ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОСНОВЫ СИНГУЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

БУТУЗОВ
ВАЛЕНТИН ФЕДОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

Лекция 1. Введение в теорию сингулярных возмущений

Основные понятия. Регулярные и сингулярные возмущения

Рассмотрим две задачи.

Первая задача A_0 (невозмущенная задача):

$$L_0u = f_0,$$

где L_0 — некий оператор, например, оператор Лапласа, f_0 — заданная функция, $u = u(x)$ — искомая функция. Будем иметь ввиду общий случай: $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$. Рассмотрим случай когда L_0 дифференциальное уравнение. Внесем возмущение.

Вторая задача A_ε (возмущенная задача):

$$L_0u + \varepsilon L_1u = f_0 + \varepsilon f_1,\ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

εL_1u и εf_1 называют *возмущениями.*

Пусть задача A_0 имеет решение: $U = u_0(x)$, а задача A_ε решение: $u = u_\varepsilon(x)$, $x \in D$. Насколько возмущения повлияют на решение $u_0(x)$? Т.е. какова разность между решением $u_\varepsilon(x)$ и $u_0(x)$?

Тогда норма вектора:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$$

Рассмотрим норму разности между возмущенной и невозмущенной задачей:

$$\sup_D \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|$$

Определение 1.1. ***Сингулярно и регулярно возмущенные задачи***

Если $\sup_D \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| \to 0$, *при* $\varepsilon \to 0$.

То есть, чем меньше возмущение, тем меньше разность между возмущенной и невозмущенной задач в области D. Тогда задачу A_ε будем называть ***регулярно возмущенной****, в противном случае будем называть* ***сингулярно возмущенной****.*

Пример 1.1.

Задача A_ε:

$$\frac{du}{dx} = -u + \varepsilon x$$

рассматривается на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, начальное значение $u_\varepsilon(0) = 1$
Общее решение: $u_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)e^{-x} + \varepsilon(x-1)$

Задача A_0:

$$\frac{du}{dx} = -u$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, с начальным условием $u_0(0) = 1$

Общее решение: $u_0(x) = \exp(-x)$.

$$\sup_{[0;1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \varepsilon \max_{[0;1]} |\exp(-x) + x - 1| = \varepsilon C \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Замечание. Если $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $\sup \|u_\varepsilon - u_0\| \nrightarrow 0$, при $\varepsilon \to 0$.

Пример 1.2.

Задача A_ε:

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -u + x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ u_\varepsilon(0) = 1$$

Решение:

$$u_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon) \cdot \exp(-\frac{x}{\varepsilon}) + x - \varepsilon$$

Задача A_0:

$$0 = -u + x \Rightarrow u_0(x) = x$$

$$\sup_{[0;1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \max_{[0;1]} |(1+\varepsilon)\exp(-\frac{x}{\varepsilon}) - \varepsilon| = 1 \nrightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Значит эта задача сингулярно возмущенная.

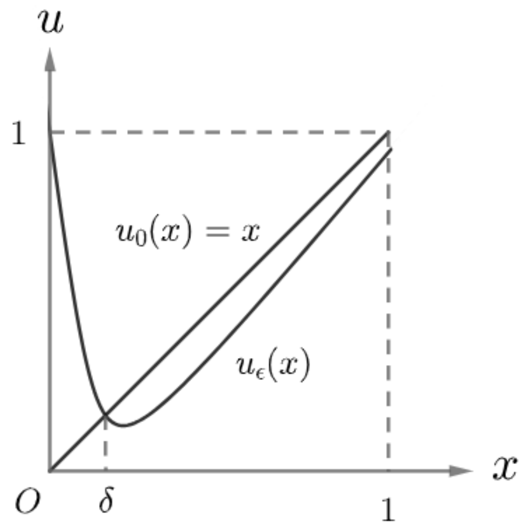

Рис. 1.1. Функции невозмущенной $u_0(x)$ и возмущенной $u_\varepsilon(x)$ задачи. $[0;\delta]$ – пограничный слой.

Функции невозмущенной и возмущенной задачи (Рис. 1.1).

Система, обобщающая пример (Тихоновская система):

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{dz}{dx} = F(x,y,z,\varepsilon) \\ \\ \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z,\varepsilon) \end{cases}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant X$.

С начальными условиями:

$$\begin{cases} z(0,\varepsilon) = z^0 \\ y(0,\varepsilon) = y^0 \end{cases}$$

Асимптотическое приближение решения по параметру. Асимптотический ряд

Задача A_ε:

$$U_\varepsilon(x),\ x \in D$$

Пусть $D_1 \subset D$ и $U(x,\varepsilon)$, $x \in D_1$.

$U(x,\varepsilon)$ – асимптотическое приближение по параметру ε для решения $U_\varepsilon(x)$ в области D_1, если $\sup_{D_1}\|u(x,\varepsilon)-U(x,\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Если при этом

$$\sup_{D_1}\|U_\varepsilon(x)-U(x,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^k),\ k>0$$

Функция $U(x,\varepsilon)$ является *асимптотическим приближением* для решения $U_\varepsilon(x)$ в области D_1 с точностью порядка ε^k.

Символ O означает:

$f = O(\varepsilon^k)$ при $\varepsilon \to 0$:

$\exists c>0$ и $\varepsilon_0>0$, такие, что $\|f\| \leqslant c\varepsilon^k$ при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

В примере 1.1

$U = x = u_0(x)$ является асимптотическим приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ на отрезке $D=[0;1]$ с точностью порядка ε.

В примере 1.2

$u_0(x) = x$ на $D_1 = [\delta;1]$ является асимптотическим приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ на отрезке D с точностью порядка ε.

В частности, у решения с внутренними слоями, когда точка x_0 в окрестности которого происходит переход (Рис. 1.2). Трудно найти эту точку решая численно. Асимптотический метод легко это находит.

Асимптотические ряды.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x,\varepsilon) \tag{1.1}$$

Определение 1.2. ***Асимптотический ряд***

Ряд (1.1) *называется асимптотическим рядом для функции* $u_\varepsilon(x)$ *(при* $\varepsilon\to0$*), если* $\forall n=0,1,2,\ldots \quad \exists c=c(n)$ *и* $\varepsilon_0=\varepsilon_0$ *такие, что* $\forall x\in D$*:*

$$\|u_\varepsilon(x)-U_n(x,\varepsilon)\| \leqslant c\varepsilon^{n+1},\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0. \tag{1.2}$$

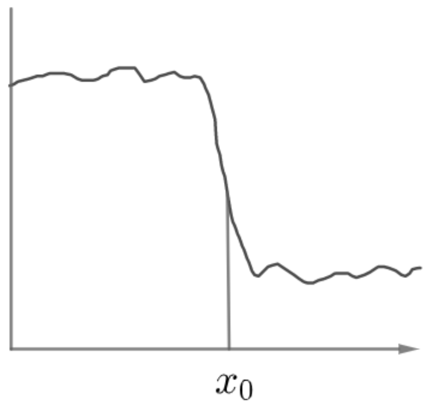

Рис. 1.2. Точка x_0 в окрестности которого происходит переход

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k u_k(x,\varepsilon)$$

Асимптотический ряд может не сходиться к функции $u_\varepsilon(x)$ и даже быть расходящимся.

Сходимость ряда (1.1) означает, что

$$\|u_\varepsilon(x) - U_n(x,\varepsilon)\| \to 0, \text{ при } n \to \infty, \forall x \in D. \tag{1.3}$$

Пример 1.3.

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^2} - \frac{1}{x}\ , \ x > 0 \tag{1.4}$$

Будем искать решение уравнения в виде ряда.

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \tag{1.5}$$

Подставим ряд (1.5) в уравнение (1.4).

$$\varepsilon\left(u_0' + \varepsilon u_1' + \ldots\right) = -\frac{1}{x^2}\left(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots\right) - \frac{1}{x}$$

Приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$\text{при } \varepsilon^0\text{: } 0 = -\frac{u_0}{x^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow u_0 = -x$$

$$\text{при } \varepsilon^1\text{: } u_1 = x^2$$

$$\text{при } \varepsilon^2\text{: } u_2 = -(2!)x^3$$

$$\Rightarrow\ u_k = (-1)^{k+1}(k!)x^{k+1}$$

Построили ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (-1)^{k+1}(k!)x^{k+1} \tag{1.6}$$

Общий член ряда:

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ 0<q<1}} q^k(k!) = \infty$$

Этот ряд расходится для $\forall x > 0$.

Докажем, что этот ряд является асимптотическим рядом для некоторого решения уравнения (1.4) на отрезке $[0, a]$.

Общее решения уравнения (1.4) имеет вид:

$$u = c\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) - \left(\int_0^x \frac{1}{\varepsilon t}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right)dt\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right)$$

частное решение при $c = 0$.

Интегрируя по частям получаем

$$u_\varepsilon(x) = -\int_0^x t\,d\exp\left(\frac{1}{\varepsilon t}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) =$$

$$= -\left[t\cdot\exp(-\frac{1}{\varepsilon t})\right]_{+o}^{x}\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) + \left(\int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right)dt\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) =$$

$$= -x + \left(\int_0^x \varepsilon t^2 d\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) =$$

$$= -x + \varepsilon x^2 - (2!)\varepsilon^2 x^3 + \ldots + \varepsilon^n (-1)^{n+1} (n!) x^{n+1} + O(\varepsilon^{n+1}),\ \forall x \in [0;a]$$

Получили

$$U_\varepsilon(x) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}),\ x \in [0;a]$$

Справедливо равенство (1.2) из определения асимптотического ряда.

Лекция 2. Формальная асимптотика

Рассмотрим понятие асимптотического ряда. Возьмем частичную сумму порядка N по ряду или ряд по степеням ε, с входящими членами нулевого, первого, второго и других порядков. Запишем все слагаемые до порядка N и составим частичную сумму по N этого ряда, тогда сумма даст асимптотическое приближение для решения с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Такой ряд может быть в некоторых случаях расходящимся. Например, ряд расходится во всех точках, кроме начальной. На определенном отрезке ряд будет асимптотическим для некоторого решения дифференциального уравнения.

Определение. Формальная асимптотика

Рассмотрим уравнение:

$$A_\varepsilon : \quad L_\varepsilon u$$

где A_ε – малый параметр, L_ε – дифференциальный оператор, u – функция.

Под оператором будем понимать следующее:

$$L_\varepsilon u := L_0 u + \varepsilon L_1 u - f_0(x) - \varepsilon f_1(x) = 0$$

где L_0 – невозмущенный оператор, $\varepsilon L_1 u$ – возмущение, $f_0(x), f_1(x)$ – известные функции, x – числовая, либо N-мерная переменная, которая входит в область D. Обозначим решение выше поставленной задачи как $u_\varepsilon(x)$

В нелинейных задачах часто решение будет нетривиальное или его вообще нет. Поэтому возможно получить асимптотическое приближенное решение, используя малый параметр. Оно будет работать при малых значениях ε.

Пусть есть функция $U(x,\varepsilon)$, которая удовлетворяет следующему условию: если подействуем оператором L_ε на эту функцию, то получим дельта-функцию

$$L_\varepsilon U(x,\varepsilon) = \delta(x,\varepsilon)$$

$$\delta(x,\varepsilon) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Таким образом, построили функцию $U(x,\varepsilon)$, которая не является точным решением. При подстановке в уравнение получаем не 0, а малую величину. Дельта-функции называют *невязка.* А функцию $U(x,\varepsilon)$ — *формальной асимптотикой* или *асимптотическим решением задачи A_ε по невязке.*

Часто асимптотический метод состоит из следующих шагов:

1) Строим решение ряда

   Решение $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x,\varepsilon)$ для ряда будет называться асимптотическим. Если взять частичную сумму порядка N, то она будет отличаться от точного решения на всей области D на величину порядка ε^{n+1}.

   Пусть

$$U_n(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(x,\varepsilon):$$

$$L_\varepsilon U_n(x,\varepsilon)=\delta_n(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})$$

   Условие: чем больше членов ряда возьмем, тем с меньшей «невязкой» получается формальная асимптотика.

2) Доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x,\varepsilon)$ – асимптотический ряд для решения задачи $u_\varepsilon(x)$. Это означает

$$\sup_D ||u_\varepsilon(x)-U_n(x,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{n+1})$$

Асимптотическое решение по невязке может не быть асимптотическим приближением для точного решения задачи $u_\varepsilon(x)$.

Пример Зададим задачу следующим образом

$$A_\varepsilon : L_\varepsilon u := \varepsilon\frac{du}{dx}-u-\varepsilon^n=0$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение на отрезке от 0 до . Зададим начальное условие:

$$u_\varepsilon(0)=0$$

Уравнение является линейным с постоянной неоднородностью. Поэтому точное решение будет иметь вид

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^n exp(\frac{x}{\varepsilon}) - \varepsilon^n$$

Рассмотрим в качестве функции $U(x,\varepsilon) \equiv 0$. Подставим ее в уравнение.

$$L_\varepsilon U = -\varepsilon^n = O(\varepsilon^n) = \delta(x,\varepsilon)$$

Получаем, что функция $U(x,\varepsilon) \equiv 0$ – асимптотическое решение по невязке с большой точностью. Определим отношение полученного решения к точному решению. Для этого рассмотрим модуль разности

$$||u_\varepsilon(x) - U(x,\varepsilon)|| = \varepsilon^n(exp(\frac{x}{\varepsilon}) - 1)$$

Чтобы функция стала асимптотическим решением, нужно чтобы разность стремилась к 0. Если $\varepsilon \to 0$, то при $x = 0$ разность будет равна 0, а при $x > 0$ $exp(\frac{x}{\varepsilon}) \to \infty$, а тогда $||u_\varepsilon(x) - U(x,\varepsilon)|| \to +\infty$.

Таким образом, функция $u_\varepsilon(0) = 0$ является асимптотическим решением по невязке. Но точного асимптотического приближения для точного решения она не дает. Поэтому функцию называют «формальной асимптотикой».

Задача Коши для тихоновской системы

Теорема Тихонова

Рассмотрим тихоновскую систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dz}{dx} = F(x,y,z,\varepsilon) \\ \\ \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z,\varepsilon) \end{cases} \qquad 0 \leqslant x \leqslant X \tag{2.1}$$

где y, z могут быть вектор-функциями.

Рассмотрим случай, когда y, z — скалярные функции.

Для системы (2.1) ставится начальная задача – задача Коши для тихоновской системы. При $x = 0$ задаются искомые функции y, z следующим образом:

$$\begin{aligned} z(0,\varepsilon) &= z^0 \\ y(0,\varepsilon) &= y^0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где z^0, y^0 – заданные числа.

Предположим, если y, z – скалярные функции, то точного решения задача не имеет. Задача состоит в получении асимптотического приближения для решения при малых значениях ε.

Пусть $\varepsilon = 0$ и

$$\begin{cases} F(x,y,z,0) = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z,0) \end{cases}$$

Полученная система называется *вырожденной* по терминологии Тихонова. Изначально была система двух дифференциальных уравнений. Она выродилась при $\varepsilon = 0$ в систему, где одно – конечное уравнение, а другое – дифференциальное.

Для такой системы для z нельзя задать начальное условие. Для функции y можно оставить условие (2.2).

При рассмотрении системы дифференциальных уравнений, интересует случай, когда решение задачи Коши будет единственным. Существуют условия, гарантирующие локальную единственность в окрестности начальной точки. К ним относят непрерывные функции и липшицевость по y, z.

Условия Тихонова

1) F и f непрерывно дифференцируемы в некоторой области.

   Это означает, что функции имеют по всем аргументам непрерывные частные производные первого порядка.

2)
$$F(x,y,z,0)=0 \tag{2.3}$$
имеем решение относительно z, которое будем обозначать, как $z=\phi(x,y)$. Получившийся корень должен быть изолированным, то есть не пересекающимся с другими корнями данного уравнения. Если рассмотреть геометрически $\phi(x,y)$, то это поверхность в трехмерном пространстве с координатами $x,y,\phi(x,y)$. Поверхность не будет пересекаться с другими поверхностями, и в некоторой малой окрестности корней нет.

3) Произведем подстановку решения в дифференциальное уравнение
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\phi(x,y),0),\quad 0\leqslant x\leqslant X$$
$$y(0,\varepsilon)=y^0 \tag{2.4}$$
Потребуем, чтобы уравнение имело решение на всем промежутке x. В итоге получается задача более простая, чем исходная. Она состоит из одного скалярного дифференциального уравнения. Задача будет иметь следующее решение $y=\bar{y}(x),\quad 0\leqslant x\leqslant X$.

Условие непрерывной дифференцируемости гарантирует для задачи, что в малой окрестности точки 0 будет существовать решение и чтобы решение существовало до X.

Таким образом, вырожденная система будет иметь решение
$$y=\bar{y}(x)$$
$$z=\phi(x,y)=\phi(x,\bar{y}(x))=:\bar{z}(x)$$
Определим, чтобы решение для полной задачи для $\varepsilon\to 0$ существовало на промежутке $0\leqslant x\leqslant X$ и было близко к решению простой задачи.

4) Рассмотрим производную функции F по аргументу z:
$$F_z(x,\bar{y}(x),\bar{z}(x),0)=:\bar{F}_z(x)$$
Наложим условие: $\bar{F}_z(x)<0, x\in[0,X]$.

5) Связано с присоединенной системой или присоединенным скалярным уравнением. По терминологии Тихонова это такое уравнение, которое можно задать следующим образом при $x = 0$:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(0, y^0, \tilde{z}, 0) \tag{2.5}$$

Оно будет рассматриваться, если

$$\begin{gathered} \tau \geqslant 0 \\ \tilde{z} = z^0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Пусть в исходной задаче сделали замену переменных:

$$x = \varepsilon\tau$$

В результате система (2.1) перейдет в следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = F(\varepsilon\tau, y, z, \varepsilon) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = f(\varepsilon\tau, y, z, \varepsilon) \end{cases}$$

Рассмотрим систему на конечном промежутке изменения τ:

$$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant x \leqslant \varepsilon\tau_0 = O(\varepsilon)$$

Начальные условия будут сохраняться:

$$\begin{gathered} z|_{\tau=0} = z^0 \\ y|_{\tau=0} = y^0 \\ x \in [0, \varepsilon\tau_0] \end{gathered}$$

Можно предполагать, что на малом промежутке

$$y(x,\varepsilon) = y^0 + O(\varepsilon)$$
$$z(x,\varepsilon) \approx \tilde{z}(\tau)$$
$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(0, y^0, \tilde{z}, 0)$$
$$\tilde{z}(0) = z^0$$

Таким образом, в малой окрестности начальной точки поведение решения будет определяться решением системы (2.5). На качественном уровне получаем, что если начать рассуждение с начальных точек z^0, y^0, то решения в малой окрестности точки $x = 0$ будут следующими: y почти не меняется или с малыми добавками, а z будет себя вести как решение присоединенного уравнения.

Уравнение (2.5) является автономным. Это означает, что правая часть не зависит от независимой переменной. В результате, уравнение интегрируется в квадратурах и можно получить обратную функцию к решению $z(\tau)$. Также уравнение (2.5) будет иметь точку покоя

$$\tilde{z} = \phi(0, \bar{y}(x)) = \phi(0, y^0)$$

Точка покоя – стационарное, независящее от независимой переменной решение.

В силу того, что $\bar{F}_z(x) < 0$, точка покоя будет асимптотически устойчивой при $\tau \to \infty$.

Асимптотически устойчивым решением называют такое решение уравнения (2.5), для которого, если задать достаточно близкое условие к точке покоя, то для всех $\tau > 0$ решение будет близко к точке покоя и при $\tau \to \infty$ будет к ней стремиться.

Для того, чтобы решение стремилось при $\tau \to \infty$ к точке покоя, нужно, чтобы выполнялось следующее требование: начальная задача (2.5), (2.6) по присоединенному уравнению с заданным условием имеет решение $\tilde{z}(\tau)$, которое удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau \to \infty} \tilde{z}(\tau) = \phi(0, y^0)$$

Записанное требование относится именно к уравнению (2.5). Можно утверждать, что начальное значение z^0 принадлежит области влияния (притяжения) точки покоя $\tilde{z} = \phi(0, y^0)$.

Установим, из какой области решений искомое решение будет притягиваться к области покоя. В уравнении (2.5) независимая переменная τ меняется от 0 до ∞. Рассмотрим график (Рис. 2.1)

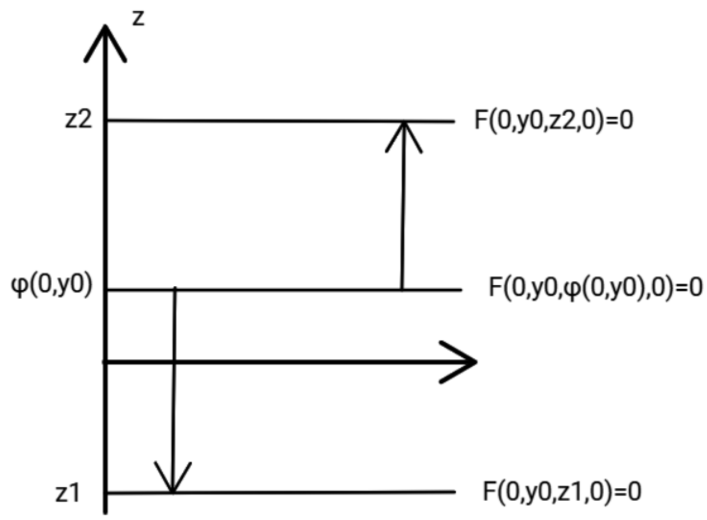

Рис. 2.1. График зависимости $\tilde{z}$ от τ

Точка покоя – некоторое число. F_z, которая на всем вырожденном решении при каждом $x < 0$, в том числе и при $x = 0$, будет вести себя по-разному, так как не накладывается ограничения на функцию. Предполагали, что решение уравнения (2.3) единственное и изолированное в некоторой окрестности, но дальше они могут существовать. Возникает решение z_2 в положительной области такое, что $F(z_2) = 0$, а в отрицательной – z_1 такое, что $F(z_1) = 0$.

Пусть начальное решение лежит в окрестности от $\phi(0, y^0)$ до z_2 (Рис. 2.2). Производная в этой точке будет отрицательная. Значит, функция будет убывающая и стремящаяся к значению в точке $\phi(0, y^0)$.

Если начальное решение лежит в окрестности от $\phi(0, y^0)$ до z_1, то производная в этой точке будет положительная. А значит, функция будет возрастающая и стремящаяся к значению в точке $\phi(0, y^0)$.

Таким образом, областью влияния будет интервал от z_1 до z_2. То есть если начальное решение будет лежать в этом интервале, то оно притянется.

Теорема 2.1 (Тихонова). *Если выполнены все условия, то для достаточно малых значений параметра ε задачи* (2.1) *и* (2.2) *имеют единственное решение $z(x, \varepsilon)$, $y(x, \varepsilon)$, то справедливы следующие предельные равенства*

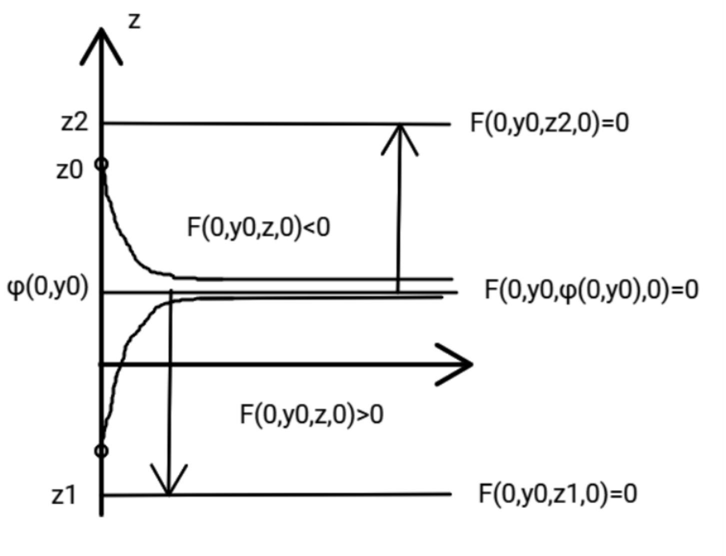

Рис. 2.2. График зависимости $\tilde{z}$ от τ с начальным значением

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z(x,\varepsilon) = \bar{z}(x) := \phi(x,\bar{y}(x))$$

$$0 < x \leqslant X$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(x,\varepsilon) = \bar{y}(x)$$

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию теоремы Тихонова.

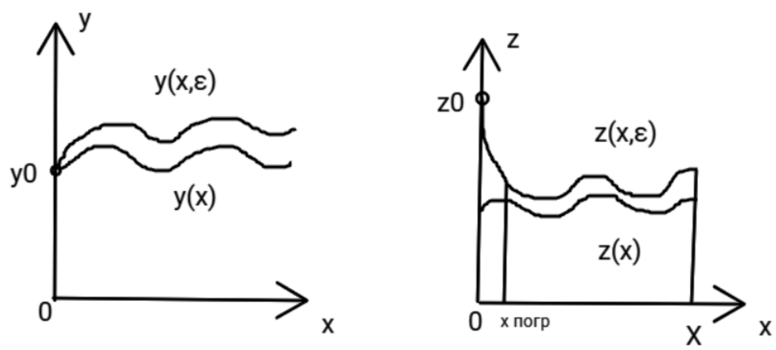

Рис. 2.3. Геометрическая иллюстрация теоремы Тихонова

Рассмотрим две плоскости — в координатах (x,y) и в (x,z). То есть изображаем графики решения вырожденной и полной задач.

Можно наблюдать, что в первой плоскости решение полной задачи выходит из той же точки, что и для вырожденной, и кривая отличается на малую величину. Для второй плоскости начальное значение заданное для z не обязательно будет близко к вырожденному. В результате, решение будет стремительно приближаться к вырожденному состоянию и оставаться вблизи него.

$\bar{y}(x)$ – асимптотическое приближение для точного решения $y(x,\varepsilon)$ на всем промежутке. Для $\bar{z}(x)$ при малых значениях параметра ε близко будет асимптотическое приближение для решение исходной задачи на всем интервале, кроме пограничной окрестности 0.

Различие между решениями – это $O(\varepsilon)$.

Метод Васильевой

Метод позволяет определить асимптотическое приближение для z, включая пограничный слой, и получить значение с произвольной точностью для $O(\varepsilon^n)$. Рассматриваем систему (2.1), (2.2) и сохраняем условия 2-5. Но введем изменение в условие 1: функции F и f – достаточно гладкие, то есть они имеют такое количество непрерывных производных n-го порядка, сколько нужно.

Следуя методу Васильевой, асимптотику решения задачи (2.1) и (2.2) будем строить в виде суммы двух рядов:

$$z(x,\varepsilon) = \bar{z}(x,\varepsilon) + \Pi z(\tau,\varepsilon) \tag{2.7}$$

где Π – часть асимптотики, которая описывает быстрое изменение решения в пограничном слое.

$$y(x,\varepsilon) = \bar{y}(x,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon) \tag{2.7}$$

$$\tau = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\bar{z}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{z}_k(x) \tag{2.8}$$

$$\bar{y}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{y}_k(x) \tag{2.8}$$

$$\Pi z(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k z(\tau) \tag{2.9}$$

$$\Pi y(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k y(\tau) \tag{2.9}$$

П-функции экспоненциальны только в области параметра τ, существенны только в пограничном слое, а дальше будут бесконечно малые. Ряды (2.8) будут существенны вне пограничного слоя.

Определим коэффициенты для рядов (2.8) и (2.9). Подставим выражения (2.7) для z, y в систему (2.1). Левая часть – производные, которые подставляем в выражения функций F и f. Правые части преобразуем. В результате, получим функции в следующем виде:

$$F(x,\bar{y}+\Pi y,\bar{z}+\Pi z,\varepsilon) = F(x,\bar{y}(x,\varepsilon),\bar{z}(x,\varepsilon),\varepsilon)+[F(\varepsilon\tau,\bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon),\bar{z}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+$$

$$+\Pi z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-F(x,\bar{y}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\bar{z}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon)] =: \bar{F}+\Pi F$$

$$f(\bar{x},\bar{y}+\Pi y,\bar{z}+\Pi z,\varepsilon) =: \bar{f}+\Pi f$$

Система будет записана в виде

$$z \approx \bar{z}(x,\varepsilon)+\Pi z(\tau,\varepsilon)$$

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d\bar{z}}{dx}+\dfrac{d\Pi z}{d\tau} = \bar{F}+\Pi F \\ \\ \dfrac{d\bar{y}}{dx}+\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{d\Pi y}{d\tau} = \bar{f}+\Pi f \end{cases}$$

В полученных уравнениях приравняем по отдельности члены, зависящие от x и τ. Получаем следующие системы:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d\bar{z}}{dx} = \bar{F} \\ \\ \dfrac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f} \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi z}{d\tau} = \Pi F \\ \\ \dfrac{d\Pi y}{d\tau} = \varepsilon\Pi f \end{cases} \tag{2.11}$$

Таким образом, производим построение двумя частями. Одна будет зависеть только от переменной x, а другая – от τ.

Знаем, что $\bar{z}$ и $\bar{y}$ – ряды по степеням ε. Функции $\bar{F}$ тоже можно разложить по степеням ε. В результате, можно в системах (2.10) и (2.11) приравнять слева и справа коэффициенты при равных степенях ε.

Подставим в (2.10) вместо $\bar{z}$ и $\bar{y}$ ряды (2.10), а в (2.11) вместо Πz и Πy ряды (2.9). Разложим левую и правую части равенств в ряды со степенями ε и приравняем коэффициенты.

Получаем, что из (2.10) в нулевом приближении образуется следующая система:

$$\bar{z}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{z}_k(x)$$

$$\bar{y}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{y}_k(x)$$

$$\begin{cases} F(x,\bar{y}_0(x),\bar{z}_0(x),0) = 0 \\ \\ \dfrac{d\bar{y}_0}{dx} = f(x,\bar{y}_0(x),\bar{z}_0(x),0) \end{cases} \tag{2.12}$$

Это вырожденная система. Из (2.11) в нулевом приближении образуется:

$$\Pi z(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k z(\tau)$$

$$\Pi y(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k y(\tau)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F(0,\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y,\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z,0) - F(0,\bar{y}_0(0),\bar{z}_0(0),0) = \\ = F(0,\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y,\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z,0) \\ \\ \dfrac{d\Pi_0 y}{d\tau} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Для главных членов рядов пограничного слоя получаем систему. В результате, в системе (2.12) присутствует дифференциальное и не дифференциальное уравнения, а в (2.13) – два дифференциальных. Для определения единственного решения нужно ввести 3 дополнительных условия. Для этого подставим ряды (2.7) в начальное условие (2.2):

$$\bar{z}(0,\varepsilon)+\Pi z(0,\varepsilon)=z^0$$
$$\bar{y}(0,\varepsilon)+\Pi y(0,\varepsilon)=y^0$$

Вместо $\bar{z}$ и $\bar{y}$ подставляем ряды (2.8), а вместо Πz и Πy – ряды (2.9). Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε слева и справа. В нулевом приближении получим:

$$\begin{cases} \bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(0)=z^0 \\ \\ \bar{y}_0(0)+\Pi_0 y(0)=y^0 \ (16) \end{cases} \tag{2.14}$$

Данная система задает только два начальных условия. Дифференциальных уравнений три в системах (2.12) и (2.13). Добавим в условие (2.14) еще одно уравнение:

$$\Pi_0 y(\infty)=0 \tag{2.15}$$

Данное уравнение объясняет факт, что пограничная функция затухает с ростом τ.

Лекция 3. Теорема Васильевой

Пусть есть тихоновская система:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dz}{dx} = F(x,y,z,\varepsilon) \\ \\ \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z,\varepsilon) \end{cases} \tag{3.1}$$

Рассматриваем простейший случай, когда y,z – скалярные функции. В первом уравнении стоит малый, положительный параметр ε, который в условиях задачи можно делать малым.

Система рассматривается на малом отрезке $0 \leqslant x \leqslant X$. Для скалярных функций y,z заданы следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} z(0,\varepsilon) &= z^0 \\ y(0,\varepsilon) &= y^0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Смысл теоремы Тихонова состоит в следующем: если положим в системе (3.1) $\varepsilon = 0$, то получим вырожденную систему. Первое уравнение перестает быть дифференциальным, а становится конечным. Поэтому для системы достаточно оставить только начальное условие на y.

В теореме Тихонова рассматривается поведение при $\varepsilon \to 0$ решения полной задачи и стремление к решению вырожденной задачи. Если это условие выполняется, то решение вырожденной задачи можно считать приближением для решения исходной задачи. Поэтому существует предельный переход от решения полной задачи к вырожденной при $\varepsilon \to 0$.

Можно показать геометрически, что для y решение вырожденной задачи является равномерным на всем интервале $0 \leqslant x \leqslant X$. Для функции z существует пограничный слой, где решение задачи далеко отстоит от решения вырожденной задачи.

Решение вырожденной задачи дает асимптотическое приближение порядка ε. Нужно построить для y,z равномерного приближения, включая пограничный слой. Поэтому, одного решения вырожденной задачи недостаточно. И построить полное асимптотическое разложение по малому параметру, которое дает возможность построить асимптотическое приближение для решения с любой заданной точностью. Для выполнения этих задач используем метод Васильевой.

Метод Васильевой

Смысл метода Васильевой: строим асимптотику задачи (3.1) и (3.2) в следующем виде

$$z(x,\varepsilon) = \bar{z}(x,\varepsilon) + \Pi z(\tau,\varepsilon) \tag{3.3}$$

$$y(x,\varepsilon) = \bar{y}(x,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon) \tag{3.3}$$

$$\tau = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\bar{z}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{z}_k(x) \tag{3.4}$$

$$\bar{y}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{y}_k(x) \tag{3.4}$$

$$\Pi z(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k z(\tau) \tag{3.5}$$

$$\Pi y(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k y(\tau) \tag{3.5}$$

Метод Васильевой позволяет найти коэффициенты и параметры рядов, входящих в уравнения (3.4), и задает алгоритм их построения. В результате, подставляем суммы (3.4) в исходную систему и отделяем уравнения с $\bar{z},\bar{y}$ от П-функций.

$$F(x,\bar{y}+\Pi y,\bar{z}+\Pi z,\varepsilon) = F(x,\bar{y}(x,\varepsilon),\bar{z}(x,\varepsilon),\varepsilon) + [F(\varepsilon\tau,\bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon),\bar{z}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+$$

$$+\Pi z(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - F(x,\bar{y}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\bar{z}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon)] =: \bar{F} + \Pi F$$

$$f(\bar{x},\bar{y}+\Pi y,\bar{z}+\Pi z,\varepsilon) =: \bar{f} + \Pi f$$

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d\bar{z}}{dx} = \bar{F} := F(x,\bar{y}(x,\varepsilon),\bar{z}(x,\varepsilon),\varepsilon) \\ \dfrac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f} \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi z}{d\tau} = \Pi F := F(\varepsilon\tau, \bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon), \bar{z}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi z(\tau,\varepsilon), \varepsilon) - \\ -F(x, \bar{y}(\tau\varepsilon,\varepsilon), \bar{z}(\tau\varepsilon,\varepsilon), \varepsilon) \\ \\ \dfrac{d\Pi y}{d\tau} = \varepsilon \Pi f \end{cases} \tag{3.7}$$

Функции $\bar{F}$ можно разложить по степеням ε, потому что $\bar{z}$ и $\bar{y}$ – ряды по степеням ε. В результате, можно в системах (3.6) и (3.7) приравнять слева и справа коэффициенты при равных степенях ε.

Подставим в (3.6) вместо $\bar{z}$ и $\bar{y}$ в ряды (3.4), а в (3.7) вместо Πz и Πy ряды (3.5). Разложим левую и правую части равенств в ряды со степенями ε и приравняем коэффициенты.

В нулевом приближении из (3.6) получаем следующую систему для главных членов регулярных рядов:

$$\begin{cases} F(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0) = 0 \\ \\ \dfrac{d\bar{y}_0}{dx} = f(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0) \end{cases} \tag{3.8}$$

В нулевом приближении из (3.7) получаем следующую систему для главных членов рядов пограничного слоя:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0 z}{d\tau} = \Pi_0 F := F(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) - F(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0), 0) = \\ = F(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) \\ \\ \dfrac{d\Pi_0 y}{d\tau} = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

В результате, в системе (3.8) присутствует дифференциальное и недифференциальное уравнения, а в (3.9) – два дифференциальных. Для введения дополнительных условий подставим ряды (3.3) в начальное условие (3.2). Вместо $\bar{z}, \bar{y}$ – ряды (3.4), а вместо $\Pi z, \Pi y$ – ряды (3.5). Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε слева и справа. В результате:

$$\begin{cases} \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0) = z^0 \\ \\ \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Добавим в условие (3.10) еще одно уравнение, так как дифференциальных уравнений три в системах (3.8) и (3.9)

$$\Pi_0 y(\infty) = 0 \tag{3.11}$$

В результате, из системы (3.8) и (3.9) и дополнительных условий (3.10) и (3.11) найдем главные члены строящихся рядов $\bar{z}_0(x)$, $\bar{y}_0(x)$, $\Pi_0 z(\tau)$ и $\Pi_0 y(\tau)$.

Рассмотрим второе уравнение в системе (3.9) и условия (3.11). Из пары уравнений следует, что функция y не зависит от τ и является const

$$\Pi_0 y(\tau) \equiv 0, \tau \geqslant 0$$

Такой результат можно было ожидать графически, так как функция y для полной и вырожденной задач выходит из одной точки.

Подставим получившееся значение для $\Pi_0 y(\tau)$ во второе уравнение системы (3.10):

$$\bar{y}_0(0) = y^0 \tag{3.12}$$

Рассмотрим систему (3.8) в совокупности с условием (3.12). Получается вырожденная задача. Условия Тихонова 2 и 3 гарантируют существование вырожденной системы.

$$\bar{z}_0(x) = \bar{z}(x) := \phi(x, \bar{y}(x))$$
$$\bar{y}_0(x) = \bar{y}(x)$$

Таким образом, найдены главные члены регулярных рядов (3.4) и они являются решениями вырожденной задачи. Тогда можно найти $\bar{z}_0(0)$, чтобы определить начальное условие на функцию z:

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) = z^0 - \phi(0, y^0)$$

Рассмотрим первое уравнение из системы (3.9):

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = \Pi_0 F := F(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) - F(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0), 0) =$$
$$= F(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0)$$

Получаем систему с начальным условием

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F(0, y^0, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0), \tau \geqslant 0 \\ \\ \Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) \end{cases}$$

Произведем замену переменных

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0) = \tilde{z}^0(\tau)$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{z}^0(\tau)}{d\tau} = F(0, y^0, \tilde{z}^0(\tau), 0), \tau \geqslant 0 \\ \\ \tilde{z}^0(\tau) = z^0 \end{cases}$$

Получаем присоединенное по теореме Тихонова уравнение, которое фигурирует в условии 5 теоремы. Смысл условия состоит в следующем: у уравнения есть точка покоя, соответствующее $\phi(0, y^0)$. В силу условия 4 такая точка будет асимптотически устойчивой, то есть если начальное значение достаточно близко к точке покоя, то при всех $\tau > 0$ решение останется близким к точке покоя, а при $\tau \to \infty$ будет стремиться к точке покоя.

Получаем, что существует решение при $\tau \to \infty$ такое, что

$$\tilde{z}^0(\tau) \to \phi(0, y^0)$$

Тем самым, существует решение задачи для $\Pi_0 z(\tau)$ и оно $\to 0$ при $\tau \to \infty$.

Таким образом, определены все члены асимптотики нулевого порядка, главные члены. Покажем, что стремление для функции z носит экспоненциальный характер, а $\Pi_0 z(\tau)$ имеет экспоненциальную оценку.

$$|\Pi_0 z(\tau)| \leqslant c * exp(-\kappa\tau), \tau \leqslant 0 \tag{3.13}$$

где c, κ – положительные числа, независящие от ε. В дальнейшем другие подобные постоянные величины будут обозначаться так же. При различной оценке они могут различаться, но обладают общим свойством.

Покажем, что все члены рядов пограничного слоя $\Pi y(\tau, \varepsilon)$ и $\Pi z(\tau, \varepsilon)$ тоже имеют экспоненциальную оценку.

Если рассмотреть геометрическую иллюстрацию теоремы Тихонова в координатах (x, z)

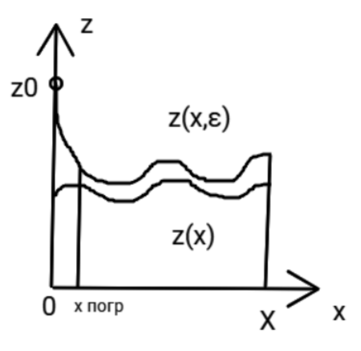

Рис. 3.1. Геометрическая иллюстрация теоремы Тихонова в координатах (x, z)

Получаем, что быстро изменяющаяся часть решения будет иметь экспоненциальную оценку.

Для доказательства факта перепишем выражение

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F(0, y^0, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0), \tau \geqslant 0$$

Сравним уменьшаемое и вычитаемое в первом уравнении системы (3.9).

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = \Pi_0 F := F(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) - F(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0), 0)$$

Три аргумента одинаковые, так как $\Pi_0 y = 0$ и $\bar{y}_0(0) = 0$.

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) = z^0 - \phi(0, y^0)$$

Воспользуемся формулой Лагранжа для конечных приращений. В результате, выражение можно записать следующем виде:

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F_z(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0) + \Theta\Pi_0 z, 0) * \Pi_0 z$$
$$0 < \Theta < 1$$

Θ не является числом. $\Pi_0 z$ меняется и стремиться к 0.

Вспомним условие 4 теоремы Тихонова:

$$F_z(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0) =: \bar{F}_z(x) < 0$$
$$x \in [0, X]$$

Если $x = 0$, то

$$\bar{F}_z(0) < -2\kappa$$

Так как $\Pi_0 z(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то найдется такое значение τ_0 такое что:

$$\exists \tau_0 > 0: \text{ при } \tau \geqslant \tau_0$$
$$F_z(\tau) := F_z(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0) + \Theta\Pi_0 z, 0) < -\kappa$$

С ростом $\Pi_0 z$ при $\tau \to \infty$ она стремится к нулю, то добавка $\Theta\Pi_0 z$ становиться меньше и тоже стремиться к нулю.

Тогда уравнение для $\Pi_0 z$ рассмотрим для $\tau \geqslant \tau_0$. Графиком для уравнения будет монотонная функция, стремящаяся к нуля при $\tau \to \infty$, так как для $\tilde{z}$ - монотонная функция.

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F_z(\tau) * \Pi_0 z \\ \\ \tau \geqslant \tau_0 \\ \Pi_0 z|_{\tau=\tau_0} = \Pi_0 z(\tau_0) \end{cases}$$

Из системы можно получить:

$$|\Pi_0 z(\tau)| = |\Pi_0 z(\tau_0)| exp(\int_{\tau_0}^{\tau} F_s ds) \leqslant |\Pi_0 z(\tau_0)| exp(-\kappa(\tau-\tau_0)) =$$

$$= [|\Pi_0 z(\tau_0)| exp(\kappa\tau_0)] exp(-\kappa\tau), \tau \geqslant \tau_0 \quad (3.14)$$

$$|\Pi_0 z(\tau_0)| exp(\kappa\tau_0) = c$$

Тем самым, искомая оценка выражения (3.13) доказана не для всех значений τ, начиная с нуля, а только с некоторого значения τ_0.

Рассмотрим график для $\Pi_0 z$

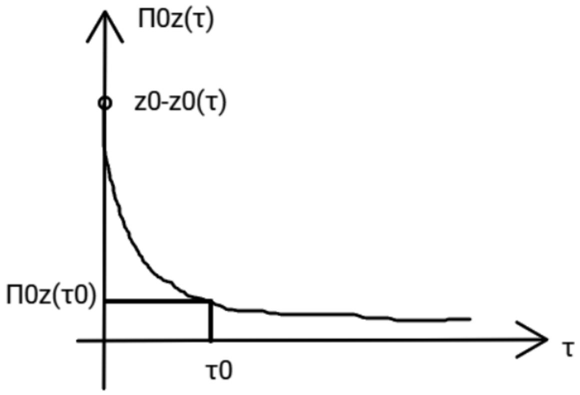

Рис. 3.2. График функции $\Pi_0 z$

На промежутке от нуля до τ_0 функция будет меняться от $z^0 - \bar{z}_0(0)$ до $\Pi_0 z(\tau_0)$. Можно подобрать большую константу c, чтобы оценка была верна на всем интервале.

$$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$$

$$|\Pi_0 z(\tau)| \leqslant |z^0 - \bar{z}_0(0)| \leqslant [|z^0 - \bar{z}_0(0)| exp(\kappa\tau_0)] exp(-\kappa\tau) =$$

$$= c * exp(-\kappa\tau), 0 \geqslant \tau \geqslant \tau_0 \quad (3.15)$$

$$exp(\kappa\tau_0)] exp(-\kappa\tau) \geqslant 1$$

$$|z^0 - \bar{z}_0(0)| exp(\kappa\tau_0) = c$$

Получили, что из выражений (3.14) и (3.15) следует (3.13). Все уравнения для асимптотики нулевого порядка не являются линейными. Но в приближениях они становятся линейными.

Пусть определены все члены асимптотики, а именно рядов (3.3) со следующими номерами: $i = 0, 1, 2, ..., k-1$. Покажем, как определить члены рядом в номером k, то есть коэффициенты при ε^k.

Для этого в системах (3.6) и (3.7) приравняем слева и справа коэффициенты при ε^k. Это возможно, если определены все коэффициенты до степени ε $k-1$.

Рассмотрим уравнения (3.6). Если под $\bar{z}(x,\varepsilon)$ подразумеваем ряд (3.4) и разложим функцию F в ряд Тейлора, то получим следующее выражение

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{z}_{k-1}}{dx} = \bar{F}_y(x) * \bar{y}_k + \bar{F}_z(x) * \bar{z}_k + F_k(x) & (3.16) \\ \dfrac{d\bar{y}_k}{dx} = \bar{f}_y(x) * \bar{y}_k + \bar{f}_z(x) * \bar{z}_k + f_k(x) & (3.17) \end{cases}$$

где производные имеют следующий смысл

$$\bar{F}_y(x) = F_y(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0)$$

правые части - функции $F_k(x)$ и $f_k(x)$ выражаются рекуррентно через найденные члены регулярного ряда $\bar{y}_j(x)$ и $\bar{z}_j(x)$, где $j \leqslant k-1$.

Первое уравнение системы не является дифференциальным, так как слева стоит производная известной функции, и линейное. Второе – дифференциальное, линейное.

Для Π–функций получим следующее при рассмотрении уравнений (3.7). Если под $\bar{z}(x,\varepsilon)$ подразумеваем ряд (3.5) и разложим функцию F в ряд Тейлора, то получим следующее выражение

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_k z}{d\tau} = F_y(\tau) * \Pi_k y + F_z(\tau) * \Pi_k z + g_k(\tau) & (3.18) \\ \dfrac{d\Pi_k y}{d\tau} = \Pi_{k-1} f(\tau) & (3.19) \end{cases}$$

где $F_y(\tau) = F_y(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), 0)$ и $F_z(\tau)$ имеет аналогичное значение. А функции $g_k(\tau)$ и $\Pi_{k-1} f(\tau)$ выражаются рекуррентно через найденные члены регулярного ряда $\Pi_j z(\tau)$ и $\Pi_j y(\tau)$, где $j \leqslant k-1$.

Как и в нулевом приближении для функций с номером k (3.16)-(3.19) имеем три дифференциальных уравнения, кроме равенства (3.16). Поэтому нужно ввести 3 условия:

$$\begin{cases} \bar{y}_k(0)+\Pi_k y(0)=0 & (3.20)\\ \bar{z}_k(0)+\Pi_k z(0)=0 & (3.21)\end{cases}$$

$$\Pi_k y(\infty)=0 \tag{3.22}$$

Система получается линейной. Для системы уравнений (3.16)-(3.22) найдем 4 неизвестные функции.

Рассмотрим уравнения (3.19) и (3.22):

$$\Pi_k y(\tau)=\int_\infty^\tau \Pi_{k-1}f(s)ds$$

Пусть найдены все члены асимптотики с номерами $i=0,1,2,...,k-1$. С номером 0 пограничная функция имеет экспоненциальную оценку, что нужно учесть в предположении. Поэтому, можно судить, что все пограничные функции имеют экспоненциальную оценку. Тогда

$$|g_k(\tau)|,|\Pi_{k-1}f(\tau)|\leqslant c*exp(-\kappa\tau)$$

Таким образом, интеграл будет сходиться. Получим

$$|\Pi_k y(\tau)|\leqslant |\int_\infty^\tau c*exp(-s\kappa)ds|=\frac{c}{\kappa}exp(-\kappa\tau)$$

Тогда функция $\Pi_k y(\tau)$ будет иметь экспоненциальную оценку. Отсюда можно определить $\Pi_k y(0)$. Из первого равенства (3.21) получаем начальное условие

$$\bar{y}_k(0)=-\Pi_k y(0)=\int_\infty^\tau \Pi_{k-1}f(s)ds \tag{3.23}$$

Рассмотрим систему уравнений (3.16) и (3.17). Для их решения нужно выразить из первого уравнения (3.16) $\bar{z}_k$ через $\bar{y}_k$ и подставить во второе (3.17). По теореме Тихонова $\bar{F}_z(x)<0$, поэтому на него можно делить.

$$\bar{z}_k=\bar{F}_z^{-1}(x)[\frac{d\bar{z}_{k-1}}{dx}-\bar{F}_y(x)*\bar{y}_k-F_k(x)]$$

$$\frac{d\bar{y}_k}{dx}=A(x)*\bar{y}_k+h_k(x) \tag{3.24}$$

где $A(x) = \bar{f}_y(x) - \bar{f}_z(x)\bar{F}_z^{-1}(x)\bar{F}_y(x)$ и $h_k(x)$ – известные функции.

Уравнение (3.24) – линейное, первого порядка с переменным коэффициентом. В силу этого, оно имеет единственное решение

$$\bar{y}_k(x) = H(x)\bar{y}_k(0) + H(x)\int_0^x H^{-1}(s)h_k(s)ds$$
$$H(x) = exp(\int_0^x A(s)ds)$$

Отсюда можно найти $\bar{z}_k(x)$. Его можно подставить во второе уравнение системы (3.21) и определить начальное условие для функции $\Pi_k z(0)$:

$$\bar{\Pi}_k z(0) = -\bar{z}_k(0) \tag{3.25}$$

Рассмотрев уравнение (3.18), можно получить

$$\frac{d\Pi_k z}{d\tau} = F_z(\tau) * \Pi_k z + \tilde{g}_k(\tau) \tag{3.26}$$

Это уравнение линейное, дифференциальное, первого порядка с заданным начальным условием.

Задача (3.26) с начальным условием (3.25) будет иметь следующее решение:

$$\Pi_k z(\tau) = -\Phi(\tau)\bar{z}_k(0) + \Phi(\tau)\int_0^\tau \Phi^{-1}(s)\tilde{g}_k(s)ds$$
$$\Phi(\tau) = exp(\int_0^\tau F_z(s)ds)$$
$$F_z(\tau) = F_z(0, y^0, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), 0)$$

В результате получается экспоненциальная оценка:

$$|\Pi_k z(\tau)| \leqslant c * exp(-\kappa\tau)$$

Таким образом, предположили, что функции с номерами $i = 0, 1, 2, ..., k-1$, входящие в ряды (3.4) и (3.5), определены и все Π–функции для этих номеров имеют экспоненциальные оценки, то можно определить функции с номерами k. Π–функции $\Pi_k z$ и $\Pi_k y$ имеют экспоненциальные оценки. Тем самым, ряды (3.3) полностью построены.

Теорема 3.1 (Васильевой)**.** *Если выполнены условия 1-5, то построеные ряды* (3.3) *являются асимптотическими рядами для решения задачи* (3.1) *и* (3.2) *на всем промежутке* $x \in [0, X]$. *То есть*

$$\forall n \ \exists C_n > 0 \ \text{и} \ \varepsilon_n > 0$$

для которых справедливы следующие неравенства

$$\max_{[0,X]} |z(x,\varepsilon) - Z_n(x,\varepsilon)| \leqslant C_n \varepsilon^{n-1}$$

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_n$$

$$\max_{[0,X]} |y(x,\varepsilon) - Y_n(x,\varepsilon)| \leqslant C_n \varepsilon^{n+1}$$

где Z_n *и* Y_n *– частичные суммы n-ного порядка рядов* (3.3).

В теореме Васильевой те же условия, что и в теореме Тихонова. Усилено условие 1. В теореме Тихонова достаточно было ввести условие непрерывной дифференцируемости и липшицевости. В методе Васильевой строятся ряды и раскладываются в ряды Тейлора бесконечного порядка, и нужно рассмотреть производные всех порядков. Если построить асимптотику n-го порядка, то достаточно потребовать, чтобы были непрерывны частные производные $(n+1)$-го порядка. Если же произвольного, то требование бесконечной дифференцируемости.

Лекция 4. Метод дифференциальных неравенств

Метод Васильевой

Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dx} = f(x,u), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad u(0) = u \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(x,u)$ определена и непрерывна в прямоугольнике D.*

$$D = (x,u) : 0 \leqslant x \leqslant a, \quad (u - u^0) \leqslant b$$

Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условия Липшица по переменной u.

$$|f(x_1,U_1) - f(x_1,u_2)| \leqslant N|u_1 - u_2|$$

Тогда уравнение (4.1) *с заданным начальным условием имеет единственное решение $u(x)$ на отрезке:*

$$l = [0 \leqslant x \leqslant min(a, \frac{b}{M})]$$
$$M = \max_D |f(x,u)|$$

Записывается тривиальное уравнение, показывающее, что решение не обязательно существует при $0 \leqslant x \leqslant a$.

$$\frac{du}{dx} = u^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad u(0) = 1 \;\rightarrow\; u(x) = \frac{1}{1-kx}, \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{k}$$

Если $a > \dfrac{1}{k}$, то задача не имеет решения при $0 \leqslant x \leqslant a$.

Теорема 4.2. *Пусть функция $f(x,u)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе P.*

$$P = (x,U) : 0 \leqslant x \leqslant a, \quad U \in R$$

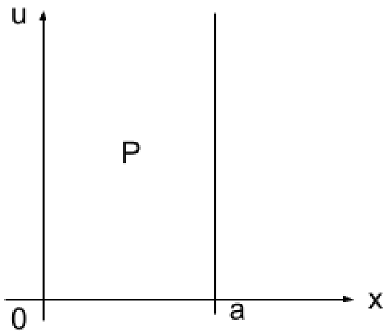

Рис. 4.1. Функция $f(x,u)$ в полосе P

Тогда уравнение (4.1) *имеет единственное решение на отрезке* $[0,a]$. *Если функция*

$$f(x,u) = O(u^{\alpha}), \quad \alpha > 1$$

при $|u| \to \infty$, *то такая функция не удовлетворяет условиям теоремы (условию Липшица).*

Метод дифференциальных неравенств (метод нижних и верхних решений) применяется при рассмотрении существования решения. Вводится оператор L:

$$\frac{du}{dx} = f(x,u), \quad 0 \leqslant x \leqslant a; \quad u(0) = u$$

$$L\ u := \frac{du}{dx} - f(x,u)$$

Определение 4.1.

$$\underline{U}(x) \in C^1(0;a] \cap C[0;a]$$

C^1 *— класс функций, имеющий непрерывную первую производную.*

Функция $\underline{U}(x)$ *называется нижним решением задачи* (4.1), *если она удовлетворяет неравенствам.*

$$L\underline{U} = \frac{d\underline{U}}{dx} - f(x,\underline{U}) < 0; \quad x \in (0;a], \quad \underline{U}(0) < u^0 \tag{4.2}$$

$$\overline{U}(x) \in C^1(0;a] \cap C[0;a]$$

Функция $\overline{U}(x)$ называется верхним решением задачи (4.1), если она удовлетворяет неравенствам.

$$L\overline{U} > 0, \quad 0 < x \leqslant a; \quad \overline{U}(0) > u^0$$

Записывается функция, которая не имеет непрерывные производные в точке 0.

$$u(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$
$$u'(0) = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = +\infty$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u}, \quad 0 < x \leqslant a; u(0) = 0$$

Функция $u(x)$ является решением выше написанной задачи Коши. Записывается второе решение задачи Коши:

$$u_2(x) = -\sqrt{x}$$

Это означает, что условие Липшица не выполнено.

Рассматривается график функции $U = f(x)$, которая непрерывна на отрезке $[0;a]$ и $f(0)f(a) < 0$. На отрезке существует точка c, которая равна нулю ($f(c) = 0$).

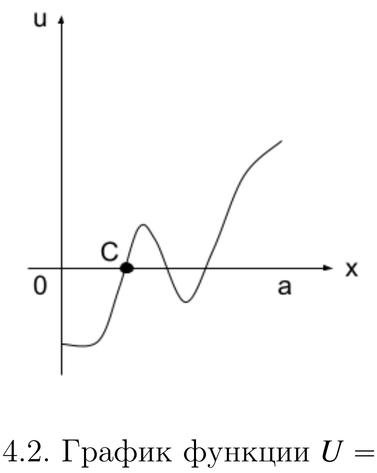

Рис. 4.2. График функции $U = f(x)$

Доказательство.

Необходимо доказать следующее:

$$\underline{U}(x) < \overline{U}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{4.3}$$

$$\underline{U}(0) < u^0 < \overline{U}(0), \quad x = 0$$

Предполагается, что существует точка x_0:

$$x_0 \in (0;a]: \quad \underline{U}(x) < \overline{U}(x), \quad 0 \leqslant x < x_0$$

$$\underline{U}(x_0) = \overline{U}(x_0)$$

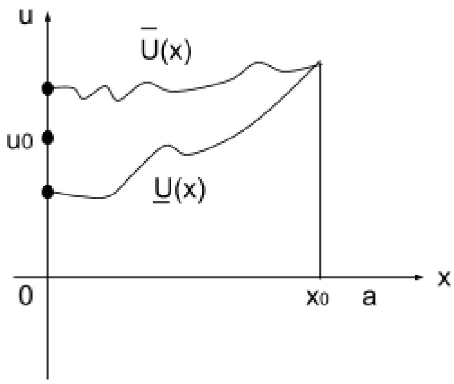

Рис. 4.3. Точка x_0, где $\underline{U}(x)$ и $\overline{U}(x)$ пересекаются

Отсюда следует, что:

$$\frac{d\underline{U}}{dx}(x_0) \geqslant \frac{d\overline{U}}{dx}(x_0)$$

$$L\overline{U}(x_0) = \frac{d\overline{U}}{dx}(x_0) - f(x_0, \overline{U}(x_0)) > 0 \ \rightarrow \ \frac{d\overline{U}}{dx}(x_0) > f(x_0, \overline{U}((x_0)) = f(x_0, \underline{U}(x_0))$$

$$\frac{d\underline{U}(x)}{dx}(x_0) - f(x_0, \underline{U}(x_0)) > 0$$

Это выражение противоречит определению (4.2). Было доказано, что если существуют нижние и верхние решения, то нижнее решение всегда меньше верхнего решения. ■

Теорема 4.3. *Пусть существуют нижнее решение ($\underline{U}(x)$) и верхнее решение ($\overline{U}(x)$) задачи (4.1). Пусть функция $f(x,u)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в области D.*

$$|f(x_1,u_1)-f(x_1,u_2)| \leqslant N|u_1-u_2|$$

$$D=(x,u): 0\leqslant x\leqslant a, \quad \underline{U}(x)\leqslant u\leqslant \overline{U}(x)$$

Тогда задача (4.1) имеет единственное решение и справедливо неравенство:

$$\underline{U}(x)<u(x)<\overline{U}(x), \quad 0\leqslant x\leqslant a$$

Доказательство.

$$P=(x,U): 0\leqslant x\leqslant a, \quad u\in R$$

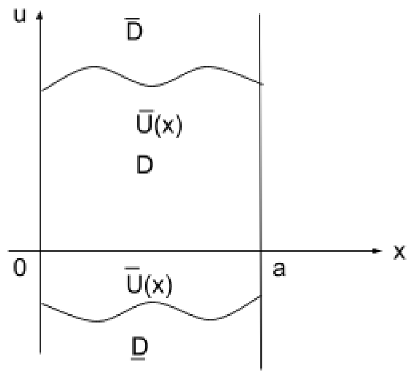

Рис. 4.4. Область D в полосе P

Вводится функция:

$$g(x,u)=\begin{cases} f(x,\underline{U}(x))+(u-\underline{U}(x)), & (x,u)\in\underline{D};\\ f(x,u), & (x,u)\in D;\\ f(x,\overline{U}(x))+(u-\overline{U}(x)), & (x,u)\in\overline{D}.\end{cases}$$

$$N_1=max(N;1)$$

$$\frac{du}{dx}=g(x,u), \quad 0\leqslant x\leqslant a; \quad u(0)=u^0$$

Задача Коши имеет единственное решение.

$$u(x) > \underline{U}(x), \quad u(x) < \overline{U}(x)$$

$$\underline{U}(x) < u(x) < \overline{U}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$(x, u(x)) \in D, \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$g(x,u) = f(x,u), \quad (x,u) \in D$$

Была доказана теорема Чаплыгина. ■

Метод дифференциальных неравенств. Построение решений

Рассматривается сингулярно возмущенное уравнение:

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x,u), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{4.4}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0 \tag{4.5}$$

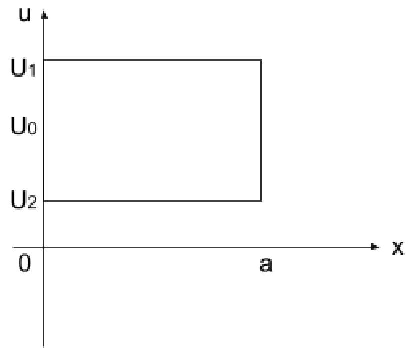

Рис. 4.5. Сингулярно возмущенное уравнение

Пусть выполнены следующие условия:

1) Пусть функция $f(x,u)$ определена и имеет непрерывные частные производные в области D.

$$D = (x,u) : 0 \leqslant x \leqslant a, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2$$

$$u^0 \in (u_1, u_2)$$

2)

$$f(x,u)=0 \;\rightarrow\; u=\varphi(x), 0\leqslant x\leqslant a$$

$$u_1<\varphi(x)<u_2$$

3) Условие устойчивости

$$\overline{f}_u(x) := \frac{\partial f}{\partial u}(x,\varphi(x))<0, \quad 0\leqslant x\leqslant a \tag{4.6}$$

4) Рассматривается присоединенное уравнение:

$$\frac{d\hat{u}}{d\tau}=f(0,\hat{u}), \quad \tau\geqslant 0, \quad \hat{u}(0)=u^0 \tag{4.7}$$

$\hat{u}=\varphi(0)$— точка покоя.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,\varphi(0))<0$$

$$\exists\ \hat{u}(\tau)\rightarrow\varphi(0), \quad \tau\rightarrow\infty$$

Начальное значение u^0 принадлежит области притяжения точки покоя.

По методу Васильевой можно построить асимптотику в виде:

$$u(x,\varepsilon)=\overline{U}(x,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon)=\overline{U_0}(x)+\varepsilon\overline{U_1}(x)+...+\Pi_0(\tau)+\varepsilon\Pi_1(\tau)+... \tag{4.8}$$
$$\tau=\frac{x}{\varepsilon}$$

Определяются первые два члена каждого слагаемого. Уравнение (4.8) подставляется в уравнение (4.4).

$$\varepsilon\frac{d}{dx}(\overline{U}_0+\varepsilon\overline{U}_1+...)+\frac{d}{d\tau}(\Pi_0+\varepsilon\Pi_1+...)=f(x,\overline{U}+\Pi)=f(x,\overline{U}(x,\varepsilon))+$$
$$+[f(\varepsilon\tau,\overline{U}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon))-f(\varepsilon\tau,\overline{U}(\varepsilon\tau,\varepsilon))]$$

$$\varepsilon\frac{d}{dx}(\overline{U}_0+\varepsilon\overline{U}_1+...)=\overline{F}=f(x,\overline{U}_0+\varepsilon\overline{U}_1+...)=f(x,\overline{U}_0)+\overline{f}_U(x)(\varepsilon\overline{U}_1+...)+0(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d}{dx}(\Pi_0+\varepsilon\Pi_1+...)=\Pi F=[f(0,\overline{U}_0(0)+\Pi_0)+f_x(\tau)\times\varepsilon\tau+f_U(\tau)(\overline{U}_0'(0)\varepsilon\tau+\varepsilon\overline{U}_1(0)+$$

$$+0(\varepsilon^2)+\varepsilon\Pi_1+0(\varepsilon^2))+0(\varepsilon^2)]-[f(0,\overline{U}_0(0))+\overline{f}_U(0)(\overline{U}_0'(0)\varepsilon\tau+\varepsilon\overline{U}_1(0)+0(\varepsilon^2))+0(\varepsilon^2)]$$

$$\overline{U}(0)+\varepsilon\overline{U}_1(0)+...+\Pi_0(0)+\Pi_1(0)+...=u^0 \tag{4.9}$$

$$\varepsilon^0 \quad 0=f(x,\overline{U}_0)\to\overline{U}_0(x)=\varphi(x)$$

$$\varepsilon^1 \quad U_0'(x)=\overline{f}_u(x)\overline{U}_1\to\overline{U}_1(x)=\overline{f}_u^{-1}(x)\overline{U}_0^1(x)$$

$$\varepsilon^0 \quad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\tau}=f(0,\overline{U}_0(0)+\Pi_0) \quad \tau\geqslant 0; \\ \Pi_0(0)=u^0-\varphi(0) \end{cases}$$

$$\varepsilon^1 \quad \frac{d\Pi_1}{d\tau}=f_u(\tau)\Pi_1+\pi_1(\tau), \quad \tau\geqslant 0$$

$$f_u(\tau)=\frac{df}{du}(0,\varphi(0)+\Pi_0(\tau))$$

$$\Pi_1(0)=-\overline{U}_1(0)$$

$$f_u(\tau):=f_u(0,\varphi(0)+\Pi_0(x))$$

$$\pi_1(\tau)=[f_x(\tau)-\overline{f}_x(0)]\tau+[f_u(\tau)-\overline{f}_u(0)](\varphi'(0)\tau+\overline{U}_1(0))$$

Были найдены для регулярной части первые два члена асимптотики.

Лекция 5. Задача Коши

Метод дифференциальных неравенств. Построение решений

Чтобы доказать существование решения, необходимо построить нижнее и верхнее решения. По теореме Чаплыгина существует точное решение задачи, которое в точности удовлетворяет уравнению. Решение u больше нижнего и меньше верхнего решения. Этот метод используется для сингулярно возмущенной задачи. Строится асимптотика первого порядка.

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad u(0,\varepsilon) = u^0$$

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}(x,\varepsilon) + \Pi(\tau,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + \varepsilon\overline{u}_1(x) + ... + \Pi_0(\tau) + \varepsilon\Pi_1(\tau) + ...$$

$$\tau = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\overline{u}_0(x) = \varphi(x), \overline{u}_1(x)$$

$$\overline{f}_u(x) := f_u(x,\varphi(x)) < 0$$

$$\overline{f}_u(x) := f_u(x,\varphi(x)) \leqslant -\kappa < 0$$

Четвертое условие связано с присоединенной системой, где получается точка покоя. Требуется, чтобы начальное значение u^0 принадлежало области притяжения точки покоя.

$$\varepsilon^0 \quad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\tau} = f(0,\overline{U}_0(0)+\Pi_0) \quad \tau \geqslant 0; \\ \Pi_0(0) = u^0 - \varphi(0) \end{cases}$$

$$\varepsilon^1 \quad \frac{d\Pi_1}{d\tau} = f_u(\tau)\Pi_1 + \pi_1(\tau), \quad \tau \geqslant 0 \tag{5.1}$$

$$f_u(\tau) = \frac{df}{du}(0,\varphi(0)+\Pi_0(\tau))$$

$$\Pi_1(0) = -\overline{U}_1(0)$$

$$f_u(\tau) := f_u(0,\varphi(0)+\Pi_0(x))$$

$$\pi_1(\tau) = [f_x(\tau) - \overline{f}_x(0)]\tau + [f_u(\tau) - \overline{f}_u(0)](\varphi'(0)\tau + \overline{U}_1(0))$$

Необходимо применить метод дифференциальных неравенств, чтобы обосновать существование решения задачи и доказать, что если взять только члены нулевого и первого порядка, то получится приближение для точного решения с точностью порядка ε^2. Если сделать замену переменной

$$\hat{u}(\tau) = \varphi(0) + \Pi_0(\tau)$$

то получится присоединенное уравнение:

$$\frac{d\hat{u}}{d\tau} = f(0, \hat{u}), \quad \tau \geqslant 0; \quad \hat{u}(0) = u^0$$

Существует следующее решение, которое удовлетворяет условиям:

$$\hat{u}(\tau) \to \varphi(0), \quad \tau \to \infty$$

$$\Pi_0(\tau) \to 0, \quad \tau \to \infty \tag{5.2}$$

$$f_u(x) < -\kappa, \quad \tau \geqslant \tau_0 \tag{5.3}$$

$$|\Pi_0(\tau)| \leqslant c\ exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geqslant 0 \tag{5.4}$$

Записывается решение для задачи (5.1):

$$\Pi_1(\tau) = -\Phi(\tau)\overline{U}_1(0) + \int\limits_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^-1(s)\pi_1(s)ds \tag{5.5}$$

$$\Phi(\tau) = exp\left(\int\limits_0^\tau f_u(s)ds\right)$$

В силу уравнения (5.3) $\Phi(\tau)$ имеет следующую оценку:

$$0 < \Phi(\tau) \leqslant c\ exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geqslant 0$$

$$\tau exp(-\kappa\tau) = c_1 exp(-\kappa_1\tau)$$

В силу уравнений (5.3) и (5.4) $\Pi_1(\tau)$ имеет следующую оценку:

$$|\Pi_1(\tau)| \leqslant c\ exp(-\kappa\tau)$$

Используя эти оценки, можно получить следующее:

$$|\Pi_1(\tau)| \leqslant c\ exp(-\kappa\tau), \tau \geqslant 0$$

Таким образом, были определены первые асимптотики, используя алгоритм Васильевой. Их сумма обозначается следующим образом:

$$U_1(x,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + \varepsilon\overline{u}_1(x) + \Pi_0(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\Pi_1(\frac{x}{\varepsilon})$$
$$L_\varepsilon U_1 = \varepsilon\frac{dU_1}{dx} - f(x,U_1) = O(\varepsilon^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{5.6}$$

Если U_1 подставить в начальное условие, то получится уравнение, которое в точности удовлетворяет заданному условию:

$$U_1 = (0,\varepsilon) = U^0 \tag{5.7}$$

Это означает, что U_1 является решением по невязке с точностью порядка ε^2. Записывается нижнее решение:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) - \varepsilon^2\left(M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \tag{5.8}$$
$$M = const > 0, \quad P(\tau) : 0 \leqslant P(\tau) \leqslant c\ M\ exp(-x\tau)$$

Условия должны быть следующими:

$$L_\varepsilon\underline{U} < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{5.9}$$
$$\underline{U}(0,\varepsilon) < u^0 \tag{5.10}$$

Доказывается условие (5.9):

$$L_\varepsilon\underline{U} = \varepsilon\frac{d\underline{U}}{dx} - f(x,\underline{U}) = \varepsilon\frac{dU_1}{dx} - \varepsilon^2\frac{dP}{d\tau} - f(x,U_1 - \varepsilon^2(M + P(\tau))) \pm f(x,U_1) =$$
$$= \left[\varepsilon\frac{dU_1}{dx} - f(x,U_1)\right] - \varepsilon^2\frac{dP}{d\tau} + \{f(x,U_1) - f(x,\underline{U})\}$$
$$\left[\varepsilon\frac{dU_1}{dx} - f(x,U_1)\right] = O(\varepsilon^2)$$

$O(\varepsilon^2)$ не зависит от M.

$$U_1 = \underline{U} - \varepsilon^2(M+P)$$

$$f(x,U_1) - f(x,\underline{U}) = f(x,U_1) - \left[f_u(x,U_1)\varepsilon^2(M+P(\tau)) + \frac{1}{2}f^*_{uu}\varepsilon^4(M+P)^2\right] =$$

$$= f_u(x,U_1)\varepsilon^2(M+P(\tau)) + O_M(\varepsilon^4)$$

$$L_\varepsilon \underline{U} = O(\varepsilon^2) - \varepsilon^2\frac{dP}{d\tau} + f_u(x,U_1)\varepsilon^2(M+P(\tau)) + O_M(\varepsilon^4) \qquad (5.11)$$

Производное преобразуется в следующее уравнение:

$$f_u(x,U_1) = [f_u(x,\varphi(x)+\varepsilon\overline{U}_1(x)+\Pi_0(\tau)+\varepsilon\Pi_1(\tau)) - f_u(x,\varphi(x))] + f_u(x,\varphi(x)) \leqslant$$

$$\leqslant f^*_{uu}(\varepsilon\overline{U}_1 + \Pi_0 + \varepsilon\Pi_1) - \kappa \leqslant -\kappa_0 + c_1\ exp(-\kappa_1\tau) = k(\tau)$$

Получается оценка для производной.

$$f_u(x,U_1)\varepsilon^2(M+P(\tau)) \leqslant k(\tau)\varepsilon^2(M+P(\tau)) = [-\kappa_0 + c_1\ exp(-\kappa_1\tau)]\varepsilon^2 M + \varepsilon^2 k(\tau)P(\tau)$$

Выбирается функция P, как решение следующей задачи:

$$-\frac{dP}{d\tau} + k(\tau)P + c_1\ M\ exp(-\kappa_1\tau) = 0, \quad \tau \geqslant 0$$

Начальное условие задается нулевое.

$$P(0) = 0$$

Записывается решение для функции P:

$$P(\tau) = \int_0^\tau exp(\int_s^\tau k(t)dt)c_1\ M\ exp(-\kappa_1 s)ds, \quad \tau \geqslant 0$$

$$0 \leqslant P(\tau) \leqslant c_1\ M\int_0^\tau exp(\int_s^\tau(-\kappa_0 + c_1 e^{-\kappa_1,t})dt \times exp(-\kappa_1 s)ds =$$

$$= c_1 M\int_0^\tau exp(-\kappa_0(\tau-s) + \frac{c_1}{\kappa_1}(e^{-\kappa_1 s} - e^{-\kappa_1\tau}))e^{-\kappa_1 s}ds \leqslant c^2 M\int_0^\tau e^{-\kappa_0(\tau-s)}e^{-\kappa_1 s}ds \leqslant$$

$$\leqslant c_2 M \int\limits_0^\tau e^{-\kappa_2 \tau} ds = c_2 M e^{-\kappa_2 \tau} \times \tau \leqslant cMexp(-\kappa\tau), \quad \tau \geqslant 0$$

Отсюда следует, что функция P имеет желаемую оценку.

$$L_\varepsilon \underline{U} \leqslant O(\varepsilon^2) - \kappa_0 \varepsilon^2 M + O_M(\varepsilon^4)$$

При достаточно малых ε получается следующее:

$$O_M(\varepsilon^4) < c$$

$$L_\varepsilon \underline{U} < 0, 0 \leqslant x \leqslant a$$

Дальше проверяется условие (5.10).

$$\underline{U}(0,\varepsilon) = U_1(0,\varepsilon) - \varepsilon^2 M = u^0 - \varepsilon^2 M < u^0$$

Таким образом, функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ является нижним решением задачи. Так же проверяется, что $\overline{U}(x,\varepsilon)$ является верхним решением задачи.

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 \left(M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

Следовательно, существует точное решение, которое лежит между верхним и нижним решениями, для задачи (4.4) и (4.5).

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \leqslant u(x,\varepsilon) \leqslant \overline{U}(x,\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$U_1(x,\varepsilon) - O(\varepsilon^2)$$

$$U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$

$$U(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$

Была обоснована асимптотика:

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i (\overline{U}_1(x) + \Pi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right))$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\left(M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$
$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left(M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u,\varepsilon), \quad u(0) = u^0$$

Функция $f(x,u,\varepsilon)$ имеет изолированное решение, которое было обеспечено условием устойчивости.

$$f(x,u,0) = 0 \to u = \varphi(x)$$
$$\overline{f_u}(x) = f_u(x,\varphi(x)) < 0$$
$$f = -h(x)(u-\varphi(x))^2 + \varepsilon f_1(...)$$
$$-h(x)(u-\varphi_1(x))(u-\varphi_2(x)+\varepsilon f_1)$$

У вырожденного уравнения есть два корня. Если эти корни изолированы, то по отношении к каждому можно применять теорему Тихонова и строить асимптотику по алгоритму Васильевой. Наклон этих корней отвечает за скорость реакции.

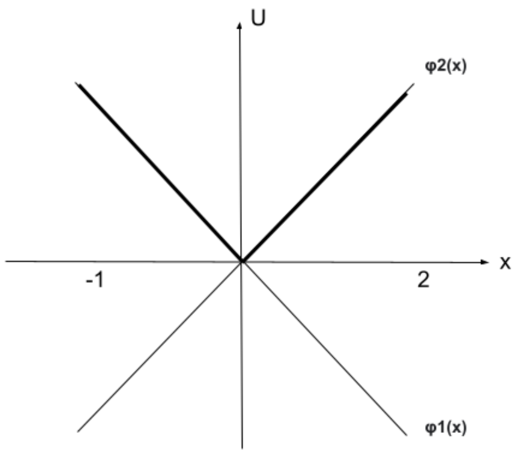

Рис. 5.1. Два корня вырожденного уравнения

Задача Коши в случаях пересекающихся и кратных корней вырожденного уравнения

Рассматривается следующее уравнение с начальным условием:

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u,\varepsilon), \quad u(0,\varepsilon) = u^0 \tag{5.12}$$

$$\overline{f_u}(x) = f_u(x,\varphi(x),0) < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{5.13}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} U(x,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 < x \leqslant a$$

Строится асимптотика:

$$U(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \Pi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \tag{5.14}$$

Характерные примеры

Рассматриваются следующие примеры:

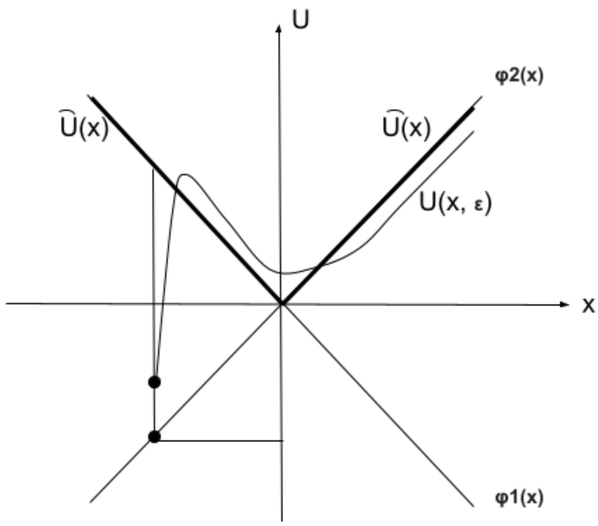

Рис. 5.2. Точное решение $U(x,\varepsilon)$

Пример 5.1.

$$\varepsilon\frac{dU}{dx} = -U^2 + x^2 + \varepsilon, \quad -1 \leqslant x \leqslant 2; \quad U(-1,\varepsilon) = u^0 \tag{5.15}$$

$$f(x,U,0) = -U^2 + x^2 = 0 \to U = -x = \varphi_1(x), \quad U = x = \varphi_2(x)$$

$$f_u = -2u$$

$$f_1(x,\varphi_1(x),0) = 2x\begin{cases} < 0, & -1 \leqslant x < 0; \\ > 0, & 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Корень $\varphi_1(x)$ *устойчив при* $-1 \leqslant x < 0$.

$$f_u(x, \varphi_2(x), 0) = -2x \begin{cases} < 0, & 0 < x \leqslant 2; \\ > 0, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Образуется составной корень:

$$\hat{U}(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(x, \varepsilon) \stackrel{?}{=} \hat{U}(x)$$

Лекция 6. Задача Коши

Задача Коши в случаях пересекающихся и кратных корней вырожденного уравнения

Рассматривается скалярное уравнение первого порядка и задается начальное условие. Предполагается, что вырожденное уравнение, которое получается из исходного, имеет устойчивый корень. Вторым условием было то, чтобы начальное значение принадлежало области притяжения корня. При этих условиях теорема Тихонова говорит о том, что решение задачи (6.1) существует и при $\varepsilon \to 0$ стремиться к корню. Метод Васильевой позволяет получить равномерную на всем сегменте асимптотику.

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x,u,\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad u(0,\varepsilon) = u^0 \tag{6.1}$$

$$f(x,u,0) = 0 \ \to \ u = \varphi(x)$$

$$\overline{f}_u(x) := \frac{df}{du}(x,\varphi(x),0) < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{6.2}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\tau} = f(0,\hat{u},0), \quad \tau \geqslant 0, \quad \hat{u}(0) = u^0$$

$$\hat{u}(\tau) \to \varphi(0), \quad \tau \to \infty$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 < x \leqslant a \tag{6.3}$$

$$u(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \Pi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{6.4}$$

Рассматривается случай, когда условие (6.2) нарушается. Тогда задача имеет 2 корня, которые пересекаются. Либо этот корень кратный. Рассматриваются характерные примеры, которые показывают какие могут быть возможности в случае нарушения условия (6.2).

Пример 6.1.

$$psilon \frac{du}{dx} = -u^2 + x^2 + \varepsilon, \quad -1 \leqslant x \leqslant 2; \quad u(-1,\varepsilon) = u^0 \tag{6.5}$$

Вырожденное уравнение получается с двумя корнями, которые пересекаются в точке 0:

$$f(x,u,0) = -u^2 + x^2 = 0 \ \to \ u = -x, \quad u = x$$

$$f_u = -2u$$

$$f_u(x,\varphi_1(x),0) = 2x\begin{cases} <0, & -1 \leqslant x < 0; \\ >0, & 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Это показывает устойчивость корня $\varphi(x)$ до точки 0.

$$f_u(x,\varphi_2(x),0) = -2x\begin{cases} >0, & -1 \leqslant x < 0; \\ <0, & 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Второй корень не устойчив там, где первый корень устойчив. Из этих корней составляется составной корень.

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} = |x|$$

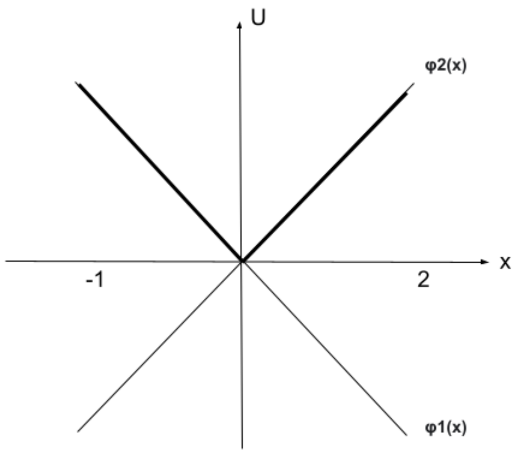

Рис. 6.1. Два корня вырожденного уравнения, которые пересекаются в точке 0

Необходимо найти при каких условиях решение исходной задачи (6.5) *будет существовать и получится следующий предел:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \hat{u}(x)$$

Для этого записывается присоединенное уравнение: $\dfrac{d\widetilde{u}}{d\tau} = -\widetilde{u}^2 + 1, \quad \tau \geqslant 0; \quad \widetilde{u}(0) = u^0$

Предполагается, что решение с таким начальным условием притягивается к корню $\varphi(x)$. *У этого уравнения есть две точки покоя:*

$$\widetilde{u}_1 = 1$$

$$\widetilde{u}_2 = -1$$

Если взять начальное значение $\widetilde{u}_0 < -1$, *то решение будет убывать и уйдет в* $-\infty$. *Если начальное значение будет следующим* $\widetilde{u}_0 = -1$, *то это будет решение уравнения. А если взять начальное значение* $\widetilde{u}_0 > -1$, *то решение будет притягиваться к точке покоя* $\widetilde{u}_1 = 1$. *Если же начальное значение будет следующим* $\widetilde{u}_0 > 1$, *то решение будет убывать и притягиваться к корню* $\widetilde{u}_1 = 1$. *Это означает, что область притяжения точки покоя имеет следующее значение:*

$$u^0 > -1$$

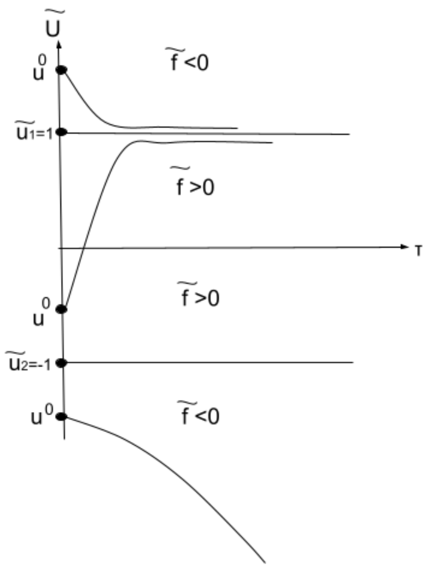

Рис. 6.2. Начальное значение $\widetilde{u}_0$

По рисунку поведения решения видно, что решение полной задачи (6.5) *быстро изменяется от начального значения, приближается к корню вырожденного уравнения и остается дальше вблизи этого корня. Это означает, что это решение удовлетворяет теореме Тихонова и существует следующее условие:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \hat{u}(x)$$

$$f(u,x,\varepsilon)>0,\quad -\sqrt{x^2+\varepsilon}<u<\sqrt{x^2+\varepsilon}$$

$$f(u,x,\varepsilon)<0,\quad u<-\sqrt{x^2+\varepsilon},\quad u>\sqrt{x^2+\varepsilon}$$

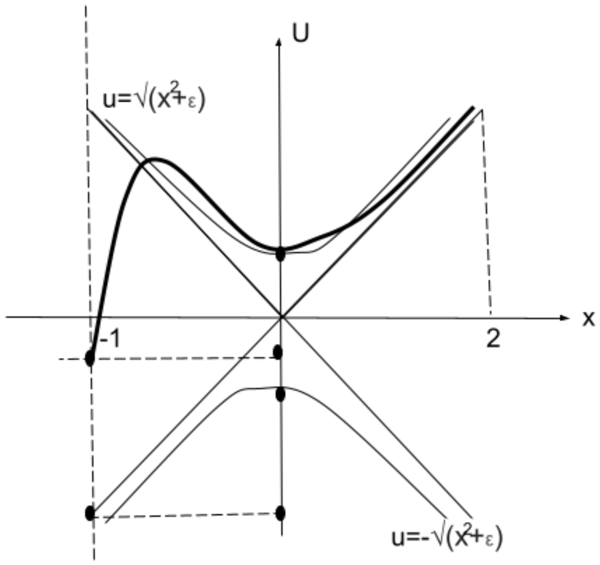

Рис. 6.3. Поведение решения задачи

Имеется качественное отличие от Тихоновско-Васильевского случая. Асимптотика нулевого порядка, построенная по методу Васильевой:

$$u(x,\varepsilon)=\varphi(x)+\Pi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon)$$

В окрестности точки пересечения корней отличие точного решение от $\varphi(x)$ является $O(\sqrt{\varepsilon})$.

$$u(x,\varepsilon)=\hat{u}(x)+O(\sqrt{\varepsilon})$$

Пример 6.2.

$$\varepsilon\frac{du}{dx}=-u^2+x^2-\varepsilon, -1\leqslant x\leqslant 2; U(-1;\varepsilon)=U^0 \tag{6.6}$$

$$f(x,u,0)=-u^2+x^2=0\ \rightarrow\ u=-x,\quad u=x$$

$$f_u=-2u$$

$$f_u(x,\varphi_1(x),0)=2x\begin{cases}<0, & -1\leqslant x<0;\\ >0, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

$$f_u(x,\varphi_2(x),0) = -2x\begin{cases} >0, & -1\leqslant x<0;\\ <0, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} -x, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases} = |x|$$

Решение быстро приближается к корню $\varphi(x)$, но не может пересечь его, что доказывает единственность решения. Решение остается вблизи неустойчивого корня до точки 1.Поэтому это явление называется задержкой вблизи неустойчивого корня. Необходимо доказать, что решение остается вблизи неустойчивого корня $\varphi(x)$.

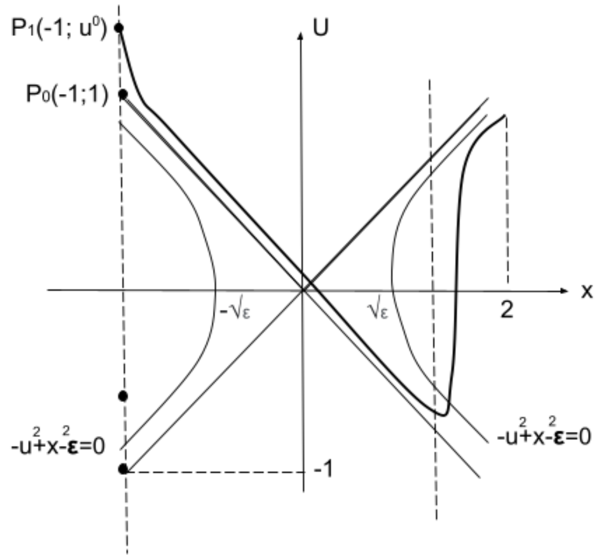

Рис. 6.4. Поведение первого решения задачи

$$\varepsilon\frac{d}{dx}(u_1+x) = -(u_1-x)(u_1+x)$$

$$z(x,\varepsilon) = u_1(x,\varepsilon)+x$$

$$\varepsilon\frac{dz}{dx} = -(z-2x)z = -z^2+2zx, \quad z>0$$

Получается оценка для z:

$$\varepsilon\frac{dz}{dx} < 2zx \;\rightarrow\; \varepsilon\frac{dz}{z} < 2xdx \;\rightarrow\; \varepsilon\int\limits_{u^0-1}^{z(x,\varepsilon)}\frac{dz}{z} < \int\limits_{-1}^{x} 2xdx \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \ \ln\frac{z(x,\varepsilon)}{u^0-1} < \frac{x^2-1}{\varepsilon} \ \rightarrow \ z(x,\varepsilon) < (u^0-1)exp\left(\frac{x^2-1}{\varepsilon}\right)$$

$$u_1(-1,\varepsilon) = u^0 > 1$$

$$z(-1,\varepsilon) = u^0 - 1 > 0$$

Если $-1 < x < 1$, *то* $exp\left(\frac{x^2-1}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0$ *при* $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$z(x,\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall x \in (-1;1) \ \rightarrow \ u_1(x,\varepsilon) \rightarrow -x, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall x \in (-1;1)$$

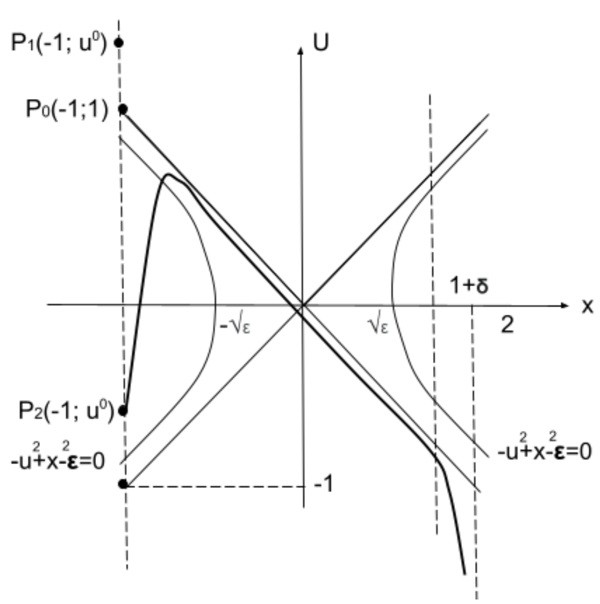

Рис. 6.5. Поведение второго решения задачи

Было доказано, что решение остается вблизи неустойчивого корня $-x$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \hat{u}(x), \quad -1 < x < 0, \quad 1 < x \leqslant 2$$

Задача Коши в случаях пересекающихся корней вырожденного уравнения

Рассматривается задача Коши:

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u,\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{6.7}$$

$$U(0,\varepsilon) = U^0 \tag{6.8}$$

В этой задаче не работает алгоритм Васильевой и нельзя построить асимптотику произвольного порядка по методу Васильевой.Применяется метод сращивания.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $f(x,u,\varepsilon)$ дважды дифференцируема в следующей области:

$$(x,u,\varepsilon) : 0 \leqslant x \leqslant a, \quad u \in I, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = G$$

$$u^0 \in I$$

I— интервал

2) вырожденное уравнение имеет два корня, которые пересекаются в точке x_0.

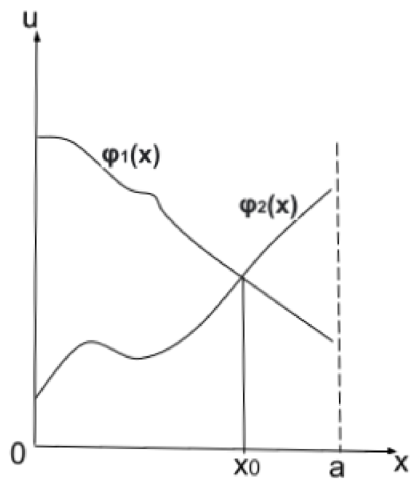

Рис. 6.6. Два корня пересекаются в точке x_0

$$f(x,u,0) = 0 \;\rightarrow\; u = \varphi_1(x), \quad u = \varphi_2(x)$$

$$\varphi_1(x) > \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x < x_0$$

$$\varphi_2(x) > \varphi_1(x), \quad 0 < x \leqslant x_0$$

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$$

3) Определяется устойчивость корня.

$$f_u(x,\varphi_1(x),0)\begin{cases}<0, & 0\leqslant x<x_0;\\ >0, & x_0<x\leqslant a.\end{cases}$$

Корень $\varphi_1(x)$ устойчив до точки пересечения.

$$f_u(x,\varphi_2(x),0)\begin{cases}>0, & 0\leqslant x<x_0;\\ <0, & x_0<x\leqslant a\end{cases}$$

$$f_u(x_0,\varphi_i(x_0),0)=0$$

Вводится составной корень:

$$\hat{u}(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & 0\leqslant x\leqslant x_0;\\ \varphi_2(x), & x_0\leqslant x\leqslant a\end{cases}$$

Записывается функция, которая удовлетворяет всем условиям:

$$f(x,u,\varepsilon)=-(u-\varphi_1(x))(u-\varphi_2(x))+\varepsilon f_1(x,x,i)$$

$$f(x,u,0)=0\ \rightarrow\ u=\varphi_1(x),\quad u=\varphi_2(x)$$

$$f_u(x,u,0)=-2u+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$$

$$f_u(x,\varphi_1(x),0)=-\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=-(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\begin{cases}<0, & 0\leqslant x<x_0;\\ >0, & x_0<x_0\leqslant a\end{cases}$$

Это показывает устойчивость сотавного корня. Необходимо найти условия, при которых решение задачи существует и получается следующий предел:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(x,\varepsilon)=\hat{u}(x),\quad 0<x\leqslant a$$

Требуется, чтобы начальное условие принадлежало области притяжения точки покоя:

$$\widetilde{u}(x)=\varphi_1(0)$$

Необходимо ввести 2 дополнительные условия.

$$\hat{f}_{uu}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x_0, \hat{U}(x_0), 0) < 0 \tag{6.9}$$

$$\hat{u}'(x_0 \pm 0) - \hat{f}_\varepsilon(x_0) < 0 \tag{6.10}$$

$$\hat{f}_\varepsilon(x_0) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_0, \hat{u}(x_0), 0)$$

Лекция 7. Задача Коши (продолжение)

Задача Коши в случаях пересекающихся корней вырожденного уравнения (продолжение)

Рассматривается следующая задача:

$$\varepsilon\frac{d\ u}{d\ x} = f(x,\ u\ ,\varepsilon),\ 0 \leqslant x \leqslant a \tag{7.1}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0 \tag{7.2}$$

Она представляет собой классический тихоновский случай, когда вырожденные уравнения равны нулю, то есть в уравнениях $\varepsilon = 0$, имеют изолированный устойчивый корень.

Рассмотрим случай, когда вырожденные уравнения имеют кратные пересекающиеся корни. Имеется несколько условий:

Условие 1. Гладкость входных данных.

Достаточно двукратной непрерывной дифференцируемости, то есть функция f имеет непрерывные производные до второго порядка по всем своим аргументам.

Условие 2. $f(x,u,0)\ \to u = \phi_1(x), u = \phi_2(x)$

То есть корни пересекаются в некоторой точке, а именно

$$\exists_0 \in (0,a) : \phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$$

Условие 3. Уточнение геометрии.

От 0 до x_0 $\phi_1 > \phi_2$, а от x_0 до a $\phi_2 > \phi_1$. Для определенности указываем, что

$$f_u(x,\phi_1(x),0)\begin{cases} < 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ > 0,\ x_0 < x \leqslant a \end{cases}$$

$$f_u(x,\phi_2(x),0)\begin{cases} > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ < 0,\ x_0 < x \leqslant a \end{cases}$$

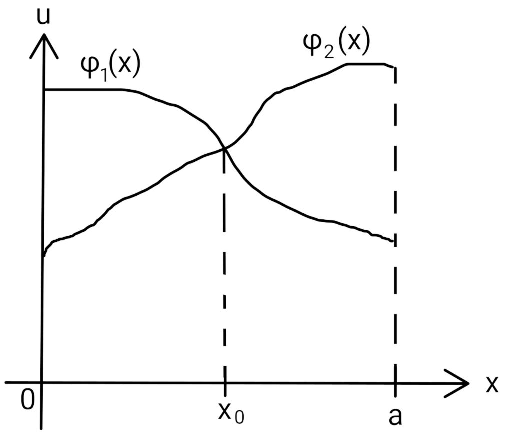

Рис. 7.1. Иллюстрация корней ϕ_1 и ϕ_2

Далее, что касается задачи (7.1):

$$f(u,x,\varepsilon) = -(u-\phi_1(x))(u\cdot\phi_2(x)) + \varepsilon f_1(x,u,\varepsilon)$$

Если главную часть $-(u-\phi_1(x))(u\cdot\phi_2(x))$ приравнять к нулю, то вырожденное уравнение имеет два корня. Чтобы оставить из этих двух корней устойчивый составной корень, вводится функция $\widehat{u}$:

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} \phi_1(x), 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ \phi_2(x), x_0 \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

$$\widehat{f}_u(x) := f_u(x,\widehat{u}(x),0) \leqslant 0$$
$$\widehat{f}_u(x_0) = 0$$

То есть существует одна точка, которая не удовлетворяет условиям теоремы Тихонова.

Случай, при каких условиях решение задачи (7.1), (7.2) существует.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \widehat{u}(x), 0 < x \leqslant a \tag{7.3}$$

Обычных условий теоремы Тихонова недостаточно. Для того, чтобы предельный переход имел место, начальное значение u^0 должно принадлежать области притяжения корня ϕ_1.

Возникает следующее условие:

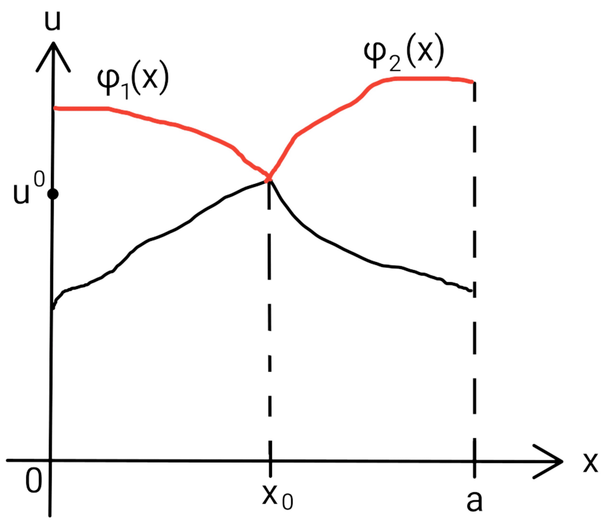

Рис. 7.2. Начальное значение u^0 на области ϕ_1

Условие 4. Принадлежность начального значения u^0 к области притяжения корня ϕ_1.

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}}{d\tau} = f(0,\tilde{u},0), \tau \geqslant 0 \\ \tilde{u}(0) = u^0 \end{cases}$$

Данное уравнение имеет точку покоя

$$\tilde{u} = \phi_1(0), \tilde{u} = \phi_2(0)$$

Необходимо так задать начальное значение u^0, чтобы решение задачи было

$$\tilde{u}(\tau) \to \phi_1(0) \text{ при} \tau \to \infty$$

Тогда областью притяжения является

$$u^0 > \phi_2(0)$$

Условие 5.

$$\hat{f}_{uu}(x_0) = \frac{d^2 f}{du^2}(x_0, \hat{u}(x_0), 0) < 0$$

Условие 6.

$$\hat{u}'(x_0 \pm 0) - \hat{f}_\varepsilon(x_0) < 0$$

$$\hat{f}_\varepsilon(x_0) = \frac{df}{d\varepsilon}(x_0, \hat{u}(x_0), 0)$$

Разобьем промежуток от 0 до a на несколько:

1) $0 \leqslant x \leqslant x_1 = x_0 - \delta$ ($\delta > 0 -$ не зависит от ε)

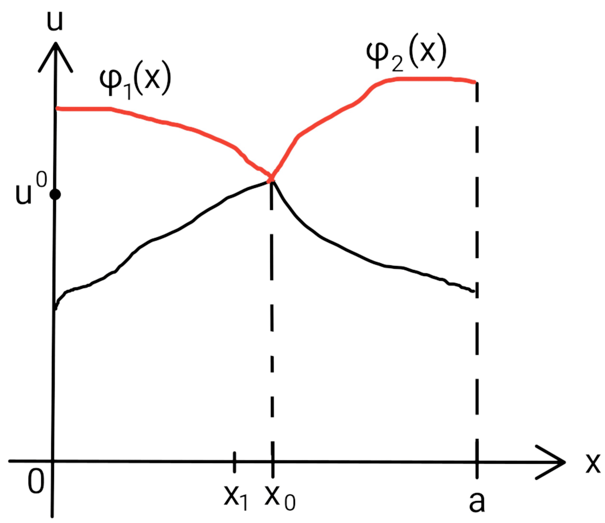

Рис. 7.3. Промежуток с точкой x_1

По теореме Тихонова решение существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \phi_1(x) = \widehat{u}(x), 0 \leqslant x \leqslant x_1$$

Таким образом, на данном промежутке предельное равенство (7.3) выполнено.

Построим на этом промежутке асимптотику нулевого порядка по методу Васильевой:

$$u(x,\varepsilon) = \phi_1(x) + \Pi_0(\tau) + O(\varepsilon), \tau = \frac{x}{\varepsilon} \tag{7.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\tau} = f(0, \phi_1(0) + \Pi_0, 0), \tau \geqslant 0 \\ \Pi_0(0) = u^0 - \phi_1(0) \end{cases}$$

Так как $\widetilde{u} \to \phi_1(0)$, то $\Pi_0 \to 0$ при $\tau \to \infty$. Такое стремление носит экспоненциальный характер:

$$|\Pi_0(\tau)| \leqslant c\ exp\ (-\varkappa\tau)$$

Через c обозначаем подходящие положительные числа, независящие от ε.

Так как в точке x_0 условие устойчивости нарушено (f(u) = 0), то теорема Тихонова в данном случае не позволяет добраться до этой точки.

2) $x_1 \leqslant x \leqslant x_2 = X_0 + \delta$

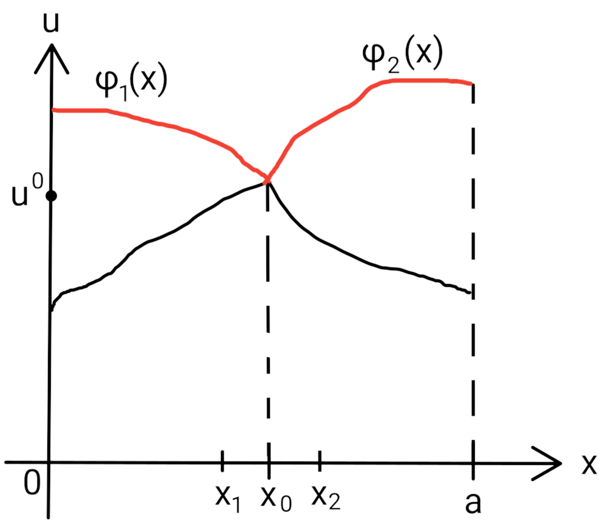

Рис. 7.4. Промежуток с точкой x_2

Имеется исходное уравнение (7.1) с начальным условием 5, помимо этого введем обозначение:

$$u(x_1,\varepsilon) = u_1 \tag{7.5}$$

В силу уравнения (7.4) получается:

$$u_1 - \phi_1(x_1) +)(\varepsilon) \tag{7.6}$$

Необходимо доказать решение задачи (7.1), (7.5) с помощью метода дифференциальных неравенств. Для этого надо построить нижнее и верхнее решения. Нижнее решение:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = \widehat{u}(x) - M\ \varepsilon, \tag{7.7}$$

где M – положительное число, независящее от ε.

Чтобы данная функция была нижним решением, необходимо выбрать такое M, чтобы были выполнены следующие два условия:

1. Операторное неравенство:

$$L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon \frac{d\ \underline{U}}{d\ x} - f(x, \underline{U}, \varepsilon) \leqslant 0, x \in [x_1, x_2]$$

2. В начальный момент:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \leqslant u_1$$

Проводим проверку условия 2, сравнивая с (7.6):

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}(x_1),\varepsilon) = \widehat{u}(x_1) - M\ \varepsilon = \phi_1(x_1) - M\ \varepsilon \\ u_1 - \phi_1(x_1) +)(\varepsilon) \\ |O(\varepsilon)| \leqslant c\ \varepsilon \end{aligned}\right\} \to \underline{U}(x_1,\varepsilon) < u_1$$

Проводим проверку условия 1:

$$L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon \frac{d\ \widehat{u}}{d\ x} - f(x, \widehat{u}(x) - M\ \varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon \widehat{u}'(x) - [f(x, \widehat{u}(x), 0) + \widehat{f}_u(x)(-M\ \varepsilon) +$$
$$+ \widehat{f}_\varepsilon(x) \cdot \varepsilon + o(\varepsilon)] \leqslant \varepsilon[\widehat{u}'(x) - \widehat{f}_\varepsilon(x)] + o(\varepsilon),$$

где $\widehat{f}_u(x) \leqslant 0$.

Если в точке x_0 выполнено по условию 6 $\widehat{u}'(x_0 \pm 0) - \widehat{f}_\varepsilon(x_0) < 0$, то оно будет выполнено в некоторой окрестности точки в силу непрерывности. Таким образом, в силу условия 6:

$$\widehat{u}'(x) - \widehat{f}_\varepsilon(x) \leqslant -c_0 < 0 \text{ при } x_1 = x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta = x_2$$

В итоге выполнено условие 1:

$$L_\varepsilon \underline{U} \leqslant -c_0 \varepsilon + o(\varepsilon) < 0$$

Далее построим верхние решение:

$$L_\varepsilon(x,\varepsilon) = \widehat{u}(x) + M\ \sqrt{\varepsilon} \tag{7.8}$$

Необходимо проверить два условия, что функция при соответствующем выборе числа M будет верхним решением:

1. $L_\varepsilon \underline{U} \geqslant 0, x \in [x_1, x_2]$
2. $\underline{U}(x_1,\varepsilon) \geqslant u_1$

Проверка условия 2:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}(x,\varepsilon) = \widehat{u}(x_1) + M\ \sqrt{\varepsilon} = \phi_1(x_1) + M\ \sqrt{\varepsilon} \\ u_1 = \phi_1(x_1) + O(\varepsilon) \end{aligned}\right\} \to \underline{U}(x,\varepsilon) > u_1$$

Проверка условия 1:

$$L_\varepsilon \underline{U} = \varepsilon \frac{d\ \underline{U}}{d\ x} - f(x,\underline{U},\varepsilon) = \varepsilon \frac{d\ \underline{U}}{d\ x} - f(x,\widehat{u}(x) + M\ \sqrt{\varepsilon},\varepsilon = \varepsilon \widehat{u}(x) - [f(x,\widehat{u}(x),0) + \widehat{f}_u(x) \cdot M\ \sqrt{\varepsilon} +$$

$$+ \widehat{f}_\varepsilon(x) \cdot \varepsilon + \frac{1}{2}\widehat{f}_{uu}(x) \cdot (M\ \sqrt{\varepsilon})^2 + o(\varepsilon)] \geqslant \varepsilon[\widehat{u}'(x) - \widehat{f}_\varepsilon(x) - \frac{1}{2}\widehat{f}_{uu}(x) M^2] + o(\varepsilon),$$

где $\widehat{f}_u(x) \leqslant 0,\ f(x,\widehat{u}(x),0) = 0$.

Из условия 5 следует:

$$\widehat{f}_{uu}(x) \leqslant -c_1 < 0, x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$$

Получаем следующее неравенство:

$$L_\varepsilon \underline{U} \geqslant \varepsilon[(\widehat{u}'(x) - \widehat{f}_\varepsilon(x)) + \frac{1}{2}c_1\ M^2] + o(\varepsilon) > 0,$$

где $(\widehat{u}'(x) - \widehat{f}_\varepsilon(x)) \geqslant -c_2$.

Из того, что существуют нижнее и верхнее решения, следует, что есть решение $\exists\ u(x,\varepsilon)$ задачи (7.1), (7.5):

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \leqslant u(x,\varepsilon) \leqslant \overline{U}(x,\varepsilon), x \in [x_1,x_2]$$

Точное решение задачи на отрезке $[x_1,x_2]$ отличается от составного устойчивого корня $\widehat{u}$ на величину, в одну сторону, ε, в другую $\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, выполнено предельное равенство (7.3) на отрезке $[x_1,x_2]$.

3) $x_2 = x_0 + \delta \leqslant x \leqslant a$

$$u(x_2,\varepsilon) = u_2 = \widehat{u}(x_2) + O(\sqrt{\varepsilon}) \tag{7.9}$$

$$\text{На } [x_1,x_2] : \widehat{f_u}(x) = f_u(x,\phi_2(x),0) < 0$$

Решение существует по теореме Тихонова и методу Васильевой:

$$u(x,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \widehat{u}(x) = \phi_2(x) \text{ на } [x_2,a]$$

Либо построить верхнее и нижнее решения:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = \widehat{u}(x) - M\ \sqrt{\varepsilon}$$
$$\overline{U} = \widehat{u}(x) + M\ \sqrt{\varepsilon}$$

Теорема 7.1. *Если выполнены условия 1 - 6, то для достаточно малых ε задача* (7.1), (7.2) *имеет решение*

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \phi_1(x) + \ \Pi_0(\dfrac{x}{\varepsilon}) + O(\varepsilon), 0 \leqslant x \leqslant x_0 - \delta \\ \widehat{u}(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), x_0 - \delta \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

Пример 7.1.

$$\varepsilon\frac{d\ u}{d\ x} = -u^2 + x^2 - \varepsilon, -1 \leqslant x \leqslant 2$$

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} -x, -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x, \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \widehat{u}(x), -1 \leqslant x < 0$$

$$\widehat{u}(x_0 - 0) - \widehat{f}_\varepsilon(x_0) = 0,$$

где $\widehat{u}(x_0 - 0) = 1$, $x_0 = 0$, $\widehat{f}_\varepsilon(x_0) = -1$

$$\widehat{u}(x_0 + 0) - \widehat{f}_\varepsilon(x_0) = 2$$

Таким образом, видна необходимость условий 5 и 6, так как, если они не выполнены, то предела может уже и не быть.

Задача Коши в случае двукратного корня выраженного уравнения

$$\varepsilon\frac{d\ u}{d\ x} = f(x,u,\varepsilon), 0 \leqslant x \leqslant a \tag{7.10}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0 \tag{7.11}$$

В случае теоремы Тихонова – когда выраженное уравнение имеет изолированный и устойчивый корень. В случае пересекающихся корней, из них составляется устойчивый составной корень. Но теперь будет рассмотрен случай двукратного корня. Условия:

Усл. 1. $f(u,x,\varepsilon) = -h(x)(u-\phi(x)^2 + \varepsilon f_1(u,x,\varepsilon)$

Усл. 2. h,ϕ,f_1 – достаточно гладкие функции, а также $h(x) > 0, x \in [0,a]$

Тогда выраженное уравнение $u = \phi(x)$ – тождественно двукратный корень, то есть для всех x.

Асимптотика решения:

$$u(x,\varepsilon) = \underline{u}(x,\varepsilon) + \ \Pi\ (\tau,\varepsilon), \tau = \frac{x}{\varepsilon} \tag{7.12}$$

Каждое из данных слагаемых (регулярная и погранслойная части) будут рядами разложения по степеням ε. Регулярная часть асимптотики:

$$\underline{u}(x,\varepsilon) = \underline{u}_0() + \sqrt{\varepsilon}\underline{u}_1(x) + \varepsilon\underline{u}_2(x) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\ \varepsilon^{\frac{i}{2}}\ \underline{u}_i(x)$$

Погранслойная часть асимптотики:

$$\Pi(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\ \varepsilon^{\frac{i}{2}}\ \underline{u}_i(\tau)$$

Лекция 8. Задача Коши в случае двукратного корня выраженного уравнения

Задача Коши в случае двукратного корня выраженного уравнения

$$\varepsilon\frac{d\ u}{d\ x}=f(x,u,\varepsilon),0\leqslant x\leqslant a \tag{8.1}$$

$$u(0,\varepsilon)=u^0 \tag{8.2}$$

Условия задачи Коши:

Усл. 1. $f(u,x,\varepsilon)=-h(x)(u-\phi(x)^2+\varepsilon f_1(u,x,\varepsilon)$

Усл. 2. h,ϕ,f_1 – достаточно гладкие функции, а также $h(x)>0, x\in[0,a]$

Тогда выраженное уравнение $u=\phi(x)$ – тождественно двукратный корень, то есть для всех x.

Асимптотика решения:

$$u(x,\varepsilon)=\overline{u}(x,\varepsilon)+\ \Pi\ (\tau,\varepsilon),\tau=\frac{x}{\varepsilon} \tag{8.3}$$

Каждое из данных слагаемых (регулярная и погранслойная части) будут рядами разложения по степеням ε. Регулярная часть асимптотики:

$$\overline{u}(x,\varepsilon)=\overline{u}_0(x)+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x)+\varepsilon\overline{u}_2(x)+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\ \varepsilon^{\frac{i}{2}}\ \overline{u}_i(x) \tag{8.4}$$

Погранслойная часть асимптотики:

$$\Pi(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\ \varepsilon^{\frac{i}{2}}\ \Pi_i(\tau) \tag{8.5}$$

Алгоритм определения членов данных рядов, где подставляется выражение (8.3) в уравнение (8.1):

$$\varepsilon\frac{d\ \overline{u}}{d\ x}+\frac{d\ \Pi}{d\ \tau}=f(x,\overline{u}+\Pi,\varepsilon)=\overline{f}+\Pi f,$$

$$\overline{f}=f(x,\overline{u}(x,\varepsilon),\varepsilon)$$

$$\Pi f=f(\varepsilon\ \tau,\overline{u}(\varepsilon\ \tau,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-f(\varepsilon\ \tau,\overline{u}(\varepsilon\ \tau,\varepsilon),\varepsilon)$$

$$\varepsilon\frac{d\ \overline{u}}{d\ x}=\overline{f},\frac{d\ \Pi}{d\ \tau}=\Pi f \tag{8.6}$$

$$\varepsilon\frac{d\ \overline{u}_0}{d\ x}+\sqrt{\varepsilon}\frac{d\ \overline{u}_1}{d\ x}+\dots=\overline{f}=-h(x)(\overline{u}_0+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1+\varepsilon\overline{u}_2+\dots-\phi(x))^2+\varepsilon f_1(x,\overline{u}_0+\dots,\varepsilon)$$

В случае ε^0:

$$0=-h(x)(\overline{u}_0-\phi(x))^2\to\overline{u}_0(x)=\phi(x)$$

В случае ε^1:

$$\phi'(x)=-h(x)\overline{u}_1{}^2,\ \overline{f}_1(x)=f_1(x,\overline{u}_0(x),0)$$

$$\overline{u}_1{}^2=h^{-1}(x)[\overline{f}_1(x)-\phi'(x)]$$

Однако данное уравнение имеет решение не всегда.

Усл. 3 Пусть $\overline{f}_1(x)\phi'(x)>0,x\in[0,a]$

В предыдущем параграфе было рассмотрено такое же уравнение, но вырожденное уравнение имело два корня, которые пересекались в точке x_0. Сравним условие 6 $(\overline{u}_0'(x_0\pm 0)-\overline{f}_\varepsilon(x_0)<0)$ из предыдущего параграфа с имеющимся условием 3. Данные условия идентичны, так как $\phi=\overline{u}_0$, $f=-h(u-\phi)^2+\varepsilon\ f_1$, $\overline{f}_\varepsilon=f_1$ тогда условие 3 будет

$$\overline{u}_0'(x)-\overline{f}_\varepsilon(x)<0$$

Отличие заключается в том, что данное условие для задачи требуется для всех $x\in[o,a]$, а в предыдущей задаче требовалось только для точки, в которой корни пересекаются.

По условию 3 для $\overline{u}_1$ получается два значения: плюс-минус корень из выражения $h^{-1}(x)[\overline{f}_1(x)-\phi'(x)]$.

Для того, чтобы построить асимптотику погранслойного решения и обосновать ее, необходимо взять положительный корень:

$$\overline{u}_1(x)=[h^{-1}(x)(\overline{f}_1(x)-\phi'(x))]^{\frac{1}{2}}>0$$

Возвращаясь к развернутому уравнению, при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$:

$$\frac{d\ \overline{u}_1}{d\ x}=-2h(x)\overline{u}_1(x)\cdot\overline{u}_2+\overline{f}_{1u}(x)$$

Это линейное уравнение относительно $\overline{u}_2$, где коэффициент $-2h(x)\overline{u}_1(x)\neq 0$. Далее можно найти $\overline{u}_2(x)$ как решение тривиального линейного уравнения.

Для следующих коэффициентов функции $\overline{u}_i$ получится уравнение

$$(2h(x)\overline{u}_1(x))\overline{u}_i=F_i(x), i=3,4,\dots$$

где $F_i(x)$ – это известная функция, которая выражается рекуррентно через $\overline{u}_j(x)$ с $j<i$.

Далее находится $\overline{u}_i(x)$. Таким образом, регулярная часть асимптотики и ряд(8.3) построены.

Построение погранслойной части

Отличие от регулярной части, которая строилась таким же образом, как ряды в алгоритме Васильевой, будет в методе построения асимптотики погранслойной части. Особое отличие будет при нахождении членов ряда (8.5) погранслойного ряда. Будут извлекаться из второго уравнения (8.6):

$$\frac{d}{d\ \tau}\ (\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\ \Pi_1+\dots)=\Pi\ f=-h(\varepsilon\ \tau)[(\overline{u}_0+\sqrt{\varepsilon}\ \overline{u}_1+\dots)+(\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\ \Pi_1+\dots)-$$

$$-\phi(\varepsilon\ \tau)]^2+\dots+h(\varepsilon\ \tau)[\sqrt{\varepsilon}\ \overline{u}_1+\dots+\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\ \Pi_1+\dots]^2+\varepsilon\ \Pi\ f_1=\zeta=\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}=\sqrt{\varepsilon}\ \tau=$$

$$=-h(\sqrt{\varepsilon}\ \zeta)\ [\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\ \Pi_1+\dots)^2+2\sqrt{\varepsilon}\ \overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\ \zeta)+\varepsilon\ \overline{u}_2(\sqrt{\varepsilon}\ \zeta)+\dots)\qquad(8.7)$$

$$(\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\ \Pi_1+\dots)]+\varepsilon\ \Pi\ f_1$$

$$-h(\sqrt{\varepsilon}\ \zeta)=-(h_0+h'(0)\sqrt{\varepsilon}\ \zeta+\dots)$$

Из равенства (8.7) необходимо извлечь уравнение для П функций. Если действовать стандартным способом, то надо выписать уравнение для главного члена Π_0 из равенства (8.7). При ε^0:

$$\frac{d\ \Pi_0}{d\ \tau}=-h_0\ \ \Pi_0^2,\tau\geqslant 0 \tag{8.8}$$

Необходимо задать начальные условия для Π_0. Для этого подставляется ряд (8.3) в начальное условие (8.2):

$$\bar{u}_0(0)+\sqrt{\varepsilon}\ \bar{u}_1(0)+\dots+\ \Pi_0(0)+\sqrt{\varepsilon}\ \Pi_1(0)+\dots=u^0 \tag{8.9}$$

Из равенства (8.9) извлекается:

$$\Pi_0(0)=u^0-\bar{u}_0(0) \tag{8.10}$$

Таким образом, при стандартном подходе для главного члена погранслойного ряда Π_0 получается уравнение (8.8) с начальным условием (8.10). При этом какой бы в уравнении (8.8) Π_0 не был производная отрицательна. Исходя из традиционного требования, что

$$\Pi_i(\infty)=0$$

необходимо, чтобы начальное число $u^0-\bar{u}_0(0)$ было не отрицательным. Отсюда вытекает следующее условие:

Усл. 4 $u^0-\bar{u}_0(0)=\ \Pi^0>0$

При решении задачи (8.8), (8.10) $h(0)=1$. Никакого ограничения нет, так как $h(0)$ можно убрать в аргумент. Тогда решение имеет следующий вид:

$$\Pi^0(\tau)=\frac{\Pi^0}{\Pi^0\ \tau+1} \tag{8.11}$$

$$\Pi^0\ \tau=O(\frac{1}{\tau+1})\text{ при }\tau\to\infty$$

По теории Тихонова все П функции имеют такую оценку:

$$|\Pi_i\ \tau| \leqslant c\ exp\ (-\varkappa\ \tau), \tau \geqslant 0$$

Если дальше написать уравнение для Π_1, определив Π_0, стандартно, то Π_1 не будет стремиться к нулю. Анализ задачи, который будет далее выполнен, показывает, что $\Pi^0\ \tau$ и прочие коэффициенты ряда П ведут себя иначе. Если в тихиновском случае оценка была единая для всех $\tau \geqslant 0$ (то есть функции экспоненциально убывают), то в двукратным корне П функции убывают степенным образом только в первой зоне от нуля. Помимо этого имеются еще две зоны. Таким образом, пограничный слой является трехзонным.

Изменим уравнение для Π_0, и вместо уравнения (8.8) добавим справа еще одно слагаемое:

$$\frac{d\ \Pi_0}{d\ \tau} = -(\Pi_0^2 + \sqrt{\varepsilon}\ k\ \Pi_0),\ \ \tau \geqslant 0 \tag{8.12}$$
$$k = 2\ \bar{u}_1(0) > 0$$

Решение уравнения (8.12) с начальным условием (8.10) выглядит следующим образом:

$$\Pi_0(\tau) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\ k\ exp(-\sqrt{\varepsilon}\ k\ \tau}{\sqrt{\varepsilon}\ k + \Pi^0(1 -\ exp(\sqrt{\varepsilon}\ k\ \tau))}, \tau \geqslant 0 \tag{8.13}$$

Если τ в числителе растет от нуля и дальше, то экспонента стремится к нулю, то есть она убывает. $\Pi_0(\tau)$ монотонно стремится к нулю. Промежуток $\tau \geqslant 0$ можно разбить на три зоны:

1) $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha}, (0 < \alpha < \frac{1}{2}$

В данном промежутке

$$\sqrt{\varepsilon}\ k\ \tau \leqslant k\ \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Отсюда следует, что

$$exp(-\sqrt{\varepsilon}\ k\ \tau) = 1 - \sqrt{\varepsilon}\ k\ \tau \sim 1$$

А знаменатель равен

$$\sqrt{\varepsilon}\ k+\ \Pi^0(1-\ exp(-\sqrt{\varepsilon}\ k\ \tau))\sim\sqrt{\varepsilon}\ k(1+\Pi^0_\tau)$$

В таком случае

$$\Pi^0(\tau)\sim\frac{1}{\Pi^0_\tau+1}$$

Что и является решением задачи (8.8),(8.10).

2) Переходная зона – $\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

3) $\tau\geqslant\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\to\sqrt{\varepsilon}\ k+\ \Pi^0\ (1-\ exp(-\sqrt{\varepsilon}\ k\ \tau))\geqslant c>0$

Значит убывание происходит за счет числителя. Отсюда следует

$$\Pi^0(\tau)=O(\sqrt{\varepsilon}\ exp(-k\ \zeta))$$

То есть в третьей зоне пограничная функция Π^0 убывает экспоненциально по отношению к переменной ζ. А во второй зоне происходит постепенный переход от степенного убывания в 1 зоне к экспоненциальному в 3 зоне.

В данном случае «эталонной» функцией в отличие от тихоновского будет

$$\Pi_\varkappa(\tau)=\frac{\sqrt{\varepsilon}\ exp(-\sqrt{\varepsilon}\ \varkappa\ \tau)}{1+\sqrt{\varepsilon}\ exp(-\sqrt{\varepsilon}\ \varkappa\ \tau)},\tau\geqslant 0,0<\varkappa\leqslant k \tag{8.14}$$

При сравнении выражения $\Pi_\varkappa(\tau)$ и $\Pi_0(\tau)$, если заменить k и Π_0 единицами, то получится функция Π_k. Оценка формулы (8.13) будет

$$0<\Pi_0(\tau)\leqslant c\ \Pi_k(\tau),\tau\geqslant 0$$

Для следующих членов погранслойного ряда $i=1,2\dots$ уравнение будет иметь вид:

$$\frac{d\ \Pi_i}{d\ \tau}=-(2\ \Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\ k)\ \Pi_i+\pi_i(\tau,\varepsilon),\tau\geqslant 0 \tag{8.15}$$

Из формулы (8.9) извлекается начальное условие для Π_i:

$$\Pi_i(0) = -\bar{u}_i(0) \tag{8.16}$$

$\text{п}_i(\tau,\varepsilon)$ в уравнении (8.15) формируется нестандартно. Формируются эти функции так, что они имеют следующую оценку:

$$|\text{п}_i(\tau,\varepsilon) \leqslant c[\Pi^2_{\varkappa}(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\ \Pi^2_{\varkappa}(\tau)] \tag{8.17}$$

$\text{п}_i(\tau,\varepsilon)$ выражается через $\Pi_j(\tau), j < i$.

Решение задачи(8.15), (8.16):

$$\Pi_i(\tau) = -\Phi(\tau)\ \Phi^{-1}(0)\ \bar{u}_i(0) + \Phi(\tau)\int_0^\tau\ \Phi^{-1}(s)\ text_i(s,\varepsilon)ds, \tag{8.18}$$

$$\Phi(\tau) = \frac{d\ \Pi_0}{d\ \tau}(\tau) = -(\Pi_0^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\ k\ \Pi_0(\tau))$$

Это и есть решение соответствующего однородного уравнения, так как

$$\frac{d\ \Pi_0}{d\ \tau} = -(\Pi_0^2 + \sqrt{\varepsilon}\ k\ \Pi_0$$

$$\frac{d}{d\ \tau}(\frac{d\ \Pi_0}{d\ \tau}) = -(2\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\ k)\frac{d\ \Pi_0}{d\ \tau},$$

$$\frac{d\ \Pi_0}{d\ \tau} = \Phi$$

Так что $\Phi(\tau)$ – решение соответствующего однородного уравнения. При этом

$$\Phi(0) = -((\Pi^0)^2 + \sqrt{\varepsilon}\ k\ \Pi_0) < 0$$

Из (8.18) в силу оценки функции (8.17) следует оценка

$$|\Pi_i(\tau) \leqslant c\ \Pi_{\varkappa}(\tau), \tau \geqslant 0,\ 0 < \varkappa < k$$

Таким образом, нестандартно формируется уравнение для Π функций, но в результате все они имеют вышеуказанную оценку. Тем самым функция (8.14) является «эталонной» оценочной функцией для всех пограничных функций.

Обоснования асимптотики

Был построен ряд (8.3), который был суммой рядов (8.4) и (8.5). Частичная сумма построенного ряда представляет собой

$$U_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=o}^{n}\varepsilon^{\frac{i}{2}}(\overline{u}_i(x)+\Pi_i(\tfrac{x}{\varepsilon}))$$

Частичная сумма является формальной асимптотикой. Так как определены коэффициенты данной суммы, подставленные в уравнение и приравненные к степени от 0 до $\frac{n}{2}$. Она удовлетворяет условию

$$\begin{cases} L_\varepsilon U_n := \varepsilon\dfrac{d\ U_n}{d\ x}-f(x,U)n,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}) \\ \\ U_n(o,\varepsilon)=u^0 \end{cases}$$

Докажем, что существует решение задачи, которая отличается от частичной суммы на величину $O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})$.

Теорема 8.1. *Если выполнены условия 1 - 4, то для достаточно малых* ε *задача* (8.1), (8.2) *имеет решение* $u(x,\varepsilon)$. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$u(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ (n=0,1,2,\dots) \tag{8.19}$$

Доказательство.

Нижнее решение:

$$\underline{U}(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)-M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

Верхнее решение:

$$\overline{U}(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

■

Лекция 9. Сингулярно возмущенные краевые задачи

Случай с одним двукратным корнем

Начальная задача Коши (9.1), (9.2):

$$\varepsilon\frac{d\ u}{d\ x}=f(x,u,\varepsilon),\ 0\leqslant x\leqslant a \tag{9.1}$$

$$u(0,\varepsilon)=u^0 \tag{9.2}$$

Специфика задачи заключается в том, что если $\varepsilon=0$ в уравнение (9.1), то останется одно слагаемое $-h(x)(-f(x))^2=0$. Относительно u вырожденное уравнение имеет корень $u=\phi(x)$ кратности 2.

Формальная асимптотика задачи (9.1), (9.2) в виде

$$u(x,\varepsilon)=\overline{u}(x,\varepsilon)+\ \Pi(\tau,\varepsilon),\ \tau=\frac{x}{\varepsilon} \tag{9.3}$$

В отличие от тихоновского случая и алгоритма Васильевой ряды будут не по целым степеням ε, а по степеням $\sqrt{\varepsilon}$.

Будет рассмотрен случай, когда

Усл. 1. $f(x,u,\varepsilon)=-h(x)(-f(x))^2+\varepsilon\ f_1(x,u,\varepsilon),h(x)>0$

Усл. 4. $u^0-\phi(0)>0\ \to\Pi_0(\tau)>0,\ \tau\geqslant0$

$$|\Pi_0(\tau)|\leqslant c\ \Pi_{\varkappa}(\tau)$$

Усл. 3. $\to\overline{u}_1(x)>0$

Частичная сумма построенного ряда представляет собой

$$U_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=o}^{n}\ \varepsilon^{\frac{i}{2}}(\overline{u}_i(x)+\Pi_i(\tfrac{x}{\varepsilon}))$$

Теорема 9.1. *Если выполнены условия 1 - 4, то для достаточно малых ε в задаче* (9.1), (9.2) *существует решение $u(x,\varepsilon)$. Справедливо асимптотическое равенство*

$$u(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ (n=0,1,2,\dots) \tag{9.4}$$

Доказательство будет производиться с помощью метода дифференциальных неравенств.

Доказательство.

Нижнее решение:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}},\ M > 0,\ n \geqslant 2 \tag{9.5}$$

Необходимо выбрать такое M, что будут выполнены два условия:

1) $L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon\ \dfrac{d\ \underline{U}}{d\ x} - f(x,\underline{U},\varepsilon) \leqslant 0, 0 < x \leqslant a$

2) $\underline{U}(0,\varepsilon) \leqslant u^0$

Далее проводится проверка условий. Условие 1 по формуле (9.5):

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} = \varepsilon\ \frac{d\ U_n}{d\ x} - f(x,U_n - M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}},\varepsilon) = (\varepsilon\ \frac{d\ U_n}{d\ x} - f(x,U_N,\varepsilon)) - (f(x,U_n - M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}},\varepsilon) - \\ - f(x,U_N,\varepsilon)) = L_\varepsilon U_n - (f_u(x,U_n,\varepsilon)(-M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}}) + \frac{1}{2} f^*_{uu} M^2\ \varepsilon^n) \end{aligned} \tag{9.6}$$

где $(\varepsilon\ \dfrac{d\ U_n}{d\ x} - f(x,U_N,\varepsilon)) = L_\varepsilon U_n$, «*» означает, что производная берется в промежуточной точке.

$$L_\varepsilon U_n = O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})$$

При этом $O(\varepsilon\dfrac{n+1}{2})$ никак не зависит от $M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}}$. Это означает, что

$$|L_\varepsilon U_n| \leqslant c_1\ \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}, 0 \leqslant x \leqslant a$$

Таким образом, произведена оценка первого слагаемого. Далее оценка производной f_u:

$$f_u(x,U_n,\varepsilon) = -2h(x)(U_n - \phi(x)) + \varepsilon\ f_{1u}(x,U_n,\varepsilon) = -h(x)(\sqrt{\varepsilon}\ \overline{u}_1(x) +\ \Pi_0(\tau) +$$

$$+\ \sqrt{\varepsilon}\ \Pi_1(\tau)) + O(\varepsilon),$$

где $\overline{u}_1(x) > 0$ и $\Pi_0(\tau) > 0$.

$$f_u(x, U_n, \varepsilon) \leqslant -c_0\ \sqrt{\varepsilon},\ 0 \leqslant x \leqslant a$$
$$|f^*_{uu}| \leqslant c_2$$

Из (9.6) следует

$$L_\varepsilon\ \underline{U} \leqslant c_1\ \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} - c_0\ M\ \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2} c_2\ M^2\ \varepsilon^n = M\ \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{c_1}{M} - \frac{c_0}{2} - \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2} c_2\ M\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\right) < 0,$$

где $\varepsilon^{\frac{n-1}{2}} > 0$.

То есть необходимо выбрать такое большое M, чтобы $\frac{c_1}{M} < \frac{c_0}{2}$. Тогда $\frac{c_1}{M} + \frac{c_0}{2} < 0$. При этом выбрать ε таким малым, чтобы $\frac{1}{2} c_2\ M\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} < \frac{c_0}{2}$. Тогда $\frac{c_0}{2} + \frac{1}{2} c_2\ M\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} < 0$.

Было выбрано такое нижнее решение (9.5), что

$$L_\varepsilon\ \underline{U} < 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a$$

Проверка условия 2 для нижнего решения:

$$U_n(0, \varepsilon) = u^0$$
$$\Pi_0(0) = u^0 - \phi(0) = u^0 - \overline{u}_0(0)$$
$$\Pi_i(0) = -\overline{u}_i(0),\ i \geqslant 1$$
$$\underline{U}(o, \varepsilon) = U_n(0, \varepsilon) - M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}} = u^0 - M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}} < u^0$$

Таким образом, нижнее решение, определенное формулой (9.5), при достаточно большом M и при достаточно малых ε действительно является решением.

Верхнее решение:

$$\overline{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + M\ \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

При достаточно большом M и при достаточно малых ε действительно является верхним решением. Проверка сходна с нижним решением, однако неравенства будут > 0.

Из существования нижнего и верхнего решений следует, что

$$\exists\ u(x,\varepsilon) : \underline{U}(x,\varepsilon) \leqslant u(x,\varepsilon) \leqslant \overline{U}(x,\varepsilon)$$

При этом нижнее и верхнее решения отличаются от частичной суммы на величину $\varepsilon^{\frac{n}{2}}$. Тогда, учитывая вид нижнего и верхнего решений, получается асимптотическое равенство

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}),\ n \geqslant 2 \tag{9.7}$$

Равенство (9.7) для $n+1$:

$$u(x,\varepsilon) = U_{n+1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})$$
$$\overline{U}_{n+1}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}(\overline{u}_{n+2}(x) + \ \Pi_{n+2}(\tau)),$$

где $\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}(\overline{u}_{n+2}(x) + \ \Pi_{n+2}(\tau)) = O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})$.

Тогда из двух неравенств получится (9.7), но для $n \geqslant 2$

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}),\ 0 \leqslant x \leqslant a$$

Равенство для $n = 2$

$$u(x,\varepsilon) = U_2(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$$
$$U_2(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon)$$
$$u(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon)$$

Что является искомым равенством (9.4) для $n = 1$.

Равенство $n = 0$

$$U_1(x,\varepsilon) = U_0(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$
$$u(x,\varepsilon) = U_0(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

■

Сингулярно возмущенные краевые задачи

Метод дифференциальных неравенств в двухточечных краевых задачах

Сначала будет рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка без малого параметра для понимания, при каких условиях краевая задача разрешима.

Теорема существования решения краевой задачи

$$\frac{d^2\,u}{d\,x^2} = f(x,u),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{9.8}$$

$$u(0) = u^0,\ u(1) = u^1 \tag{9.9}$$

На одном конце в точке 0 и на другом в точке 1 задаются краевые или граничные условия. Может быть задана либо сама функция – это условие Дирихле, либо ее производная – это условие Неймана. На данный момент будет рассмотрено условие Дирихле.

Существует метод «стрельбы» для решения задачи (9.8), (9.9). Для этого уравнение (9.8) рассматривается с начальными условиями:

$$u(0) = u^0,\ \frac{d\,u}{d\,x}(0) = k \tag{9.10}$$

Необходимо подобрать такое k (произвольное число), чтобы решение задачи (9.8), (9.10) удовлетворяло условию (9.9) в точке 1.

Пусть решение задачи (9.8), (9.10) при любом k из некоторого интервала существует и зависит непрерывно от параметра k. При этом

$$\exists\ k_1 : u(1,k_1) < u_1$$

$$\exists\ k_2 : u(1,k_2) > u_1$$

Отсюда следует, что

$$\exists\ k \in (k_1,k_2) : u(1,k) = u^1$$

$u(x,k)$ является решением задачи (9.8), (9.9).

Теорема 9.2. *Пусть $f(x,u)$ – непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по переменной u в полосе*

$$P = \{(x,u) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ u \in R\}$$

Тогда для любых u^0 и u^1 существует решение задачи (9.8), (9.9).

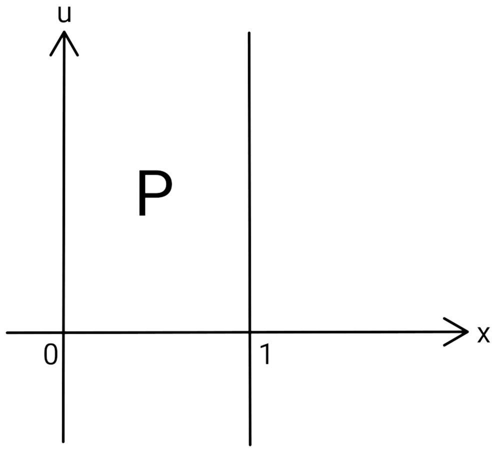

Рис. 9.1. Функция $f(x,u)$ с полосой P

Доказательство.

При условиях теоремы задача (9.8), (9.10) имеет решение $(u(x,k))$ для любого k и непрерывно зависит от параметра k. Необходимо подставить решение в уравнение и проинтегрировать от 0 до x:

$$\int_0^x \frac{d^2\,u}{d\,x^2}(x,k)dx = \int_0^x f(x,u(x,k))dx$$

$$\frac{d\,u}{d\,x}(x,k) - \frac{d\,u}{d\,x}(0,k) = \int_0^x f(t,u(t,k)dt$$

где $\dfrac{d\,u}{d\,x}(0,k) = k$, t - переменная интегрирования.

Теперь данное тождество интегрируется от 0 до 1:

$$u(1,k) - u^0 - k = \int_0^1 dx \int_0^x f(t,u(t,k)dt$$

По условию

$$|f(x,u)| \leqslant M \text{ в } P$$

$$-\frac{1}{2}M \leqslant \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f dt \leqslant \frac{1}{2}M$$

Тогда из равенства и неравенства получится

$$u^0 + k - \frac{1}{2}M \leqslant u(1,k) \leqslant u^0 + k + \frac{1}{2}M$$

$$k = k_1 : u^0 + k_1 + \frac{1}{2}M < u^1 \longrightarrow u(1,k_1) < u^1$$

$$k = k_2 : u^0 + k_2 - \frac{1}{2}M > u^1 \longrightarrow u(1,k_2) > u^1$$

Из двух условий k следует, что

$$k \in (k_1,k_2) : u(1,k) = u^1$$

Тогда $u(x,k)$ – решение задачи (9.8), (9.9). ■

Главный недостаток данной теоремы – это класс функций, который удовлетворяет этому условию, очень узок.

Метод дифференциальных неравенств в краевых задачах

Определение 9.1. $\underline{U}(x)$ *и* $\overline{U}(x)$ *называются нижним и верхним решением задачи* (9.8), (9.9), *если они удовлетворяют условиям:*

1) Операторное неравенство

$$L\underline{U} = \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - f(x,\underline{U}) \geqslant 0 \geqslant L\overline{U},\ 0 < x < 1 \tag{9.11}$$

2) Неравенство на граничные значения

$$\underline{U}(0) \leqslant u^0 \leqslant \overline{U}(0),\ \underline{U}(1) \leqslant u^1 \leqslant \overline{U}(1) \tag{9.12}$$

Нижнее и верхнее решения называются упорядоченными, если

$$\underline{U} \leqslant \overline{U}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Пример 9.1. *Рассматривается уравнение с краевыми условиями*

$$u'' + \Pi^2 u = 0,\ o \leqslant x \leqslant 1$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

Задача вида (9.8), (9.9) *на спектре,* $sinx$ *с произвольным коэффициентом – ее решение.*

$$\underline{U}(x) = 2sinx,\ \overline{U}(x) = sinx$$

$$\underline{U}(x) \geqslant \overline{U}(x)$$

Тогда все вышеуказанные неравенства по определению становятся равенствами. Так что для краевых задач нижние и верхние решения могут быть неупорядоченные.

Теорема 9.3 (Теорема Наума)**.** *Пусть существуют упорядоченные* $\underline{U}(x)$ *и* $\overline{U}(x)$ *решения, где* $\underline{U} \leqslant \overline{U}(x)$*. И пусть* $f(x,u)$ *– непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной* u *в области*

$$\mathcal{D} = \{(x,u) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \underline{U}(x) \leqslant u \leqslant \overline{U}(x)\}$$

Тогда задача (9.8), (9.9) *имеет решение, удовлетворяющее неравенством*

$$\underline{U}(x) \leqslant u \leqslant \overline{U}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{9.13}$$

Доказательство.

Необходимо продолжить функцию $f(x,u)$ на всю полосу P для этого вводится функция

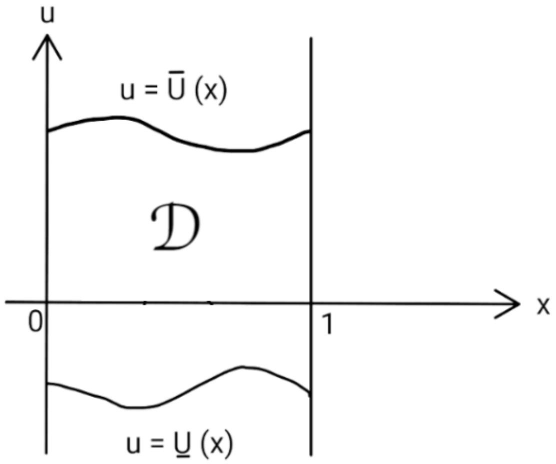

Рис. 9.2. Функция $f(x,u)$ с областью $\mathcal{D}$

$$g(x,u) = \begin{cases} f(x,\underline{U}(x)) + \dfrac{u-\underline{U}(x)}{1+u^2},\ (x,u) \in \mathcal{D}^{(-)} \\ \\ f(x,u),\ (x,u) \in \mathcal{D} \\ \\ f(x,\overline{U}(x)) + \dfrac{u-\overline{U}(x)}{1+u^2},\ (x,u) \in \mathcal{D}^{(+)} \end{cases}$$

$g(x,u)$ – непрерывна во всей полосе P и удовлетворяет условию Липшица, что необходимо проверить. По условию теоремы в области $\mathcal{D} : N_1$, а в областях $\mathcal{D}^{(-)}$ и $\mathcal{D}^{(+)}$ функция $g(x,u)$ имеет ограниченную производную по u. Например, в $\mathcal{D}^{(-)}$:

$$\mathcal{D}^{(-)} : \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1+u^2-2u(u-\underline{U}(x))}{(1+u^2)^2}$$

$$|\frac{\partial g}{\partial u}| \leqslant N_2 \text{ в } \mathcal{D}^{(-)},\ \mathcal{D}^{(+)}$$

Таким образом, в P $g(x,u)$ удовлетворяет условию Липшицева с $N = max(N_1,N_2)$, а значит теорема 3 доказана.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = g(x,u),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{9.14}$$

Краевые условия(9.2)

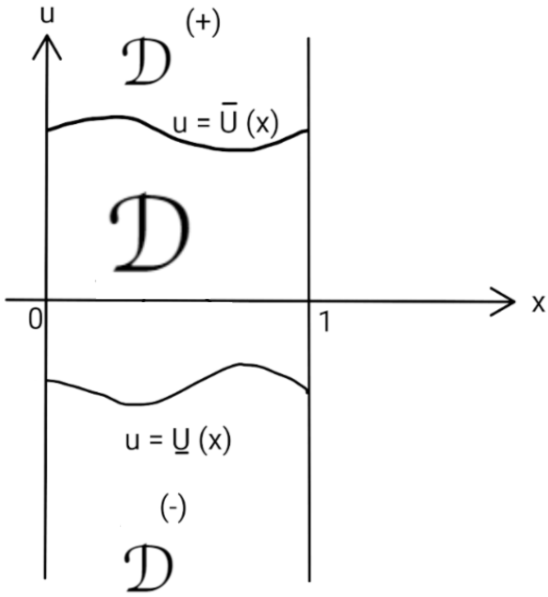

Рис. 9.3. Функция $f(x,u)$ с областью $\mathcal{D}$ и продолженной полосой P

По теореме 1 существует решение $u(x)$ задачи (9.8), (9.2). Теперь требуется доказать, что данное решение лежит на промежутке:

$$\underline{U}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{U}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Пусть $x_* \in (0;1) : \underline{U}(x_*) > u(x_*)$. Рассматривается функция $\underline{U}(x) - u(x)$. Тогда в точке $x_0 \in (0;1)$ функция $\underline{U}(x) - u(x)$ имеет положительный максимум. То есть выполнены два неравенства:

$$\underline{U}(x_0) - u(x_0) > 0$$
$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2}(x_0) - \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) \leqslant 0$$

■

Лекция 10. Сингулярно возмущенные краевые задачи (продолжение)

Метод дифференциальных неравенств в краевых задачах

Продолжение рассмотрения вопроса о существовании решения краевой задачи

$$\frac{d^2\ u}{d\ x^2} = f(x,u),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{10.1}$$

$$u(0) = u^0,\ u(1) = u^1 \tag{10.2}$$

Из предыдущей лекции следует теорема Наумана, где необходимо сейчас неравенство

$$\underline{U}(x) \leqslant u \leqslant \overline{U}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{10.3}$$

Далее была введена функция

$$g(x,u) = f(x,\underline{U}(x)) + \frac{u-\underline{U}(x)}{1+u^2}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = g(x,u),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{10.4}$$

Будет рассматриваться функция, которая имеет точку $x_0 \in (0;1)$, то есть имеет положительный максимум:

$$\underline{U}(x) - u(x)$$

Тогда в точке x_0 выполнено два условия:

$$\underline{U}(x_0) - u(x_0) > 0$$

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2}(x_0) - \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) \leqslant 0 \tag{10.5}$$

С неравенством (10.5) получится противоречие. В точке x_0 имеется решение задачи (10.1), (10.2)

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2}(x_0) - f(x_0,\underline{U}(x_0)) \geqslant 0 \tag{10.6}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_0) = g(x_0,u(x_0))$$

Отсюда следует

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_0) - f(x_0, \underline{U}(x_0)) = \frac{u(x_0) - \underline{U}(x_0)}{1 + u^2(x_0)} < 0 \tag{10.7}$$

Чтобы получить оценку для (10.5) необходимо из неравенства (10.6) вычесть (10.7):

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2}(x_0) - \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) > 0$$

Таким образом, данное неравенство противоречит (10.5). Доказано, что решение задачи (10.4), (10.2) удовлетворяет неравенству (10.3), а значит является решением задачи (10.1), (10.2).

Метод дифференциальных неравенств позволяет установить существование решения краевой задачи без требования, чтобы функция f во всей полосе была ограничена.

Пусть для системы (10.1) вместо условия (10.2) заданы краевые условия Неймана

$$\frac{du}{dx}(0) = v^0, \frac{du}{dx}(1) = 1 \tag{10.8}$$

Тогда нижнее и верхнее решение для задачи (10.1), (10.8) определяются следующим образом

$$\underline{U}(x) \text{ и } \overline{U}(x) \in C^2(0,1) \bigcap C^1[0,1]$$

$$L\,\underline{U} := \frac{d^2\,\underline{U}}{dx^2} - f(x, \underline{U}(x)) \geqslant 0 \geqslant L\,\overline{U},\ 0 < x < 1$$

Условия, связанные с граничными значениями

$$\frac{d\,\underline{U}}{dx}(0) \geqslant v^0 \geqslant \frac{d\,\overline{U}}{dx}(0),\ \frac{d\,\underline{U}}{dx}(1) \leqslant v^1 \leqslant \frac{d\,\overline{U}}{dx}(1)$$

В данном случае теорема будет аналогичная и ее доказательство тоже.

Сингулярно возмущенные краевые задачи с граничными условиями Неймана

Рассматривается следующая краевая задача

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{d x^2} = f(x,u,\varepsilon), \ 0 < x < 1 \tag{10.9}$$

$$\frac{d u}{d x}(0,\varepsilon) = v^0, \ \frac{d u}{d x}(1,\varepsilon) = v^1 \tag{10.10}$$

При условиях:

1. $f(x,u,\varepsilon)$ – достаточно гладкая функция
2. Вырожденное уравнение $f(x,u,0) = 0$, где корень $u = \phi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$
3. Частная производная $\overline{f}_u(x) := \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,\phi(x),0) > 0$, $x \in [0,1]$

При использовании метода дифференциальных неравенств необходимо доказать, что при условиях 1-3 существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (10.9), (10.10). Для решения справедливо асимптотическое равенство

$$u(x,\varepsilon) = \phi(x) + O(\varepsilon), \ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \phi(x), \ x \in [0,1]$$

Особенность в том, что при граничных условиях Неймана в нулевом приближении нет пограничного слоя.

Однако вырожденное уравнение по условию 2 может иметь несколько корней, для которых производные $f_u > 0$.

По графику видно, что имеются два корня, удовлетворяющие условию 3. Тогда получается, что для $\phi_i(x)$, где $i = 1;3$ существует решение $u(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_i(x,\varepsilon) = \phi_i(x), \ x \in [0,1]$$

Это и является важным отличием краевых задач от начальной задачи.

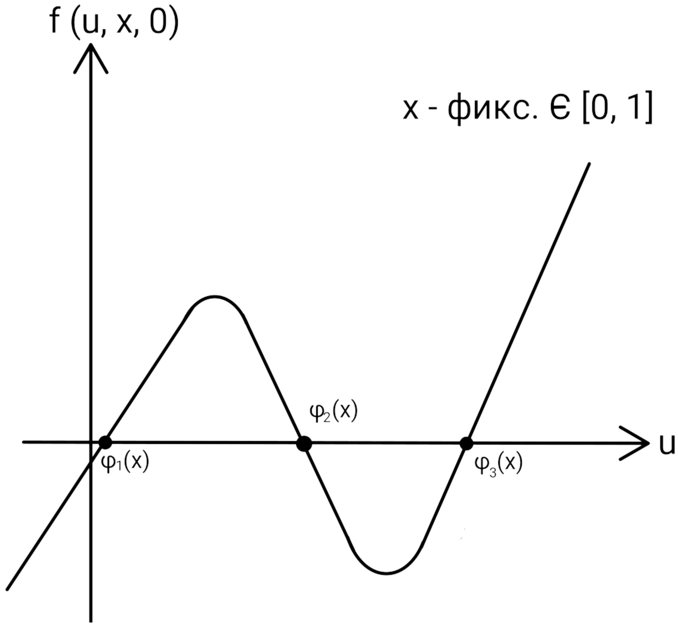

Рис. 10.1. График f_u

Будет построено полное асимптотическое разложение решения задачи (10.9), (10.10) по параметру ε, которое имеет вид

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}(x,\varepsilon) + \Pi\ (\xi,\varepsilon) + \widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon) \tag{10.11}$$

$$\overline{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\ \overline{u}_i(x)$$

$$\Pi\ (\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\ \Pi_i\ (\xi),\ \xi = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\ \widetilde{\Pi}_i(\widetilde{\xi}),\ \widetilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon}$$

Далее рассматривается алгоритм определения членов вышеуказанных рядов. Необходимо подставить ряд (10.11) в уравнение (10.9), где будет заменено $f(x,\overline{u}+\Pi+\widetilde{\Pi},\varepsilon)$ на $\overline{f}+\ \Pi f+\ \widetilde{\Pi}f$.

$$\overline{f} = f(\overline{u}(x,\ \varepsilon),\ \varepsilon),\ \Pi\ f = f(\varepsilon\xi,\ \overline{u}(\varepsilon\xi,\ \varepsilon) + \ \Pi(\xi,\ \varepsilon),\ \varepsilon) - f(\varepsilon\xi,\ \overline{u}(\varepsilon\xi,\ \varepsilon),\ \varepsilon)$$

$$\widetilde{\Pi}\ f = f(1-\varepsilon\widetilde{\xi},\ \overline{u}(1-\varepsilon\widetilde{\xi},\ \varepsilon) + \ \widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\ \varepsilon),\ \varepsilon) - f(1-\varepsilon\widetilde{\xi},\ \overline{u}(1-\varepsilon\widetilde{\xi},\ \varepsilon),\ \varepsilon)$$

В результате получается равенство

$$\varepsilon^2\ \frac{d^2\overline{u}}{dx^2} + \frac{d^2\ \Pi}{d\ \xi^2} + \frac{d^2\ \widetilde{\Pi}}{d\ \widetilde{\xi}^2} = \overline{f} + \ \Pi f + \ \widetilde{\Pi}f$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \ \frac{d^2\overline{u}}{dx^2} = \overline{f} \\ &\frac{d^2\ \Pi}{d\ \xi^2} = \Pi f \\ &\frac{d^2\ \widetilde{\Pi}}{d\ \widetilde{\xi}^2} = \widetilde{\Pi} f \end{aligned} \qquad (10.12)$$

Подставляя в равенство (10.12) ряды $\overline{u}$, Π, $\widetilde{\Pi}$ и раскладывая правые части в ряды по степеням ε, получится

$$\overline{f} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{f}_i,\ \overline{f}_0 = f(x, \overline{u}_o(x), 0),\ \overline{f}_1 = \overline{f}_u(x, \overline{u}_1) + \overline{f}_\varepsilon(x), \ldots \qquad (10.13)$$

$$\begin{aligned} &\Pi_0 f = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i f,\ \Pi_0 f = f(0, \overline{u}_o(0) + \Pi_0(\xi), 0) - f(0, \overline{u}_o(0), 0), \ldots \\ &\widetilde{\Pi} f = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widetilde{\Pi}_i f,\ \widetilde{\Pi}_0 f = f(1, \overline{u}_o(1) + \widetilde{\Pi}_0 f(\widetilde{\xi}), 0) - f(1, \overline{u}_o(1), 0), \ldots \end{aligned} \qquad (10.14)$$

Нужно учитывать, что для членов регулярной части асимптотики краевых условий не будет, а будут конечные уравнения. А для П функции будут дифференциальные уравнения, и, чтобы получить краевые условия, необходимо подставить ряд (10.11) в граничные условия (10.10)

$$\begin{aligned} &\frac{d\ \overline{u}}{dx}(0, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\ \frac{d\ \Pi}{d\ \xi}(0,\ \varepsilon) - \cancel{\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{d\ \widetilde{\Pi}}{d\ \widetilde{\xi}}(\frac{1}{\varepsilon},\ \varepsilon)} = v^0, \\ &\frac{d\ \overline{u}}{dx}(1, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\ \frac{d\ \Pi}{d\ \xi}(\frac{1}{\varepsilon},\ \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\ \widetilde{\Pi}}{d\ \widetilde{\xi}}(0, \varepsilon) = v^1 \end{aligned} \qquad (10.15)$$

Слагаемое зачеркнуто, так как это будет порядка $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, что меньше, чем любая степень ε.

Уравнения для П функций будут второго порядка. Однако одного граничного условия мало. Так как регулярная часть не удовлетворяет заданному граничному условию, то П функция необходима для компенсации. Далее они должны стремиться к нулю. Поэтому традиционным условием для пограничных функций является

$$\Pi(\infty, \varepsilon) = 0,\ \widetilde{\Pi}(\infty, \varepsilon) = 0 \qquad (10.16)$$

Последовательное определение всех членов рядов. Из первого равенства уравнения (10.12) получается

$$\overline{f}_0 := f(x,\overline{u}_0(x),0) = 0 \longrightarrow \overline{u}_0(x) = \phi(x)$$

$$\overline{f}_1 := \overline{f}_u(x)\overline{u}_1 + \overline{f}_\varepsilon(x) = 0 \longrightarrow \overline{u}_1(x) = -\overline{f}_u^{-1}(x)\ \overline{f}_\varepsilon(x)$$

$$\overline{f}_2 := \overline{f}_u(x)\overline{u}_2 + \dots = \frac{d^2\ \overline{u}_0}{dx^2} \longrightarrow \overline{u}_2(x) = \dots$$

Таким образом, регулярный ряд построен. Далее из второго равенства уравнения (10.12)

$$\frac{d^2\ \Pi_0}{d\ \xi^2} = \Pi_0 = f(0,\overline{u}_0(0) +\ \Pi_0, 0) - f(0,\overline{u}_0(0),0), \xi \geqslant 0$$

Краевые условия из равенств (10.15) и (10.16):

$$\frac{d\ \Pi_0}{d\ \xi}(0) = 0,\ \Pi_0(\infty) = 0$$

Таким образом, решение данной задачи

$$\Pi_0(\xi) \equiv 0$$

Для Π_1

$$f$$

Необходимо учесть, что главный член вырожденной задачи

$$\frac{d\ \overline{u}_0}{d\ x}(0) = \phi'(0) \neq v^0$$

То есть Π функция должна быть такого порядка, чтобы в сумме с вышеуказанным слагаемым было получено v^0.

$$\frac{d}{d\ x}\ \Pi\ (\frac{x}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\ \Pi}{d\ \xi}$$

Значит Π должен быть порядка ε.

Далее, продолжая, для Π_1:

$$\frac{d^2\ \Pi_1}{d\ \xi^2} =\ \Pi_1\ f := \overline{f}_u(0) \cdot\ \Pi_1,\ \xi \geqslant 0$$

$$\frac{d\ \Pi_1}{d\ \xi} = v^0 - \frac{d\ \overline{u}_0}{d\ x} =: \gamma_0,\ \Pi_1(\infty) = 0$$

Пусть $\overline{f}_u(0) = k^2$, тогда

$$k = \sqrt{\overline{f}_u(0)} > 0$$

Следовательно, получается главный член погранслойной части

$$\Pi_1(\xi) = -\gamma_0\ k^{-1}\ exp(-k\ \xi)$$

Таким образом, Π_1 имеет следующую экспоненциальную оценку

$$|\Pi_1(\xi)| \leqslant c\ exp(-\varkappa\ \xi)$$

Уравнение для $i \geqslant 2$:

$$\frac{d^1\ \Pi_i}{d}\ \xi^2 = \Pi_i f := \overline{f}_u(0)\ \Pi_i +\ \pi_i(\xi),\ \xi \geqslant 0,$$

где $\pi_i(\xi)$ выражается через $\Pi_j(\xi)$ с $j < i$.

$\pi_i(\xi)$ имеет оценку, если такую оценку имеют Π_j с $j < i$:

$$|\pi_i(\xi)| \leqslant c\ exp(-\varkappa\ \xi)$$

Краевые условия из равенства (10.15)

$$\frac{d\ \Pi_i}{d\ \xi} = -\frac{d\ \overline{u}_{i-1}}{d\ x}(0),\ \Pi_i(\infty) = 0$$

Таким образом, погранслойный ряд Π построен. Тогда оценка:

$$|\Pi_1(\xi)| \leqslant c\ exp(-\varkappa\ \xi)$$

$$|\widetilde{\Pi}_1(\xi)| \leqslant c\ exp(-\varkappa\ \xi)$$

Построена формальная асимптотика.

Обоснование асимптотики.

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\ \varepsilon^i\ (\overline{u}_i(x) +\ \Pi_i(\frac{x}{\varepsilon}) +\ \widetilde{\Pi}_i(\frac{1-x}{\varepsilon})$$

Теорема 10.1. *При условиях 1-3 для достаточно малых ε задача* (10.9), (10.10) *имеет решение $u(x,\varepsilon)$, для которого справедливо асимптотическое равенство*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}),\ x \in [0;1]$$

Доказательство.

Доказательство будет с помощью метода дифференциальных неравенств. В качестве нижнего и верхнего решения будут следующие функции

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\ z(x,\varepsilon)$$

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\ z(x,\varepsilon)$$

$$z(x,\varepsilon) = M + e^{-k\frac{x}{\varepsilon}} + e^{k\frac{x-1}{\varepsilon}},$$

где k и M – положительные числа.

Условия нижнего решения:

$$L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon^2\ \frac{d^2\ \underline{U}}{d\ x^2} - f(x,\underline{U},\varepsilon) \geqslant 0 \tag{10.17}$$

$$\frac{d\ \underline{U}}{d\ x}(0,\varepsilon) \geqslant v^0 \tag{10.18}$$

$$\frac{d\ \underline{U}}{d\ x}(1,\varepsilon) \leqslant v^1$$

Проверка условия (10.18) нижнего решения

$$\frac{d\ \underline{U}}{d\ x}(0,\varepsilon) = \frac{d\ \underline{U}_n}{d\ x}(0,\varepsilon) +\ \varepsilon^n\ k + O(e^{-\frac{k}{\varepsilon}}) = v^0 +\ \varepsilon^n \frac{d\ \underline{U}_n}{d\ x}(0) +\ \varepsilon^n\ k + O(e^{-\frac{k}{\varepsilon}}) > v^0$$

Такое неравенство для достаточно большого k. Тогда условие (10.18) выполнено.

Проверка условия (10.17).

$$L_\varepsilon \underline{U} = [\varepsilon^2\ \frac{d^2\ \underline{U}_n}{d\ x^2} - f(x,U_n,\ \varepsilon)] - \varepsilon^{n+1}\ k^2(exp(-\frac{k\ x}{\varepsilon}) + exp(\frac{k(x-1)}{\varepsilon}))-$$
$$-\{f(x,U_n -\ \varepsilon^{n+1})\ z,\ \varepsilon) - f(x,U_n,\ \varepsilon)\},$$

где $U_n -\ \varepsilon^{n+1})\ z = \phi(x) + O(\varepsilon)$

$$[\varepsilon^2\ \frac{d^2\ \underline{U}_n}{d\ x^2} - f(x,U_n,\ \varepsilon)] = L_\varepsilon \underline{U}_n = O(\varepsilon^{n+1}) + O(k^2\ \varepsilon^{n+1}) + f_u^*(M +\ exp(-\frac{k\ x}{\varepsilon})+$$

$$+exp(\frac{k(x-1)}{\varepsilon}))\cdot\varepsilon^{n+1} \geqslant O(\varepsilon^{n+1})+O(k^2\ \varepsilon^{n+1})+k_0\ M\ \varepsilon^{n+1}>0$$

$$f_u^* = f_u(x,\phi(x),0)+O(\varepsilon)=\overline{f}_u(x)\geqslant k_0>0$$

Неравенство больше нуля для достаточно большого M. Таким образом, неравенство (10.15) выполнено. Тогда $\underline{U}(x,\varepsilon)$ – нижнее решение.

$\overline{U}(x,\varepsilon)$ – верхнее решение. По теореме существует $u(x,\varepsilon)$:

$$\underline{U}(x,\varepsilon)(x,\varepsilon)\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon)$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon)=U_n-O(\varepsilon^{n+1}),\ \overline{U}(x,\varepsilon)=U_n+O(\varepsilon^{n+1})$$

$$u(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1})$$

Таким образом, теорема доказана. ■

Лекция 11. Краевая задача с граничными условиями Дирихле

Построение асимптотики сингулярно возмущённой краевой задачи с граничными условиями Дирихле

В данном разделе будет рассматриваться алгоритм построения асимптотики **сингулярно возмущённой краевой задачи** ***с граничными условиями Дирихле***. В предыдущем разделе уже рассматривалось такая задача, но границы задавались производными (условие Неймана), в этом случае будут описываться сами функции.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x,u,\varepsilon), \quad \text{где } 0 < x < 1 & (11.1) \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \quad u(1,\varepsilon) = u^1 & (11.2) \end{cases}$$

Здесь (11.2) — *граничные условия* (в которых задаётся сама функция u). Рассматривается обычное дифференциальное уравнение (11.1) 2 порядка с граничными условиями Дирихле.

В этом разделе мы хотим построить асимптотику погранслойного решения и обосновать её (то есть доказать, что существует решение с такой асимптотикой). Задача с условиями Дирихле существенно сложнее, чем задача с условиями Неймана. Сравнительный анализ будет приводиться в процессе построения. Условия:

1) $f(x,u,\varepsilon)$ — *достаточно гладкая функция.*

   «Достаточно гладкая» — чем с большей точностью по параметру ε требуется получить приближённое решение, тем больше производных понадобится при построении асимптотики. Поскольку будет построена асимптотика произвольного порядка, то считается, что функция будет бесконечно дифференцируема.

2) *Про вырожденное уравнение:*

   $f(x,u,0) = 0$ имеет корень $u = \varphi(x)$, где $x \in [0;1]$.

3) *Ограничение на производную:*

   $\overline{f}_u(x) := \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,\varphi(x),0) > 0$ для всех $x \in [0;1]$. Это требование будет обеспечивать существование погранслойного решения.

Этих условий было достаточно для того, чтобы построить асимптотику и доказать существование решения в случае, когда краевые условия (или граничные условия) (11.2) были условиями Неймана (то есть задавали производные в 0 и 1) (рис. 11.1). Для решения задачи с условиями Дирихле нужно добавить ещё одно условие (см. рис. 11.2):

4) *Требования для* u^0 и u^1:

$$\int\limits_{\varphi(0)}^{v} f(0,y,0)du > 0 \, \forall v \in (\varphi(0);u^0] \tag{11.3}$$

$$\int\limits_{\varphi(1)}^{v} f(01,y,0)du \, \forall v \in (\varphi(1);u^1]$$

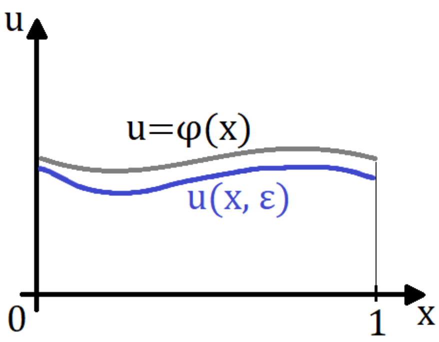

Рис. 11.1. Решение уравнения (11.1) с граничными условиями Неймана

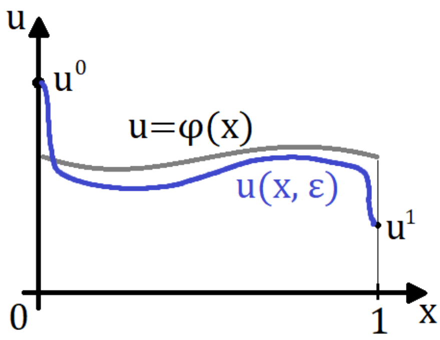

Рис. 11.2. Решение уравнения (11.1) с граничными условиями Дирихле

Замечание: в неравенстве (11.3) должно выполняться либо $v \in (\varphi(0);u^0]$, либо $\varphi(0) = u^0$.

Пример 11.1. *Приведём пример функции f, которая удовлетворяет условию (11.3). Согласно требованию про вырожденное уравнение, значение функции f в точке $\varphi(0)$ будет равно 0. Для функции, изображённой на графике на рис. 11.3, покажем допустимые значения u^0, которые удовлетворяли бы условию (11.3) (будем считать, что $u^0 \neq \varphi(0)$).*

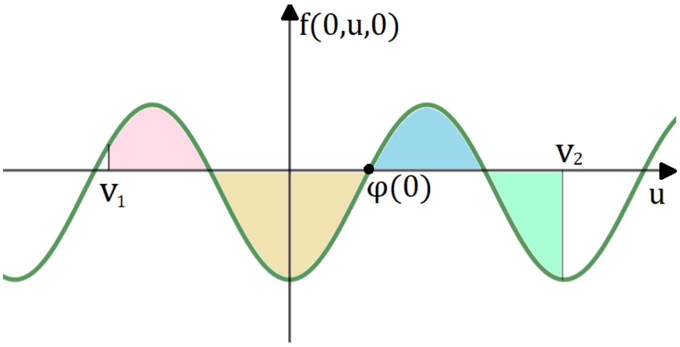

Рис. 11.3. Пример для условия (11.3)

Если принять, что $v > \varphi(0)$, то будем двигаться по графику «вправо». Сначала интеграл будет увеличиваться (зона голубого цвета на графике), затем убывать из-за накапливания отрицательной части (зона зелёного цвета), и в какой-то момент эти зоны сравняются по площади в точке v_2. Тогда в качестве u^0 можно взять любую точку от $\varphi(0)$ до v_2. Аналогично «влево»: сначала интеграл будет расти (зона жёлтого цвета на графике), затем убывать из-за накапливания отрицательной части (зона розового цвета), и в какой-то момент эти зоны сравняются по площади в точке v_1.

Как итог, для данной функции допустимые значения для u^0 следующие:

$$v_1 < u^0 < v_2$$

Асимптотика решения данной задачи с условиями Дирихле будет построена в виде:

$$u(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + \Pi(\xi,\varepsilon) + \widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon), \tag{11.4}$$
$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \widetilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon}$$

В задаче Неймана ряды Π начинались с членом порядка ε, не было Π_0. Было условие: $u'(0,\varepsilon) = v^1$. Но производная $\varphi'(0)$ необязательно удовлетворяла данному условию. Задача погранфункции состоит в том, чтобы ликвидировать невязку, а для этого не нужно Π порядка ε^0. Слагаемого $y = \varepsilon\Pi_1\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ вполне достаточно для того, чтобы ликвидировать текущую невязку. При дифференцировании функции y появится ε, тогда маленькой функцией порядка ε будет возможно устранить несоответствие между φ' и v.

Но в задаче Дирихле такого не получится, потому что здесь если сама функция $\varphi(0) = u^0$, то ничего подправлять не требуется, а если не равна, то в нулевом приближении появляется Π-функция.

Вернёмся к рассматриваемой задаче. $\overline{u}$ расписывается как:

$$\overline{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{u}_i(x)$$

Главным членом этого ряда будет являться $\overline{u}_0(x) = \varphi(x)$. Последующие члены описываются следующими линейными уравнениями:

$$\overline{f}_u(x)\overline{u}_i = f_i(x),$$

где $f_i(x)$ находится через уже найденные $\overline{u}$, то есть выражается рекуррентно.

Перейдём к погранслойной части. $\Pi(\xi,\varepsilon)$ строим в виде ряда:

$$\Pi(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i(\xi)$$

Схема получения уравнений для этих функций такая же, как и раньше: представление u в виде суммы трёх слагаемых подставляется в уравнение (11.1), функция f заменяется на $\overline{f} + \Pi f + \widetilde{\Pi} f$, где

$$\Pi f = f\big(\varepsilon\xi, \overline{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \Pi(\xi,\varepsilon), \varepsilon\big) - f\big(\varepsilon\xi, \overline{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon), \varepsilon\big)$$

Функция $\widetilde{\Pi}$ не входит сюда, потому что мы заранее предсказываем, что функции $\Pi(\xi,\varepsilon)$ будут экспоненциально убывать с ростом переменной ξ, а $\widetilde{Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon)$ — с ростом переменной $\widetilde{\xi}$. То есть $\Pi(\xi,\varepsilon)$ будут существенны только в маленькой окрестности точки 0, а от $\widetilde{Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon)$ до точки 0 практически ничего не дойдёт.

Общее уравнение для всего ряда будет:

$$\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} = \Pi f$$

Подставив и разложив обе части и приравняв коэффициенты, получим следующее уравнение для Π_0:

$$\frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = f(0,\varphi(0)+\Pi_0,0) - f(0,\varphi(0),0), \quad \xi > 0 \tag{11.5}$$

Условия для этой функции получаются из подстановки искомого представления в граничные условия при $x = 0$:

$$\bar{u}(0,\varepsilon) + \Pi(0,\varepsilon) = u^0$$

Подставив и разложив обе части и приравняв коэффициенты, получим главные члены:

$$\bar{u}_0(0) + \Pi_0(0) = u^0$$

Отсюда получаем граничные условия для Π_0:

$$\Pi_0(0) = u^0 - \varphi(0) \tag{11.6}$$

Так как уравнение второго порядка, то нужно ещё одно условие. Добавим стандартное для пограничных функций условие:

$$\Pi_0(\infty) = 0 \tag{11.7}$$

Для главного члена погранслойной части имеем задачу (11.5), (11.6), (11.7).

Сопоставляя с предыдущей задачей с условиями Неймана: уравнение (11.5) было абсолютно такое же, условие (11.7) было такое же, а в нуле задавалась производная, равная нулю (так как иначе производная по x была бы $1/\varepsilon$). Нужно будет доказать, что задача (11.5), (11.6), (11.7) имеет решение и оно экспоненциально убывает. Здесь будет играть роль условие (11.4).

Докажем, что в силу условия (11.3) задача (11.5), (11.6), (11.7) имеет монотонное решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке:

$$|\Pi_0(\xi)| \leqslant c\cdot\exp(-\varkappa\xi), \quad \xi \geqslant 0 \tag{11.8}$$

Уравнение (11.5) — это обыкновенное автономное дифференциальное уравнение 2 порядка. Сведём его к системе двух уравнений первого порядка. Положим $\dfrac{d\Pi_0}{d\xi} = Q$. Тогда $\dfrac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = \dfrac{dQ}{d\xi}$. Значит, уравнение (11.5) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\xi} = Q \\ \\ \dfrac{dQ}{d\xi} = f\left(0, \varphi(0) + \Pi_0, 0\right) \end{cases} \tag{11.9}$$

Перемножим «крест-накрест», получим

$$\begin{cases} d\Pi_0 = Q \cdot d\xi \\ dQ = f\left(0, \varphi(0) + \Pi_0, 0\right) \cdot d\xi \end{cases}$$

Разделим одно уравнение на другое, $d\xi$ сократится, получится следующее уравнение:

$$\frac{dQ}{d\Pi_0} = \frac{f\left(0, \varphi(0) + \Pi_0, 0\right)}{Q} \tag{11.10}$$

Определение 11.1. ***Фазовой плоскостью*** *для системы (11.9) называется плоскость с прямоугольной системой координат* Π_0 *и* Q*.*

У системы (11.9) есть точка покоя $(\Pi_0, Q) = (0;0)$. Тип этой точки определяется посредством рассмотрения соответствующего характеристического уравнения. Рассмотрим матрицу линеаризованной системы на этой точке покоя:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \overline{f}_u(0) & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \overline{f}_u(0) & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - \overline{f}_u(0) = 0$$

Отсюда получаем корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\overline{f}_u(0)}$. Это означает, что точка покоя является *седлом.* Следовательно есть такие траектории, которые проходят через точку покоя, причём по одной траектории мы входим в точку, а по другой — выходим из неё.

Проинтегрируем уравнение (11.10). Перемножив дроби с обеих сторон неравенства крест-накрест, получим уравнение с разделёнными переменными. Интегрируя, получим уравнение для т. н. *фазовых траекторий*:

$$\frac{Q^2}{2} = \int\limits_0^{\Pi_0} f(0, \varphi(0)+S, 0)dS + C$$

Меняя параметр C можно получить различные симметричные относительно горизонтальной оси кривые. Полагая $C=0$ и извлекая квадратный корень, получим:

$$Q = \pm\left[2\int\limits_0^{\Pi_0} f(0, \varphi(0)+S, 0)dS\right]^{1/2} = \pm F(\Pi_0) \tag{11.11}$$

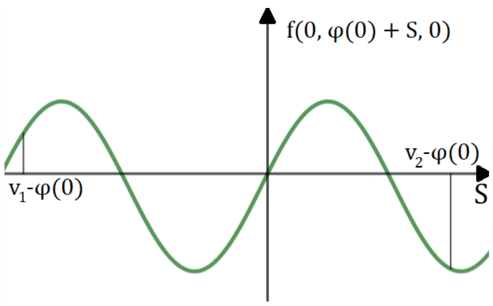

Рис. 11.4. График подынтегральной функции $f(0, \varphi(0)+S, 0)$

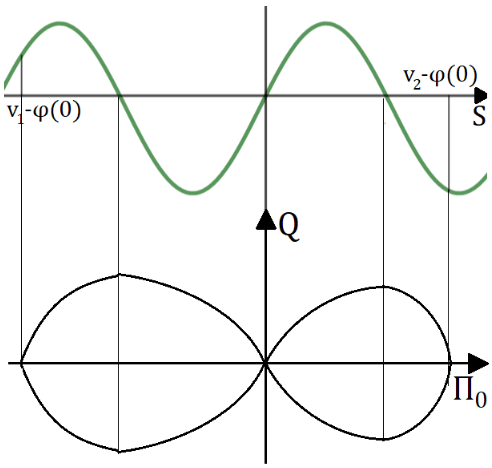

Рис. 11.5. График $Q(\Pi_0)$.

График подынтегральной функции $f(0, \varphi(0)+S, 0)$ изображён на рис. 11.4. Обозначим $\Pi^0 := \Pi_0(0) = u^0 - \varphi(0)$. График всего интеграла изображён на рис. 11.5.

Определение 11.2. *Фазовые траектории, проходящие через точку покоя, называются* ***сепаратрисами****.*

Если на фазовой траектории взять точку, в которой задаются значения Π_0 и Q, то получится система уравнений первого порядка. Если мы в какой-то момент задали Π_0 и Q, то дальше получается кривая (решение этой системы) — и на фазовой плоскости эта кривая обязательно изображается той фазовой траекторией, на которой взята эта начальная точка.

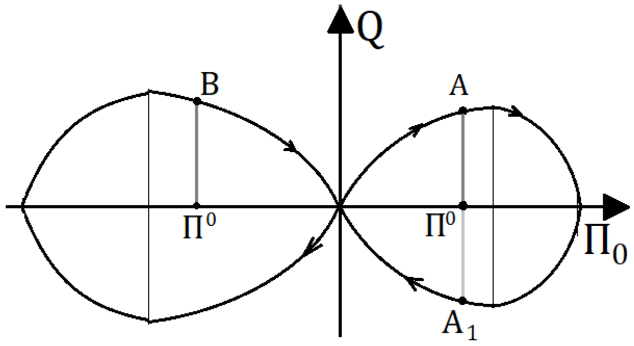

Рис. 11.6. Направление траекторий.

Возьмём точку A на траектории, которой будет соответствовать точка Π^0 (см. рис. 11.6). Здесь $Q > 0$. Так как Q — производная $d\Pi_0$, то мы будем двигаться по траектории вправо. Если рассматривать точку A_1 (где $Q < 0$), то движение пойдёт влево. Аналогично для левой половины траектории.

Если $\Pi^0 > 0$ и $v_1 - \varphi(0) < \Pi^0 < v_2 - \varphi(0)$, то есть два решения этой задачи: одно начинается в точке A, а другое — в точке A_1. Так как требовалось доказать существование монотонного решения, то это решение есть и оно начинается в точке A_1. Существует решение и из точки A, но тогда у погранфункции будет т. н. всплеск, что существенно осложняет задачу. Если $\Pi^0 < 0$ (и так же $v_1 - \varphi(0) < \Pi^0 < v_2 - \varphi(0)$), то монотонное решение будет начинаться в точке B.

Вывод: в силу условия (11.3) существует монотонное решение задачи (11.5), (11.6), (11.7).

Можно проверить, что если у функции $F(\Pi_0)$ взять производную $F'(0)$, то она равна $F'(0) = \sqrt{\bar{f}_u(0)} > 0$.

Упражнение 11.1. *Самостоятельно доказать, что* $F'(0) = \sqrt{\bar{f}_u(0)} > 0$.

Докажем экспоненциальную оценку (11.8) для случая, когда $\Pi^0 > 0$, то есть мы начинаем из точки A_1. Но здесь производная Q отрицательна, значит:

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi} = -F(\Pi_0), \quad \Pi_0(0) = \Pi^0 > 0$$

Из графика на рис.11.6 ясно, что $\exists k > 0 : f(\Pi_0) \geqslant k\Pi_0$. Перемножим дроби выше крест-накрест и проинтегрируем, получим:

$$\int\limits_{\Pi^0}^{\Pi_0(\xi)} \frac{d\Pi_0}{F(\Pi_0)} d\Pi_0 = -\xi$$

Используя оценку $f(\Pi_0) \geqslant k\Pi_0$, получаем следующее:

$$\int\limits_{\Pi^0}^{\Pi_0(\xi)} \frac{d\Pi_0}{k\Pi_0} \leqslant -\xi \quad\Longrightarrow\quad \ln\Pi_0(\xi) - \ln\Pi^0 \leqslant -k\xi$$

Отсюда получаем:

$$\Pi_0(\xi) \leqslant \Pi^0 \cdot \exp(-k\xi), \quad \xi \geqslant 0 \tag{11.12}$$

Экспоненциальная оценка доказана.

Наиболее отличительная черта от задачи с условиями Неймана, которая рассматривалась в предыдущем параграфе, состоит именно в том, что нужно провести расчёты с главным членом погранслойной части асимптотики — с функцией Π_0. Мы подробно рассмотрели поведение этого главного члена погранслойной части в окрестности точки $x = 0$. Такое решение есть, причём есть даже два решения, но подходит только монотонное, и оно имеет экспоненциальную оценку (11.8).

Для следующих членов погранслойного ряда $\forall i \geqslant 1$:

$$\frac{d^2\Pi_i}{d\xi^2} = f_u(\xi)\Pi_i + \pi_i(\xi), \quad \xi \geqslant 0, \tag{11.13}$$

$$f_u(\xi) = \frac{df}{du}\big(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0\big)$$

Мы будем раскладывать в ряд левую и правую части равенства $\dfrac{d^2\Pi}{d\xi^2} = \Pi f$, главный член правой части мы уже выписывали, это (11.5), а следующими будут браться производные в этих точках. Пока $\Pi_0(\xi)$ ещё не мало, функция необязательно положительная. Но когда $\Pi_0(\xi)$ затухает экспоненциально, то получается положительная производная.

А функция $\pi_i(\xi)$ выражается через $\Pi_j(\xi)$ при $j < i$. Если мы дошли до номера i и все предыдущие Π_j имели экспоненциальную оценку, то и π_i будет иметь экспоненциальную оценку, то есть:

$$|\pi_i(\xi)| \leqslant c \cdot \exp(-\varkappa\xi), \quad \xi \geqslant 0$$

Почти такие же уравнения были в предыдущем разделе в задаче с условиями Неймана. В итоге имеем:

$$\begin{cases} \Pi_i(0) = -\overline{u}_i(0) \\ \Pi_i(\infty) = 0 \end{cases} \tag{11.14}$$

Уравнение (11.13) решается в точности. Оно линейное и неоднородное и его решение:

$$\Pi_i(\xi) = -\Phi(\xi)\Phi^{-1}(0)\overline{u}_i(0) + \Phi(\xi)\int\limits_0^\xi \Phi^{-2}(s)\int\limits_\infty^s \Phi(t)\pi_i(t)dtds,$$

$$\Phi(\xi) = \frac{d\Pi_0}{d\xi}(\xi) = -F(\Pi_0) \quad (\text{если} \quad \Pi^0 > 0)$$

Тогда $\Phi(\xi)$ — это решение соответствующего однородного уравнения, потому что первое слагаемое — это решение однородного уравнения, удовлетворяющего условиям (11.13), (11.14).

Возьмём

$$\frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = f(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0)$$

Продифференцируем это уравнение по ξ. Пусть $\dfrac{d\Pi_0}{d\xi} = \Phi$.

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = f_u(\xi)\cdot\Phi$$

Используя это выражение, легко доказать, что

$$|\Phi(\xi)| = |F(\Pi_0)| \leqslant c \cdot \exp(-\varkappa\xi)$$

Если использовать эту оценку для Φ и использовать оценку для неоднородности, то получим:

$$|\Pi_i(\xi)| \leqslant c \cdot \exp(-\varkappa\xi), \quad \forall\, \xi \geqslant 0$$

Погранслойный ряд $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon)$ строится аналогично:

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widetilde{\Pi}_i(\widetilde{\xi})$$

Слагаемые этого ряда определяются аналогично слагаемым ряда Π. Тем самым мы построили формальную асимптотику.

Лекция 12. Краевая задача с граничными условиями Дирихле (продолжение)

В этом разделе будет предоставлено обоснование асимптотики, описанной в предыдущем разделе для задачи с граничными условиями Дирихле. Напомним, какая задача рассматривается.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x,u,\varepsilon), \text{ где } 0 < x < 1 & (12.1)\\ u(0,\varepsilon) = u^0,\, u(1,\varepsilon) = u^1 & (12.2)\end{cases}$$

Здесь (12.2) — *граничные условия* (в которых задаётся сама функция u). Рассматривается обычное дифференциальное уравнение (12.1) 2 порядка с граничными условиями Дирихле. Напомним условия для этой задачи:

1) Функция f достаточно гладкая (то есть у неё должно быть столько производных, сколько может понадобиться по ходу построения асимптотики). Говорят так: поскольку строится асимптотика произвольного порядка, то функция f считается бесконечно дифференцируемой.

2) Вырожденное уравнение $f(x,u,0) = 0$ имеет корень $u = \varphi(x)$.

3) Производная на этом корне $\overline{f}_u(x) := \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,\varphi(x),0) > 0$ для всех $x \in [0;1]$.

Такие же условия приводились в прошлом разделе при рассмотрении той же задачи с граничными условиями Неймана (то есть были заданы не функции, а производные). В задаче Дирихле не при любых заданных условиях получится решение погранслойного типа, в связи с этим возникло четвёртое условие:

4)
$$\int\limits_{\varphi(0)}^{v} f(0,y,0)du > 0 \,\forall v \in (\varphi(0);u^0] \qquad (12.3)$$

В предыдущем разделе была приведена формальная асимптотика:

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}(x,\varepsilon) + \Pi(\xi,\varepsilon) + \widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon), \qquad (12.4)$$

$$\xi = x/\varepsilon$$

, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$

Каждое из этих слагаемых были построены в виде ряда, например:

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i(x)$$

Способ построения стандартный: вместо u в уравнении (12.1) подставляем приведённый выше ряд, раскладываем правую часть по степеням ε, приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем уравнение последовательно для членов приведённого выше ряда. В частности, $\bar{u}_0 = \varphi(x)$.

Далее была описана процедура построения погранслойных рядов. Сложность заключается в том, что $\Pi(\xi,\varepsilon)$ начинается с членов нулевого порядка (в случае Неймана ряд начинался с членов порядка ε, пограничные функции определялись как решения линейных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом). Четвёртое условие (см. условие (12.3)) как раз позволяло доказать, что задача для главного члена имела решение и это решение имеет экспоненциальную оценку. Все члены ряда имеют экспоненциальную оценку:

$$|\Pi_i(\xi)| \leqslant c \cdot \exp(-\varkappa\xi), \quad \forall\, \xi \geqslant 0,$$

где c и $\varkappa$ — не зависящие от ε положительные вещественные числа (причём разные для разных i).

Нужно доказать, что при условиях (12.1) — (12.3) задача (12.1), (12.2) имеет решение и построенный ряд является асимптотическим рядом для этого решения. Если взять его частичную сумму n-ого порядка, то решение отличается от этой частичной суммы на величину порядка ε^{n+1}.

Обозначим:

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \big(\bar{u}_i(x) + \Pi_i(\xi) + \tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}\big),$$

где $\tilde{\Pi}_i$ имеют аналогичную оценку с заменой ξ на $\tilde{\xi}$.

Это формальная асимптотика, то есть если подставить U_n вместо u в уравнение (12.1), то эта частичная сумма удовлетворяет уравнению с точностью ε^{n+1}. Оператор L_ε определим следующим образом:

$$L_\varepsilon U_n := \varepsilon^2 \frac{d^2 U_n}{dx^2} - f(x, U_n, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 < x < 1 \tag{12.5}$$

Для регулярных членов никаких граничных условий не задавалось, они определялись из конечных уравнений, а для П-функций были следующие:

$$\Pi_0(0) = u^0 - \overline{u}_0(0) \quad \forall i > 0: \quad \Pi_i(0) = -\overline{u}_i(0)$$

Если взять частичную сумму, описанную выше, то Π и $\widetilde{\Pi}$ внесут определённую невязку. Однако, так как они удовлетворяют экспоненциальной оценке, то если положить $x = 0$, они будут меньше ε в любой степени, поэтому:

$$U_n(0, \varepsilon) = u^0 + o(\varepsilon^N), \quad U_n(1, \varepsilon) = u^1 + o(\varepsilon^N), \quad \forall N \tag{12.6}$$

Равенства (12.5) и (12.6) есть те равенства, которые говорят о том, что была построена формальная асимптотика, то есть она удовлетворяет не точно, а с точностью ε^{n+1} в уравнении и с точностью ε в любой степени в граничных условиях.

Теорема 12.1. *Если выполнены условия 1 — 4, то для достаточно малых ε задача (12.1), (12.2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, для которого ряд (12.4) является асимптотическим рядом при $\varepsilon \to 0$, то есть:*

$$\forall n = 0, 1, 2, \ldots: \quad u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in [0; 1] \tag{12.7}$$

Для доказательства этой теоремы нужно воспользоваться методом дифференциальных неравенств. Для этого нужно построить нижнее и верхнее решения.

Для сингулярно возмущенных задач стандартный приём построений нижнего и верхнего решения состоит в том, что мы берём частичную сумму n-ого порядка построенного ряда, что-то из неё вычитаем (это будет нижнее решение) или что-то прибавляем (это будет верхнее решение). Нужно определить, что именно надо отнять или прибавить.

Нижнее и верхнее решения:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}Z(x,\varepsilon) \\ \overline{U}(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}Z(x,\varepsilon) \end{aligned} \tag{12.8}$$

Когда рассматривались краевые условия Неймана, нижнее и верхнее решения по внешнему виду были точно такие же, однако функция Z на этот раз будет иной. В данном случае:

$$Z(x,\varepsilon) = M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \widetilde{P}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right),$$

где $M > 0$, $P(\xi)$ и $\widetilde{P}(\widetilde{\xi}) \geqslant 0$ имеют экспоненциальную оценку $|P(\xi)| \leqslant ce^{-\varkappa\xi}$.

На верхнее и нижнее решения накладываются 3 условия:

1) *Упорядоченность*: $\underline{U}(x,\varepsilon) \leqslant \overline{U}(x,\varepsilon)$ для всех $x \in [0;1]$ (следует из положительности Z).
2) $\underline{U}(0,\varepsilon) \leqslant u^0 \leqslant \overline{U}(0,\varepsilon)$ и $\underline{U}(1,\varepsilon) \leqslant u^1 \leqslant \overline{U}(1,\varepsilon)$. Сопоставляя эти неравенства с равенствами (12.6) и (12.8), видно, что эти неравенства выполнены.
3) Остаётся проверить выполнение неравенств:

$$L_\varepsilon\underline{U} \geqslant 0 \geqslant L_\varepsilon\overline{U}, \quad 0 < x < 1 \tag{12.9}$$

То есть надо подобрать константу M и функции P так, чтобы эти неравенства были выполнены.

Проверим первое неравенство из (12.9) (второе проверяется аналогично). Распишем $L_\varepsilon\underline{U}$:

$$L_\varepsilon\underline{U} := \varepsilon^2\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - f(x,\underline{U},\varepsilon)$$

Подставим сюда нижнее решение:

$$L_\varepsilon\underline{U} = \left[\varepsilon^2\frac{d^2U_n}{dx^2} - f(x,U_n,\varepsilon)\right] - \varepsilon^{n+1}\left(\frac{d^2P}{d\xi^2} + \frac{d^2\widetilde{P}}{d\xi^2}\right) - \left\{f(x,\underline{U},\varepsilon) - f(x,U_n,\varepsilon)\right\} \tag{12.10}$$

Заметим, что

$$\left[\varepsilon^2\frac{d^2U_n}{dx^2}-f(x,U_n,\varepsilon)\right]=L_\varepsilon U_n=O(\varepsilon^{n+1})$$

(см. равенство (12.5)), причём эта величина не зависит от Z.

P-функция имеет экспоненциальную оценку, описанную ранее, значит она существенна только в малой окрестности точки $x=0$. Если сдвинуться на какую-то малую величину δ (рис. 12.1), то для $x>\delta$ в экспоненциальной оценке будет степень $-\varkappa\dfrac{\delta}{\varepsilon}$, а это меньше любой степени. Аналогично для $\widetilde{P}$-функции, если отойти от 1 на величину δ.

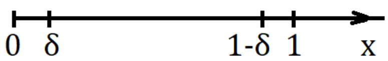

Рис. 12.1. P и $\widetilde{P}$ функции существенны только в малых окрестностях точек $x=0$ и $x=1$ соответственно.

Чтобы технически упростить выкладку, рассмотрим выражение в фигурных скобках $\{f(x,\underline{U},\varepsilon)-f(x,U_n,\varepsilon)\}$ на двух промежутках: $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2};1\right)$, потому что на первом промежутке можно не учитывать $\widetilde{P}$, а на втором — функцию P.

Рассмотрим $0<x<\dfrac{1}{2}$: здесь $\widetilde{P}(\tilde{\xi})$, $\dfrac{d^2\widetilde{P}}{d\tilde{\xi}^2}=o(\varepsilon^N)\,\forall N$, поэтому функцию можно не учитывать.

Разложим $f(x,\underline{U},\varepsilon)$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке (x,U_n,ε):

$$-\{f(x,\underline{U},\varepsilon)-f(x,U_n,\varepsilon)\}=-\left\{f_u(x,U_n,\varepsilon)\,(\underline{U}-U_n)+O\left((\underline{U}-U_n)^2\right)\right\}=$$

Заметим, что $O\left((\underline{U}-U_n)^2\right)=O(\varepsilon^{2n+2})$ и $U_n=\varphi(x)=\Pi_0(\xi)+O(\varepsilon)$. Тогда:

$$=f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi)+O(\varepsilon),\varepsilon)\varepsilon^{n+1}(M+P(\xi))+O(\varepsilon^{2n+2})$$

Слагаемое $f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi)+O(\varepsilon),\varepsilon)\varepsilon^{n+1}(M+P(\xi))$ разобъём на два. Преобразим f_u для умножения на M:

$$f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi)+O(\varepsilon),\varepsilon) = f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi),0)+O(\varepsilon) =$$
$$= f_u(x,\varphi(x),0)+[f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi+\Pi_0(\xi),0)-f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi,0)]+O(\varepsilon)$$

Докажем, что справедливо равенство

$$[f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi)+\Pi_0(\xi),0)-f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi),0)] =$$
$$= f_u(0,\varphi(0)+\Pi_0(\xi),0)-f_u(0,\varphi(0),0)+O(\varepsilon\xi)\Pi_0(\xi)$$

Доказательство.

Выразим левую часть равенства через интеграл:

$$[f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi)+\Pi_0(\xi),0)-f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi),0)] = \Pi_0(\xi)\int\limits_0^1 f_{uu}(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi)+s\Pi_0(\xi),0)ds$$

Подынтегральное выражение, умноженное на $\Pi_0(\xi)$, это будет $d_s f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi)+s\Pi_0,0)$. Продолжим равенство:

$$= \int\limits_0^1 [f_{uu}(0,\varphi(0)+s\Pi_0,0)+O(\varepsilon\xi)]\,ds\cdot\Pi_0 = \int\limits_0^1 f_{uu}(0,\varphi(0)+s\Pi_0,0)ds\cdot\Pi_0 + O(\varepsilon\xi)\cdot\Pi_0(\xi) =$$
$$= f_u(0,\varphi(0)+\Pi_0,0)-f_u(0,\varphi(0),0)+O(\varepsilon\xi)\cdot\Pi_0(\xi)$$

■

Замечание 12.1. *Представление такой разности в виде интеграла называется леммой Адамара.*

Использовав доказанное равенство и обозначение $\overline{f}_u(x) = f_u(x,\varphi(x),0)$, получим:

$$f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi),\varepsilon) = \overline{f}_u(x)+[f_u(0,\varphi(0)+\Pi_0(\xi),0)-f_u(0,\varphi(0),0)]+O(\varepsilon)$$

Слагаемое $O(\varepsilon\xi)\cdot\Pi_0(\xi)$ не записывалось явно, потому что $\Pi_0(\xi)$ имеет экспоненциальную оценку, произведение — ограниченная функция, поэтому $O(\varepsilon\xi)\cdot\Pi_0(\xi) = O(\varepsilon)$.

Заметим, что $f_u(0,\varphi(0),0) = \overline{f}_u(0)$ и $f_u(0,\varphi(0)+\Pi_0(\xi),0) = f_u(\xi)$. Тогда написанное выше равенство можно записать как:

$$f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi),\varepsilon) = \overline{f}_u(x) + \left[f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\right] + O(\varepsilon)$$

Вернёмся к тому, откуда мы начали:

$$\begin{gathered}
-\left\{f_u(x,U_n,\varepsilon)\left(\underline{U}-U_n\right)+O\left(\left(\underline{U}-U_n\right)^2\right)\right\} = \\
= \left(\overline{f}_u(x) + \left[f_u(\xi)-\overline{f}_u(0)\right] + O(\varepsilon)\right)M\varepsilon^{n+1} + \left[f_u(\xi)+O(\varepsilon)+O(\varepsilon\xi)\right]P\varepsilon^{n+1} = \\
= \left(\overline{f}_u(x) + \left[f_u(\xi)-\overline{f}_u(0)\right] + O(\varepsilon)\right)M\varepsilon^{n+1} + f_u(\xi)P + O(\varepsilon^{n+2})
\end{gathered}$$

Докажем корректность разложения $f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi)+O(\varepsilon),\varepsilon) = [f_u(\xi)+O(\varepsilon)]$:

$$f_u(x,\varphi(x)+\Pi_0(\xi)+O(\varepsilon),\varepsilon)P(\xi) = [f_u(\varepsilon\xi,\varphi(\varepsilon\xi)+\Pi_0(\xi),0)+O(\varepsilon)]\,P(\xi) =$$

$$= [f_u(0,\varphi(0)+\Pi_0(\xi),0)+O(\varepsilon\xi)+O(\varepsilon)]\,P(\xi) = f_u(\xi)P(\xi)+O(\varepsilon^{n+2})$$

Конечное выражение для равенства (12.10):

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon \underline{U} \;=\; & O(\varepsilon^{n+1}) - \varepsilon^{n+1}\frac{d^2P}{d\xi^2} + \varepsilon^{n+1} f_u(\xi)P + \left(f_u(\xi)-\overline{f}_u(0)\right)M\varepsilon^{n+1} + \\
& + \varepsilon^{n+1}\overline{f}_u(x)M + O(\varepsilon^{n+2})
\end{aligned} \tag{12.11}$$

причём $O(\varepsilon^{n+2})$ зависит от M. Если со второго по четвёртое слагаемое вынести $-\varepsilon^{n+1}$ за скобки, то получим:

$$-\varepsilon^{n+1}\left(\frac{d^2P}{d\xi^2} - f_u(\xi)P - \left(f_u(\xi)-\overline{f}_u(0)\right)M\right)$$

Определим функцию $P(\xi)$ как решение следующей задачи:

$$\begin{cases}
\dfrac{d^2P}{d\xi^2} = f_u(\xi)P + g(\xi), \quad \xi > 0 & (12.12)\\
P(0) = 0, \quad P(\infty) = 0 & (12.13)
\end{cases}$$

Функция $g(\xi)$ определяется как:

$$g(\xi) = \left[f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\right]M - \Psi(\xi),$$
$$\left|f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\right|M \leqslant \Psi(\xi) \leqslant ce^{-\varkappa\xi}$$

Такая функция $\Psi(\xi)$ обязательно существует, так как

$$f_u(\xi) = f_u(0, \varphi(0 + \Pi_0(\xi), 0)$$
$$\overline{f}_u(0) = f_u(0, \varphi(0), 0)$$

а их разность (по формуле Лагранжа) — это производная точки на Π_0, а Π_0 экспоненциально убывает. Тогда

$$\left|f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\right|M \leqslant c_1 e^{-\varkappa\xi}$$

поэтому такая функция $\Psi(\xi)$ обязательно существует. Отсюда также следует, что $g(\xi) \leqslant 0$.

Выпишем точное решение задачи (12.12), (12.13) для $P(\xi)$:

$$P(\xi) = \left[\int\limits_0^\xi \Phi^{-2}(s) \int\limits_\infty^s \Phi(t) g(t) dt\right] \Phi(\xi)$$
$$\Phi(\xi) = \frac{d\Pi_0}{d\xi}(\xi)$$

Эта функция имеет экспоненциальную оценку: $|\Phi(\xi)| \leqslant ce^{-\varkappa\xi}$, $\xi \geqslant 0$. Очевидно, что $P(\xi) \leqslant 0$ (так как, во-первых, Φ входит в выражение четыре раза, то есть даёт положительное значение, во-вторых интеграл от ∞ до s идёт в отрицательную сторону, но в его подынтегральное выражение входит не положительная функция g, следовательно этот интеграл тоже даст положительное значение).

Используя экспоненциальную оценку для $\Phi(\xi)$, можно доказать, что:

$$0 \leqslant P(\xi) \leqslant ce^{-\varkappa\xi}, \xi \geqslant 0$$

При таком определении P получаем следующее выражение для $L_\varepsilon \underline{U}$:

$$L_\varepsilon \underline{U} = O(\varepsilon^{n+1}) + \varepsilon^{n+1}\overline{f}_u(x)M + \varepsilon^{n+1}\Psi(\xi) + O(\varepsilon^{n+2}) \tag{12.14}$$

Напомним, что $O(\varepsilon^{n+1})$ не зависит от M, а $O(\varepsilon^{n+2})$ зависит от M. Нам нужно так выбрать M, чтобы это было неотрицательным. Определяющим будет слагаемое $\varepsilon^{n+1}\overline{f}_u(x)M$. На отрезке $[0;1]$ функция $\overline{f}_u(x)$ положительная. А раз непрерывная на отрезке функция во всех точках положительна, она достигает своей точной нижней грани, то можно написать, что $\overline{f}_u(x) \geqslant c \geqslant 0$ для $x \in [0;1]$. Это умножается на M, значит, выберем M столь большим, чтобы сумма первого и второго слагаемых была бы больше, чем ε^{n+1}, то есть чтобы

$$O(\varepsilon^{n+1}) + \varepsilon^{n+1}\overline{f}_u(x)M > \varepsilon^{n+1}$$

У нас осталось слагаемое $O(\varepsilon^{n+2})$ неизвестного знака, которое не зависит от M. Возьмём ε_0 такое, что

$$\forall\, \varepsilon \in (0;\varepsilon_0) \quad \left|O(\varepsilon^{n+2}\right| < \varepsilon^{n+1}$$

Тогда слагаемое $O(\varepsilon^{n+2})$ будет меньше, чем сумма двух первых слагаемых. В итоге мы получаем, что:

$$L_\varepsilon \underline{U} \geqslant 0, \quad x \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$$

Что и требовалось доказать для нижнего решения на первом промежутке. Аналогично доказывается и на втором промежутке, только функции P и $\widetilde{P}$ поменяются местами.

$$\Rightarrow\ L_\varepsilon \underline{U} \geqslant 0, \quad x \in (0;1)$$

Аналогично доказывается неравенство для верхнего решения:

$$L_\varepsilon \overline{U} \leqslant 0, \quad x \in (0;1)$$

Таким образом, для достаточно большого M и для достаточно малых ε функции $\overline{U}$ и $\underline{U}$, определённые формулами (12.8) и (12.9), являются нижним и верхним решениями.

Тогда существует решение задачи (12.1), (12.2) $u(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам $\underline{U}(x,\varepsilon) \leqslant u(x,\varepsilon) \leqslant \overline{U}(x,\varepsilon)$ для всех $x \in [0;1]$, где $\underline{U}$ и $\overline{U}$:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - O(\varepsilon^{n+1}, \quad \overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$$

Тогда решение:

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \forall x \in [0;1]$$

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ