



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

АЛЕШКЕВИЧ
ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
VK.COM/TEACHINMSU.



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

КЛОЧЕНКО МАКСИМА АНДРЕЕВИЧА

Содержание

Лекция 1	7
Электростатика. Часть I	7
Электрический заряд. Фундаментальные взаимодействия в природе	7
Закон Кулона. Принцип суперпозиции	8
Электростатическое поле системы зарядов	9
Силовые линии электрического поля	10
Электрическое поле на оси заряженного кольца	10
Электрическое поле заряженного шара	11
Лекция 2	12
Электростатика. Часть II	12
Электрическое поле заряженного диска	12
Теорема Гаусса—Остроградского	14
Экспериментальные основания закона Кулона	15
Теорема Гаусса—Остроградского в дифференциальной форме	16
Электрическое напряжение. Разность потенциалов	16
Лекция 3	18
Электростатика. Потенциал	18
Потенциал электростатического поля	18
Локальная связь между напряжённостью поля и потенциалом	
Уравнение Пуассона	20
Однородное поле внутри заряженного шара	20
Проводники в электростатическом поле	21
Лекция 4	23
Проводники в электрическом поле. Диэлектрики	23
Электрическая ёмкость. Плоский конденсатор	23
Цилиндрический конденсатор	24
Соединения конденсаторов	25
Диэлектрики в электростатическом поле. Поляризация диэлектриков . .	26
Диэлектрик в плоском конденсаторе	27
Лекция 5	29
Диэлектрики в электрическом поле	29
Вектор поляризации. Связанные заряды	29
Вектор электрической индукции. Материальные уравнения	30
Граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D}	31
Диэлектрический шар в однородном поле	33
Лекция 6	35
Диэлектрики	35
Диэлектрики в электрическом поле	35
Энергия системы зарядов	35

Собственная энергия электростатической системы	36
Энергия электростатического поля	37
Электрический диполь во внешнем электростатическом поле	38
Силы, действующие на диэлектрик в неоднородном электростатическом поле	38
Электронная теория поляризации диэлектриков	39
Эффект локального поля	39
Лекция 7	41
Постоянный электрический ток. Часть I	41
Плотность и сила тока	41
Источники тока. Электродвижущая сила	42
Электрический ток в металлических проводниках. Закон Ома	43
Закон Ома в дифференциальной форме	45
Сторонние силы	46
Закон Джоуля—Ленца	47
Лекция 8	49
Постоянный электрический ток. Часть II	49
Резисторы	49
Законы Кирхгофа	50
Метод контурных токов	52
Токи в сплошной среде	53
Токи в сплошной среде. Примеры	54
Лекция 9	56
Магнитостатика. Часть I	56
Токи в сплошной среде (продолжение)	56
RC-цепи	57
Магнитостатика. Введение	58
Законы Ампера и Био—Савара—Лапласа	59
Магнитное поле прямого провода с током	60
Лекция 10	62
Магнитостатика. Часть II	62
Магнитное поле кольца с током. Магнитный момент	62
Магнитное напряжение. Теорема о циркуляции	64
Магнитное поле толстого провода	65
Магнитное поле объёмных токов. Векторный потенциал	65
Сила Лоренца	67
Лекция 11	68
Магнитостатика. Часть III	68
Магнитное поле Земли	68
Взаимодействие движущихся зарядов	68
Применение магнитного поля в технике	70

Поток вектора магнитной индукции. Контур с током в магнитном поле	71
Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле	72
Коэффициент взаимной индукции. Третий закон Ньютона	73
Лекция 12	75
Электромагнитная индукция	75
Взаимная индукция двух соленоидов	75
Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца	76
Прямоугольный контур с перемычкой в однородном магнитном поле	76
Измерение магнитного напряжения и индукции	78
Явление самоиндукции. Индуктивность. Экстратоки	79
Лекция 13	81
Магнетики. Часть I	81
Экстратоки (завершение)	81
Энергия магнитного поля	81
Собственная силовая функция тока в магнитном поле	82
Явление взаимной индукции	83
Молекулярные токи. Напряжённость магнитного поля	84
Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость	87
Лекция 14	89
Магнетики. Часть II	89
Магнитное поле в веществе (продолжение)	89
Преломление линий магнитной индукции и напряжённости	89
Фактор формы магнетика	90
Силы, действующие на магнетики в магнитном поле	92
Силовая функция для магнетика в магнитном поле	93
Лекция 15	94
Магнетики. Прецессия Лармора	94
Силовая функция для магнетика в магнитном поле (продолжение)	94
Физический смысл индукции и напряжённости магнитного поля	95
Классическое описание диамагнетизма. Прецессия Лармора	96
Парамагнетизм. Теория Ланжевена. Закон Кюри	98
Механомагнитный эффект и магнитомеханический эффект	99
Лекция 16	101
Ферромагнетизм. Электромагнитные колебания	101
Ферромагнетизм. Кривая намагничения. Гистерезис	101
Ядерный магнитный резонанс. Магнитно-резонансная томография	104
Электромагнитные колебания. Свободные колебания в колебательном контуре	105

Лекция 17	107
Электромагнитные колебания. Часть I	107
Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс напряжений	107
Переменный ток. Метод векторных диаграмм	110
Метод комплексных амплитуд. Импеданс	112
Резонанс токов	113
Лекция 18	115
Электромагнитные колебания. Часть II	115
Резонанс токов (продолжение)	115
Работа и мощность переменного тока	116
Связанные колебательные контуры	117
Трансформаторы	118
Генераторы электрического тока	119
Лекция 19	121
Генераторы электрического тока	121
Синхронные и асинхронные генераторы тока	121
Трёхфазный ток	121
Токи смещения	122
Уравнения Максвелла. Материальные уравнения	123
Излучение электромагнитных волн	125
Лекция 20	126
Скин-эффект. Волны. Волновое уравнение	126
Энергия электромагнитной волны	126
Скин-эффект	126
Условие квазистационарности. Излучение электромагнитных волн	127
Волновое уравнение	128
Система GPS. Сотовая связь	129
Волновое уравнение (продолжение)	129
Лекция 21	131
Электропроводность твёрдых тел	131
Электропроводность твёрдых тел. Классическая теория Друде—Лоренца	131
Закон Видемана—Франца	132
Опыт Толмена и Стюарта	133
Волновые свойства частиц. Электронный газ в металлах	133
Лекция 22	137
Полупроводники	137
Зонная решётка кристаллической решётки	137
Носители заряда в полупроводниках. Легирование	138
p-n-переход. Полупроводниковый диод	138
Контактные явления	139
Сверхпроводимость	141

Лекция 1

Электростатика. Часть I

Электрический заряд. Фундаментальные взаимодействия в природе

В этом курсе, как и в физике вообще, мы оперируем такими понятиями как *поле* и *заряд*, ничего о них не зная: ведь мы можем только говорить о существовании поля по косвенным признакам, таким как наличие силы. Эти понятия фундаментальны и, как следствие, крайне трудны в определении.

Итак, электрический заряд — что это такое? Ещё в античные времена заметили, что с помощью янтарной палочки можно вызывать притяжение и отталкивание предметов. Понятия заряда и заряженного тела, а также знака заряда, были введены Б. Франклином на интуитивном уровне. Им же было введено понятие *электрона* как единичного отрицательного — условно! — заряда.

Здесь ещё не был упомянут закон Кулона — Ш. Кулон реализовал в XVII веке хорошо известный опыт с крутильными весами, в котором он показал, что силы электрического взаимодействия по модулю много больше гравитационных, а также что они тоже изменяются пропорционально r^{-2} .

Электрон как частица был открыт Дж. Томсоном в опыте с катодными лучами: речь идёт о некоторой струе, идущей от катода, которая отклонялась под действием электрического и магнитного полей. В его же опыте было найдено отношение заряда электрона к его массе — тогда же новая частица была отождествлена с понятием Франклина.

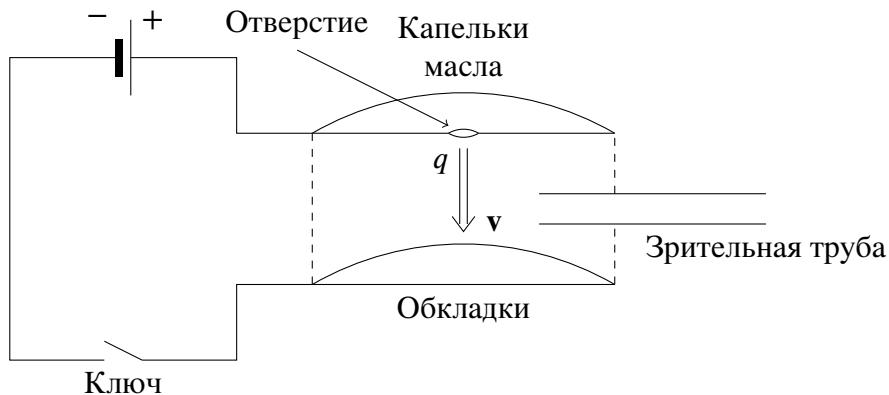


Рис. 1: Опыт Милликена.

Обратимся к опыту Милликена ради понимания размера электрона. Между обкладками конденсатора существует электрическое поле. С помощью пульверизатора мы вводим капельки масла в поле, которые в нём электризуются. Под действием сил тяжести капельки действуют вниз, а поле тянет их вверх — отсюда несложно с помощью законов Ньютона определить заряды капелек. Оказалось, что все они кратны некоторой величине, которая оказалось зарядом электрона,

$$|e| \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (1.1)$$

В 1919 г. Э. Резерфорд открыл протон, разгоняя α -частицы до больших скоростей и бомбардируя ими мишени. Масса протона оказалась в 1836 раз больше массы электрона, а заряды их примерно одинаковы. Немногим позднее Дж. Чедвик открыл нейтрон. Электрон сегодня считают бесструктурной, элементарной частицей, в отличие от протона и нейтрона, которые более поздние теории предполагают состоящими из夸рков — некоторых частиц, имеющих заряды $\pm 1/3 |e|$ и $\pm 2/3 |e|$ и не существующих в отдельном состоянии.

В физике есть четыре вида взаимодействия,

- гравитационное,
- электромагнитное,
- сильное,
- слабое.

Гравитационное взаимодействие много слабее всех остальных и не проявляет себя в масштабах земных тел; сильное и слабое же взаимодействия действуют только на расстояниях порядка 10^{-15} м — поэтому не будет большим преувеличением сказать, что именно электромагнитные явления в значительной мере определяют мир, в котором мы живём.

Существуют частицы-переносчики взаимодействий: для всех взаимодействий, кроме гравитационных, они достаточно неплохо изучены. Недавно были обнаружены гравитационные волны, однако единого положительного мнения о существовании переносчиков гравитационного взаимодействия нет. Электромагнитные взаимодействия переносятся фотонами, слабые — бозонами, а сильные — глюонами. Однако стоит отметить, что в рамках Стандартной модели элементарных частиц нет теории, которая бы описывала все взаимодействия.

Закон Кулона. Принцип суперпозиции

Электростатика — это раздел электромагнетизма, изучающий взаимодействие неподвижных зарядов.

Электрический заряд в изолированной системе всегда *сохраняется*, как показывает опыт, в том числе, говоря об элементарных частицах. Ярким примером служит рождение в (физическом) вакууме электрон-позитронной пары.

Рассмотрим два заряда. В зависимости от того, движутся они или нет, между ними может быть взаимодействие

- электрическое — если они не движутся, либо
- электрическое и магнитное — если они движутся.

Для описания электрического и магнитного полей вводят векторы *напряжённости* и *индукции*,

поле	электрическое	магнитное
индукция	D	B
напряжённость	E	H

В вакууме существуют **E** и **B**, а в среде **D** и **H** — казалось бы, нужно исправить эту асимметрию, но традиция не позволяет этого сделать. О смысле этих векторов мы поговорим позже.

Закон Кулона. Для точечных зарядов $q_{1,2}$ на расстоянии **r** друг от друга, действующая на первый из них сила взаимодействия **F₁₂** равна

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{\mathbf{r}^2} \mathbf{e}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (1.2)$$

где **e₂₁** — единичный вектор, проведённый от второго точечного заряда к первому.

Сила действует по прямой, соединяющей два заряда. Очевидно в силу третьего закона Ньютона, что $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

В СИ единицей измерения электрического заряда является **кулон**,

$$[q] = 1 \text{ Кл} = [A] [t] = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с.}$$

Поскольку, как ещё будет сказано позже, ампер пришёл к нам из рассмотрения магнитных полей, кулон — это очень большая единица измерения.

Коэффициент k численно равен

$$k \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi}, \quad (1.3)$$

и традиционно записывается как

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.4)$$

где ϵ_0 — **электрическая постоянная**, численно равная

$$\epsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$$

Электростатическое поле системы зарядов

От закона Кулона не было бы никакого толку, если бы не принцип суперпозиции: в самом деле, мы бы не смогли рассматривать взаимодействие твёрдых тел вообще.

Принцип суперпозиции. В системе зарядов взаимодействие между ними происходит попарно так, как если бы других зарядов не было.

Таким образом, для дискретно распределённых зарядов мы можем пользоваться суммированием, а для непрерывно распределённых — интегрированием.

Закон Кулона можно переписать в виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1.5)$$

где вектор **E** называют **напряжённостью** электрического поля в данной точке.

Теперь приведём примеры упомянутых выше суммирования и интегрирования.

Силовые линии электрического поля

Для описания электрического поля вводят понятие *силовых линий* — это такие линии, касательная к которым в каждой точке совпадает с вектором напряжённости поля в этой точке. Легко заметить, что силовые линии начинаются на отрицательных зарядах и заканчиваются на положительных.

Также несложно показать, что плотность электрических линий прямо пропорциональна напряжённости поля в данной точке.

Электрическое поле на оси заряженного кольца

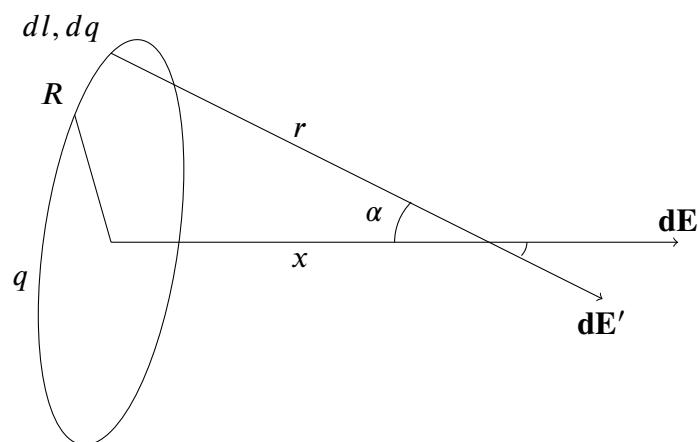


Рис. 2: Напряжённость электрического поля на оси равномерно заряженного кольца.

Пусть есть кольцо радиуса R , по которому равномерно распределён заряд q . Мы хотим найти напряжённость поля на расстоянии x по оси кольца.

Эта задача является ярким примером необходимости принципа суперпозиции для дополнения закона Кулона.

Итак, начнём с выделения на кольце малого заряда dq . Он будет пропорционален участку дуги dl , на котором находится,

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl.$$

Этот заряд создаёт в точке x поле напряжённостью dE' .

Однако нас интересует только горизонтальная составляющая dE , так как вертикальные составляющие сократятся в силу симметрии кольца. Заметим, что

$$dE = dE' \cos \alpha = k \frac{dq}{r^2} \frac{x}{r}.$$

Напряжённость же поля E будет равна интегралу,

$$E = \int dE = \frac{k}{r^3} x \frac{q}{2\pi R} \int dl,$$

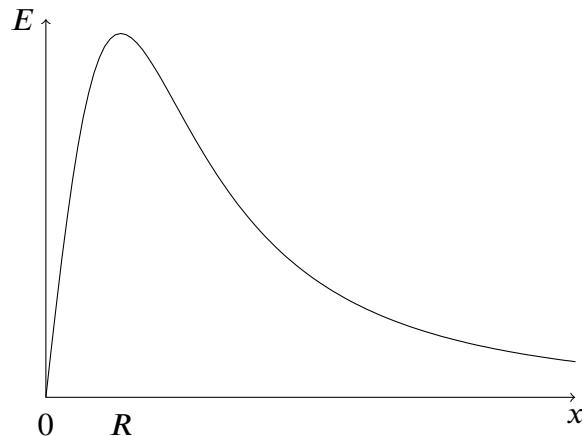


Рис. 3: Зависимость напряжённости электрического поля на оси заряженного кольца от расстояния.

а длина окружности, как мы знаем, равна $2\pi R$, то есть,

$$E = \frac{kqx}{r^3} = kq \frac{x}{\left(\sqrt{R^2 + x^2}\right)^3}. \quad (1.6)$$

Обратим особое внимание, что при $x \gg R$, $E \propto x^{-2}$.

Электрическое поле заряженного шара

Рассмотрим теперь напряжённость, создаваемую шаром с зарядом q и радиусом R на расстоянии r от него. В силу симметрии ясно, что напряжённость будет направлена по радиусу шара. Из школы мы знаем, что напряжённость поля шара будет такая же, как и напряжённость поля точечного заряда. Внутри же напряжённость поля будет равна нулю.

Напряжённость поля изменяется почти скачкообразно за счёт наличия поверхностной плотности зарядов,

$$E = k \frac{q}{R^2} = \frac{q}{4\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{q}{4\pi R^2} \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

где σ — это поверхностная плотность зарядов.

Неразобранной осталась задача о напряжённости поля равномерно заряженной плоскости — для её решения мы воспользуемся задачей о кольце, представив плоскость как множество колец увеличивающегося радиуса.

Лекция 2

Электростатика. Часть II

Электрическое поле заряженного диска

Продолжим логически предыдущую лекцию рассмотрением электрического поля диска с зарядом q и постоянной поверхностной плотностью заряда,

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}.$$

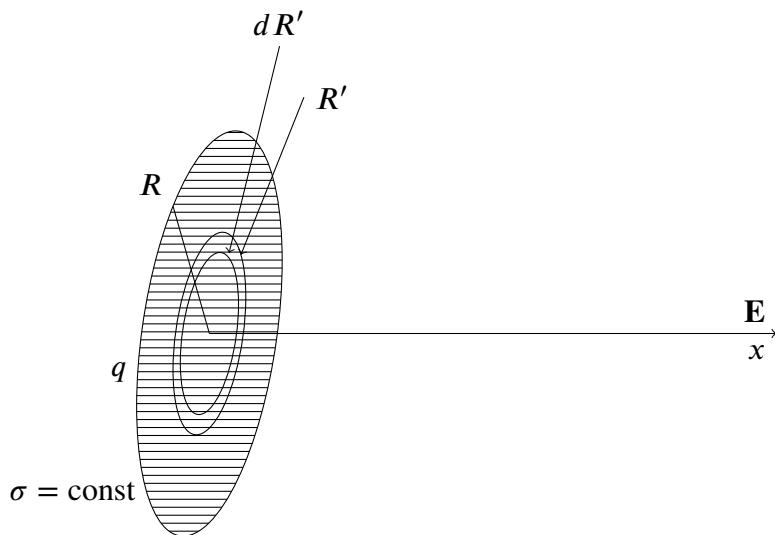


Рис. 4: Напряжённость электрического поля на оси равномерно заряженного диска.

Наш диск мы будем разбивать на кольца и интегрировать поля от них, которые нам уже известны. Рассмотрим кольцо произвольного радиуса R' и толщины dR' . Вклад dE от этого кольца в напряжённость будет выражаться как

$$dE = k dq \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + R'^2}\right)^3}.$$

Заряд же кольца dq будет выражаться через полный заряд диска с помощью отношения площадей,

$$dq = q \frac{2\pi R' dR'}{\pi R^2}.$$

Так получим

$$\begin{aligned} E &= \int_0^R dE = kq \frac{x}{R^2} \int \frac{2R' dR'}{\left(\sqrt{x^2 + R'^2}\right)^3} = \\ &= kq \frac{x}{R^2} \left(-2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + R'^2}} \right) \Big|_0^R, \end{aligned}$$

$$E(x) = 2k \frac{q}{R^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \quad (2.1)$$

Проанализируем полученный ответ. Рассмотрим два случая,

а) $x \ll R$:

$$E = 2k \frac{q}{R^2} = \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z} \cdot 2\epsilon_0} \frac{q}{\pi R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.2)$$

б) $x \gg R$: достаточно очевидно, что

$$E = k \frac{q}{x^2}. \quad (2.3)$$

Силовые линии поля заряженного диска будут выглядеть следующим образом,

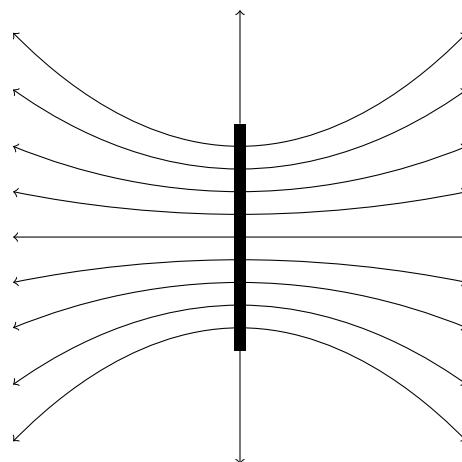


Рис. 5: Силовые линии электрического поля равномерно заряженного диска.

Рассмотренный выше случай а) особо важен тем, что он идентичен случаю бесконечной плоскости. Ясно, что бесконечных плоскостей в природе нет, однако это приближение достаточно хорошо работает, когда расстояние до плоскости много меньше линейных размеров рассматриваемого тела.

Перейдём теперь к случаю двух плоскостей с противоположными зарядами, с площадью пластин S , расстояние между которыми много меньше их линейных размеров ($d \ll \sqrt{S}$). Согласно принципу суперпозиции, напряжённость будет равна сумме напряжённостей каждой из плоскостей,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.4)$$

Силовые линии, однако, будут иметь достаточно непростой вид: внутри линии будут почти прямо направлены от положительной плоскости к отрицательной, однако вблизи краёв они будут всё сильнее искривляться. Снаружи поле тоже существует, причём его силовые линии огибают систему конденсатора вместе со всему искривлёнными силовыми линиями.

Теорема Гаусса—Остроградского

Если система зарядов обладает осевой или цилиндрической симметрией, или же если она одномерна, напряжённость её электрического поля можно определить более простым способом.

Рассмотрим маленькую площадку ds , такую что поле в рамках неё можно считать однородным. Площадка характеризуется своей величиной и ориентацией её нормали \mathbf{n} : обозначим угол между \mathbf{E} и \mathbf{n} как α .

Потоком поля \mathbf{E} через площадку ds назовём скалярную величину $d\Phi_E$, такую что

$$d\Phi_E = E ds \cos \alpha = \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{ds} = ds \mathbf{n}$.

Очевидно, что напряжённость поля пропорциональна потоку через единичную площадку, так как он пропорционален плотности силовых линий через неё.

Рассмотрим замкнутую поверхность, окружающую заряд: какой бы ни была форма площадки, число силовых линий, проходящих через неё, не изменится — значит, поток будет зависеть только от заряда. Это и есть суть теоремы Гаусса—Остроградского.

Сосчитаем сперва поток через сферическую поверхность, в центре которой находится точечный заряд. Мы знаем, что напряжённость поля на поверхности сферы будет равна

$$E = k \frac{q}{R^2},$$

угол с нормалью будет нулевым, тогда

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \oint_S k \frac{q}{R^2} ds,$$

то есть,

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.6)$$

Возьмём теперь совершенно любую поверхность вокруг заряда. Рассмотрим произвольную площадку ds с радиус-вектором \mathbf{r} и с нормалью \mathbf{n} под некоторым углом α к вектору \mathbf{E} .

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = E ds \cos \alpha = E ds_{\perp}.$$

Теперь введём телесный угол $d\Omega$, который, согласно определению, равен

$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2}, \text{ то есть, } \Phi_E = Er^2 d\Omega.$$

Берём снова интеграл по замкнутой поверхности,

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \oint_S Er^2 d\Omega = kq \oint d\Omega,$$

откуда, с учётом того, что полный телесный угол равен 4π ,

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим систему зарядов. Согласно принципу суперпозиции, мы можем их рассматривать поодиночке.

Теорема Гаусса—Остроградского. Поток вектора напряжённости от системы зарядов через замкнутую поверхность, их содержащую, зависит только от их алгебраической суммы и равен

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Экспериментальные основания закона Кулона

С помощью теоремы Гаусса—Остроградского вычисление напряжённости поля может сильно упроститься, если из-под знака интеграла можно получить функцию.

В качестве примера рассмотрим сферу с радиусом R и зарядом q , равномерно распределённым по поверхности. Найдём напряжённость на расстоянии r от центра сферы.

- a) $r < R$: $\Phi_E = 0$,
- б) $r > R$: $\Phi_E = q/\epsilon_0$.

Тогда поле снаружи сферы равно

$$E = \frac{q}{S\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

чего и требовалось ожидать. Внутри же сферы поля нет.

Важно отметить, что если бы напряжённость поля точечного заряда не была обратно пропорциональной квадрату расстояния, то поле внутри заряженной сферы существовало бы.

Рассмотрим две маленькие площадки ds_1 и ds_2 , видимые из некоторой точки внутри сферы под одинаковым телесным углом $d\Omega$. Расстояние до каждой из них можно будет получить через $r_i^2 d\Omega = ds_i$, а заряды их равны $dq_i = \sigma ds_i$. Пусть напряжённость выражается некоторым законом $dE_i = k dq_i / r_i^\alpha$, где $\alpha \neq 2$. С помощью подстановки получим, что

$$dE_i = k \frac{\sigma ds_i}{r_i^\alpha} = k \sigma \frac{r_i^2 d\Omega}{r_i^\alpha} = k \sigma d\Omega r_i^{(2-\alpha)}.$$

Очевидно, что разность напряжённости в любых двух точках внутри заряженной сферы обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\alpha = 2$.

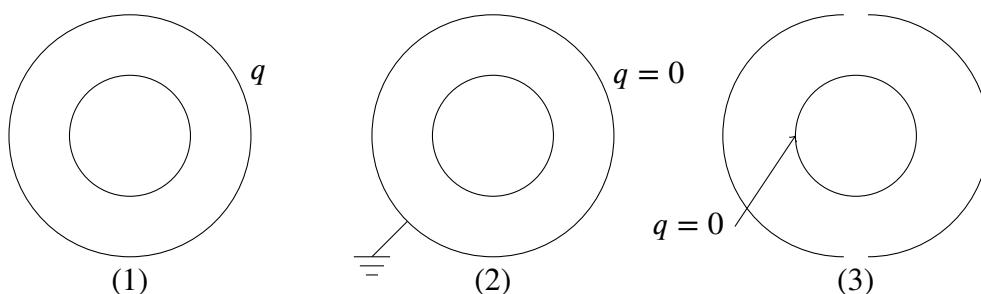


Рис. 6: Опыт Кавендиша.

Первое доказательство закона Кулона было представлено Г. Кавендишем за пятнадцать лет до того, как Кулон сформулировал закон — как раз по представленной выше

схеме. Кавендиш собрал установку в виде шара, окружённого двумя подвижными полу-сферами. Замкнув их, он получил новый шар, внутри которого не должно было существовать электрическое поле. Сообщив этому шару заряд и раздвинув полусфераы через некоторое время, Кавендиш обнаружил, что внутренний шар не был электрически заряжен, а значит, поля не существовало и закон Кулона справедлив.

Можно было бы возразить, что тут речь идёт о лабораторном эксперименте — кто знает, может быть, в космосе или в микромире закон Кулона несправедлив. Однако были получены экспериментальные подтверждения, что он справедлив и в космосе, и в микромире — примером тому могут являться работа атомно-силового микроскопа или резонансы Шумана (своего рода собственные частоты колебаний земной ионосферы).

Теорема Гаусса—Остроградского в дифференциальной форме

Дифференциальная форма практически любого физического закона предпочтительнее интегральной, потому что в малом приближении с большей вероятностью явления близки к идеальным. Так же и с теоремой Гаусса—Остроградского.

Рассмотрим малый кубик, построенный на точке $M = \{x, y, z\}$ со сторонами dx, dy, dz . Начнём считать поток Φ_E .

$$\begin{aligned}\Phi_E = & E_x \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) - E_x \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) dy dz + \\ & + E_y \left(x, y + \frac{dy}{2}, z \right) - E_x \left(x, y - \frac{dy}{2}, z \right) dx dz + \\ & + E_y \left(x, y, z + \frac{dz}{2} \right) - E_x \left(x, y, z - \frac{dz}{2} \right) dy dz = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) dx dy dz.\end{aligned}$$

Поделив всё это на $dx dy dz$, получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

что и является *дифференциальной формой теоремы Гаусса—Остроградского*.

Электрическое напряжение. Разность потенциалов

Рассмотрим электрическое (не обязательно электростатическое) поле и поместим туда электрический заряд q , для определённости, положительный. Очевидно, что на него будет действовать сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Сила умеет совершать работу $A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, согласно определению, а значит, поле можно охарактеризовать с точки зрения этой работы.

Назовём *электрическим напряжением* U отношение указанной выше работы к заряду,

$$U = \frac{A}{q} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.14)$$

Единицей измерения электрического напряжения служит *вольт*,

$$[U] = 1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}}. \quad (2.15)$$

Существуют поля, в которых работа по перемещению заряда между двумя точками не зависит от формы пути. Такие поля называют *потенциальными*.

Для потенциальных полей напряжение можно записать в виде разности двух *потенциалов*, характеризующих точки,

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi. \quad (2.16)$$

Обратим внимание, что это верно только для потенциальных полей.

Можно ещё указать, что работа по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (2.17)$$

что является ещё одним определением потенциальности поля.

Получим выражение для разности потенциалов электрического поля: Пусть есть заряд q , который создаёт поле с напряжённостью \mathbf{E} . Запишем напряжённость в векторном виде как

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $r = |\mathbf{r}|$, и заметим, что $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r (|d\mathbf{r}| \cos \alpha) = r dr = r d\mathbf{r}$

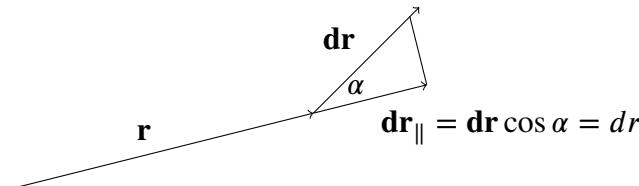


Рис. 7: Иллюстрация равенства $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r d\mathbf{r}$.

Перейдём к интегралу,

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = kq \frac{1}{r_1} - kq \frac{1}{r_2} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2). \quad (2.18)$$

Получим, что электрическое напряжение электрического поля равно разности потенциалов — это следствие и подтверждение того, что поле потенциально.

Лекция 3

Электростатика. Потенциал

Потенциал электростатического поля

Повторим определения электрического напряжения и разности потенциалов.

Электрическим напряжением U_{12} является скалярная величина, равная отношению работы по перемещению заряда из точки 1 в точку 2. В потенциальном поле она равна разности потенциалов этих точек.

Ещё одно важное следствие потенциальности — уже упомянутое выражение

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

А что же такое потенциал?

Потенциалом поля в точке r мы называем интеграл

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \varphi(r_0) \quad (3.1)$$

для фиксированной точки r_0 и произвольно выбранного (нормированного) значения $\varphi(r_0)$.

Обычно за r_0 берут бесконечно удалённую точку, полагая $\varphi(\infty) = 0$. В таком случае,

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \varphi(\infty). \quad (3.2)$$

Повторяя вычисления конца прошлой лекции, получим потенциал поля точечного заряда в данной точке,

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}. \quad (3.3)$$

Поверхности, во всех точках которых потенциалы равны, называют *эквипотенциальными*. Несложно заметить, что для поля точечного заряда эквипотенциальными поверхностями будут сферы, в центре которых расположен наш заряд.

Потенциал системы зарядов в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов зарядов, взятых поодиночке,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i^N \frac{kq_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Очевидно, что можно заменить сумму интегралом,

$$\varphi(\mathbf{r}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Рассмотрим два примера.

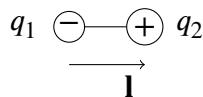


Рис. 8: Диполь.

а) Потенциал поля диполя.

Рассмотрим поле на расстоянии \mathbf{r} от центра диполя. Обозначим расстояния до зарядов диполя r_+ и r_- соответственно. Потенциал в нашей точке будет равен

$$\varphi = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = kq \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}.$$

Пусть $l \ll r$, тогда получим,

$$\varphi \approx kq \frac{l \cos \alpha}{r^2}.$$

Можно переписать полученный результат в более красивом виде, вводя вектор дипольного момента $\mathbf{p} = ql$, где \mathbf{l} направлен от отрицательного заряда к положительному.

$$\varphi = k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}, \quad (3.4)$$

где \mathbf{e}_r — единичный вектор, сонаправленный \mathbf{r} .

б) Потенциал поля равномерно заряженной по поверхности сферы.

Заряд сферы — q , радиус — R .

Помня, что внутри сферы поля нет, а вне неё напряжённость падает как kq/r^2 , обратим внимание то, что потенциал — это интеграл напряжённости, а значит, его можно себе представлять как площадь под её графиком. Итак, потенциал внутри сферы будет некоторой константой, определяемой из граничных условий, а вне сферы —

$$\varphi(r) = \frac{kq}{r}. \quad (3.5)$$

в) Потенциал поля шара, равномерно заряженного по объёму.

Заряд шара — q , радиус — R .

Поле внутри шара описывается формулой

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r,$$

а снаружи оно идентично полю точечного заряда.

Соответственно, потенциал вне шара будет таким же, как вне сферы, а внутри он будет представлять из себя ветвь некоторой квадратной параболы с вершиной на оси.

Локальная связь между напряжённостью поля и потенциалом Уравнение Пуассона

Зная, что потенциал выражается интегралу по напряжённости (хотя бы в данном направлении при сферической симметрии), мы невольно себя спросим, а можно ли выразить поле как производную потенциала в любом случае?

Заметим сперва, что потенциал всегда непрерывен из физического смысла, ведь в противном случае на бесконечно малом участке вокруг разрыва совершилась бы конечная работа, а это невозможно.

Рассмотрим две близкие точки с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$; в силу их близости запишем,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{dr}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr},$$

где мы в силу их близости обошлись без взятия интеграла.

Зная, что приращение φ , как функции многих аргументов, записывается как

$$-d\varphi = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{dr}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

получим связь каждой компоненты поля с соответствующей производной потенциала,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz &= E_x dx + E_y dy + E_z dz. \\ E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Иными словами,

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi. \tag{3.7}$$

Скажем теперь об уравнении Пуассона, одном из фундаментальных уравнений физики. Пусть нам известна объёмная плотность зарядом $\rho(x, y, z)$ в данной точке — как с её помощью найти потенциал?

Поскольку $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, а по теореме Гаусса—Остроградского $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho(x, y, z)/\epsilon_0$, возьмём дивергенцию этого градиента и получим уравнение Пуассона,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} = \Delta^2 \varphi. \tag{3.8}$$

Это и есть уравнение Пуассона. Оно хорошо изучено и решения его известны, так что с его помощью можно найти распределение потенциала всегда, когда известно распределение зарядов.

Однородное поле внутри заряженного шара

Приведём один важный и очень нужный пример. Зададим себе вопрос, можно ли как-нибудь зарядить сферу так, чтобы всюду внутри неё было однородное поле?

Найдём ответ в простой и даже несколько примитивной форме: возьмём равномерно заряженную по объёму сферу. Напряжённость его равна

$$\frac{\rho}{3\epsilon_0}r,$$

это следует из теоремы Гаусса—Остроградского. Если мы зарядим сферу так же, но с противоположным знаком, то напряжённость будет такой же, но с направлением в другую сторону.

А если взять две равные сферы и зарядить их равными по модулю, но противоположными по знаку зарядами, и расположить так, чтобы расстояние между их центрами l было $l \ll R$? Тогда напряжённость будет равна

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{l} = \text{const},$$

Отметим, что $\rho l = \sigma$, то есть, поверхностная плотность заряда сферы. Отметим, что поверхностная плотность нашей конструкции не является константой. В точке сферы, радиус к которой сонаправлен \mathbf{l} она максимальна, а перпендикулярно — равна нулю. Оказывается, что

$$\sigma(\alpha) = \sigma_0 \cos \alpha,$$

где α — угол между радиусом к данной точке сферы и вектором \mathbf{l} . Подставив это в предыдущее выражение, получим,

$$E = \frac{1}{3\epsilon_0} \sigma_0. \quad (3.9)$$

Проводники в электростатическом поле

Согласно современным представлениям, в проводнике есть большое количество *свободных*, или *валентных*, *электронов*, которые оторвались от своих атомов и совершают достаточно сложные движения внутри вещества. В случае наличия внешнего поля, электроны приходят в движение и сдвигаются, создавая своё, *индукционное поле*, которое должно скомпенсировать внешнее поле. Поле в проводнике, очевидно, равно сумме внешнего и индукционного полей.

Из школы мы знаем, что электроны в веществе дрейфуют с некоторой средней скоростью $v_{cp.}$, причём их дрейф мы рассматриваем, несколько идеализированно, следующим образом: пусть в начале электрон не имеет скорости, потом за среднее время свободного пробега τ он разгоняется до скорости $a\tau$, после чего соударяется с другим электроном и его скорость снова становится равной нулю. Помня, что $a = F/m$, и оценивая $v_{cp.} \approx a\tau/2$, запишем

$$v_{cp.} = \frac{1}{2} \frac{|e|E_0}{m} \tau.$$

Чтобы говорить об индукционном поле, обозначим образовавшиеся на краях вещества индукционные заряды через $+q$ и $-q$, и тогда (как будто мы имеем дело с бесконечной плоскостью), запишем

$$E_{\text{инд.}} = \frac{q}{S\epsilon_0} = \frac{n|e|L\mathcal{S}}{\mathcal{S}\epsilon_0},$$

где S — площадь поверхности вещества (перпендикулярная напряжённости внешнего поля), а L — это перпендикулярная ей длина области вещества, в которой сосредоточен индукционный заряд, выражаемая как

$$L = v_{cp.} t.$$

Чтобы найти время установления индукционного поля t , подставим это выражение в предыдущее,

$$E_{\text{инд.}} = \frac{ne^2}{\epsilon_0} \frac{\tau}{2m}$$

а вводя удельную электропроводность

$$\sigma_{y\delta.} = \frac{ne^2\tau}{2m},$$

которая зависит от свойств вещества и чья величина в металле $\sigma_{y\delta.} \sim 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, получим условие

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{инд.}}}{E_0} &= \frac{\sigma_{y\delta.}}{\epsilon_0} t = 1, \\ t &= \frac{\epsilon_0}{\sigma_{y\delta.}} \sim 10^{-18} \text{ с.} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Выходит, что индукционное поле появляется очень быстро.

Поместим, например, во внешнее поле шар: он сразу же начнёт подвергаться электромагнитной индукции, внешнее поле внутри шара будет компенсироваться индукционным, поля внутри шара не будет, а вне шара будет иметь место суперпозиция внешнего и индукционного полей. Отметим, что все точки внутри шара, включая поверхность, имеют одинаковый потенциал, а значит, все они эквипотенциальны.

Поскольку поля внутри проводника нет, $\text{div } \mathbf{E} = 0$, объёмная плотность зарядов внутри шара, согласно теореме Гаусса, также равна нулю. Выходит, все индукционные заряды собраны на поверхности.

Поскольку однородное поле внутри шара, как мы уже показали, имеет напряжённость

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0},$$

получим, что

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3\epsilon_0 E_0, \\ \sigma(\alpha) &= 3\epsilon_0 E_0 \cos \alpha. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Зададимся вопросом, какие ещё тела позволяют создать внутри себя однородное поле? Выяснится, что шар — это частный случай эллипса, который тоже такое позволяет.

Лекция 4

Проводники в электрическом поле. Диэлектрики

Электрическая ёмкость. Плоский конденсатор

Уже известно, что потенциал φ уединённого точечного заряда q , $\varphi \sim q$. Возникает желание ввести коэффициент этой пропорциональности. Исторически был введён обратный коэффициент, *ёмкость*,

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим сперва простейший пример — точечный заряд. Для него

$$\varphi = k \frac{q}{r}.$$

Если мы возьмём металлический шар, то потенциал на его поверхности тоже будет выражаться так же. Чему же равна ёмкость уединённого шара? Проще всего ёмкость выражается в системе СГС — в ней $k = 1$, а измеряется ёмкость в сантиметрах. В СИ, однако, для единицы ёмкости придумали соответствующую единицу, *фарад* (Φ). Попробуем оценить ёмкость уединённого шара в фарадах.

$$C = \frac{10^{-2}}{10^{10}} \simeq 10^{-12} \Phi.$$

Как видим, фарад — это очень маленькая единица.

Простейший конденсатор был изобретён в 1745 г. в городе Лейдене, в Нидерландах. Он состоит из двух металлических поверхностей и стакана между ними. Обратим внимание на то, что ещё триста лет назад электромагнетизма как науки не существовало вообще.

Лейденская банка является представителем класса *простых конденсаторов* — тех, у которых все силовые линии, выходящие с одной обкладки, кончаются на другой обкладке. Сегодня на лекции мы будем рассматривать простые конденсаторы, не уточняя каждый раз, что они являются таковыми.

Самым простым примером является *плоский конденсатор*. Он представляет собой систему из двух пластин, размеры которых много больше линейного расстояния между ними, $\sqrt{S} \gg d$. В таком случае поле сосредоточено между двумя пластинами, а остальными эффектами мы пренебрегаем. Как уже было получено с помощью теоремы Гаусса—Остроградского, поле такой пластины будет равно

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Напряжение в таком конденсаторе будет равняться $U = Ed$, заряд представим как $q = \sigma S$, тогда можно записать для ёмкости C ,

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\sigma S \epsilon_0}{\sigma d} = \frac{S \epsilon_0}{d}. \quad (4.2)$$

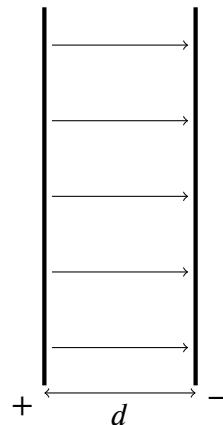


Рис. 9: Плоский конденсатор, пример простого конденсатора.

Отметим, что увеличивать ёмкость сколь угодно много за счёт уменьшения расстояния d невозможно, потому что слишком малое расстояние между пластинами приведёт к пробою.

Напряжение пробоя для воздуха равно

$$U_{\text{пробоя}} \simeq 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Рассмотрим ещё один интересный вопрос, касающийся плоских конденсаторов: пусть в нашем плоском конденсаторе в середине пластин есть небольшое отверстие, через которое мы проносим точечный заряд q . Очевидно, что при этом совершается работа, равная

$$A = qEd.$$

Продолжим затем движение и вернёмся обратно в исходную точку, обходя пластины со внешней стороны. Получим движение по замкнутому контуру с ненулевой совершённой работой. Как так?

Очевидно, конденсатор не влияет на потенциальность поля. Дело в том, что считая плоскости пластин конденсатора бесконечными, мы пренебрегаем краевыми эффектами — именно из-за них, пусть они и малы сами по себе, суммарная работа всё-таки должна бы обращаться в нуль.

Цилиндрический конденсатор

Теперь посчитаем ёмкость коаксиального цилиндрического конденсатора длины L . Пусть наши обкладки имеют радиусы R_1 и R_2 , и заряды, в силу электронейтральности, $+q$ и $-q$.

В силу теоремы Гаусса—Остроградского, поток через наши пластины будет равен

$$\Phi = E 2\pi r L = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Таким образом мы можем получить напряжённость поля на расстоянии r от оси,

$$E(r) = \frac{q}{\epsilon_0 2\pi L} \frac{1}{r}.$$

Ради получения напряжения возьмём интеграл,

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

а отсюда сразу же имеем ёмкость,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (4.3)$$

Опять же, если мы хотим получить большую ёмкость, нам нужно взять маленький зазор между пластинами. Применим эту формулу к модели маленького зазора, пусть $\Delta R \ll R_{1,2}$. Из матанализа имеем $\ln(1 + x) \simeq x$, значит,

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{\Delta R}{R_1} \right) = \frac{\Delta R}{R_1}.$$

Тогда ёмкость конденсатора будет выражаться как

$$C = \frac{\epsilon_0 2\pi R_1 L}{\Delta R}. \quad (4.4)$$

Поскольку $R_1 L = S$, получим

$$= \frac{\epsilon_0 S}{\Delta R},$$

то есть, если расстояние между обкладками мало, цилиндрический конденсатор мало отличается от плоского.

Аналогичные вычисления для сферического конденсатора несложны и на лекции не приводятся. По большому счёту, вся разница сведётся к тому, что вместо логарифма при интегрировании появится обратная функция.

Соединения конденсаторов

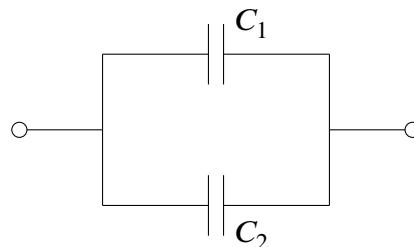


Рис. 10: Параллельное соединение простых конденсаторов.

Мы работаем только с простыми, электронейтральными конструкциями, поэтому, когда мы подключим вышеобозначенную схему к источнику, мы получим

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U,$$

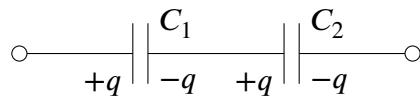


Рис. 11: Последовательное соединение простых конденсаторов.

а суммарная (эффективная) ёмкость при параллельном подключении конденсаторов будет равна

$$C_{\text{эфф.}} = \frac{q_1 + q_2}{U} = C_1 + C_2. \quad (4.5)$$

При последовательном, однако, соединении конденсаторов, происходит не то же самое. Обратимся к закону сохранения заряда: из него следует, что заряды двух конденсаторов будут равны. Отсюда же мы сможем найти напряжение на каждом из конденсаторов,

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2},$$

далее из материала, который мы помним со школы,

$$U_{\Sigma} = U_1 + U_2.$$

откуда согласно определению,

$$\frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

откуда мы и можем получить эффективную ёмкость системы конденсаторов с последовательным соединением,

$$\frac{1}{C_{\text{эфф.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (4.6)$$

Заметим, что эти формулы обратны соответствующим для резисторов.

Диэлектрики в электростатическом поле. Поляризация диэлектриков

Перейдём теперь к теме диэлектриков. Скорее всего, эта тема окажется менее привычной, потому что в школе, в отличие от предыдущей, с ней не сталкиваются.

Что же происходит с заряженными частицами, когда они помещаются в диэлектрик? На самом деле, ничего. Зато вот в диэлектрике начинается перераспределение зарядов, при котором частицы диэлектрика переориентируются под действием микроскопических кулоновских взаимодействий.

Представим себе плоский конденсатор, пространство между пластинами в котором заполнено некоторым диэлектриком. Под действием поля между пластинами на поверхности диэлектрика собираются некоторые поверхностные заряды δq .

Попробуем оценить величину смещения электрона в ядре под действием внешнего поля. Все мы находили величину электростатического поля на оси заряженного кольца,

$$E = k \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Пусть $x \ll R$. Тогда мы получим, что электростатическое поле

$$E = k \frac{q}{R^3} x.$$

Итак, насколько же далеко можно сместить ядро, чтобы получить разумное внешнее поле. Для определённости представим сильное внешнее поле порядка величины пробоя воздуха, $E_{\text{внеш.}} \sim 10 \text{ кВ}$.

$$x = \frac{E_{\text{внеш.}} R^3}{kq} = \frac{3 \cdot 10^6 \text{ В/м} \cdot 0,5^3 \cdot 10^{-30} \text{ м}}{10^{10} \text{ Ф/м} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} \sim 10^{-15} \text{ м.}$$

Как мы знаем, боровский радиус по порядку величины равен 10^{-10} м , а значит, смещение ядра (и электрона) можно считать малым при полях, меньших 10^{10} В/м .

Ещё одно важное следствие из вышеполученного — дипольный момент атомов пропорционален внешнему полю. Поскольку атомов много, об их дипольных моментах говорят вместе, вводя *вектор поляризации* вещества,

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\tau}, \quad (4.7)$$

где τ — это объём, в котором сосредоточены индуцированные заряды.

Коэффициент пропорциональности между P и E называют *диэлектрической восприимчивостью*, и обозначают по-разному, но мы будем обозначать его как χ (ϵ_0 мы вводим в это выражение ради того, чтобы χ было безразмерной величиной):

$$P = \chi \epsilon_0 E. \quad (4.8)$$

Диэлектрик в плоском конденсаторе

Итак, рассмотрим плоский конденсатор с длиной пластин L , с полем E_0 и расстоянием d между ними. Поместив между обкладками диэлектрическую пластину, мы получим поверхностные заряды плотностью σ' и σ^+ . Суммарный дипольный момент будет равняться

$$\sum p_i = qd = \sigma' Sd,$$

а для вектора поляризации получим отсюда

$$P = \frac{\sigma' Sd}{\tau} = \sigma'.$$

Вспомним, что $P = \chi \epsilon_0 E$, однако E тут — это не E_0 , а сумма внешнего и индуцированного полей. Тогда

$$P = \chi \epsilon_0 (E_0 - E_{\text{внутр.}}).$$

По теореме Гаусса—Остроградского получим, что

$$E_{\text{внутр.}} = \frac{\sigma'}{\epsilon_0},$$

ЧТО МЫ МОЖЕМ ПОДСТАВИТЬ В ПРЕДЫДУЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ, ПОЛУЧАЯ

$$\epsilon_0 E_{внутр.} = \chi \epsilon_0 (E_0 - E_{внутр.}).$$

Из этого, вводя *диэлектрическую проницаемость среды* $\epsilon = 1 + \chi$, получаем

$$E_{внутр.} = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (4.9)$$

Зная, что поле в конденсаторе уменьшилось в ϵ раз, получим выражение для ёмкости конденсатора, в который введён диэлектрик. Поскольку

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{Ed},$$

ёмкость станет в ϵ раз больше,

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}. \quad (4.10)$$

Именно по этой причине — чтобы увеличивать их ёмкость — и имеет смысл делать конденсаторы не воздушными, а заполненными некоторым диэлектриком.

Лекция 5

Диэлектрики в электрическом поле

Вектор поляризации. Связанные заряды

Диэлектрик — это вещество, в котором под действием внешнего поля могут появляться *связанные заряды*, то есть такие заряды, которые могут смещаться только на очень маленькие, атомные расстояния.

В простейшем случае мы можем себе представить это смещение как деформацию электронного облака атома под действием поля. Вследствие этой деформации возникает дипольный момент, о котором мы говорили на прошлой лекции.

Если диэлектрик однородный и поле однородное, то можно сказать, что все связанные заряды появляются только на поверхности диэлектрика.

Вспомним основные соотношения, связывающие описывающие диэлектрики физические величины, при внешнем поле \mathbf{E} : дипольный момент частицы \mathbf{p} ,

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E},$$

где α — поляризуемость; вектор поляризации \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i,$$

где V — объём, по которому производится суммирование; для однородной поляризации N частиц,

$$\mathbf{P} = N \mathbf{p} = N \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E},$$

где χ — диэлектрическая восприимчивость; диэлектрическую проницаемость ϵ ,

$$\epsilon = 1 + \chi,$$

и зависимость величины электрического поля в конденсаторе с диэлектриком от его проницаемости,

$$E \propto \epsilon^{-1}.$$

Перечисленные понятия ещё не раз встретятся нам по ходу курса, так что повторить их не будет лишним. Чтобы ориентироваться в численных значениях, приведём приблизительные значения ϵ некоторых сред:

вакуум	1
воздух	$1 + \epsilon$
оксид кремния	4
кремний	12
вода	81

Когда на поверхности наводится связанный заряд плотностью σ' , в объёме возникает связанный заряд q' , связанный с ним условием электрической нейтральности вещества (ведь частицы не уходят далеко от своего начального положения).

Воспользуемся теоремой Гаусса—Остроградского: мы понимаем, что

$$\Phi_P = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -q',$$

а при этом,

$$-q' = \int_V \rho' dV.$$

Зная, что по теореме Гаусса—Остроградского

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV,$$

запишем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho'. \quad (5.1)$$

Вектор электрической индукции. Материальные уравнения

Отсюда мы подходим ко введению вектора **электрической индукции** \mathbf{D} . Запишем выражение потока \mathbf{E} через произвольную поверхность,

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} + \frac{q'}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$

Путём домножения обеих частей выражения на ϵ_0 получим

$$\oint (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = q.$$

Значит, если диэлектрик не заряжен, то приведённый интеграл равен нулю.

В таком случае, введём

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (5.2)$$

тогда

$$\Phi_D = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q, \quad (5.3)$$

что приводит нас к выражению, аналогичному одному из уравнений Максвелла.

Чтобы переписать вышенаписанное утверждение в дифференциальной форме, обратимся снова к теореме Гаусса—Остроградского,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV,$$

и, помня, что

$$q = \int_V \rho dV,$$

получим, что

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (5.4)$$

Следовательно, единственным источником электрической индукции являются свободные заряды.

Получим теперь ещё пару интересных связей вектора \mathbf{D} со введёнными нами ранее векторами. Поскольку по определению

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

а для вектора поляризации мы можем написать

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E},$$

получим

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}. \quad (5.5)$$

Полученная нами только что связь является примером *материальных уравнений*. Материальными называют уравнения, связывающие векторы, описывающие электромагнитное поле, с параметрами среды (материала): ϵ , χ , и т. п.

Поскольку мы можем выразить вектор поляризации \mathbf{P} ещё и через \mathbf{D} ,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 \chi}{\epsilon_0 \epsilon} \mathbf{D} = \frac{\chi}{\chi + 1} \mathbf{D} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \mathbf{D}.$$

Эти соотношения тоже называются материальными уравнениями.

Зададимся вопросом, есть ли глубокий физический смысл вектора электрической индукции \mathbf{D} ? Оказывается, нет. Мы можем ясно говорить об электрическом поле напряжённости \mathbf{E} , о поляризации \mathbf{P} , о наводимых связанных зарядах и т. д.; а сумма их собой представляет только лишь сумму двух полей. Избегать этого вектора, однако, не стоит, потому что его введение сильно упрощает запись уравнений Максвелла и работу с ними.

Вернёмся теперь к нашему фундаментальному уравнению,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

и перепишем его с учётом соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E},$$

в таком случае получим, при условии однородности среды ($\nabla \epsilon = \mathbf{0}$),

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (5.6)$$

Если же вдруг среда однородной не является, то возникнут проблемы при взятии градиента.

Можно отдельно отметить, что устремляя ϵ , или χ , к бесконечности, мы получим, что внутреннее поле скомпенсирует внешнее, то есть, в некотором роде предельным случаем диэлектрика является проводник.

Границные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D}

Обратим сперва внимание, что в отличие от силовых линий поля \mathbf{E} , линии электрической индукции не меняются при внесении в поле диэлектрика, стороны которого параллельны границе раздела сред. Теперь перейдём к более строгому рассмотрению: представим себе границу сред (1) и (2). Будем пользоваться теоремой о циркуляции,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \oint_{\nabla L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

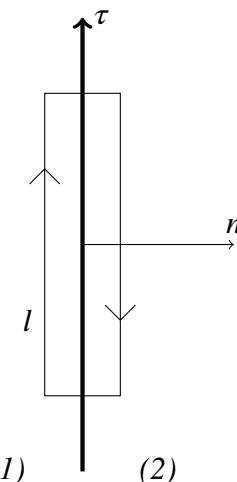


Рис. 12: Иллюстрация взятого для рассуждения контура.

В частности, эта теорема верна для маленького прямоугольного контура, расположенного относительно раздела сред как показано на рисунке.

Рассмотрение тангенциальных компонент циркуляции даст нам выражение

$$E_{1\tau}l - E_{2\tau}l = 0,$$

а нормальными компонентами мы пренебрежём в силу их малости. Тогда мы получим, в силу произвольности l , равенство тангенциальных компонент электрического поля на разделе двух сред,

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (5.7)$$

Можно записать аналогичные соотношения и для вектора \mathbf{D} ,

$$D_{i\tau} = \epsilon_i E_{i\tau}, \quad (5.8)$$

откуда ясно видно, что тангенциальная компонента вектора \mathbf{D} разрывается на границе сред.

Обратим особое внимание на замечательный факт, что если мы хотим получить величину поля в некоторой вытянутой параллелепипедальной полости внутри диэлектрика, ориентированной вдоль напряжённости поля, мы получим в силу граничных условий, что поле в ней равно полю в диэлектрике. Если же полость будет ориентирована иначе, то возникнут не пренебрежимо малые связанные заряды, и поле будет иным. Отсюда ясно видно, что поле внутри полости в диэлектрике зависит от формы этой полости.

Рассмотрим теперь нормальные компоненты циркуляции. Под действием нормальных компонент электрического поля на поверхности границы раздела появится наведённый заряд плотностью σ'_1 и σ'_2 , различные в силу наличия границы сред — ведь в противном случае рассматриваемые среды будут неотличимы друг от друга хотя бы с точки зрения диэлектрических свойств.

Рассматривая плоскость раздела сред, мы можем посчитать поле от неё согласно модели бесконечной плоскости. Тогда суммарное нормальное поле E_i в i -той среде будет

равно

$$E_{1n} = \frac{-\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\epsilon_0}; \quad E_{2n} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\epsilon_0}.$$

Не составит труда записать разность полей,

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{\epsilon_0}. \quad (5.9)$$

Мы видим, что нормальные компоненты электрического поля разрываются на границе сред, и разрыв этот вызван разной поверхностной плотностью наведённых связанных зарядов.

Отметим, что векторы поляризации связаны с использованными нами величинами как

$$\sigma'_1 = P_{1n}; \quad \sigma'_2 = P_{2n}.$$

Подставив это в предыдущее выражение, домножив обе части на ϵ_0 и перенеся соответствующие члены, получим

$$\epsilon_0 E_{1n} + P_{1n} = \epsilon_0 E_{2n} + P_{2n},$$

где обе части являются, согласно определению, нормальными компонентами вектора **D**. Отсюда получим, что на границе раздела сред

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (5.10)$$

Разумеется, полученное выражение верно только в отсутствие свободных зарядов; если они присутствуют, то наше выражение необходимо переписать как

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma.$$

Итак, повторим полученные результаты:

- | | |
|---------------------|---|
| вдоль раздела | параллельно разделу |
| E непрерывен | разрывен |
| D разрывен | непрерывен в отсутствие свободных зарядов |

Диэлектрический шар в однородном поле

Рассмотрим напоследок одну задачу: поместим диэлектрический шар, помещённый в однородное электрическое поле. Достаточно очевидно, что при этом плотность связанных зарядов распределится неоднородно. Как посчитать электрическое поле вне шара и внутри него? Важно отметить, что внешнее поле будет меняться под действием индуцированного поля.

Можно было бы решить эту задачу напрямую из уравнений Максвелла, однако так мы делать не будем, оставив этот способ для курсов теоретической физики.

Есть один способ получить правильный ответ на эту задачу другим путём. Вспомним уже рассмотренную на лекциях модель из двух противоположно заряженных равных

сфер, расстояние между центрами которых много меньше их радиуса. Мы помним, что в таком случае (согласно теореме Гаусса—Остроградского) поле выражается как

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}, r < R; \quad E = k \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, r > R.$$

Поле индуцированных зарядов в нашем шаре будет стремиться компенсировать внешнее поле,

$$\mathbf{E}_{ind.} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}.$$

В таком случае мы можем посчитать суммарное поле E ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{ind.}.$$

Представим вектор поляризации через диэлектрическую восприимчивость, $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$, и объединим последние три выражения в одно,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon_0 \chi}{3\epsilon_0} \mathbf{E}.$$

Из этого выражения мы найдём связь между суммарным полем и внешним,

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\chi + 3} \mathbf{E}_0 = \frac{3}{\epsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

С помощью этого также можно получить запись вектора поляризации \mathbf{P} как через внешнее, так и через суммарное поле.

Лекция 6

Диэлектрики

Диэлектрики в электрическом поле

Начнём лекцию с завершения рассмотрения диэлектрического шара в однородном электрическом поле. Приведём повторно полученный результат для вектора поляризации,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{3\chi}{\chi + 3} \mathbf{E}_0 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Мы ничего не сказали о поле наведённых зарядов вне шара. Каким же оно будет? Оказывается, что оно в точности повторит поле диполя, то есть, суперпозицию полей двух точечных зарядов, разнесённых на малое расстояние. Внутри же, напомним, оно однородно.

В курсах теоретической физики решается подобная задача в несколько более общем случае, в ходе чего доказывается, что поле внутри диэлектрического эллипсоида также однородно.

Стоит отметить, что далеко не все молекулы изотропны, поэтому в общем случае коэффициенты пропорциональности материальных уравнений (поляризуемость α , восприимчивость χ , проницаемость ϵ) являются не скалярными, а тензорными величинами. Тем не менее, в изотропных средах неплохо видна суть физических процессов, поэтому в нашем курсе мы ограничимся рассмотрением только таких сред.

Энергия системы зарядов

Рассмотрим для простоты два точечных заряда и посчитаем энергию их взаимодействия. Выберем точки (1) и (2), заряды в них q_1 и q_2 соответственно, а расстояние между ними r_{12} . Будем действовать по определению: пусть они одного знака, а значит, отталкиваются. Посчитаем работу, необходимую для того, чтобы перенести из бесконечности в точку (2) заряд q_2 при фиксированном заряде q_1 , при том, что он создаёт неизменное по времени поле. Эта же работа будет равна энергии взаимодействия W ,

$$W = A.$$

Вектор силы и вектор смещения у нас коллинеарны в силу симметричности, так что ограничимся рассмотрением модулей.

$$A = \int_{\infty}^{(2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

но мы знаем также, что работа в потенциальном поле представима как разность потенциалов точек, между которыми совершается перемещение,

$$A = q_2 U_{\infty \rightarrow 2}.$$

Поскольку потенциал бесконечности мы принимаем равным нулю,

$$A = q_2 \varphi_2 = W, \tag{6.1}$$

где φ_2 — потенциал поля заряда q_1 в точке (2).

Для удобства перепишем последнее выражение в симметричной форме,

$$W = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} \right) = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2, \quad (6.2)$$

где $r_{12} = r_{21}$. Это выражение можно обобщить на совершенно произвольное количество точечных зарядов,

$$W = \sum_i^N \frac{q_i \varphi_i}{2}, \quad (6.3)$$

где φ_i — суммарный потенциал от всех зарядов, кроме i -того, в точке (i).

Можно перенести предыдущее утверждение и на непрерывную систему зарядов; пусть есть объём V , в каждой точке которого есть некоторая плотность заряда ρ . Рассмотрим энергию малой части этого объёма dW , заряд которой равен $dq = \rho dV$. Тогда энергия взаимодействия этого заряда со всеми другими будет

$$dW = \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{r}) dq(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \varphi \rho dV,$$

а энергия всего пространства тогда будет равна

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (6.4)$$

Собственная энергия электростатической системы

Собственной энергией электростатической системы называют такую сумму вида (6.3), что все входящие в неё потенциалы описывают поля, создаваемые зарядами этой системы. Аналогично, для непрерывного распределения, речь идёт о потенциалах полей зарядов рассматриваемого объёма V .

Рассмотрим металлическое тело с зарядом q , чью собственную энергию мы хотим посчитать. Сразу отметим, что если тело не имеет заряда, то его собственная электростатическая энергия равна нулю. Итак, станем вносить из бесконечности наше тело заряд dq ; тогда $dW_{соб.} = U dq$. Поскольку речь идёт о металле, то все точки металла имеют одинаковый потенциал. Как мы знаем, зависимость разности потенциалов от заряда металла описывается ёмкостью,

$$U = \frac{q}{C}.$$

Из этого получим,

$$W_{соб.} = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq,$$

причём, поскольку C характеризует только тело, оно не зависит от вносимого заряда, значит,

$$W_{соб.} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}. \quad (6.5)$$

Рассмотрим пример собственной энергии: пусть мы ищем её для сферического конденсатора ёмкостью C ,

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Устремляя $R_2 \rightarrow \infty$, получим

$$W_{соб.} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

А что если мы таким путём захотим посчитать собственную энергию точечного заряда? Очевидно, что при стремлении $R \rightarrow 0$ мы получим бесконечность. Это свидетельствует о несовершенстве представления заряда точечным.

Энергия электростатического поля

Запишем формулу для собственной энергии как

$$W_{соб.} = \frac{CU^2}{2},$$

а затем, используя для простоты пример плоского конденсатора, получим

$$W_{соб.} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{2d} \frac{U^2 \cdot d}{d}.$$

Выделим объём, занимаемый в плоском конденсаторе полем, $V = Sd$,

$$W_{соб.} = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2 V,$$

то есть, собственная энергия поля пропорциональна объёму. Тогда введём величину $w = W_{соб.}/V$, которую назовём *объёмной плотностью энергии*. Тогда получим

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2 = \frac{DE}{2}. \quad (6.6)$$

Мы рассматривали плоский конденсатор, однако эта формула справедлива для произвольного случая.

В том числе, можно объёмную плотность энергии записать и для непрерывного распределения, исходя из

$$W_{соб.} = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV,$$

и получая

$$w = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2}. \quad (6.7)$$

Это выражение справедливо и для анизотропных сред, где $\mathbf{D} \times \mathbf{E} \neq 0$. Не учтены, однако, некоторые тонкости вроде зависимости поля от температуры или от деформаций.

Электрический диполь во внешнем электростатическом поле

Рассмотрим электрический диполь \mathbf{p} , расположенный во внешнем поле \mathbf{E}_0 . На оба заряда диполя действуют силы, направленные в разные стороны, что означает, что диполь будет ориентироваться по направлению поля.

Говоря на языке энергии, мы должны заметить, что энергия диполя будет изменяться. Введём угол α между \mathbf{E}_0 и \mathbf{p} , и тогда посчитаем момент сил, действующий на диполь. Как известно,

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times (q\mathbf{E}_0) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0.$$

Соответственно, мы можем посчитать работу, необходимую для поворота диполя на угол $d\alpha$,

$$dW = M d\alpha = p E_0 \sin \alpha d\alpha.$$

Взяв интеграл, получим

$$W = \int_0^\alpha M d\alpha = -p E_0 \cos \alpha = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0.$$

Подобным образом будет вести себя вытянутый диэлектрик в поле, например, между пластинами плоского конденсатора будет отклоняться.

Силы, действующие на диэлектрик в неоднородном электростатическом поле

Рассмотрим теперь случай неоднородного поля: пусть мы по-прежнему имеем диполь \mathbf{p} , ориентированный, на этот раз, по полю, и пусть силовые линии поля сгущаются в области положительного заряда. Тогда на оба заряда диполя снова будут действовать силы, но на этот раз сила на положительном заряде будет превосходить силу на отрицательном. Под действием такого поля диэлектрик будет отклоняться в направлении градиента потенциала поля.

Поскольку поляризация у нас однородна, мы можем записать

$$P \propto E,$$

тогда заметим, что

$$W \propto E^2,$$

а значит,

$$F \propto \nabla E^2,$$

и, главное, сила, действующая на диэлектрик, не зависит от знака поля.

Обратим внимание, что энергию поля можно переписать как

$$W = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \propto \frac{D^2}{\epsilon},$$

а значит, в более проницаемых диэлектриках энергия больше, потому что $D \propto \epsilon$.

Электронная теория поляризации диэлектриков

Грамотнее было бы назвать этот раздел лекции *электронной моделью*, однако традиция велит выбрать слово *теория*.

Пусть в среде действует поле \mathbf{E} (не внешнее!). Запишем вектор поляризации как

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}.$$

Оценим дипольный момент полярных молекул, беря в качестве характерной атомной длины один ангстрем и в качестве заряда — элементарный заряд,

$$p_0 = ql \simeq 10^{-10} \text{ м} \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \simeq 10^{-29} \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

Основной механизм отклика полярных молекул на внешнее поле — поворот.

Для неполярных момент основной дипольный момент p_0 равен нулю, и их основной механизм отклика отличается — речь идёт о смещении электронной плотности в направлении против поля. Не стоит забывать, что внешние поля много меньше внутриатомных.

Используя эту модель, несложно оценить, каким будет индуцированный дипольный момент: рассмотрим молекулу как металлический шарик, поляризующийся под действием поля. В нём возникнут заряды поверхностью плотностью σ_0 , которые породят поле напряжённостью

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} = \frac{ql}{(4/3)\pi R^3 \epsilon_0} = \frac{ql}{4\pi R^3 \epsilon_0} = \frac{p}{4\pi R^3 \epsilon_0}.$$

Имея это, запишем для вектора поляризации

$$\mathbf{P} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \mathbf{E},$$

где $4\pi R^3 = \alpha$.

Взяв очень большое поле, порядка 10^9 В/м , мы можем получить наведённый дипольный момент $p \sim 10^{-31} \text{ Кл} \cdot \text{м}$. Отметим, что даже в таких сильных полях наведённый дипольный момент в молекуле на порядки меньше собственного.

Эффект локального поля

Как мы уже не раз видели на прошлых лекциях, поле в среде представляет собой суперпозицию внешнего поля и поля связанных зарядов. Эту суперпозицию полей называют *эффективным*, или *действующим*, полем. Рассмотрим в некотором диэлектрике сферическую полость, поле в которой обозначим E^* . Вспомним, что

$$E^* = E + \frac{P}{3\epsilon_0}.$$

Раскроем вектор поляризации как

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 N \alpha E^* = \epsilon_0 N \alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right),$$

где N — концентрация молекул в среде. Путём несложных математических преобразований получим

$$P = \frac{\epsilon_0 N \alpha}{1 - N \alpha / 3} E.$$

Используя материальное уравнение

$$P = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E = \epsilon_0 \chi E,$$

запишем связь диэлектрических свойств среды с её поляризумостью и концентрацией частиц в ней,

$$\chi = \epsilon - 1 = \frac{N \alpha}{1 - N \alpha / 3}, \quad (6.8)$$

носящее название *формулы Клаузиуса—Моссомти*.

Лекция 7

Постоянный электрический ток. Часть I

Плотность и сила тока

На сегодняшний момент мы знаем, что любое внесённое в электрическое поле тело так или иначе на него реагирует. Так, хорошо понятно, как на него реагируют проводники: в них происходит явление электростатической индукции, и результатом этой реакции является смещение внутренних зарядов, создающее индукционное поле, которое компенсирует действие внешнего поля. В результате получаем, что в проводнике поля нет, заряды на поверхности и потенциал на ней всюду одинаков.

А вот если внешнее поле как-то поддерживать, то проводник будет вынужден продолжать движение зарядов, вследствие чего возникнет *электрический ток*. Отметим, что мы не говорим, что это поле должно быть электростатическим.

Если делить проводники на категории, мы получим два их рода; в проводниках первого рода переносчиками заряда являются электроны, которые движутся с весьма большими тепловыми скоростями порядка $c/100$, и медленно дрейфуют в сторону электрического поля. В проводниках второго же рода заряд переносят ионы, которые много крупнее. На практике возможны и такие вещества, где заряд переносят и ионы, и электроны. Начнём с металлов, то есть, с проводников первого рода.

Общим для всех проводников является понятие *плотности электрического тока*. Если у нас есть заряд q , движущийся со скоростью v , причём концентрация зарядов в единице объёма равна n , то через единичную площадку в направлении v будет протекать электричество с плотностью тока j ,

$$j = nqv. \quad (7.1)$$

Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр. Ампер определяется через магнитные взаимодействия проводников, о чём речь пойдёт ещё через несколько лекций.

Поскольку частицы движутся хаотически, и их хаотическое движение нисколько не влияет на электрический ток, скорость v из предыдущего выражения является средней скоростью v_{cp} в направлении дрейфа. Очевидно, что эта же величина может быть введена в качестве вектора как

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}_{cp}. \quad (7.2)$$

Зачем это делается? Нам потребуется этот вектор аналогично вектору Умова—Пойнтинга.

Отметим, что средняя дрейфовая скорость электронов по порядку величины равна

$$v_{cp} \simeq 10 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

Перейдём к главному определению: *электрическим током* через площадку Δs , нормаль к которой мы обозначим \mathbf{e} называют поток вектора \mathbf{j} через эту площадку,

$$\Delta I = \mathbf{j} \cdot \Delta s \mathbf{e} = \mathbf{j} \cdot \Delta s, \quad (7.3)$$

где смысл вектора площади всё тот же, что и на первом курсе.

Протекающий через эту же площадку заряд выражается как

$$q = \Delta I t, \quad (7.4)$$

и измеряется в кулонах.

Источники тока. Электродвижущая сила

Для существования тока необходим источник тока. Источники тока делятся на химические и физические. Один пример химического источника хорошо всем знаком — это источник Вольта, сделанный в 1800 г. и представляющий собой две пластины, цинковую и медную, опущенные в соляной раствор. При их замыкании по проводнику протекал электрический ток.

Другие классические источники тока можно создать на преобразовании других видов энергии в электрическую — однако здесь не обойтись без явления электромагнитной индукции, открытого М. Фарадеем в 1831 г., о котором мы ещё будем говорить подробнее.

Сейчас же мы остановимся на понятии *электродвижущей силы*.

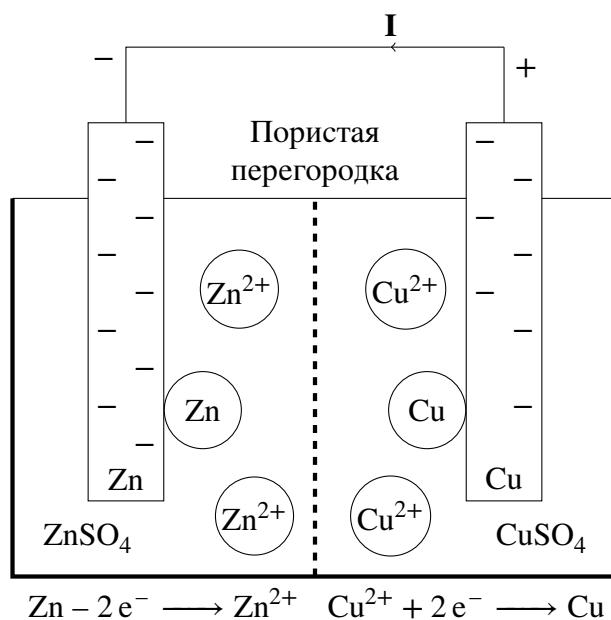


Рис. 13: Элемент Даниеля.

Рассмотрим элемент Даниеля, чтобы получить качественное представление о работе химического источника электрического тока. Он представляет собой сосуд, разделённый пополам пористой перегородкой, препятствующей движению жидкостей, но при этом пропускающей ионы. Как показано на рисунке, сосуд заполнен наполовину раствором $CuSO_4$, наполовину раствором $ZnSO_4$, и в эти растворы погружены металлические пластины из соответствующих металлов. Цинковая пластина называется *анодом*, а медная — *катодом*. Обратим внимание, что при электролизе приняты противоположные названия аналогичных пластин.

Итак, если кусок цинка погрузить в CuSO_4 , начнётся выделение тепла, потому что пойдёт химическая реакция восстановления меди. Хорошо бы использовать каким-нибудь образом эту энергию. Мы хотим, чтобы вместе с движением тепла началось движение электронов (то есть, заряда) между пластинами. При такой конфигурации, как показана на рисунке, происходят указанные химические реакции, создающие отрицательный электрический заряд на цинковой и положительный — на медной пластине. На краю пластин возникает слой соответствующим образом заряженных ионов, с помощью которого появляется микроскопическое подобие плоского конденсатора, порождающее электрическое поле. Это-то поле и обеспечивает нам ЭДС.

Поскольку расстояние между пластиной и слоем ионов крайне мало, говорят о скачке потенциалов между ними. Таким образом, получаем в нашем источнике два скачка потенциалов, сумма которых на всём источнике и называется электродвижущей силой. Заметим, что сила в ньютоновском смысле здесь присутствует только на микроскопическом уровне.

ЭДС подобного аккумулятора невелика и по порядку величины равна 1,5 В.

Источник тока характеризуется величинами ЭДС \mathcal{E} и, забегая вперёд, внутреннего сопротивления r , причём обе они зависят от характеристик самого источника. На схемах принято отображать его как показано на рисунке.



Рис. 14: Изображение источника тока на схемах.

Электрический ток в металлических проводниках. Закон Ома

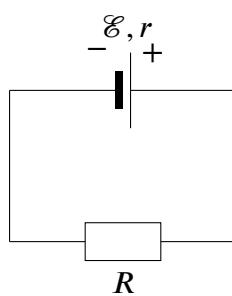


Рис. 15: Рассматриваемый контур для обсуждения закона Ома.

Пусть у нас есть электрическая схема, показанная на рисунке. Забегая вперёд, примем на схеме внешнее сопротивление R . В цепи течёт электрический ток I . Больше не будем писать ΔI , потому что речь идёт о токе, текущем через сечение провода, и при этом ясно, что через разные сечения провода течёт одинаковый ток, иначе наш ток не будет постоянным.

Постоянным током называется такой электрический ток, сила которого неизменна по времени. Отметим, что говоря о переменном токе, мы часто подразумеваем, что он

колеблется по гармоническому закону с частотой 50 Гц, хотя вообще говоря, не любой переменный ток таков.

Итак, что же сделал Г. Ом? Изучая с помощью гальванометра контуры, аналогичные рассматриваемому, он установил, что сила тока в замкнутой цепи определяется соотношением

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (7.5)$$

Этот закон установлен экспериментально и называется *законом Ома для замкнутой цепи*.

Рассмотрим ещё один интересный вопрос: почему, если в проводе есть электрическое поле, электроны не разгоняются до бесконечности? Дело в том, что в той же мере, как они разгоняются, они тормозят ударяясь об узлы кристаллической решётки. Средняя скорость электронного дрейфа, как уже было сказано, имеет порядок

$$v_{cp.} \simeq 10 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Если мы рассмотрим R , сопротивление определённого участка цепи, и обозначим как $\varphi_1 - \varphi_2$ разность потенциалов между сечениями на краях этого участка, то, как также было экспериментально установлено Омом,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (7.6)$$

Это утверждение называют *законом Ома для участка цепи*.

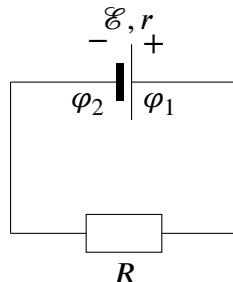


Рис. 16: Рассматриваемый контур для обсуждения эквивалентности двух форм записи закона Ома.

Эквивалентны ли две приведённые формы закона Ома? Рассмотрим на нашем контуре потенциалы φ_1 и φ_2 в точках соединения источника тока с проводом. Применим наши две формулы к этому контуру.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Что мы видим? Мы можем найти, чему в нашем контуре равна разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} - Ir.$$

Величину Ir иногда называют *разностью потенциалов*, а иногда — *падением напряжения*.

Обратим внимание, что

$$I = \frac{U_{12}}{R}, \quad (7.7)$$

тоже является записью закона Ома для участка цепи, поскольку в нашем случае электрического (потенциального) поля $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. Последняя приведённая формула является более общей, и мы будем ей пользоваться достаточно часто.

Так что же о выражении, содержащем падение напряжения? Из него мы можем получить, что напряжение на зажимах источника меньше ЭДС именно на величину падения напряжения в источнике.

За нуль в цепи обычно принимают потенциал отрицательной пластины источника, чтобы ни в одной точке цепи он не был отрицательным. Как же ведёт себя потенциал в электрической цепи?

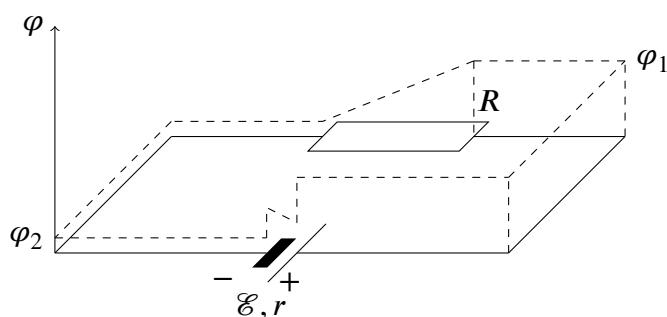


Рис. 17: Потенциал на разных участках электрической цепи.

Зададимся вопросом, может ли падение напряжения приводить к увеличению потенциала? Естественной мыслью будет развернуть течение тока. Очевидно, в нашей схеме такого сделать нельзя. Однако вот если мы подключим источник к более мощному источнику против направления нашего источника, то такое как раз и случится. Примером служит зарядка батареек от электрической сети.

Так, если мы соединим одинаковые полюса батареек между собой, то ток потечёт в сторону, которую диктует батарейка с большей ЭДС — или не потечёт вообще, если их ЭДС равны.

Ситуация, в которой отсутствует внешнее напряжение, называется *коротким замыканием*. Из записанных законов очевидно, что в таком случае ток от данного источника максимальен.

Закон Ома в дифференциальной форме

Мы записали закон Ома в интегральной форме, но как мы уже обсуждали, физика предпочитает дифференциальные формы — тут тоже. Перейдём к закону Ома в дифференциальной форме.

Рассмотрим маленький фрагмент проводника с сечением Δs и длиной Δl . В цепи течёт ток I , а разность потенциалов на концах фрагмента равна $\varphi_1 - \varphi_2$.

Мы знаем, что ток в таком случае можно выразить как

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R},$$

но, в силу тонкости проводника, раскроем разность потенциалов как

$$I = \frac{E \Delta l}{R} = j \cdot \Delta s.$$

Получаем, что между плотностью тока и напряжённостью поля существует линейная связь,

$$j = \frac{\Delta l}{R \Delta s} E = \sigma E, \quad (7.8)$$

где σ — проводимость фрагмента проводника.

Иногда проводимость (или удельную электропроводность) записывают как

$$\sigma = \frac{1}{\rho},$$

где ρ — удельное сопротивление.

В металлах проводимость имеет порядок величины

$$\sigma \sim 10^6 \div 10^8 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1},$$

где \div обозначает интервал.

Дифференциальная форма закона Ома также может быть записана в векторном виде,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.9)$$

Сторонние силы

Сторонними в электростатике называют все силы неэлектростатического происхождения. Как же мы запишем закон Ома для сторонних сил? Введём напряжённость поля сторонних сил.

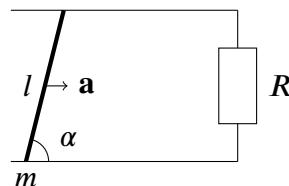


Рис. 18: Рассматриваемый контур для обсуждения напряжённости сторонних сил.

Рассмотрим в качестве примера замкнутую цепь с резистором, представленную на рисунке. По металлическим полозкам скользит проводящая перемычка с ускорением \mathbf{a} , наклонённая под углом α к полозкам. Сторонней силой в данном случае будет сила инерции F . Свободным зарядом послужит электрон, находящийся на металлической перемычке — его заряд $q = |e|$ и масса m нам известны.

В таком случае, получим

$$F = ma,$$

а сторонней силой будет её проекция на провод,

$$F_{\text{стор.}} = ma \cos \alpha.$$

Напряжённостью поля сторонних сил называется величина

$$E_{cmop.} = \frac{F_{cmop.}}{q} = \frac{ma}{q} \cos \alpha. \quad (7.10)$$

Закон Ома для сторонних сил в данном случае будет записываться очень просто, как

$$j = \sigma E_{cmop.}.$$

На месте нашей перемычки вполне может быть батарейка. Раз так, запишем закон Ома в интегральной и дифференциальной форме при наличии сторонних сил.

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cmop.}), \quad (7.11)$$

а для записи интегральной формы рассмотрим провод длины l и площадью сечения S , по которому течёт ток I и в котором, разумеется, справедлив закон Ома в дифференциальной форме. Перейдём в записанной дифференциальной форме к току,

$$I = jS = \sigma S(E + E_{cmop.}),$$

а затем возьмём интеграл по длине, умножив и разделив правую часть на длину. Поскольку $\sigma S/l = 1/R$, а интеграл напряжённости по длине равен потенциалу для электростатических сил и ЭДС для сторонних, получим

$$I = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{cmop.}). \quad (7.12)$$

Это и есть интегральная форма закона Ома с учётом сторонних сил.

Закон Джоуля—Ленца

Мы уже упоминали, что при движении тока совершается работа. Иначе быть и не может, ведь у нас в цепи есть разность потенциалов, а потенциал, как мы помним, описывает как раз способность поля совершать работу. Возникает вопрос, куда же пропадает эта работа. Если проводник неподвижен и относится к первому роду, то единственное, на что она уходит — это тепло.

Для закона Джоуля—Ленца мы также получим интегральную и дифференциальную формы. Сперва запишем закон Ома,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U_{12}}{R}.$$

Если мы имеем напряжение как работу, мы можем сказать, что оно равно работе по перемещению между двумя точками единичного электрического заряда. Если же мы напряжение умножим на электрический заряд, мы и получим работу,

$$A_{12} = U_{12}q = U_{12}It,$$

откуда мы получаем целых три комбинации,

$$A_{12} = \frac{U_{12}^2}{R}t = I^2Rt = U_{12}It = Q. \quad (7.13)$$

Неплохо также ввести удельную характеристику, отношение работы ко времени, то есть *мощность* электрического поля. Аналогичным образом получаем три комбинации,

$$P = \frac{A_{12}}{t} = \frac{U_{12}^2}{R} = I^2 R = U_{12} I. \quad (7.14)$$

Всё написанное соответствует закону Джоуля—Ленца в интегральной форме.

К дифференциальной форме мы будем переходить с помощью представления о работе в единице объёма.

$$\frac{Q}{IS} = jE = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}. \quad (7.15)$$

Возникает вопрос, какая из этих форм записи наиболее общая. Оказывается, что та, в которой нет напряжённости E , потому что во всех остальных можно представить напряжённость, как мы уже это делали, как

$$E = E_{\text{электростат.}} + E_{\text{стор.}}$$

Лекция 8

Постоянный электрический ток. Часть II

Резисторы

Обсуждение закона Джоуля—Ленца не стоит заканчивать его записью, так что повторим его интегральную форму,

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = IU.$$

В дифференциальной форме количество теплоты, выделяемое на единицу объёма,

$$q = \frac{Q}{V} = j^2 \rho,$$

а как мы помним,

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{стор.}),$$

поэтому вышеприведённая форма является самой общей формой записи дифференциальной формы закона Джоуля—Ленца. Не будем также забывать, что согласно определению,

$$\rho = \frac{1}{\sigma},$$

где ρ — удельное сопротивление, а σ — удельная проводимость.

Наконец, отметим, что для участка цепи с поперечным сечением ΔS и длиной Δl сопротивление равно

$$R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S}. \quad (8.1)$$

Это следует из формул, написанных ранее — или, по большому счёту, из определения удельного сопротивления.

Теперь рассмотрим пару выводов из последней формулы. Если мы имеем длинный проводник длиной l с неизменным поперечным сечением S , его сопротивление равно интегралу по последнему соотношению,

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (8.2)$$

что нам известно из школы.

Уместно вспомнить про параллельное и последовательное соединение. Обычно мы схематически изображаем сопротивление с помощью специального элемента, *резистора*. На схеме резистор обозначают прямоугольником, как показано на рисунке.

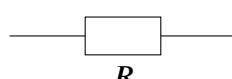


Рис. 19: Изображение резистора на схеме.

Итак, о соединениях резисторов. Рассмотрим контур содержащий источник ЭДС и два последовательно подключённых резистора. Ясно, что ЭДС в такой цепи равна сумме

падений напряжений на обоих резисторах (внутренним сопротивлением для простоты пренебрежём), а ток в ней всюду одинаков,

$$\mathcal{E} = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2),$$

откуда видно, что при последовательном подключении резисторов эффективное сопротивление равно сумме сопротивлений резисторов,

$$R_{\text{эфф.}} = R_1 + R_2.$$

Для параллельного подключения аналогичным образом видим, что

$$\mathcal{E} = I_1 R_1 = I_2 R_2;$$

при этом ток, в силу сохранения электрического заряда, представим как

$$I = I_1 + I_2,$$

откуда видно, что

$$R_{\text{эфф.}} = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Вернёмся к закону Джоуля—Ленца. Рассмотрим контур с лампочкой с номинальной мощностью 100 Вт и с напряжением 220 Вт. Согласно закону Джоуля—Ленца, получим для неё сопротивление

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1} \simeq 484 \text{ Ом.}$$

Возьмём другую лампу, мощностью $P_2 = 25$ Вт: очевидно, что сопротивление её будет в четыре раза больше. Включим их параллельно: не менее очевидно, что общая выделяемая мощность в контуре будет равняться $P_1 + P_2 = 125$ Вт. А вот если их включить последовательно, то напряжение на каждой лампе уменьшится,

$$U'_1 = 44 \text{ В, } U'_2 = 176 \text{ В,}$$

а мощности обеих ламп уменьшаются как квадрат соответствующих отношений,

$$P'_1 = 4 \text{ Вт, } P'_2 \simeq 16 \text{ Вт.}$$

Законы Кирхгофа

Законы Кирхгофа позволяют рассчитывать токи в разветвлённых цепях. Представим себе произвольную разветвлённую цепь. Выберем некоторый участок (12) и запишем для него закон Ома,

$$U_{12} = I_{12} R_{12}.$$

Запишем его как интеграл от дифференциальной формы,

$$U_{12} = \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cm.}) \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_{cm.} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Пусть теперь у нас есть разветвлённая система, про которую мы знаем сопротивление и ЭДС всех участков контуров. Хотим же мы посчитать силу тока и напряжение на всех участках.

Узлами назовём такие точки цепи, в которых сходятся три или больше участка.

Итак, какие же законы Кирхгофа мы можем записать? Во-первых, необходимо потребовать, чтобы в точках цепи не накапливался заряд, поскольку, как мы уже обсуждали, в противном случае ток не может быть постоянным. Необходимо, чтобы количество втекающего в узел тока равнялось количеству вытекающего, то есть,

Первый закон Кирхгофа. *Алгебраическая сумма токов в узле цепи равна нулю.*

$$\sum_i I_i = 0. \quad (8.3)$$

Возникает вопрос о знаке тока. Знак тока мы выбираем так, чтобы он показывал направление тока на рассматриваемом участке цепи. Так, все токи втекающие в узел, имеют положительный знак, а все вытекающие отрицательный — или наоборот.

Рассмотрим теперь уже полученное выше выражение,

$$I_{12}R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12},$$

и получим, применив его к замкнутому контуру, где разность потенциалов начала и конца очевидно равна нулю,

Второй закон Кирхгофа. *Сумма падений напряжений в замкнутом контуре равна сумме ЭДС в нём.*

$$\sum_{ij} I_{ij} R_{ij} = \mathcal{E}_{ij}, \quad (8.4)$$

где знаки перед слагаемыми выбираются согласно выбранному направлению обхода контура.

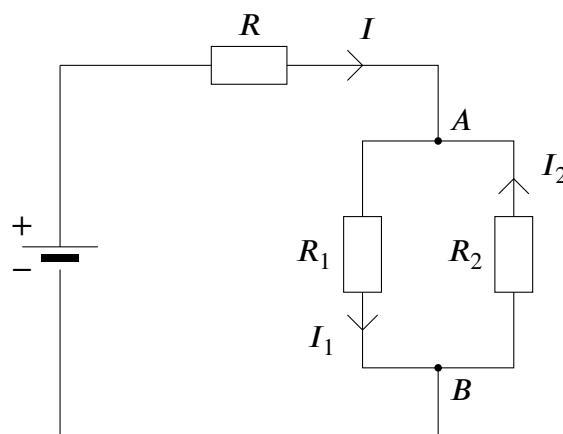


Рис. 20: Рассматриваемый для иллюстрации законов Кирхгофа контур.

Рассмотрим пример использования законов Кирхгофа для нахождения параметров контура. Выберем контур намеренно простым, чтобы решение было нагляднее. Пусть дан контур как показан на рисунке. Выберем положительное направление обхода — например, по часовой стрелке. Обозначим токи строго в соответствии с выбранным направлением, хотя нам и достаточно очевидно, что ток I_2 будет течь против обозначенного направления. Найти требуется все токи.

Запишем первый закон Кирхгофа для узла A . Припишем знак $+$ втекающим токам,

$$I + I_2 - I_1 = 0.$$

Очевидно, что от перемены знаков ничего не изменится. Запишем теперь законы Кирхгофа для самого большого,

$$IR - I_2R_2 = \mathcal{E},$$

и самого маленького контуров,

$$-I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0.$$

Получим систему из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными величинами.

Получим, решая эту систему, что

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Решая далее, получим, что значение I_1 положительно, а вот значение I_2 отрицательно, что и свидетельствует о том, что ток на этом участке течёт в другую сторону.

Метод контурных токов

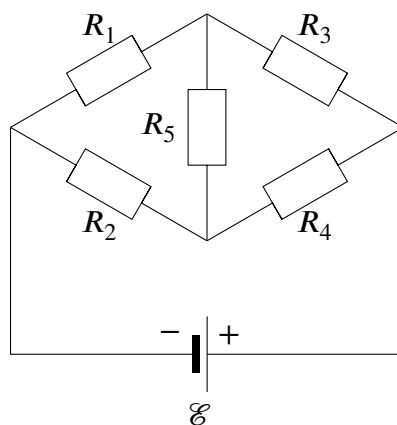


Рис. 21: Мост Уитстона, используемый для рассмотрения метода контурных токов.

Рассмотрим ещё один продуктивный метод расчёта разветвлённых контуров. Начнём сразу же с рассмотрения задачи, с *моста Уитстона*, изображённого на рисунке. Задача — найти все токи и определить условия, при которых ток $I_5 = 0$.

Преимущество метода контурных токов в том, что не нужно записывать первый закон Кирхгофа — сам метод уже обеспечивает его выполнение. Чтобы понять, почему, дадим определение: *контурным током* называют воображаемый ток, текущий с равной силой тока через весь контур. Традиционно контурные токи обозначаются буквой i .

Аналогично законам Кирхгофа, выберем направлением обхода направление по часовой стрелке, и обозначим контурные токи следующим образом,

- i_1 : через R_1, R_5 и R_3
- i_2 : R_3, R_4 и R_5
- i_3 : R_2, R_4 и источник ЭДС.

Зададимся вопросом, какой же реальный ток потечёт через, например, сопротивление R_5 ? Ответом будет разность контурных токов $i_2 - i_1$.

Теперь запишем выражения второго закона Кирхгофа, используя контурные токи,

$$\begin{aligned}i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_5 + (i_1 - i_3) R_3 &= 0, \\(i_2 - i_1) R_5 + i_2 R_2 + (i_2 - i_3) R_4 &= 0, \\(i_3 - i_1) R_3 + (i_3 - i_2) R_4 &= \mathcal{E}.\end{aligned}$$

При желании можно решить эту систему уравнений и получить выражение для I_5 ,

$$I_5 = i_1 - i_2 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{\Delta} \mathcal{E},$$

где Δ — определитель (детерминант) системы линейных уравнений.

Про мост Уитстона говорят, что он уравновешен, когда ток I_5 отсутствует, то есть, разность потенциалов между плечами моста равна нулю, или, как видно из полученного выражения,

$$R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0.$$

Зададимся вопросом, зачем, собственно, это надо. Мост Уитстона можно использовать, подключив на место резистора R_5 гальванометр, для определения неизвестного сопротивления, включая в систему три известных сопротивления.

Токи в сплошной среде

Начнём с вопроса, что же такое сплошная среда. Допустим, что мы в солёную воду опустили два электрода. Будет ли течь ток? Оказывается, будет: заряды потекут от положительного электрода к отрицательному. Вспомним элементы гидродинамики: мы говорили о трубках тока жидкости — здесь мы говорим о них же; это линии, в каждой точке которых по касательной к ним направлен вектор плотности тока \mathbf{j} . Вспомним, что вектор плотности тока равен

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}.$$

Рассмотрим объёмную плотность электрического заряда ρ , тогда

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = \sigma\mathbf{E}.$$

К сожалению, пользоваться величиной $1/\sigma$, удельным сопротивлением, мы сейчас не будем из-за недостатка обозначений.

Пусть у нас течёт постоянный ток. Мы знаем, что заряд в объёме может изменяться, тогда посчитаем изменение заряда за единицу времени,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Возникает вопрос, в каком случае плотность заряда может изменяться? Несложно понять, что только в том случае, когда втекающий в рассматриваемый объём заряд не равен вытекающему. Рассмотрим поток заряда через окружающую его поверхность S ,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.5)$$

По большому счёту, это утверждение является формой записи закона сохранения заряда.

Станем, как в механике, стягивать объём в точку: получим таким образом *уравнение непрерывности*,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (8.6)$$

Это уравнение представляет собой дифференциальную форму закона сохранения движущегося заряда при наличии электрического тока.

Упростим нашу задачу, сказав, что мы имеем в виду только постоянные токи. Если ток постоянен, то его объёмная плотность не зависит от времени, а значит,

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (8.7)$$

При постоянном токе все заряды располагаются на поверхности проводника. Откуда это следует? Если внутри проводника, как мы помним,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

и при этом,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E},$$

то, раз уж у проводника σ весьма велико, \mathbf{E} должно быть столь же мало, а значит, и объёмная плотность зарядов тоже.

Токи в сплошной среде. Примеры

Пусть есть две среды с проводимостью σ_1 и σ_2 . Пусть даны две пластины конденсатора, пространство между которыми частично (l_1) заполнено средой 1 и частично (l_2) средой 2. Приложим к конденсатору ЭДС \mathcal{E} . Появится серьёзное отличие от электростатики: между пластинами будет протекать электрический ток. Какой же, как его посчитать?

Дело в том, что пластины тоже обладают проводимостью σ_{pl} . Как посчитать электрический ток? Для этого нам нужно знать площадь пластин, плотность тока и напряжённость поля — ну и закон Ома в дифференциальной форме.

Как только мы подключим ЭДС к пластинам, по ним потечёт ток, и будет оттекать в расположенный между ними электролит. Между точками пластины появится разность

потенциалов. Чтобы мы могли свести задачу к электростатической, нам необходимо, чтобы поверхность можно было считать эквипотенциальной, то есть, чтобы выполнялось

$$\sigma_{\text{пл.}} \gg \sigma_{1,2}.$$

Итак, пусть между пластинами будет существовать электрическое поле, которое, согласно формулам электростатики, будет иметь напряжённость

$$E = \frac{\mathcal{E}}{l_1 + l_2}.$$

В двух средах возникнет электрический ток, имеющий плотность, соответственно,

$$\mathbf{j}_1 = \sigma_1 \mathbf{E}; \quad \mathbf{j}_2 = \sigma \mathbf{E}.$$

Тогда мы получим, раз плотность тока в двух средах будет разной, накопление заряда на границе сред. Что же будет дальше? Накапливаясь, заряд на границе сред начнёт создавать своё собственное электрическое поле, которое будет усиливать поле одной из сред и ослаблять поле другой до тех пор, пока плотность тока в обеих не выровняется. Соответственно, мы можем говорить о единой плотности тока \mathbf{j} ,

$$\mathbf{j} = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2.$$

Второе уравнение, которое нам необходимо написать, достаточно очевидное,

$$E_1 l_1 + E_2 l_2 = \mathcal{E}.$$

Система двух написанных уравнений позволяет найти напряжённости в обеих средах и получить результат.

Что же это за результат? Пусть $\sigma_1 > \sigma_2$. В этом случае на границе сред будет накапливаться положительный заряд, плотности тока будут одинаковы, а $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

Вернёмся теперь к рассмотрению электродов в жидкости. Электроды будем представлять металлическими шариками радиуса R . Приложим к ним разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и попробуем посчитать сопротивление всего участка в среде. Мы знаем, что среда имеет диэлектрическую проницаемость ϵ и удельную проводимость σ . Воспользуемся законом Ома и формулами электростатики, для чего потребуем, что проводимость электрода $\sigma_{\text{пл.}} \gg \sigma$. Теперь окружим электрод замкнутой поверхностью и получим, что плотность тока вблизи него равна

$$j = \sigma E.$$

Тогда ток в цепи, равно как и во всей среде, равен

$$I = \int_{S_{\text{пл.}}} j \, dS = \int_{S_{\text{пл.}}} \sigma E \, ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \int_{S_{\text{пл.}}} D \, dS = \frac{\sigma q_{\text{пл.}}}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Осталось выразить заряд электрода через приложенную разность потенциалов. Согласно формулам электростатики мы понимаем, что заряды электродов равны по модулю и противоположны по знаку, а модули их равны

$$q_1 = \varphi_1 C_{\text{пл.}}, \quad q_2 = \varphi_2 C_{\text{пл.}}.$$

Лекция 9

Магнитостатика. Часть I

Токи в сплошной среде (продолжение)

Вспомним задачу о конденсаторе, пространство между обкладками которого заполнено двумя средами с проводимостью σ_1 и σ_2 соответственно. К обкладкам подключён источник ЭДС \mathcal{E} . i -тая среда занимает расстояние l_i перпендикулярно обкладке конденсатора, и в таком случае электрическое поле от ЭДС между обкладками равно

$$E = \frac{\mathcal{E}}{l_1 + l_2}.$$

Как мы выяснили, протекающие в двух средах токи со временем выровнятся за счёт появления разных полей,

$$j = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2,$$

причём второе уравнение также несложно записать,

$$E_1 l_1 + E_2 l_2 = \mathcal{E}.$$

Скачок напряжённости поля связан с накоплением зарядов на границе сред.

Отметим, что используя формулы электростатического поля, мы предполагаем обкладки конденсатора эквипотенциальными поверхностями. В то же время, если по пластине растекается ток, то между точками должна существовать разность потенциалов, а значит, эквипотенциальности на пластине не будет. Тогда в каком случае мы можем использовать такие формулы для расчёта поля? Ответ достаточно прост: в случае, когда мы можем пренебречь разностью потенциалов между точками пластинами по сравнению с разностью потенциалов между точкой пластины и точкой среды — иными словами, когда верно

$$\sigma_{\text{нл.}} \gg \sigma_{1, 2}.$$

Из рассмотренного примера видно, что

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

и в то же время

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В самом конце предыдущей лекции мы рассматривали задачу с двумя шариками-электродами, помещёнными в среду. Между этими электродами, очевидно течёт электрический ток. Линии тока неподвижны, и при этом по ним текут заряды. Мы рассчитали силу тока в такой системе из аналогичного предположения, что проводимость шариков много выше проводимости среды, и тогда мы получили для силы тока I ,

$$I = \int_{S_{\text{шл.}}} j \, dS = \int_{S_{\text{шл.}}} \sigma E \, ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \int_{S_{\text{шл.}}} D \, dS = \frac{\sigma q_{\text{шл.}}}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Также мы вспомнили на прошлой лекции, что заряд шарика-электрода выражается через его потенциал как

$$q_i = \varphi_i C_{\text{ш.}}$$

Не будем забывать, что мы хотим связать сопротивление участка в сплошной среде с его параметрами; тогда как же нам перейти от потенциала в точке к разности потенциалов? Вспомним, что заряды на наших электродах, согласно формулам электростатики, равны q и $-q$ соответственно. Возьмём полусумму зарядов и получим тогда разность потенциалов.

$$I = \frac{\sigma C(\varphi_1 - \varphi_2)}{2\epsilon_0\epsilon},$$

а для сопротивления заземления R мы тогда получим выражение

$$R = \frac{2\epsilon_0\epsilon}{\sigma C},$$

а ёмкость шарика, как мы помним, равна

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_0,$$

тогда сопротивление заземления представимо как

$$R = \frac{2\epsilon_0\epsilon}{\sigma 4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\epsilon}{2\pi\sigma r_0}.$$

RC-цепи

Итак, пусть у нас есть некоторая цепь, содержащая источник тока, замыкаемый в некоторый момент времени $t = 0$ ключ K , резистор с сопротивлением R и конденсатор ёмкостью C . Общее напряжение в цепи равно U_0 .

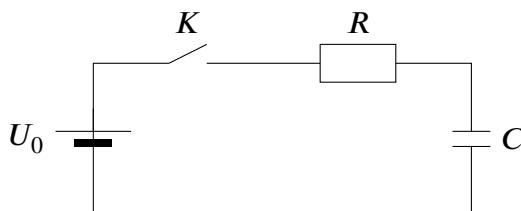


Рис. 22: RC-цепь.

Сперва разберёмся качественно, что тут будет происходить. В момент времени $t = 0$ по цепи потечёт ток, который зарядит конденсатор. По мере его зарядки, в нём будет образовываться электрическое поле.

Напишем закон Ома для нашей цепи,

$$U_0 = IR + \frac{q}{C},$$

и перейдём в нём к одной переменной; для простоты — к заряду,

$$U_0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}. \quad (9.1)$$

Зная, что в определённый момент времени конденсатор зарядится до своего максимального заряда, заметим, что $q(t)$ — возрастающая функция, в то время как $q'(t)$ — убывающая до нуля функция, следовательно, заряд на конденсаторе будет. математически говоря, асимптотически возрастать до значения заряда насыщения CU_0 . Не поленимся и нарисуем график изменения тока, который в первый момент времени равен U_0/R , а потом постепенно убывает до нуля.

Введём для количественного решения этой задачи *постоянную времени* τ , также называемую *временем релаксации*,

$$\tau = RC,$$

тогда получим, что

$$CU_0 = \tau \frac{dq}{dt} + q.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим, что заряд будет изменяться по закону

$$q = CU_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (9.2)$$

Отметим, что математически говоря, мы здесь получили асимптоту, то есть, бесконечное время зарядки конденсатора. В физической же реальности этого, разумеется, не происходит, и в радиофизике, например, говорят, что зарядка конденсатора прекращается через 3τ или 5τ .

Отсюда следует, что RC -цепь обладает некоторой инерцией, и при подключении к ней источника постоянного тока зарядка конденсатора происходит за время $t \sim 10\tau$, после чего постоянный ток в цепи не течёт. Можно говорить об установившемся заряде на конденсаторе, не обращая внимания на резистор, потому как ток через него не течёт.

А что будет, если попеременно открывать и закрывать ключ? Видно, что система не будет статической, однако и ток у нас получится переменным. Надо сказать, что вообще говоря, переменный ток через конденсатор *течёт*. Уже скоро мы дойдём до рассмотрения этого явления.

Пусть теперь у нас существует непостоянное $U_0(t)$. Мы можем найти определённое время T , на котором функция близка к константе. Все процессы в цепи будут определяться отношением этого характерного времени ко времени релаксации конденсатора: так, если характерное время будет много меньше времени релаксации, конденсатор не будет успевать реагировать на все изменения в цепи, и в таком случае цепь будет называться интегрирующей; если же характерное время будет больше времени релаксации, цепь будет дифференцирующей и конденсатор будет отвечать на все изменения с соответствующим протеканием тока через резистор.

Магнитостатика. Введение

Обычно принято говорить о том, что магнитостатика — это раздел физики о взаимодействии движущихся токов и движущихся токов. Если говорить о магнитном поле, то мы можем даже заметить, что некоторые законы, описывающие такие взаимодействия, известны нам со школы. Обратим, однако, внимание на другой аспект: считается, что слово *магнит* происходит от названия турецкой горы Магнезия (греч. Μαγνησία), элементы чьей породы могут взаимодействовать друг с другом, а также с металлами. Такие элементы получили названия магнитов, а их взаимодействия — магнетизма.

Одно из важнейших применений магнетизма в истории человечества — это изобретение компаса. Нет необходимости говорить тут о его влиянии на мир. Когда были получены законы, описывающие электрическое взаимодействие, был поставлен вопрос, нельзя ли магнитное взаимодействие описать подобным образом. Выяснилось, тем не менее, что силы взаимодействия магнитов направлены вообще не по прямой, да и изолировать положительный или отрицательный магнитный заряд так и не удалось.

И только в XIX веке датский физик Г. Х. Эрстед рассматривал протекание электрического тока по проводу, а рядом лежал морской компас. Тогда и было впервые замечено, что магнитные взаимодействия связаны с движением электрических зарядов. А. М. Ампер внимательно анализировал опыт Эрстеда и проводил в то же время свои опыты с контурами с током, в ходе которых он обнаружил, что магнитное взаимодействие зависит от силы тока в обоих проводах, от расстояния между ними, от ориентации проводов, и она вовсе не направлена по соединяющей их прямой. Гениальность Ампера заключалась в том, что ему удалось написать закон, описывающий эту зависимость.

Есть, однако, одна тонкость. Если мы посмотрим на опыт Ампера, или на опыт Эрстеда, мы заметим, что и в том, и в другом случае у нас движутся заряды, а во втором заряд в проводе и магнит. Ампер предположил, что в магните есть микротоки, которые обычно ориентированы хаотически, однако в некоторых породах имеют некоторую основную ориентацию, которая и диктует магнитные свойства. Он же предположил, что вращение Земли создаёт аналогичные микротоки в ней, которые диктуют магнитное поле планеты.

Всё это так — но рассмотрим два неподвижных заряда, между которыми действует сила Кулона. Перейдём в движущуюся относительно них систему отсчёта — и что мы получим? Ведь заряды станут движущимися. Должно появиться магнитное взаимодействие. Оказывается, что на самом деле в нашем рассмотрении так и есть. Дело в том, что магнитная сила в движущейся системе отсчёта является некоторой зависящей от скорости компонентой единой электромагнитной силы.

Чтобы описать взаимодействие зарядов, воспользуемся релятивистским уравнением,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{зл.}}, \quad \frac{d\mathbf{p}'}{dt} = \mathbf{F}_{\text{зл.}} + \mathbf{F}_{\text{магн.}}(\mathbf{v}).$$

На данный момент ограничимся рассмотрением магнитных взаимодействий.

Рассмотрим условия, при которых нет электрического взаимодействия. Рассмотрим два провода с током: как мы уже обсуждали, в них есть отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ионы. Несложно заметить, что в силу сохранения электрического заряда их электрическое взаимодействие взаимно компенсируется.

Если же электроны извлечь из провода и пустить, как в электронно-лучевой трубке, свободно, то мы увидим, что будет существовать и электрическое взаимодействие, и, многое более слабое, магнитное.

Законы Ампера и Био—Савара—Лапласа

В основе всех магнитных взаимодействий лежит закон Ампера, а также закон Био—Савара—Лапласа, который фактически является частью предыдущего. Рассмотрим их.

Закон Ампера. *Два контура с токами $I_{1,2}$ взаимодействуют, причём сила взаимодействия между малыми участками контуров $d\mathbf{l}_{1,2}$, где векторы сонаправлены электрическому току, равна*

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2 d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^2 r_{12}}, \quad (9.3)$$

где \mathbf{r}_{12} — это вектор, проведённый от $d\mathbf{l}_1$ к $d\mathbf{l}_2$.

Теперь извлечём из этого

Закон Био—Савара—Лапласа. *Элемент тока $I d\mathbf{l}$ создаёт магнитное поле индукцией \mathbf{B} на расстоянии \mathbf{r}_{12} от себя,*

$$\mathbf{B} = k \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^2 r_{12}}. \quad (9.4)$$

Как мы знаем из определения векторного произведения, магнитное поле элемента тока будет действовать в направлении, определяемом правилом буравчика.

Очевидно, закон Ампера можно переписать в следующем виде,

Закон Ампера.

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_{12}. \quad (9.5)$$

Отметим, что говорить о силовых линиях магнитного поля неграмотно, и делать этого мы не будем. Взамен мы говорим о *линиях* магнитного поля — касательные к ним совпадают с направлением вектора магнитной индукции.

В отличие от силовых линий электрического поля, линии магнитного поля замкнуты. Вокруг проводника с током линии образуют окружности с центром в проводнике.

Коэффициент пропорциональности закона Био—Савара—Лапласа k равен

$$k = 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{A}^2} = 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (9.6)$$

где μ_0 называют *магнитной постоянной*, и

$$\mu_0 = 10^7 \text{ Гн/м}. \quad (9.7)$$

Исторически сложилось, что величину \mathbf{B} называют *индукцией* магнитного поля. Хочется спросить, будет ли напряжённость? Будет, но только при рассмотрении магнитного поля в среде. В электричестве, как мы помним, всё наоборот — но против традиции мы не пойдём.

Магнитное поле прямого провода с током

Рассмотрим пару примеров магнитного поля. Пусть есть прямой провод, на расстоянии \mathbf{r} от которого мы ищем величину магнитного поля. Можно спросить, что собой представляет прямой провод с током — очевидно, где-то он замыкается в контур, но

расстояние \mathbf{r} много меньше размеров контура, так что остальными элементами мы по-просту пренебрежём.

Рассмотрим элемент $d\mathbf{l}$ нашего прямого провода и введём расстояние до этого элемента, \mathbf{r}' , а также угол ϑ между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' .

С таким выбором величин получим для $d\mathbf{B}$,

$$d\mathbf{B} = k \frac{I dl \sin \vartheta}{r'^2}.$$

Направление вектора определяется по правилу буравчика, и все $d\mathbf{B}$ сонаправлены, так что можно складывать и не векторы, а их модули.

Будем интегрировать по углу, для чего введём $dl_{\perp} = dl \sin \vartheta$, и учитывая, что $r' = r/\cos \alpha$ и что $dl_{\perp} = r d\alpha$,

$$d\mathbf{B} = kI \frac{r' d\alpha}{r'^2} = kI \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha,$$

то есть,

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} kI \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha = 2k \frac{I}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (9.8)$$

Видим отсюда, что магнитная индукция от проводника с током убывает не по закону обратных квадратов, а как обратная функция расстояния.

Лекция 10

Магнитостатика. Часть II

Магнитное поле кольца с током. Магнитный момент

Вспомним последний полученный на прошлой лекции результат: индукция прямого провода на расстоянии r от него равна

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Рассмотрим теперь поле, создаваемое кольцом с током I . Обозначим радиус нашего кольца как R и расстояние от него по оси как r . Опять разобьём кольцо на фрагменты dl .

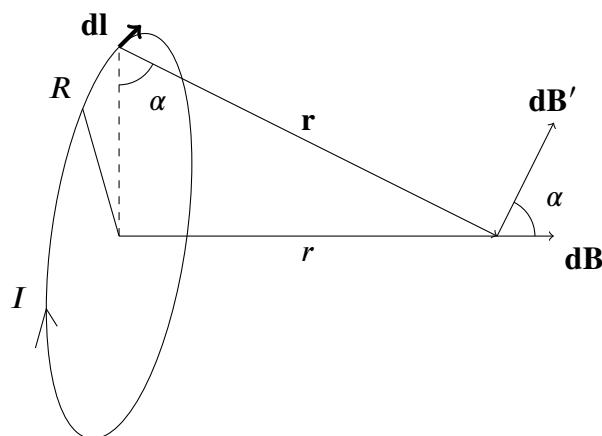


Рис. 23: Напряжённость электрического поля на оси равномерно заряженного кольца.

Из закона Био—Савара—Лапласа получим выражение для магнитной индукции от элемента кольца dl ,

$$dB' = k \frac{I dl}{r'^2}.$$

Мы себе позволили обойтись модулем вектора, потому что радиус-вектор с кольца на его ось перпендикулярен кольцу, а значит, синус угла между перемножаемыми векторами равен единице.

Очевидно, что dB' можно разложить на параллельную и перпендикулярную оси компоненты, причём сумма перпендикулярных от всего кольца будет равна нулю вследствие симметрии кольца. Поэтому назовём параллельную компоненту просто dB и запишем,

$$dB = dB' \cos \alpha = dB \frac{R}{r'},$$

а дальше перейдём к интегралу,

$$B = \int dB = kI \frac{R}{r'^3} \int dl.$$

Очевидно, что интеграл от dl даст длину окружности, тогда

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (10.1)$$

Введём понятие *магнитного момента* кольца с током: назовём магнитным моментом вектор \mathbf{p}_m ,

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \quad (10.2)$$

где S — площадь кольца, а \mathbf{n} — вектор нормали, направленный по правилу буравчика относительно направления тока I .

Заметим, что тогда для вектора индукции магнитного поля можно написать

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi (R^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{p}_m.$$

Теперь введём понятие *элементарного тока*. Таким мы назовём ток, протекающий по контуру, чьи размеры много меньше расстояния до него, $R \ll r$. Можно сказать, что в этом случае

$$(R^2 + r^2)^{3/2} \sim r^3,$$

и тогда мы сможем записать для индукции поля элементарного тока,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \mathbf{p}_m. \quad (10.3)$$

Сравним это с напряжённостью поля электрического диполя,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{p}.$$

В этом смысле малый элементарный ток на больших расстояниях может рассматриваться как магнитный диполь. Тогда для произвольной ориентации мы сможем записать

$$\mathbf{B} = k \left(\frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right). \quad (10.4)$$

Точно то же самое, напомним, можно записать и для электрического поля,

$$\mathbf{E} = k \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right).$$

Поэтому мы говорим о том, что элементарный ток можно представить в виде элементарного магнитного диполя, совокупности двух равных по модулю и противоположных по знаку магнитных зарядов $\pm q_m$ — однако в отличие от зарядов электрических, разделить магнитные заряды *невозможно*.

Только что нами введённый магнитный момент является одним из фундаментальных понятий физики; среди прочего, он имеется у многих элементарных частиц, где квантово-физические представления связывают его с наличием у них определённого спина. Сводить это к какому-либо механическому вращению, однако, нельзя.

Разбивая катушку на кольца и интегрируя по ним, можно получить результат для индукции магнитного поля катушки, однако делать этого тут мы не будем.

Магнитное напряжение. Теорема о циркуляции

Магнитное напряжение вектора индукции — это величина, строгого физического смысла не имеющая, так как её нельзя измерить. Ввести такую величину, однако, можно,

$$U_{M12} = \int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}. \quad (10.5)$$

Для электрического поля, как мы помним, электрическое напряжение между двумя точками можно было представить в виде разности потенциалов этих точек — очевидно, в магнитном поле сделать этого нельзя. Приведём пример. Пусть есть провод с током I , порождающим магнитное поле \mathbf{B} . Возьмём две точки 1 и 2 на одной линии индукции. Рассмотрим две дуги, которые образуются этими точками на линии магнитной индукции — вполне очевидно, что при всюду одинаковом B на них, $\int dr$ даст разные значения.

Поэтому магнитное поле не является потенциальным. Пока что мы не дали этому строгого доказательства в общем случае, но для прямого провода это так.

Посчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = \oint \mu_0 \frac{i}{2\pi r} dl = \mu_0 I,$$

что является важным результатом,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (10.6)$$

Как видим, циркуляция магнитного поля не равна нулю. Возникает вопрос, а будет ли то же значение для другого пути вокруг прямого провода с током? Оказывается, будет. Распишем скалярное произведение в общем случае,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl \cos \alpha dl = \oint B dl_{\perp},$$

где dl_{\perp} — это проекция перемещения $d\mathbf{l}$ на направление вектора \mathbf{B} , которая равна произведению радиус-вектора r на малый угол $d\varphi$ его изменения. Подставляя это в наш интеграл, получим

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mu_0 \frac{I}{2\pi r} r dl,$$

откуда опять же получаем

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Как видим, циркуляция магнитного поля по произвольному плоскому контуру равна одной и той же величине $\mu_0 I$.

Если у нас есть несколько проводов с током, то можно утверждать, что циркуляция равна алгебраической сумме токов (с положительным знаком берутся те токи, которые текут в направлении, указываемом правилом буравчика).

В общем же случае теорема о циркуляции рассматривает алгебраическую сумму токов, протекающих через любую поверхность, опирающуюся на рассматриваемый нами контур. В самом деле, несложно убедиться, что это даёт те же результаты.

Теорема о циркуляции магнитного поля. Циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру определяется алгебраической суммой токов, протекающих через опирающуюся на него поверхность, и равна

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_j I_j. \quad (10.7)$$

Доказывать для неплоских контуров мы эту теорему не будем.

Если сравнивать с электростатикой, мы можем заметить, что теорема о циркуляции несколько напоминает теорему Гаусса—Остроградского о потоке вектора через замкнутую поверхность. Точно так же теорема о циркуляции позволяет решать некоторые непростые задачи без прибегания к интегрированию. Рассмотрим пример.

Магнитное поле толстого провода

Пусть есть толстый (с радиусом R) прямой цилиндрический провод с током I . Спросим себя, чему равна индукция магнитного поля вне и внутри провода.

Рассмотрим вид с торца провода. Возьмём два круглых контура обхода: один вне, один внутри провода. Для внешнего контура теорема о циркуляции запишется как

$$B 2\pi r = \mu_0 I,$$

где r — радиус контура, и отсюда индукция равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Для внутреннего контура получим

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2},$$

откуда индукция равна

$$B = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2}.$$

Вводя вектор плотности тока \mathbf{j} , мы можем переписать это выражение как

$$B = \mu_0 \frac{j}{2} r.$$

Магнитное поле объёмных токов. Векторный потенциал

Рассмотрим кусок проводника, в котором текут токи в совершенно произвольном направлении. Выделим в нём элемент тока сечением S , длиной dl и плотностью \mathbf{j} . В таком случае, очевидно, можно переписать $I dl$ как

$$I dl = \mathbf{j} S dl = \mathbf{j} dV.$$

Чтобы посчитать индукцию поля подобных зарядов, можно посчитать индукцию поля каждого из элементов тока, а затем проинтегрировать.

Воспользуемся законом Био—Савара—Лапласа для получения магнитной индукции,

$$\mathbf{B} = k \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, а \mathbf{r}' — радиус-вектор рассматриваемого элемента тока. Для всего объема получим интеграл,

$$\mathbf{B} = k \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV. \quad (10.8)$$

За исключением векторного произведения вместо произведения скаляра на вектор, эта формула идентична электростатической.

В электростатике мы говорили о потенциале поля. Можно ли ввести для магнитного поля что-нибудь подобное? Оказывается, можно, только потенциал этот окажется векторным.

Вспомним выражение индукции элемента тока, находящегося в начале координат,

$$\mathbf{B} = k \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^2 r}.$$

Тогда *вектор-потенциалом*, или *векторным потенциалом*, будет величина

$$\mathbf{A} = k \frac{\mathbf{j}}{r} dV. \quad (10.9)$$

Векторный потенциал связан с полем \mathbf{B} соотношением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (10.10)$$

а для непрерывного распределения заряда в некотором объеме,

$$\mathbf{A} = k \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV. \quad (10.11)$$

Приведём очень простой пример прямого провода с током, направленного вдоль оси Oz . Поскольку плотность тока сонаправлена этой оси, ей же сонаправлен и векторный потенциал, тогда у него есть только z -компоненты. Докажем для фрагмента, что ротор его векторного потенциала, определённого как дано выше, действительно равен \mathbf{B} . Возьмём

$$\mathbf{A} = k \frac{\mathbf{j}}{r} dV,$$

а затем возьмём $\text{rot}(\mathbf{j}/r)$. Получим

$$\text{rot} \frac{\mathbf{j}}{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ j_x/r & j_y/r & j_z/r \end{vmatrix} = -\mathbf{j} \times \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

что нам и даёт искомый результат.

Отметим, что поскольку $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0, \quad (10.12)$$

а значит, поток вектора \mathbf{B} через замкнутую поверхность тоже равен нулю,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (10.13)$$

Для переменных магнитных полей, забегая вперёд, два последних утверждения также верны — аналогично тому, что мы говорили в начале об электрических полях.

Продолжая аналогию с электростатикой, мы можем написать и уравнение Пуассона для магнитостатики, и не одно, а целых три,

$$\Delta \mathbf{A}_i = -\mu_0 j_i. \quad (10.14)$$

Нередко для простоты его пишут немного иначе,

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (10.15)$$

Сила Лоренца

Рассмотрим элемент тока $I d\mathbf{l}$, помещённый в магнитное поле \mathbf{B} . Как мы уже знаем, на него будет действовать сила, согласно закону Ампера выражаемая как

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Рассмотрим этот элемент тока через плотность тока,

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} dV \times \mathbf{B},$$

которую, в свою очередь, мы рассмотрим как совокупность протекающих зарядов со средней скоростью \mathbf{v} ,

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV n} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10.16)$$

Получившуюся силу \mathbf{f} , действующую на индивидуальный заряд, называют *силой Лоренца*.

Вспомним, что в электростатическом поле на заряды действует также электростатическое поле, чья сила выражается как $q\mathbf{E}$. Её можно представлять также как электростатический компонент силы Лоренца, тогда полная действующая на заряд сила будет выражаться как

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10.17)$$

Лекция 11

Магнитостатика. Часть III

Магнитное поле Земли

Магнитное поле Земли играет в нашей жизни фундаментальную роль. Если говорить о том, что мы о нём знаем, то: мы знаем его индукцию; мы знаем о существовании магнитных полюсов — причём в северном географическом полушарии находится южный магнитный полюс и наоборот; с его помощью работает компас, повёрнутый фундаментальные географические открытия и общественные изменения; наконец, магнитное поле отклоняет от Земли частицы солнечного ветра, которые в его отсутствие не позволили бы существовать на Земле жизни.

Вокруг Земли существуют два радиационных пояса, один преимущественно населённый захваченными протонами, а второй — электронами.

Почему же у Земли возникает магнитное поле? Существуют различные теории, однако самой распространённой на сегодня является теория гидродинамического динамо. Как мы знаем, Земля состоит из твёрдого ядра, жидкого ядра и мантии. Мы говорим, что если вначале некогда существовало магнитное поле, то оно будет с течением времени только усиливаться — а если вдруг внешнее магнитное поле исчезнет, то начнётся генерация собственного магнитного поля.

В ходе вращения Земли под действием архимедовых сил всплывают горячие токопроводящие массы. Вследствие вращения они будут закручиваться и двигаться по траекториям, напоминающим движение тока по катушке; такое движение будет создавать тороидальное магнитное поле, порождая ещё более сложные движения, за счёт которых и образуется результирующее, настоящее магнитное поле. Эта модель достаточно сложна, однако она получила подтверждение в ходе проверки на суперкомпьютерах; она же единственная объясняет возможность инверсии магнитных полюсов.

Взаимодействие движущихся зарядов

Мы говорили, что два тока, протекая по двум параллельным проводам, действуют друг на друга с помощью создаваемых ими магнитных полей. Как мы отмечали, создаваемое ими магнитное поле имеет величину

$$B_i = \mu_0 \frac{I_i}{2\pi r},$$

а сила, с которой i -тый провод действует на элемент dl j -того равна

$$dF_{ij} = I_j dl B_i.$$

С помощью подстановки можно получить формулу для силы,

$$dF = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} dl.$$

Из этой формулы, в частности, можно получить единицу силы тока, *ампер*,

$$[I] = 1 \text{ А.} \quad (11.1)$$

Посчитаем, подобно силе Лоренца, силу взаимодействия двух параллельно движущихся зарядов: пусть они равны q_1 и q_2 , движутся с одинаковыми скоростями v , и разделены расстоянием r . Как мы уже знаем, на второй заряд будет действовать сила Лоренца, равная

$$f = q_2 v B_1.$$

Запишем, согласно закону Био—Савара—Лапласа, выражение для B_1 , заменяя $I_1 dl = j_1 S dl = q_1 n_1 v S dl$,

$$B_1 = \mu_0 \frac{q_1 n_1 v S dl}{r^2}.$$

Полученная индукция создаётся большим количеством зарядов, так как в числителе фигурирует произведение концентрации на объём. Для получения же индукции поля одного заряда уберём это произведение,

$$B_1 = \mu_0 \frac{q_1 v}{r^2}.$$

Тогда для силы взаимодействия сможем записать,

$$f_{\text{магн.}} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} v^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v^2. \quad (11.2)$$

Эти же заряды, в то же время, будут взаимодействовать с за счёт электрического отталкивания, причём электрическая сила будет намного больше магнитной. Электрическая сила будет выражаться как

$$f_{\text{эл.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Попробуем посчитать отношение этих двух сил,

$$\frac{f_{\text{магн.}}}{f_{\text{эл.}}} = \epsilon_0 \mu_0 v^2.$$

Когда чуть позже мы будем изучать электромагнитные волны, мы узнаем, что $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, где c — скорость света, а значит,

$$\frac{f_{\text{магн.}}}{f_{\text{эл.}}} = \frac{v^2}{c^2}. \quad (11.3)$$

Мы пришли к очень фундаментальному выводу: при движении зарядов, наряду с электрическим отталкиванием, возникает сила магнитного притяжения, чья величина относится к электрической силе как квадрат отношения скорости движения частиц к скорости света.

Возникает вопрос: если у нас есть поток электронов, то они пытаются разбежаться под действием электрических сил, и их приходится, как, например, в электронно-лучевой трубке, сдерживать внешними силами. Так почему же мы можем наблюдать притягивание друг к другу двух проводов с током? Дело в том, что в проводе, как мы уже отмечали ранее, в равной степени присутствуют заряды обоих знаков, вследствие чего суммарная электрическая сила равна нулю.

Применение магнитного поля в технике

Хотелось бы немного сказать о применениях магнитных сил в технике. Пусть в некоторое магнитное поле влетает частица с зарядом q и скоростью v так, что $v \perp \mathbf{B}$. В этом случае сила Лоренца обеспечивает частице центростремительное ускорение, движущее частицу по окружности радиуса,

$$a = \frac{mv^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}.$$

Несложно также посчитать время оборота по окружности T ,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Полезно ввести понятие *циклотронной частоты* ω ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m},$$

которая не зависит от скорости движения заряда. Вышеприведённые соотношения можно использовать для изучения элементарных частиц.

Рассмотрим циклотрон. Циклотрон представляет собой вертикальное магнитное поле, в котором движутся электроны, разгоняющиеся подобием конденсатора из двух цилиндров. Циклотрон разгоняет частицы, которые под действием магнитного поля движутся по окружностям всё большего радиуса, и наконец вылетают из него по касательной. Аналогично циклотрону, но не в точности, работает Большой адронный коллайдер.

Ещё одно важное приложение — это масс-спектрометр. Идея его следующая — если частица попадает в магнитное поле, она начинает двигаться по окружности. Радиус этой окружности зависит, помимо скорости частицы и параметров магнитного поля, от заряда и от массы частицы. Зная скорость и магнитную индукцию, мы можем найти из радиуса отношение заряда частицы к её массе. Скорость контролируется с помощью специального устройства, называемого селектром скоростей — оно представляет собой камеру, в которой под действием двух перпендикулярно действующих полей, электрического и магнитного, частица отклоняется от прямого пути, и из условия определённого отношения величин vB и E можно найти скорость.

Ещё одним примером является плазменный двигатель. Такой двигатель развивает очень маленькую силу тяги, порядка миллиньютонов, которой совершенно не хватает для того, чтобы вывести ракету на орбиту — однако для орбитальных корректировок он отлично подходит. В камеру поступает электронейтральный газ, обычно ксенон, который ионизируется под действием электрического поля, после чего электроны и ионы разлетаются в разные стороны: более тяжёлые ионы вылетают вовне двигателя, создавая собственно реактивную тягу, а электроны останавливаются на определённом предельном уровне как раз магнитным полем.

На этом применения магнитного поля не кончаются — ещё одним примером служит рельсотрон, то есть ускоритель некоторых, не слишком малых, масс. Попадая в препятствие, вылетающая из рельсотрона масса практически испаряет его, за счёт большой кинетической энергии. Устройство состоит из двух рельсов, по которым, и по перемычке между которыми, кратковременно течёт электрический ток. Тонкая (по сравнению с

рельсами) перемычка под действием сильного электрического тока плавится с образованием плазмы, которую магнитное поле движет вперёд по направлению вылета массы. Если масса используется из диэлектрика, то перемычка может разогнать и его.

Ещё один интересный пример применения магнитного поля в технике — это магнитогидродинамический генератор. Фарадей со своими учениками в Лондоне, вблизи одного из мостов на Темзе, проводил эксперимент: если воды реки несут в себе заряженные ионы, а у Земли есть магнитное поле, то текущие ионы должны смещаться перпендикулярно течению потока. Они должны прибиваться к какому-то берегу и создавать электрическое поле, которое бы компенсировало действие внешнего магнитного поля. В результате между берегами реки появляется разность потенциалов — Фарадею её обнаружить не удалось, но в начале XX века она всё-таки была найдена. Соответственно, появились идеи генерирования электроэнергии за счёт этой разности потенциалов: берётся, например, уже описанный плазменный двигатель, чтобы обеспечить поток ионов, и ниже по течению устанавливаются две пластины, между которыми образуется разность потенциалов. Необходимо сказать, что пусть теоретически подобная машина и имеет весьма высокий КПД, практическая польза от неё невелика из-за сложности устройства реактивного двигателя.

Поток вектора магнитной индукции. Контур с током в магнитном поле

Пусть у нас есть магнитное поле с индукцией \mathbf{B} . Если мы поместим в поле маленькую площадку площадью S с нормалью \mathbf{n} , то *потоком вектора магнитной индукции* через эту площадку будет

$$\Phi_B = BS \cos \alpha = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}, \quad (11.4)$$

аналогично тому, как мы вводили поток вектора напряжённости электрического поля ранее.

Заметим, что единицей измерения магнитной индукции является *тесла*, Тл, вводимая через соотношение

$$dF = I dl \mathbf{B}.$$

В таком случае мы можем ввести и единицу потока, *вебер*, используя определения магнитного потока как основное.

Представим себе, как будет себя вести себя контур с током в магнитном поле. Представим себе квадратный контур длиной l . Пусть вначале наше поле было однородным. Введём понятие вектора магнитного момента,

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}.$$

Очевидно, на все стороны контура будет действовать сила Ампера, направленная от контура. Отметим, что для противоположных сторон 1 и 2,

$$F_1 = F_2 = IBl.$$

Рассмотрим момент силы: поскольку сумма сил равна нулю, момент не зависит от выбранной точки.

$$M = IBl \cdot l \sin \alpha = p_m B \sin \alpha. \quad (11.5)$$

Если написать то же самое в векторном виде, получим

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (11.6)$$

Итак, первое, что мы получили — на контур с током в однородном поле действует момент силы, стремящийся повернуть магнитный момент по направлению линий поля. А что если магнитное поле неоднородно? Окажется, что

$$F_1 \neq F_2.$$

Получим два эффекта:

- контур будет ориентироваться,
- контур будет затягиваться в область сгущения магнитных линий.

Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле

Вышеописанные эффекты можно описать с помощью потенциальной функции тока во внешнем магнитном поле.

Пусть у нас есть контур, пока что в однородном поле с индукцией \mathbf{B} , причём магнитный момент контура равен \mathbf{p}_m . Момент силы будет равен

$$M = p_m B \sin \alpha.$$

Попробуем увеличить угол на малую величину $d\alpha$, тогда со стороны сил поля будет совершаться отрицательная работа,

$$dA = -p_m B \sin \alpha \, d\alpha.$$

Заметим, что

$$M \, d\alpha = -p_m B \sin \alpha \, d\alpha = -ISB d(\cos \alpha) = ISB \sin \alpha \, d\alpha = -d(-IBS \cos \alpha),$$

налагая условие $I = \text{const}$; далее получим,

$$-d(-IBS \cos \alpha) = -d(I\Phi_B),$$

что, собственно, и даёт нам ответ: *силовой функцией тока в магнитном поле* называют функцию

$$U = -I\Phi_B. \quad (11.7)$$

Если мы помещаем контур в магнитное поле, он стремится повернуться так, чтобы поток достиг максимальной величины, а тогда силовая функция достигнет минимума. В состоянии равновесия, выходит, силовая функция минимальна.

Итак, если контур поместить в магнитное поле, то

$$M \, d\alpha = -(dU)_{I=\text{const}}. \quad (11.8)$$

Соответственно, зная силовую функцию, мы легко посчитаем момент сил, дифференцируя её по углу,

$$M = \left(\frac{dU}{d\alpha} \right)_{I=\text{const}}.$$

Рассмотрим ещё пример: пусть есть текущий по прямому проводнику ток I_1 , создающий магнитное поле, и есть контур с током I_2 . На контур будет действовать момент сил, стремящийся развернуть его к проводнику, и притягивающая его сила, направленная к тому же проводнику. Заметим, что

$$F = - \left(\frac{dU}{dx} \right)_{I=\text{const}}, \quad (11.9)$$

где ось Ox выбрана перпендикулярно проводнику в направлении контура.

Решим задачу: пусть длины сторон нашего контура равны a и b , причём две из них пересекают Ox под прямым углом в точках x и $x+a$. Зная, что

$$\Phi_B = \int B ds = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} b \int_x^{x+a} \frac{1}{x'} dx'.$$

Беря интеграл, получим

$$\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}.$$

Силовая функция тока U будет равна

$$U = -I_2 \Phi_B = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}.$$

Тогда чему же будет равна сила?

$$F = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{I=\text{const}}.$$

Отметим, что речь идёт о мысленном повороте контура, потому что иначе выполнение налагаемого нами условия решительно невозможно. Тогда получим

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} b \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right).$$

Коэффициент взаимной индукции. Третий закон Ньютона

Коэффициент взаимной индукции назван буквой L в честь русского учёного Э.Х. Ленца. Представим себе контур с током I_1 в магнитном поле. Чем же создаётся это магнитное поле? Очевидно, у него есть какой-то источник — представим его себе в виде контура с током I_2 .

Потоком вектора индукции поля первого контура через второй контур будет

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 = L_{12} I_1, \quad (11.10)$$

который можно посчитать с помощью закона Био—Савара—Лапласа, но и так понятно, что он будет пропорционален силе тока I_1 . Коэффициент же пропорциональности будет

зависеть от многих факторов: от формы контуров, от их взаимного расположения, от расстояния между ними и не только.

Аналогично, ток I_2 будет создавать на первом контуре поле B_2 , поток которого через площадь, опирающуюся на первый контур, будет записываться как

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s}_1 = L_{21} I_2.$$

Коэффициент взаимной индукции измеряется в *генри*, Гн.

Можно доказать, что если есть два контура с током, то

$$L_{12} = L_{21}. \quad (11.11)$$

Теперь вспомним третий закон Ньютона и рассмотрим два контура с токами I_1 и I_2 . Их силовые функции равны

$$U_{12} = -I_2 \Phi_{12}, \quad U_{21} = -I_1 \Phi_{21}.$$

Если теперь для определения потока мы используем коэффициент взаимной индукции, мы получим выражения,

$$U_{12} = -I_2 I_1 L_{12}, \quad U_{21} = -I_1 I_2 L_{21}.$$

Помня, что $L_{12} = L_{21}$, заметим, что мы получили выполнение третьего закона Ньютона,

$$F_1 = - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{I_1=\text{const}} = I_1 I_2 \frac{dL_{21}}{dx}, \quad F_2 = - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{I_2=\text{const}} = I_1 I_2 \frac{dL_{12}}{dx}.$$

Отметим, что производные L_{ij} по координате соответствуют сдвигению разных контуров вправо (в сторону увеличения x), почему они и имеют разный знак.

Лекция 12

Электромагнитная индукция

Взаимная индукция двух соленоидов

Рассмотрим соленоид, то есть катушку из N витков, чья длина l много больше корня из площади её сечения S . Пусть по нашей катушке течёт ток I . Чему в таком случае равна индукция магнитного поля внутри катушки?

Чтобы не интегрировать закон Био—Савара—Лапласа по всей катушке, рассмотрим эквивалентную задачу: намотаем катушку из N же витков на тороид радиусом R и длиной l . Считая $l \gg \sqrt{S}$, запишем

$$l = 2\pi R.$$

Зная, что линии индукции будут образовывать концентрические окружности с диаметральным сечением тороида, воспользуемся теоремой о циркуляции магнитного поля по замкнутому контуру. Тогда

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl = \mu_0 IN,$$

откуда мы и получаем выражение для индукции магнитного поля внутри катушки,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (12.1)$$

Иногда это выражение записывается несколько иначе с использованием плотности витков $n = N/l$.

Если вернуться к исходной задаче, мы будем вправе сказать, что индукция магнитного поля внутри катушки приблизительно равна той же самой величине, что мы и сделаем. Отметим, что интегрирование даёт тот же результат, за исключением областей вблизи края катушки.

Рассмотрим теперь коэффициент взаимной индукции. Пусть у нас есть два соленоида, один из которых вложен в другой. Оба соленоида представляют собой катушки одинакового сечения с числом витков N_1 и N_2 , по которым течёт ток I_1 и I_2 соответственно. Если по первой катушке течёт такой ток, он порождает магнитное поле B_1 , чей поток через вторую катушку равен $L_{12}I_1$.

Работая по этой схеме, воспользуемся полученной функцией для поля внутри соленоида,

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I}{l},$$

тогда

$$\Phi_{12} = B_1 S N_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} I_1.$$

Видим, что отсюда коэффициент взаимной индукции двух вложенных соленоидов равен

$$L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l} = L_{21}. \quad (12.2)$$

Из приведённого примера также ясно видно, что в данном конкретном случае $L_{12} = L_{21}$.

Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца

Перейдём наконец от статических полей к изменяющимся. Мы увидим, что изменение магнитного поля влечёт появление электрического поля.

Явление электромагнитной индукции было открыто в 1831 г. М. Фарадеем.

Закон электромагнитной индукции. *Если есть помещённая в магнитное поле катушка, то в определённых ситуациях в ней может возникать электрический ток, набодимый ЭДС индукции всякий раз при изменении магнитного потока через контур,*

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|. \quad (12.3)$$

Очевидно, изменять магнитный поток можно разными способами: сближением или разделением контуров, поворотом одного из них, изменением магнитного поля и другими. Если же мы хотим узнать, как будет направлен возникающий индукционный ток, то нужно вспомнить об уже упомянутом Э. Х. Ленце: направление индукционного тока таково, что создаваемый им магнитный поток должен препятствовать изменению внешнего магнитного потока. Правило Ленца, на самом деле, логически вытекает из закона сохранения энергии — в самом деле, если бы индукционный ток возникал так, чтобы усиливать изменение потока, мы бы получили вечный двигатель первого рода.

Нередко правило Ленца записывается в другом виде,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (12.4)$$

Как относиться к этому минусу? Разумно вспомнить о системе координат, в которой мы рассматриваем контур, то есть положительное направление обхода контура и нормаль **n** к нему. Традиционно они образуют правовинтовую систему, то есть расположены согласно правилу буравчика. Из скалярного произведения

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s},$$

следует, что поток изменяется при изменении магнитной индукции с тем же знаком, что и нормаль к контуру; а значит, положительной ЭДС индукционного тока соответствует правовинтовое направление с нормалью.

С таким правилом знака мы видим, что данное определение включает в себя правило Ленца.

Представим себе, что мы увеличили B , приближая к контуру постоянный магнит. В таком случае контур становится чем-то вроде элементарного магнитного диполя, который будет отталкиваться от магнита. Если же мы будем магнит удалять, то индукционный ток в контуре потечёт в обратную сторону, и контур будет стремиться отдалиться от магнита.

Прямоугольный контур с перемычкой в однородном магнитном поле

Рассмотрим следующую задачу: пусть дана электрическая цепь с резистором сопротивлением R , состоящая из двух прямых проводников (салазок), проводящей перемыч-

ки длиной l между ними, и пусть индукция магнитного поля, перпендикулярного плоскости контура, равна B . Начнём двигать перемычку со скоростью v . Потечёт ли в цепи электрический ток? Оказывается, потечёт.

Возникает вопрос, а почему и как этот индукционный ток появится? Когда проводник начинает двигаться, на электроны в перемычке будет действовать сила Лоренца, направленная вдоль неё. Сила Лоренца, как мы знаем, не является электростатической силой, а значит, перемычка будет сродни источнику ЭДС, равного

$$\mathcal{E} = E_{\text{стор.}} l = vBl = B \frac{dx}{dt} l,$$

если мы выбираем ось Ox в направлении вектора скорости; далее заметим,

$$\mathcal{E} = B \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dt},$$

что есть выражение закона электромагнитной индукции: ЭДС в цепи равна скорости изменения магнитного потока.

Пусть теперь по перемычке течёт ток I , при котором заряды движутся со скоростью v . В таком случае на перемычку будет действовать замедляющая сила магнитного происхождения, равная

$$F = IBl,$$

а с учётом закона Ома для полной цепи,

$$F = \frac{\mathcal{E}}{R} Bl.$$

Соответственно, для движения перемычки с постоянной скоростью необходимо совершение работы внешними силами — сама по себе она остановится, и тепло на резисторе бесконечно выделяться не будет — всё в соответствии в законом сохранения энергии.

Вернёмся к примеру контура в поле постоянного магнита. В контуре протекает ток вследствие возникновения ЭДС. А вот если убрать контур, останется ли ЭДС? Как мы уже обсуждали,

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

Мы связали возникновение ЭДС с появляющимся в окружающем пространстве, где есть изменяющееся магнитное поле, вихревым электрическим полем. Возникает вопрос, куда же направлены линии этого вихревого поля? Туда же, куда и электрический ток. Установим связь между напряжённостью электрического поля и изменяющимся магнитным полем. Эту связь задаёт закон электромагнитной индукции, однако мы пока что записывали этот закон только в интегральной форме. Начнём стягивать контур в точку, получая при этом уравнение

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \quad (12.5)$$

Как же получить дифференциальную форму? Если стягивать контур в точку, первый интеграл будет равен потоку ротора через контур, а последний — потоку $\partial \mathbf{B} / \partial t$, значит, можем записать и

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (12.6)$$

Это уравнение фундаментально и является одним из уравнений Максвелла.

Вспомним, что же у нас было в электростатике. Там мы всегда имели равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

В случае же изменяющегося магнитного поля мы получаем непотенциальное поле, ли-
нии напряжённости которого всегда замкнуты.

Уравнение (12.5) также является уравнением Максвелла, притом тем же самым, но в
интегральной форме.

Измерение магнитного напряжения и индукции

Вспомним определение магнитного напряжения: им называется величина U_m ,

$$U_m = \int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

Большого смысла магнитное напряжение не имеет и в виде разности потенциалов быть
записано оно не может, потому что магнитное поле не является потенциальным.

Индукцию магнитного поля и магнитное напряжение можно измерить. Возьмём, на-
пример, контур с током с магнитным моментом \mathbf{p}_m , находящийся в магнитном поле \mathbf{B} .
Действующий на контур момент сил \mathbf{M} выражается как

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}.$$

Как мы знаем, момент сил можно измерить, а после получить и индукцию магнитного
поля. Это, однако, не самый удобный метод — рассмотрим другой.

Возьмём маленький контур, помещённый в магнитное поле \mathbf{B} , и подключим его к
гальванометру. Воспользуемся законом электромагнитной индукции: нам известна пло-
щадь контура и мы знаем выражение для магнитного потока,

$$\Phi_B = BS,$$

а дальше начнём быстро выключать магнитное поле, и тогда в контуре потечёт индук-
ционный ток I ,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R} \left(-\frac{d\Phi_B}{dt} \right) = \frac{1}{R} S \left(-\frac{dB}{dt} \right).$$

По цепи за время dt протечёт заряд dQ ,

$$dQ = I dt = -\frac{S dB}{R}.$$

Полный заряд, который протечёт по цепи, равен

$$Q = \int dQ = -\frac{S}{R} \int_B^0 dB = \frac{BS}{R}.$$

Этот метод измерения магнитного поля называют *индукционным*. Виток в таком случае
называют *флюксметром*, и подключают его к баллистическому гальванометру, который
измеряет не ток, а полный протёкший заряд.

Измерить магнитное напряжение несколько сложнее. Намотаем гибкую катушку между двумя точками 1 и 2. Что мы знаем про катушку? Она имеет длину l , состоит из N витков сечением S , а магнитное напряжение можно связать с потоком через катушку. Что есть магнитный поток Φ_B ?

$$\Phi_B = \int_1^2 SB \frac{N}{l} dl = \frac{SN}{l} U_m$$

Дальше схема рассуждений понятна — поток мы можем вычислить с помощью баллистического гальванометра, подобно предыдущему случаю.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Заряд же Q , равный интегралу $\int I dt$, будет равен

$$Q = \int I dt = \frac{1}{R} \Phi_B = \frac{1}{R} \frac{SN}{l} U_m.$$

Вопрос состоит только в том, чтобы найти соответствующую длинную катушку, которую можно изгибать. Придумал такую катушку, называемую *поясом Роговского* немецкий физик В. Роговский, который намотал катушку на обыкновенный ремень.

Явление самоиндукции. Индуктивность. Экстратоки

Рассматривая электромагнитную индукцию, мы ни разу не задумались о том, что же создаёт магнитное поле — мы всегда говорили, что оно есть. Исправим это: рассмотрим катушку длиной l , состоящую из N витков, по которой пропущен электрический ток I . Она будет порождать магнитное поле,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l},$$

как мы уже получали ранее. Это поле создаёт магнитный поток через катушку, равный

$$\Phi_B = BSN = \mu_0 \frac{N^2}{l} SI.$$

Мы видим, что поток через катушку зависит от протекающего через неё электрического тока. Соответственно, если ток изменится, в катушке возникнет ЭДС индукции, в данном случае называемое *ЭДС самоиндукции*. В соответствии с правилом Ленца, индукционный ток, иногда называемый *экстратоком*, будет направлен в направлении, противоположном изменению основного тока.

Оказывается, в любом контуре существует прямая пропорциональная связь между магнитным потоком через него и силой тока, протекающей через него. Эта связь записывается как

$$\Phi_B = LI, \tag{12.7}$$

где L называют *коэффициентом самоиндукции* или *индуктивностью* контура. В частности, индуктивность соленоидальной катушки пропорциональна квадрату числа витков,

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Мы также видим, что закон электромагнитной индукции относительно самоиндукции можно записать как

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (12.8)$$

Индуктивность, как и коэффициент взаимной индукции, измеряется в *генри*, как уже было сказано ранее.

Рассмотрим пример: экстратоки замыкания и размыкания. Соберём схему, содержащую батарейку, ключ, резистор сопротивлением R и катушку индуктивности индуктивностью L . Замкнём ключ. Появление в цепи тока вызовет экстраток замыкания, направленный против направления тока от батарейки. Запишем соответствующее уравнение,

$$IR = U_0 + \mathcal{E} = U_0 - L \frac{di}{dt},$$

где U_0 — внешнее напряжение; или, если переписать красивее,

$$IR + L \frac{dI}{dt} = U_0.$$

Выходит, что на катушке происходит падение напряжения, а значит, между краями катушки будет разность потенциалов.

Качественно говоря, видно, что в начальный момент времени тока не будет, однако будет весьма сильна его производная; далее ток будет постепенно выходить на установленный уровень. Запишем дифференциальное уравнение,

$$I + \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{R}. \quad (12.9)$$

Размерность времени в этом уравнении будет иметь величина $\tau = L/R$, которая и явится характерным временем установления тока.

Запишем решение дифференциального уравнения,

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right). \quad (12.10)$$

При размыкании ключа, очевидно, будет иметь место аналогичный процесс.

Лекция 13

Магнетики. Часть I

Экстратоки (завершение)

Пусть у нас есть цепь, аналогичная предыдущей, с установленнымся током $I = U_0/R$. Отключим от неё батарейку (и ключ), замкнув при этом оставшуюся цепь с резистором R и катушкой индуктивностью L . Текущий в цепи ток будет убывать, но сразу не исчезнет: он будет уменьшаться по экспоненциальному закону со всей тем же характерным временем τ ,

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (13.1)$$

Отметим, что для существования экстратока размыкания необходимо наличие в цепи замкнутого контура, по которому он мог бы течь.

Энергия магнитного поля

Факт существования экстратоков, а точнее их способность совершать работу, свидетельствует о существовании некоторой энергии в катушке индуктивности, которой мы обязаны магнитному полю.

Рассмотрим резистор из всей той же цепи с экстратоками. Когда в цепи после размыкания ключа течёт ток

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau},$$

на резисторе выделяется тепло Q , равное

$$Q = \int_0^\infty I^2 R dt.$$

Беря этот интеграл, получим

$$Q = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Получим, что энергия, запасённая в катушке, равна

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (13.2)$$

Где же запасена эта энергия? В рамках рассматриваемого контура ответить на этот вопрос нельзя. Рассматривая, однако, колебательный контур, мы можем заметить, что его энергия может уходить в открытое пространство, где нет никаких токов и никаких катушек. Соответственно, мы говорим, что эта энергия является *энергией магнитного поля*.

Рассмотрим опять пример с катушкой, по которой течёт ток I и которая обладает индуктивностью L . Параметры нашей катушки — число витков N , длина катушки l , и площадь S её сечения,

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I.$$

Поток вектора индукции через катушку равен

$$\Phi_B = BSN = \mu_0 \frac{N^2}{l} SI = LI,$$

где коэффициент самоиндукции L равен

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Запишем выражение для энергии катушки,

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} SI^2.$$

Перепишем теперь энергию магнитного поля через его индукцию,

$$W = \frac{1}{2} Sl \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Можно сказать, что если Sl — это объём области, в которой сконцентрировано поле, то его энергия равна

$$W = Sl w, \quad (13.3)$$

где w — объёмная плотность энергии магнитного поля, равная

$$w = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (13.4)$$

Вспомним, что объёмная плотность энергии электростатического поля тоже пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля. Чуть позже мы увидим, что и сюда можно ввести напряжённость.

Собственная силовая функция тока в магнитном поле

Рассмотрим теперь собственную потенциальную (или силовую) функцию тока в магнитном поле. Для этого представим себе некоторый контур, помещённый во внешнее магнитное поле. Мы говорили, что его силовой функцией в этом поле будет

$$U = -I\Phi_B.$$

Возникает вопрос, что делать с катушкой, которая сама создаёт магнитное поле, которая действует сама на себя? Для этого и вводят собственную силовую функцию. Дифференцируя собственную силовую функцию, мы можем находить силы взаимодействия фрагментов контура друг с другом.

Пусть у нас есть контур с током I , текущий по толстому проводу толщиной l . Он создаёт магнитное поле с известной нам индукцией B . Этот контур можно представить как множество контуров с малым сечением и малым же током dI , каждый из которых находится во внешнем поле, создаваемом всем проводом. Тогда возьмём элементарную силовую функцию,

$$dU = -dI \Phi_B.$$

Тогда полную собственную силовую функцию можно получить интегрированием, вводя средний магнитный поток через рассматриваемый контур

$$U' = - \int dI \Phi_B = -I \langle \Phi_B \rangle.$$

Есть одна маленькая тонкость: результат такого интегрирования будет в два раза превышать истинный: мы рассматриваем взаимодействие каждого элемента со всеми остальными, в результате чего каждая пара элементов оказывается рассмотрена дважды. Соответственно, для собственной силовой функции запишем,

$$U = -\frac{1}{2} I \langle \Phi_B \rangle. \quad (13.5)$$

Средний поток $\langle \Phi_B \rangle$ в данном случае оказывается равен LI ,

$$U = -\frac{1}{2} LI^2. \quad (13.6)$$

Отметим, что очень похожее выражение у нас уже появлялось, только без знака $-$, когда мы говорили об энергии магнитного поля.

Приведём пример. Пусть у нас есть катушка, и по ней пустили ток. Силовая функция в этом случае будет равна,

$$U = -\frac{1}{2} LI^2.$$

Как нам посчитать силу взаимодействия? Координатой будем считать длину катушки. Сила взаимодействия будет равна

$$F = - \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{I=\text{const}} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial l} = \frac{1}{2} I^2 \left(-\mu_0 \frac{N^2}{l^2} S \right).$$

Если же мы сейчас вынесем за скобки площадь сечения, в них останется объёмная плотность энергии электромагнитного поля w , то есть,

$$F = -wS.$$

Явление взаимной индукции

На самом деле, мы уже рассматривали явление взаимной индукции, говоря хотя бы о пояссе Роговского. Рассмотрим два контура с током I_1 и I_2 , которые создают магнитное поле индукцией B_1 и B_2 соответственно. Магнитный поток поля первого контура через второй контур будет равен

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1.$$

Почему же он так называется? Если ток I_1 изменится, то во втором контуре будет индуцироваться ЭДС,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

Появление ЭДС индукции обязано своим возникновением явлению взаимной индукции. Как только во втором контуре появится ЭДС, поток через первый контур изменится, вызывая в нём изменения тока, из-за которого снова изменится поток через второй контур и так далее.

Явление взаимной индукции имеет множество практических применений. Приведём несколько примеров. Начать будет разумно с более конкретного обсуждения пояса Роговского: мы имели прямой провод с током и кожаный ремень, на который навита проволока. Эта проволока дальше идёт к гальванометру. Как только мы выключали ток в проводе, изменялся магнитный поток через витки проволоки, а значит, в контуре с гальванометром возникал электрический ток, величину перенесённого которым заряда мы узнавали в эксперименте. Зная параметры ремня, мы узнавали циркуляцию магнитного поля по замкнутому контуру, а с её помощью и величину индукции магнитного поля.

С помощью взаимной индукции можно также мерить параметры различных контуров с током: в самом деле, не станем же мы их разрезать и вставлять туда амперметр. Вместо этого вблизи контура располагается виток, через который ток создаёт магнитное поле, после чего возникает ЭДС взаимной индукции — после этого можно, например, измерить поток в присутствии витка и без него. Зная поток, мы сможем найти и индукцию магнитного поля, а по закону Био—Савара—Лапласа мы найдём и силу тока в проводе.

Вспомним ещё о токах Фуко. Мы говорили, что если мы возьмём маятник и начнём совершать движения токопроводящей пластины между полюсами магнита, то в этой пластине будут возникать вихревые токи Фуко, тормозящие маятник в магнитном поле. С помощью токов Фуко устроена работа монетоприёмника: при помещении в него монеты в ней под действием магнитного поля возникают вихревые токи Фуко, из-за наличия которых она скатывается замедленно по наклонной плоскости. С помощью правильного подбора механических параметров можно добиться, чтобы фальшивые монеты за счёт другой массы или других электромагнитных параметров отбрасывались машиной.

Ещё одно применение вихревых токов в технике — это металлодетектирующие рамки: они имеют по катушке в каждой из боковых панелей, и в случае образования индукционных токов в пространстве между ними сигнализируют изменение магнитного потока. Речь идёт о том, что внешнее магнитное поле будет искажено возникновением магнитного поля вихревых индукционных токов. Есть также и более компактные аналогичные устройства — переносные металлодетекторы и металлоискатели, в которых также есть катушка, создающая переменное магнитное поле и ищащая его искажение за счёт вихревых токов.

Молекулярные токи. Напряжённость магнитного поля

Перейдём к рассмотрению магнетиков. Мы знаем, что ряд веществ, будучи помещёнными в магнитное поле, сами становятся его источниками. Иными словами, эти вещества *намагничиваются*. Говорят, что суммарное поле представляет собой суперпозицию внешнего поля и поля намагниченного вещества. Следовательно, нам нужно научиться вычислять это поле.

Обращаясь к истории вопроса, вспомним понятие *молекулярных токов*. Это понятие ввёл Ампер, считая, что молекулярные токи — это результат микроскопического движения зарядов, составляющих атомы и молекулы. Согласно современным представ-

лениям, речь идёт о следующих движениях:

- а) движении электронов по орбитам;
- б) собственном вращении (спине) электронов;
- в) собственном вращении (спине) ядер.

Эти три механизма движения ответственны за представление о молекулярных токах.

Нам нужно научиться вычислять эти токи, чтобы с помощью закона Био—Савара—Лапласа найти параметры магнитного поля и ответить на вопрос о намагничивании вещества.

Понятно также, что если мы имеем ненамагнченное вещество, то в нём тоже присутствуют молекулярные токи, однако они направлены хаотически и их суммарный магнитный момент равен нулю.

Начнём со введения вектора намагнченности. Пусть мы внесли некоторое вещество во внешнее поле \mathbf{B} . Это вещество будет намагничиваться за счёт ориентации молекулярных токов. Мы знаем, что вне вещества магнитное поле будет представлять собой суперпозицию внешнего поля и поля вещества, но как быть с полем внутри вещества? Будем говорить о среднем среди микроскопических полей,

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_{\text{микр.}} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{B}_{\text{микр.}} dV. \quad (13.7)$$

Молекулярные токи тоже будем рассматривать как среднее по объёму микроскопических молекулярных токов,

$$I_{\text{мол.}} = \langle I_{\text{мол.}} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} I_{\text{мол.}} dV. \quad (13.8)$$

После такого введения несложно записать все те же соотношения, что и следуют из закона Био—Савара—Лапласа,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_{\text{мол.}}, \quad (13.9)$$

или в дифференциальном виде как

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{мол.}}. \quad (13.10)$$

Эти соотношения, отметим, напоминают аналогичные для электростатики при внесении диэлектрика в электростатическое поле. Значит, и рассматривать намагничивание мы будем подобным образом.

Пусть у нас есть некоторый магнетик, в котором присутствуют молекулярные токи. Каждый из них имеет свой собственный магнитный момент \mathbf{p}_m . Для их описания первым делом вводится вектор намагнченности \mathbf{J} , равный магнитному моменту единицы объёма,

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{V}. \quad (13.11)$$

Как видим, он аналогичен вектору поляризации \mathbf{P} .

Пусть у нас есть кусок магнетика, чьи магнитные моменты выстроены определённым образом, например, вертикально вверх. Рассмотрим его в виде скошенного цилиндра с основаниями S , боковой стороной dl и углом α между боковой стороной и основанием. Объём его будет равен

$$dV = S dl \cos \alpha.$$

Если мы теперь рассмотрим все молекулярные токи, то внутри цилиндра они будут друг друга компенсировать, в то время как по поверхности потечёт единый молекулярный ток $dI_{\text{мол.}}$. Чему же равен полный магнитный момент нашего куска?

$$\mathbf{J} dV = \mathbf{p}_m = dI_{\text{мол.}} S \mathbf{n}_0,$$

где \mathbf{n}_0 — единичный вектор, сонаправленный выстроившимся в определённом направлении магнитным моментам. Раскрывая в предыдущем выражении объём, получим

$$\mathbf{J} \mathcal{S} dl \cos \alpha = dI_{\text{мол.}} \mathcal{S} \mathbf{n}_0,$$

откуда следует

$$dI_{\text{мол.}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{dl}. \quad (13.12)$$

Остаётся вопрос, зачем же мы взяли наклонный элемент? Выставим такие наклонные элементы один за другим так, чтобы образовался тор. Применим к нему теорему о циркуляции с учётом того, что векторы \mathbf{dl} всех цилиндрических участков образуют замкнутый контур. Циркуляция по такому контуру будет равна

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I + \mu_0 I_{\text{мол.}},$$

где $I_{\text{мол.}}$ — это полный молекулярный ток, пересекающий поверхность, опирающуюся на наш контур. Такой ток равен

$$I_{\text{мол.}} = \oint dI_{\text{мол.}} = \oint \mathbf{J} \cdot \mathbf{dl}.$$

Тогда мы вправе написать это выражение без молекулярных токов, а только с использованием вектора намагниченности,

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I + \mu_0 \oint \mathbf{J} \cdot \mathbf{dl}. \quad (13.13)$$

Теперь избавимся от интеграла в правой части, перенося его влево,

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) \cdot \mathbf{dl} = I.$$

Подынтегральный вектор назовём *магнитной напряжённостью*, \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}. \quad (13.14)$$

Отметим, что пусть он и аналогичен электрической индукции \mathbf{D} , в силу исторических традиций эти векторы имеют асимметричные названия.

Напряжённость магнитного поля измеряется в *амперах, делённых на метр*.

Начнём стягивать рассмотренное выше кольцо в точку, тогда получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{J},$$

где нужно обратить внимание на то, что

$$\mathbf{j}_{\text{мол.}} = \operatorname{rot} \mathbf{J}. \quad (13.15)$$

Для вектора напряжённости магнитного поля получим, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (13.16)$$

Зададимся вопросом, какой же физический смысл имеет напряжённость магнитного поля? Вообще говоря, столь же малый, сколь и индукция электрического поля. Тем не менее, с её помощью удобно решать задачи, так как нет необходимости знать молекулярные токи — достаточно знания токов проводимости.

Рассмотрим поля в вакууме и в веществе: так, в вакууме $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, и поэтому имеет индукция и напряжённость магнитного поля сонаправлены. В веществе же может быть всё, что угодно: так, в постоянных магнитах \mathbf{J} настолько велико, что $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Отойдя от первоначального удивления этим фактом, зададимся вопросом, зачем нам тогда вообще нужно поле \mathbf{H} ? Вспомним, что когда мы рассматривали синхротрон, и другие примеры технического использования магнитных полей, мы всегда говорили о поле \mathbf{B} , ведь именно оно оказывает силовое действие. Оказывается, польза от поля \mathbf{H} ограничивается тем, что его удобно считать и что с его помощью часто можно найти вектор \mathbf{B} , так как в веществах со слабыми магнитными свойствами все три вектора \mathbf{B} , \mathbf{J} и \mathbf{H} взаимно пропорциональны.

Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость

Обсудим только что упомянутую пропорциональность.

Когда магнетик помещается в магнитное поле, он намагничивается. В таком случае логично писать связь между вектором намагниченности и силовым вектором индукции. С другой стороны, согласно введению вектора напряжённости, можно записать связь намагниченности и с напряжённостью поля — исторически сложилось, что пишут именно так,

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (13.17)$$

где χ — *магнитная восприимчивость*. В таком случае для \mathbf{B} получим

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \quad (13.18)$$

где $\mu = 1 + \chi$ — *магнитная проницаемость*.

Приведём несколько примеров величин магнитной восприимчивости и магнитной проницаемости. Все вещества делятся по своим магнитным свойствам на сильные и слабые магнетики.

Рассмотрим парамагнетики — так называют вещества, у которых $\chi > 0$, то есть, магнитный момент направлен вдоль по полю, а векторы \mathbf{B} , \mathbf{J} и \mathbf{H} сонаправлены. χ варьируется от 10^{-6} до 10^{-3} по порядку величины. Типичными примерами парамагнетиков являются O_2 , Al , Cl_2 , Pt , или FeCl_3 .

Перейдём теперь к диамагнетикам. Во-первых, у них $\chi < 0$; а во-вторых, их χ варьируется от 10^{-8} до 10^{-5} . Типичными представителями диамагнетиков являются N_2 , C , H_2O , Ag , или Bi .

Наконец, рассмотрим один класс сильных магнетиков — ферромагнетики. Вообще говоря, у них χ может принимать любые значения, и более того, существует зависимость χ от поля H . Магнитная восприимчивость ферромагнетиков может достигать 10^6 и даже больших значений.

Лекция 14

Магнетики. Часть II

Магнитное поле в веществе (продолжение)

Продолжим рассмотрение магнетиков. Отметим, забегая вперёд, что диамагнитные свойства присутствуют у всех без исключения веществ, однако, как мы уже говорили, парамагнитные свойства на несколько порядков сильнее, и если у определённого вещества они тоже присутствуют, то они перекрывают диамагнитные свойства и мы обычно и не говорим о его диамагнетизме.

Ферромагнитные свойства среди простых веществ при комнатной температуре проявляют только Fe, Ni, Co и Gd — а при температурах много ниже ещё пять редкоземельных металлов. Известны также ферромагнитные сплавы из неферромагнитных веществ.

Рассмотрим таблицу сравнений между магнитным и электростатическим полями в веществе,

Электричество	Магнетизм
Потенциальное поле \mathbf{E}	Вихревое поле \mathbf{B}
Вектор поляризации \mathbf{P}	Вектор намагниченности \mathbf{J}
Индукция $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	Напряжённость $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}$
Плотность связанных зарядов $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$ (линии напряжённости имеют начало и конец)	Плотность молекулярного тока $\mathbf{j}_{\text{мол.}} = \operatorname{rot} \mathbf{J}$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ (линии индукции замкнуты)
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \neq 0$ (линии индукции имеют начало и конец)	$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0$ (линии напряжённости имеют начало и конец)

Преломление линий магнитной индукции и напряжённости

На границе раздела двух магнетиков, так же как и на границе раздела двух диэлектриков, линии магнитного поля претерпевают некоторые изменения. Получим их из граничных условий. Поскольку \mathbf{B} и \mathbf{H} сонаправлены, их поведение на границе раздела будет одинаковым.

Запишем описывающие магнитное поле уравнения,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Рассмотрим теперь границу раздела двух магнетиков с проницаемостью μ_1 и μ_2 , и элементарный контур — аналогичный рассмотренному в электростатике — с двумя длинными сторонами, параллельными границе раздела. Напряжённость магнитного поля в точках на параллельных сторонах будет равна \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 , и, принимая плотность тока проводимости на границе равной нулю, мы вправе написать, что циркуляция напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру равна нулю, то есть,

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}.$$

Теперь, поскольку дивергенция \mathbf{B} равна нулю, то и нормальная составляющая этого вектора непрерывна,

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Введём в рассмотрение углы α_1 и α_2 между векторами магнитного поля и перпендикуляром к границе раздела. Имея полученные условия, спросим себя, что такое $H_{2\tau} = H_{1\tau}$? Получим, что

$$\frac{B_2}{\mu_0 \mu_2} \sin \alpha_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_1} \sin \alpha_1.$$

Теперь сделаем аналогичные действия с соотношением для нормальных компонент,

$$B_2 \cos \alpha_2 = B_1 \cos \alpha_1.$$

Из этой пары соотношений мы и получаем граничные условия. Поделим для их нахождения наши два уравнения, получая

$$\frac{1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

То же самое можно переписать в более удобном виде,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (14.1)$$

Вот мы и получили закон преломления линий магнитного поля.

Поскольку преломление линий магнитного поля во многом аналогично преломлению линий электрического поля, некоторые выводы также являются для этих явлений общими — например, так же как и с диэлектриком в форме эллипсоида, магнетик в форме эллипсоида намагничивается однородно по всему объёму.

Фактор формы магнетика

Рассмотрим один важный момент: когда мы помещаем магнетик в магнитное поле, он намагничивается, причём его намагничивание зависит от его формы. Несложно, однако, экспериментально показать, что чем больше у магнетика отношение длины к диаметру, тем лучше он намагничивается. Попробуем понять этот эффект.

Рассмотрим простую вещь. Пусть у нас есть соленоид с N витками, чья длина равна l . По нему течёт ток силы I . В таком соленоиде будет однородное поле, причём линии индукции внутри него будут практически параллельны, а индукция будет равна B_0 ,

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 i,$$

где i — *поверхностной плотностью токопроводимости*. Чему же будет равна напряжённость поля?

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{0},$$

потому что намагнченности в вакууме нет. Вставим в катушку проволоку. Появятся молекулярные токи, и индукция поля изменится,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{мол.}}$$

Напряжённость же поля всё так же будет определяться по тому же соотношению,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{мол.}}}{\mu_0} + \mathbf{J},$$

притом \mathbf{J} на этот раз не будет равно нулю. Намагченность связана с теми самыми молекулярными токами, которые дают дополнительную индукцию.

Мы не знаем ни \mathbf{H} , ни \mathbf{B} , ни \mathbf{J} , ни $\mathbf{B}_{\text{мол.}}$, причём если бы мы знали одну из этих величин, мы бы без труда нашли все остальные. Рассмотрим предельные случаи, а затем обобщим.

- а) Короткий стержень (диск). Стержень намагнитится, однако в силу его предельно малого размера, поле его молекулярных токов можно считать равным нулю,

$$\mathbf{J} \neq \mathbf{0}; \quad \mathbf{B}_{\text{мол.}} = \mathbf{0}.$$

Помня, что для магнитного момента элемента мы записывали соотношение

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{J}S \, dl = dI_{\text{мол.}} \, \mathbf{S}.$$

Чему будет равна поверхностная плотность молекулярных токов? Достаточно очевиден ответ, что $i_{\text{мол.}} = dI_{\text{мол.}}/dl$, тогда

$$i_{\text{мол.}} = J.$$

Получим, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{J}. \quad (14.2)$$

- б) Длинный стержень. Для длинного стержня, аналогично соленоиду, получим

$$B_{\text{мол.}} = \mu_0 i_{\text{мол.}} = \mu_0 J.$$

Для напряжённости поля получим

$$H = \frac{B_0 + B_{\text{мол.}}}{\mu_0} - J = \frac{B_0}{\mu_0} = H_0. \quad (14.3)$$

Мы видим по предельным случаям, что форма намагничиваемого тела влияет на намагченность: чем больше напряжённость, тем более намагнично тело — значит, длинный стержень намагнился больше. Тогда для стержня промежуточной длины запишем

$$H = H_0 - \beta J, \quad (14.4)$$

где β — безразмерный коэффициент между нулём и единицей, называемый *фактором формы*, а, как мы помним, $J = \chi H$.

Получим зависимость намагченности стержня от внешнего поля с учётом фактора формы. Поскольку

$$J = \chi H,$$

а $H = H_0 - \beta J$, запишем

$$J = \frac{\chi H_0}{1 + \beta \chi}. \quad (14.5)$$

Несложно, зная J и H , посчитать и индукцию магнитного поля B ,

$$B = \frac{(1 + \chi)B_0}{1 + \beta \chi}.$$

Зададимся теперь вопросом, как посчитать поле однородно поляризованного эллипсоида, раз уж стержень — его частный случай. Понятно, что ответом будут три аналогичных соотношения, по одному на ось — получим их. Введём систему координат, направив оси вдоль осей эллипсоида. Внешнее поле тогда можно разложить на три компоненты H_{0x} , H_{0y} , H_{0z} . После этого для проекции поля на i -тую ось получим

$$J_i = \frac{\chi H_{0i}}{1 + \beta_i \chi}.$$

Аналогично для индукции,

$$B_i = \frac{(1 + \chi)B_{0i}}{1 + \beta_i \chi}.$$

Все три компоненты β_x , β_y , и β_z называются факторами формы, причём можно получить, что

$$\beta_x + \beta_y + \beta_z = 1.$$

У стержня один из факторов формы будет много больше двух других, а у шара, в силу симметрии, они все будут равны.

Отметим особенно, что у слабых магнетиков $\beta \chi \ll 1$, за счёт чего

$$J \approx \chi H_0,$$

в то время как у сильных магнетиков, напротив, $\beta \chi \gg 1$, а

$$J \approx \frac{H_0}{\beta},$$

то есть, намагниченность практически полностью зависит от формы магнетика.

Силы, действующие на магнетики в магнитном поле

Проведём эксперимент, располагая шарик из висмута (диамагнетик) во внешнем магнитном поле, и заметим, что он под действием поля будет выталкиваться со своего положения. Зададимся вопросом, как же это описать.

Висмут намагничивается в противоположном напряжённости поля направлении, в ходе чего возникают молекулярные токи. После этого можно рассматривать шарик как некоторый контур с током, как показано на рисунке. К верхней части контура будет приложена сила, направленная вниз, в то время как к нижней его части — сила, направленная вверх, большая по величине. Если бы наш шарик был парамагнитным, то молекулярные токи в нём ориентировались бы противоположно, и двигался бы он также в другую сторону.

Мы видим, что диамагнетик выталкивается в область с меньшей индукцией поля — парамагнетик же, наоборот, затягивается в область с большей индукцией.

Аналогично и моменты сил будут направлены в противоположные стороны.

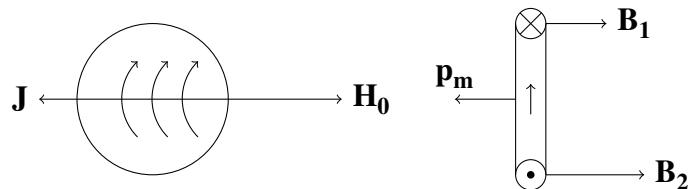


Рис. 24: Намагничивание шарика из висмута в магнитном поле.

Силовая функция для магнетика в магнитном поле

Очевидно, что для помещённого в магнитное поле магнетика можно ввести силовую функцию. Вспомним в качестве образца силовую функцию тока во внешнем поле,

$$U = -I\Phi_B.$$

Очевидно, что искомая нами функция будет похожа.

Пусть во внешнее поле с индукцией \mathbf{B}_0 помещён магнетик сечением S , длиной dl , и имеющий магнитный момент \mathbf{p}_m ,

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{J} dV = dI_{mol} \mathbf{S}.$$

По аналогии запишем,

$$U = -I_{mol} \Phi_B = -dI_{mol} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 dV. \quad (14.6)$$

Попробуем слегка передвинуть, или повернуть, магнетик — силовая функция изменится на величину

$$\delta(dU) = -J \delta B_0 dV.$$

Начнём следующую лекцию с пояснения её смысла.

Лекция 15

Магнетики. Прецессия Лармора

Силовая функция для магнетика в магнитном поле (продолжение)

На прошлой лекции мы получили для силовой функции магнетика во внешнем поле выражение

$$dU = -\mathbf{J} dV \cdot \mathbf{B}_0.$$

Как мы помним, для расчёта сил с помощью силовой функции нам необходимы виртуальные перемещения. В таком случае мы посчитали виртуальное приращение,

$$\delta(dU) = -J \delta B_0 dV.$$

Что же это за приращение?

Если мы виртуально перемещаем магнетик, мы считаем изменяющейся только величину индукции магнитного поля B_0 . Как же так, однако, если B_0 и J связаны линейной зависимостью? Возьмём половину приращения,

$$\delta(dU) = -\frac{1}{2} \delta(\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0) dV.$$

После этого для нахождения приращения по всему магнетику необходимо взять интеграл по его объёму,

$$\delta \int_V dU = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 dV.$$

Возникает вопрос, чему же равна силовая функция магнетика в магнитном поле. Ответ прост,

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 dV. \quad (15.1)$$

Рассмотрим пример. Пусть у нас есть парамагнитный шарик в неоднородном поле, чья индукция возрастает по мере приближения координаты к нулю. Мы видим, что если шарик парамагнитный ($\chi > 0$), то силовая функция растёт против направления изменения поля, а если диамагнитный ($\chi < 0$) — то вдоль него.

Попробуем сосчитать силовую функцию для шарика в поле B_0 , направленном вдоль оси Oz и уменьшающемся в линейной зависимости от координаты. Для этого нам необходимо будет найти J . Будем считать, что размеры шара малы по сравнению с характерным расстоянием изменения поля, то есть что поле внутри шара можно назвать однородным. Тогда получим, помня выражение

$$H = H_0 - \beta J,$$

где $\beta = 1/3$, а $J = \chi H$,

$$J = \chi(H_0 - \beta J) = \frac{\chi H_0}{1 + \beta \chi}.$$

В этом случае для силовой функции получим, с учётом того, что нам не нужно интегрировать, так как подынтегральная функция неизменна во всём объёме,

$$U = \frac{1}{2} \frac{\chi H_0 B_0}{1 + \beta \chi} V = \frac{1}{2} \frac{\chi B_0^2}{\mu_0 (1 + \beta \chi)} V.$$

Помним, что B_0 зависит от x . Для силы получим выражение,

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi}{1 + \beta \chi} \frac{\partial B_0^2}{\partial x} V.$$

Если $\chi > 0$, то мы видим, что сила будет направлена против оси Oz , а если же $\chi < 0$, то сила будет направлена вдоль оси.

Можно ввести понятие силы, действующей на единицу объёма,

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{V},$$

тогда для такой силы получим выражение,

$$\mathbf{f} = \frac{\chi}{2\mu_0(1 + \beta\chi)} \nabla B_0^2. \quad (15.2)$$

Не стоит забывать, что для слабых магнетиков $\beta\chi \approx 1$, и потому можно зависимость упростить.

Зададимся вопросом, как создать приличное \mathbf{B}_0 , чтобы можно было заметить действие таких сил? Вспомним, что индукция катушки с током выражается как

$$B = \mu_0 i,$$

где i — это поверхностная плотность токопроводимости, измеряемая в А/м. Выходит, что 1 Тл — это очень большая величина индукции. Мы помним, что $\mu_0 \sim 10^{-6}$, а значит, для создания индукции в 1 Тл необходимо достичь поверхностной плотности токопроводимости порядка 10^6 А/м. Мы помним, что электрические токи вызывают выделение тепловой энергии, и с таким большим током проводник попросту испортится — необходимо использование сверхпроводящего состояния материалов, а для этого необходимо поддерживать температуру порядка 10 К.

Физический смысл индукции и напряжённости магнитного поля

Вспомним, что мы вводили напряжённость магнитного поля в виде суммы

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}.$$

Она является суммой разных по физическому смыслу слагаемых, поэтому не имеет глубокого физического смысла. При этом, использование поля \mathbf{H} во многих случаях упрощает расчёты магнитных полей в магнетиках.

Поле **B** определяет силовое воздействие магнитного поля на токи и движущиеся заряды. Оно создаётся токами проводимости и молекулярными токами и по структуре всегда является вихревым, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Поле **H**, имеющее разрывы на границе сред, можно представить в виде суперпозиции двух полей, вихревого $\mathbf{H}_{\text{вихр.}}$, $\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{вихр.}} = 0$, и потенциального $\mathbf{H}_{\text{ном.}}$, $\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{ном.}} \neq 0$.

Рассмотрим провод с током, находящийся в вакууме при внешнем поле **B**. Погрузим теперь всё это дело в однородный магнетик и зададимся вопросом, возрастёт ли поле **B**. Возрастёт ли оно? Очевидно, да, потому что будет представлять собой суперпозицию исходного поля и поля молекулярных токов.

Что же можно сказать о поле **H**? Вспомним, что согласно теореме о его циркуляции, она равна алгебраической сумме токов проводимости. Если магнетик бесконечный, то поле **H** тоже будет вихревым и будет сонаправленным полю **B**. В этом случае их структура будет одинаковой.

Если же вдруг магнетик будет неоднородным — допустим его состоящим из двух цилиндров проницаемостью μ_1 и μ_2 — и всё, поле **H** станет совсем другим. В однородных магнетиках $\mathbf{H}_{\text{ном.}}$ отсутствует.

Поэтому поле **H**, пусть и не имеет глубокого физического смысла, имеет определённые преимущества. Допустим, мы хотим найти внешнее поле **B** внутри однородного магнетика. Без знания теоремы о циркуляции поля **H** сделать это достаточно затруднительно — приходится искать молекулярные токи и поле $\mathbf{B}_{\text{мол.}}$ в явном виде.

Классическое описание диамагнетизма. Прецессия Лармора

Хочется ещё спросить себя, почему же все вещества делятся на диамагнетики и парамагнетики, а к тому же есть ещё и сильные магнетики? Вспомним, что мы вводили эти понятия феноменологически, аналогично поляризации диэлектриков в электростатике, а после в ней мы перешли к рассмотрению полярных и неполярных молекул. Попробуем здесь сделать подобное.

Есть вещества, атомы которых не обладают собственным магнитным моментом. Все такие вещества — диамагнетики. Есть также вещества, обладающие собственным магнитным моментом — парамагнетики. Вспомним строение атома — каждый атом представляет собой ядро, окружённое вращающимися вокруг него некоторым образом электроны. Вращающиеся электроны должны создавать элементарные токи, которые и приводят к возникновению магнитного момента.

Однако движение электронов вокруг атомов достаточно хаотично, и магнитные моменты, образуемые некоторыми из них, как правило, компенсируются другими — выходит, что собственного магнитного момента у атомов нет. Тогда возникает вопрос — что же происходит после помещения атома в магнитное поле?

Представим себе положительно заряженное ядро, вокруг которого некоторым образом вращается электрон — для простоты допустим, что он вращается по круговой орбите со скоростью **v**, причём радиус орбиты равен *r*, масса электрона *m*, а заряд его — *e*. Если массивное тело движется по орбите, то у него есть некоторый орбитальный момент импульса **L**,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Движению заряда эквивалентен некоторый электрический ток, направленный в противоположность движению заряда.

воположную движению электрона сторону. Соответственно, магнитный момент будет направлен против вектора \mathbf{L} . Магнитный момент p_m будет равен

$$p_m = IS = \frac{e}{T} \pi r^2 = \frac{e r}{2}.$$

Видно, что отношение магнитного момента к механическому моменту постоянно,

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} < 0,$$

причём это можно записать даже в векторном виде,

$$\mathbf{p}_m = \frac{e}{2m} \mathbf{L} = \Gamma \mathbf{L},$$

где Γ — это гиromагнитное отношение, причём отрицательное.

Если нам удаётся установить гиromагнитное отношение, и оно окажется равно такой величине, то мы поймём, что мы рассуждаем правильно. Забегая вперёд отметим, что на самом деле Γ ближе к e/m , что подсказывает нам, что собственный магнитный момент электрона даже более важен, чем его движение.

Что же будет, если мы поместим один атом, содержащий один электрон, во внешнее магнитное поле? На электрон начнёт действовать некоторый момент силы \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B},$$

который будет вызывать изменение момента импульса электрона,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} = \Gamma \mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

Конец вектора \mathbf{L} будет прецессировать с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = -\Gamma \mathbf{B}$,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{B}. \quad (15.3)$$

Такая прецессия называется *лармовой прецессией* или *прецессией Лармора*. Пока что, отметим, мы не говорим конкретно о магнетизме: мы подходим издали.

Выясняется, что диамагнетизм связан именно с прецессией электронных орбит. Как только, вращаясь по орбите, электрон начнёт прецессировать, у него появится дополнительный магнитный момент в направлении, противоположном вектору $\mathbf{\Omega}$ или \mathbf{B} .

Возникает вопрос: как бы нам посчитать магнитную восприимчивость диамагнетиков? В результате прецессии возникает дополнительный магнитный момент,

$$\Delta \mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{v}) \rho dV = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})) \rho dV,$$

где $\Delta \mathbf{v}$ — это дополнительная скорость электрона, возникающая вследствие прецессии, и равная $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, а ρ — объёмная плотность заряда. Двойное векторное произведение под знаком интеграла можно раскрыть как $(\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})) = \mathbf{\Omega} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r})$ и записать

в проекциях на координатные оси, выбирая ось Oz сонаправленной вектору индукции внешнего поля, а начало координат в центре орбиты электрона,

$$\begin{aligned}Ox: (\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}))_x &= -x\Omega z, \\Oy: (\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}))_y &= -x\Omega z, \\Oz: (\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}))_z &= \Omega r^2 - z\Omega z = \\&= \Omega (x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Если мы усредним Δp_m по времени, превышающему время оборота электрона вокруг ядра, из этих трёх компонент останется только одна,

$$\langle \Delta p_m \rangle_z = \frac{1}{2} \int \Omega (x^2 + y^2) \rho dV = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle \Omega Z e,$$

где $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle r^2 \rangle / 3$, а Z — число электронов в атоме. Обозначая после этого число атомов в единице объёма за N , получим намагниченность

$$J = N \langle \Delta p_m \rangle_z = -\frac{\mu_0 Z e^2 N}{6m} \langle r^2 \rangle H = \chi H.$$

Очевидно, отсюда можно получить χ ,

$$\chi = -\frac{\mu_0 Z e^2 N}{6m} \langle r^2 \rangle. \quad (15.4)$$

Если подставить характерные значения для атома водорода, получим $\chi \sim -10^{-6}$.

Стало быть, диамагнетизм есть у всех веществ — однако магнитная восприимчивость диамагнетиков мала, поэтому диамагнетиками мы называем только те вещества, у которых не происходят другие магнитные явления.

Парамагнетизм. Теория Ланжевена. Закон Кюри

Обсудим теперь парамагнетизм. Атомы парамагнетиков имеют собственный магнитный момент \mathbf{p}_{m0} . При помещении вещества во внешнее поле, поле стремится выстроить атомы так, чтобы их магнитный момент составлял наименьший угол с полем. В это же время происходит непрерывное тепловое движение, стремящееся все атомы дезориентировать. Догадываемся, что чем выше температура, тем слабее будет парамагнетизм.

Классическая теория парамагнетизма носит имя Ланжевена, с которым мы уже сталкивались в нашем курсе. Средняя проекция магнитного момента на направление вектора магнитной индукции внешнего поля равна

$$\langle p_m \rangle = p_{m0} \left(\coth \beta - \frac{1}{\beta} \right) = p_{m0} L(\beta),$$

где $L(\beta)$ — функция Ланжевена от аргумента $(p_{m0} B) / (k_B T)$, причём при $\beta \ll 1$ можно считать $L(\beta) = \beta/3$.

Намагниченность, соответственно, будет равна

$$J = N p_{m0} L(\beta) \approx N P_{m0} \frac{\beta}{3} = \frac{N p_{m0}^2}{3k_B T} \mu_0 H,$$

откуда получим магнитную восприимчивость,

$$\chi = \frac{N p_{m0}^2}{3k_B T} \mu_0. \quad (15.5)$$

Если взять собственный магнитный момент атома $p_{m0} \sim 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, для магнитной восприимчивости получится значение $\chi \sim 10^{-3}$.

Видно, что магнитная восприимчивость парамагнетиков падает обратно пропорционально температуре,

$$\chi \propto \frac{1}{T}, \quad (15.6)$$

что носит название *закона Кюри*.

Возникает вопрос, что будет, если охлаждать парамагнетик? Оказывается, магнитная восприимчивость не будет расти до бесконечности, вместо чего будет иметь место фазовый переход второго рода при температуре *точки Кюри*, в ходе которого парамагнетик перейдёт в ферромагнитное состояние.

Очевидно, что парамагнитные свойства доминируют над диамагнитными.

Механомагнитный эффект и магнитомеханический эффект

Какие эксперименты могут подтвердить приведённые теории? Оказывается, такие есть, и притом целых два. Сперва рассмотрим механомагнитный эффект.

Представим себе, что у нас есть волчок, находящийся на подставке. Он крутится и имеет некоторый момент импульса \mathbf{L} . Если мы начнём вращать подставку с угловой скоростью Ω , он будет приподниматься. Какое же отношение это имеет к магнетизму? Магнитный момент атома расположен в направлении, противоположном \mathbf{L} . Если начать вращать тело с угловой скоростью Ω , все его атомы будут стремиться выровниться в том же направлении, а тогда тело намагнитится. Этот эффект называют *механомагнитным* или *эффектом Барнета*.

Есть и противоположный эффект: если на тонкой нити подвесить цилиндр и приложить к нему магнитное поле \mathbf{B} , сонаправленное нити, то он намагнитится вверх и получит механический момент, направленный вниз. Поскольку суммарный момент импульса системы, состоящей из кристаллической решётки и электронов, останется равным нулю, решётка получит момент импульса, направленный вверх, и начнёт вращаться. Поворот будет ничтожно мал, но можно сделать переменное магнитное поле и попасть в резонанс.

Что магнитомеханический, что механомагнитный эффекты показывают, что между \mathbf{p}_m и \mathbf{L} есть связь, притом коэффициент её отрицателен. Это свидетельствует о том, что в магнитном взаимодействии участвуют отрицательно заряженные частицы, то есть, электроны. При этом, однако, оказалось, что коэффициент Γ примерно вдвое больше, чем у нас он получился — стало ясно, что необходимо введение новых представлений

об электроне, которые появились в 1922 г. при объяснении результатов опыта Штерна и Герлаха. В его ходе через неоднородное магнитное поле пропускался пучок атомов серебра, который должен был отклоняться от прямого пути под действием магнитного поля — однако оказалось, что пучок вообще расщепляется на несколько частей. Это свидетельствует о том, что проекция магнитного момента атомов серебра на направление поля может иметь несколько дискретных значений — этот эксперимент стал одним из толчков к появлению квантовой механики. Для объяснения этого эксперимента и было введено понятие *спина* нидерландскими физиками Д. Уленбеком и С. Гаудсмитом.

С помощью спина и объясняется существование сильных ферромагнетиков: мы говорим, что есть вещества, у которых есть нескомпенсированные спины электронов, которые и дают сильный магнитный момент.

Лекция 16

Ферромагнетизм. Электромагнитные колебания

Ферромагнетизм. Кривая намагничения. Гистерезис

Вспомним основные соотношения, описывающие атом, вокруг ядра которого движется электрон по круговой орбите,

$$\mathbf{p}_m = \frac{e}{2m} \mathbf{L} = \Gamma \mathbf{L}.$$

Все проводившиеся опыты показывали, что на самом деле значение Γ ближе к e/m , чем к $e/2m$, что свидетельствовало о другой природе магнитных явлений.

Вспомним также результаты опыта Штерна—Герлаха: расщепление пучка атомов серебра свидетельствовало о том, что проекция магнитного момента на ось магнитного поля может иметь несколько значений — а значит, электроны обладают собственным механическим моментом, спином \mathbf{s} , а также собственным магнитным моментом $\mathbf{p}_s = e/m\mathbf{s}$. Выяснилось, что различие теории и эксперимента вызвано тем, что в сильных магнитах за намагничение преимущественно отвечает спиновый механизм.

Попробуем представить себе, что мы поместили сильный магнитик во внешнее магнитное поле. Если мы будем смотреть на зависимость $J(H)$, мы можем заметить, что она, вообще говоря, нелинейна. Если же рассматривать сильный магнитик под микроскопом, можно заметить, что сильный магнитик состоит из субмикронных областей спонтанного намагничивания, называемых *магнитными доменами*.

Пусть поля нет: в этом случае в рамках всех областей спонтанного намагничивания магнитные моменты ориентированы однородно, но направления однородной ориентации произвольны, и в среднем суммарная намагченность равна нулю.

Начнём прикладывать внешнее поле: поначалу начнётся смещение доменных границ. Те домены, которые ориентированы близко к направлению поля, будут выживать, увеличиваясь за счёт соседних доменов с неправильной ориентацией, потому что их энергия ниже, чем энергия соседних. После начнётся поворот магнитных моментов доменов, стремясь повернуться вдоль внешнего поля. Наконец происходит насыщение, после которого намагничивание идёт слабо и аналогично парамагнетикам, пропорционально внешнему полю.

Понятно, что существует верхняя температурная граница проявления ферромагнитных свойств — это точка Кюри, о которой мы уже говорили.

Что же будет, если ферромагнетик будет состоять только из одного домена? У него будет намагченность, которую мы назовём намагченностью насыщения. Если доменов будет два, внешнее поле будет меньше; если три, четыре — ещё меньше. Возникает вопрос, почему же ферромагнетик не состоит из одного домена?

Речь идёт о том, что ферромагнитная система стремится к минимуму энергии. Энергия состоит из двух слагаемых: энергии поля, которая будет тем меньше, чем больше доменов, и энергии границ, запасающихся в доменных стенках. Очевидно, должен быть какой-нибудь компромисс. Разбиение на домены происходит, действительно, до тех пор, пока два этих слагаемых не принимают одинаковые значения.

Вернёмся к кривой намагничения, показанной на рисунке. Участок (1) соответствует обратимым упругим смещениям границ. Участок (2) соответствует уже необрати-

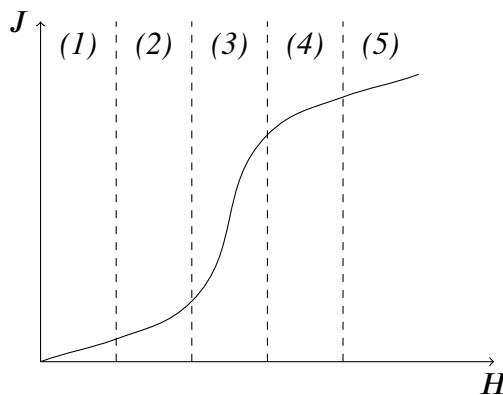


Рис. 25: Кривая намагничения ферромагнетика.

мым, но ещё упругим смещениям границ. Участок (3), наиболее крутой, соответствует максимальной восприимчивости, связан с полностью необратимым смещением границ. Участок (4) отвечает повороту вектора намагниченности доменов, а участок (5) соответствует парамагнитному поведению после насыщения. Не слишком сложно понять, что зависимость

$$\mu = 1 + \frac{J}{H},$$

называемая *кривой Столетова*, тоже будет нелинейной, достигая в максимуме значений порядка 10^6 . На бесконечности μ будет стремиться к некоторой постоянной величине.

Аналогично наличию в механике остаточных деформаций, у ферромагнетиков тоже имеет место остаточная намагниченность, остающаяся после исчезновения внешнего намагничивающего поля. Ферромагнетик, имеющий некоторую остаточную намагниченность без наличия внешнего поля, называют *постоянным магнитом*. Для того, чтобы избавиться от остаточной намагниченности, необходимо приложить достаточно сильное поле H_k в противоположном направлении, называемое *коэрцитивным*. В зависимости от величины коэрцитивного поля говорят о магнитомягких и магнитожёстких ферромагнетиках. Если же продолжить двигаться далее после размагничивания ферромагнетика, мы получим *петлю гистерезиса*.

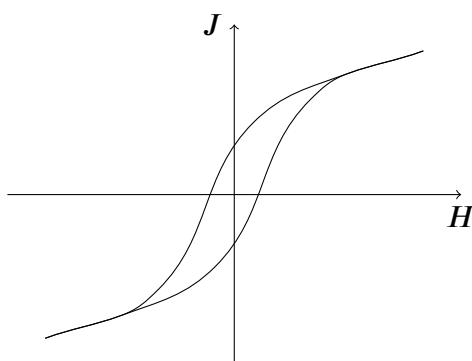


Рис. 26: Петля гистерезиса.

Если для перемагничивания требуется энергия, очевидно, что ферромагнетик будет

нагреваться. Размер петли гистерезиса определяет величину коэрцитивной силы, необходимой для перемагничивания — принято считать, что если она меньше 1 кА/м, то материал магнитомягкий, а если же больше, то материал магнитожёсткий. Магнитомягкие материалы используются, например, в качестве сердечников трансформатора, а магнитожёсткие — для изготовления постоянных магнитов.

Вопрос о конкретном описании поведения доменов и изменении границ достаточно сложен и в рамках классической физики не описывается. В квантовом же описании вводят понятие *обменных сил* — это чисто квантовые силы, которые существуют между электронами внутренних оболочек атомов. Эти силы и приводят к образованию доменов и влекут особенности их поведения, но останавливаться на них мы не будем.

Рассмотрим поле постоянного магнита. Воспользуемся связью между полем, создаваемым катушкой, и полем молекулярных токов. По катушке с током протекает ток I , и индукция поля в ней равна

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2l} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Возьмём теперь постоянный магнит с остаточной намагниченностью J_{ocm} . Что будет с индукцией? Поскольку NI/l — это поверхностная плотность тока, которая в точности равна остаточной намагниченности магнита, получим выражение

$$B = \mu_0 \frac{J_{ocm}}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (16.1)$$

Аналогично катушке, линии магнитной индукции будут параллельны друг другу внутри постоянного магнита, будут выходить из одного его края и входить в другой. Эти края называют северным и южным полюсами магнита соответственно. Подчеркнём, что индукция магнитного поля магнита не зависит от его χ .

Возникает вопрос, чему же равно поле H ? По определению,

$$H = \frac{B}{\mu_0} - J.$$

В случае катушки J нет, значит, H и B практически одно и то же. Значит, линии напряжённости и индукции магнитного поля в катушке одинаковы. Что же будет для магнита? Подставив выражение для индукции в определение, получим,

$$H = J_{ocm} \left(\frac{1}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) - 1 \right).$$

Очевидно, H и B больше не совпадают. Несложно заметить, что внутри магнита напряжённость поля отсутствует везде, кроме как близко к краям, где она отрицательна, а вне магнита ведёт себя так же, как и индукция. На торцах магнита появляются линии напряжённости.

Иногда в качестве формализма говорят, что на полюсах постоянного магнита появляются положительный и отрицательный магнитные заряды. Нельзя при этом забывать, что разделить пару магнитных зарядов нельзя: если магнит распилить пополам, у каждой из частей снова будет по паре зарядов.

С помощью остаточной намагниченности можно хранить информацию, и именно с намагничающимися ферромагнитных проволок (а после и лент с ферромагнитным порошком) и началась история записи информации. До изобретения оптических дисков магнитный метод был основным методом записи информации.

Ещё одним примером использования постоянных магнитов в технике являются поезда на магнитной подушке. Такие поезда за счёт поднятия над рельсами действием магнитного поля практически не испытывают трения и могут развивать много большие обычных поездов скорости.

Ядерный магнитный резонанс. Магнитно-резонансная томография

Вспомним о прецессии: скорость прецессии во внешнем магнитном поле равна

$$\Omega = -\Gamma B = \frac{p_m}{L} B.$$

Механический момент и магнитный момент присущи не только орбитальному, но и собственному, спиновому движению электрона; более того, те же параметры есть и у протона — значит, можно говорить ещё о трёх внутриатомных прецессиях.

Возьмём магнитный момент, вращающийся с угловой скоростью Ω , и пустим электромагнитную волну, индукция чьего поля зависит от времени как

$$B_\perp = B_{\perp 0} = \sin(\omega t),$$

и если частота поля будет совпадать с частотой прецессии, то электромагнитная волна будет интенсивно поглощаться.

Зачем нам это? Например, чтобы построить на базе такого резонанса магнитно-резонансный томограф. Вспомним, что ядро атома водорода содержит протон. У протона есть гиromагнитное отношение, магнитный и механический моменты. Если мы поместим во внешнее магнитное поле протон, то его магнитный и механический моменты будут прецессировать вокруг направления поля. Если теперь мы пустим ещё одну волну так, что её частота будет совпадать с частотой прецессии, то мы получим резонанс.

На этом принципе основана работа магнитно-резонансного томографа: пациент помещается в магнитное поле, направленное от головы к ногам. Мы пускаем магнитную волну с частотой ω . Если эта частота совпадает с частотой ядерной прецессии, то волна будет поглощаться. От чего же зависит частота прецессии протона?

$$\Omega = -\Gamma B(1 - \sigma),$$

где σ — это константа экранирования, которая показывает взаимодействие протона с окружающими его атомами и молекулами. Сравнивая локальную частоту резонанса с частотой резонанса заведомо здорового человека, можно найти искомые образования.

Магнитно-резонансный томограф состоит из большой катушки, которая создаёт вокруг пациента сильное магнитное поле, и трёх пар малых катушек, которые создают то самое второе поле, входящее в резонанс с прецессией протонов. Катушки выбираются таким образом, чтобы создавать поле с необходимой частотой, локализованное в небольшом объёме, чтобы точнее исследовать пациента.

Электромагнитные колебания. Свободные колебания в колебательном контуре

Мы хорошо знаем, что в физике большую роль играют аналогии. Очевидно, что рассматривать колебания где бы то ни было удобнее всего с помощью механических колебаний. Удобной аналогией для рассмотрения электромагнитных колебаний является рассмотрение упругих колебаний груза на пружинке. Рассмотрим колебания в колебательном контуре, состоящем из конденсатора C и катушки индуктивности L , и приведём механическую аналогию,

t/T	Электромагнитные колебания	Механические колебания
0	$q = q_{\max}, \dot{q} = I = 0$	$x = x_{\max}, \dot{x} = v = 0$
1/4	$q = 0, \dot{q} = I = I_{\max}$	$x = 0, \dot{x} = v = v_{\max}$
1/2	$q = -q_{\max}, \dot{q} = I = 0$	$x = x_{\max}, \dot{x} = v = 0$
3/4	$q = 0, \dot{q} = I = -I_{\max}$	$x = 0, \dot{x} = v = -v_{\max}$
1	$q = q_{\max}, \dot{q} = I = 0$	$x = x_{\max}, \dot{x} = v = 0$

Подобным образом можно также использовать соотношения для энергии, как кинетической, так и потенциальной.

Запишем основные из них с выводом. Итак, рассмотрим элементарный колебательный контур, состоящий из конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R . Отметим, что наличие резистора, вообще говоря, необязательно для существования электромагнитных колебаний, однако на практике пренебречь омическим сопротивлением в колебательных контурах не удаётся. В качестве уравнения колебаний запишем второй закон Кирхгофа,

$$\mathcal{E}_{\text{самоинд.}} = IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt},$$

иными словами, с учётом соотношения $I = \dot{q}$,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (16.2)$$

Вспомнив, как решалась аналогичная задача в механике, запишем решение этого уравнения, вводя *коэффициент затухания* γ ,

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad (16.3)$$

собственную частоту ω_0 ,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (16.4)$$

и частоту затухающих колебаний ω ,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} \approx \omega_0, \quad (16.5)$$

получим уравнение,

$$q = q_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (16.6)$$

где τ — *характерное время затухания колебаний*, равное

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \quad (16.7)$$

Вспомним также понятие *логарифмического декремента затухания* θ ,

$$\theta = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = \delta T, \quad (16.8)$$

где q_i и q_{i+1} — максимальные значения заряда за i -тый и $i+1$ -ый периоды. Отметим, что

$$\theta = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где N — число периодов колебания, за которые заряд убывает в e раз.

Наконец, вспомним также понятие *добротности* Q . Добротность вводится из энергетических соображений. Как мы знаем, энергия маятника состоит из потенциальной энергии $kx^2/2$ и кинетической $mv^2/2$. Раскроем её как функцию от времени для механической системы, чтобы получить её полную энергию,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \\ &= \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}mx_0^2 \omega^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t) = \\ &= \frac{1}{2}x_0^2 e^{-2\delta t} k, \end{aligned}$$

с учётом того, что $\omega \approx \omega_0 \approx \sqrt{k/m}$.

Для колебательного контура можно аналогично получить выражение энергии,

$$W = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} e^{-2\delta t} = W_0 e^{-2\delta t}. \quad (16.9)$$

Вспомним, что добротность — это отношение энергии в некоторый момент времени к потере энергии за период. Оказывается, что эта величина не зависит от периода. Посчитаем её.

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{W_0 e^{-2\delta t}}{W_0 (e^{-2\delta t} e^{-2\delta(t-T)})} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} \approx \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T)} = \frac{2\pi}{2\delta T}, \\ Q &= \frac{\pi}{\theta} = \pi N. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Значения добротности колебательного контура не слишком высоки, они имеют порядок не выше 10^4 . Большая добротность нужна в колебательном контуре затем, чтобы была уже резонансная кривая, чтобы, например, радиоприёмник был чувствительнее к частоте сигнала.

Отметим, что разность потенциалов в колебательном контуре колеблется вместе с ЭДС самоиндукции по гармоническому закону.

Лекция 17

Электромагнитные колебания. Часть I

Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс напряжений

Продолжим обсуждение вынужденных колебаний. Всё так же будем рассматривать контур, содержащий конденсатор C , катушку индуктивности L и резистор R . Мы получили, что колебательный контур ведёт себя аналогично упруго колеблющейся механической системе и описывается дифференциальным уравнением следующего вида,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Добавим к полученным на прошлой лекции результатам ещё один, получающийся несложной подстановкой,

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (17.1)$$

связывающий добротность контура с его параметрами напрямую.

Рассмотрим вынужденные колебания, добавив в наш контур источник ЭДС \mathcal{E} . По аналогии с механикой также несложно понять, какие результаты мы получим. Пусть ЭДС изменяется со временем по закону

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t).$$

Как только мы это сделаем, наше дифференциальное уравнение примет вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t). \quad (17.2)$$

Вспомним механику: сразу же начнётся установление колебаний. Амплитуда уставившихся колебаний будет равна q_0 . Время установления колебаний — $\tau = 1/\delta$. После установления колебания будут происходить по закону

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Из механики мы помним, что

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (17.3)$$

В механике мы рассматривали резонанс смещения, резонанс скорости и резонанс ускорения. Подобным образом можно наблюдать резонанс и на конденсаторе. Зададимся вопросом, чему будет равно и как будет изменяться напряжение на конденсаторе?

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C},$$

причём можно сказать, что амплитуда колебания будет равна

$$U_{C0} = \frac{q_0}{C}.$$

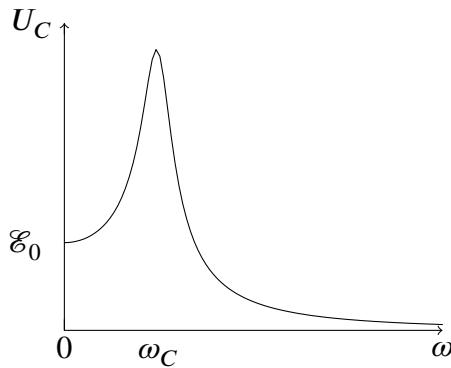


Рис. 27: Зависимость амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты колебаний.

Получим резонансную кривую вроде той, с которой мы имели дело в механике, как показано на рисунке.

Чтобы найти частоту резонанса ω_C , найдём экстремум функции, опять аналогично механике. Получим,

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \approx \omega_0.$$

Отметим, что амплитуда колебания напряжения при частоте ω_C будет равна $Q\mathcal{E}_0$.

С учётом того, что вблизи резонанса $\omega \approx \omega_0$, мы можем переписать выражение для амплитуды колебаний как

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L\sqrt{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2\omega_0 L \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2\omega_0 \delta L \zeta},$$

где для удобства записи введено обозначение ζ ,

$$\zeta = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\delta}\right)^2 + 1}.$$

Продолжая те же рассуждения, для U_C вблизи резонанса запишем

$$U_C \approx \frac{Q\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\delta}\right)^2 + 1}}.$$

Оценим теперь ширину резонансной кривой $\Delta\omega$ на высоте 0,7 от максимума — она будет равна

$$\Delta\omega = 2\delta.$$

Результат этот аналогичен получаемому в механике. Отсюда также несложно выразить добротность как

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{\theta}.$$

Выходит, чем выше добротность, тем меньше ширина резонансной кривой.

Мы знаем, что колебательный контур используется во всех без исключения радиоприёмниках. Отсюда, оценивая добротность в 100, получим, что если $\omega_0 \simeq 1$ МГц, ширина резонансной кривой будет равна 10 кГц. Если у нас есть две радиостанции, транслирующие сигналы с частотами, различающимися менее чем на эту величину, приёмник будет улавливать их обе. Очевидно, нам это не нужно — как быть, если добротность уменьшить мы не можем? Для решения этой проблемы внутри радиоприёмника вставляют преобразователь частоты, который уменьшает ω_0 на два порядка, и тогда так же меняется ширина резонансной кривой.

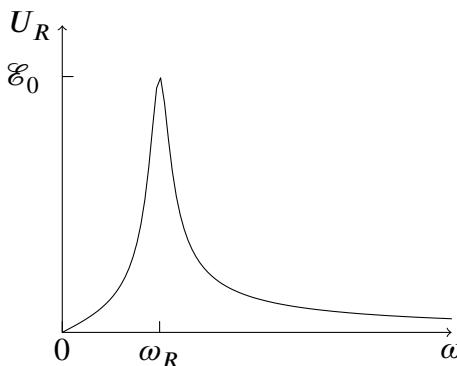
Рассмотрим теперь напряжение на индуктивности U_L , равное

$$U_L = L\ddot{q} = L (q_0 \sin(\omega t + \varphi))''.$$

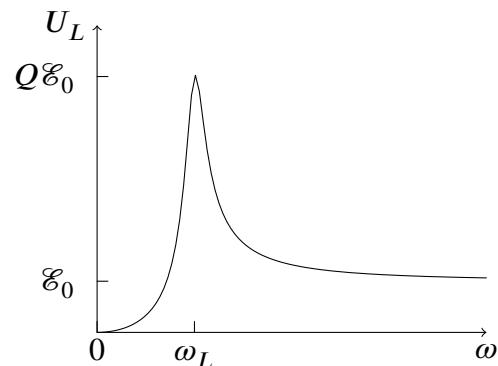
Напряжение на резисторе рассчитывается аналогично,

$$U_R = R\dot{q} = R (q_0 \sin(\omega t + \varphi))'.$$

Все три зависимости оказываются гармоническими, но у каждой будет своя амплитуда и между ними будет существовать определённая разность фаз. Не будем также забывать, что три резонансные кривые будут выглядеть по-разному — как и в механике.



(a) Резистор.



(б) Катушка индуктивности.

Рис. 28: Зависимость амплитуды колебания напряжения на резисторе и катушке индуктивности от частоты.

Заметим, что резонансная частота катушки индуктивности несколько отличается от резонансной частоты конденсатора и резистора. Однако это отличие достаточно мало, и можно все эти частоты считать одинаковыми.

Отметим, что резонансная кривая резистора на самом деле в несколько раз ниже, чем две другие — её максимум отличается от двух других в Q раз. С учётом этого можно говорить о *резонансе напряжений*, когда амплитуда напряжения на ёмкости и на индуктивности превышает амплитуду внешней силы в Q раз, порядка 10^2 . Отметим, что напряжения на ёмкости и на индуктивности происходят в противофазе, и можно говорить, что всё напряжение \mathcal{E}_0 прикладывается к омическому сопротивлению.

Переменный ток. Метод векторных диаграмм

Рассматривая предыдущую задачу мы видим, что по цепи течёт ток, изменяющийся по гармоническому закону. Мы можем записать закон изменения,

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Такой ток называют *переменным гармоническим током*, который далее в этом курсе мы будем называть просто *переменным током*.

Рассмотрим протекание тока через три элемента: омическое сопротивление R , конденсатор C и катушку индуктивности L . Сопротивление обозначим U_R , U_C и U_L соответственно. Очевидно,

$$U_R = RI,$$

и что амплитуда колебаний на активном сопротивлении равна

$$U_{R0} = RI_0. \quad (17.4)$$

Не менее очевидно,

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{\int I dt}{C} = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Это говорит о том, что колебания на ёмкости отстают от колебаний на напряжении на $\pi/2$. Отметим, что амплитуда колебаний на ёмкости равна

$$U_{C0} = \frac{I_0}{\omega C}. \quad (17.5)$$

На катушке получим

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \omega_L I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплитуда колебаний на катушке индуктивности будет равна

$$U_{L0} = \omega L I_0. \quad (17.6)$$

При протекании тока через каждый из элементов происходит падение напряжения на этом элементе. Аналогично омическому сопротивлению, величину $1/\omega C$ называют *емкостным сопротивлением*, а величину ωL — *индуктивным сопротивлением*. Как же связать силу тока с напряжением?

Возьмём контур, состоящий из омического сопротивления U_R , катушки U_L и конденсатора U_C . Как с их помощью выразить ток $I(t)$? Очевидно, напряжение на входе должно равняться сумме всех трёх элементов,

$$\mathcal{E}(t) = I_0 \omega L \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + IR \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Сложив эти три величины чисто тригонометрически, мы получим выражение

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi).$$

Тригонометрическое сложение, однако, достаточно трудоёмко, и пользоваться им мы не будем — вместо него рассмотрим метод векторных диаграмм. Каждому колебанию ставится в соответствие вектор, а складывать векторы значительно проще, чем гармонические функции. С этим методом мы знакомились в курсе механики, но сейчас разумно его повторить.

Итак, пусть речь идёт о колебаниях тока, происходящих по закону

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Такому току в соответствие мы поставим вектор \mathbf{I}_0 , вращающийся по окружности с угловой скоростью ω . Тогда проекция этого вектора на вертикальную ось в момент времени τ будет равна значению силы тока $I(\tau)$, а угол поворота в этот момент времени — называемый *фазой тока* — будет равен как раз $\omega t + \varphi_0$. Соответственно, φ_0 , называется *начальной фазой*.

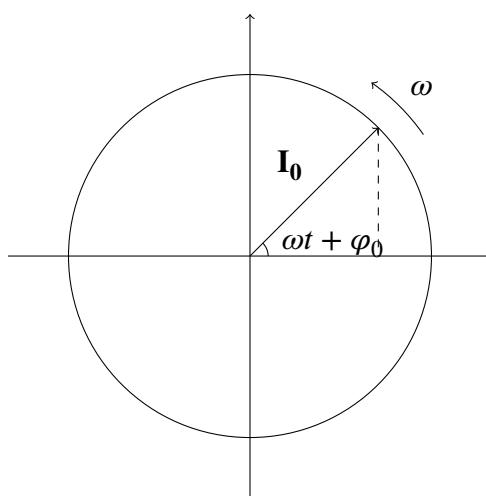


Рис. 29: Изображение переменного тока на векторной диаграмме.

Можно так же представить три падения напряжения как три вращающихся вектора, ведь частота у них будет одной и той же. Изобразим на диаграмме ниже момент времени $t = 0$.

Чтобы найти суммарное напряжение в контуре, нам нужно найти три проекции и их просуммировать — но не проще ли будет найти сперва векторную сумму трёх величин, а потом взять её проекцию? Так и поступим. Из рисунка видно, что \mathcal{E}_0 равно

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{(U_{L0} - U_{C0})^2 + U_{R0}^2},$$

что несложно переписать как

$$\mathcal{E}_0 = I_0 \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}. \quad (17.7)$$

Это выражение носит название *закона Ома для цепи переменного тока*.

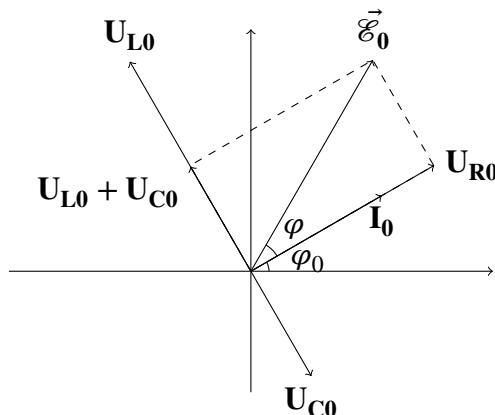


Рис. 30: Пример использования метода векторных диаграмм.

Полезно также выражение для сдвига фазы,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (17.8)$$

Эти формулы позволяют нам посчитать параметры переменного тока в цепи, зная значения напряжения на разных элементах.

Коэффициент пропорциональности между силой тока и величиной ЭДС носит имя *полного сопротивления цепи* — не следует путать его с импедансом, так как импедансом называют только комплексное сопротивление. В полное сопротивление входит активное сопротивление R и реактивное сопротивление $\omega L + 1/\omega C$.

Метод комплексных амплитуд. Импеданс

Ещё один удобный метод для расчёта цепей переменного тока — это метод комплексных амплитуд. Дело в том, что комплексное число само по себе имеет модуль и фазу, которые весьма хорошо подходят для описания тока.

Рассмотрим ток I ,

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Im} I_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = \operatorname{Im} \hat{I}_0 e^{i\omega t}. \quad (17.9)$$

В этом выражении участвует *комплексная амплитуда* $\hat{I}_0 = I_0 e^{i\varphi_0}$, которая, как уже было сказано, включает в себя информацию о начальной фазе.

Напряжение на омическом сопротивлении будет выражаться, в таком случае, как

$$U_R(t) = IR = \operatorname{Im} I_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = \operatorname{Im} RI_0 e^{i\omega t},$$

а вообще говоря, можно продолжить это как

$$U_R(t) = \operatorname{Im} Z_R \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \operatorname{Im} \hat{U}_{R0} e^{i\omega t}.$$

Итак, мы получили, что

$$\hat{U}_{R0} = Z_R \hat{I}_0, \quad Z_R = R. \quad (17.10)$$

Проделав то же самое с индуктивностью, получим,

$$U_L(t) = I_0\omega L \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \Im Z_L \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \Im \hat{U}_{L0} e^{i\omega t},$$

где Z_L — комплексное индуктивное сопротивление,

$$\hat{U}_{L0} = Z_L \hat{I}_0, \quad Z_L = \omega L e^{i\pi/2} = i\omega L. \quad (17.11)$$

Для емкостного сопротивления можно таким же образом получить

$$U_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \Im Z_C \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \Im \hat{U}_{C0} e^{i\omega t},$$

то есть,

$$\hat{U}_{C0} = Z_C \hat{I}_0, \quad Z_C = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{i\omega C}. \quad (17.12)$$

Комплексные амплитуды токов и напряжений можно связать с сопротивлениями такими же простыми правилами, как мы писали для действительных параметров постоянного тока,

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi} = \hat{I}_0 (Z_L + Z_C + Z_R) = \hat{I}_0 Z. \quad (17.13)$$

Величина Z называется *импедансом*.

С использованием комплексных величин можно рассчитывать последовательные и параллельные контуры так же просто, как и аналогичные контуры с постоянным током. Приведём пример. Пусть мы знаем ЭДС, изменяющуюся по некоторому закону

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t),$$

и хотим найти текущий по контуру ток \hat{I}_0 . Мы сможем написать,

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{i(\omega L - 1/\omega C) + R} = I_0 e^{i\varphi}.$$

Чтобы найти I_0 , нужно найти модуль и фазу комплексного числа. Ответ получится, как мы понимаем, такой же, как и в случае закона Ома для цепи переменного тока,

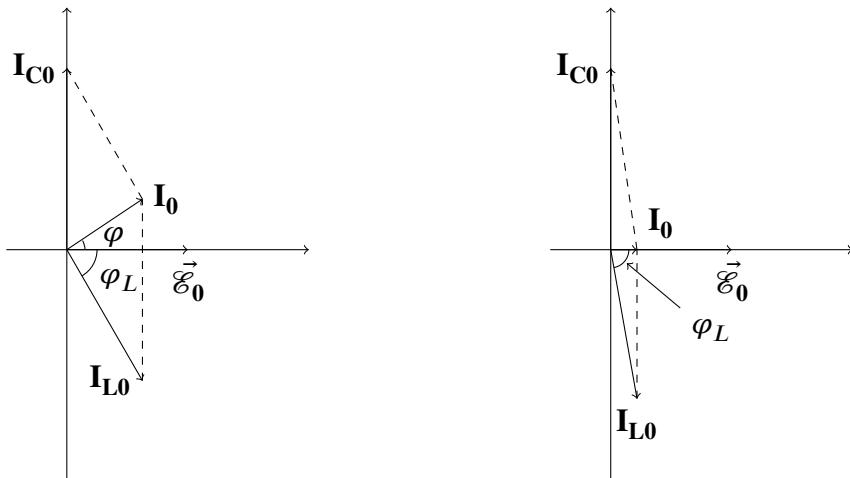
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega L - 1/\omega C)^2 + R^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Резонанс токов

Рассмотрим колебательный контур, содержащий ёмкость C , к которой параллельно подключена катушка индуктивности L со внутренним сопротивлением R , и ко всему контуру приложена внешняя ЭДС \mathcal{E} . По такой цепи потечёт переменный ток. Пусть \mathcal{E} задано,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t).$$

Какие токи будут течь в цепи? Ясно, что будет течь ток I , который разойдётся на два тока I_C и I_L в месте подключения к колебательному контуру, а после эти два тока сойдутся опять. Для расчёта резонанса токов воспользуемся методом векторных диаграмм.



(a) Общий случай.

(б) Случай резонанса.

Рис. 31: Векторные диаграммы для расчёта резонанса токов.

Не будем забывать, что мы знаем токи на элементах цепи,

$$I_{C0} = \omega C \mathcal{E}_0, \quad I_{L0} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}},$$

и угол сдвига фазы тока на катушке,

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{R}.$$

По цепи будет течь ток I ,

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

В зависимости от частоты у нас будет разный угол между напряжением и током в цепи. Как мы скоро увидим, резонанс токов наступает тогда, когда $\varphi = 0$. И правда, как показано на рисунке, ток I_0 очень мал, зато весьма велики токи через ёмкость и катушку индуктивности достаточно велики.

Используя записанные выше формулы для тока через оба элемента и для сдвига фазы на катушке, а также условие

$$I_{C0} \sin \varphi_L = I_{L0},$$

а также что $\omega L \gg R$, получим, что:

- а) $\omega = \omega_0$,
- б) $I_{L0} \approx I_{C0} = Q I_0$,
- в) $I_0 = \mathcal{E}_0 / R Q^2$.

Решение необходимых уравнений приведено в начале следующей лекции.

Лекция 18

Электромагнитные колебания. Часть II

Резонанс токов (продолжение)

Вернёмся к рассмотрению колебательного контура, содержащего ёмкость C , к которой параллельно подключена катушка индуктивности L со внутренним сопротивлением R , и ко всему контуру приложена внешняя ЭДС \mathcal{E} . Мы заметили, что между колебаниями напряжения на элементах цепи существуют некоторые сдвиги фазы, и сказали, что начнём эту лекцию с решения системы уравнений для случая резонанса токов. Запишем систему уравнений,

$$\begin{cases} I_{C0} = \mathcal{E}_0 \omega C, \\ I_{L0} = \omega L / \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi_L = \omega L / R, \\ I_{C0} \sin \varphi_L = I_{L0}. \end{cases}$$

Последнее соотношение стоит отметить особенно, так как оно и характеризует именно резонанс токов.

Из последнего уравнения получим, что

$$\sin \varphi_L = \frac{I_{C0}}{I_{L0}}.$$

Разделив выражения для соответствующих токов, получим

$$\frac{I_{C0}}{I_{L0}} = \omega C \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}.$$

Дальше задействуем соотношение с тангенсом, учитывая, что

$$\sin \varphi_L = \frac{\operatorname{tg} \varphi_L}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_L}},$$

и получим,

$$\omega C \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} = \frac{\omega L / R}{\sqrt{1 + (\omega L / R)^2}}.$$

Из последнего равенства необходимо найти величину частоты. Точно решать его, понятно, мы не будем, поскольку очевидно, что $\omega L \gg R$. В этом случае также верно, что $\omega L \gg 1$, а значит, можно сказать, что

$$\sin \varphi_L \approx 1 = \omega^2 L C.$$

Отсюда легко получить, что

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{18.1}$$

что, как мы уже неплохо знаем, и является частотой собственных колебаний контура.

Остаётся вопрос, что же будет с величинами токов. На резонансной частоте, как мы понимаем,

$$I_{C0} = \mathcal{E}_0 \omega C \approx I_{L0}.$$

Теперь посчитаем ток, к примеру, на конденсаторе,

$$I_{C0} = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{LC}} Q = \frac{\mathcal{E}_0}{RQ}.$$

Входной же ток I_0 , как нетрудно видеть, будет равен

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{RQ^2} = \frac{I_{C0}}{Q}.$$

Втекающий в контур ток оказывается в Q раз меньше тока, протекающего в элементах контура. Это значит, что при определённом подборе частоты мы можем разгонять противофазные токи, значительно большие втекающего.

Одно из применений этого явления — это индукционная плавильная печь. Она представляет собой катушку индуктивности, которая под действием протекающего по ней тока возбуждает токи Фуко в шихте, находящейся в помещённом внутрь неё тигеле, за счёт которых шихта разогревается и плавится. Для того, чтобы разогнать в шихте очень большой ток, рядом с индукционной печью размещают конденсатор, который вызывает в ней резонанс токов и увеличивает мощность печи.

Ещё одно важное применение состоит в том, что резонансный контур на резонансной частоте обладает большим сопротивлением RQ , и если его, например, включить в цепь какого-нибудь усилителя, то и усиливать сигнал он будет значительно сильнее, чем на других частотах.

Работа и мощность переменного тока

Рассмотрим работу и мощность переменного тока. Представим себе устройство, на вход которого подаётся напряжение U , и по которому течёт электрический ток. Между напряжением и током существует сдвиг фазы. Вообразим себе это устройство в виде контура, содержащего последовательно соединённые катушку индуктивности L , конденсатор C и резистор R . Мы уже знаем, что в таком контуре будут существовать сдвиги фаз.

Пусть ток течёт по закону

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t),$$

а напряжение при этом изменяется по закону

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Возникает вопрос, как выразить мощность этого контура. Чтобы найти мощность, найдём сперва работу, воспользовавшись законом Джоуля—Ленца,

$$\Delta A = \int_0^T U(t)I(t)dt = \frac{1}{2}U_0I_0T \cos \varphi. \quad (18.2)$$

Очевидно, нас будет интересовать мощность P , $P = \Delta A/T$, то есть,

$$P = \frac{1}{2}U_0I_0 \cos \varphi = \frac{1}{2}U_{R0}I_0, \quad (18.3)$$

поскольку мы знаем, что $U_0 \cos \varphi = U_{R0}$.

Из последнего преобразования видно, что мощность выделяется только на омическом сопротивлении. По этой причине мы можем написать следующие соотношения,

$$P = \frac{1}{2}U_{R0}I_0 = \frac{1}{2}I_0^2R = \frac{1}{2}\frac{U_{R0}^2}{R}.$$

Переменный ток часто характеризуется эффективными значениями напряжения и силы тока. Рассмотрим их внимательнее. *Эффективным напряжением* называют такое напряжение постоянного тока, которое выделяет на резисторе столько же мощности, сколько и рассматриваемый переменный ток — то же самое говорят об *эффективной силе тока*. Для гармонического тока верно, что

$$U_{\text{эфф.}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{эфф.}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (18.4)$$

Так, в большинстве бытовых электросетей используется эффективное напряжение 220 В, что означает, что амплитудное значение приблизительно равно 308 В.

Связанные колебательные контуры

Рассмотрим теперь колебательный контур. Допустим, он идеален. Как мы уже говорили, аналогом ему является колеблющийся на пружине груз. Вспомним механику: мы можем привязать к колеблющемуся на пружине грузу ещё один груз, колеблющийся на другой пружинке. Получится система связанных колебаний с двумя степенями свободы. Мы знаем, что в таком случае колебания зависят от начальных условий и протекают на определённых нормальных частотах, называемых *модами колебаний*.

Вспомним, что в механике частоты мод равны

$$\omega_I^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \omega_{II}^2 = \frac{k + 2k_1}{m}.$$

Теперь рассмотрим два одинаковых идеальных колебательных контура и зададимся вопросом, как бы их связать. Свяжем их общей ёмкостью C_1 . Во-первых, очевидно, что колебания могут происходить синфазно, так, как если бы ёмкости C_1 не было — в таком случае мода равна

$$\omega_I^2 = \frac{1}{LC}.$$

Ради второй же нормальной частоты воспользуемся механической аналогией,

$$\omega_{II}^2 = \frac{1/C + 2/C_1}{L}.$$

В отличие от механики, колебательные контуры можно связать и другим способом — общей катушкой, в каком случае говорят об *индуктивной связи*. Снова рассмотрим сперва синфазные токи, и тогда нормальная частота будет той же,

$$\omega_I^2 = \frac{1}{LC}.$$

В противофазном же случае получим

$$\omega_{II}^2 = \frac{1}{(L + 2L_1)C}.$$

Можно нарисовать два колебательных контура и так, чтобы они не имели общих элементов, но так, чтобы между катушками имел место коэффициент взаимной индукции. В таком случае вся разница сведётся к замене

$$2L_1 \rightarrow L_{12}.$$

Трансформаторы

Рассмотрение последнего примера связанных колебаний плавно подвело нас к методу работы трансформатора. Прообразом современного трансформатора является катушка Румкорфа. Она состоит из первичной и вторичной обмоток, навитых на железный стержень. Вторичная, внешняя, обмотка состоит из очень большого числа витков, порядка нескольких тысяч, в то время как первичная обмотка состоит из сравнительно малого числа толстых витков. Если мы подключаем первичную обмотку к источнику постоянного напряжения, нам необходимо, чтобы ток как-то прерывался.

Румкорф для этого взял катушку и сделал прерыватель: протекая по катушке, ток намагничивает сердечник, тот притягивает подвижный контакт прерывателя, который отходя от стержня с током, разрывает цепь. После прекращения тока контакт возвращается обратно и ток возобновляется, и всё происходит снова.

Современные трансформаторы состоят из замкнутого железного сердечника-магнитопровода, на который намотаны первичная и вторичная обмотки. На первичную обмотку подаётся гармонический переменный ток, который возбуждает переменное магнитное поле. Это поле, удерживаясь в магнитопроводе, пронизывает витки второй катушки, вызывая в ней другой переменный ток в том случае, если вторая обмотка замкнута.

Подбирая количество витков в обеих обмотках, можно управлять параметрами токов. Если выходящее напряжение больше входящего, то трансформатор называют *повышающим*, если меньше — *понижающим*.

Используя метод комплексных амплитуд, запишем,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}_{10} &= i\omega L_1 \hat{I}_{10} + R_1 \hat{I}_{10} + i\omega L_{21} \hat{I}_{20}, \\ 0 &= i\omega L_2 \hat{I}_{20} + R_2 \hat{I}_{20} + i\omega L_{12} \hat{I}_{10}.\end{aligned}$$

Предположим трансформатор идеальным: для этого, во-первых, примем малым сопротивление обмоток R_1 , а во-вторых, отсутствует рассеяние магнитного потока, то есть, $L_{12} = L_{21} = \xi N_1 N_2$, где N_i — число витков в i -той катушке. Вспоминая коэффициент

самоиндукции соленоида, отметим, что $L_1 = \text{const } N_1^2$ и $L_2 = \text{const } N_2^2$. В таком случае наши уравнения можно упростить,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}_{10} &= i\omega L_1 \hat{I}_{10} + i\omega L_{21} \hat{I}_{20}, \\ 0 &= i\omega L_2 \hat{I}_{20} + R_2 \hat{I}_{20} + i\omega L_{12} \hat{I}_{10}.\end{aligned}$$

Если вторичная обмотка разомкнута, то тока в ней нет. В таком случае,

$$\hat{I}_{10} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{i\omega L_1} = \hat{I}_{10}^x,$$

такую величину называют *током холостого хода*. Видно, что ток холостого хода связан со входящим напряжением только индуктивным сопротивлением, и что между ним и напряжением сдвиг фаз равен $\pi/2$. В этом случае, как видим, выделяемая мощность равна нулю. Если же подключить ко второй обмотке сопротивление, сдвиг фаз изменится и будет выделяться мощность.

Несложно заметить, что с помощью метода подстановки можно выразить I_{20} через \mathcal{E}_{10} ,

$$\hat{\mathcal{E}}_{10} = \left(-\frac{L_1}{L_{12}}(i\omega L_2 + R_2) + i\omega L_{21} \right) \hat{I}_{20}.$$

Поскольку для идеального трансформатора $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$,

$$\hat{\mathcal{E}}_{10} = -\frac{L_1}{L_{12}} R_2 \hat{I}_{20}.$$

Отметим дополнительно, что $R_2 \hat{I}_{20} = \hat{U}_{20}$,

$$\hat{\mathcal{E}}_{10} = -\frac{L_1}{L_{12}} \hat{U}_{20}.$$

С учётом зависимостей для идеальных соленоидов также получим, что

$$\frac{\hat{U}_{20}}{\hat{\mathcal{E}}_{10}} = \frac{N_1}{N_2} = \kappa_T,$$

где κ_T — *коэффициент трансформации*. Как мы уже обсуждали, κ_T может быть и больше, и меньше единицы.

Генераторы электрического тока

Обсудим теперь генераторы электрического тока. Вообще говоря, электрический ток вырабатывается различными генераторами, в которых в той или иной форме нужно выполнение механической работы.

В качестве примера генератора электрического тока можно привести вращающуюся между полюсами магнита рамку. Изменяясь, магнитный поток через неё приводит к возникновению ЭДС индукции, которая и создаёт переменный электрический ток. Механическую работу здесь совершают моменты сил, вращающие рамку. Очевидно, что частота переменного тока будет равна частоте вращения рамки.

Устройство, создающее поле, называют *индуктором*, а устройство, в котором создаётся электрический ток — *якорем*. В рассмотренном примере индуктор неподвижен, а якорь вращается. Неподвижный элемент генератора всегда называется *статором*, а вращающийся — *ротором*.

Со вращающегося ротора ток подаётся на неподвижные подключения с помощью щётоек, скользящих по контактным кольцам. Если убрать лишние детали, добившись, чтобы индуктор был ротором, а якорь — статором, мы получим более мощный генератор тока. Если же сделать контактные кольца разрезными, ток будет течь через щётки в одном направлении, а если сделать кольцо состоящим из многих разрезов и подключить соответствующее число рамок, то ток будет практически постоянным. Разрезные контактные кольца называют *коллектором*.

Бывает и много других видов генератора, различающихся по эффективности. Чаще всего используют генераторы трёхфазного тока. В генераторе трёхфазного тока есть ротор-индуктор, вокруг которого расположены три одинаковые обмотки, в которых возникают одинаковые колебания тока, сдвинутые по фазе на 120° . Естественно, к каждой из катушек подобного генератора можно подключить по нагрузке, на каждой из которых будет выделяться мощность.

Удобство использования трёхфазного генератора заключается ещё и в том, что трёхфазный ток позволяет создавать вращающееся магнитное поле. Рассмотрим его в деталях на следующей лекции.

Лекция 19

Генераторы электрического тока

Синхронные и асинхронные генераторы тока

На прошлой лекции мы обсуждали генераторы электрического тока. Продолжим рассмотрением синхронного генератора.

Синхронным называют генератор электрического тока, в котором одинаковы скорость вращения индуктора и создаваемого им магнитного поля. Такие генераторы обратимы и могут также работать в режиме электродвигателя: для этого на статор подают переменный электрический ток, который будет создавать создавать вращающееся магнитное поле, которое будет вращать вместе с собой ротор и совершать механическую работу. Отметим, что скорость вращения ротора совпадает со скоростью вращения магнитного поля.

Асинхронным называют генератор, на который не подают электрический ток, а вместо этого используют кусок проводящей болванки. Если вращать магнитное поле, в ней будут возникать вихревые токи, которые будут увлекать болванку за собой. Магнитное поле в асинхронном генераторе создаётся с помощью системы обмоток, и если подавать на них ток определённым образом, то оно начнёт вращаться.

Асинхронным такой генератор называется потому, что болванка и магнитное поле вращаются с одинаковыми скоростями только в отсутствие на болванке нагрузки — если же её подключить, то чем больше её будет, тем медленнее болванка будет вращаться. Важно понимать, что у асинхронного генератора есть предел нагрузки.

Трёхфазный ток

На прошлой лекции мы также упомянули трёхфазный ток — однако пока что о нём мало было сказано. Генератор трёхфазного тока состоит из трёх обмоток, равномерно расположенных на некоторой окружности вокруг ротора-индуктора. Вращаясь, ротор создаёт в каждой из обмоток переменную ЭДС индукции, и тогда мы и говорим о трёхфазном токе. Можно замкнуть каждую из обмоток на свою цепь, тогда по ним трём будет течь система токов с одинаковыми частотами, но разными сдвигами фаз в $2\pi/3$.

Возникает вопрос, как можно отказаться от шести проводов и перейти к трём. Оказывается, можно: рассмотрим соединение *звездой*. Трёхфазный генератор соединяют с также трёхфазной системой, например, трансформатором, причём каждую обмотку трансформатора соединяют с соответствующей обмоткой генератора, а четвёртый провод соединяет общие точки трёх обмоток — *нейтрали*. Провода между соответствующими обмотками называют *линейными*, а провод между нейтралями — *нейтральным*. Напряжение между линейным и нейтральным проводами называют *фазным*, а между двумя линейными проводами — *линейным*.

Очевидно, что фазное и линейное напряжения различаются: с помощью векторной диаграммы или метода комплексных амплитуд очевидно, что линейное напряжение U_L больше фазного U_ϕ в $\sqrt{3}$ раз. В частности, если фазное напряжение равно 220 В, то линейное — 380 В.

Аналогично, фазным током называют ток, текущий в обмотках, а линейным — текущий в линейном проводе. Очевидно, в случае соединения звездой они равны. Легко также заметить, что если все нагрузки одинаковы, то и токи, текущие в линейных проводах, одинаковы по амплитуде. В таком случае по нулевому проводу ток течь не будет. Стало быть, при симметричной нагрузке нейтральный провод можно убрать.

Рассмотрим теперь соединение *треугольником*. В этом случае всегда задействовано три провода: провода соединяют соответствующие обмотки якоря и нагрузки, а обмотки якоря соединены между собой как вершины треугольника — то же верно и для нагрузки. В этом случае, как несложно понять, линейный ток в $\sqrt{3}$ раз больше фазного, а напряжения равны между собой.

Токи смещения

Мы уже обсуждали, что переменный ток течёт через конденсатор. Зададимся вопросом, есть ли магнитное поле в пространстве, окружающем провод, по которому течёт ток к конденсатору и от него? Очевидно, есть. А в конденсаторе поле есть?

Мы знаем, что вне конденсатора магнитное поле имеет напряжённость \mathbf{H} , причём

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

что следует из теоремы о циркуляции. Получим противоречие, ведь дивергенция ротора любого вектора равна нулю,

$$\text{div rot } \mathbf{H} = 0 = \mathbf{j},$$

а, как мы знаем,

$$\text{div } \mathbf{j} \neq 0.$$

Что же делать? Для исправления ситуации Максвелл посчитал, что первое из наших выражений надо модифицировать, записав его как

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смеш.}}. \quad (19.1)$$

Очевидно, подобрать $\mathbf{j}_{\text{смеш.}}$ так, чтобы сумма $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смеш.}} = 0$, можно. Как мы это сделаем? Вспомним закон сохранения заряда в виде уравнения непрерывности,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0.$$

Подставив на место $\text{div } \mathbf{j}$ нашу новую величину, получим

$$0 = \text{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смеш.}}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_{\text{смеш.}} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} + \text{div } \mathbf{j}_{\text{смеш.}} = \text{div} \left(\mathbf{j}_{\text{смеш.}} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

то есть,

$$\mathbf{j}_{\text{смеш.}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (19.2)$$

Несложно теперь заметить, что

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (19.3)$$

Этот результат является фундаментальным. Оказывается, магнитное поле может создаваться не только токами проводимости, но и изменяющимся магнитным полем.

Возвращаясь к нашему вопросу — внутри конденсатора магнитное поле есть. Оно создаётся токами смещения: если заряд на пластинах равен

$$q = \sigma S,$$

ток в пластине равен

$$I = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt},$$

а в конденсаторе, как мы знаем, $D = \sigma$. Стало быть,

$$I = S \frac{dD}{dt}.$$

Между обкладками конденсатора есть ток смещения.

Мы видим, подводя итог, что полный ток есть величина непрерывная, и дивергенция его равна нулю.

Уравнения Максвелла. Материальные уравнения

И вот мы, наконец, подошли к системе уравнений Максвелла. Где-то в 1850-е годы Максвелл обобщил все известные опытные факты из электромагнетизма и написал следующую систему уравнений,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (19.4a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (19.4b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (19.4v)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (19.4g)$$

Запишем теперь закон сохранения заряда в виде уравнения непрерывности,

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div } \mathbf{j} = 0.$$

Для четырёх переменных — координат и времени — мы имеем неизвестные функции \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{j} и ρ . Чтобы их определить, нам нужно пять векторных уравнений и одно скалярное, в то время как мы имеем четыре векторных уравнения и одно скалярное. Более того, некоторые из уравнений Максвелла имеют одинаковые дифференциальные следствия. Рассмотрим для примера дивергенцию уравнения (б),

$$0 = \text{div rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t}(-\rho + \text{div } \mathbf{D}).$$

Несложно видеть, что взятие производной по времени от (г) даёт ровно то же самое. То же самое верно для пары (а) и (в). Итак, выходит, что мы имеем два независимых векторных уравнения и одно скалярное.

Что делать? Тут на помощь нам приходят *материальные уравнения среды*. Вообще говоря, мы с ними уже имели дело в этом курсе. Первым вспомним, что

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \quad (19.5a)$$

Отметим, что вообще говоря, это уравнение не всегда верно — так, в случае быстрых изменений поля мы замечаем, что среда имеет память, и электрическая индукция в ней выражается интегралом всех предшествующих её состояний. Тем не менее, мы запишем его в простейшей форме, к тому же, для несегнетоэлектрических сред.

Вторым запишем аналогичное магнитное уравнение,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (19.5b)$$

Точно так же применима remarка о том, что среда, например, не является ферромагнитной.

Третьим разумно записать уравнение, описывающее постоянный электрический ток,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (19.5c)$$

где σ — удельная электропроводность.

Если же мы теперь посмотрим на нашу систему уравнений снова, мы заметим, что у нас есть пять векторных уравнений и одно скалярное, то есть, мы добились своей цели — замкнутой системы уравнений.

Рассмотрим теперь в качестве примера сохранение энергии в электромагнитном поле.

Мы знаем, что электромагнитное поле переносит энергию. Пусть у нас есть какой-нибудь объём V , имеющий поверхность S , в котором текут токи \mathbf{j} ; пусть в нём есть электрическое поле \mathbf{E} , причём очевидно, что $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Какое количество теплоты будет выделяться в этом объёме?

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \text{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} dV - \int_V \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} dV.$$

Используя математическое тождество $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H}$ и уравнение (19.4a), получим,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV - \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) dV.$$

Учтём теперь, что

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2},$$

и, вводя *объёмную плотность энергии электромагнитного поля* w ,

$$w = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}, \quad (19.6)$$

и вектор *плотности потока энергии электромагнитного поля* \mathbf{S} , называемый также *вектором Пойнтинга*,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (19.7)$$

преобразуем наше выражение с использованием теоремы Гаусса—Остроградского к виду

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{d}\sigma - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV, \quad (19.8)$$

где Σ — замкнутая поверхность, ограничивающая объём V , а $d\sigma$ — её векторный элемент. Иными словами, выделяемое количество теплоты за единицу времени равно сумме убыли энергии магнитного поля и её притока извне.

Остановимся на понятии вектора Умова—Пойнтинга. По существу, он выражает плотность энергии электромагнитной волны — можно сказать, что во всём нашем пространстве могут существовать электромагнитные волны, они могут проникать через поверхности, переносить энергию, а энергия их может поглощаться средой и нагревать её.

Излучение электромагнитных волн

Из уравнений Максвелла следует существование электромагнитных волн, способных переносить энергию. Поговорим о таких волнах подробнее.

Пусть у нас есть два параллельных провода. Подключим к этой системе источник переменной ЭДС: по проводам в противоположных направлениях потечёт электрический ток. Пусть в левом проводе ток течёт от нас, а в правом — к нам. Если бы токи были постоянными, то напряжённость поля была бы постоянной, и линии напряжённости поля шли бы от точки с большим потенциалом к точке с меньшим.

Однако наш ток не постоянный. Напряжённость электрического поля и индукция магнитного поля меняются во времени. Если мы будем увеличивать частоту тока, будут происходить интересные вещи. Пусть мы сделали длинную линию, поместив лампочку во Владивостоке, а ключ в Москве. Загорится ли лампочка мгновенно? Опыт показывает, что очень быстро, но не мгновенно: электрический ток распространяется со скоростью света — забегая вперёд скажем, что это скорость распространения электрических колебаний. Пусть до Владивостока 9000 км. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ км/с, а значит, лампочка загорится через $1/30$ секунды. Пусть у нас идёт теперь ток с частотой 50 Гц. В каждой точке линии будут течь разные токи: по линии будет идти волна тока (и волна напряжения). Вместе с ними будет изменяться и электромагнитное поле. Главное, что векторное произведение $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ будет направлено от нас в левом проводе — туда и побежит волна. Пока линия не кончится, волна будет бежать — после она отразится и побежит обратно.

Лекция 20

Скин-эффект. Волны. Волновое уравнение

Энергия электромагнитной волны

Продолжим разговор об уравнениях Максвелла и их фундаментальных следствиях. На прошлой лекции мы ввели в рассмотрение вектор Пойнтига, то есть вектор \mathbf{S} плотности потока энергии электромагнитного поля,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (20.1)$$

Также мы отметили, что полная энергия электромагнитного поля в единице объёма равна сумме энергий электростатического и магнитного полей в этом объёме,

$$w = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} = w_\epsilon + w_\mu. \quad (20.2)$$

Эти важные соотношения разумно повторить отдельно от рассмотрения сохранения энергии в электрическом поле. Тем не менее, нельзя забывать полученное для него выражение

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\sigma - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV.$$

Скин-эффект

Перейдём теперь к рассмотрению явления скин-эффекта, с которым мы уже сталкивались в лекционных демонстрациях. Речь идёт о том, что ток высокой частоты (~ 100 кГц) протекает по поверхности проводника, не заходя вглубь него. Возникает два вопроса: какова физика скин-эффекта и какова глубина скин-слоя.

Рассмотрим кусок проводника в виде проводящего цилиндра. Пусть снизу вверх по нему течёт некоторый ток. Если он постоянный, то его плотность по сечению будет всюду неизменной — и правда, причин для её изменения нет. Пусть же теперь $dI/dt > 0$: в таком случае он будет создавать магнитное поле в окружающем пространстве, в том числе и внутри проводника. Линии индукции этого поля будут замкнуты, и при возрастании тока оно также будет возрастать. Возрастающее магнитное поле должно также привести к возникновению вихревых токов. В центре проводника вихревое поле будет направлено против тока, в то время как у его поверхности — в направлении тока. Значит, ток у поверхности будет усиливаться, а внутри проводника ослабляться.

В этом случае говорят о наличии вблизи поверхности *скин-слоя* толщиной δ , в котором протекает почти весь ток, протекающий в проводнике.

Оценим толщину скин-слоя: пусть в вакууме существует электрическое поле. Мы знаем, что

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где последним слагаемым мы пренебрегаем в силу его малости. Далее запишем, что

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Поскольку нас интересует распределение тока, необходим также закон Ома,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Что же мы будем делать? Очевидно, надо избавиться от \mathbf{H} : для этого возьмём ротор от обеих частей второго выражения,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Далее воспользуемся замечательным тождеством,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \equiv \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

и тогда получим, помня, что $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho = 0$,

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (20.3)$$

Это уравнение уже может быть решено с соответствующими граничными условиями. Воспользуемся сейчас оценкой: по порядку величины вторая производная \mathbf{E} равна отношению E/δ^2 , где δ — это линейный элемент поверхности; производная же \mathbf{E} по времени равна его отношению к периоду колебаний. В таком случае, легко ответим на вопрос, что

$$\delta \sim \sqrt{\frac{T}{\mu_0 \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_0 \mu \sigma \omega}}. \quad (20.4)$$

С точностью до коэффициента мы получили формулу, которой пользуются во всех инженерных расчётах для определения глубины скин-слоя.

Теперь подумаем, зачем вообще нам нужен скин-эффект, хорошо это или плохо? Например, он позволяет нам делать электропровода из более дешёвого непроводящего материала, покрывая проводником только поверхностный слой, что удешевляет производство провода. Также скин-слоем пользуются для закалки стали: в ней возбуждают токи Фуко, которые текут вблизи поверхности и её разогревают, а после закаляют сталь обычным образом.

Стоит ещё отметить, что если по проводнику течёт постоянный ток, то его сопротивление определяется его сечением и длиной — если же мы будем увеличивать частоту, ток будет выталкиваться на поверхность, в ходе чего омическое сопротивление увеличивается. Индуктивность же наоборот будет уменьшаться, потому что внутри провода практически не будет магнитного поля.

Условие квазистационарности. Излучение электромагнитных волн

Возьмём генератор, некоторую нагрузку и соединим их в длинную цепь. В цепи течёт переменный ток. Как мы уже обсуждали, в разных сечениях в один и тот же момент времени ток будет, вообще говоря, разным. Обозначая длину цепи за l , получим, что задержка времени от включения рубильника до начала выделения мощности на нагрузке будет равна

$$\Delta T = \frac{l}{c}.$$

Мы подходим к важному понятию *квазистационарности* — если длина цепи много больше длины электромагнитной волны ($l \gg \lambda$), то можно считать, что во всех точках цепи ток одинаков, и изменяется одинаково с течением времени. На языке периода можем сказать, что $T \gg \Delta T$. Если же период колебания будет маленьким, то по проводнику будут пробегать волны тока, и условие квазистационарности выполняться не будет.

Возьмём два параллельных провода, по которым течёт электрический ток. Мы знаем, что в окружающем их пространстве будет существовать электромагнитное поле. Мы знаем, что через полпериода его линии будут направлены в обратную сторону.

Если мы уберём нагрузку, волна станет стоячей. Если же эти провода затем начать разводить, мы оторвём электромагнитную волну от проводов — получим её уже в окружающем пространстве.

Нередко электромагнитную волну ассоциируют с некоторым осциллирующим диполем. Как излучает диполь? Если его дипольный момент ориентирован сверху вниз, то осциллировать он будет преимущественно влево и вправо, а магнитное поле, соответственно, перпендикулярно его плоскости там же.

Волновое уравнение

Разумно сказать, что волновое уравнение мы вспомним, потому что оно в точности идентично механическому,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f. \quad (20.5)$$

В электромагнетизме под f понимают любую из шести компонент электрического и магнитного полей. Получим волновое уравнение для вектора напряжённости электрического поля, для этого запишем (в вакууме),

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Далее необходимо исключить одно из полей. Исключим \mathbf{H} .

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Получаем искомое уравнение,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \mathbf{E}. \quad (20.6)$$

Это уравнение даёт основание полагать, что в пространстве могут существовать электромагнитные волны, и что они распространяются со скоростью $1/\mu_0 \epsilon_0$, которая, если подставить численные значения, оказывается равной скорости света в вакууме.

Подробнее электромагнитные волны изучаются уже в курсе оптики.

Система GPS. Сотовая связь

Поговорим также о приложениях электромагнитных волн. Первой рассмотрим систему GPS (*Global Positioning System*). Эта система представляет собой 20 спутников, облетающих Землю с периодом порядка половины суток на высоте около 20 000 км. На спутниках стоят передатчики, которые передают сигнал на двух частотах, одной открытой и одной закрытой. Нам известны координаты спутников в необходимый момент времени и времена выхода и прихода сигналов на спутник — решая систему из четырёх таких уравнений несложно получить координаты точки отражения сигналов, где четвёртое связано с релятивистскими поправками к ходу часов на спутнике.

Второе приложение — это сотовая связь. Зачем вообще нужна сотовая связь, почему не хватит на всех радиосистем? Дело в том, что диапазон частот, доступных для передачи сигналов, ограничен. Аналогично ограничена селективность, как мы уже обсуждали. Значит, чтобы обеспечить связью большое число абонентов, необходимо поделить эфир на *соты*, сравнительно малые участки, в которых есть по одной базовой станции. Базовые станции содержат маломощные передатчики сигнала, которые позволяют передавать сигнал без помех для сигналов соседних передатчиков, даже если они передаются на одной и той же частоте.

В одной соте имеется примерно 280 каналов связи, а площадь, ей покрываемая, может варьироваться от нескольких сотен метров до нескольких десятков километров в зависимости от плотности населения на рассматриваемой территории. Таким образом, сотовая связь позволяет обеспечивать соединением большое количество абонентов при малом количестве каналов связи.

Волновое уравнение (продолжение)

Поговорим о монохроматических волнах — пусть наша волна распространяется, например, вдоль оси x . Решение волнового уравнения для такого случая вполне известно и имеет вид

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad (20.7)$$

где k — *волновое число*,

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Такая волна называется *монохроматической*. Существуют ли в природе монохроматические волны? Очевидно, нет, однако есть волны — например, волны излучения лазера, которые достаточно близки к монохроматическим.

Для монохроматической электромагнитной волны известно соотношение

$$\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H, \quad (20.8)$$

следующее из уравнений Максвелла. Можно написать модуль вектора Пойнтинга (учитывая, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$),

$$S = EH,$$

и тогда заметим, что в бегущей электромагнитной волне \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются синфазно, притом они всегда перпендикулярны друг другу. Пользуясь этим фактом, можно ввести

понятие интенсивности,

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos(\omega t - kx),$$

где можно избавиться, например, от μ_0 , получая

$$S = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Видя, что поток энергии через единичную поверхность всё время колеблется, определим интенсивность как среднее значение потока энергии за период,

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2. \quad (20.9)$$

Видим, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля.

Знание этой формулы и средней мощности солнечного излучения, равной $1,35 \cdot 10^3$ Вт/м² позволяет вычислить напряжённость электрического поля Солнца, которая оказываетесь весьма невелика. В самом деле, почти все рассматривавшиеся до изобретения лазеров источники электромагнитных волн являются маломощными — с появлением лазеров стало возможным замечать нелинейные слагаемые в материальных уравнениях в различных средах, речь о которых также пойдёт в курсе оптики.

Лекция 21

Электропроводность твёрдых тел

Электропроводность твёрдых тел. Классическая теория Друде—Лоренца

До сих пор мы рассматривали только явления, происходящие в вакууме — пришло время рассмотреть причины возникновения токов в твёрдых телах. Классифицируя все вещества по электрическим свойствам, можно их поделить на три группы: проводники, диэлектрики и полупроводники.

Говоря о протекании электрического тока, сразу стоит обратиться к классической теории Друде—Лоренца. Согласно ей предполагается, что в металле есть электронный газ и колеблющиеся ионы в узлах кристаллической решётки. Предполагается, что электроны, имеющие массу m и летающие с беспорядочной скоростью u , подчиняются классическим законам, то есть,

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T. \quad (21.1)$$

Классическая теория предполагает, что концентрация электронов известна, и что если мы прикладываем электрическое поле E , то на беспорядочное движение электронов накладывается упорядоченное, называемое *дрейфом электронов*. Как же осуществляется дрейф электронов? Мы уже говорили, что он происходит со скоростью v , которую можно вычислить как

$$m \frac{dv}{dt} = eE, \\ v = \frac{e}{m} Et, \quad (21.2)$$

однако необходимо отметить, что скорость дрейфа не может возрастать неограниченно: через некоторое время электрон обязательно столкнётся с одним из узлов кристаллической решётки, передавая, согласно классической модели, ей весь свой импульс. Качественно говоря выходит, что электрон совершают своего рода сизифов труд — его скорость падает до нуля, как только достигнет некоторого максимального значения.

Можно, однако, говорить о средней скорости дрейфа электронов,

$$v_{cp.} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \tau, \quad (21.3)$$

где τ — время свободного пробега.

Мы знаем, что плотность тока определяется средней скоростью дрейфа,

$$j = nev_{cp.},$$

что после подстановки даст нам

$$j = \frac{ne^2}{2m} \tau E = \sigma E,$$

откуда можно получить проводимость для данного проводника,

$$\sigma = \frac{ne^2}{2m} \tau. \quad (21.4)$$

Возникает вопрос, чем же определяется τ . Очевидно, что его можно определить как отношение средней длины свободного пробега к средней скорости теплового движения,

$$\tau = \frac{\ell}{\bar{u}}.$$

Если $\bar{u} \propto T$, то $\rho = \sigma^{-1} \propto \sqrt{T}$. На самом же деле, удельное сопротивление зависит от температуры очень хитро: вообще говоря, оно ей пропорционально, а на малых температурах оно выходит на постоянную величину, или даже уходит в нуль. Очевидно, что классическая теория не может дать ответ на все вопросы. Возникает вопрос, что же мы сделали неправильно.

Закон Видемана—Франца

Закон Видемана—Франца устанавливает соотношение между коэффициентом теплопроводности θ и электропроводностью σ для металлов,

$$\frac{\theta}{\sigma} = LT, \quad (21.5)$$

где L — число Лоренца, некоторый численный коэффициент.

В самом деле, если рассмотреть наш газ идеальным, то коэффициент теплопроводности, как мы помним из курса молекулярной физики, будет выражаться как

$$\theta = \frac{1}{3} n m c_V \ell u = \frac{1}{3} n \frac{3}{2} k_B \ell u,$$

с учётом того, что для одной частицы теплоёмкость $m c_V = 3k_B/2$.

Поделив теперь это выражение на ранее полученное нами выражение для электропроводности, получим

$$\frac{\theta}{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{m^2 u^2 c_V}{e^2} = 3 \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T.$$

Получаемое из этого выражения число Лоренца вполне хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Казалось бы, классическая теория вполне хороша, раз она даёт такой результат.

Но на самом деле оказалось, когда считали коэффициент теплопроводности, что длина свободного пробега значительно больше расстояния между атомами. Ответ состоит в том, что оба выражения неправильны, но при взятии их отношения ошибки сократились. Ошибки были следующими: мы считали, что $u^2 \propto T$, а $c_V = 3k_B/2$. Оказалось же, что скорость теплового движения электронов практически не зависит от температуры и составляет порядка $c/100$, то есть, очень большую величину. В то же время, с температурой возрастает теплоёмкость.

Наконец, классическая теория не даёт никакого ответа на вопрос о том, почему же проводники бывают разных видов.

Опыт Толмена и Стюарта

Опыт Толмена и Стюарта стал экспериментальным подтверждением того, что электрический ток переносят именно электроны. Он заключался в рассмотрении катушки с большим числом витков тонкой проволоки, которая раскручивалась до большой угловой скорости. Катушка резко тормозилась, вследствие чего за счёт инерции некоторые электроны создавали в подключённых к катушке проводах электрический ток. Катушка подключалась к баллистическому гальванометру, который фиксировал суммарный протёкший по катушке заряд.

Сторонней силой при торможении катушки является сила инерции. Напряжённостью поля сторонних сил по определению является величина

$$E_{cm.} = \frac{F}{e} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt}.$$

При торможении катушки возникает ЭДС \mathcal{E} ,

$$\mathcal{E} = E_{cm.} l,$$

которая вызовет в цепи ток I ,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{E_{cm.} l}{R},$$

а заряд же, как мы знаем, равен интегралу тока по времени,

$$q = \int_0^\infty I dt = -\frac{ml}{eR} \int_0^i nfty t y \frac{dv}{dt} dt = \frac{mlv_0}{eR}.$$

В ходе эксперимента было получено, что заряд частиц-переносчиков электрического тока имеет отрицательный знак, и что его удельный заряд совпадает с тем, который уже был ранее получен для электрона.

Возникает вопрос, почему же всё-таки все формулы, которые мы получили, носят только качественный характер? Как мы увидим позднее, дело в том, что от температуры зависит вовсе не скорость теплового движения, а длина свободного пробега.

Волновые свойства частиц. Электронный газ в металлах

Наступило время поговорить о свойствах электронов. В начале XX века было показано, что свет обладает корпускулярно-волновым дуализмом. В 1924 г. Л. де Бройль выдвинул гипотезу, что частица, обладающая некоторой энергией, обладает некоторыми волновыми свойствами, связанными с её энергией и импульсом,

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \tag{21.6}$$

$$p = \hbar k. \tag{21.7}$$

притом в общем случае $p \neq mv$. Почему так может быть? Например, потому, что частица может быть несвободной, а испытывать действие периодического потенциала, создаваемого узлами кристаллической решётки.

Пойдём, всё же, от простого к сложному — рассмотрим электронный газ, находящийся в некотором объёме. Импульс p свободной частицы равен

$$p = \hbar k = mv.$$

Энергия свободной частицы определяется так же,

$$\mathcal{E} = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m}.$$

Отметим ещё раз, что второе равенство неверно для несвободных частиц как для импульса, так и для энергии.

Волновое число связано с размерами кристалла, поэтому оно может принимать только дискретные значения. Энергия, которая выражается через волновое число,

$$\mathcal{E} = \frac{(\hbar k)^2}{2m},$$

также принимает только дискретные значения. Отметим ещё, что количество электронов ограничено, и они начнут заселять эти дискретные состояния определённым образом, снизу вверх. Можно вычислить, какое максимальное значение энергии может иметь электрон.

Рассмотрим кристалл размерами L_x , L_y и L_z . Мы можем считать эти размеры, вообще говоря, одинаковыми. Оказывается, квантование приводит к тому, что электрон будет иметь дискретные значения волнового числа вида

$$k_x = \frac{2\pi l_x}{L_x},$$

где l_x принимает значения 1, 2, 3, ... Аналогично будет и по двум другим осям.

Для энергии мы можем получить следующее выражение,

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}.$$

Примем теперь $L = L_x = L_y = L_z$. Рассмотрим ячейку в импульсном пространстве, в которой электрон имеет определённое значение импульса и определённое значение энергии. Когда мы переходим из одного состояния в другое, мы получаем

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3 = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}. \quad (21.8)$$

Согласно принципу Паули, каждую ячейку может занимать только один электрон, но на самом деле — как выяснилось позднее — каждую ячейку могут занимать два электрона с разным значением спина. С его помощью можно посчитать максимальное значение импульса — *импульс Ферми*, а также энергию и скорость Ферми.

Импульс Ферми p_F считается из соотношения

$$ZN = 2 \frac{4\pi p_F^3/3}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z},$$

где ZN — произведение числа атомов на их валентность, то есть, суммарное число электронов проводимости в объёме, множитель 2 отвечает за возможность нахождения в одной ячейке двух электронов с противоположными спинами, в числителе стоит радиус сферы Ферми, содержащей все ячейки со значением импульса меньше импульса Ферми, а в знаменателе — объём одной ячейки. Импульс Ферми в таком случае будет равен

$$p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 ZN}{V} \right)^{1/3}. \quad (21.9)$$

Соответственно, для энергии и скорости Ферми можно записать следующие соотношения,

$$\mathcal{E}_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 ZN}{V} \right)^{2/3},$$
$$v_F = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{3\pi^2 ZN}{V} \right)^{1/3}.$$

Легко заметить, что такая скорость как раз и близка к скорости света по порядку величины. Обратим также внимание на то, что температура Ферми (температура вырождения), выражаемая как

$$T_F = \frac{\mathcal{E}_F}{k_B} \gtrsim 10^4 \text{ К},$$

то есть, нагревание будет давать какой-либо вклад в энергию электрона уже после того, как металл расплавится.

Электронный газ также содержится в полупроводниках и в диэлектриках, однако в меньших количествах.

Рассмотрим теперь, что же нам даёт кристаллическая решётка. Наши частицы по-прежнему волны, их импульс по прежнему равен

$$p = \hbar k \neq mv,$$

а значит, и их энергия уже не равна $mv^2/2$. Почему же? Необходимо учитывать ещё энергию взаимодействия частиц с кристаллической решёткой.

На расстоянии $a \ll L$ между узлами решётки расположены ионы. Ионы создают определённое потенциальное поле, изменяющееся периодически. Поскольку a мало, введём число π/a , соответствующее минимуму энергии — тогда $2\pi/a$ будет соответствовать максимуму и так далее. Чтобы точно описать поведение электрона в таком поле, необходимо решить соответствующее уравнение — таковым является уравнение Шрёдингера, однако сейчас нам оно не слишком нужно.

Достаточно сказать, что кривая зависимости $\mathcal{E}(k)$ отличается от параболической: есть зоны, где электрон не может находиться на определённом волновом уровне.

Помимо энергетических зон, выделяют ещё зоны по волновому числу, называя их *зонами Брюллиэна*. Первой зоной называют зону от $-\pi/a$ до $+\pi/a$, второй — от $\pm\pi/a$ до $\pm 2\pi/a$ и так далее. Зоны Брюллиэна нам пока тоже не слишком нужны.

Пусть у нас закончились все состояния в заселяемой зоне, а электронов ещё много — они продолжат заселяться после определённого пробела, где никаких электронов

нет. Все зоны, находящиеся ниже по энергии, заселены электронами полностью — мы сейчас ими не интересуемся, а вместо этого остановимся на последней, *валентной зоне*, которая заселена уже не полностью. После неё идёт *запрещённая зона*, а дальше — зона *проводимости*, где электронов нет.

Если же к куску металла приложить электрическое поле E , то на электроны будет действовать сила

$$F = \frac{dp}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt} = eE.$$

Заметим, что $p \neq mv$. Спрашивается, чему же равна v ?

Под действием поля меняется волновое число, при этом растёт энергия электрона. Говорят, что при протекании тока электрон переходит с одного энергетического уровня на другой.

Лекция 22

Полупроводники

Зонная решётка кристаллической решётки

Поговорим, что же всё-таки означают зоны, в которых могут находиться электроны. Мы уже обсуждали, что они отражают квантование энергии и волнового числа электронов. В электрон может иметь определённые значения энергии, которые мы в целом обозначили разрешённой зоной, а определённые значения он иметь не может — это будут запрещённые зоны.

Обратимся ещё раз к электрону в кристалле, к которому приложили внешнее электрическое поле E . Мы уже обсуждали, что в таком случае электрон будет изменять своё волновое число под действием силы

$$F = \frac{dp}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt} = eE.$$

Чтобы изменять волновое число, электрон должен перемещаться с уровня на уровень, а для этого ему нужна свобода перемещений. Возникает вопрос, чему же равна скорость электрона.

Из курса механики нам знакомо понятие групповой скорости волны,

$$v_{gp.} = \frac{d\omega}{dk}.$$

В электромагнетизме вводят групповую скорость электрона аналогично,

$$v = \frac{\hbar d\omega}{\hbar dk} = \frac{d\mathcal{E}}{\hbar dk}. \quad (22.1)$$

Что же будет иметь место в кристалле? Вначале, при низких энергиях, групповая скорость электрона достаточно существенна, однако при приближении к границе запрещённой зоны она опускается до нуля, а затем и вовсе меняет знак. Как же так? Всё дело в том, что когда электрон увеличивает свой квази-импульс, длина волны де Броиля всё уменьшается, в результате чего электрон как волна начинает отражаться от кристаллической решётки. Хорошо бы, чтобы такого не происходило — чтобы это обеспечить, необходимо, чтобы он с кем-то сталкивался, передавая свой квази-импульс — сталкивается он как раз с решёткой.

Мы знаем, что кристаллическая решётка и сама колеблется — в частности, в курсе молекулярной физики рассматривалось понятие тепловых фононов, которых с ростом температуры участвует в колебаниях всё больше. Разумно предположить, что в связи с этим они и с электронами будут взаимодействовать сильнее с ростом температуры — отсюда такая хитрая зависимость электрических свойств от температуры.

Итак, если электрону есть куда двигаться по энергетическим уровням, по металлу потечёт ток. Представим себе ситуацию, что все уровни заняты. Могут быть следующие ситуации: во-первых, никакой запрещённой зоны может и не быть, тогда мы имеем дело с чистым металлом; во-вторых, запрещённая зона может быть очень широкой, порядка нескольких электрон-вольт ($kT \simeq 0,024 \text{ эВ}$ при $T = 300 \text{ К}$). Получится диэлектрик —

очевидно, сколько диэлектрик не греть, ток по нему не потечёт. Наконец, возможен и третий вариант, пусть электрон может перескочить в следующую разрешённую зону, где электрон может свободно располагаться. Иногда ближайшую свободную разрешённую зону называют *зоной проводимости*. Такой модели соответствуют полупроводники.

Что же происходит, когда электрон переходит в зону проводимости? Можно говорить, что электрон оторвался от своего атома и стал свободным, образовав на своём прежнем месте вакансию. Такую вакансию называют *дыркой*. Говорят, что при высокой температуре происходит появление носителей зарядов, электронов и дырок. Помимо свободных электронов, есть ещё и скачущие электроны, которые перескакивают с одной вакансии на другую — удобно говорить об этом как о движении дырок, переносящих положительный заряд. Электроны и дырки являются основными носителями заряда в полупроводниках.

Носители заряда в полупроводниках. Легирование

С помощью примесей, или *легирования*, можно создать проводники с разными типами проводимости, *p* и *n*. Комбинируя их, можно достичь многих интересных явлений — рассмотрим их.

Опыт показывает, что если на 10^5 атомов кремния добавить один атом бора, то проводимость возрастёт в тысячу раз. Объясняется это появлением разных механизмов проводимости: примеси можно добавлять донорные или акцепторные. Рассмотрим, например, атом мышьяка в решётке из атомов кремния — мышьяк (As) имеет валентность V, то есть, привносит в решётку лишний электрон, который становится свободным. Итак, если добавить донорную примесь, появляется дополнительное множество электронов. Такой проводник называется проводником *n*-типа, от английского *negative* — отрицательный, потому что переносчиками тока преимущественно являются отрицательные заряды.

Если же добавить акцепторную примесь, то есть элемент валентности III, то он обязательно заберёт себе один дополнительный электрон, и где-то невдалеке появится дырка. Появившихся дырок также будет множество, и такой проводник называют проводником *p*-типа, от английского *positive* — положительный.

p-n-переход. Полупроводниковый диод

Если расположить рядом полупроводники *p*- и *n*-типа, то возникнет *p-n*-переход. Естественно, не следует думать, что приводится в соприкосновение два разных полупроводника — это было бы невозможно. Вместо этого берётся один полупроводник, в одну часть которого легируется донор, а в другую — акцептор. В таком случае примерно половина полупроводника содержит преимущественно электроны, а половина — преимущественно дырки. Посередине возникает пограничная область. И электроны, и дырки могут проникать в другую область, однако возникающее электрическое поле не даёт им нарушить структуру областей проводимости. Устанавливается процесс динамического равновесия в пограничном слое: диффузионный процесс компенсируется действием электрического поля.

Мы можем повлиять на внутренние процессы, приложив некоторую разность потенциалов к *p-n*-переходу — приложив больший потенциал к *p*-области и меньший к *n*-области, мы вызовем понижение потенциального барьера перехода между областями, и диффузионный ток будет превалировать — через *p-n*-переход потечёт электрический ток. Если же приложить разность потенциалов наоборот, то пограничное возвращающее поле будет усиливаться, и ток не пойдёт.

Существует определённая нелинейная зависимость текущего через *p-n*-переход тока от приложенного напряжения, которая называется *вольт-амперной характеристикой*. Она несимметрична: ток в прямом направлении достаточно быстро возрастает, в то время как в обратном направлении вначале есть только некоторый совсем слабый ток, после чего наступает пробой и ток увеличивается очень быстро при некотором почти неизменном напряжении.

Говорят, что полупроводниковый диод имеет одностороннюю проводимость. На схемах полупроводниковый диод, пропускающий ток *I* в прямом направлении, обозначается как показано на рисунке.

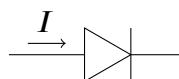


Рис. 32: Обозначение полупроводникового диода на схеме.

Достаточно ясно, что если на вход подавать переменное напряжение, то диод будет пропускать только половину тока, только тот ток, который течёт в прямом направлении диода.

Контактные явления

На прошлой лекции мы обсуждали, что энергия электронов в металле зависит от волнового числа по параболе,

$$\mathcal{E} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}.$$

Также речь шла об энергии Ферми,

$$\mathcal{E}_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 Z N}{V} \right)^{2/3}.$$

Все металлы имеют разные концентрации свободных электронов, поэтому у всех них разные значения энергии Ферми. Вспомним также, что скорость Ферми при комнатной температуре является огромной величиной, порядка сотой части скорости света. Наконец, мы обсуждали и температуру Ферми.

Возникает вопрос, что происходит при приведении в контакт двух металлов? Рассмотрим два куска металла, (1) и (2). Между ними возникнет *контактная разность потенциалов*. Пусть при абсолютном нуле температуры электроны заняли в обоих все энергетические уровни от нуля. Для того, чтобы вытащить электрон на поверхность, необходимо совершить определённую работу выхода $A_{\text{вых.}}$, по порядку величины такую

же, как и энергия Ферми. Наличие этой работы связано с преодолением поля образующегося положительного заряда, а также отталкивающего поля электронов, вышедших ранее. Ясно, что работа выхода своя для каждого металла.

Возьмём два металла и приведём их в контакт. Электроны будут переходить между металлами. В одном металле будет недостаток, в другом избыток электронов, а между ними как раз и появится контактная разность потенциалов — произойдёт выравнивание энергий Ферми обоих металлов. Видим, и это подтверждается экспериментально, что

$$\Delta\varphi_{внеш.} = \frac{A_{вых.1} - A_{вых.2}}{e}. \quad (22.2)$$

Эта величина, очевидно, будет порядка единиц вольт, раз работа выхода имеет порядок единиц электрон-вольт.

Помимо внешней разности потенциалов, будет возникать ещё и внутренняя разность потенциалов $\Delta\varphi_{внутр.}$, соответствующая разности энергий Ферми,

$$\Delta\varphi_{внутр.} = \frac{\mathcal{E}_{F1} - \mathcal{E}_{F2}}{e}. \quad (22.3)$$

Она будет менее существенной, имея порядок величины только десятых, а то и сотых долей вольта. Источником такой разности потенциалов является как раз выравнивание энергий Ферми.

Если взять два металла, допустим, медь и железо, и спаять их вместе, то появится внутренняя контактная разность потенциалов. Если кусочки проволоки из них замкнуть и спаять с обеих сторон, то тока не будет. Самое важное тут то, что внутренняя контактная разность потенциалов равна разности энергий Ферми, а разности химических потенциалов: при 0 К, как мы рассматривали, эти величины одинаковы, а вот при нагревании химический потенциал зависит от температуры. Поэтому можно сказать, что если взять две проволоки и сделать из них замкнутую цепь, то тока не будет, потому что в местах смыкания разности потенциалов будут одинаковы. Если же один спай начать нагревать или охлаждать, то по проволокам потечёт электрический ток — возникнет *термо-электродвигущая сила*. Из курса молекулярной физики мы знаем, что

$$\mathcal{E}_{термо} = \mathcal{E}_{термо}(T_1 - T_2).$$

Несмотря на то, что эта функция может быть разнообразной, разные термопары градируют и потом широко используют для определения температуры.

Несложно понять, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{термо} &= \frac{\mu_1(T_1) - \mu_2(T_2)}{e} - \frac{\mu_1(T_1) - \mu_2(T_2)}{e} = \\ &= \Delta\varphi_{внутр.}(T_1) - \Delta\varphi_{внутр.}(T_2). \end{aligned} \quad (22.4)$$

В курсе молекулярной физики мы уже говорили о том, что при изменении температуры меняется именно химический потенциал, а не какая-либо энергетическая характеристика.

Также стоит сказать пару слов об эффекте Пельтье. Рассмотрим спай двух проводников, на котором существует $\Delta\varphi_{внутр.}$ при протекании тока в разных направлениях спай

будет либо охлаждаться, либо нагреваться в зависимости от направления тока. Выделяемое количество теплоты не соответствует закону Джоуля—Ленца, а выражается как

$$Q = \Pi U It, \quad (22.5)$$

где Π — это безразмерный коэффициент Пельтье. Если посмотреть на это явление условно, то можно сказать, что под действием разности потенциалов электроны около спая замедляют либо ускоряют своё тепловое движение. Необходимо подчеркнуть, что U и I в законе Пельтье не связаны законом Ома для участка цепи.

Сверхпроводимость

Если металлы охлаждать, то их удельное сопротивление будет уменьшаться по некоторому закону. Сначала оно уменьшается линейно, потому что зависит от взаимодействия электронов с фононами. Детально о фононах шла речь в курсе молекулярной физики. При малых температурах, где теплоёмкость зависит от температуры $C \propto T^3$, удельное сопротивление зависит как $\rho \propto T^5$.

Некоторые, пусть и не все, материалы, обладают следующим свойством: у них есть некоторая критическая температура, ниже которой удельное сопротивление резко падает. Оценить его можно с помощью индукционных токов.

На данный момент не найдено веществ, чья критическая температура была бы выше 77 К, то есть, охлаждать вещества до сверхпроводящего состояния с помощью жидкого азота не удается.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ