},$$

$$b(\nabla_X^M Y, Z) = \Gamma_{ij}^s b_{sk}^p e_p,$$

тогда имеет место равенство.

$$\begin{aligned} R_{ij,k}^l \frac{\partial}{\partial y^l} &= \left(\frac{\partial b_{jk}^p}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{ik}^p}{\partial x^j} + \Gamma_{iq}^p b_{jk}^q - \Gamma_{jq}^p b_{ik}^q - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{ij}^s b_{sk}^p + \Gamma_{ji}^s b_{sk}^p - \Gamma_{ik}^s b_{js}^p + \Gamma_{jk}^s b_{is}^p \right) e_p = \\ &= \left(\frac{\partial b_{jk}^p}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{ik}^p}{\partial x^j} + \Gamma_{iq}^p b_{jk}^q - \Gamma_{jq}^p b_{ik}^q - \Gamma_{ik}^s b_{js}^p + \Gamma_{jk}^s b_{is}^p \right) e_p. \end{aligned}$$

Лекция 10

10. Параллельный перенос и геодезические

Параллельный перенос касательных векторов

Пусть γ — гладкая кривая на M . Пусть имеется набор координат $u : u_j = u_j(t)$.

Определение 40. Гладкое семейство касательных векторов к M вдоль кривой γ — соответствие, сопоставление каждой точке t касательный вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$, гладко зависит от t .

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) r_i(u(t))$$

Определение 41. Ковариантная производная гладкого семейства $\xi(t)$ вдоль γ есть

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \xi = \Pi(\dot{\xi}).$$

Замечание 9. Верно следующее

$$\nabla_{\eta} \xi = \Pi \left(\frac{d}{dt} \xi(\gamma(t)) \right),$$

где $\xi(t)$ — семейство вдоль γ , $\tilde{\xi}$ — векторное поле на M такое, что $\tilde{\xi}(\gamma(t)) = \xi$ и

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \xi = \nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{\xi}.$$

Определение 42. Семейство $\xi(t)$ параллельно вдоль γ , если

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \xi(t) = 0.$$

Теорема 11. Пусть γ — гладкая кривая, $\gamma(0) = P$; $\gamma(T) = Q$ и пусть $\xi^0 \in T_P M$. Тогда существует единственное гладкое семейство $\xi(t)$ вдоль γ такое, что

- 1) $\xi(t)$ параллельно вдоль γ ;
- 2) $\xi(0) = \xi^0$.

Теорема 12. Пусть заданы координаты $u = (u_1, \dots, u_n)$ и кривая γ , параметризованная следующим образом $\gamma : u_j = u_j(t)$. Тогда гладкое семейство $\xi(t)$ представляется следующим образом:

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) r_i(u(t)).$$

Рассмотрим ковариантную производную гладкого семейства $\xi(t)$ вдоль γ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \xi &= \Pi \left(\sum_{i=1}^n \dot{\xi}_i r_i + \xi_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \dot{u}_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{\xi}_i r_i + \sum_{i,j=1}^n \dot{u}_j \xi_i \Pi(r_{ij}) = \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i + \sum_{k,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(u(t)) \dot{u}_j \xi_k) r_i. \end{aligned}$$

Имеют место следующие два утверждения:

1) Верно соотношение

$$\dot{\xi}_i + \sum_{k,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(u(t)) \dot{u}_j \xi_k = 0$$

2) $\xi_i(0) = \xi_i^0$.

Определение 43. Семейство $\xi(t)$ — результат параллельного переноса ξ^0 вдоль кривой γ ; $\gamma(T)$ — результат параллельного переноса ξ^0 из точки P в точку Q вдоль кривой γ .

Свойства параллельного переноса вектора вдоль кривой

Определение 44. Семейство $\xi(t)$ параллельно вдоль γ , если $\nabla_{\dot{\gamma}} \xi(t) = 0$.

Теорема 13. Пусть γ — гладкая кривая, $\gamma(0) = P$; $\gamma(T) = Q$ и пусть $\xi^0 \in T_P M$. Тогда существует единственное гладкое семейство $\xi(t)$ вдоль γ такое, что

1) $\xi(t)$ параллельно вдоль γ ;

2) $\xi(0) = \xi^0$.

Определение 45. Семейство $\xi(t)$ — результат параллельного переноса ξ^0 вдоль кривой γ ; $\gamma(T)$ — результат параллельного переноса ξ^0 из точки P в точку Q вдоль γ .

Свойства параллельного переноса вектора вдоль кривой:

1) $\nabla_{\dot{\gamma}} \xi = 0$, а именно

$$\dot{\xi}_i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \xi_k \dot{u}_j = 0$$

2) $\xi(0) = \xi^0$;

$$\xi_i \Big|_{t=0} = \xi_i^0.$$

Пусть p_γ — линейное отображение

$$p_\gamma : T_P M \longrightarrow T_Q M$$

0) Параллельный перенос зависит от γ .

1) $\xi(t)$; $\xi(T)$ линейно зависят от ξ^0 .

2) p_γ сохраняет скалярное произведение

Доказательство.

$$(\xi^0, \tilde{\xi}^0) = (p_\gamma(\xi^0), p_\gamma(\tilde{\xi}^0)) = (\xi(t), \tilde{\xi}(t)).$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\xi(t), \tilde{\xi}(t)) &= (\dot{\xi}, \tilde{\xi}) = (\xi, \dot{\tilde{\xi}}) = (\Pi(\dot{\xi}), \tilde{\xi}) + (\xi, \Pi(\dot{\tilde{\xi}})) = \\ &= \underbrace{(\nabla_{\dot{\gamma}} \xi, \tilde{\xi})}_{=0} + (\xi, \underbrace{\nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{\xi}}_{=0}) \end{aligned}$$

□

- $|\xi(t)| = |\xi(T)| = |\xi^0|$, то есть при параллельном переносе сохраняется длина.
Рассмотрим кривую (петлю) $\gamma(T) = \gamma(0)$,

$$p_\gamma : T_P M \longrightarrow T_P M$$

— оператор голономии, соответствующий петле γ . Все такие операторы образуют группу операторов голономии в точке P .

- Пусть M, N — поверхности, касающиеся вдоль кривой γ , $T_{\gamma(t)} M = T_{\gamma(t)} N$, $p_\gamma^M = p_\gamma^N$.
- Параллельный перенос сохраняется при изометриях.

Геодезические на поверхностях

Кривая геодезическая, если

$$\Pi(\ddot{\gamma}) = 0 = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}).$$

Это означает, что вектор ускорения ортогонален $T_\gamma M$. Семейство $\dot{\gamma}$ параллельно вдоль γ .

$$(u_1, \dots, u_n), \gamma : u_i = u_i(t); \xi_i \longrightarrow \dot{u}_i.$$

Уравнения геодезических:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0, \quad \ddot{u}_i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(u) \dot{u}_k \dot{u}_j = 0.$$

Свойства геодезических

Пусть имеем $2n$ функций: $u_1, \dots, u_n; \xi_1, \dots, \xi_n$.

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \xi_i \\ \dot{\xi}_i = \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \xi_j \xi_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i(0) = u_i^0 \\ \xi_i(0) = \xi_i^0 \end{cases}$$

- 1) Для всякой точки $P \in M$ и для любого вектора $\xi \in T_P M$ существует единственная геодезическая $\gamma(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, проходящая при $t = 0$ через точку P : $\dot{\gamma}(0) = \xi$.
- 2) Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая. Тогда $|\dot{\gamma}| = \text{const}$.
- 3) При параллельном переносе вдоль геодезической сохраняется угол *между геодезической* и переносимым вектором.
- 4) При изометриях геодезические переходят в геодезические.
- 5) Если M и N касаются вдоль γ , то γ геодезическая на $M \iff \gamma$ геодезическая на N .



Лекция 11

11. Вариационный подход к геодезическим

Экспоненциальное отображение

Рассмотрим точку P на многообразии M . Пусть $\xi \in T_P M$, $\gamma_\xi(t)$:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0, \\ \gamma(0) = P, \\ \dot{\gamma}(0) = \xi. \end{cases}$$

Лемма 3. Для всякого $\lambda > 0$

$$\gamma_\xi(\lambda t) = \gamma_{\lambda\xi}(t).$$

Доказательство.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_\xi(\lambda t) = \dot{\gamma}_\xi(0) \cdot \lambda = \lambda \xi$$

□

Вообще говоря, верно следующее

$$\gamma_\xi(\varepsilon) = \gamma_{\varepsilon\xi}(1).$$

$$\xi : |\xi| < \varepsilon, \quad \gamma_\xi(t)$$

Определение 46. Экспоненциальное отображение — отображение $\exp : U \rightarrow M$, U — окрестность 0 в $T_P M$ и $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$.

Замечание 10.

$$\exp(0) = P.$$

Утверждение 19. Отображение $\exp$ — локальный диффеоморфизм, т.е. оно определяет диффеоморфизм некоторой окрестности нуля в $T_P M$ на свой образ.

Доказательство. 1) $\exp(\xi)$ — гладкое, $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = \xi$.

2) $d_0 \exp = \text{id}$ — тождественный оператор.

Если имеем $f : M \rightarrow N$, то $d_Q f : T_Q M \rightarrow T_{f(Q)} N$. Тогда

$$d_0 \exp : T_P M \rightarrow T_P M,$$

$\delta(t)$ — кривая в $T_P M$ такая, что $\dot{\delta}(0) = \eta$.

$$d_0 \exp(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(\delta(t)).$$

$$d_0 \exp(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(\eta t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{\eta,t}(1) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_\eta(t) = \eta.$$

□

Замечание 11. 1) Прямые, проходящие через O , при экспоненциальном отображении переходят в геодезические, выходящие из точки P .

2) Пусть $(u_1, \dots, u_n)$ — координаты в $T_P M$ в ортогональном базисе; Q — точка на M из окрестности точки P , $Q \rightarrow u(\exp^{-1}(Q))$.

Определение 47. Такие координаты — нормальные координаты в окрестности точки P .

Пусть $M \ni P$, $\xi(s) \subset T_P M$ — такая кривая, что $|\xi(s)| = a = \text{const}$,

$$f(t, s) = \exp(t\xi(s)), \quad f : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [s_1, s_2] \rightarrow M,$$

где f гладкое отображение, f_t, f_s — касательные векторы к M в точке $f(t, s)$.

Утверждение 20. $(f_t, f_s) = 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f_t, f_s) &= (f_{tt}, f_s) + (f_t, f_{st}) = (f_t, f_{ts}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}(f_t, f_t) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |f_t|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |\xi(s)|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} a^2 = 0. \end{aligned}$$

$$(f_t, f_s)(t, s) = (f_t, f_s)(0, s)$$

$$f(0, s) = \exp(0 \cdot \xi(s)) = \exp(0) = P \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s}(0, s) = 0 \Rightarrow$$

$$(f_t, f_s)(t, s) = (f_t, f_s)(0, s) = 0.$$

□

Лемма Гаусса

Пусть M — n -мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, $P \in M$,

$$\exp : U \rightarrow V,$$

где U — окрестность 0 в $T_P M$, V — окрестность P на M , вектор $\xi \in T_P M$; $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$.

Рассмотрим $\xi(s) \in T_P M$, $|\xi(s)| = a$,

$$f(t, s) = \exp(t\xi(s)), \quad (f_t, f_s) = 0,$$

$$\sum_a \subset U : \{\xi; |\xi| = a\}.$$

Определение 48. Геодезическая сфера с центром P радиуса a — образ $\sum_a$, т.е.

$$S_a = \exp(\sum_a).$$

Геодезический шар — образ $\{\xi; |\xi| \leq a\}$.

Пусть $\sigma(s)$ — гладкая кривая, лежащая на S_a ; s_0 — точка на σ и $\dot{\sigma}(s_0)$ — вектор скорости к σ .

Пусть γ — геодезическая, соединяющая P с $\sigma(s_0)$ и $\dot{\gamma}$ — ее вектор скорости.

Лемма 4 (Гаусс). $\dot{\gamma}(s_0) \perp \dot{\gamma}$.

Доказательство.

$$f(t, s) = \exp(t\xi(s)), \quad \xi(s) = \exp^{-1}(\sigma(s)), \quad \sigma(s) = \exp(\xi(s))$$

$$|\xi(s)| = a.$$

$$f_t(t_0, s_0) = \dot{\gamma}, \quad f_s(t_0, s_0) = \dot{\sigma}.$$

□

Геодезические как локально кратчайшие

Утверждение 21. Пусть $\sigma(s)$ — кривая на M , лежащая в окрестности U точки P , в которой $\exp$ — диффеоморфизм, причем $\sigma(s)$ не проходит через точку P . Тогда длина

$$l(\sigma) \geq ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)||,$$

где $\xi(s_2) = \exp^{-1} \sigma(s_2)$, $\xi(s_1) = \exp^{-1} \sigma(s_1)$ и $s \in [s_1, s_2]$, причем равенство достигается $\iff \sigma(s)$ монотонно параметризует отрезок радиальной геодезической, выходящей из точки P .

Доказательство.

$$\xi(s) = \exp^{-1}(\sigma(s)) \neq s \in [s_1, s_2];$$

$$\omega(s) = \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}; \quad r(s) = |\xi(s)|; \quad |\omega(s)| = 1.$$

$$\sigma(s) = \exp(r(s)\omega(s)) = f(r(s), s), \quad \dot{\sigma} = f_t \frac{dr}{ds} + f_s,$$

$$l(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\sigma}| ds$$

$$|\dot{\sigma}| = \sqrt{|f_t|^2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + |f_s|^2} \geq |f_t| \cdot \left|\frac{dr}{ds}\right|.$$

$$\begin{aligned} l(\sigma) &\geq \int_{s_1}^{s_2} |f_t| \cdot \left|\frac{dr}{ds}\right| ds = \int_{s_1}^{s_2} \left|\frac{dr}{ds}\right| ds \geq \left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{dr}{ds} ds \right| = \\ &= |r(s_2) - r(s_1)| = ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)||. \end{aligned}$$

□

Теорема 14. Для любой точки $P \in M$ существует такая окрестность U , что $\forall Q \in U$ существует единственная геодезическая γ , соединяющая P и Q и лежащая в U , причем $l(\gamma) \leq l(\sigma)$, где σ — любая кривая, соединяющая P и Q .



Доказательство. Рассмотрим точку P и ее окрестность U ; $V \subset T_P M$, $\exp : V \rightarrow U$ — диффеоморфизм, где V — открытый шар в $T_P M$.

Рассмотрим точку $Q \in U$; пусть S_δ — такая геодезическая сфера радиуса δ , что Q — вне геодезического шара радиуса δ .

Пусть σ соединяет P и Q .

- 1) σ целиком лежит в U ; s_1 — последний момент выхода σ из геодезической сферы S_δ радиуса δ .

$$|\sigma| \geq |\sigma_1| \geq ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)|| \geq d - \delta,$$

так как $|\xi(s_1)| = \delta$, $d = |\exp^{-1}(Q)|$.

- 2) σ выходит из U

$$|\sigma| \geq |\sigma_1| \geq d - \delta.$$

□

Утверждение 22 (без доказательства). Для любой точки $P \in M$ существует окрестность U точки P и $\varepsilon > 0$ такие, что $\forall Q \in U$ шар радиуса ε в $T_Q M$ под действием $\exp$ диффеоморфно отображает на некоторую окрестность U_Q точки Q , содержащую U .

Задача 7. 1) Доказать, что для всякой точки $P \in M$ существует такая окрестность U точки P , что для любых точек $Q_1, Q_2 \in U$ существует единственная геодезическая γ , соединяющая Q_1 и Q_2 и лежащая в U , причем для любой кривой σ , соединяющей Q_1 и Q_2 верно неравенство $|\sigma| \geq |\gamma|$.

- 2) Доказать, что любая геодезическая на M локально кратчайшая, т.е. $\forall t_0 \in (t_1, t_2)$ существует $\varepsilon > 0$ такое что γ — кратчайшая среди всех кривых, соединяющих $\gamma(t_0)$ с $\gamma(t)$ при $|t - t_0| < \varepsilon$.

- 3) Пусть $P, Q \in M$ и γ — кратчайшая кривая, соединяющая P и Q . Доказать, что γ — геодезическая.

Лекция 12. Продолжение обсуждения геодезических и параллельного переноса

Функционал энергии (к предыдущей лекции)

На прошлой лекции мы говорили про функционалы длины и энергии. Экстремали там - уравнения геодезических, только у функционала энергии экстремали - это геодезические в их аффинной натуральной параметризации, а для функционала длины они получаются как геодезические и всевозможные перепараметризации.

Докажем одно неравенство для функционала энергии.

Мы знаем стандартное неравенство для евклидова пространства $(v, w) = |v||w| \cos \alpha$, где α - угол между v и w . Так как $|\cos| \leq 1$, то $|(v, w)| \leq |v||w|$.

Рассмотрим пространство функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)g(t)dt$.

Пусть $g \equiv 1$, тогда, с учетом свойства $|(v, w)| \leq |v||w|$, мы получим

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \leq \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} f^2 dt} \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} dt}.$$

Рассмотрим частный случай $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $f = (\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$. Тогда

$$L[\gamma] \leq \sqrt{E[\gamma]},$$

то есть длина кривой γ не больше, чем корень из энергии из γ , или $L^2[\gamma] \leq E[\gamma]$.

Посмотрим, когда выполняется равенство. В случае скалярного произведения векторов равенство выполняется, когда $\cos = 1$, то есть когда вектора параллельны. Для f и g это значит, что если f пропорциональна g , значит f - константа. Тогда равенство выполняется, когда $|\dot{\gamma}| = \text{const}$, то есть $\gamma(t)$ параметризована аффинным натуральным параметром.

Почему это нам интересно? Рассмотрим пространство кривых, соединяющих точки A и B на плоскости. С точки зрения функционала длины нам не важна параметризация, так как если мы параметризуем кривые так, что $\gamma(0) = A$, а $\gamma(1) = B$, то для функционала длины это ничего не поменяет. Для функционала энергии это также не очень важно, так как если сделать на геодезической аффинную замену параметра, то она по-прежнему останется геодезической. То есть если рассматривать только кривые, параметризованные так, что $\gamma(0) = A$, а $\gamma(1) = B$, то ничего не

изменится. а геодезические - это экстремали энергии. Тогда из этого мы получаем следующее утверждение.

Утверждение

γ - минимальная геодезическая (минимум L) $\Leftrightarrow \gamma$ - минимум E .

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть γ параметризована аффинным натуральным параметром. Тогда

$$E[\gamma] = L^2[\gamma] \leq L^2[w] \leq E[\gamma],$$

где w - любая другая кривая.

$\Leftarrow$ Упражнение. □

Утверждение об угле поворота вокруг области. Дифференциальные формы

Пусть на поверхности есть замкнутая кривая γ с точкой $A = \gamma(0) = \gamma(1)$. Возьмем некоторый вектор Y_0 и сделаем его параллельный перенос вдоль γ .

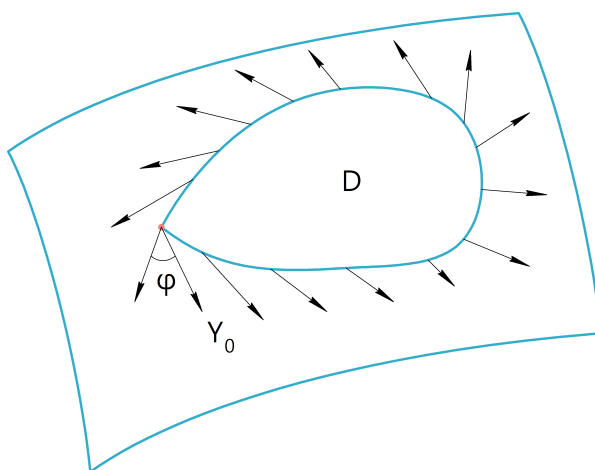


Рис. 12.1

После переноса вдоль всей кривой, когда Y_0 вернулся в точку A , он повернут относительно начального положения на угол φ . Оказывается, что

$$\varphi = \iint_D K dS,$$

где D - область внутри γ , K - гауссова кривизна.

Чтобы дойти до этого результата, обсудим дифференциальные формы. В точке у нас может быть вектор. Если взять поле, то тогда мы в каждой точке имеем объект, который раньше был в точке. Если из точки выходит вектор, то мы получаем векторное поле. Возьмем теперь ковектор $\xi(v)$, линейную функцию от векторов. Тогда, если в каждой точке задан вектор, то мы получим ковекторное поле, которое по-другому называется дифференциальной 1-формой.

Пусть X - касательное векторное поле, тогда $\forall A \in \Sigma X(A) \in T_A \Sigma$. Пусть теперь ξ - дифференциальная 1-форма, тогда $\forall A \in \Sigma \xi_A \in (T_A \Sigma)^* = T_A^* \Sigma$, то есть элемент соответствующего двойственного касательного пространства (кокасательного пространства). В частности, $\xi(X)$ - гладкая функция, так как $\xi(X)|_A = \xi_A(X(A)) \in \mathbb{R}$. Про гладкость можно говорить по-разному, сперва обсудим базис.

Базис

Пусть V - векторное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$, V^* - двойственное векторное пространство с базисом $e^1, \dots, e^n$, то есть такой базис, что $e^i(e_j) = \delta_i^j$. Мы знаем, что касательное пространство в точке порождается векторами r_u, r_v , то есть r_u, r_v - базис в каждой точке касательного пространства.

Векторные поля $X_1, \dots, X_k$ образуют базис в векторных полях, если $\forall A$ векторы $X_1(A), \dots, X_k(A)$ - базис в $T_A \Sigma$. Поэтому r_u, r_v - базис в касательных векторных полях на двумерной поверхности, или $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$ для k -мерной поверхности.

Теперь посмотрим, как устроен двойственный базис в двойственном пространстве. Введем определение дифференциала.

Определение 49. df - такая 1-форма, что $df(X) = \partial_X f$, то есть

$$df(X)|_A = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A) X^i(A).$$

Утверждение

$du^1, \dots, du^k$ - базис в 1-формах, двойственный к базису $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$ в касательных векторных полях.

Доказательство.

$$du^i(r_{uj}) = \partial_{r_{uj}} u^i = \frac{\partial}{\partial u^j} u^i = \delta_i^j.$$

Гладкость векторного поля. Гладкость формы

Если у нас есть некоторое векторное поле, то оно имеет следующий вид

$$X = \sum_{i=1}^k X^i r_{u^i} = X^i r_{u^i}.$$

Тогда рассмотрим способ утверждать про гладкость векторного поля.

Определение 50. Векторное поле X гладкое, если $\forall$ гладкой функции f функция $\partial_X f$ гладкая.

Утверждение

X - гладкое векторное поле $\Leftrightarrow X^i$ - гладкие.

Доказательство.

Это следует из верности следующей формулы

$$\partial_X f = \frac{\partial f}{\partial u^i} X^i.$$

□

Определение 51. 1-форма ω гладкая, если $\forall$ гладкого векторного поля X функция $\omega(X)$ гладкая.

Тогда заметим, что $X = X^i r_{u^i}$, а $\omega = \omega_j du^j$.

$$\omega(X) = \omega_j du^j(X^i r_{u^i}) = \omega_j X^i du^j(r_{u^i}) = \omega_j X^i \delta_i^j = \omega_j X^j.$$

Из полученной формулы следует утверждение.

Утверждение

ω гладкая $\Leftrightarrow \omega_j$ гладкие.

Доказательство.

Доказательство также следует из формулы. Если ω_j гладкие, то и результат применения ω к любому X - гладкая функция. Если ω гладкая, то $\omega(X)$ гладкая $\forall X$,

в том числе и для $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$. □

Зададимся вопросом: какие координаты у df в базисе $du^1, \dots, du^k$?

Утверждение

Частные производные - координаты дифференциала функции f в базисе $du^1, \dots, du^k$, то есть

$$df = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i.$$

Доказательство.

$$df(X) = \partial_X f = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial u^i} X^i = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i(X).$$

□

Заметим, что возможны другие базисы, в частности нам интересен такой базис. Применим ортогонализацию Грама-Шмидта и нормирование к базису $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$. Тогда мы получим гладкий ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$. В ортонормированном базисе удобно делать вычисления.

Дифференциальная 2-форма. Внешний дифференциал

Дифференциальная 2-форма - это гладкое поле кососимметрических билинейных форм. Мы уже знаем один такой пример из линейной алгебры - это ориентированная площадь. Пусть $\mathbb{R}^2$ ориентированное, тогда ориентированная площадь параллелограмма, порожденного u и v , имеет вид

$$\omega_{or}(u, v) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}$$

Есть способ получать 2-формы из 1-форм - внешнее умножение.

Определение 52. Если σ и τ две 1-формы, то их внешнее произведение $\sigma \wedge \tau$ - это 2-форма, определенная как

$$\sigma \wedge \tau(X, Y) = \sigma(X)\tau(Y) - \sigma(Y)\tau(X) = \begin{vmatrix} \sigma(X) & \sigma(Y) \\ \tau(X) & \tau(Y) \end{vmatrix}$$

Утверждение

Внешнее умножение обладает следующими свойствами:

$$1) (\sigma_1 + \sigma_2) \wedge \tau = \sigma_1 \wedge \tau + \sigma_2 \wedge \tau$$

$$2) (\lambda\sigma) \wedge \tau = \lambda(\sigma \wedge \tau)$$

$$3) \sigma \wedge (\tau_1 + \tau_2) = \sigma \wedge \tau_1 + \sigma \wedge \tau_2$$

$$4) \sigma \wedge (\lambda\tau) = \lambda(\sigma \wedge \tau)$$

Упражнение

$\omega_{or} = e^1 \wedge e^2$, где e^i - двойственный базис к ортонормированному базису e_1, e_2 в $\mathbb{R}^2$.

Внешнее дифференцирование

Пусть σ - дифференциальная 1-форма. Определим 2-форму $d\sigma$, которая называется внешним дифференциалом. Для этого нужно объяснить, как $d\sigma$ действует на двух векторных полях, так как это 2-форма.

$$d\sigma(X, Y) = \partial_X(\sigma(Y)) - \partial_Y(\sigma(X)) - \sigma([X, Y]).$$

Утверждение

$d\sigma$ - действительно 2-форма.

Доказательство.

Для доказательства проверим свойства.

$$1) d\sigma(X_1 + X_2, Y) = d\sigma(X_1, Y) + d\sigma(X_2, Y)$$

$$2) d\sigma(fX, Y) = f d\sigma(X, Y)$$

$$3) d\sigma(X, Y) = -d\sigma(Y, X)$$

1.

$$d\sigma(X_1 + X_2, Y) = \partial_{X_1+X_2}(\sigma(Y)) - \partial_Y(\sigma(X_1 + X_2)) - \sigma([X_1 + X_2, Y]) \stackrel{=}{=} \square$$

1) $\partial_{X_1+X_2}$ - производная вдоль суммы векторов, которую можно разложить в сумму производных.

2) σ - линейная функция, поэтому $\sigma(X_1 + X_2) = \sigma(X_1) + \sigma(X_2)$ и $\partial_Y(\sigma(X_1 + X_2)) = \partial_Y(\sigma(X_1) + \sigma(X_2)) = \partial_Y(\sigma(X_1)) + \partial_Y(\sigma(X_2))$.

3) $[X_1, X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$.

$$\begin{aligned} \square \partial_{X_1}(\sigma(Y)) + \partial_{X_2}(\sigma(Y)) - \partial_Y(\sigma(X_1)) - \partial_Y(\sigma(X_2)) - \sigma([X_1, Y]) - \sigma([X_2, Y]) = \\ = d\sigma(X_1, Y) + d\sigma(X_2, Y). \end{aligned}$$

2.

$$d\sigma(fX, Y) = \partial_{fX}(\sigma(Y)) - \partial_Y(\sigma(fX)) - \sigma([fX, Y]) \stackrel{=}{=} \square$$

- 1) Из формулы для производной вдоль векторного поля мы знаем, что аргумент f можно вынести, поэтому $\partial_f X = f \partial_X$.
- 2) σ линейная, поэтому из второго слагаемого f также можно вынести $\partial_Y(\sigma(fX)) = \partial_Y(f\sigma(X))$. Далее воспользуемся тождеством Лейбница и получим $\partial_Y(f\sigma(X)) = (\partial_Y f)\sigma(X) - f\partial_Y(\sigma(X))$
- 3) Из формулы для коммутатора можно заметить, что $\sigma([fX, Y]) = \sigma(f[X, Y] - (\partial_Y f)X)$. Теперь воспользуемся линейностью σ , тогда $\sigma(f[X, Y] - (\partial_Y f)X) = f\sigma([X, Y]) - \partial_Y f\sigma(X)$.

$$\boxed{=} f\partial_X(\sigma(Y)) - \cancel{\partial_Y f\sigma(X)} - f\partial_Y(\sigma(X)) - f\sigma([X, Y]) + \cancel{\partial_Y f\sigma(X)} = fd\sigma(X, Y).$$

3.

$$d\sigma(X, Y) = -d\sigma(Y, X)$$

Это верно, так как коммутатор кососимметричен, а из $\partial_X(\sigma(Y)) - \partial_Y(\sigma(X))$ мы получим $-\partial_X(\sigma(Y)) + \partial_Y(\sigma(X))$. $\square$

Применение дифференциальных форм. Формула Грина. Особый случай

Рассмотрим одно из применений языка дифференциальных форм. Попробуем интегрировать 2-формы. Если ориентация задана с помощью порядка переменных u, v , тогда

$$\iint_D f du \wedge dv := \iint_D f dudv.$$

Заметим, что в размерности 2 все 2-формы пропорциональны. Это вытекает из следующего утверждения, доказательство которого оставляется в качестве упражнения.

Утверждение

$e^1 \wedge e^2$ - базис в пространстве 2-форм.

Формула Грина

Формула Грина говорит о том, что интеграл вдоль замкнутой кривой γ с внутренней областью D

$$\oint_{\gamma} Pdu + Qdv = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv$$

Поговорим о формуле Грина с точки зрения дифференциальных форм. Посмотрим на 1-форму $\omega = Pdu + Qdv$. Мы знаем, что $\oint_{\gamma} Pdu + Qdv = \int_{t_0}^{t_1} (P\dot{u} + Q\dot{v})dt$. Теперь заметим, что

$$\omega(\dot{\gamma}) = \omega(\dot{u}r_u + \dot{v}r_v) = \omega(r_u)\dot{u} + \omega(r_v)\dot{v} = P\dot{u} + Q\dot{v},$$

так как $\omega(r_u) = P$, а $\omega(r_v) = Q$. Получается левую часть в формуле Грина можно переписать в виде $\oint_{\gamma} \omega(\dot{\gamma})dt$

Разберемся теперь с правой частью. На самом деле она равна $d\omega$. Убедимся в этом. Как мы уже говорили, в размерности 2 все 2-формы пропорциональны, поэтому $d\omega = f \cdot du \wedge dv$. Чтобы узнать множитель, подставим векторы r_u и r_v .

$$d\omega(r_u, r_v) = fdu \wedge dv(r_u, r_v) = f,$$

так как по определению $du \wedge dv(r_u, r_v) = 1$. Значит $d\omega = d\omega(r_u, r_v)du \wedge dv$. Теперь мы хотим найти $d\omega(r_u, r_v)$.

$$d\omega(r_u, r_v) = \partial_{r_u}(\omega(r_v)) - \partial_{r_v}(\omega(r_u)) - \omega([r_u, r_v]) \quad \square$$

Мы обсуждали, что $\partial_{r_u} = \frac{\partial}{\partial u}$ и $\partial_{r_v} = \frac{\partial}{\partial v}$, а $\omega(r_v) = Q$ и $\omega(r_u) = P$. Коммутатор $[r_u, r_v] = 0$. В итоге

$$\square \quad \frac{\partial}{\partial u}Q - \frac{\partial}{\partial v}P.$$

Из этого следует, что

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du \wedge dv.$$

Теперь мы можем записать формулу Грина в новом виде:

$$\oint_{\gamma} \omega(\dot{\gamma})dt = \iint_D d\omega.$$

Такой вид записи удобен, так как здесь нет никаких координат и базисов, а мы будем пытаться делать вычисления в ортонормированном базисе на поверхности.

Параллельный перенос

Как мы уже знаем, параллельный перенос - это решение задачи Коши $\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0 \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$,

где Y - параллельное векторное поле. В координатах эта система устроена следующим образом

$$\begin{cases} \dot{Y}^p + \Gamma_{ij}^p \dot{u}^i Y^j = 0 \\ Y^p(t_0) = Y_0^p \end{cases}$$

Попробуем вместо уравнения параллельного переноса записать уравнение на оператор параллельного переноса. Уравнение параллельного переноса линейное, поэтому сумма решение тоже будет решением. Пусть $\Pi(t) : T_{\gamma(t_0)}\Sigma \rightarrow T_{\gamma(t)}\Sigma$ - оператор параллельного переноса. Тогда $Y(t) = \Pi(t)Y_0$, то есть это оператор, который из Y_0 делает вектор параллельного векторного поля в точке t . Запишем соответствующие уравнения в координатах $Y^p(t) = \Pi_q^p(t)Y_0^q$ и подставим в нашу систему.

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_q^p Y_0^q + \Gamma_{ij}^p \dot{u}^i \Pi_q^j Y_0^q = 0 \\ \Pi_q^p(t_0) Y_0^q = Y_0^p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Pi}_q^p + \Gamma_{ij}^p \dot{u}^i \Pi_q^j = 0 \\ \Pi_q^p(t_0) = \delta_q^p \end{cases}$$

Мы получили уравнение, но это уравнение еще не для оператора параллельного переноса, а для его матричных элементов.

Изначально мы записывали уравнения в базисе $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$, а мы хотим перейти к ортонормированному базису, поэтому перепишем получившееся уравнение в виде произведения операторов. Для этого заметим следующее. Пусть у нас есть матрица $\Gamma(\dot{\gamma})$ - оператор, зависящий от вектора скорости. Мы хотим, чтобы $(\Gamma(\dot{\gamma}))_j^p = \Gamma_{ij}^p \dot{u}^i$. Вспомним, что символы Кристоффеля определяются как $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^p e_p$, то есть это разложение в базисе производной e_j вдоль e_p . Возьмем произвольный X $\nabla_X e_j = \Gamma_j^p(X) e_p$. Ковариантная производная линейна по X , значит Γ_j^p - 1-форма. Тогда мы можем понимать $\Gamma(\dot{\gamma})$ как 1-форму со значением в линейных операторах, и уравнение параллельного переноса можно записать без базиса в следующем виде

$$\dot{\Pi} + \Gamma(\dot{\gamma})\Pi = 0.$$

Мы избавились от базиса. Это необходимо, так как проинтегрировать это уравнение мы сможем только в ортонормированном базисе. В итоге мы получили систему

$$\begin{cases} \dot{\Pi} = -\Gamma(\dot{\gamma})\Pi \\ \Pi(t_0) = \text{Id} \end{cases}$$

Если бы у нас была размерность 1, то есть Π и Γ были бы просто функциями, то решение имело бы вид $\Pi(t) = e^{-\int_{t_0}^t \Gamma(\dot{\gamma}) dt}$. Это стандартный способ решать такие системы.

Пусть у нас есть система $\begin{cases} \dot{y} = -ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, тогда стандартное решение имеет вид

$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a dt}$. Посмотрим, действительно ли это так. Для удобства обозначим $\int_{t_0}^t a dt = \alpha$. Если подставить в решение t_0 , то мы получим $y(t_0) = y_0 \cdot \dot{y} = y_0 e^{-\alpha}(-a) =$

$-ay(t)$. Здесь мы используем тот факт, что $(e^a)' = e^a \dot{a}$. Это следует из разложения $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots$, $(e^a)' = 1 + \frac{\dot{a}a + a\dot{a}}{2!} + \dots$. Если все одномерное, то $\frac{\dot{a}a + a\dot{a}}{2!} = a\dot{a}$, если $a, \dot{a}$ коммутируют, поэтому мы получим $(e^a)' = (1 + a + \dots)\dot{a} = e^a \dot{a}$.

Заметим, что если a - матрица, то $\dot{a}$ и a не коммутируют и формула не работает.

Особый случай

- 1) Двумерная поверхность, тогда Π - это 2×2 матрица.
- 2) Ортонормированный базис.

Мы обсуждали, что параллельный перенос сохраняет длины и углы, тогда $\Pi(t)$ - ортогональная матрица. Так как $\Pi(t_0)$ - единичная матрица с определителем 1, поэтому $\Pi(t)$ будет только матрицей поворота. Заметим, что матрицы поворота в плоскости коммутируют.

Также заметим, что в ортонормированном базисе $\Gamma(\dot{\gamma})$ - кососимметрическая матрица. Это следует из того, что так как $(e_i, e_j) = \delta_i^j$, то по свойству согласованности с метрикой $e_k \delta_i^j = 0$, а с другой стороны, по свойству согласованности, $e_k \delta_i^j = (\nabla_{e_k} e_i, e_j) + (e_i, \nabla_{e_k} e_j) = \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{kj}^i$, то есть $\Gamma_{ki}^j = -\Gamma_{kj}^i$, значит $\Gamma(\dot{\gamma})^T = -\Gamma(\dot{\gamma})$. Матрицы поворота коммутируют, а с кососимметрическими матрицами они тоже коммутируют. Значит формула $\Pi(t) = e^{-\int_{t_0}^t \Gamma(\dot{\gamma}) dt}$ верна.

Следствие

Пусть $\alpha = -\int_{t_0}^t \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) dt$. В итоге, мы получили, что

$$\Pi(t) = e^{\int_{t_0}^t \Gamma(\dot{\gamma}) dt} \quad \square$$

Так как $\Gamma(\dot{\gamma})$ в ортонормированном базисе кососимметрическая, значит

$$\begin{aligned} \Gamma(\dot{\gamma}) &= \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) \\ -\Gamma_2^1(\dot{\gamma}) & 0 \end{pmatrix} \\ \square e^{\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Мы получили матрицу поворота. Угол поворота при параллельном переносе вдоль петли на двумерной поверхности равен $\alpha = -\int_{t_0}^t \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) dt$.

Наша поверхность - образ при параметризации r некоторой области. Область внутри замкнутой кривой $\hat{\gamma}$ обозначим за $\hat{D}$, а образ этой области за D . Тогда

$$\int_{t_0}^t \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) dt = \oint_{\hat{\gamma}} \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) dt \equiv$$

Далее нам понадобится формула Грина, которую мы записали в бескоординатном виде.

$$\equiv \iint_{\hat{D}} d\Gamma_2^1$$

Вычислим $d\Gamma_2^1$

$$\begin{aligned} d\Gamma_2^1 &= d\Gamma_2^1(e_1, e_2)e^1 \wedge e^2 = (\partial_{e_1}(\Gamma_2^1(e_2)) - \partial_{e_2}(\Gamma_2^1(e_1)) - \Gamma_2^1([e_1, e_2]))e^1 \wedge e^2 = \\ &= (\partial_{e_1}\Gamma_{22}^1 - \partial_{e_2}\Gamma_{12}^1 - C_{12}^q\Gamma_{q2}^1)e^1 \wedge e^2 \equiv \end{aligned}$$

Полученное выражение напоминает формулу, которую мы уже вычисляли - тензор Римана

$$(R(e_p, e_i)e_j)^r = \partial_{e_p}\Gamma_{ij}^r - \partial_{e_i}\Gamma_{pj}^r + \Gamma_{ij}^q\Gamma_{pq}^r - \Gamma_{pj}^q\Gamma_{iq}^r - C_{pi}^q\Gamma_{qj}^r.$$

Запишем формулу для тензора Римана в случае, когда $p = 1, i = 2, j = 2, r = 1$.

$$(R(e_1, e_2)e_2)^1 = \partial_{e_1}\Gamma_{22}^1 - \partial_{e_2}\Gamma_{12}^1 + \cancel{\Gamma_{22}^q\Gamma_{1q}^1} - \cancel{\Gamma_{12}^q\Gamma_{2q}^1} - C_{12}^q\Gamma_{q2}^1$$

$\Gamma_{22}^q\Gamma_{1q}^1 = 0$, так как здесь стоит суммирование по q , следовательно $\Gamma_{22}^q\Gamma_{1q}^1 = \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1$, а $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ в силу кососимметричности. Аналогично $\Gamma_{12}^q\Gamma_{2q}^1 = 0$. Тогда

$$\equiv (R(e_1, e_2)e_2)^1 e^1 \wedge e^2 = Kg_{22}e^1 \wedge e^2 = Ke^1 \wedge e^2 \equiv$$

Заметим, что $e^1 \wedge e^2 = dS = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$ - форма площади. В итоге

$$\alpha = \iint_D K dS$$

Лекция 13. Следствие теоремы 12 лекции

Повторение. Замечание

В прошлый раз мы доказали утверждение. Пусть у нас есть поверхность. На этой поверхности нам понадобится интегрировать, а поверхностный интеграл есть только на ориентированных поверхностях, поэтому поверхность ориентированная. Если на поверхности Σ есть петля γ , ограничивающая некоторую область D , то тогда верно следующее: если взять на γ вектор и сделать параллельный перенос вдоль γ , то получившийся вектор будет повернут относительно исходного на угол $\alpha = \iint_D K dS$.

Пример

Рассмотрим сферу. Возьмем экватор и сделаем параллельный перенос. Мы уже считали, что после параллельного переноса вдоль экватора угол поворота будет равен 2π . С другой стороны экватор ограничивает северную полусферу S_+^2 . Пусть $R = 1$, следовательно $K = 1$, тогда

$$\iint_{S_+^2} K dS = S(S_+^2) = 2\pi,$$

где $S(S_+^2)$ - площадь полусферы.

Замечание

Вспомним из математического анализа, что формула Грина верна не только для гладких кривых, но и для кусочно-гладких кривых. Поэтому формула для α тоже верна и для кусочно-гладких γ . Уравнения параллельного переноса в таком случае надо решать на каждом гладком куске.

Триангуляция

Будем считать, что у нас есть некоторый стандартный треугольник Δ , пусть равносторонний. Рассмотрим отображение $T : \Delta \rightarrow \Sigma$. Тогда треугольник на Σ - гомеоморфный образ стандартного треугольника.

Триангуляция поверхности Σ - это покрытие Σ треугольниками так, что верно следующее:

$$1) \Sigma = \bigcup_i T_i(\Delta) = \bigcup_i \Delta_i$$

2) Либо $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, либо это общее ребро, либо это общая вершина.

У стандартного треугольника есть вершины, ребра и грань. При отображении, так как отображение - гомеоморфизм, на поверхности также будут три вершины, три ребра (кривые, соединяющие вершины) и внутренность (грань).

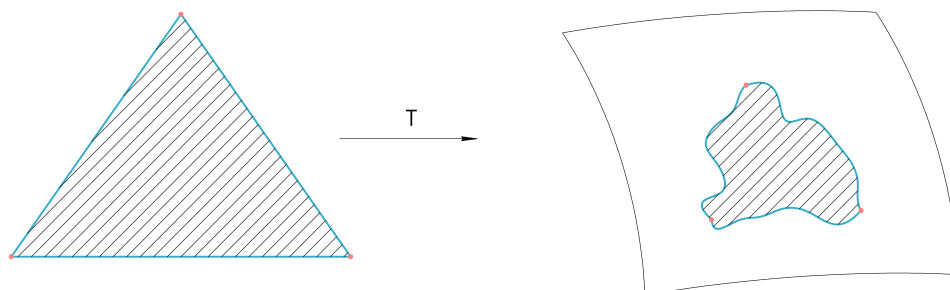


Рис. 13.1

Два треугольника могут либо не пересекаться, либо иметь общее ребро, либо иметь общую вершину.

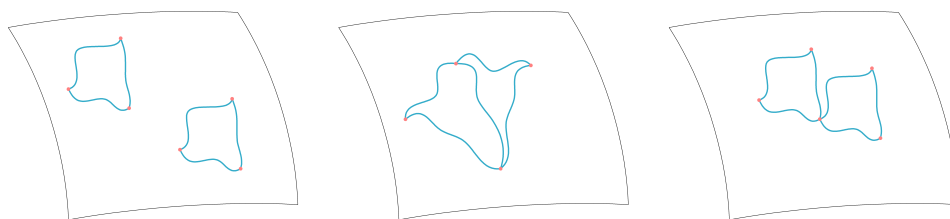


Рис. 13.2

Воспользуемся теоремой, которую мы не можем доказать в этом курсе.

Утверждение

На поверхности Σ существует триангуляция, причем можно предполагать, что

- 1) Каждый треугольник лежит в области, в которой есть локальные координаты.
- 2) Ребра являются геодезическими (геодезическая триангуляция).

Параллельный перенос вокруг одного геодезического треугольника

Пусть у нас есть геодезический треугольник. У него есть углы, а угол между кривыми - это угол между их векторами скорости. Заметим, что углы между векторами скорости - это углы, дополнительные к внутренним углам треугольника.

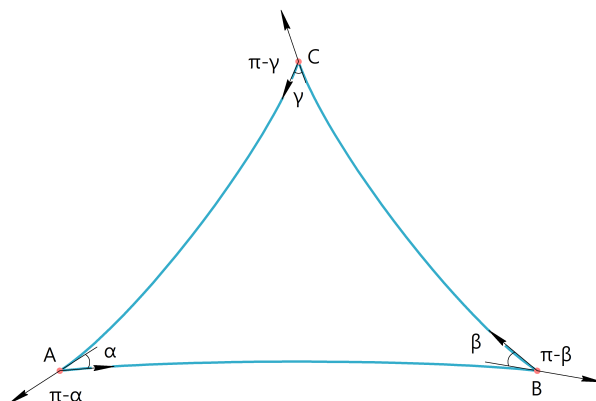


Рис. 13.3

- 1) Возьмем вектор скорости в точке A и сделаем параллельный перенос вдоль ребра AB (геодезической) в точку B . Мы получим вектор скорости геодезической AB в точке B , так как векторное поле $\dot{\gamma}$ параллельно вдоль геодезической γ .
- 2) Повернем вектор скорости в точке B на угол $\pi - \beta$ и получим вектор скорости геодезической BC в точке B .

Дальше повторяем шаг 1 для BC и повторяем шаг 2 в точке C . Аналогично для геодезической CA . В итоге, мы получим исходный вектор. Заметим, что угол поворота исходного вектора равен интегралу от гауссовой кривизны по внутренности треугольника Δ (по формуле с прошлой лекции), к которому мы добавляем углы поворота. С другой стороны, так как мы получили исходный вектор, повернув его на 2π , то в итоге

$$\iint_{\Delta} K dS + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma = 2\pi.$$

Заметим, что такая формула верна и для любого геодезического многоугольника (образ правильного многоугольника такой, что все его стороны - геодезические).

Суммирование равенств по всем геодезическим треугольникам геодезической триангуляции. Теорема Гаусса-Бонне

Мы уже обсудили, что у треугольника на поверхности есть вершины, ребра и грани. Посчитаем общее число вершин, ребер и граней для триангуляции. Обозначим число вершин за B , число ребер за P и число граней за Γ . Определим эйлерову характеристику - это $\chi = B - P + \Gamma$. Эйлерова характеристика для триангуляции на поверхности не зависит от выбора триангуляции, а зависит только от поверхности. Мы можем получить одну триангуляцию из другой с помощью двух операций.

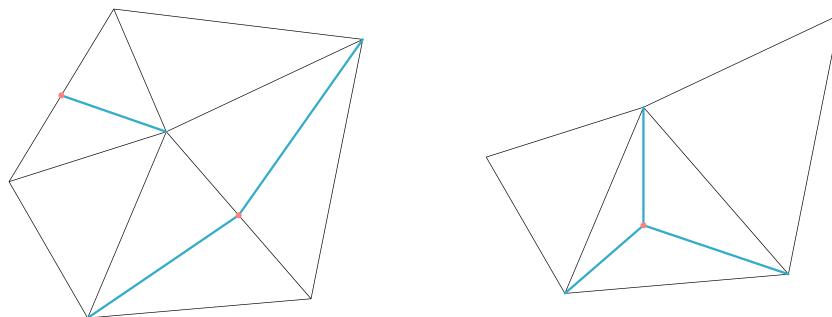


Рис. 13.4

1. Подразделение ребра. Мы берем любое ребро, добавляем на него новую точку и проводим новое ребро, соединяя новую точку и вершину треугольника, противоположную ребру, на которое мы добавили точку. Соответственно, если это ребро общее у двух треугольников, то из новой точки мы проводим два ребра к двум противоположным вершинам. Эйлерова характеристика в этом случае не меняется. Число вершин увеличивается на 1 в обоих случаях. Число ребер увеличивается либо на 2 в случае с одним треугольником (так как мы делим старое ребро вершиной на два ребра и добавляем новое), либо на 3 в случае, когда ребро общее у двух треугольников (аналогично делим старое на два и добавляем два новых). Число граней либо увеличивается на 1 (одна грань поделилась на две новым ребром), либо на 2 (две грани поделились на 4 двумя новыми ребрами). В итоге

$$1. \chi_1 = B_1 - P_1 + \Gamma_1 = B + 1 - (P + 2) + \Gamma + 1 = B - P + \Gamma$$

$$2. \chi_2 = B_2 - P_2 + \Gamma_2 = B + 1 - (P + 3) + \Gamma + 2 = B - P + \Gamma.$$

2. Подразделение граней. Возьмем некоторую грань, добавим внутрь этой грани точку и соединим ее ребрами с вершинами треугольника. Тогда число вершин

увеличится на 1, число ребер увеличивается на 3, число граней увеличивается на 2 (была 1 грань, стало 3 грани). Тогда

$$\chi' = B' - P' + \Gamma' = B + 1 - (P + 3) + \Gamma + 2 = B - P + \Gamma.$$

В общем случае, возьмем произвольную триангуляцию и пересечем ее с другой произвольной триангуляцией. Тогда у нас могут возникнуть произвольные многоугольники, но их можно разрезать на треугольники. Мы получим новую триангуляцию. Оказывается, что триангуляцию, которая является измельчением двух исходных, можно последовательно получить из исходных с помощью указанных двух шагов.

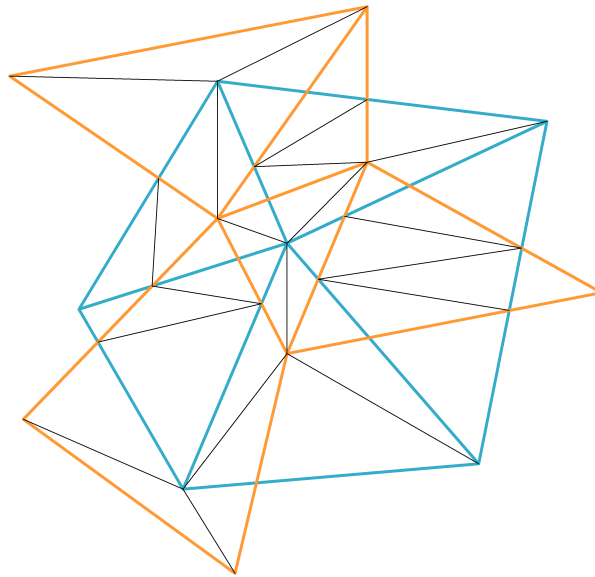


Рис. 13.5

Мы будем использовать тот факт, что эйлерова характеристика не зависит от выбора триангуляции. Перед этим мы смотрели на параллельный перенос вдоль границы геодезического треугольника. Рассмотрим геодезическую триангуляцию. Мы знаем, что для каждого треугольника

$$\iint_{T_i} K dS + 3\pi - \alpha_i - \beta_i - \gamma_i = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi = \iint_{T_i} K dS.$$

Просуммируем теперь это выражение по всем треугольникам T_i . Поменяем для углов порядок суммирования. При каждой вершине сумма всех углов равна 2π , которую мы умножим на количество вершин, а далее мы вычитаем π умноженное на число граней. Мы знаем, что интеграл аддитивный, поэтому при суммировании по всем треугольникам, мы получим интеграл по всей поверхности. В итоге

$$2\pi B - \pi\Gamma = \int_{\Sigma} K dS.$$

Заметим, что в триангуляции каждое ребро принадлежит двум треугольникам. Поэтому верно следующее равенство $2P = 3\Gamma$. Тогда

$$\chi(\Sigma) = B - P + \Gamma = B - \frac{3}{2}\Gamma + \Gamma = B - \frac{1}{2}\Gamma = \frac{1}{2\pi}(2\pi B - \pi\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K dS.$$

Теорема Гаусса-Боне

Пусть Σ компактная (для конечности триангуляции) ориентированная поверхность без края. Тогда эйлерова характеристика этой поверхности

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K dS.$$

Пример

Возьмем сферу радиуса R со стандартной метрикой. Ее гауссова кривизна $K = \frac{1}{R^2}$, тогда

$$\chi(S^2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S^2} \frac{1}{R^2} dS = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^2} \iint_{S^2} dS = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = 2.$$

В самом деле, сфера топологически гомеоморфна тетраэдру, у которого $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$.

Утверждение о гомеоморфности компактной ориентированной поверхности без края

Если Σ компактная ориентированная поверхность без края, и гауссова кривизна в каждой точке строго положительна, то Σ гомеоморфна сфере.

Доказательство.

Вспомним, что есть классификация компактных ориентированных поверхностей без края: это сферы с g приклеенными ручками, где g - род поверхности. $g = 0$ - сфера, $g = 1$ - тор, $g = 2$ - двойной тор. Оказывается, что эйлерова характеристика $\chi = 2 - 2g$. С другой стороны, $\chi = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K dS > 0$, следовательно это возможно только когда $g = 0$, то есть это сфера. $\square$

Утверждение о геодезическом двуугольнике

Кривая не обязательно ограничивает какую-то область, например меридиан на торе. Оказывается, что в некоторых случаях кривая не может ограничивать область. Пусть $K \leq 0$. Рассмотрим две геодезические, пересекающиеся в двух точках. Если они ограничивают область D , то это геодезический двуугольник. Например, два меридиана на сфере - это граница геодезического двуугольника на сфере. Между векторами скорости в точках пересечения геодезических есть углы α и β .

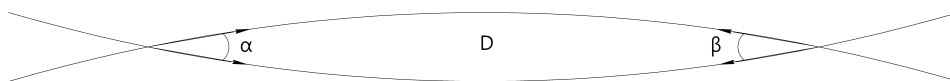


Рис. 13.6

Формула, которую мы писали для геодезического многоугольника верна и в этом случае.

$$\iint_D K dS + \pi - \alpha + \pi - \beta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \iint_D K dS = \alpha + \beta.$$

Заметим, что в геодезическом двуугольнике $\alpha, \beta \neq 0$, иначе это будет одна геодезическая, более того $\alpha, \beta > 0$. Мы получили противоречие, так как $K \leq 0$. Значит, геодезические не могут пересекаться в двух точках, если поверхность имеет не положительную гауссову кривизну.

Более того, рассмотрим замкнутую геодезическую. Замкнутая - это не то же самое, что самопересекающаяся, так как у замкнутой геодезической в вектор скорости в начальной точке такой же, как и в конечной. Замкнутую геодезическую можно рассмотреть как частный случай геодезического двуугольника, когда углы равны π , поэтому у нас нет геодезических двуугольников, ограничивающих область, в частности нет замкнутых геодезических, ограничивающих область.

Теорема

Пусть Σ ориентированна и $K \leq 0$, тогда на Σ две геодезические не могут ограничивать область, то есть нет геодезических двуугольников. Замкнутые геодезические не могут ограничивать область.

Лекция 14. Экспоненциальное отображение

Экспоненциальное отображение

Мы знаем, что если взять на поверхности точку $A \in \Sigma$ и вектор $X \in T_A \Sigma$, то тогда у нас есть геодезическая с соответствующими начальными данными $\gamma_{A,X}(t)$, удовлетворяющая задаче Коши

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \\ \gamma(0) = A \\ \dot{\gamma}(0) = X \end{cases}$$

Проблема в том, что мы не знаем, на каком интервале определена геодезическая. Предположим, что эта геодезическая определена и для момента времени $t = 1$. Тогда введем отображение $\exp_A X = \gamma_{A,X}(1)$, которое определено, если $\gamma_{A,X}$ определена при $t = 1$. Это отображение $\exp_A : T_A \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Определение 54

$\exp_A$ называется экспоненциальным отображением в точке A .

Важно заметить, что $\exp_A$ может быть определена не на всем $T_A \Sigma$. Может ли она быть нигде не определенной? Нет, так как если $X = 0$, то тогда $\gamma_{A,X}(t) \equiv A$ решение задачи Коши, следовательно $\exp_A(0) = A$ и $\exp_A$ определена в $X = 0$.

У нас возникают вопросы:

- 1) Где вообще определено экспоненциальное отображение?
- 2) Если A фиксировано, то мы получаем отображение из вектора в точку поверхности. Будет ли это отображение гладко зависеть от вектора?
- 3) Если менять точку, то зависит ли отображение гладким образом от точки?

Для начала заметим одно свойство. Возьмем геодезическую $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$, где $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Утверждение

$\tilde{\gamma}$ тоже геодезическая.

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \lambda \dot{\gamma}(\lambda t) \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}} \dot{\tilde{\gamma}} = \nabla_{\lambda \dot{\gamma}(\lambda t)} \lambda \dot{\gamma}(\lambda t) = \lambda^2 \nabla_{\dot{\gamma}(\lambda t)} \dot{\gamma}(\lambda t) = 0$$

□

Упражнение

$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at + b)$, где $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, тоже геодезическая.

Посмотрим, каким начальным условиям удовлетворяет геодезическая $\tilde{\gamma}(t)$. Пусть $\gamma_{A,X}(t)$ удовлетворяет условиям $\gamma_{A,X}(0) = A$, $\dot{\gamma}_{A,X}(0) = X$.

Так как $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_{A,X}(\lambda t)$, то $\tilde{\gamma}(0) = \gamma_{A,X}(0) = A$, $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \lambda \dot{\gamma}_{A,X}(0) = \lambda X$.

Утверждение

Если мы хотим решить задачу Коши с вектором λX , то нам необходимо двигаться вдоль геодезической в λ раз быстрее, то есть $\gamma_{A,\lambda X}(t) = \gamma_{A,X}(\lambda t)$.

Доказательство.

Это следует из того, что $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_{A,X}(\lambda t)$ удовлетворяет условиям для $\gamma_{A,\lambda X}(t)$. □

Из этого свойства можно заметить следующее. Пусть мы хотим найти $\gamma_{A,X}(t)$. Но $\gamma_{A,X}(t) = \gamma_{A,X}(t \cdot 1) = \gamma_{A,tX}(1) = \exp_A tX$. То есть, если геодезическая определена для некоторого t , то определена и экспонента.

Утверждение

$\gamma_{A,X}(t) = \exp_A tX$.

Теорема о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных данных и от параметров

Эта теорема формулируется в координатах, поэтому нам необходимо записать уравнения геодезических в координатах. Пусть $u^1, \dots, u^k$ - локальные координаты, которые параметризуют нашу поверхность, $x^1, \dots, x^n$ - пространство координат, в котором лежит наша поверхность. Тогда $u^1(t), \dots, u^k(t)$ - геодезическая в локальных координатах. Пусть $A = (A^1, \dots, A^k)$ - локальные координаты точки A . $X = X^i r_{u^i}$, где $(X^1, \dots, X^k)$ - координаты вектора X . В этом случае задача Коши, которую мы записывали в бескоординатном виде, может быть переписана.

$$\begin{cases} \nabla \dot{\gamma} = 0 \\ \gamma(0) = A \\ \dot{\gamma}(0) = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u}^l(t) = -\Gamma_{ij}^l(u^1(t), \dots, u^k(t)) \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) \\ u^l(0) = A^l \\ \dot{u}^l(0) = X^l \end{cases}, \quad l = 1, \dots, k$$

Обозначим через $|A| = \sqrt{(A^1)^2 + \dots + (A^k)^2}$, $|X| = \sqrt{(X^1)^2 + \dots + (X^k)^2}$.

Определение 55

Локальные координаты центрированы в точке A_0 , если у нее координаты $(0, \dots, 0)$.

Утверждение

Для любой точки A_0 существуют локальные координаты, центрированные в ней.

Доказательство.

Необходимо взять новые локальные координаты $\tilde{u}^1 = u^1 - A_0^1, \dots, \tilde{u}^k = u^k - A_0^k$. $\square$

Утверждение

Существуют такие $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$, такие, что при $|t| < \varepsilon$, $|A| < \delta_1$, $|X| < \delta_2$ решение задачи Коши, которую мы записали в бескоординатном виде, $\gamma_{A,X}(t)$ существует и гладко зависит от A и X , то есть $(\gamma_{A,X}(t))^l$ гладко зависит от A^i, X^i .

У нас было свойство однородности $\gamma_{A,X}(\lambda t) = \gamma_{A,\lambda X}(t)$. Пусть решение задачи Коши определено при $|X| < \delta_2$, $|t| < \varepsilon$. Если взять $|X| < \frac{\delta_2}{2}$, то решение определено при $|t| < 2\varepsilon$, так как мы можем воспользоваться свойством однородности. Если теперь взять $|X| < \frac{\delta_2 \varepsilon}{2}$, то решение определено при $|t| < 2$. Тогда мы можем переписать наше утверждение.

Утверждение

Пусть $A_0 \in \Sigma$. Тогда существуют $\delta > 0$ и окрестность U точки A_0 на Σ , такие, что $\gamma_{A,X}(t)$ определено при $\|X\| < \delta$ (где $\|X\|$ - длина X в первой квадратичной форме), $|t| < 2$ и гладко зависит от A и X .

При такой формулировке мы избавляемся от координат точки.

Доказательство.

Необходимо взять локальные координаты, центрированные в точке A_0 , взять $\delta = \frac{\delta_2 \varepsilon}{2} C$, где C - такая константа, что $\|X\| < C|X|$. $\square$

Определение экспоненциального отображения

Переформулируем теперь последнее утверждение для экспоненциального отображения.

Утверждение

Пусть $A_0 \in \Sigma$. Тогда существует $\delta > 0$ и окрестность U точки A_0 , такая, что $\forall A \in U$

и $\forall X \in T_A \Sigma$, $|X| < \delta$, $\exp_A X$ определено и гладко зависит от A и X .

Далее мы хотим доказать одну важную теорему, но для этого необходимо сделать некоторое вычисление. Выпишем еще раз наше соотношение $\gamma_{A,X}(\lambda t) = \gamma_{A,\lambda X}(t)$. Мы хотим посмотреть более явно на зависимость от X , поэтому мы будем сейчас писать $\gamma_A^i(t, X^1, \dots, X^n)$ вместо $(\gamma_{A,X}(t))^i$. Тогда

$$\gamma_A^i(\lambda t, X^1, \dots, X^k) = \gamma_A^i(t, \lambda X^1, \dots, \lambda X^k).$$

Найдем производную по λ .

$$\frac{\partial \gamma_A^i}{\partial t}(\lambda t, X^1, \dots, X^k)t = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \gamma_A^i}{\partial X^j}(t, \lambda X^1, \dots, \lambda X^k)X^j.$$

Подставим теперь $\lambda = 0$, $t = 1$, тогда

$$\frac{\partial \gamma_A^i}{\partial t}(0, X^1, \dots, X^k) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \gamma_A^i}{\partial X^j}(1, 0, \dots, 0)X^j.$$

Разберем это выражение. γ_A^i - геодезическая, значит производная по t - это вектор скорости геодезической. Эта геодезическая решает начальные условия о том, что в момент времени 0 вектор скорости равен X . Тогда в левой части мы получили X^i . Когда мы подставляем момент времени 1, мы получаем экспоненту. Производные по аргументу в нулевом векторе от экспоненты - это матрица Якоби нашего экспоненциального отображения в точке $(0, \dots, 0)$, значит

$$X^i = \sum_{j=1}^k (d_0 \exp_A)^i_j X^j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^k \end{pmatrix} = (d_0 \exp_A) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^k \end{pmatrix} \Rightarrow (d_0 \exp_A) = E.$$

Мы получили, что у дифференциала экспоненциального отображения в нуле единичная матрица. При этом мы используем базис $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$, а координаты точки - $(u^1, \dots, u^k)$. Обсудим это поподробнее. На поверхности есть касательное пространство, и мы знаем, что $T_A \Sigma = \{\text{Вектора скорости на } \Sigma\}$. Рассмотрим частный случай.

Пусть V - векторное пространство. Возьмем вектор $v \in V$ и посмотрим на кривые, проходящие через v вида $\gamma(t) = v + wt$. Тогда вектор скорости кривой $\dot{\gamma} = w \in V$. Значит, что $\forall v \in V$ $T_v V = V$, то есть у линейного пространства его касательное пространство совпадает с ним.

Когда мы обсуждали изометрии, то мы заметили, что если у нас есть отображение F из поверхности M в поверхность N , и точка $A \in M$, $F(A) \in N$, то тогда у нас есть отображение касательных пространств $T_A M \xrightarrow{d_A F} T_{F(A)} N$.

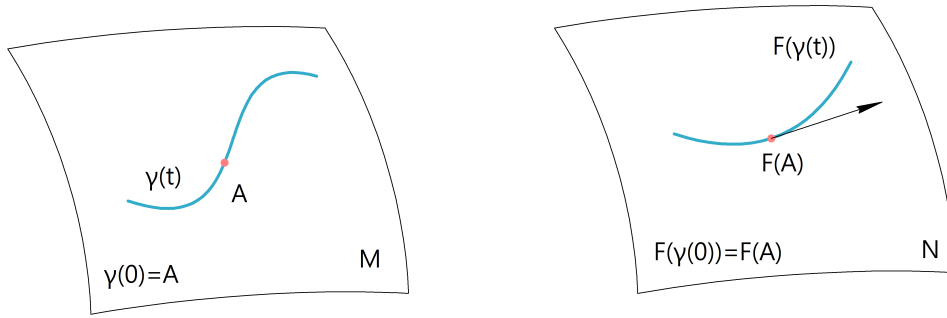


Рис. 14.1

Пусть на M локальные координаты $u^1, \dots, u^k$, а на N локальные координаты $w^1, \dots, w^l$. Если мы хотим найти вектор скорости кривой $F(\gamma(t))$, то

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(\gamma(t)) = D_a F \dot{\gamma}(0),$$

и в базисах $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}, \tilde{r}_{w^1}, \dots, \tilde{r}_{w^l}$ матрица $d_A F$ - матрица Якоби $\frac{\partial w^i}{\partial u^j}(A)$.

Применим это к экспоненциальному отображению.

У нас есть точка $A \in \Sigma$. $\exp_A : T_A \Sigma \rightarrow \Sigma$. Мы знаем, что $\exp_A(0) = A$, то есть $0 \rightarrow A$, значит $d_0 \exp_A : T_0(T_A \Sigma) \rightarrow T_A \Sigma$, но $T_A \Sigma$ - векторное пространство, поэтому можно отождествить $T_0(T_A \Sigma) \simeq T_A \Sigma$.

Утверждение

$d_0 \exp_A : T_A \Sigma \rightarrow T_A \Sigma$ является тождественным оператором.

Следствие

Существует окрестность U_0 вектора $0 \in T_A \Sigma$ и окрестность U точки $A \in \Sigma$, такие, что $\exp_A : U_0 \rightarrow U$, где $U_0 \subset T_A \Sigma$, $U \subset \Sigma$, является диффеоморфизмом.

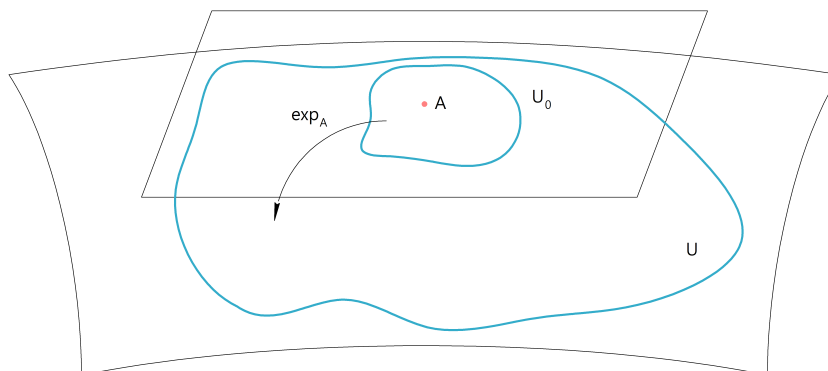


Рис. 14.2

Построение систем координат на поверхности

Введем координаты следующим образом. В $T_A\Sigma$ есть скалярное произведение I_A . Выберем некоторый ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$ в $T_A\Sigma$. Определим нормальные (геодезические) координаты в области $U \subset \Sigma$ так: для точки $B \in U$ ее координаты - это координаты вектора $\exp_A^{-1}B$ в ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_k$. Обозначим эти координаты через $v^1, \dots, v^k$.

Упражнение

$$1) v^1(A) = \dots = v^k(A) = 0$$

$$2) I_A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ в координатах } v^1, \dots, v^k$$

$$3) \text{ В координатах } v^1, \dots, v^k \text{ все символы Кристоффеля } \Gamma_{ij}^l(A) = 0.$$

Определение 56

Координаты $v^1, \dots, v^k$ полугеодезические, если I в них имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & * \end{pmatrix}.$$

Упражнение

Если $v^1, \dots, v^k$ полугеодезические координаты, то координатная кривая $v^1 = t, v^2 = \text{const}, \dots, v^k = \text{const}$ является геодезической.

Случай двумерной поверхности

v^1, v^2 - нормальные (геодезические) координаты, определенные с помощью точки A . Возьмем соответствующие этим нормальным координатам полярные $v^1 = \rho \cos \varphi$, $v^2 = \rho \sin \varphi$. Этот переход взаимно-однозначен при $\rho > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Тогда при экспоненциальном отображении мы выкидываем точку A и некоторую кривую. Значит ρ, φ определены на Σ в $U \setminus \gamma$.

Упражнение

ρ, φ - полугеодезические координаты.

Определение 57

ρ, φ называются полярными полугеодезическими координатами.

Лекция 15. Минимальные поверхности.

Поверхности постоянной (гауссовой) кривизны

Минимальные поверхности

Введем понятие функционала площади

$$S[\Sigma] = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где область D лежит в пространстве координат u и v .

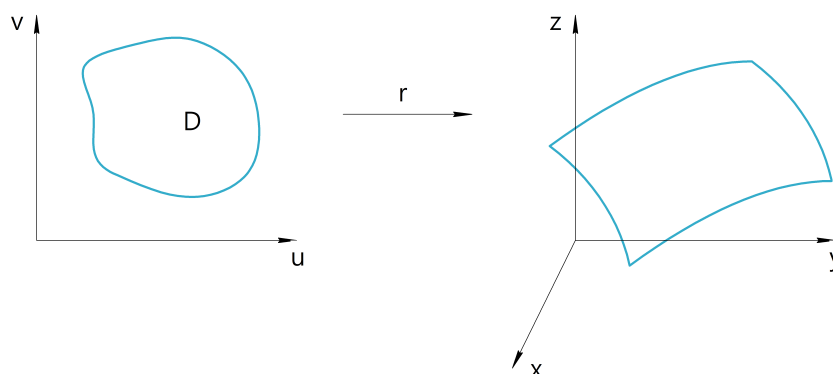


Рис. 15.1

Нас интересуют экстремумы этого функционала (аналог равенства нулю первой производной). Пусть у нас есть поверхность Σ с параметризацией $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Мы ищем семейство возмущений Σ_t с параметризацией $r_t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Когда мы изучали геодезические, то мы рассматривали вариации кривых с закрепленными концами. В случае поверхностей мы требуем, чтобы вариация имела компактный носитель, то есть у нас есть некоторая компактная область, и возмущение сосредоточено в этой области.

Определение 58

Семейство поверхностей Σ_t с параметризацией r_t , где $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, называется вариацией поверхности Σ с параметризацией r , если $r_0 = r$. Параметризация r_t гладко зависит от t и при каждом t регулярна.

Определение 59

Носитель вариации r_t - это множество

$$\text{supp } r_t = \overline{\{A \in D \mid \exists t : r_t(A) \neq r(A)\}} \subset D.$$

Определение 60

Поверхность Σ с параметризацией r минимальна, если она является экстремалью функционала площади, то есть если для любой вариации Σ_t с параметризацией r_t с компактным носителем $\text{supp } r_t$ верно равенство

$$\frac{d}{dt}S[\Sigma_t]|_{t=0} = 0.$$

Утверждение

Σ минимальна $\Leftrightarrow H = 0$, то есть когда ее средняя кривизна равна 0.

Доказательство.

Чтобы доказать это утверждение заметим, что как функционал длины не зависит от параметризации на конкретной кривой, также и функционал площади не зависит от выбора параметризации на поверхности. Выберем тогда удобную нам параметризацию. Для малых t параметризуем Σ_t следующим образом.

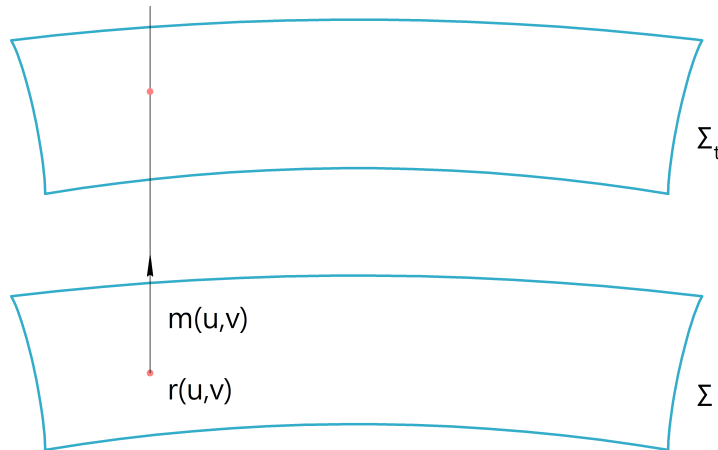


Рис. 15.2

Пусть на Σ есть точка $r(u, v)$. Возьмем в этой точке нормальную прямую, порожденную вектором нормали к поверхности $m(u, v)$ в этой точке. При достаточно малых t эта прямая пересечет Σ_t в одной точке, которая устроена как

$$r(u, v) + \lambda(t, u, v)m(u, v) = r_t(u, v),$$

где $\lambda(t, u, v)$ - расстояние между точками. Перепараметризуем поверхность Σ_t таким образом. По определению $r_0(u, v) = r(u, v)$, тогда $\lambda(0, u, v) = 0$. Вспомним, что если у нас есть некоторая функция $f(t)$, то мы можем записать ее в виде $f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t)$. Обозначим $\mu(u, v) = \frac{\partial \lambda}{\partial t}(0, u, v)$, тогда

$$\lambda(t, u, v) = \lambda(0, u, v) + t\mu(u, v) + o(t) = t\mu(u, v) + o(t)$$

$\Downarrow$

$$r_t(u, v) = r(u, v) + t\mu(u, v)m(u, v) + o(t)$$

□

Зависимость первой квадратичной формы от второй

Пусть наша параметризация устроена как $r_t(u, v) = r(u, v) + t\mu(u, v)m(u, v) + o(t)$, для краткости будем записывать ее в виде $r_t = r + t\mu m$. Вычислим теперь изменение первой квадратичной формы при вариации. Вспомним, что у поверхности Σ

$$\Sigma: \quad I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} E &= (r_u, r_u) \\ F &= (r_u, r_v) \\ G &= (r_v, r_v) \end{aligned}$$

$$\Sigma_t: \quad I_t = \begin{pmatrix} E_t & F_t \\ F_t & G_t \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} E_t &= ((r_t)_u, (r_t)_u) \\ F_t &= ((r_t)_u, (r_t)_v) \\ G_t &= ((r_t)_v, (r_t)_v) \end{aligned}$$

Посчитаем I_t :

$$\begin{aligned} E_t &= ((r_t)_u, (r_t)_u) = (r_u + t(\mu_u m + \mu m_u) + o(t), r_u + t(\mu_u m + \mu m_u) + o(t)) = \\ &= (r_u, r_u) + \cancel{t\mu_u(r_u, m)} + t\mu(r_u, m_u) + \cancel{t\mu_u(m, r_u)} + t\mu(m_u, r_u) + o(t) \quad \boxed{=} \end{aligned}$$

$(r_u, m) = (m, r_u) = 0$, так как m - нормальный вектор, а r_u - касательный. (r_u, m_u) мы можем получить через вторую квадратичную форму. Мы знаем, что $(r_u, m) = 0$, тогда $(r_u, m)_u = (r_{uu}, m) + (r_u, m_u) = L + (r_u, m_u)$, откуда следует, что $(r_u, m_u) = -L$.

$$\boxed{=} E + 2t\mu(r_u, m_u) + o(t) = E - 2t\mu L + o(t).$$

Аналогично можно посчитать G :

$$G_t = ((r_t)_v, (r_t)_v) = G - 2t\mu N + o(t).$$

$$\begin{aligned} F_t &= ((r_t)_u, (r_t)_v) = (r_u + t(\mu_u m + \mu m_u) + o(t), r_v + t(\mu_v m + \mu m_v) + o(t)) = \\ &= F + t\mu(m_v, r_u) + t\mu(m_u, r_v) + o(t) \quad \boxed{=} \end{aligned}$$

$(r_u, m)_v = (r_{uv}, m) + (r_u, m_v) = M + (r_u, m_v)$, значит $(r_u, m_v) = -M$.

$(r_v, m)_u = (r_{vu}, m) + (r_v, m_u) = M + (r_v, m_u)$, значит $(r_v, m_u) = -M$.

$$\boxed{=} F - 2t\mu M + o(t).$$

Дальше посчитаем элемент площади

$$\begin{aligned} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} &= \sqrt{(E - 2t\mu L + o(t))(G - 2t\mu N + o(t)) - (F - 2t\mu M + o(t))^2} = \\ &= \sqrt{EG - 2t\mu EN - 2t\mu LG - F^2 + 4t\mu FM + o(t)} \quad \boxed{=} \end{aligned}$$

Вспомним формулу разложения функции $f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + o(t-a)$. Заменим t на $a + t$, тогда $f(a + t) = f(a) + f'(a)t + o(t)$. Применим эту формулу к нашим вычислениям. Пусть $f = \sqrt{t}$, тогда $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. В нашем случае $a = EG - F^2$, $t = -2t\mu EN - 2t\mu LG + 4t\mu FM$.

$$\begin{aligned} & \boxed{=} \sqrt{EG - F^2} + \frac{-2t\mu(EN + LG - 2FM)}{2\sqrt{EG - F^2}} + o(t) = \\ & = \sqrt{EG - F^2} - t\mu \frac{EN + LG - 2FM}{\sqrt{EG - F^2}} + o(t). \\ & \Downarrow \\ S[\Sigma_t] &= \frac{d}{dt} \iint_D \sqrt{E_t G_t - F_t^2} du dv \Big|_{t=0} = - \iint_D \mu \frac{EN + LG - 2FM}{\sqrt{EG - F^2}} du dv. \end{aligned}$$

Для любой вариации это выражение равно нулю, а вариации задаются разными μ . Это равносильно тому, что дробь под интегралом равна нулю. Тогда наша поверхность минимальна, когда $EN + LG - 2FM = 0$. Осталось найти среднюю кривизну поверхности и показать, что равенство нулю средней кривизны эквивалентно равенству нулю этого выражения.

Обращение в ноль средней кривизны

Вычислим теперь среднюю кривизну H .

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \quad H = \text{tr}(II I^{-1}), \quad I^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ & \Downarrow \\ H &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} LG - FM & * \\ * & -FM + EN \end{pmatrix} = \\ & = \frac{EN + LG - 2FM}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Мы получили в числителе ровно то выражение, которое нашли до этого, значит $EN + LG - 2FM = 0 \Leftrightarrow H = 0$.

Поверхность постоянной (гауссовой) кривизны. Теорема о классификации поверхностей постоянной (гауссовой) кривизны

Мы знаем некоторые примеры таких поверхностей, например, плоскость $K = 0$, или сфера $K = \frac{1}{R^2}$. Также есть поверхности постоянной отрицательной кривизны - плоскость Лобачевского с метрикой $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$, у которой $K = -1$.

Теорема

Поверхность постоянной гауссовой кривизны K локально изометрична плоскости (при $K = 0$), сфере (при $K > 0$) или плоскости Лобачевского (при $K < 0$).

На прошлой лекции мы обсуждали, что можно ввести полярные полугеодезические координаты, используя исходящие из точки на поверхности геодезические и геодезические окружности. Метрика в таких координатах имеет вид

$$ds^2 = d\rho^2 + G(\rho, \varphi)d\varphi^2 \quad \text{или} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(\rho, \varphi) \end{pmatrix}$$

Чтобы доказать теорему, сначала мы найдем символы Кристоффеля для полярных полугеодезических координат. Выразим гауссову кривизну через символы Кристоффеля и их производные. Далее, используя условие, что гауссова кривизна постоянна, мы получим некоторое дифференциальное уравнение на функцию $G(\varphi, \rho)$. Решим это уравнение явно и увидим, что метрики, которые у нас получатся, будут метриками для плоскости, сферы или плоскости Лобачевского.

Доказательство.

Зафиксируем порядок переменных $x^1 = \rho, x^2 = \varphi$. $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = G$.

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \Rightarrow g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = \frac{1}{G}$$

Вспомним формулу для символов Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \right)$$

Заметим, что (g^{kl}) диагональна, поэтому $k = l$. Также заметим, что только $g_{22} = G$ имеет ненулевые производные $\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = G_\rho, \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = G_\varphi$. Остальные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = 0$. Это значит,

что среди индексов должны быть хотя бы две 2, поэтому среди Γ_{ij}^k не равны нулю только $\Gamma_{22}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$.

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{G_\varphi}{G}.$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{2} G_\rho.$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{G_\rho}{G}.$$

□

Продолжение доказательства будет на следующей лекции. Запишем то, что мы вычислили в отдельное утверждение.

Утверждение

Для полярных полугеодезических координат символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_\varphi}{G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_\rho, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_\rho}{G}, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$$

Лекция 16. Теорема о поверхности постоянной гауссовой кривизны

На этой лекции мы продолжим доказательство теоремы. Мы ввели полярные полу-геодезические координаты, которые строятся с помощью экспоненциального отображения из касательной плоскости на поверхность M . То есть, если $\exp_A$ - диффеоморфизм некоторой окрестности $\hat{U}$ точки $0 \in T_A M$ и окрестности U точки $A \in M$. Тогда, если $B \in U$, то тогда определен касательный вектор $\exp_A^{-1} B \in T_A M$. Мы выбирали ортонормированный базис e_1, e_2 в $T_A M$, и говорили, что пусть x, y - декартовы координаты в этом базисе, а ρ, φ - соответствующие полярные координаты. Тогда полярные полугеодезические координаты точки B - по определению полярные координаты ρ, φ от $\exp_A^{-1} B \in \hat{U} \in T_A M$.

Когда мы находили вид метрики в полярных полугеодезических координатах мы доказали, что $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$.

Перепишем символы Кристоффеля, которые мы нашли на прошлой лекции, в терминах $\sqrt{G}$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{G_\varphi}{G} = \frac{1}{2} \frac{((\sqrt{G})^2)_\varphi}{(\sqrt{G})^2} = \frac{(\sqrt{G})_\varphi}{\sqrt{G}} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} G = -\sqrt{G}(\sqrt{G})_\rho \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_\rho}{G} = \frac{(\sqrt{G})_\rho}{\sqrt{G}}\end{aligned}$$

Мы знаем, что можно выразить гауссову кривизну через тензор кривизны $K g_{22} = (R(e_1, e_2)e_2)^1$, а тензор кривизны можно выразить через символы Кристоффеля.

$$(R(e_p, e_i)e_j)^r = \partial_{e_p} \Gamma_{ij}^r \partial_{e_i} \Gamma_{pj}^r + \Gamma_{ij}^q \Gamma_{pq}^r - \Gamma_{pj}^q \Gamma_{iq}^r - [e_p, e_i]^q \Gamma_{qj}^r.$$

В нашем случае $e_1 = r_\rho, e_2 = r_\varphi$, тогда $\partial_{e_1} = \frac{\partial}{\partial \rho}, \partial_{e_2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, а также $[r_\rho, r_\varphi] = 0$ как коммутатор частных производных. Приступим к вычислению при $p = 1, i = 2, j = 2, r = 1$.

$$KG = \frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_{22}^1 - \frac{\partial}{\partial \varphi} \Gamma_{12}^1 + (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1) - (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1) \equiv$$

Так как $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$, то

$$\begin{aligned}\equiv \frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 &= -(\sqrt{G}(\sqrt{G})_\rho)_\rho + \frac{(\sqrt{G})_\rho}{\sqrt{G}} \sqrt{G}(\sqrt{G})_\rho = \\ &= -(\sqrt{G})_\rho(\sqrt{G})_\rho - \sqrt{G}(\sqrt{G})_{\rho\rho} + (\sqrt{G})_\rho(\sqrt{G})_\rho = -\sqrt{G}(\sqrt{G})_{\rho\rho}\end{aligned}$$

Утверждение

В полярных полугеодезических координатах $K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$.

С помощью этой формулы можно полностью локально описать поверхности постоянной гауссовой кривизны.

Пусть $K = 0$, тогда $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0$. Так как G зависит и от φ , то для каждого φ мы получим решение уравнения $\sqrt{G} = A(\varphi)\rho + B(\varphi)$. Мы также знаем, что $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$, тогда $B(\varphi) \equiv 0$. С другой стороны $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1$, значит $A \equiv 1$. В итоге, $\sqrt{G} = \rho$, $G = \rho^2$ и $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$. Мы получили метрику в полярных координатах.

То есть мы берем точку на поверхности с $K = 0$. Пусть U - окрестность точки A , в которой есть полярные полугеодезические координаты. Это значит, что у нас есть отображение $F : U \rightarrow \mathbf{R}^2$, то есть точка $F(r, \varphi)$ из U с полярными полугеодезическими координатами переходит в точку (r, φ) . Метрики устроены одинаково, поэтому это изометрия.

Утверждение

Если у поверхности постоянная гауссова кривизна $K = 0$, то она локально изометрична плоскости.

Теперь рассмотрим случай $K > 0$. Вернемся к нашему уравнению $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G}$. Так как $K > 0$, то это уравнение гармонического осциллятора.

Тогда $\sqrt{G} = A(\varphi) \cos(\sqrt{K}\rho) + B(\varphi) \sin(\sqrt{K}\rho)$. $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$, значит $A(\varphi) = 0$. $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1$, тогда $\sqrt{K}B(\varphi) = 1$ и $B(\varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{K}}$. В полярных полугеодезических координатах метрика поверхности с постоянной положительной гауссовой кривизной имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}\rho) \end{pmatrix}$$

Убедимся в том, что такие поверхности есть. Возьмем сферу S^2 радиуса R . Мы знаем, что нормальные сечения сферы - большие круги радиуса R , тогда главные кривизны $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{R}$ и $K = \frac{1}{R^2} > 0$ постоянна. Возьмем точку A на поверхности M и северный полюс на сфере. В области U ($A \in U$) полярные полугеодезические координаты ρ, φ , которые мы также можем ввести на сфере, но без южного полюса. Тогда мы можем построить отображение из поверхности на сферу $F(\rho, \varphi) = (R \sin \rho, \varphi)$. Это будет локальная изометрия, так как метрики устроены одинаково.

Утверждение

Поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны локально изометрична сфере радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Осталось проверить поверхности с $K < 0$. В этом случае $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G}$, где

$-K > 0$. Решением будет $C_1 e^{\sqrt{-K}\rho} + C_2 e^{-\sqrt{-K}\rho}$. Перейдем к базису

$$\operatorname{ch} \sqrt{-K}\rho = \frac{e^{\sqrt{-K}\rho} + e^{-\sqrt{-K}\rho}}{2}, \quad \operatorname{sh} \sqrt{-K}\rho = \frac{e^{\sqrt{-K}\rho} - e^{-\sqrt{-K}\rho}}{2}.$$

Тогда $\sqrt{G} = A(\varphi) \operatorname{ch}(\sqrt{-K}\rho) + B(\varphi) \operatorname{sh}(\sqrt{-K}\rho)$. Обратимся снова к нашим условиям для $\sqrt{G}$ через пределы.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\varphi) = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{-K} B(\varphi) \operatorname{ch} \sqrt{-K}\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad B(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-K}}$$

Если поверхности постоянной гауссовой кривизны $K < 0$ существуют, то в полярных полугеодезических координатах их метрика выглядит следующим образом

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh} \sqrt{-K}\rho \end{pmatrix}$$

Необходимо проверить, существуют ли такие поверхности. Для этого необходимо предъявить пример такой поверхности. Рассмотрим поверхность, которая называется псевдосфера Бельтрами. Зададим ее явной параметризацией

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \sin u \sin v \\ z = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix}$$

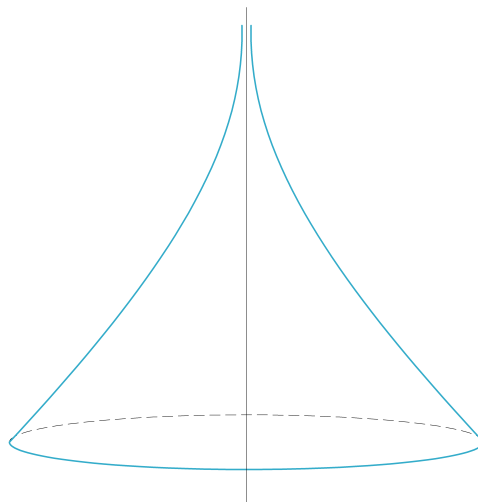


Рис. 16.1

Посчитаем гауссову кривизну этой поверхности. Пусть $x^1 = u$, $x^2 = v$. Сделаем некоторые предварительные вычисления.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \\ \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right)' &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2}} - \sin u = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} - \sin u = \frac{1}{\sin u} - \sin u. \\ &\Downarrow \\ r_u &= \left(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \left(\frac{1}{\sin u} - \sin u \right) \right). \\ r_v &= (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0). \\ E = (r_u, r_u) &= a \cos^2 u + \frac{a}{\sin^2 u} - 2a + a \sin^2 u = \frac{a}{\sin^2 u} - a. \\ F = 0 &\text{ как на всех поверхностях вращения} \\ G = (r_v, r_v) &= \dots = a^2 \sin^2 u \\ &\Downarrow \\ I &= \begin{pmatrix} \frac{a}{\sin^2 u} - a & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Далее необходимо найти нормаль $m = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$.

$$\begin{aligned} [r_u, r_v] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & a \left(\frac{1}{\sin u} - \sin u \right) \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-a^2(1 - \sin^2 u) \cos v, -a^2(1 - \sin^2 u) \sin v, a^2 \sin u \cos u) \\ |[r_u, r_v]| &= a^2 \sqrt{(1 - \sin^2 u)^2 + \sin^2 u \cos^2 u} = a^2 \sqrt{\cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u} = a^2 \cos u \\ m &= \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, \sin u). \end{aligned}$$

Далее ищем вторую квадратичную форму.

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, a(-\sin^{-2} u \cos u - \cos u)) \\ r_{uv} &= (-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0) \\ r_{vv} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, 0) \\ L = (r_{uu}, m) &= a \sin u \cos u (\cos^2 v + \sin^2 v) + a \left(-\frac{\cos u}{\sin u} - \sin u \cos u \right) = -a \operatorname{ctg} u \end{aligned}$$

$$M = (r_{uv}, m) = a \cos^2 u \sin v \cos v - a \cos^2 u \sin v \cos v = 0$$

$$N = (r_{vv}, m) = a \sin u \cos u \cos^2 v + a \sin u \cos u \sin^2 v = a \sin u \cos u$$

$\Downarrow$

$$\Pi = \begin{pmatrix} -a \operatorname{ctg} u & 0 \\ 0 & a \sin u \cos u \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем найти гауссову кривизну $K = \frac{\det \Pi}{\det I}$

$$K = \frac{-a^2 \frac{\cos u}{\sin u} \sin u \cos u}{a^3 - a^3 \sin^2 u} = \frac{-\cos^2 u}{a(1 - \sin^2 u)} = -\frac{1}{a}.$$

Мы получили постоянную гауссову кривизну, которая зависит от параметра a .



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У