



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА



*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

КОКШАРОВ  
ЮРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПРЕДОСТАВЛЕННЫЕ МАТЕРИАЛЫ  
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА ФИЗФАКА МГУ  
**УТКИНА НИКИТУ ДЕНИСОВИЧА**



БЛАГОДАРИМ ЗА ОЦИФРОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА ФИЗФАКА МГУ  
**ГРУДИЕВА ЕВГЕНИЯ ИГОРЕВИЧА**

## Оглавление

Лекция 1 .....	9
Виды взаимодействий в природе .....	9
Свойства электрического заряда.....	9
Электростатика и ее основные законы.....	10
Закон Кулона.....	10
Принцип суперпозиции.....	11
Силовые линии поля .....	12
Непрерывное распределение зарядов .....	13
Лекция 2 .....	14
Прямая задача электростатики .....	14
Теорема Остроградского – Гаусса .....	17
Лекция 3 .....	22
Дифференциальные операторы.....	22
Потенциальность электростатического поля .....	23
Физическое определение потенциала .....	25
Поле точечного диполя.....	27
Уравнения Лапласа и Пуассона .....	28
Лекция 4 .....	29
Использование уравнений Лапласа и Пуассона .....	29
Теорема Ирншоу.....	30
Теорема единственности в электростатике .....	30
Электростатическое поле в веществе .....	30
Основные законы идеальных проводников в электростатическом поле .....	31
Конденсаторы .....	33
Лекция 5 .....	35
Цилиндрический воздушный конденсатор.....	35
Метод изображений в электростатике.....	35
Заземленная сфера и точечный заряд вне сферы.....	36
Заземленная плоскость.....	36
Незаземленная сфера .....	37

Заземленная сфера и точечный заряд внутри сферы .....	37
Электрическое поле в диэлектриках .....	38
Примеры элементарных диполей.....	38
Лекция 6 .....	41
Теорема Гаусса для векторов $E$ , $D$ , $P$ .....	41
Граничные условия для векторов $E$ , $D$ , $P$ .....	41
Втягивание диэлектрика в неоднородное поле .....	43
Связь неполяризационных и поляризационных зарядов в однородных изотропных средах. 43	
Изотропная однородная диэлектрическая пластина в однородном поле .....	44
Изотропный однородный диэлектрический шар в однородном поле .....	44
Граничные условия и экспериментальное измерение $E$ и $D$ внутри диэлектрика.....	45
Фактор формы диэлектрика .....	46
Энергия и силы в электростатическом поле .....	46
Взаимодействие точечного заряда и точечного диполя .....	46
Лекция 7 .....	48
Сила, действующая на диэлектрик .....	48
Сила, действующая на проводник .....	48
Момент, действующий на электрический диполь .....	49
Энергия системы зарядов в электростатическом поле .....	50
Энергия системы $N$ проводников в электростатическом поле .....	51
Энергия плоского конденсатора .....	52
Соединения конденсаторов .....	53
Связь пондеромоторных сил, действующих на проводники, и энергии.....	54
Лекция 8 .....	56
Энергетический метод расчета пондеромоторных сил в присутствии диэлектрика .....	57
Энергия неполярных диэлектриков.....	58
Работа внешнего поля, затрачиваемая на образование диполя .....	59
Энергия полярных диэлектриков. Формула Клаузиуса – Моссотти .....	60
Пьезоэлектрики и пьезоэффект .....	61
Лекция 9 .....	62
Классификация диэлектриков .....	62
Связь $P$ и $E$ .....	63
Фактор Больцмана.....	64

Постоянный электрический ток.....	65
Модель вязкой среды .....	66
Лекция 10 .....	68
Модель свободного пробега Друде – Лоренца.....	68
Закон Ома для однородного участка цепи .....	68
Источники ЭДС .....	69
Закон Ома для неоднородного участка цепи .....	70
Правила Кирхгофа .....	71
Последовательное соединение $R$ .....	73
Параллельное соединение $R$ .....	74
Последовательное соединение $\mathcal{E}$ .....	74
Параллельное соединение $\mathcal{E}$ .....	75
Лекция 11 .....	76
Закон Джоуля – Ленца .....	76
Токи в сплошных средах .....	77
Магнитостатика.....	78
Опыт Эрстеда .....	78
Магнитное поле Земли .....	79
Сила Лоренца.....	79
Магнитное поле элемента тока.....	80
Простые системы .....	81
Закон полного тока (теорема о циркуляции).....	84
Лекция 12 .....	85
Фундаментальные теоремы математического анализа .....	88
Закон отсутствия магнитных зарядов .....	89
Примеры использования теоремы о циркуляции .....	90
Силы в магнитном поле .....	91
Лекция 13 .....	92
Векторный магнитный потенциал.....	92
Магнитное поле элементарного тока (магнитного диполя).....	94
Поток вектора $B$ .....	96
Электромагнитная индукция Фарадея .....	97
Природа ЭМ индукции Фарадея .....	97

Лекция 14 .....	98
Поток магнитной индукции .....	99
Энергетические соотношения в системе линейных токов.....	102
Энергия и сила взаимодействия двух жестких контуров с током .....	104
Связь сил Ампера в системе линейных контуров с изменением энергии .....	105
Лекция 15 .....	107
Экстраток самоиндукции .....	107
Потенциальная функция тока .....	112
Магнитное поле в веществе .....	112
Лекция 16 .....	114
Закон Био – Савара – Лапласа для $H$ (вихревое поле) .....	115
Поле размагничивания .....	116
Магнетики .....	118
Фактор формы.....	118
Граничные условия для векторов $B$ и $H$ .....	119
Лекция 17 .....	121
Механомагнитный опыт Барнетта .....	122
Магнитомеханический опыт Эйнштейна – де Гааза.....	122
Магнитное поле в полости. Вытеснение магнитного поля из сверхпроводника. ....	123
Диамагнетики .....	124
Прецессия Лармора.....	124
Парамагнетики.....	125
Ферромагнетики .....	126
Лекция 18 .....	128
Энергия и силы в магнитном поле при наличии магнетика .....	128
Магнит с постоянной намагниченностью, разделенный на две части.....	130
Тензор напряжения Максвелла для линейной изотропной среды .....	130
Затягивание магнетика в соленоид .....	130
Квазистационарные токи. Критерий квазистационарности .....	132
Квазистационарные процессы .....	133
Лекция 19 .....	136
Закон сохранения энергии в цепях квазистационарного тока .....	136
Собственные электрические колебания.....	136

Добротность колебательного контура.....	139
Вынужденные колебания в $R\mathcal{L}C$ – контуре.....	139
Представление в комплексном виде.....	140
Метод векторных диаграмм.....	141
Лекция 20 .....	142
Резонансные кривые.....	143
Резонанс напряжений.....	143
Резонанс токов.....	144
Полуширина резонансной кривой.....	145
Метод комплексных амплитуд.....	146
Активные потери в цепи .....	147
Генераторы тока .....	147
Экстратоки. Токи размыкания. ....	149
Лекция 21 .....	149
Трансформатор.....	149
Двухфазная система (связанные контуры).....	151
Трехфазный ток.....	152
Вращающееся магнитное поле .....	152
Линейное и фазное напряжения.....	153
Мощность переменного тока .....	153
$R\mathcal{L}$ и -цепи. Переходные процессы.....	154
Лекция 22 .....	156
Высокочастотные токи .....	156
Система уравнений Максвелла.....	157
Обобщенное волновое уравнение .....	157
Свойства электромагнитных волн.....	158
Скин-эффект .....	159
Лекция 23 .....	161
Источник электромагнитных волн. Интенсивность излучения. ....	161
Вектор Умова – Пойнтинга.....	162
Электрические свойства веществ.....	163
Основные свойства сверхпроводников.....	164
Термоэлектрические явления. Термопара. ....	164

---

Эффект Зеебека.....	164
Эффект Пельтье.....	164
Эффект Томсона.....	165
Полупроводниковый биполярный транзистор.....	165
Фоторезистор.....	165
Терморезистор.....	166



## Лекция 1

### Виды взаимодействий в природе

	радиус действия	величина	степень завершенности теории
гравитационное	$\infty$	$\sim 10^{-39}$	$\pm$
электромагнитное	$\infty$	$\frac{1}{137}$	+
сильное (ядерное)	$10^{-15}$ м	$\approx 14$	?
слабое	$10^{-18}$ м	$\sim 10^{-5}$	+

$$\alpha_{\text{эм}} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} - \text{постоянная тонкой структуры (в единицах СГС)}$$

$$\alpha_{\text{гр}} = \frac{Gm^2}{\hbar c} = 0,5 \cdot 10^{-38} - \text{константа гравитационного взаимодействия}$$

$$\frac{\alpha_{\text{гр}}}{\alpha_{\text{эм}}} \approx 10^{-37}$$

$$\frac{F_{\text{гр}}}{F_{\text{эм}}} = \frac{G \frac{m^2}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}} \approx 10^{-37} \approx \frac{\alpha_{\text{гр}}}{\alpha_{\text{эм}}}$$

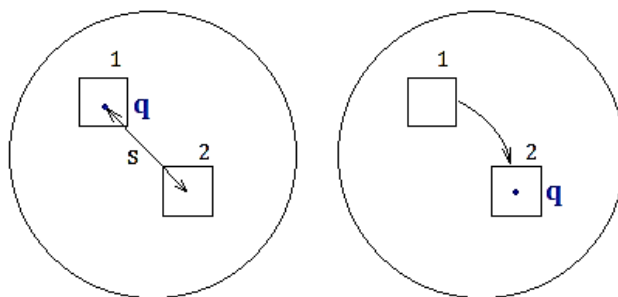
Простейшие элементарные частицы:  $e^-$ ,  $p^+$ .

Заряд электрона:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл

### Свойства электрического заряда

1. Дискретность.
2. Существует два вида зарядов: «+» и «-».
3. Инвариантность (независимость от скорости носителей заряда).

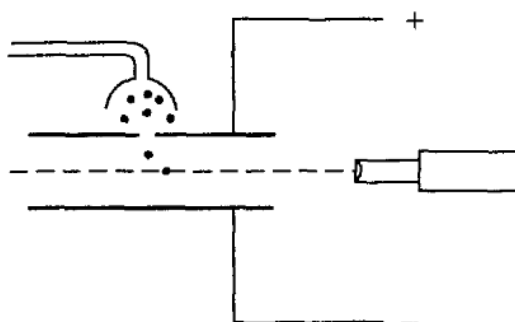
4. Закон сохранения заряда: в изолированной системе полный заряд сохраняется  
 $\Rightarrow$  локальность сохранения заряда (заряд перераспределяется не мгновенно, а за конечное время).



$$\Delta t \geq \frac{s}{c} \neq 0$$

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ — уравнение непрерывности.}$$

Милликен доказал дискретность заряда и смог сделать оценку минимального возможного заряда  $e$ .



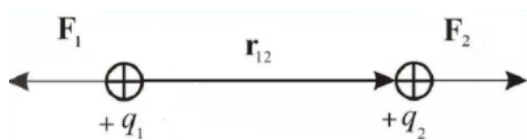
### Электростатика и ее основные законы

1. Закон сохранения заряда
2. Закон Кулона
3. Принцип суперпозиции

### Закон Кулона

В инерциальной системе отсчета сила взаимодействия между точечными зарядами равна:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$

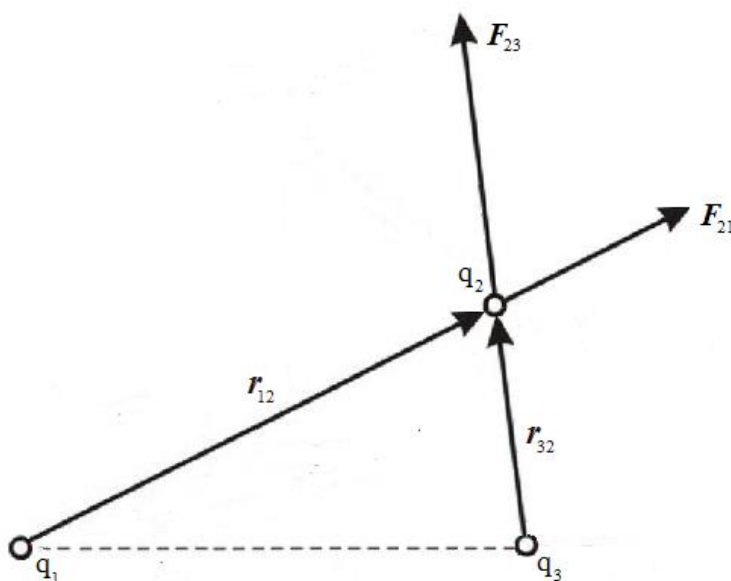
$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| = F \Rightarrow \vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$$

Некоторые замечания:

- Точечный заряд – заряженная материальная точка.
- Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.
- Закон Кулона можно применять для движущихся зарядов, если  $v \ll c$ .
- Закон Кулона справедлив для поляризационных зарядов в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$$

Принцип суперпозиции



$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32}$$

Сила, действующая на второй заряд:

$$\vec{F} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$$

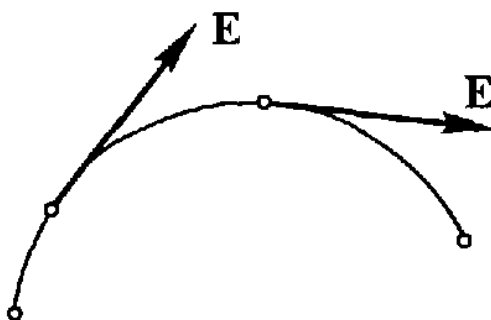
Электрическое поле – это вид материи, который создается зарядами и действует на помещенные в него заряды.

Напряженность – его силовая характеристика.

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}}{q}, \quad [E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

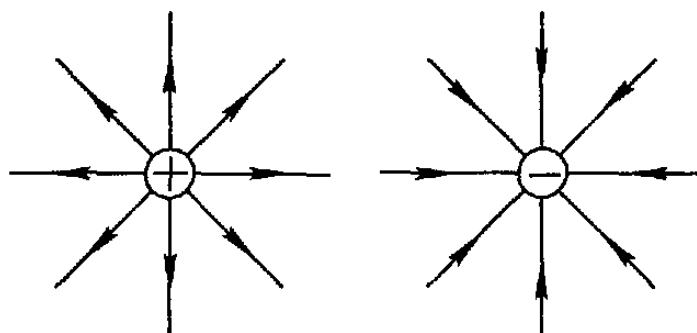
$q$  – пробный заряд

Силовые линии поля



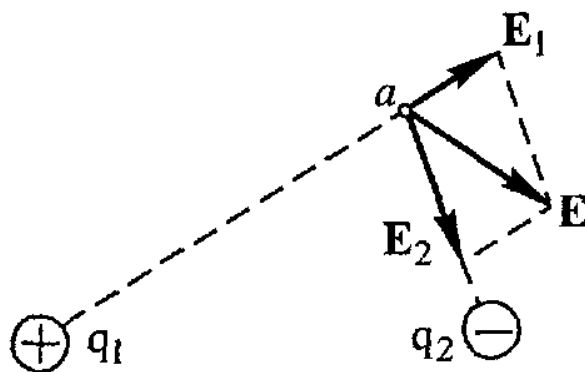
Касательная к силовой линии совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$  в данной точке.

1. Силовые линии начинаются на «+» и заканчиваются на «-», либо уходят на бесконечность. При этом друг с другом они не пересекаются.
2. Густота линий отражает величину поля  $|\vec{E}|$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

Для  $\vec{E}$  так же выполняется принцип суперпозиции.



Прямая задача электростатики: найти поле  $\vec{E}$  в любой точке пространства по известным  $\vec{r}_i$  и  $q_i$ .

#### Непрерывное распределение зарядов

Если большое число точечных зарядов локализовано на малой площадке  $\Delta S$ , то заряд этой площадки можно рассматривать как непрерывный.

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \text{ — поверхностная плотность заряда, } \delta Q = \sigma dS$$

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \text{ — линейная плотность заряда, } \delta Q = \tau dl$$

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \text{ — объемная плотность заряда, } \delta Q = \rho dV$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L,S,V} \frac{\delta Q \vec{r}}{r^3}$$

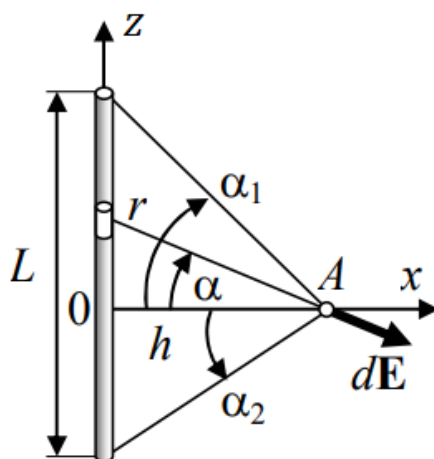
## Лекция 2

### Прямая задача электростатики

Методы решения:

1. Закон Кулона + принцип суперпозиции.
2. Теорема Остроградского – Гаусса.

Пример 1. Заряженная нить.



$$\tau = \frac{Q}{l}, \quad \begin{cases} \alpha_1 < 0 \\ \alpha_2 > 0 \end{cases}, \quad z = h \operatorname{tg} \alpha, \quad r = h \cos \alpha, \quad dE_y = 0$$

$$dz = \frac{h d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \delta Q = \tau dz = \frac{\tau h d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$|d\vec{E}| = \frac{\delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\delta Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \cos^2 \alpha = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 h}$$

$$dE_x = |d\vec{E}| \cos \alpha = \frac{\tau \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 h}$$

$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 h} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

Частные случаи:

$$1. \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \alpha_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 h}$$

$$2. \alpha_2 \rightarrow 0, \alpha_1 \rightarrow 0$$

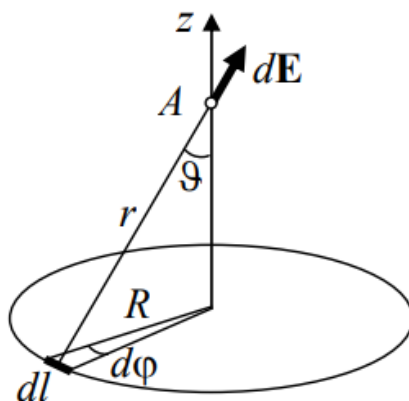
$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 h} (\alpha_2 + |\alpha_1|) \cong \frac{\tau l}{4\pi\epsilon_0 h^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2}$$

$$dE_z = -|d\vec{E}| \sin \alpha = -\frac{\tau \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 h}$$

$$E_z = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_z = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 h} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Частный случай:  $\alpha_2 = -\alpha_1 \Rightarrow E_z = 0$

Пример 2. Заряженное кольцо (ищем поле в точке на оси симметрии).



$$\tau = \frac{Q}{2\pi R_0}, \quad r = \frac{h}{\cos \theta}, \quad d\vec{E} = d\vec{E}_{\parallel} + d\vec{E}_{\perp}$$

При данной симметрии системы:

$$E_{\text{гор}} = \sum |d\vec{E}_{\parallel}| = 0, \quad E_{\text{верт}} = \sum |\vec{E}_{\perp}| = \sum |d\vec{E}| \cos \theta$$

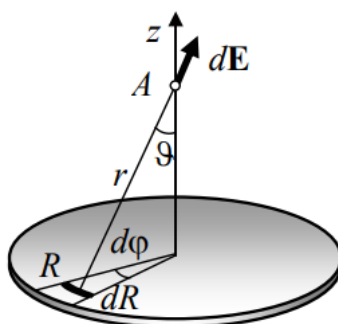
$$|d\vec{E}| = \frac{\delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\tau dl \cos^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 h^2}$$

$$E_{\text{верт}} = \frac{\tau \cos^3 \theta}{4\pi\epsilon_0 h^2} \oint_L dl = \frac{\tau R_0 \cos^3 \theta}{2\epsilon_0 h^2} = \frac{Q \cos^3 \theta}{4\pi\epsilon_0 h^2}$$

Частный случай:  $h \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$

$$E_{\text{верт}} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2}$$

Пример 3. Однородно заряженный диск (ищем поле в точке на оси симметрии).



$$\delta Q = \tau \cdot 2\pi R dR, \quad R = h \operatorname{tg} \alpha, \quad dR = \frac{h d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$|d\vec{E}| = \frac{\delta Q \cos^3 \theta}{4\pi\epsilon_0 h^2} = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \sin \theta d\theta, \quad \tau \equiv \sigma$$

$$E = \int_0^{\theta_0} |d\vec{E}| = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta = \frac{\tau}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta_0)$$

Частные случаи:



$$1. \theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$E \rightarrow \frac{\tau}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

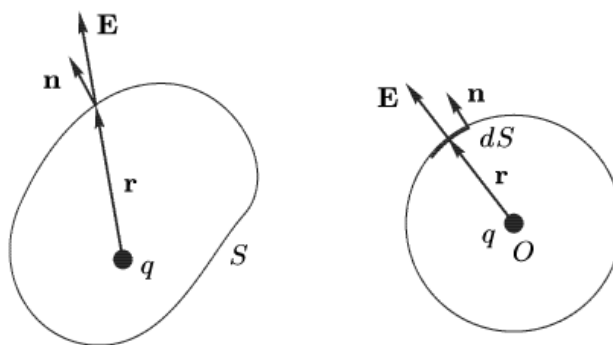
$$2. \theta_0 \rightarrow 0$$

$$\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{\theta_0^2}{2} \Rightarrow E \rightarrow \frac{\tau}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\theta_0^2}{2}$$

$$3. \theta \rightarrow 0$$

$$R_0 \approx h\theta_0 \Rightarrow E \rightarrow \frac{\tau\pi R_0^2}{4\pi\varepsilon_0 h^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$$

Теорема Остроградского – Гаусса



Поток вектора  $\vec{E}$  через площадку  $dS$  с нормалью  $\vec{n}$ :

$$d\Phi_E \equiv (\vec{E} \cdot \vec{n})dS = (\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

$$\vec{E} \parallel \vec{n} \Rightarrow d\Phi_E = \max$$

$$\vec{E} \perp \vec{n} \Rightarrow d\Phi_E = 0$$

Поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную поверхность:

$$\Phi_E = \iint_{\Sigma} (\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

Теорема Остроградского – Гаусса (в единицах СИ):

Поток вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность пропорционален электрическому заряду внутри этой поверхности:

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

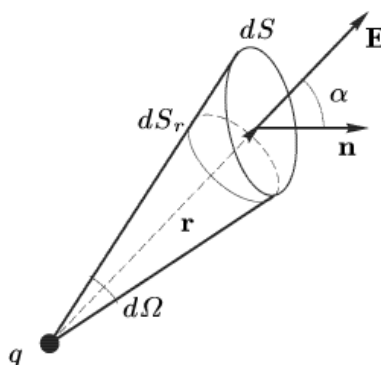
Докажем для случая точечного заряда внутри сферы, используя принцип суперпозиции:

$$\vec{E} \parallel \vec{n}, \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad d\Phi_E = E dS$$

$$\Phi_E = \sum d\Phi_E = E \sum dS = E \cdot 4\pi R^2 \Leftrightarrow \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

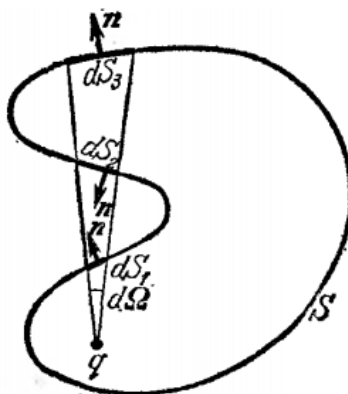
Для сферической поверхности имеет место понятие телесного угла:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$



Поток через элемент сферической поверхности:

$$d\Phi_E = E dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\Omega r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



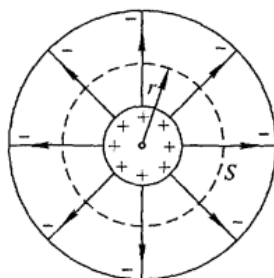
Следует разбить произвольную поверхность на множество малых поверхностей. Тогда, при условии, что заряд точечный, в каждой из них будет выполняться теорема Гаусса.

Теорема Гаусса имеет ограниченную применимость – она справедлива только для симметричных систем зарядов. В этом случае:

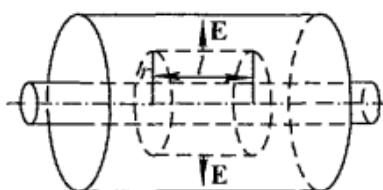
$$\Phi = ES = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Виды симметрии:

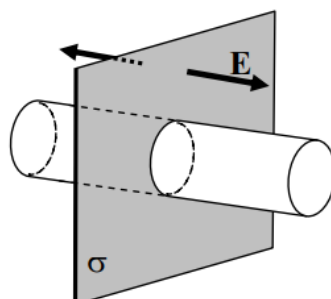
1. Сферическая



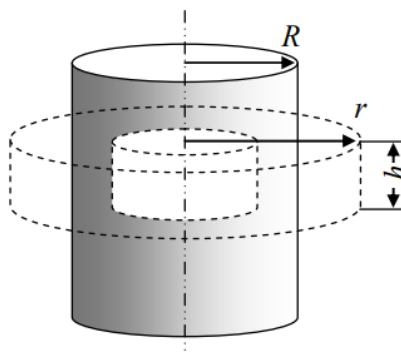
2. Цилиндрическая



3. Бесконечная плоскость



Пример. Бесконечно длинный заряженный цилиндр



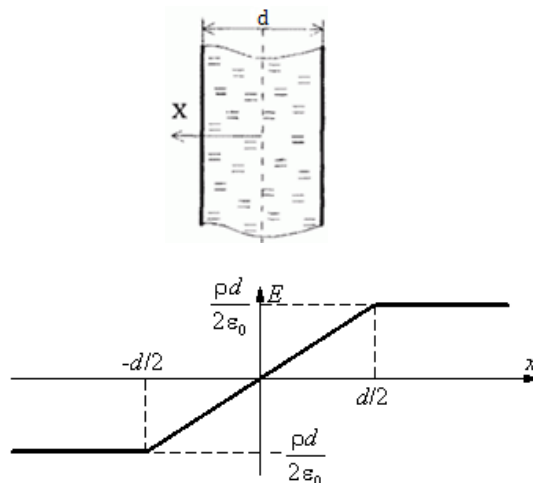
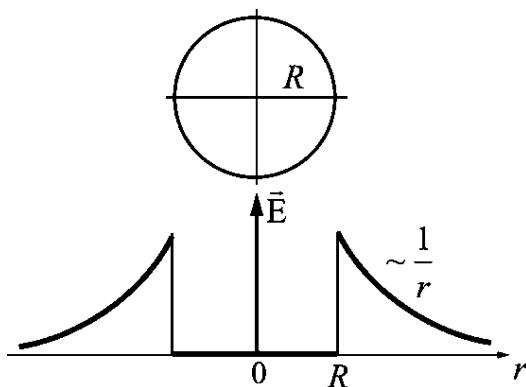
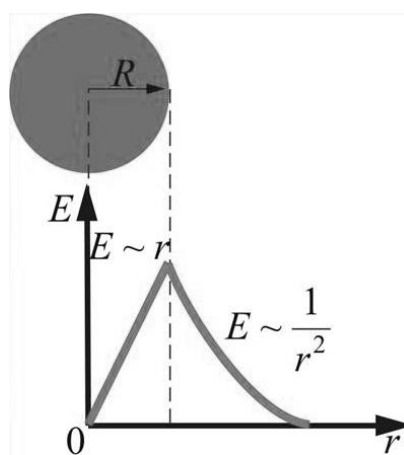
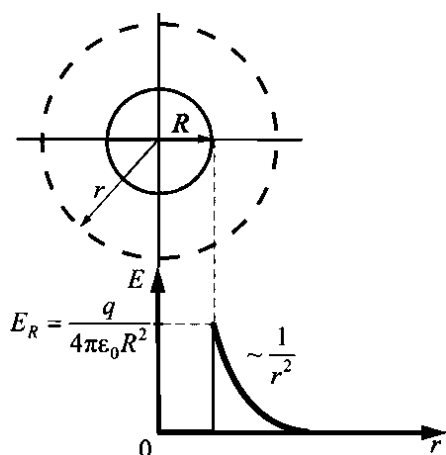
Снаружи:

$$E(r) \cdot S = \frac{\rho \pi R_0^2 h}{\epsilon_0}, \quad S = h \cdot 2\pi r \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0 r} \sim \frac{1}{r}}$$

Внутри:

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \sim r}$$

Из теоремы Гаусса следует, что внутри замкнутой поверхности  $E = 0$ .



## Лекция 3

### Дифференциальные операторы

оператор	объект действия	результат действия
grad	скаляр $\Psi(x, y, z) = \Psi(\vec{r})$	вектор $\nabla\Psi$
div	вектор $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(\vec{r})$	скаляр $\nabla\vec{E}$
rot	вектор $\vec{E}(\vec{r})$	вектор $[\nabla \times \vec{E}]$

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \text{grad } \Psi \equiv \nabla\Psi = \vec{i} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Psi}{\partial z} dz, \quad d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \Rightarrow d\Psi = (\nabla\Psi \cdot d\vec{r})$$

$$d\vec{r} \perp \nabla\Psi \Rightarrow d\Psi = 0$$

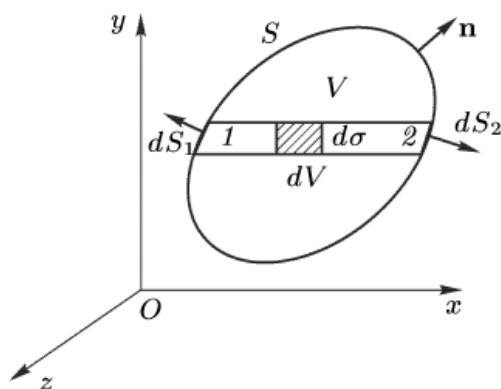
$$d\vec{r} \uparrow \nabla\Psi \Rightarrow d\Psi = \max$$

Вдоль кривой ab:

$$\int_a^b (\nabla\Psi \cdot d\vec{r}) = \Psi(b) - \Psi(a)$$

$$\text{div } \vec{E} \equiv (\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Другая формулировка теоремы Остроградского – Гаусса:



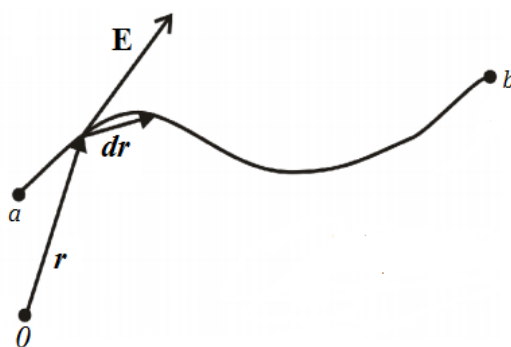
$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oiint_{S_V} (\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz = dS_{yz} (E_x(b) - E_x(a)) \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{\delta Q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\delta Q_{in}}{dV} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} - \text{теорема Остроградского – Гаусса в дифференциальной форме}$$

### Потенциальность электростатического поля



$$\int_a^b (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = ?$$

Для точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Для любой системы неподвижных зарядов справедлив принцип суперпозиции, а значит интеграл не зависит от траектории движения от  $a$  к  $b$ .

$$\int_a^b (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left[ \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i} \right) + \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Для 1 заряда:

$$\int_a^b (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Для N зарядов:

$$\int_a^b (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{a_i}} - \frac{1}{r_{b_i}} \right)$$

В случае  $a = b$  циркуляция вектора  $\vec{E}$  равна 0:

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = 0$$

Это свойство называют свойством потенциальности. Оно справедливо для любой замкнутой траектории  $L$ .

Работа электрического поля:

$$A = \int_{ab} (q\vec{E} \cdot d\vec{r}) = \int_{ab} (\vec{F}_q \cdot d\vec{r})$$

Из свойства потенциальности следует, что работа электростатического поля по перемещению точечного заряда по любой замкнутой траектории равна 0.

Если  $a = b$ , то

$$\int_a^b (\nabla\Psi \cdot d\vec{r}) = \Psi(b) - \Psi(a) = 0$$

Если электрическое поле потенциально, то математически его можно представить в виде:



$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi} \quad \varphi - \text{потенциал электрического поля}$$

$$A = \int_{ab} (q\vec{E} \cdot d\vec{r}) = -q \int_a^b (\nabla\varphi \cdot d\vec{r}) = -q(\varphi(b) - \varphi(a)) \Rightarrow \varphi(a) - \varphi(b)$$
$$= \frac{A}{q}$$

$$[\varphi] = \text{В}, \quad 1 \text{ В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$$

### Физическое определение потенциала

Потенциал в данной точке численно равен отношению работы сил поля, затрачиваемой на перемещение пробного заряда из данной точки в точку с  $\varphi = 0$ , к величине этого заряда.

### Свойства:

1. Энергетическая характеристика

$$W_{\text{эл.внеш.}} = q\varphi$$

2. Скаляр, определяемый с точностью до константы

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla(\varphi + \text{const})$$

3. Потенциал обычно нормируют, т. е. принимают в какой-то точке за известную величину.
4. Для  $\varphi$  справедлив принцип суперпозиции.

Потенциал точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Некоторые полезные формулы:

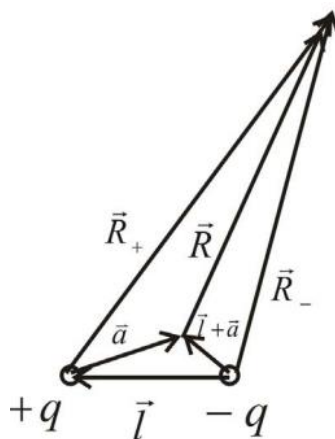
$$\nabla\Psi(r) = \Psi_r \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad \nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$$

Из определения потенциала:

$$\vec{E} = -\nabla\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$



## Поле точечного диполя

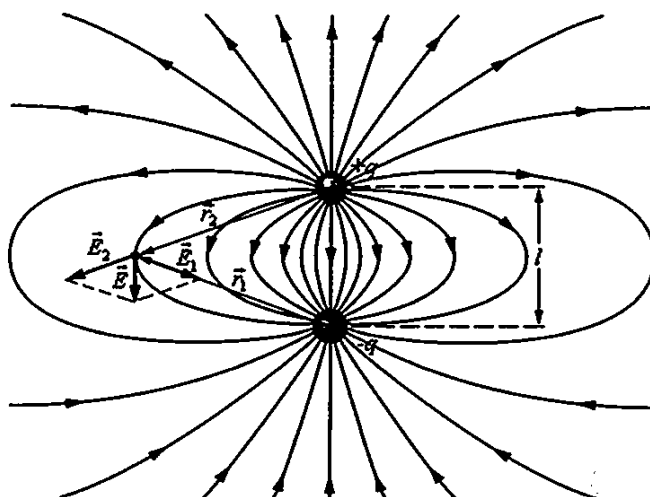


$\vec{p} = q\vec{l}$  – дипольный момент

$$\Delta r = l \sin \alpha = l \cos \theta, \quad r_+ \approx r_- \gg l$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{q\Delta r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \right\} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right\} = \boxed{\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}} \sim \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$



## Уравнения Лапласа и Пуассона

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$-(\operatorname{div}(\nabla\varphi)) = -\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \text{ – уравнение Пуассона}$$

$$\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = 0} \text{ – уравнение Лапласа}$$

## Лекция 4

### Использование уравнений Лапласа и Пуассона

1. По известной функции  $\varphi(x, y, z)$  найти  $\rho(x, y, z)$ .
2. По известному распределению заряда  $\rho(\vec{r})$  найти  $\varphi(\vec{r})$ .

Пример. Безграничный плоский слой.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + C_1, \quad C_1 = \text{const}$$

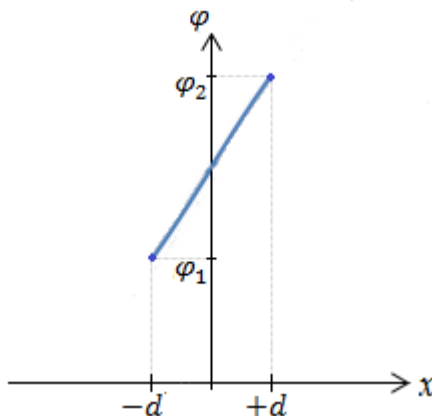
$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + C_1x + C_0, \quad C_0 = \text{const}$$

Константы находятся из граничных условий:

$$\begin{cases} \varphi(-d) = \varphi_1 \\ \varphi(+d) = \varphi_2 \end{cases}$$

Если  $\rho = 0$ , то из уравнения Лапласа:

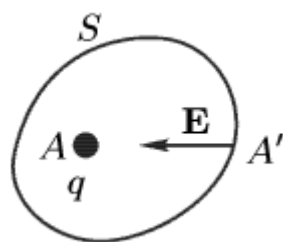
$$\varphi(x) = C_1x + C_0$$



В этом случае экстремумы потенциала могут быть только на границе области  $\rho = 0$ .

## Теорема Ирншоу

*Система неподвижных электростатических зарядов не может находиться в равновесии под действием только электростатических сил.*



### Доказательство 1.

Положение равновесия характеризуется минимумом энергии системы.  $W_{\min} = q\varphi_{\min}$ . Из условия уравнения Лапласа следует, что экстремумов в области  $\rho = 0$  нет, а значит равновесие не достигается.

### Доказательство 2.

Окружим произвольный заряд  $q$ , находящийся в точке равновесия  $A$ , некоторой замкнутой поверхностью  $S$  так, чтобы остальные заряды системы находились вне этой поверхности.  $\vec{E}$  – поле, создаваемое остальными зарядами системы, за исключением заряда  $q$  при смещении заряда  $q$  из точки равновесия в точку  $A'$ . Линии поля будут сходиться к точке равновесия, так как именно в этой точке достигается минимум потенциала. В этом случае по теореме Гаусса поток через поверхность:  $\Phi < 0$ . Но это противоречит теореме Гаусса, так как она требует, чтобы поток был равен нулю, поскольку заряды находятся вне поверхности  $S$ . Значит равновесие невозможно.

## Теорема единственности в электростатике

*При заданных граничных условиях существуют единственные решения уравнений Лапласа и Пуассона.*

Потенциал точечного заряда есть частный случай решения уравнения Пуассона:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

## Электростатическое поле в веществе

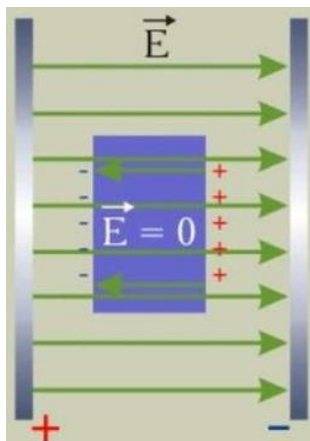
Рассмотрим физически малый объем вещества  $\delta V$ .

1.  $N \geq N_A$

$$2. \langle E_{\text{внутриат.}} \rangle = 0$$

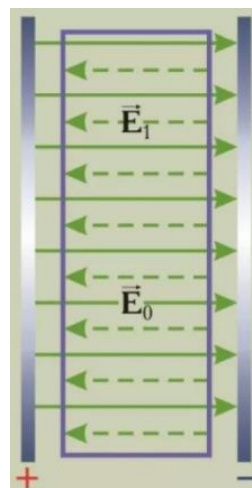
3. В пределах  $\delta V$  внешние поля можно считать однородными.

### Электростатическая индукция



- идеальные проводники: Ag, Cu, Au
- есть свободные заряды
- $\Delta r$  – любое (макроскопическое  $> 10^{-6}$  м)

### Поляризация



- идеальные диэлектрики: С (алмаз), фарфор
- нет свободных зарядов
- есть связанные заряды
- $\Delta r \simeq 10^{-10}$  м

### Основные законы идеальных проводников в электростатическом поле

1.  $\vec{E}_{\text{внутр}} = 0$
2.  $\varphi_{\text{внутр}} = \varphi_{\text{пов}} = \text{const}$
3.  $\text{div } \vec{E}_{\text{внутр}} = 0 \Rightarrow \rho_{\text{внутр}} = 0$  (все заряды на поверхности проводника)

4. Вблизи поверхности  $\Sigma$  проводника (снаружи):

$$\begin{cases} \vec{E} \perp \Sigma \\ |\vec{E}| = \frac{\sigma_{\text{пов}}}{\epsilon_0} \end{cases}$$

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_{ab} (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \Sigma$$

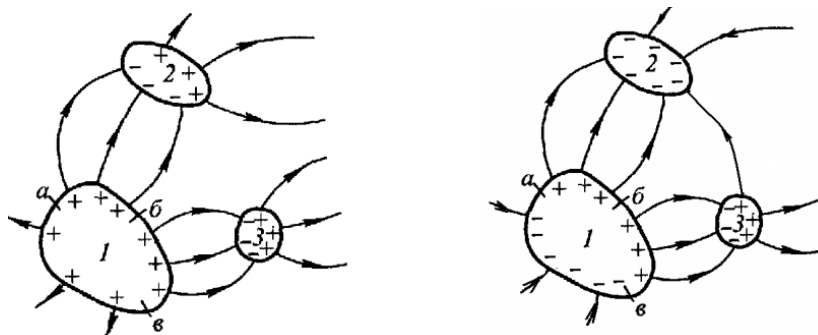
$$l \gg h: E_{\text{пов}} = \frac{\sigma_{\text{пов}}}{2\varepsilon_0}, \quad E_2 = 0 = E_{\text{кус}} - E_{\text{ост}},$$

$$E_1 = \frac{\sigma_{\text{пов}}}{2\varepsilon_0} \cdot 2 = \frac{\sigma_{\text{пов}}}{\varepsilon_0}$$

$$\delta F = E_{\text{ост}} \sigma_{\text{пов}} dS = \frac{\sigma_{\text{пов}}^2}{2\varepsilon_0} dS$$

$$\frac{\delta F}{dS} = \frac{\sigma_{\text{пов}}^2}{2\varepsilon_0}$$

5. Линейная связь между зарядами проводников и потенциалами.



$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2 + \dots + \alpha_{1N}Q_N \\ \dots \\ \varphi_N = \alpha_{N1}Q_1 + \alpha_{N2}Q_2 + \dots + \alpha_{NN}Q_N \end{cases}$$

$\varphi$  – нормирован:  $\varphi(\infty) \equiv 0$

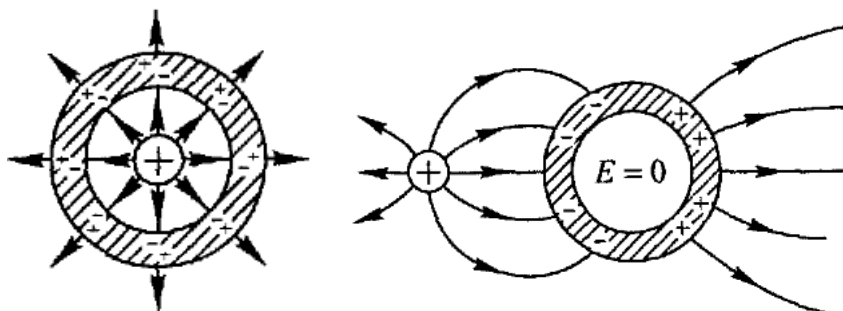
$\alpha_{ij}$  – потенциальные коэффициенты, зависят только от размеров, формы и взаимного расположения проводников.

$$Q_{ij} = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \varphi_j$$

$\beta_{ij}$  – емкостные коэффициенты



## 6. Электростатическая экранировка.

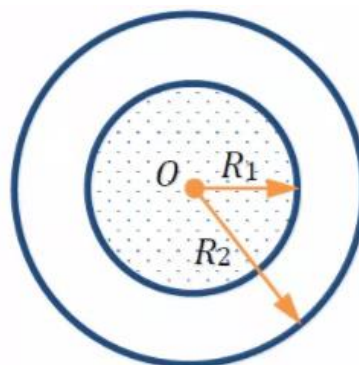


### Конденсаторы

Емкость конденсатора:

$$C \equiv \frac{Q}{|\varphi_+ - \varphi_-|}$$

### Сферический воздушный конденсатор



В центре заряженной сферы:

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

По теореме Гаусса:

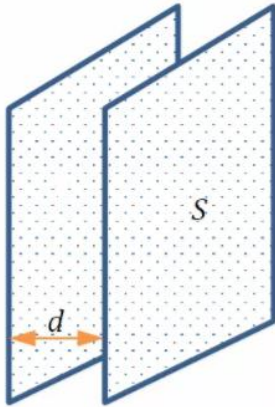
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_2} \right\} = 0$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{Q}{R_1} + \frac{Q}{R_2} \right\}$$

$$C = \frac{Q}{|\varphi_1 - \varphi_2|} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

Частный случай – плоский конденсатор



$$\begin{cases} R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty \\ R_2 - R_1 = d = \text{const} \end{cases} \Rightarrow R_1 \approx R_2 \approx R, \quad S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$$

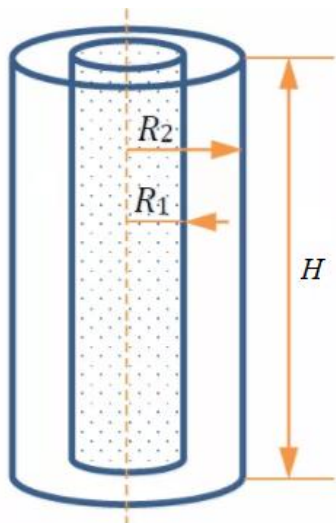
$$\boxed{C \rightarrow \frac{\epsilon_0 S}{d}}$$

Другой способ:

$$d \ll \sqrt{S} \sim l_{\text{хар}}, \quad E_{\text{внутр}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{E_{\text{внутр}} d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

## Лекция 5

### Цилиндрический воздушный конденсатор



$$R_2 - R_1 \ll R_1$$

По теореме Гаусса:

$$E \cdot 2\pi r \Delta z = \frac{\sigma \cdot 2\pi R_1 \Delta z}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r}$$

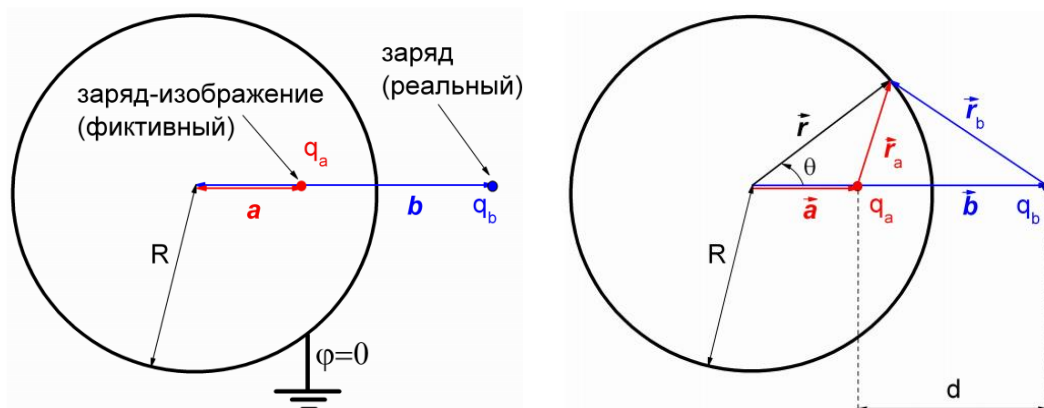
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\sigma 2\pi R_1 H}{\varphi_1 - \varphi_2} \Rightarrow \boxed{C = 2\pi \epsilon_0 \frac{H}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

### Метод изображений в электростатике

Решение «методом изображений» состоит в подборе фиктивных зарядов вне рассматриваемой области, таких, что их совместное с реальными зарядами поле обеспечивает заданные граничные условия (потенциал на границе).

### Заземленная сфера и точечный заряд вне сферы

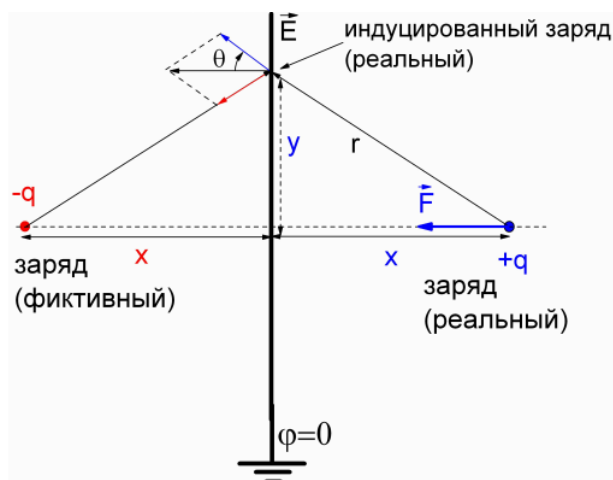


$$\begin{cases} R^2 = ab \\ q_a^2 b = q_b^2 a \end{cases} \Rightarrow q_a = -\frac{q_b R}{b}$$

Поле  $q_a, q_b \Leftrightarrow$  поле  $q_b$  + заземленная сфера.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{(b-a)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_b^2 R b}{(b^2 - R^2)^2}$$

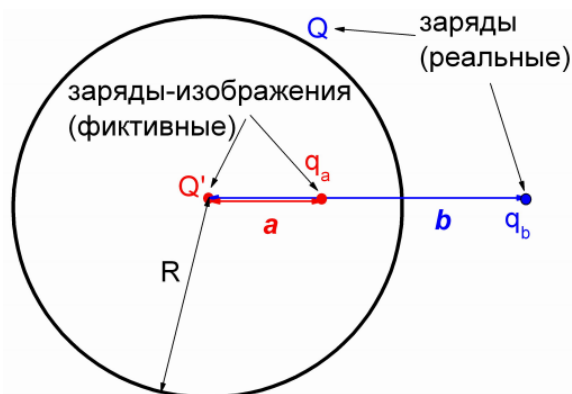
### Заземленная плоскость



$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4x^2}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q \cos \theta}{r^2} = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0}$$

## Незаземленная сфера



1. Сфера не заряжена.

$$\varphi_0 = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow Q' = q_b \frac{R}{b}$$

$$\varphi_0 + \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 R} = 0 \Rightarrow q_a = -q_b \frac{R}{b} = -Q'$$

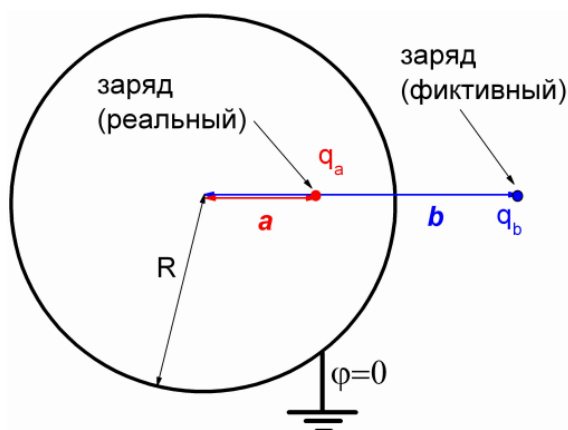
2. Сфера заряжена.

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_b}{b} + \frac{Q}{R} \right) = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad Q' = Q + q_b \frac{R}{b}$$

Замечание: Одноименно заряженные тела могут притягиваться:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Qq_b}{b^2} + \frac{q_b^2 R}{b^3} - \frac{q_b^2 R b}{(b^2 - R^2)^2} \right)$$

## Заземленная сфера и точечный заряд внутри сферы



$$R^2 = ab, \quad q_b = -\frac{q_a R}{b}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{(b-a)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a^2 R a}{(a^2 - R^2)^2}$$

Если сфера не заземлена, формула останется прежней. Правильный потенциал на сфере можно обеспечить сферическим слоем (сферический фиктивный заряд).

### Электрическое поле в диэлектриках

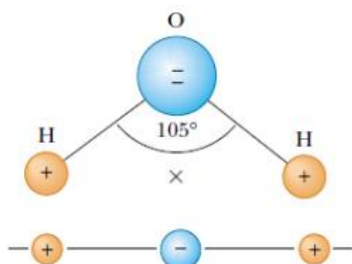
Типы заряда:

- свободный ( $\Delta r > 10^{-6}$  м)
- связанный ( $\Delta r \sim 10^{-10}$  м)

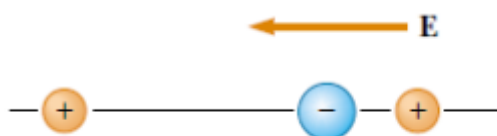
В идеальном диэлектрике нет свободных зарядов.

### Примеры элементарных диполей

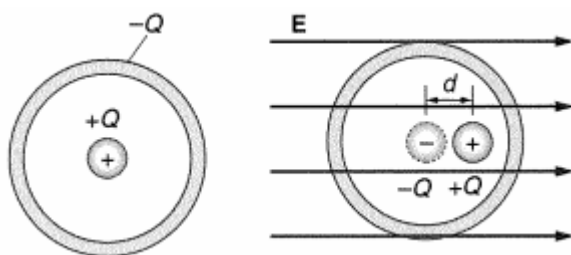
1. Молекула воды (ориентационная поляризация)



2. Молекула CO<sub>2</sub> (ионная поляризация)



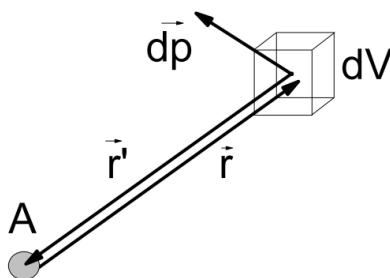
3. Атом водорода (электронная поляризация)



Поляризация – изменение состояния диэлектрика во внешнем электростатическом поле, которое выражается в появлении или упорядочивании электрического дипольного момента диэлектрика.

Вектор поляризации есть объемная плотность дипольных моментов:

$$\vec{P} = \frac{1}{\delta V} \sum_i \vec{p}_i$$



$$d\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(d\vec{p} \cdot \vec{r}')}{r'^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(d\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad d\vec{p} = \vec{P}dV \Rightarrow d\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{P} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \right) dV$$

$$\left[ \operatorname{div} \left( \vec{P} \cdot \frac{1}{r} \right) = \left( \vec{P} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \right) + \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{P} \right]$$

$$d\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \operatorname{div} \left( \vec{P} \cdot \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \operatorname{div} (\vec{P}) \right) dV$$

По теореме Гаусса:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \oint_{\Sigma} \left( \frac{\vec{P}}{r} \cdot d\vec{S} \right) + \iiint_V \frac{(-\operatorname{div} \vec{P})}{r} dV \right\}$$

Сравним с общим решением уравнения Пуассона:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \oint_{\Sigma} \frac{\sigma dS}{r} + \iiint_V \frac{\rho}{r} dV \right\}$$

Получаем

$$\sigma_{\text{пол}} = (\vec{P} \cdot d\vec{S}), \quad \rho_{\text{пол}} = -\text{div } \vec{P}$$

$$\rho = \rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{непол}}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{непол}}}{\epsilon_0} - \frac{\text{div } \vec{P}}{\epsilon_0}$$

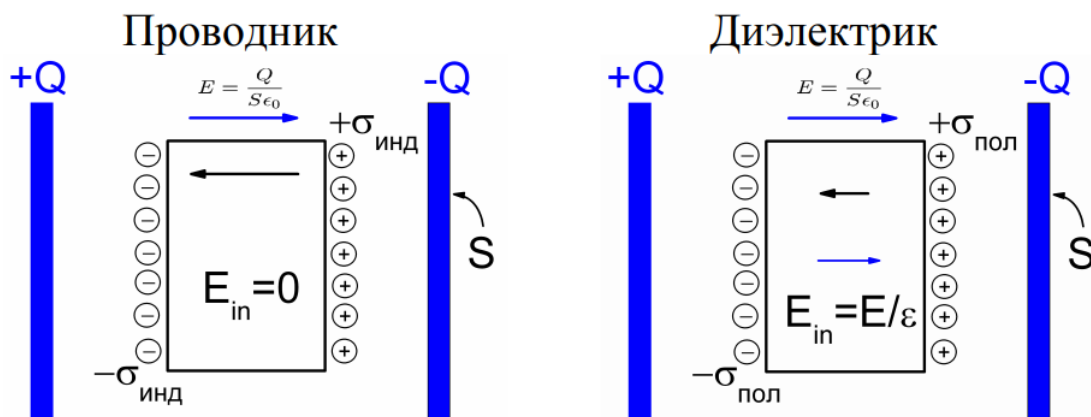
$$\text{div} \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{непол}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{непол}}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{непол}}}$$

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  – вектор электрического смещения (электрической индукции)



## Лекция 6



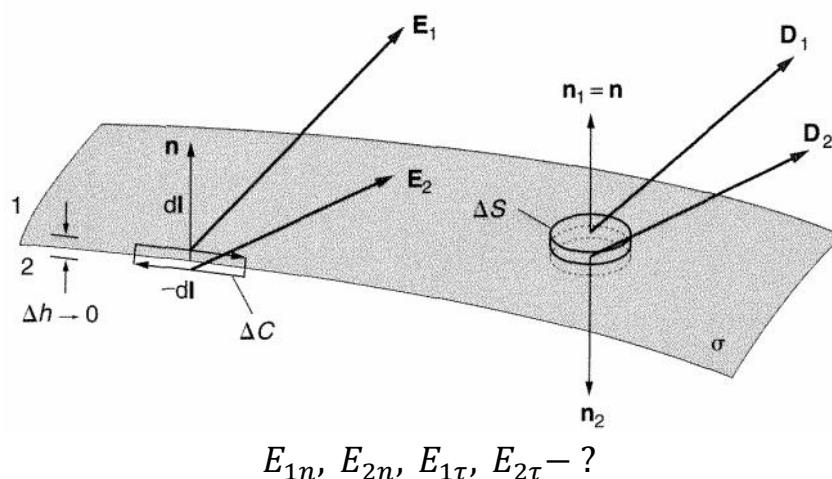
Условие электронейтральности:

$$\iiint_V \rho_{\text{пол}} dV = 0$$

Теорема Гаусса для векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{полн}}}{\epsilon_0}, \quad \oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{пол}}, \quad \oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{непол}}$$

Граничные условия для векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$



1. Для нормальных составляющих.

$$\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2, \quad |\vec{n}| = |\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$$

Теорема Гаусса:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{полн}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = E_{1n_1}S + E_{2n_2}S = (E_{n_1} - E_{n_2})S = \frac{\sigma_{\text{полн}}S}{\varepsilon_0}$$

$$E_{n_1} - E_{n_2} = \frac{\sigma_{\text{полн}}}{\varepsilon_0}$$

Аналогично:

$$P_{n_1} - P_{n_2} = -\sigma_{\text{пол}}$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma_{\text{непол}}$$

## 2. Для тангенциальных составляющих.

Теорема о циркуляции в электростатике:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$E_{1\tau}l - E_{2\tau}l = 0$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

Материальные уравнения для линейного, изотропного диэлектрика ( $\varepsilon = \text{const}$ ):

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{P} &= \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}\end{aligned}$$

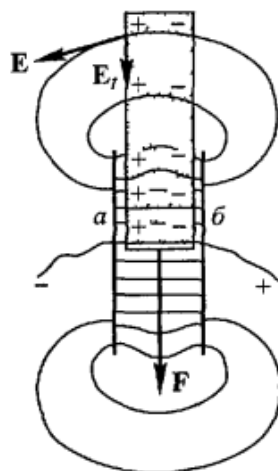
$\chi$  – диэлектрическая восприимчивость

Для  $\vec{D}$  и  $\vec{P}$ :

$$\frac{\vec{D}_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{P_{1\tau}}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{P_{2\tau}}{\varepsilon_2 - 1}$$

Втягивание диэлектрика в неоднородное поле



Связь неполяризационных и поляризационных зарядов в однородных изотропных средах

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{пол}}$$

$$\text{однородная поляризация} \leftrightarrow \vec{P} = \text{const} \Rightarrow \rho_{\text{пол}} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{непол}})$$

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}}{\varepsilon - 1} \right) = \rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{непол}}$$

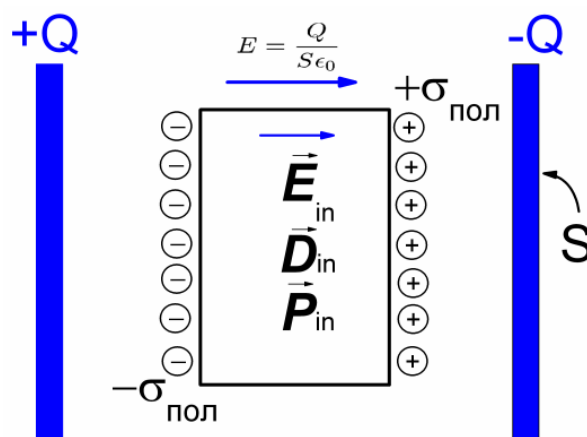
$$\frac{1}{\varepsilon - 1} \operatorname{div} \vec{P} = \rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{непол}}$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{пол}} \Rightarrow \rho_{\text{пол}} \left( -\frac{1}{\varepsilon - 1} - 1 \right) = \rho_{\text{непол}}$$

$$\rho_{\text{пол}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho_{\text{непол}}$$

Если в диэлектрике нет сторонних объемных зарядов, то поляризационные заряды находятся только на поверхности.

### Изотропная однородная диэлектрическая пластина в однородном поле



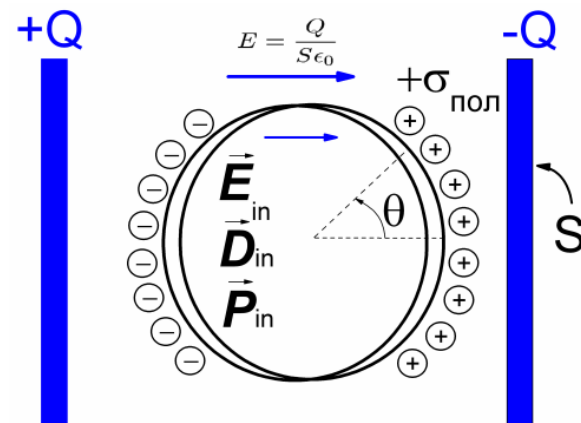
$\vec{E}_0$  – внешнее поле

$\vec{E}_{in}$  – поле в диэлектрике

$$\vec{E}_{in} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P}) = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}$$

$$\sigma_{пол} = P_{in} = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_{in} = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)}{\epsilon} E_0$$

### Изотропный однородный диэлектрический шар в однородном поле



Поле заряженного шара (теорема Гаусса):

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

Поляризованный шар можно представить себе как два разноименных однородно заряженных (не диэлектрических!) шара, центры которых смещены на небольшое расстояние  $l$ .

$$\vec{p} = Q\vec{l} = \rho V\vec{l}$$

$$\vec{P} \equiv \frac{\vec{p}}{V} = \rho \vec{l}$$

$$\vec{E}_{\text{пол}} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} - \frac{\rho(\vec{r} + \vec{l})}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{пол}} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}_{in} \Rightarrow \vec{E}_{in} = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon - 1}{3}\vec{E}_{in}$$

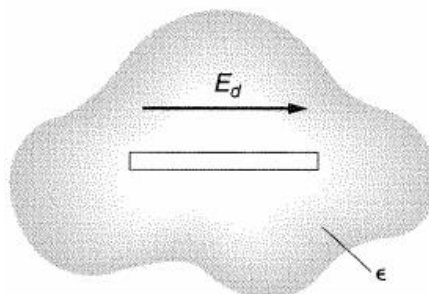
$$\vec{E}_{in} = \frac{3}{\epsilon + 2}\vec{E}_0 < \vec{E}_0$$

$$\vec{P} = \frac{3(\epsilon - 1)}{\epsilon + 2}\epsilon_0\vec{E}_0$$

$$\epsilon \rightarrow 1 \Rightarrow \vec{E}_{in} \rightarrow \vec{E}_0, \vec{P} \rightarrow 0$$

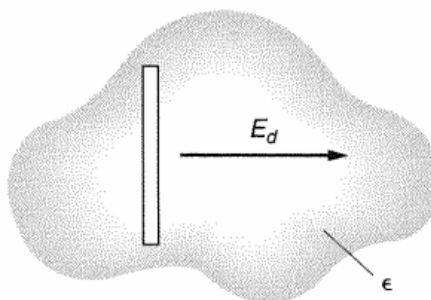
$$\epsilon \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{E}_{in} \rightarrow 0, \vec{P} \rightarrow 3\epsilon_0\vec{E}_0, \vec{E}_{\text{пол}} = -\vec{E}_0$$

Граничные условия и экспериментальное измерение  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  внутри диэлектрика  
Полость в виде иглы, направленной вдоль поля:



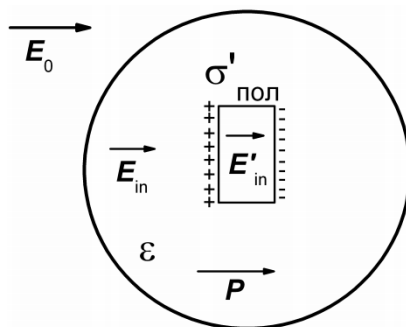
$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0$$

Полость в виде диска перпендикулярного полю:



$$\vec{D}_{in} = \vec{D}_0 \Rightarrow \vec{E}_{in} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}$$

Диэлектрический шар с малой плоской полостью:



$$\vec{E}_{in} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0, \quad \vec{P}_{in} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0$$

$$\vec{E}'_{in} = \vec{E}_{in} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 \geq \vec{E}_0$$

Фактор формы диэлектрика

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{пол} = \vec{E}_0 - \frac{N}{\varepsilon_0} \vec{P}$$

$N$  – фактор формы

$N = 0 \leftrightarrow$  бесконечная пластина вдоль  $\vec{E}_0$

$N = 1 \leftrightarrow$  бесконечная пластина перпендикулярна  $\vec{E}_0$

$N = \frac{1}{3} \leftrightarrow$  однородный шар

Энергия и силы в электростатическом поле

Взаимодействие точечного заряда и точечного диполя

Для точечного заряда:

$$\vec{F}_q = q\vec{E}$$

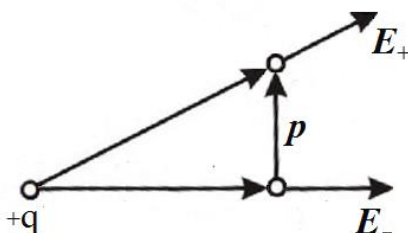
Для точечного диполя:

$$\vec{F} = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} \delta l = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$$

$$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$$



## Лекция 7



$$F_x = q(E_{+x} - E_{-x}) = q(\nabla E)_x dx$$

$$F_y = q(\nabla E)_y dy$$

$$F_z = q(\nabla E)_z dz$$

$$\vec{p} = q d\vec{l}, \quad d\vec{l} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}}$$

Сила, действующая на диэлектрик

$$\varepsilon = \text{const}$$

$$d\vec{p} = \vec{P}dV$$

$$d\vec{F} = (d\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} dV = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)(\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} \delta V = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{2} \nabla E^2 dV$$

$$\vec{F} = \iiint_V d\vec{F}$$

$\vec{F}$  – пондеромоторная сила, направлена в сторону увеличения  $|\vec{E}|$ :

$$\boxed{\frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2} \nabla E^2}$$

Сила, действующая на проводник

$$\delta q = \sigma dS$$

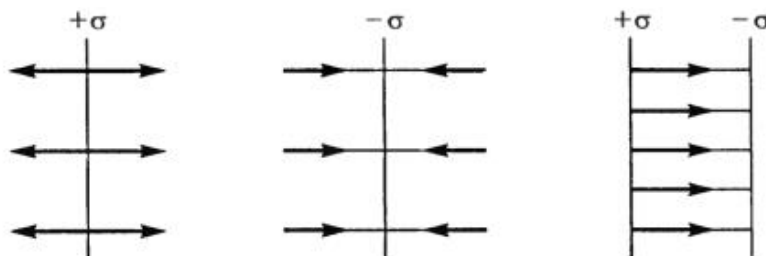
$$dF = \delta q \cdot E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS$$

$$\boxed{\frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$



(поверхностная плотность силы)

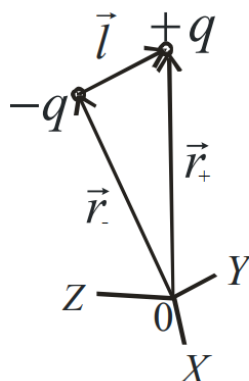
Пример. Сила, действующая на обкладки плоского конденсатора



$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$F_+ = (+Q) \cdot E_{-Q} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

Момент, действующий на электрический диполь

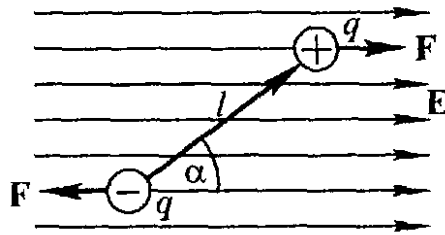


$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

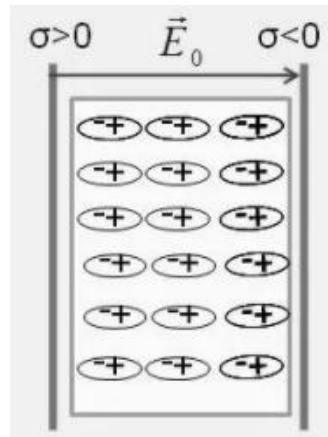
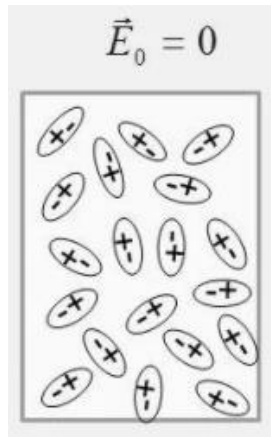
$$\vec{M}_q = [\vec{r}_+ \times \vec{F}_+] + [\vec{r}_- \times \vec{F}_-]$$

$$\vec{E} = const \Rightarrow \vec{F}_{дип} = 0$$

$$\vec{M}_{дип} = q[\vec{r}_+ \times \vec{E}] + q[\vec{r}_- \times \vec{E}] = q[(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E}] = [q\vec{l} \times \vec{E}]$$



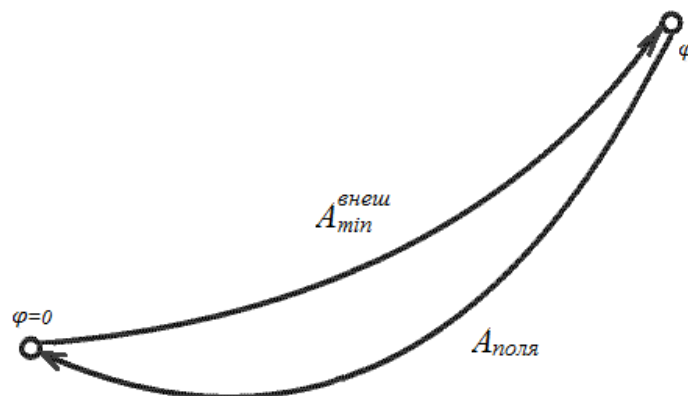
$$\vec{M}_{\text{дип}} = [\vec{p} \times \vec{E}] = pE \sin \alpha$$



$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{p}_i \neq 0$$

Энергия системы зарядов в электростатическом поле



Энергия точечного заряда:

$$W = q\varphi$$

$$\varphi = \frac{A_{\text{внеш}}}{q} = \frac{A_{\text{поля}}}{q}$$

Энергия системы двух точечных зарядов на расстоянии  $r$ :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$W_1 = q_2 \varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$W_2 = q_1 \varphi_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = W_1 = W$$

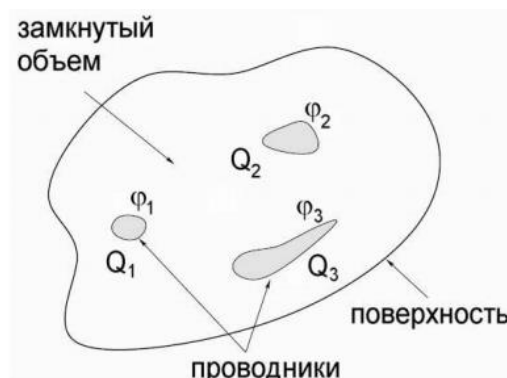
(общая энергия взаимодействия)

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{2 \rightarrow 1} + q_2 \varphi_{1 \rightarrow 2}) \equiv \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2)$$

Энергия системы  $N$  точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$$

Энергия системы  $N$  проводников в электростатическом поле



$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_1 \rightarrow \infty} \delta Q_{ij} \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \sum_{j=1}^N \delta Q_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i Q_i$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i Q_i$$

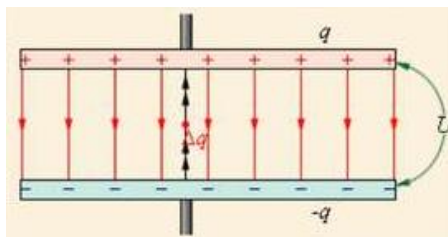
$$\varphi_i = \varphi_i^{\text{собств}} + \varphi_i^{\text{взаим}}$$

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \varphi_i^{\text{собств}} q_i + \sum_{i=1}^N \varphi_i^{\text{взаим}} Q_i \right\}$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i^{\text{собств}} q_i - \text{собственная энергия } i \text{ проводника}$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i^{\text{взаим}} Q_i - \text{энергия взаимодействия проводников}$$

Энергия плоского конденсатора



$$W = \frac{1}{2}(Q\varphi_+ - Q\varphi_-) = \frac{1}{2}QU, \quad U = Ed$$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}}$$

Работа сторонних сил по перенесению заряда от «-» к «+»:

$$\Delta W = \delta q(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$A_{\text{стор}} = \sum \delta q \Delta \varphi = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Если конденсатор заполнен диэлектриком:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

По теореме Гаусса:

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$A_{\text{стор}} = \sum S \delta D \cdot d \cdot E = d \cdot S \sum E \delta D = V \int E \delta D$$

Наиболее общая формула для изменения энергии электрического поля:

$$\Delta W_{\text{эл}} = \delta \int (\vec{E} \cdot \delta \vec{D})$$

$$W = \frac{QU}{2}, \quad E = \frac{Q}{S\epsilon_0}, \quad U = Ed \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sd$$

Объемная плотность энергии электрического поля в вакууме:

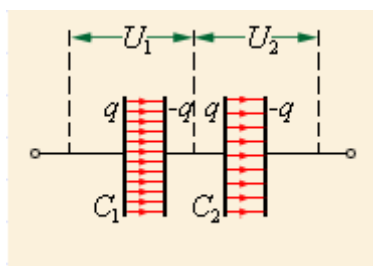
$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

В общем случае:

$$w = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{2}$$

### Соединения конденсаторов

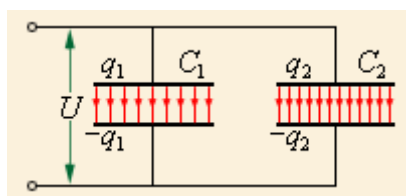
- Последовательное



$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{\text{эфф}}}$$

$$\frac{1}{C_{\text{эфф}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Параллельное

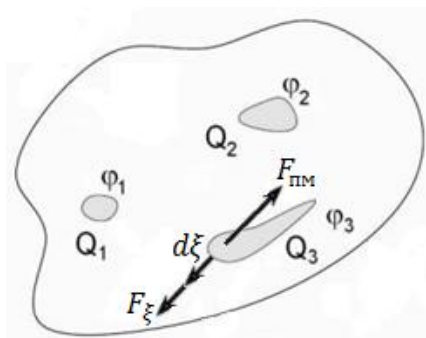


$$U_1 = U_2 = U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = CU_1 + CU_2 = (C_1 + C_2)U = C_{\text{эфф}}U$$

$$C_{\text{эфф}} = C_1 + C_2$$

Связь пондеромоторных сил, действующих на проводники, и энергии



$$\Delta W_{\text{пот}} + \Delta W_{\text{кин}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}$$

В электростатике:

$$\Delta W_{\text{кин}} = 0, \quad A_{\text{внутр}} = \frac{\delta W_{\text{тепл}}}{\delta t} = I^2 R = 0 \Rightarrow \Delta W = A_{\text{внеш}}$$

$$\delta A_{\text{внеш}} = F_{\xi} d\xi + \sum_i \varphi_i \delta q_i$$

$$\delta W = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \delta q_i \varphi_i + \sum_{i=1}^N \delta \varphi_i q_i \right)$$

$$1. \quad q_i = \text{const}$$

$$-F_{\text{пм}} d\xi = F_{\xi} d\xi = \Delta W$$

$$F_{\text{пм}} = - \left. \frac{dW}{d\xi} \right|_Q$$

$$2. \quad \varphi_i = \text{const}$$

$$\delta W_{\text{пот}} = F_{\xi} d\xi + 2\delta W_{\text{пот}}$$

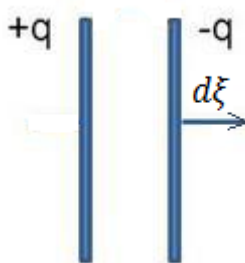
$$\delta W_{\text{ПОТ}} = -F_{\xi} d\xi$$

$$F_{\text{ПМ}} = \left. \frac{dW}{d\xi} \right|_{\varphi}$$

## Лекция 8

Вычислим силу  $F_\xi$ , действующей на обкладки плоского конденсатора, двумя способами.

1.  $Q = \text{const}$



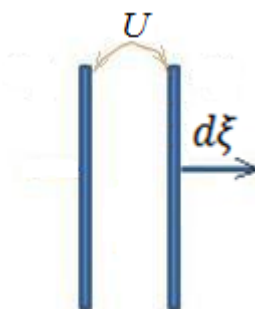
$$E_{in} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}, \quad w = \frac{\varepsilon_0 E_{in}^2}{2}, \quad W_{\text{пот}} = wV$$

$$\Delta V = S(d + d\xi) - Sd = S \cdot d\xi$$

$$\Delta W_{\text{пот}} = dW_{\text{пот}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{S\varepsilon_0} \right)^2 S d\xi = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} d\xi > 0$$

$$\frac{dW_{\text{пот}}}{d\xi} = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{F_\xi = -\frac{Q^2}{2S\varepsilon_0}}$$

2.  $U = \text{const}$



$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad W_{\text{пот}} = \frac{CU^2}{2}$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 S}{d + d\xi} - \frac{\varepsilon_0 S}{d} = -\varepsilon_0 S \frac{d\xi}{d(d + d\xi)} \cong -\frac{\varepsilon_0 S d\xi}{d^2}$$

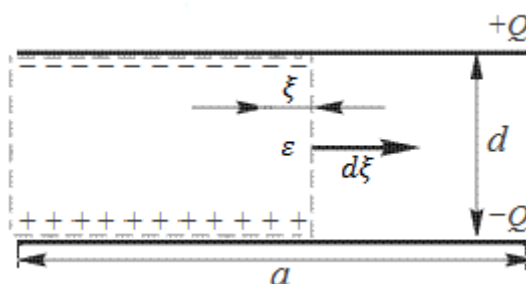


$$dW_{\text{пот}} = \frac{U^2}{2} dC < 0$$

$$F_{\xi} = \frac{dW_{\text{пот}}}{d\xi} = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} = \frac{C^2 U^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

Энергетический метод расчета пондеромоторных сил в присутствии диэлектрика

Энергия диэлектрика должна быть учтена в выражении для потенциальной энергии.



$$W_{\text{пот}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}, \quad Q = \text{const}$$

$$C_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \xi a}{2}, \quad C_{\text{в}} = \frac{\varepsilon_0 (a - \xi) a}{d}$$

$$C_{\text{эфф}} = C_{\varepsilon} + C_{\text{в}} = \frac{\varepsilon_0 a}{2} (\varepsilon \xi + a - \xi)$$

$$W_{\text{пот}} = \frac{Q^2}{2C_{\text{эфф}}} = \frac{Q^2 d^2}{2\varepsilon_0 a (a + \xi(\varepsilon - 1))}$$

$$F_{\xi} = -\left. \frac{dW_{\text{пот}}}{d\xi} \right|_Q = -\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a} \left( -\frac{\varepsilon - 1}{(a + \xi(\varepsilon - 1))^2} \right) = \frac{Q^2 d (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon_0 a (a + \xi(\varepsilon - 1))^2}$$

(диэлектрик втягивается в конденсатор)

Для элемента диэлектрика:

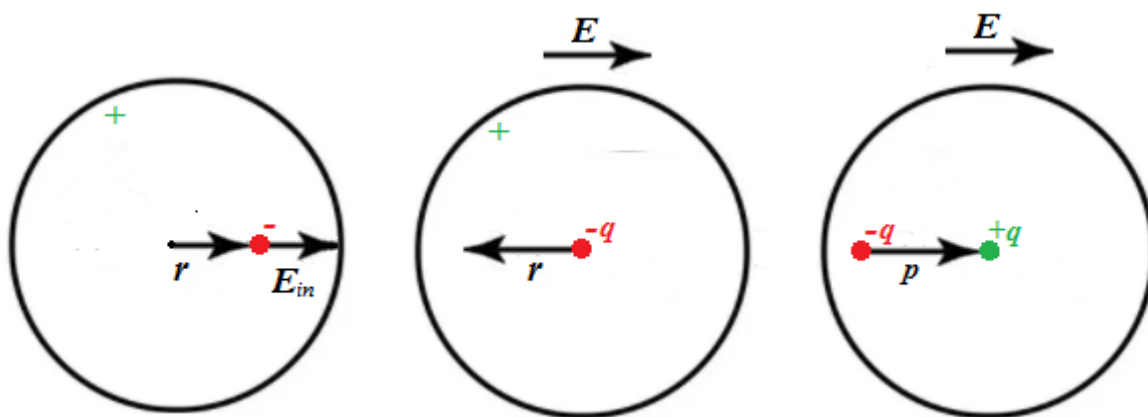
$$dW_{\text{пот}} = d \left( \frac{CU^2}{2} \right) = \frac{U^2}{2} dC, \quad U = \text{const}$$

$$F = \left. \frac{dW_{\text{пот}}}{d\xi} \right|_U = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\xi} \quad \leftrightarrow \quad F = - \left. \frac{dW_{\text{пот}}}{d\xi} \right|_Q = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{d\xi}$$

$$dW_{\text{пот}} = d\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = -\frac{Q^2}{2C^2} dC, \quad Q = \text{const}$$

Энергия неполярных диэлектриков

Модель атома Томсона:



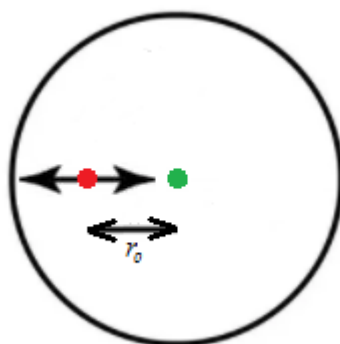
$$\vec{E}_{in} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

Поляризация при появлении электростатического поля:

$$p = qr, \quad \vec{P} = \frac{1}{\delta V} \sum_i \vec{p}_i$$

$p = \alpha E$  – атомная поляризуемость

В равновесии:



$$Eq = E_{in}q \Rightarrow E = E_{in} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$p = \frac{\alpha \rho r}{3\epsilon_0} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{\alpha r}{3\epsilon_0} = \frac{\alpha p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Rightarrow \alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3$$

$$\boxed{\vec{p} = \alpha \vec{E}}$$

Работа внешнего поля, затрачиваемая на образование диполя

$$\delta A = F \delta r = \left( q \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) dr$$

$r_0 \leftrightarrow$  равновесное состояние

$$A = \int_0^{r_0} F dr = \frac{q\rho}{3\epsilon_0} \int_0^{r_0} r dr = \frac{q\rho}{3\epsilon_0} \frac{r_0^2}{2} = \frac{qr_0}{2} E_{\text{равн}} = \frac{pE_{\text{равн}}}{2}$$

Энергия, затрачиваемая на образование диполя:

$$W_{\text{дип}}^{\text{внутр}} = \frac{pE}{2}$$

Энергия диполя во внешнем поле известна (перемещение из бесконечности в данную точку):

$$W_{\text{дип}}^{\text{внеш}} = -pE$$

$$W = \frac{pE}{2} - pE = -\frac{pE}{2}$$

Рассмотрим диэлектрическую пластину.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$W = \frac{(\vec{D} \cdot \vec{E})}{2} V = \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{EP}{2} \right) V$$

Замечание:

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$$

Формула несправедлива, так как не учитывается работа по созданию поляризации.

## Энергия полярных диэлектриков. Формула Клаузиуса – Моссотти

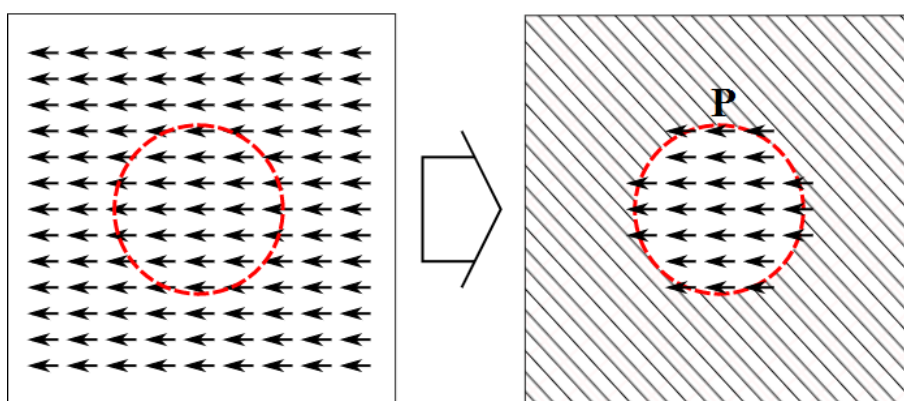
При отсутствии среды диполь будет вращаться бесконечно долго. При наличии поля – поляризуется вдоль вектора  $\vec{E}$ .

При поляризации полярного диэлектрика при  $T = const$  должно выделяться тепло, при  $S = const$  произойдет нагрев диэлектрика.

$\alpha$  – микроскопическая характеристика

$\epsilon$  – макроскопическая характеристика

Нужно найти связь между  $\alpha$  и  $\epsilon$ . Используем метод сферы Лоренца.



$$\vec{E}_P = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E} = \vec{E}_0$$

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{\text{лок}}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E} = n \vec{p}, \quad n - \text{концентрация диполей}$$

$$\vec{P} = n \alpha \epsilon_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E} = n \alpha \epsilon_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \Rightarrow \epsilon - 1 = n \alpha \left( 1 + \frac{\epsilon - 1}{3} \right)$$

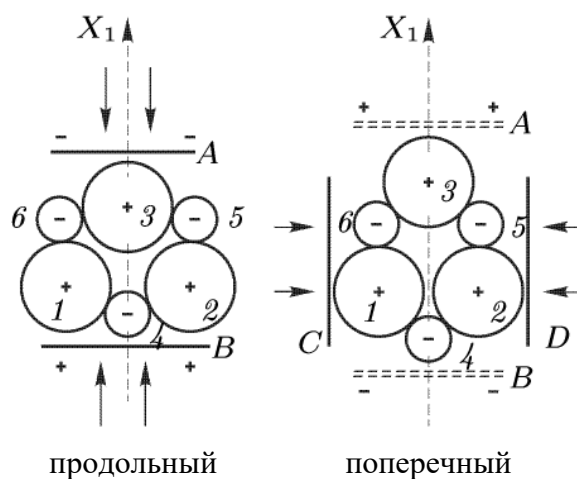
$$\boxed{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n \alpha}{3}}$$

Если вещество состоит из частиц нескольких сортов, то

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N n_i \alpha_i$$

Формула справедлива только для неполярных диэлектриков!

Пьезоэлектрики и пьезоэффект



Виды пьезоэлектриков: кварц, турмалин, мегнетова соль, титанат бария

Свойства пьезоэлектриков:

1. Ионные кристаллы.
2. Отсутствие центра симметрии.
3. Наличие полярных осей.
4. Линейность.
5. При изменении знака деформации заряды меняют знак.

## Лекция 9

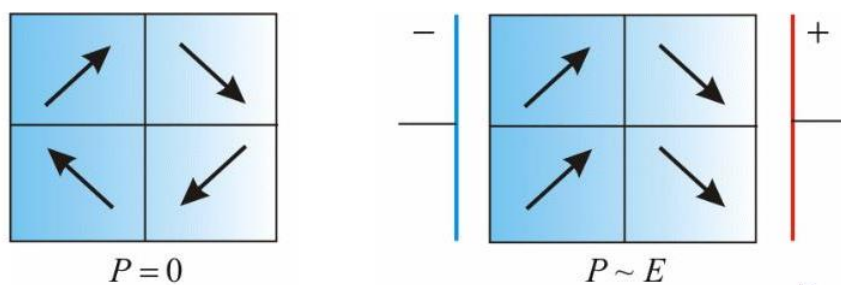
### Классификация диэлектриков

- Неполарные (жидкости, газы)
- Полярные (жидкости, газы)
- Сегнетоэлектрики
- Пьезоэлектрики
- Пьезоэлектрики
- Электреты

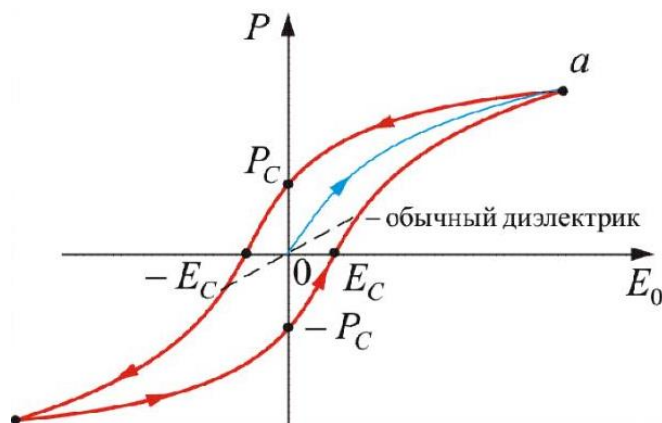
Полярные диэлектрические жидкости: вода, спирт, эфиры.

Сегнетоэлектрики – вещества, у которых в некотором температурном интервале существует спонтанная поляризованность  $\vec{P}$ .

При определенных условиях дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу в небольших областях кристалла, называемых доменами.



$$\vec{P}_{\text{полн}} = \sum_i \vec{P}_i = 0$$



$P_C$  – остаточная поляризованность,  $E_C$  – коэрцитивная сила

Пирозлектрики – сегнетоэлектрики без разбиения на домены.

Электреты – аморфные материалы (смолы, полимеры), имеющие остаточную поляризованность после удаления внешнего электрического поля, но в них нет спонтанной поляризованности (это не сегнетоэлектрики).

Связь  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$

1.  $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$  – полярные, неполярные

2.  $\vec{P} = \varepsilon_0\hat{\chi}\vec{E}$

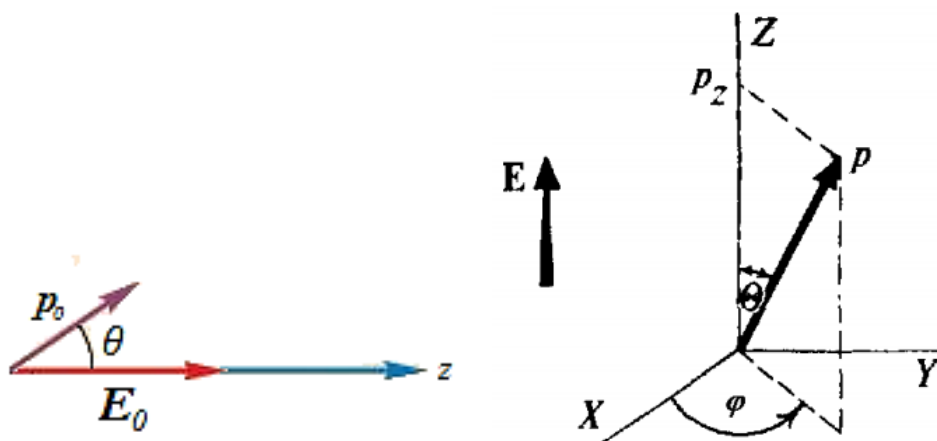
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

3. Для сегнетоэлектриков  $P(E)$  – неоднозначная функция.

$$\vec{P} = \varepsilon_0\varepsilon(\vec{E})\vec{E}, \quad \varepsilon(E \rightarrow 0) \sim 10^4$$

$$\vec{P} \cong \vec{P}_0 + \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \quad \vec{P}_0 \text{ – замороженная поляризация}$$

## Фактор Больцмана



$$f(W) = C e^{-\frac{W}{kT}}$$

$$W = -p_0 E_0 \cos \theta, \quad \beta = \frac{p_0 E_0}{kT} \Rightarrow f(W) = C e^{\frac{\beta \cos \theta}{kT}}$$

$$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \leftrightarrow d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Условие нормировки:

$$\int_{\Omega} f(W) d\Omega = 1$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} C e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta = 1$$

$$\frac{2\pi C}{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} e^{\xi} d\xi = 1$$

$$\frac{2\pi C}{\beta} (e^{\beta} - e^{-\beta}) = 1, \quad \text{sh } \beta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}$$

$$\frac{4\pi C}{\beta} \text{sh } \beta = 1$$

$$\langle p_z \rangle = \int_{\Omega} p_0 \cos \theta f(W) d\Omega = p_0 C \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta e^{\beta \cos \theta} d\theta$$

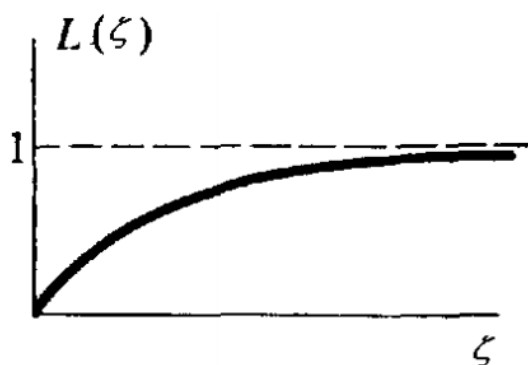


$$I(\beta) \equiv \int_0^{\pi} \sin \theta e^{\beta \cos \theta} d\theta = \frac{2 \operatorname{sh} \beta}{\beta}$$

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta e^{\beta \cos \theta} d\theta = \frac{2 \operatorname{ch} \beta}{\beta} - \frac{2 \operatorname{sh} \beta}{\beta^2}$$

$$\langle p_z \rangle = p_0 C \cdot \frac{4\pi}{\beta} \left( \operatorname{ch} \beta - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} \right) = p_0 \left( \operatorname{cth} \beta - \frac{1}{\beta} \right) = p_0 \mathcal{L}(\beta)$$

$\mathcal{L}(\beta)$  – функция Ланжевена



$$\mathcal{L}(\beta) \rightarrow 1 \text{ при } \beta \rightarrow \infty$$

Если  $\beta \ll 1$ :

$$\mathcal{L}(\beta) \cong \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^3}{45}$$

$$\langle p_z \rangle \cong \frac{p_0 \beta}{3} = \frac{p_0^2 E}{3kT} = \alpha_{\text{ориент}} \varepsilon_0 E \Rightarrow \alpha_{\text{ориент}} = \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$$

$$\chi = n \alpha_{\text{ориент}} = \frac{n p_0^2}{3 \varepsilon_0 kT}$$

$$\chi = \frac{C}{3kT}, \quad p_0 E \ll kT$$

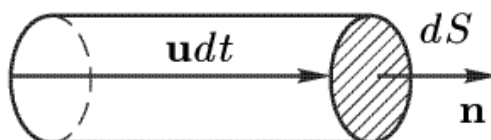
(закон Кюри для диэлектрической восприимчивости полярных диэлектриков)

### Постоянный электрический ток

Постоянный (стационарный)  $\leftrightarrow$  не зависит от времени

Условие стационарности: электрическое поле в системе постоянных токов такое же, как и в электростатике.

электрический ток  $\leftrightarrow$  поток частиц



$$dN = n \cdot v dt \cdot S, \quad \delta Q = q dN$$

$$I = \frac{\delta Q}{dt} = n v q S$$

$$j = \frac{I}{S} = n q v \leftrightarrow \vec{j} = n q \vec{v}$$

$\vec{v}$  – скорость упорядоченного движения (скорость дрейфа)

Электрический ток – направленное движение заряженных частиц.

Проводник можно считать линейным, если  $l \gg \sqrt{S}$ .

Ток создается зарядами на поверхности проводника.

Где может существовать электрический ток?

1. вакуум (электроны)
2. электролиты (ионы)
3. металлы и полупроводники (электроны)

### Модель вязкой среды

Уравнение движения:

$$m \frac{dv}{dt} = -k v + q E$$

$$v = v_0 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{qE}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \leftrightarrow v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{qE\tau}{m} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$v_0$  – начальная скорость,  $\tau = \frac{m}{k}$  – время релаксации

$$v(0) = v_0, \quad v(\infty) = v_{\text{др}} = \frac{qE}{m} \tau = \text{const} \Rightarrow \dot{v}(\infty) = 0$$

$$j = n q v_{\text{уст}} = \frac{n q^2}{m} \tau E = \sigma E$$

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$\sigma$  – коэффициент идеальной электропроводности

$$\sigma = \frac{nq^2}{m} \tau$$

## Лекция 10

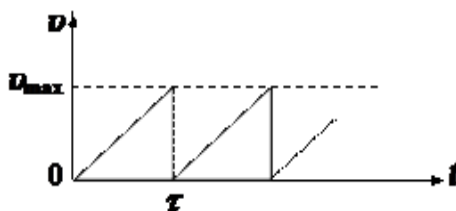
### Модель свободного пробега Друде – Лоренца

В электрическом поле электроны приобретают направленное движение против поля и двигаются с ускорением:

$$ma = qE$$

$$v_{\text{ср}} = a\tau_{\text{св}} = \frac{qE}{m}\tau_{\text{св}}$$

$\tau_{\text{св}}$  – среднее время свободного пробега



$$\sigma = \frac{nq^2}{m}\tau_{\text{св}}$$

### Закон Ома для однородного участка цепи

В линейном проводнике  $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow$  линии тока  $\parallel \vec{E}$ .

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = El$$

$$I = jS = \sigma E \cdot S = \frac{\sigma US}{l} = \frac{U}{R}$$

$$\boxed{U = IR}$$

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S}, \quad \rho = \frac{m}{nq^2\tau}$$

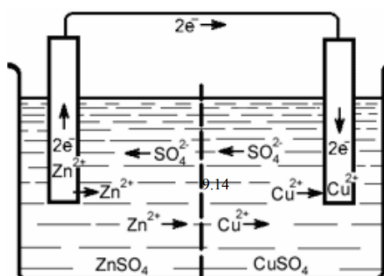
$R$  – сопротивление,  $\rho$  – удельное сопротивление

Электрическая цепь – замкнутое соединение отдельных элементов (резистор, соединяющие провода, источники ЭДС и т.д.),  $R_{\text{пр}} \ll R_{\text{рез}}$

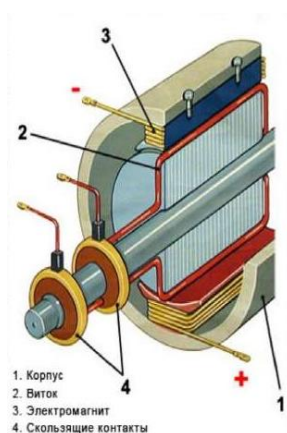
Источники ЭДС (электродвижущих сил) – устройства, совершающие ненулевую работу при перемещении заряда вдоль замкнутой цепи.

## Источники ЭДС

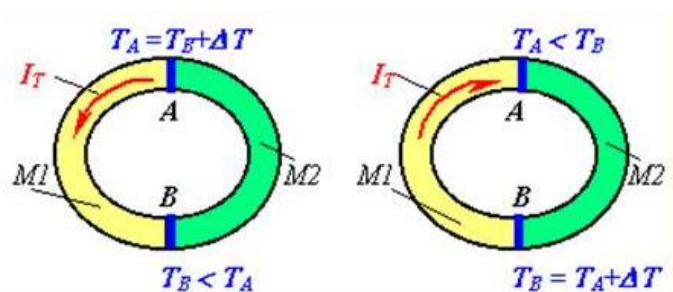
- Химические



- Индукционные

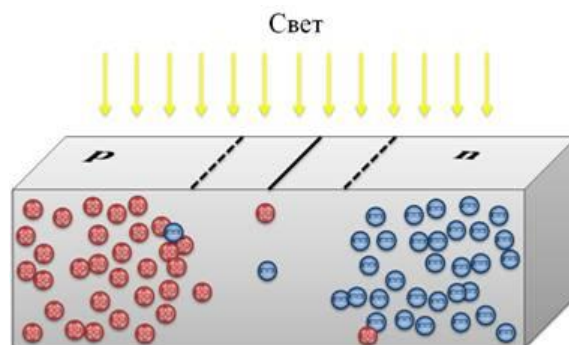


- ТермоЭДС

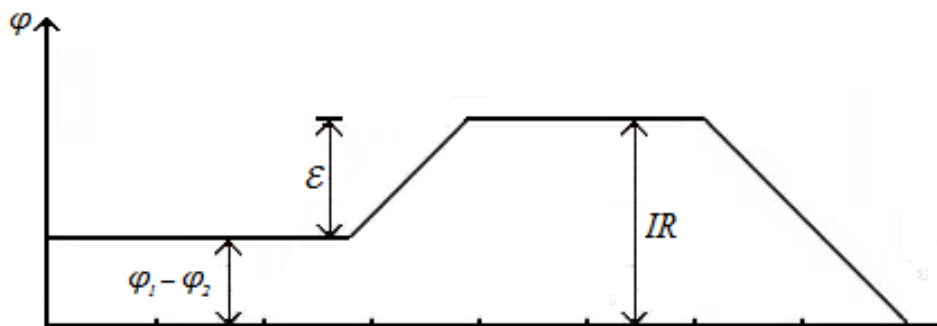
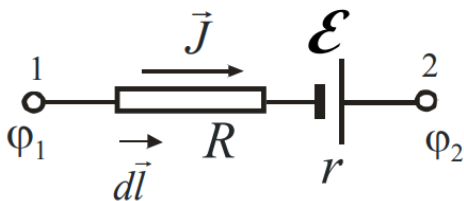


$\xi_A \neq \xi_B$  (контактная разность потенциалов)

- ФотоЭДС



### Закон Ома для неоднородного участка цепи

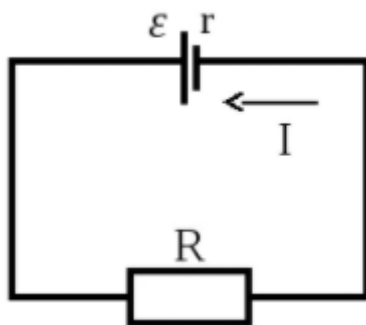


$$U_{\text{пад}} = IR$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = IR$$

Частные случаи:

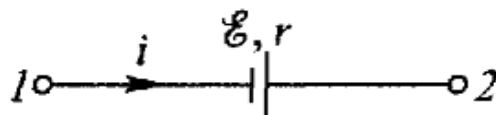
1.  $\mathcal{E} = 0 \Rightarrow U = IR$
2.  $\varphi_1 = \varphi_2$  (цепь замкнута)  $\Rightarrow \mathcal{E} = IR$



В любом источнике ЭДС имеется внутреннее сопротивление  $r$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = I(R + r)$$

Правило знаков:



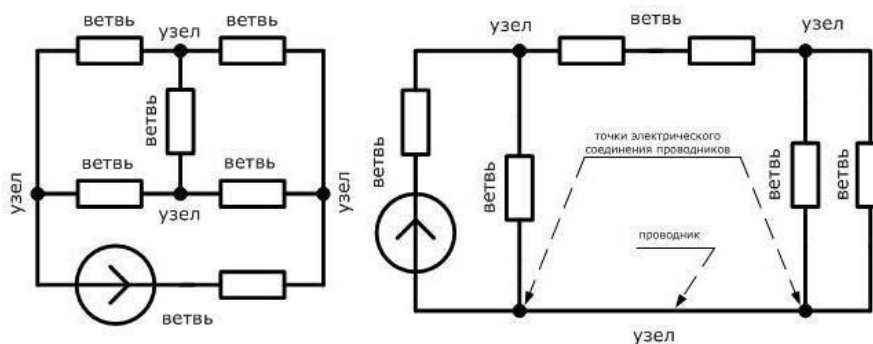
- 1) Направление обхода 1-2  $\leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2$
- 2) Источник ЭДС от «-» к «+»  $\leftrightarrow +\mathcal{E}$
- 3) Направление обхода совпадает с направлением тока  $\leftrightarrow +I(R + r)$

### Правила Кирхгофа

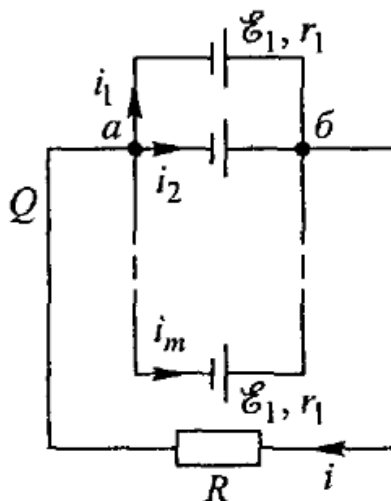
Рассмотрим разветвленные цепи.

Ветвь цепи – участок между двумя узлами.

Узел цепи – точка цепи, где сходятся 3 и более проводников.



### Пример



$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{1,2} = I_{1,2}(R_{1,2} + r_{1,2}) \\ \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_{2,3} = I_{2,3}(R_{2,3} + r_{2,3}) \\ \dots \\ \varphi_{N-1} - \varphi_1 + \mathcal{E}_{N-1,1} = I_{N-1,1}(R_{N-1,1} + r_{N-1,1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{E}_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{N-1} I_{i,i+1}(R_{i,i+1} + r_{i,i+1})$$

Также из закона сохранения заряда следует, что в пределах одной ветви во всех ее точках сила тока одна и та же.

Правила Кирхгофа формулируются следующим образом:

### 1. Правило напряжений.

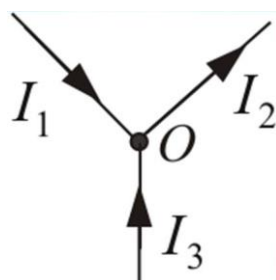
*Для любого замкнутого контура разветвленной цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжений*

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{E}_j = \sum_{j=1}^N I_j(R_j + r_j)$$

### 2. Правило токов.

*Алгебраическая сумма токов, втекающих в узел равна 0.*

$$I_{\text{втек}} > 0, \quad I_{\text{выт}} < 0$$

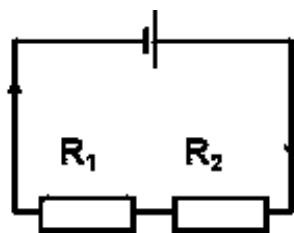


$$I_1 + I_3 - I_2 = 0$$

В замкнутой цепи: (число уравнений для токов) = (число узлов) – 1



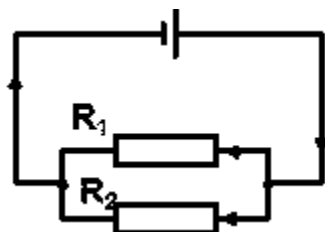
## Последовательное соединение $R$



$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2} \leftrightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{экв}}}$$

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_2$$

## Параллельное соединение $R$

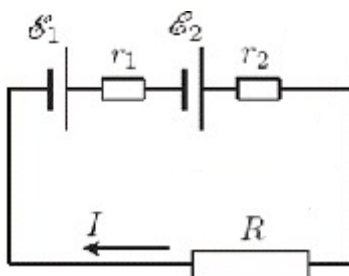


$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ I_1 R_1 = I_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{I R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = \frac{I R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\xi = I r + I_1 R_1 = I \left( r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \Leftrightarrow I = \frac{\xi}{r + R_{\text{ЭКВ}}}$$

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

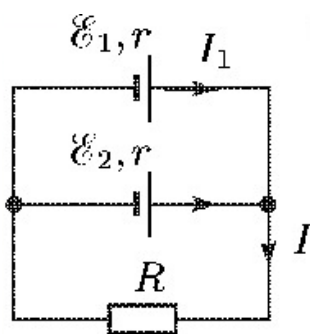
## Последовательное соединение $\mathcal{E}$



$$I = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{r_1 + r_2 + R} \Leftrightarrow I = \frac{\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}}}{r_{\text{ЭКВ}} + R}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ЭКВ}} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \\ r_{\text{ЭКВ}} &= r_1 + r_2 \end{aligned}}$$

## Параллельное соединение $\mathcal{E}$



$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1 = I_1 r_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 \\ \varphi_1 - \varphi_2 = -IR \end{cases}$$

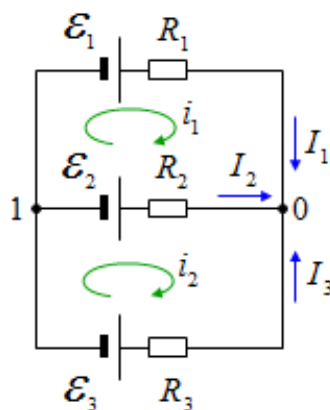
$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_2}{r_2} = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = I$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}$$

$$I = \frac{\left( \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right)}{R \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \leftrightarrow I = \frac{\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}}}{R + r_{\text{ЭКВ}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_{\text{ЭКВ}} &= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \\ \mathcal{E}_{\text{ЭКВ}} &= \left( \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right) r_{\text{ЭКВ}} \end{aligned}}$$

## Лекция 11



$I, I_1, I_2 - ?$

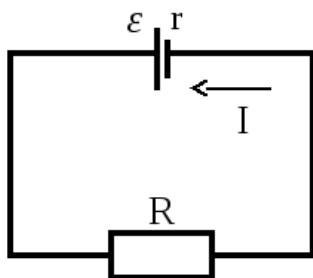
Способ 1. Метод узловых потенциалов:

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 = I_1 r_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_2 = I_2 r_2 \\ \varphi_1 - \varphi_2 = -IR \\ I_1 + I_2 = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1 r_1 - I_2 r_2 \\ \varepsilon_2 = I_2 r_2 + IR \end{cases} \Rightarrow I, I_1, I_2$$

Способ 2. Метод контурных токов:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1 r_1 + r_2(I_1 - I_2) \\ \varepsilon_2 = r_2(I_2 - I_1) + I_2 R \end{cases} \Rightarrow I, I_1, I_2$$

Закон Джоуля – Ленца



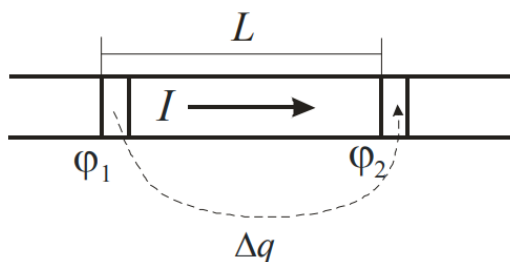
$$\varepsilon = I(R + r)$$

Мощность сторонних сил:

$$P_{\text{стор}} = \frac{\delta A_{\text{стор}}}{dt} = \frac{\delta q}{dt} \varepsilon = I \varepsilon = I^2(R + r)$$

Закон Джоуля – Ленца для участка цепи:

$$P_{\text{тепл}} = I^2 R = \frac{U^2}{R} = UI$$

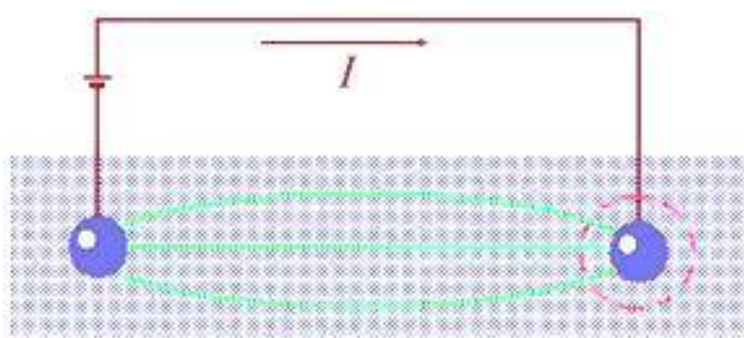


$$R = \frac{\rho l}{S}, \quad P_{\text{тепл}} = I^2 R = (jS)^2 \frac{\rho l}{S} = \rho j^2 S l$$

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:

$$\frac{\delta P_{\text{тепл}}}{\delta V} = \rho j^2$$

Токи в сплошных средах



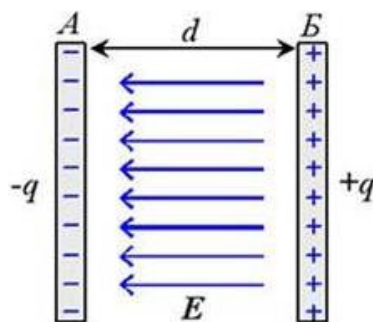
$$Q = CU = C(\varphi_+ - \varphi_-) - \text{без тока}$$

$$\rho_{\text{ср}} \gg \rho_{\text{эл}}$$

$$I = \oint_{\Sigma} (\vec{j} \cdot d\vec{S}), \quad \vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon}$$

$$I = \frac{1}{\rho \epsilon_0 \epsilon} \oint_{\Sigma} (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \frac{Q}{\rho \epsilon_0 \epsilon} = \frac{CU}{\rho \epsilon_0 \epsilon} = \frac{U}{R}$$

$$RC = \rho \epsilon_0 \epsilon$$



Для плоского конденсатора:

$$\vec{j}_{\text{ут}} \uparrow \vec{E}, \quad R_{\text{ут}} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \rho \varepsilon_0 \varepsilon \Rightarrow \boxed{R_{\text{ут}} = \frac{\rho d}{S}}$$

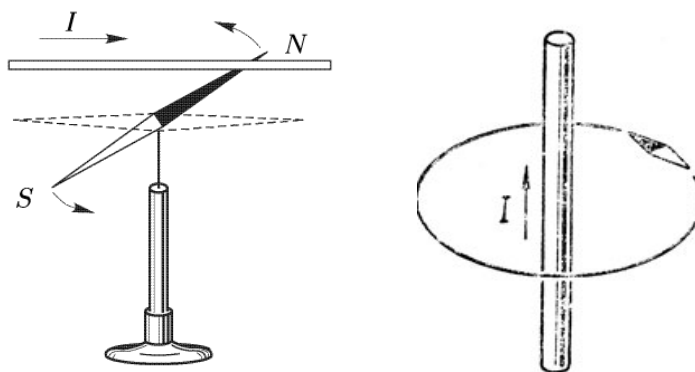
Следствия движения зарядов:

- Электрический ток
- Появление магнитного поля
- Появление электромагнитных волн (при движении с ускорением)

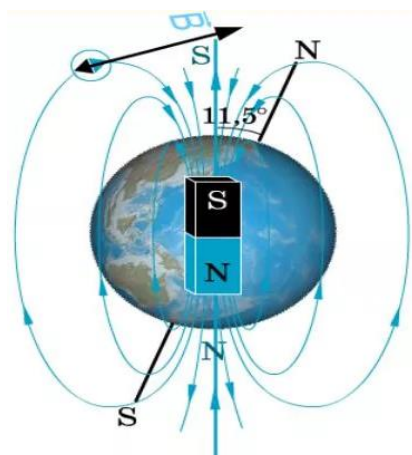
### Магнитостатика

Магнитостатика – раздел, изучающий магнитные поля постоянных токов.

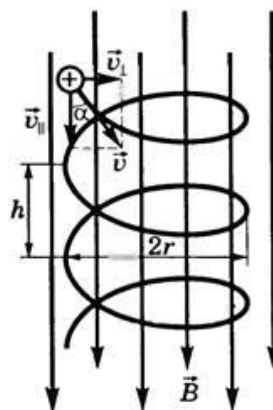
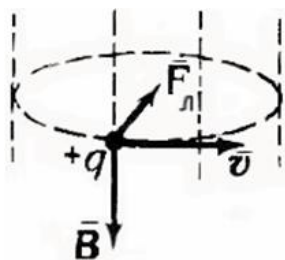
### Опыт Эрстеда



## Магнитное поле Земли



## Сила Лоренца

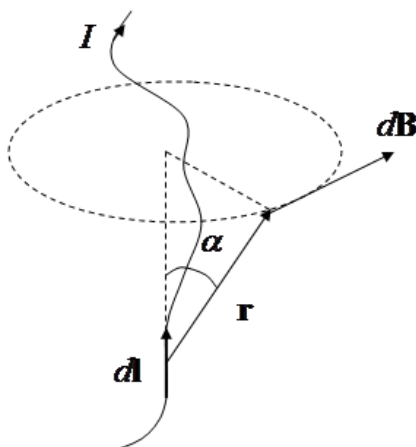


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad |\vec{B}| \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]}$$

- 1)  $\vec{v} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 0$
- 2)  $\vec{v} \perp \vec{B} \leftrightarrow$  движение по окружности
- 3)  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \leftrightarrow$  движение по спирали

## Магнитное поле элемента тока



$dl$  – длина,  $d$  – поперечный размер

Для бесконечно малого элемента линейного тока  $r \gg dl, d$

$$N = nSdl, \quad S = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \vec{j} = n\vec{v}, \quad d\vec{l} \parallel \vec{v}$$

$$d\vec{B} = q \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad \vec{B}_{dl} = \sum_i d\vec{B}_i = Nd\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} qn \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} Sdl$$

$$\boxed{\vec{B}_{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}}$$

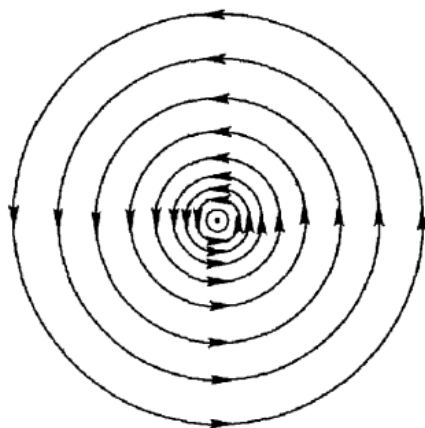
Закон Био – Савара – Лапласа для замкнутого тока:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}}$$

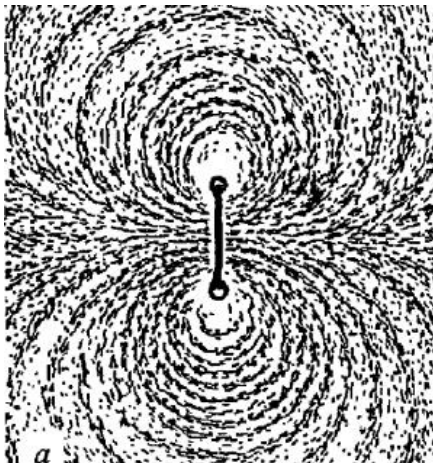


## Простые системы

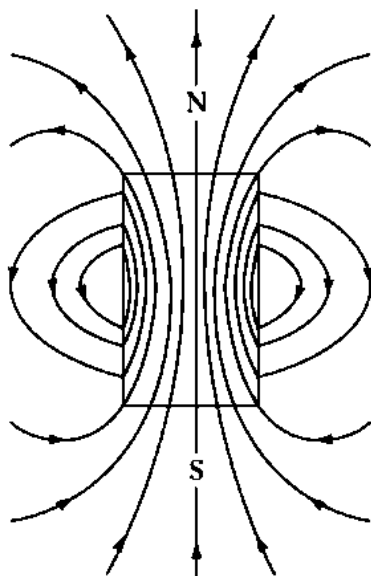
- Прямой проводник



- Кольцо

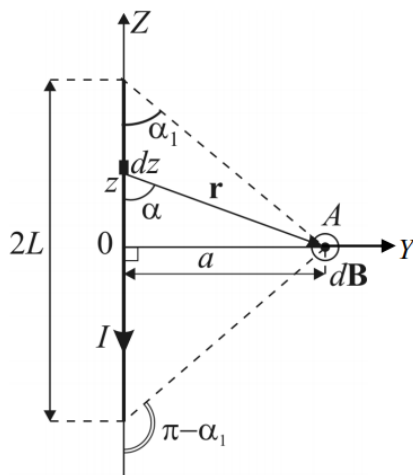


- Постоянный магнит



Электростатика	Магнитостатика
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}$ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$	$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Принцип суперпозиции	
<p>Закон сохранения эл. Заряда</p> $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	<p>Нет магнитных зарядов</p> $\text{div } \vec{B} = 0$

Пример 1. Магнитное поле проводника с током.



$$z = -a \operatorname{ctg} \alpha, \quad dz = \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad r = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad \frac{dz}{r^2} = \frac{d\alpha}{a}$$

$$d\vec{B}_{dz} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz}{r^2} \sin \alpha$$

$$\vec{B} = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_1} \sin \alpha d\alpha = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos(\pi - \alpha_1))$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}$$

Частные случаи:

1. На оси проводника:  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$

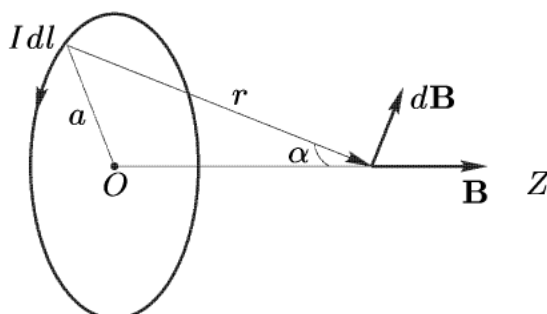
2. Для бесконечного прямолинейного проводника:

$$\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow \pi \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

$\vec{B}$  – индукция магнитного поля

$$[B] = [\mu_0] \cdot \frac{A}{m}, \quad 1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$$

Закон полного тока (теорема о циркуляции)



Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по любому замкнутому контуру равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, пронизывающих поверхность, опирающуюся на данный контур.

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \sum_k I_k$$

Правило знаков: циркуляция вектора  $\vec{B}$  и положительное направление тока, пронизывающего контур, связаны правилом правого винта.

## Лекция 12

Прямая задача:

**электростатики**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{r}_i}{r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV$$

**магнитостатики**

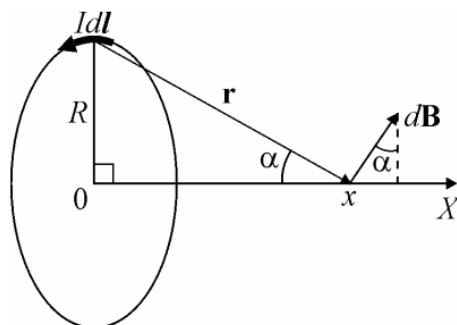
$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} dV$$

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \iiint_V \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} dV$$

$$I d\vec{l} = \vec{j} dV$$

Пример 2. Поле на оси кольца с током.

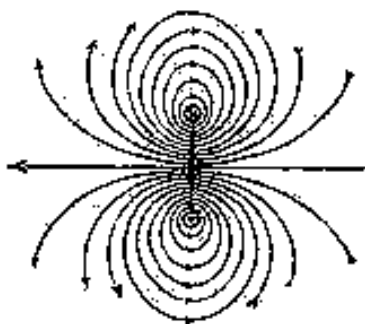


$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \iiint_V \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} dV$$

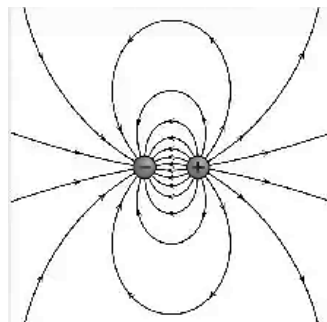
$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin \alpha, \quad r = \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin^3 \alpha}{R^2} \Rightarrow B_x = \oint_L dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sin^3 \alpha \oint_L dl$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$$



магнитный диполь

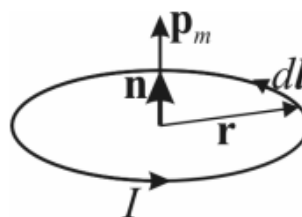


электрический диполь

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I\pi R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$S = \pi R^2$$

$$\vec{m} = IS\vec{n} - \text{магнитный момент}$$



$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

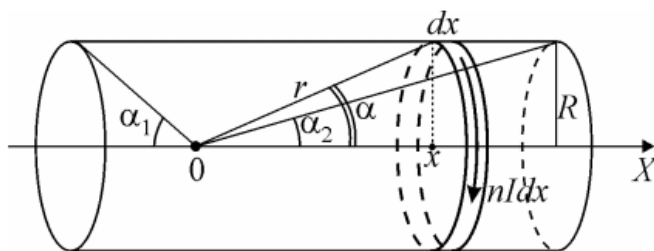
В случае элементарного тока  $x \gg R$ :

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{m}}{x^3}$$

Аналогия с полем электрического диполя:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{x^3}$$

Пример 3. Поле на оси конечного соленоида.



$dN = ndx$  – число витков в элементе  $dx$

$$dB_x = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \alpha$$

$$dI = IdN = Indx, \quad x = -R \operatorname{ctg} \alpha, \quad dx = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2} In \sin \alpha d\alpha$$

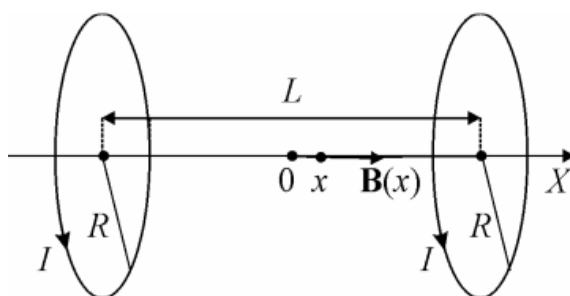
$$B_x = \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} dB_x = \frac{\mu_0}{2} In \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} In (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)$$

Частный случай:  $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow \pi$  (бесконечный соленоид)

$$B_x = \mu_0 In$$

Пример 4. Катушки Гельмгольца



Обратная задача

электростатики	магнитостатики
----------------	----------------

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \rho - ?$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \vec{j} - ?$
---	---

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla \times \vec{a}],$$

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

### Фундаментальные теоремы математического анализа

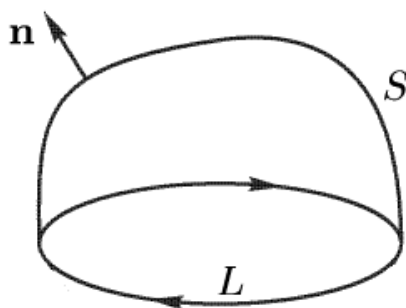
1. Теорема о производной под знаком интеграла.

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(a) - f(b)$$

2. Теорема о градиенте.

$$\int_a^b \operatorname{grad} \psi d\vec{l} = \psi(b) - \psi(a)$$

3. Теорема Остроградского – Гаусса.



$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \oiint_S (\vec{a} \cdot d\vec{l})$$

4. Теорема Стокса.



$$\iint_S (\text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{s}) = \oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{l})$$

В случае электростатики (поле потенциальное):

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0 = \text{rot}(-\text{grad } \Psi) \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \Psi$$

В случае магнитостатики (поле вихревое):

$$\iint_S (\text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{s}) = \oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}), \quad I = \iint_S (\vec{j} \cdot d\vec{s}) = \frac{\delta Q}{dt}$$

Теорема о циркуляции магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Переход к закону Био – Савара – Лапласа:

$$\iint_S (\text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{s}) = \mu_0 \iint_S (\vec{j} \cdot d\vec{s}) = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} dV$$

Закон отсутствия магнитных зарядов

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad \text{div} \left( \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} \right) = ?$$

$$\text{div} [\vec{a} \times \vec{b}] = (\nabla \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]) = \nabla_a [\vec{a} \times \vec{b}] + \nabla_b [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \text{ rot } \vec{a} - \vec{a} \text{ rot } \vec{b}$$

$$((\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]) = ([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}) = (\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]))$$

$$\vec{v} \equiv \vec{a}, \quad \frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \vec{b} \Rightarrow \text{div} \left( \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} \right) = \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \underbrace{\text{rot } \vec{v}}_{=0} \right) - \left( \vec{v} \cdot \underbrace{\text{rot} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right)}_{=0} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0, \quad \vec{E} \sim \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} \sim \text{rot} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0 \right)$$

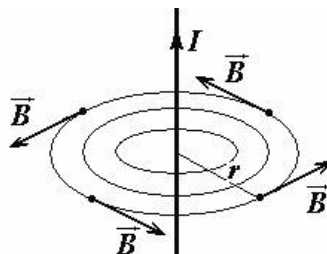
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

### Примеры использования теоремы о циркуляции

#### 1. Прямой проводник

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

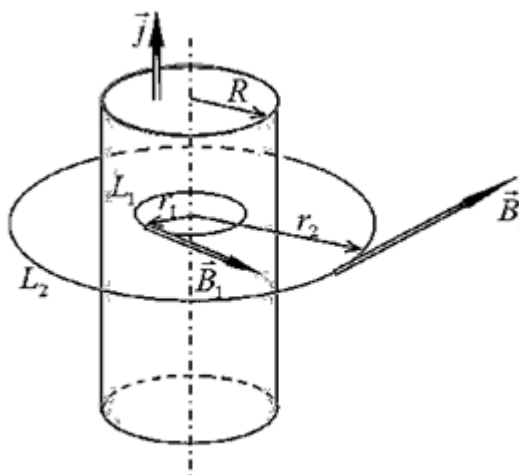


## 2. Цилиндрический проводник

$$2\pi rB = \mu_0 I, \quad r > R$$

$$2\pi rB = \mu_0 j \pi r^2, \quad r \leq R$$

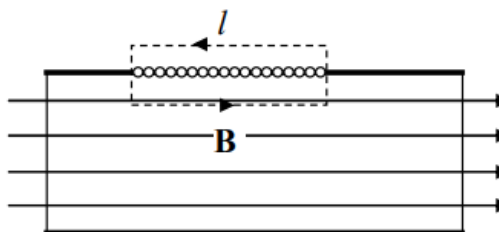
$$B = \frac{\mu_0}{2} j r$$



## 3. Бесконечный соленоид

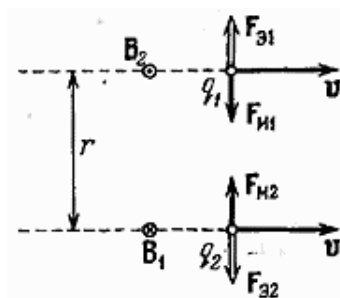
$$Bdl = \mu_0 I n l$$

$$B = \mu_0 n I$$

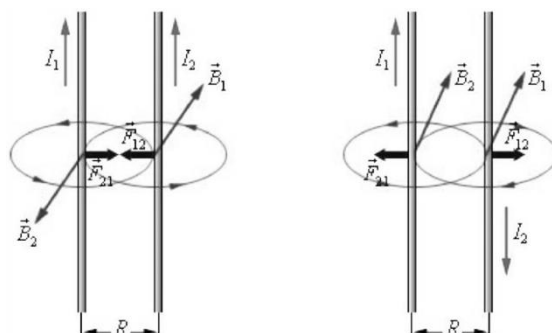


## Силы в магнитном поле

Сила Лоренца:  $F_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ ,  $\vec{F}_L \perp \vec{v} \perp \vec{B}$



Взаимодействие проводников с током (сила Ампера):



## Лекция 13

### Векторный магнитный потенциал

$\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\vec{B}$  – вихревое поле

Из векторного анализа:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \leftrightarrow \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = \nabla[\nabla \times \vec{A}] = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \text{rot } \vec{A}}$$

Чем оправдано введение векторного потенциала?

- Имеет глубокий смысл в квантовой механике (даже если  $\vec{B} = 0$ ,  $\vec{A} \neq 0$ , то поле существует).
- Уравнения магнитостатики можно записать в виде, аналогичному в электростатике.
- Иногда с помощью него проще вычислить индукцию магнитного поля.

Свойства векторного потенциала:

1.  $\vec{A} \perp \vec{B}$

2.  $\Delta \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = [\nabla \times [\nabla \times \vec{A}]] = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\nabla \cdot \nabla) = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции:

$$\text{rot } \vec{A} = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{rot } \vec{A} + \underbrace{\text{rot grad } \psi}_{=0}$$

Можно наложить дополнительное условие, например  $\text{div } \vec{A} = 0$  (нормировка Даламбера).

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} \text{ – уравнение Пуассона}$$

В электростатике:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r}$$

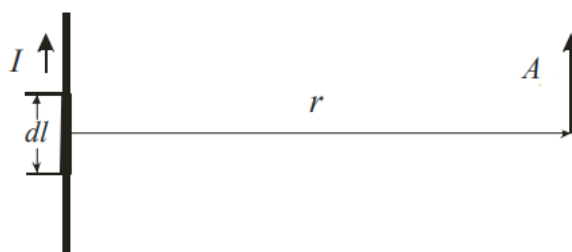
В магнитостатике:

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x \quad A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j_x dV}{r}$$

$$\Delta A_y = -\mu_0 j_y \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j_y dV}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} dV}{r}}$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j_z dV}{r}$$

Линейный проводник:



$r_0$  – радиус проводника

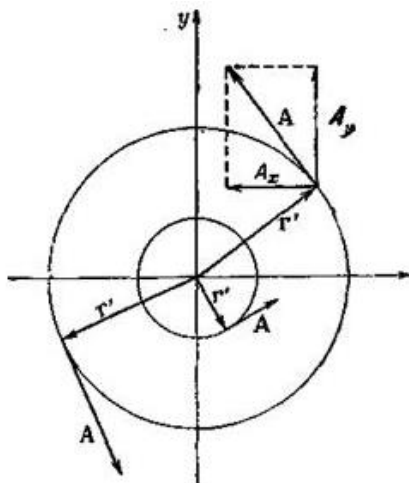
$$\vec{j} dV = I d\vec{l} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{l}}{r}, \quad \boxed{|\vec{A}| \sim \ln \frac{r}{r_0}}$$

Аналогия с электростатикой. В случае заряженного цилиндра:

$$E \sim \frac{1}{r}, \quad \boxed{\varphi \sim \ln \frac{r}{r_0}}$$

## Соленоид

Внутри соленоида векторный потенциал циркулирует точно так же, как и токи:

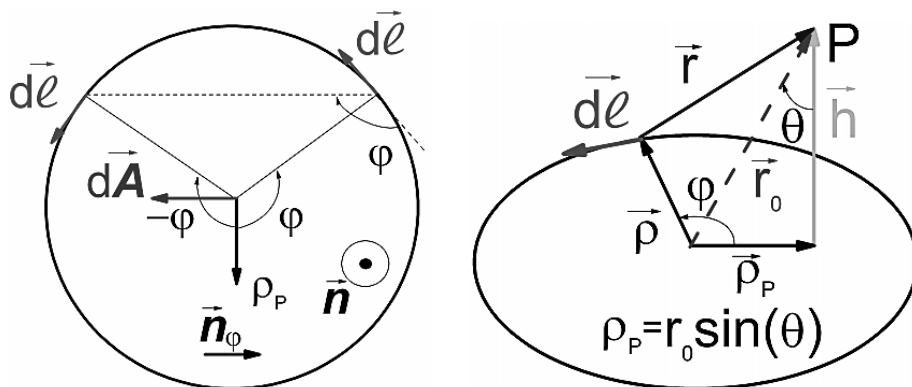


## Магнитное поле элементарного тока (магнитного диполя)

$\vec{m} = \vec{n}IS$  – магнитный дипольный момент

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{m} \times \vec{r}_0]}{r_0^3} \quad (\text{м})$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \quad (\text{э})$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{l}}{r} \Rightarrow A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{dl_y}{r}, \quad dl_y = l \cos \varphi$$

$$\vec{r}_0 = \vec{\rho} + \vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{\rho} = \vec{\rho}_p + \vec{h} - \vec{\rho}$$

$$r^2 = (\vec{\rho} + \vec{h})^2 + \rho^2 - 2(\vec{\rho} \cdot (\vec{\rho}_p + \vec{h})) = \underbrace{\rho_p^2 + h^2}_{r_0^2} + \rho^2 - 2\rho\rho_p \cos \varphi$$

$$(\vec{\rho} \cdot \vec{h}) = 0, \quad (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}_p) = \rho\rho_p \cos \varphi, \quad (\vec{\rho}_p \cdot \vec{h}) = 0$$

$$\rho = \text{const} = a, \quad r \sim r_0 \gg a, \quad \rho_p = r_0 \sin \theta$$

$$r^2 = r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \sin \theta \cos \varphi = r_0^2 \left( 1 + \underbrace{\frac{a^2 - 2ar_0 \sin \theta \cos \varphi}{r_0^2}}_{\xi \ll 1} \right)$$

$$(1 + \xi)^\alpha \approx 1 + \alpha\xi, \quad \xi \ll 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}} \cong \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{a^2}{2r_0^2} + \frac{ar_0 \sin \theta \cos \varphi}{r_0^2} \right), \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{r_0} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \left( 1 - \frac{a^2}{2r_0^2} + \frac{ar_0 \sin \theta \cos \varphi}{r_0^2} \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \overbrace{\pi a^2}^S r_0 \sin \theta}{r_0^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{mr_0 \sin \theta}{r_0^3}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{m} \times \vec{r}_0]}{r_0^3}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}r^2}{r^5} \quad (\text{м})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}r^2}{r^5} \quad (\text{э})$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left[ \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right], \quad \vec{m} = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} [\vec{a} \times \vec{b}] &= [\nabla \times [\vec{a} \times \vec{b}]] = [\nabla_a \times [\vec{a} \times \vec{b}]] + [\nabla_b \times [\vec{a} \times \vec{b}]] = \\ &= (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - \vec{b} \text{div } \vec{a} + \vec{a} \text{div } \vec{b} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \end{aligned}$$

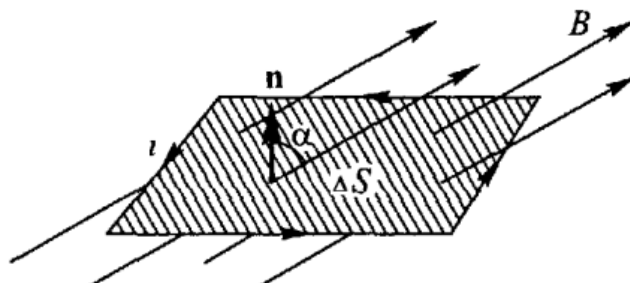
$$\vec{a} = \vec{m} = \text{const}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{rot} \left[ \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \vec{m} \underbrace{\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3}}_{=0} - \frac{(\vec{m} \cdot \nabla) \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{E} \sim \frac{\vec{r}}{r^3} \leftrightarrow \text{div } \vec{E} \sim \text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} &= \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{r^3} = \\ &= \frac{\vec{m}}{r^3} + (\vec{m} \cdot \vec{r}) \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) = (\vec{m} \cdot \vec{r}) \left( -\frac{3\vec{r}}{r^5} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^5}}$$

Поток вектора  $\vec{B}$



$$\Phi = \iint_{\Sigma} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}) = \oint_L (\vec{A} \cdot d\vec{l})$$

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0 \leftrightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$



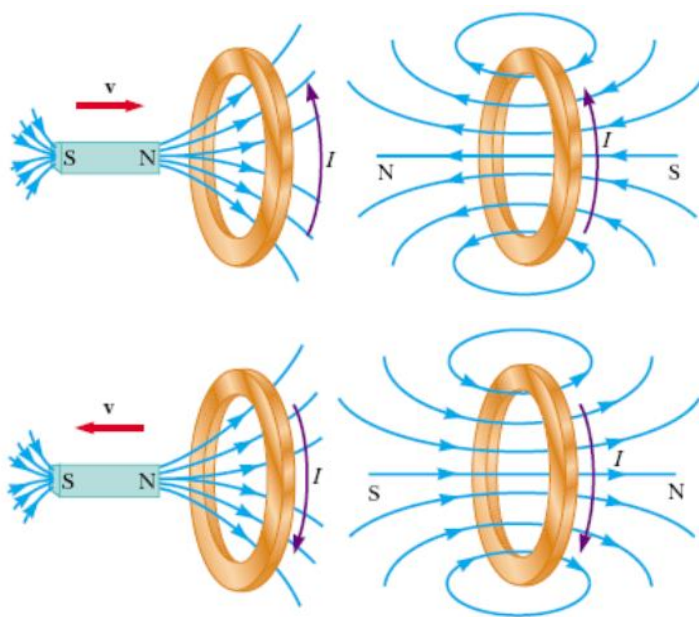
## Электромагнитная индукция Фарадея

Электромагнитная индукция Фарадея — это явление возникновения электрического тока в замкнутом контуре при изменении магнитного потока через поверхность, опирающуюся на данный контур.

$$\xi_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

### Правило Ленца:

Индукционный ток  $I$  направлен так, чтобы препятствовать изменению потока, его вызвавшего.



$$\frac{dB}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0$$

$$\frac{dB}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} < 0$$

$$\vec{B}_{\text{инд}} \leftrightarrow - \frac{d\Phi}{dt}$$

$\vec{B}_{\text{инд}}$  и направление обхода контура с нормалью  $\vec{n}$  подчиняются правилу правого винта.

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = - \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{1}{R}, \quad \boxed{\frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow I < 0}$$

### Природа ЭМ индукции Фарадея

1. Вихревое электрическое поле.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{вихр}}$$

2. Проводник движется,  $\vec{B} = \text{const} \Rightarrow$  сила Лоренца

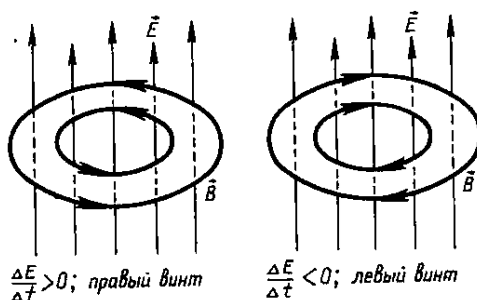
1.

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt} \oiint_{\Sigma} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \oiint_{\Sigma} \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \right) = \oiint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{E}^* \cdot d\vec{S}) \\ &= \oint_L (\vec{E}^* \cdot d\vec{l}) \sim \mathcal{E}_{\text{инд}}\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \vec{E}^* \equiv \vec{E} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}, \quad \vec{E} \perp \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

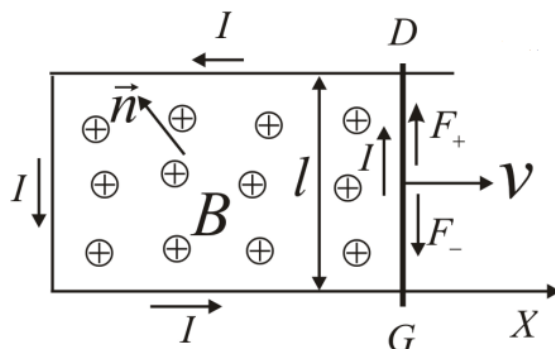
$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) \neq 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$



## Лекция 14

2.



$$F_A = IlB, \quad \Delta\Phi = v\Delta t \cdot l \cdot B$$

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = v l B, \quad I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}, \quad I_{\text{полн}} = \frac{\mathcal{E} - v l B}{R}$$

Неполная работа силы Лоренца:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}], \quad \delta A'_L = F_L l = q v B l, \quad \xi_{\text{инд}} = \frac{\delta A'_L}{q} = v B l$$

### Поток магнитной индукции

Элементарный поток:

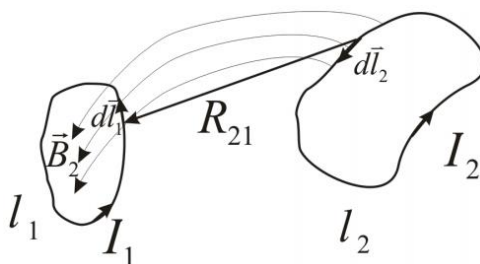
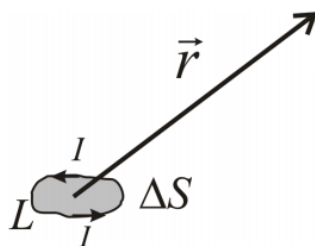
$$d\Phi_B = (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = (\vec{B} \cdot d\vec{S})$$

Поток через поверхность:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} d\Phi_B = \iint_{\Sigma} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}) = \oint_L (\vec{A} \cdot d\vec{l})$$

Для линейного тока:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{l}}{r}$$



$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \oint_{L_1} (\vec{A}_{12} \cdot d\vec{l}_1) = \oint_{L_1} \left( d\vec{l}_1 \cdot \oint_{L_2} \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{d\vec{l}_2}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{r} \\ &= \mathcal{L}_{12} I_2 \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_{12}$  — коэффициент взаимной индукции

Формула Неймана:

$$\mathcal{L}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)}{r}$$

Коэффициент самоиндукции (индуктивность контура):

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_1} \frac{(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_1)}{r}$$

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \mathcal{L}_{11}I_1 + \mathcal{L}_{12}I_2$$

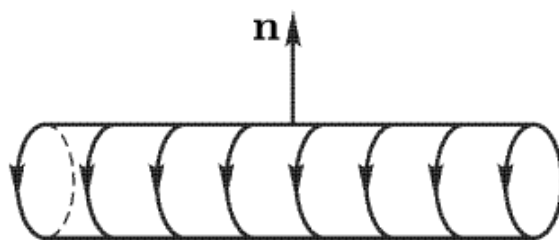
$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = \mathcal{L}_{22}I_2 + \mathcal{L}_{21}I_1$$

В общем случае:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij}I_j \quad (\text{м})$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \beta_{ij}\varphi_j \quad (\text{э})$$

Пример 1. Индуктивность бесконечного соленоида



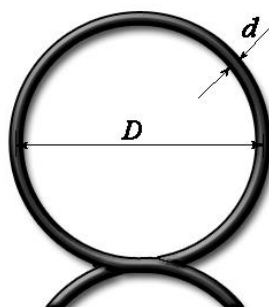
$$n = \frac{N}{L}, \quad N \rightarrow \infty, \quad L \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \mathcal{L}I = NSB = NS \cdot \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N^2}{L^2} (LS)I = \mu_0 n^2 VI$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \mu_0 n^2 V}, \quad \frac{\mathcal{L}}{V} = \mu_0 n^2$$

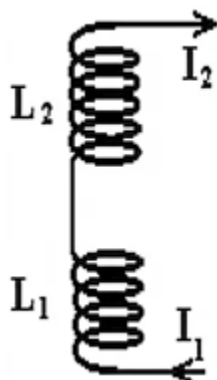
$$[\mu_0] = \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{М}}, \quad [\mathcal{L}] = \Gamma_{\text{H}}$$

Пример 2. Индуктивность витка провода.



$$\mathcal{L} \approx \mu_0 R \ln \left( \frac{D}{d} \right)$$

Пример 3. Взаимная индукция соосных соленоидов.



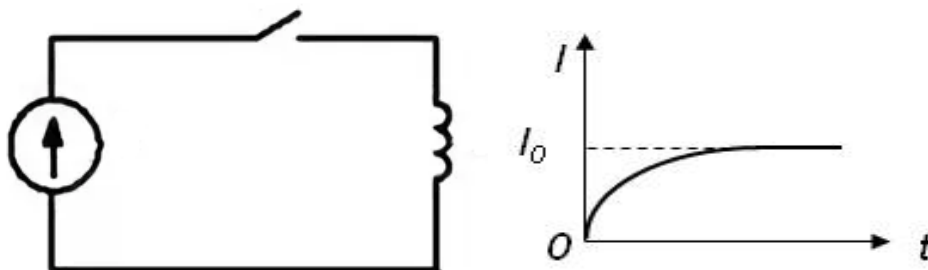
$$L_1 = L_2 = L, \quad S_1 = S_2 = S, \quad N_1 \neq N_2$$

$$I_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_2 = N_2 B_1 S = N_2 S \cdot \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} S I_1 = \mu_0 n_1 n_2 V I_1$$

$$\mathcal{L}_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 V, \quad \mathcal{L}_{11} = \mu_0 n_1^2 V, \quad \mathcal{L}_{22} = \mu_0 n_2^2 V$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{21} = \sqrt{\mathcal{L}_{11} \mathcal{L}_{22}}}$$

Энергетические соотношения в системе линейных токов



$$\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt} = IR \Rightarrow \underbrace{\varepsilon I dt}_{\delta A_{\text{эдс}}} = I d\Phi + I^2 R dt$$

$$\delta A_{\text{эдс}} = I d\Phi + \delta Q_{\text{дж}}$$

$$I d\Phi = I d(\mathcal{L}I) = d\left(\frac{\mathcal{L}I^2}{2}\right) = dW_{\text{магн}}$$

$$\boxed{\delta A_{\text{эдс}} = dW_{\text{магн}} + \delta Q_{\text{дж}}}$$

$$W_{\text{магн}} = \frac{\mathcal{L}I^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2\mathcal{L}} \quad (\text{м})$$

$$W_{\text{эл}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad (\text{э})$$

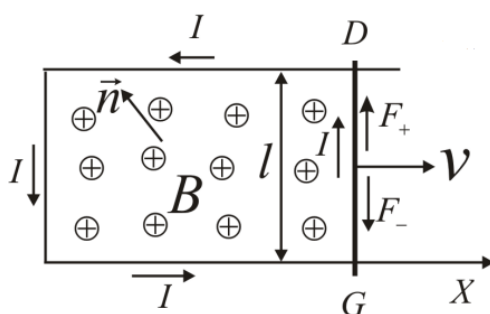
Для соленоида:

$$B = \mu_0 n I, \quad \mathcal{L} = \mu_0 n^2 V$$

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \cdot \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} V \Rightarrow \boxed{w_{\text{м}} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

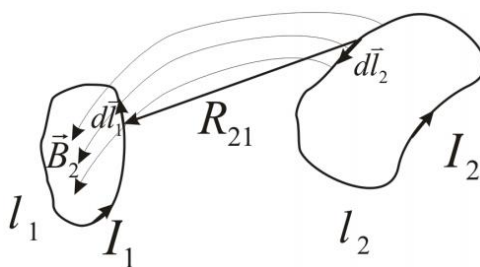
В магнитной среде:

$$\boxed{w_{\text{м}} = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{H})}{2}} \leftrightarrow w_{\text{э}} = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{2}$$



В случае проводника на рельсах потоком через контур, создаваемого самим током, пренебрегают.

Энергия и сила взаимодействия двух жестких контуров с током



$$\mathcal{E}_1 - \frac{d\Phi_1}{dt} = I_1 R_1, \quad \mathcal{E}_1 I_1 dt = I_1^2 R_1 dt + I_1 d\Phi_1$$

$$\mathcal{E}_2 - \frac{d\Phi_2}{dt} = I_2 R_2, \quad \mathcal{E}_2 I_2 dt = I_2^2 R_2 dt + I_2 d\Phi_2$$

$$I_1 d\Phi_1 = I_1 d(\mathcal{L}_{11} I_1 + \mathcal{L}_{12} I_2) = \mathcal{L}_{11} I_1 dI_1 + I_1^2 d\mathcal{L}_{11} + I_1 I_2 d\mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{12} I_1 dI_2$$

$$I_2 d\Phi_2 = I_2 d(\mathcal{L}_{22} I_2 + \mathcal{L}_{21} I_1) = \mathcal{L}_{22} I_2 dI_2 + I_2^2 d\mathcal{L}_{22} + I_2 I_1 d\mathcal{L}_{21} + \mathcal{L}_{21} I_2 dI_1$$



По теореме взаимности  $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21}$

$$Id\Phi_1 + Id\Phi_2$$

$$= d \left( \underbrace{\frac{\mathcal{L}_{11}I_1^2}{2}}_{\substack{\text{энергия} \\ \text{1-го}}} + \underbrace{\frac{\mathcal{L}_{22}I_2^2}{2}}_{\substack{\text{энергия} \\ \text{2-го}}} + \underbrace{I_1I_2\mathcal{L}_{12}}_{\substack{\text{энергия} \\ \text{вз-я}}} \right) + \underbrace{\frac{I_1^2}{2}d\mathcal{L}_{11} + \frac{I_2^2}{2}d\mathcal{L}_{22} + I_1I_2d\mathcal{L}_{12}}_{\text{работа сил Ампера}}$$

$$\delta A_{\text{эдс}} = \delta Q_{\text{дж}} + dW_{\text{м}} + \delta A_{\text{Амп}}$$

$$W_{\text{м}} = \frac{\mathcal{L}_{11}I_1^2}{2} + \frac{\mathcal{L}_{22}I_2^2}{2} + I_1I_2\mathcal{L}_{12}$$

$$\delta A_{\text{Амп}} = \frac{I_1^2}{2}d\mathcal{L}_{11} + \frac{I_2^2}{2}d\mathcal{L}_{22} + I_1I_2d\mathcal{L}_{12}$$

Для жестких контуров:  $\mathcal{L}_{11} = \text{const}$ ,  $\mathcal{L}_{22} = \text{const}$

$$F_A = \frac{\delta A_{\text{Амп}}}{\delta x} = I_1I_2 \frac{d\mathcal{L}_{12}}{dx}$$

Связь сил Ампера в системе линейных контуров с изменением энергии

$$I_1d\Phi_1 + I_2d\Phi_2 = dW_{\text{м}} + \delta A_{\text{Амп}}$$

$$1. \quad \Phi_1, \Phi_2 = \text{const} \Rightarrow \delta A_{\text{Амп}} = -dW_{\text{м}} = F_A d\xi$$

$$F_A = - \left. \frac{dW_{\text{м}}}{d\xi} \right|_{\Phi=\text{const}}$$

$$2. \quad I_1, I_2 = \text{const} \Rightarrow I_1d\Phi_1 + I_2d\Phi_2 = \delta W_{\text{м}} + \delta A_{\text{Амп}}$$

$$dW_{\text{м}} = \frac{1}{2}(I_1d\Phi_1 + I_2d\Phi_2)$$

$$\delta A_{\text{АМП}} = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 - dW_{\text{м}} = \frac{1}{2} (I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2) = dW_{\text{м}}$$

$$F_A = \left. \frac{dW_{\text{м}}}{d\xi} \right|_{I=\text{const}}$$

Частные случаи:

- 1) Одиночный жесткий контур

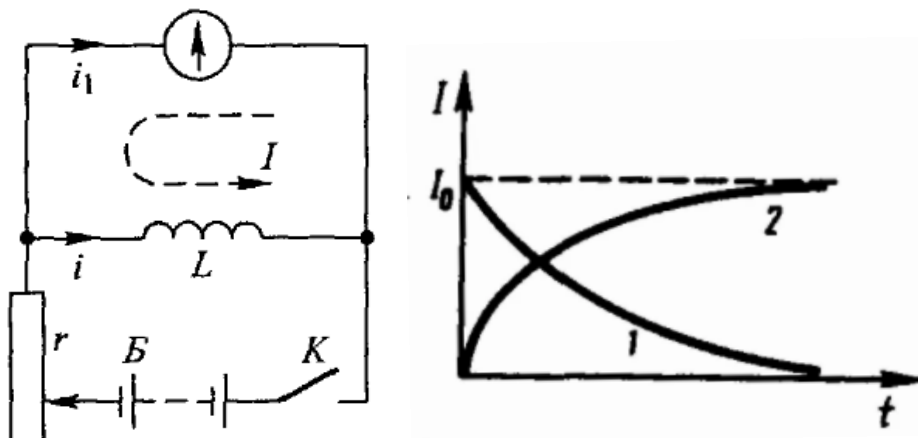
$$I_1 d\Phi_1 = d \left( \frac{\mathcal{L}_{11} I_1^2}{2} \right)$$

- 2) Одиночный нежесткий контур (на контур действует собственная сила)

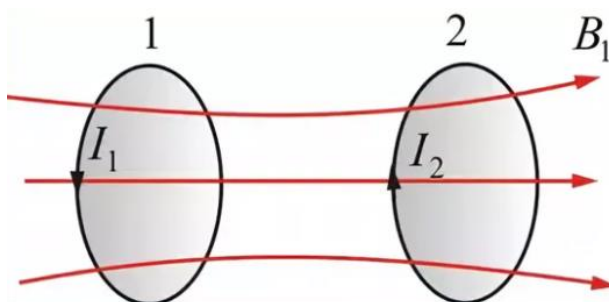
$$I_1 d\Phi_1 = d \left( \frac{\mathcal{L}_{11} I_1^2}{2} \right) + \underbrace{\frac{I^2}{2} d\mathcal{L}_{11}}_{\delta A_{\text{АМП}}}$$

## Лекция 15

### Экстраток самоиндукции



### Взаимная индукция систем с током



$$W_M = \frac{\mathcal{L}_{11}I_1^2}{2} + \frac{\mathcal{L}_{22}I_2^2}{2} + \mathcal{L}_{12}I_1I_2$$

В случае сплошного проводника:

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{2W_{M1}}{I_1^2} = \frac{2}{I_1^2} \iiint_V w_M dV = \frac{2}{I_1^2} \iiint_V \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{I_1^2} \iiint_V \frac{B_1^2}{\mu_0} dV$$

Формула для индуктивности в общем случае:

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{1}{\mu_0 I_1^2} \iiint_V B_1^2 dV$$

Для линейных проводников справедливо:

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{\Phi_1}{I_1}$$



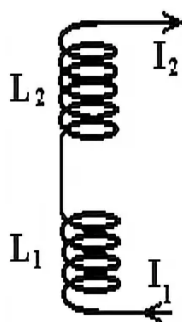
$$\mathcal{L}_{12} > 0$$



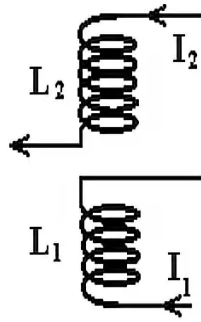
$$\mathcal{L}_{12} < 0$$

Если  $\mathcal{L}_{12} > 0$ , контуры «подмагничивают» друг друга:  $(\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) > 0$ .

Если  $\mathcal{L}_{12} < 0$ , то – «размагничивают»:  $(\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) < 0$ .

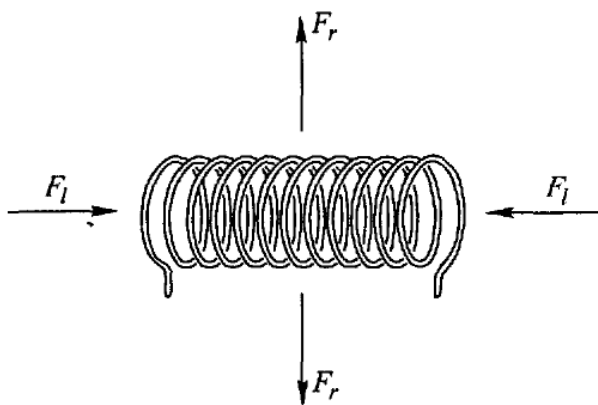


$$\mathcal{L}_{12} = \sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}$$



$$\mathcal{L}_{12} = -\sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}$$

Силы, действующие на системы с током



Магнитное давление:

$$\delta A_{\text{АМП}} = \frac{I_1^2}{2} d\mathcal{L}_{11} + \frac{I_2^2}{2} d\mathcal{L}_{22} + I_1 I_2 d\mathcal{L}_{12}$$

$$\mathcal{L} = \mu_0 n^2 V = \mu_0 \frac{N^2}{L^2} \cdot SL = \mu_0 \frac{N^2}{L} \cdot \pi R^2$$

Мысленно увеличим радиус обмотки на  $\Delta R$ . Тогда сила, действующая на виток соленоида:

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l} \times \vec{B}^*], \quad \vec{B}^* - \text{суммарное поле остальных элементов тока}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{собств}} + \vec{B}^*$$

$$dF_A = IdlB^*, \quad B^* = \frac{B}{2} \Rightarrow dF_A = Idl \cdot \frac{\mu_0 n I}{2}$$

$$F_A = \sum_i dF_A = I \cdot 2\pi R \cdot \frac{\mu_0 N I}{2L} = \mu_0 I^2 N^2 \frac{\pi R}{L}$$

$$\delta A_{\text{АМП}} = \frac{I^2}{2} d\mathcal{L} = F_A dR, \quad d\mathcal{L} = \frac{\mu_0 N^2}{L} \cdot 2\pi R dR$$

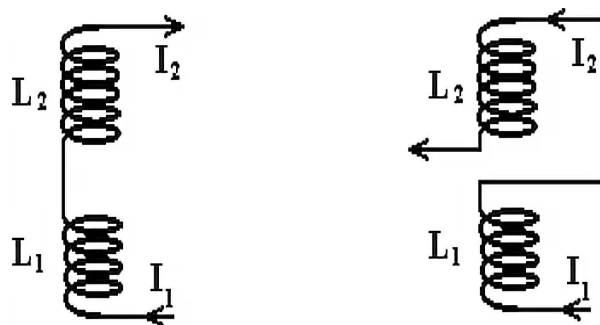
$$\delta A_{\text{АМП}} = \mu_0 N^2 \frac{2\pi R}{L} dR \cdot \frac{I^2}{2} = \mu_0 I^2 N^2 \frac{\pi R}{L} dR = F_A dR$$

$$\boxed{F_A = \mu_0 I^2 N^2 \frac{\pi R}{L}}$$

Удлинение обмотки:

$$\delta A_{\text{АМП}} = \frac{I^2}{2} d\mathcal{L}, \quad d\mathcal{L} = -\frac{\mu_0 N^2}{L^2} \pi R^2 dx = F_A dx \Rightarrow F_A = -\mu_0 \frac{N^2}{L^2} \pi R^2$$

Взаимодействие двух катушек:



1. Токи сонаправлены:  $\mathcal{L}_{12} > 0$

$$\delta A_{\text{АМП}} = I_1 I_2 d\mathcal{L}_{12}, \quad dx > 0$$

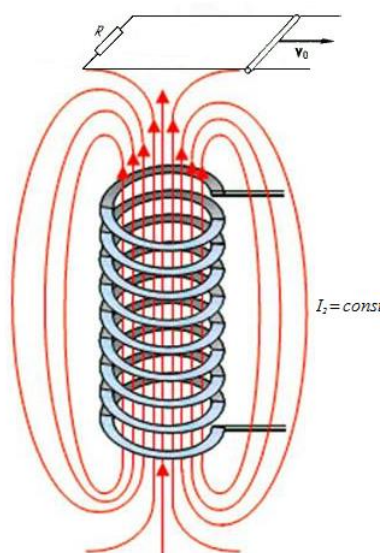
$\Delta S$  растет  $\Rightarrow \mathcal{L}_{12}$  уменьшается

$$\frac{d\mathcal{L}_{12}}{dx} < 0 \Rightarrow \delta A_{\text{АМП}} < 0 \Rightarrow F_A < 0$$

2. Токи противоположны:  $\mathcal{L}_{12} < 0$

$$\frac{d\mathcal{L}_{12}}{dx} > 0 \Rightarrow \delta A_{\text{АМП}} > 0 \Rightarrow F_A > 0$$

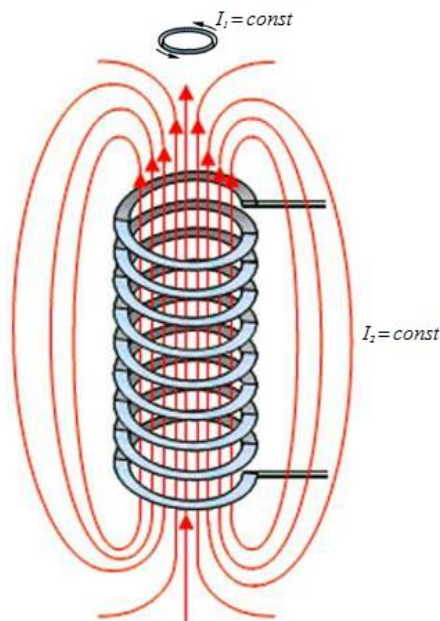
Соленоид и проводник на рельсах:



$$\delta A_{\text{АМП}} = I_1 I_2 d\mathcal{L}_{12} = I_1 d(\mathcal{L}_{12} I_2) = I_1 d\Phi_{12}$$

$$\delta A_{\text{АМП}} = I_1 d\Phi_{\text{внеш}}$$

Соленоид и малое кольцо с током:



$$F_{\text{внеш}} = F_A, \quad \mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{22} = \text{const}$$

$$\delta A_{\text{АМП}} = I_1 I_2 d\mathcal{L}_{12} = d(I_1 I_2 \mathcal{L}_{12}), \quad \Phi_{12} = I_2 \mathcal{L}_{12} = (\vec{B}_2 \cdot \vec{n}) \cdot S_1$$

$$\vec{m} = \vec{n}_1 S_1 I_1$$

$$\delta A_{\text{АМП}} = d(I_1 \cdot (\vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1) S_1) = d(\vec{m} \cdot \vec{B}_2) = F_A d\xi$$

$$A_{\text{АМП}} = \int_{\vec{B}} d(\vec{m} \cdot \vec{B}_2) = (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = -\vec{F}_{\text{АМП}} \Rightarrow \delta A_{\text{внеш}} = -\delta A_{\text{АМП}}$$

$$W_{\text{дип}} = -(\vec{m} \cdot \vec{B}) \Leftrightarrow F_{A,x} = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B})}{\partial x}, \quad F_{A,y} = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B})}{\partial y}, \quad F_{A,z} = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B})}{\partial z}$$

$$\vec{F}_{A,\text{дип}} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (\text{м})$$

$$F_{\text{дип}} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (\text{э})$$

### Потенциальная функция тока

$$\vec{F}_A = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}), \quad \vec{F} = -\nabla W_{\text{пот}}$$

$$W_{\text{полн}} = \underbrace{A_{\text{эл}}^{\text{внеш}}}_{2(\vec{m} \cdot \vec{B})} + \underbrace{A_{\text{мех}}^{\text{внеш}}}_{-(\vec{m} \cdot \vec{B})}$$

$$F_A = -\text{grad} \left( -(\vec{m} \cdot \vec{B}) \right), \quad W_{\text{пот}} = -(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

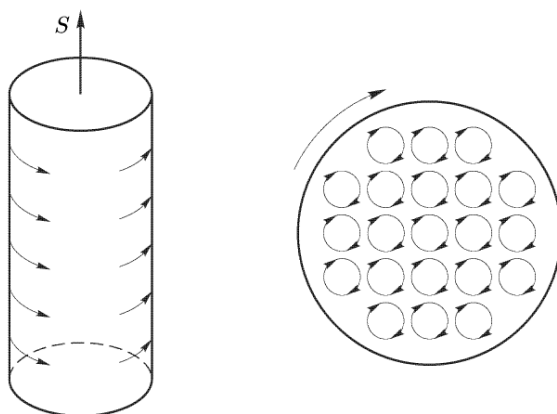
Момент сил Ампера, действующих на элементарный ток:

$$\vec{M} = [\vec{m} \times \vec{B}]$$

Индукционные методы измерения магнитных полей: баллистический гальванометр измеряет прошедший заряд.

Токи Фуко – вихревые токи в сплошных проводниках.

### Магнитное поле в веществе



токи Ампера  $\leftrightarrow$  молекулярные токи

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{св}} + \vec{J}_{\text{мол}} \quad \leftrightarrow \quad \rho = \rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{своб}}$$

$$\vec{M} \equiv \frac{\sum \vec{m}_i}{\delta V} \quad \leftrightarrow \quad \vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\delta V} \Rightarrow \text{div } \vec{P} = -\rho_{\text{пол}}$$

$$\text{rot } \vec{M} = \vec{J}_{\text{мол}}, \quad \vec{M} - \text{намагниченность}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_{\text{пров}} + \vec{J}_{\text{мол}})$$



$$\operatorname{rot}(\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{пров}} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j}_{\text{пров}} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}}$$

$\vec{H}$  – напряженность магнитного поля

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$[B] = \text{Тл}, \quad [H] = [M] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$$

$H = nI$  – не зависит от вещества внутри соленоида

## Лекция 16

вакуум:  $\vec{B}$

вещество:  $\langle \vec{B} \rangle$

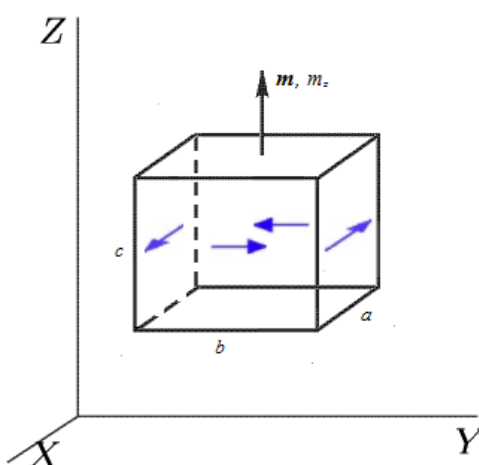
$$\text{rot } \vec{M} = \vec{j}_{\text{мол}}$$

$\leftrightarrow$

$$j_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

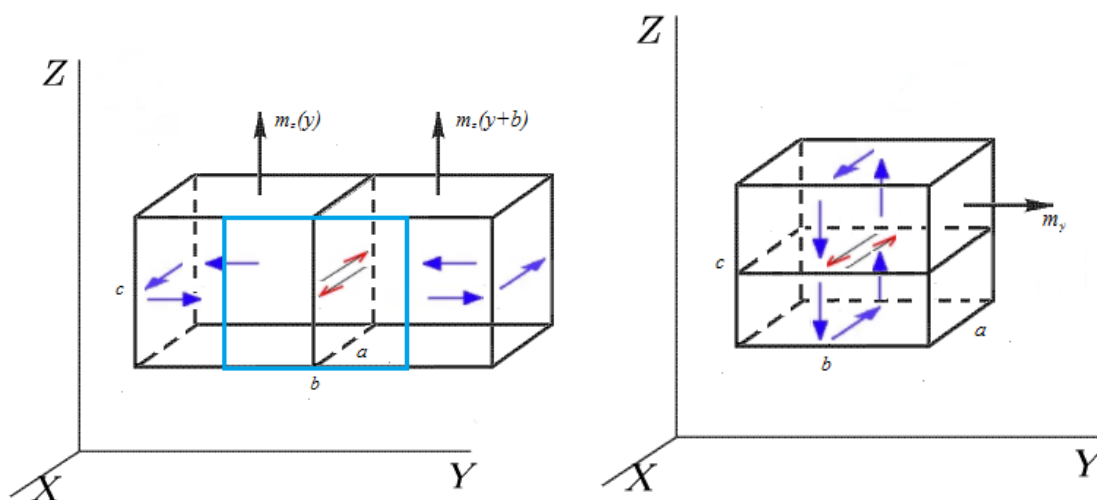
$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}$$

$$j_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}$$



$$I = i \cdot c, \quad m_z = IS = i \cdot c \cdot b \cdot a, \quad M_z = \frac{m_z}{abc} = i$$

$$I = i_{\text{пр}} \cdot c - i_{\text{л}} \cdot c = (m_z(y+b) - m_z(y)) \cdot c$$



$$j_{x,1} = \frac{(M_z(y+b) - M_z(y)) \cdot c}{bc} = \frac{\partial M_z}{\partial y}, \quad j_{x,2} = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$$

$$j_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \vec{j} = \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{мол}} \\ \text{rot } \vec{M} = \vec{j}_{\text{мол}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}}}, \quad \vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Закон Био – Савара – Лапласа для  $\vec{H}$  (вихревое поле)

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{j}_{\text{пр}} \times \vec{r}]}{r^3} dV}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\text{div } \vec{B} = \mu_0 \text{div } \vec{H} + \mu_0 \text{div } \vec{M} = 0$$

$$\boxed{\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M} \neq 0} \quad \leftrightarrow \quad \text{div } \vec{P} = -\rho_{\text{пол}}$$

$$\text{div } \vec{M} = -\rho_{\text{м}} - \text{«фиктивный» магнитный заряд}$$

$$\text{div } \vec{H} = \rho_{\text{м}} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho_{\text{м}} \vec{r}}{r^3} dV \quad (\text{м})$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV \quad (\text{э})$$

$$\vec{H} = \vec{H}_{\text{вихр}} + \vec{H}_{\text{пот}}$$

$$\vec{H}_{\text{вихр}} \rightarrow \text{токи проводимости (закон БСЛ, теорема о циркуляции)}$$

$$\vec{H}_{\text{пот}} \rightarrow \rho_{\text{м}} = -\text{div } \vec{M} \quad (\text{теорема Гаусса})$$

Пример 1. Соленоид

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I_{\text{пров}}, \quad B = \mu_0 nI$$

Для вакуума:

$$\vec{H} = \frac{B}{\mu_0} = nI$$

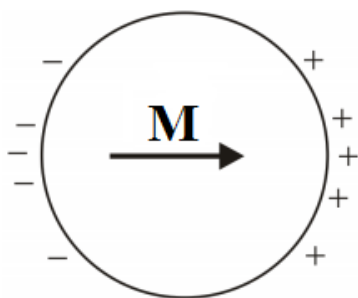
Пример 2. Постоянный магнит

$$\sigma_M = M \leftrightarrow \sigma_{\text{пол}} = P$$

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow B = \mu_0 M$$

$$Q_M = \sigma_M S = MS$$

Поле размагничивания



$$\vec{H}_M = -\frac{\vec{M}}{3}$$

$H_M$  – поле размагничивания

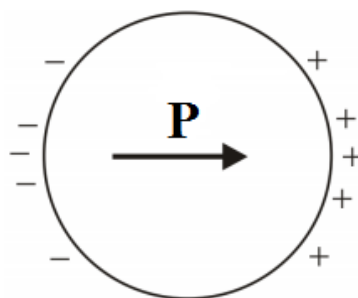
$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} = (\mu - 1) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{M} = (\mu - 1) \left( \vec{H}_{\text{вн}} - \frac{\vec{M}}{3} \right)$$

$$\vec{M} \cong (\mu - 1) \vec{H}_{\text{вн}}$$

Энергия диполя:  $W = -(\vec{m} \cdot \vec{B}) < 0 \leftrightarrow$  притяжение



$$\vec{E}_{\text{пол}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$\vec{E}_{\text{пол}}$  – деполяризационное поле

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) (\vec{E}_{\text{вн}} + \vec{E}_{\text{пол}})$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \left( \vec{E}_{\text{вн}} - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

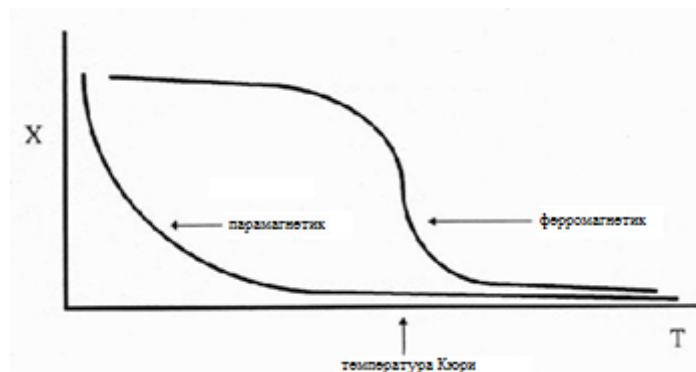


## Магнетики

ферромагнетики:  $\mu \gg 1 \Rightarrow M = (\mu - 1)H_{\text{вн}} \approx \mu H_{\text{вн}} \gg H_{\text{вн}}$

парамагнетики:  $\mu \approx 1, \mu > 1$

диамагнетики:  $\mu \approx 1, \mu < 1$

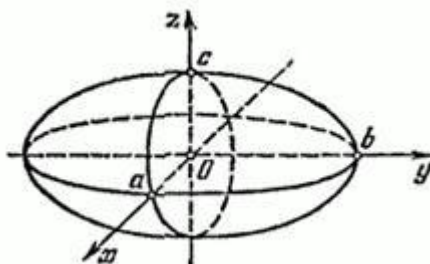


раствор  $\text{FeCl}_3$  в  $\text{H}_2\text{O}$  – парамагнетик

Bi – диамагнетик

Если  $\vec{m}$  и  $\vec{B}$  противоположны, то  $W = -(\vec{m} \cdot \vec{B}) > 0$ .

## Фактор формы



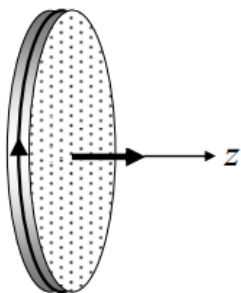
Поле внутри эллипсоида однородно.

$$(\vec{H}_{\text{in}})_x = (\vec{H}_{\text{вн}})_x - N_x(\vec{M})_x, \quad N_x - \text{фактор формы}$$

$$N_x + N_y + N_z = 1$$

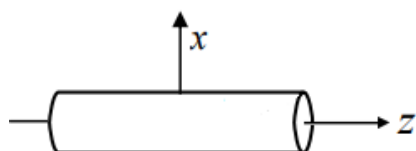
### Предельные случаи:

1. Диск.



$$N_z \approx 1, \quad N_x \approx N_y \approx 0$$

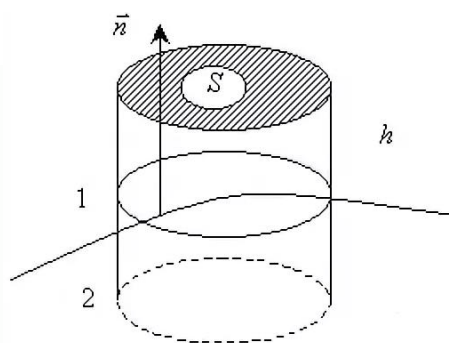
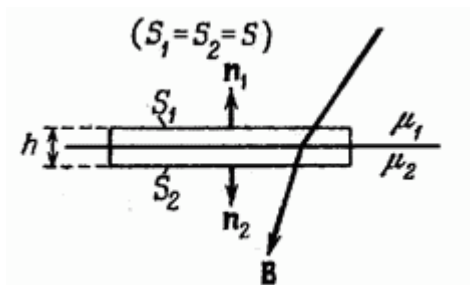
2. Цилиндр.



$$L \gg R$$

$$N_z \approx 0, \quad N_x \approx N_y \approx \frac{1}{2}$$

Граничные условия для векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$



$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M}$$

$$\oiint_{\Phi} (\vec{B} \cdot d\vec{s}) = 0, \quad h \rightarrow 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$H_{1n} + M_{1n} = H_{2n} + M_{2n} \Rightarrow H_{1n} - H_{2n} = M_{2n} - M_{1n}$$

$$\operatorname{div} \vec{M} = -\rho_M$$

$$M_{1n} - M_{2n} = \sigma_M$$

$$M_{1n} = M, \quad M_{2n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_M = M$$

$$H_{1n} - H_{2n} = -\sigma_M$$

$$H_{1n} = -H, \quad H_{2n} = H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\sigma_M}{2} \quad \leftrightarrow \quad E = \frac{\sigma_\varepsilon}{2\varepsilon_0}$$

Среды 1 и 2 – линейные и изотропные.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 \mu \frac{\vec{M}}{\mu - 1}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 H_{1n} &= \mu_2 H_{2n} \\ \frac{\mu_1}{\mu_1 - 1} M_{1n} &= \frac{\mu_2}{\mu_2 - 1} M_{2n} \end{aligned}$$

Для соленоида:

$$B = \mu_0 n I = \frac{NI}{L} \mu_0 = \mu_0 i_{\text{пов}}$$

$i_{\text{пов}}$  – линейная плотность тока

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 I$$

$$\begin{aligned} B_{1\tau} - B_{2\tau} &= \mu_0 i_{\text{пов}}^{\text{полн}} \\ H_{1\tau} - H_{2\tau} &= i_{\text{пов}}^{\text{пров}} \\ M_{1\tau} - M_{2\tau} &= i_{\text{пов}}^{\text{мол}} \end{aligned}$$

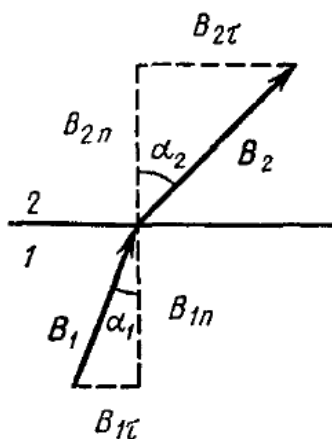
Если токов проводимости нет:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

$$M_{1\tau} = M = i_{\text{пов}}^{\text{мол}} L \quad \Rightarrow \quad I = i_{\text{пов}}^{\text{мол}} L = ML$$



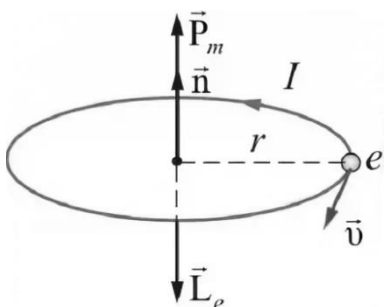
## Лекция 17



$$j_{\text{пров}} = 0 \Rightarrow H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}$$

$$B_{1\tau} = \mu_0 \mu_1 H_{1\tau}, \quad B_{2\tau} = \mu_0 \mu_2 H_{2\tau}$$

$$\mu_2 > \mu_1 \Rightarrow B_{2\tau} > B_{1\tau}$$



$$\vec{L}_e - \text{механический момент, } |\vec{L}_e| = r m v$$

$$I = q \cdot \frac{v}{2\pi r}, \quad S = \pi r^2$$

$$p_m = IS = \frac{qvr}{2} = \frac{q}{2m} \cdot L$$

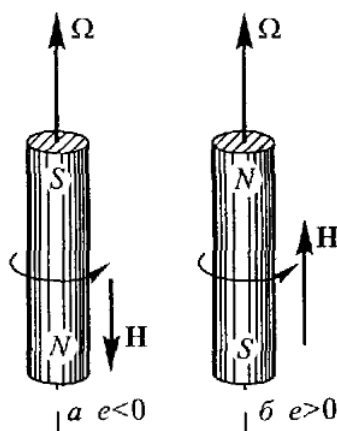
$$\boxed{\vec{p}_m = \frac{q}{2m} \vec{L}}$$

$$\gamma_L = \frac{q}{2m} - \text{гиромагнитное отношение для орбитального движения частицы}$$

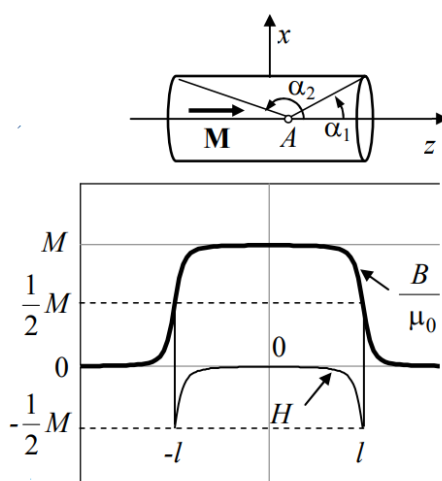
В частности, для электрона:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_e, \quad \gamma_{L_e} = -\frac{e}{2m}$$

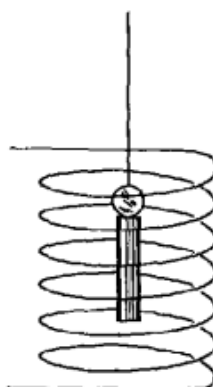
### Механомагнитный опыт Барнетта



намагничивание при вращении



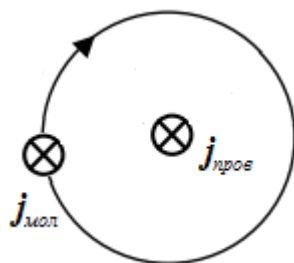
### Магнитомеханический опыт Эйнштейна – де Гааза



вращение при намагничивании

$$\chi_m = \frac{1}{2} \cdot 1,75 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \text{ Тл}^{-1}$$

### Замечание



$$\vec{j}_{\text{мол}} = (\mu - 1)\vec{j}_{\text{пров}} \leftrightarrow \rho_{\text{пол}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho_{\text{непол}}$$

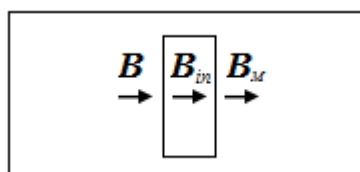
$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}} \\ \vec{M} = (\mu - 1)\vec{H} \\ \text{rot } \vec{M} = \vec{j}_{\text{мол}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\mu - 1} \text{rot } \vec{M} = \vec{j}_{\text{пров}}$$

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{мол}} + \vec{j}_{\text{пров}} = \mu \vec{j}_{\text{пров}}$$

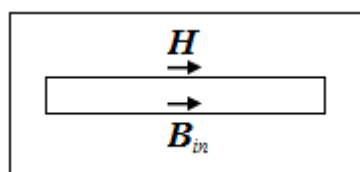
$$B_{\text{вак}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad B_{\text{магн}} = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$$

В однородном магнетике молекулярные токи могут быть только на поверхности.

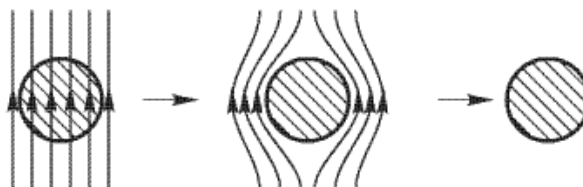
Магнитное поле в полости. Вытеснение магнитного поля из сверхпроводника.



$$\vec{B}_{\text{in}} = \vec{B}_M$$



$$\vec{B}_{\text{in}} = \mu_0 \vec{H}_M$$



$$\vec{B}_{\text{in}} = (\vec{H}_{\text{in}} + \vec{M})\mu_0$$

$$\vec{H}_{\text{in}} = -\vec{M}$$

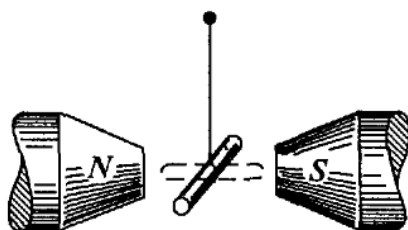
$$B_{\text{вак}} = \mu_0 H_{\text{вак}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

пара-, ферро-:  $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{H}$

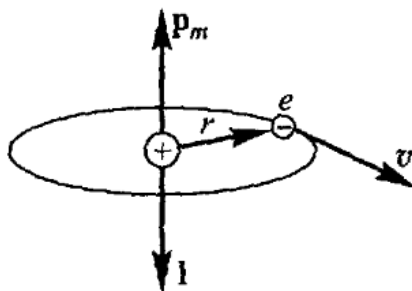
диа-:  $\vec{M} \uparrow\downarrow \vec{H}$

### Диамагнетики



$$\chi_m = \mu - 1 < 0, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

### Прецессия Лармора



$$F_{\text{цб}} = m\omega_0^2 r - B = 0, \quad v = \omega r$$

$$F_{\text{цб}} \pm qvB = m\omega^2 r \Rightarrow m(\omega^2 - \omega_0^2)r = \pm qvB$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \underbrace{(\omega - \omega_0)}_{\Delta\omega} \underbrace{(\omega + \omega_0)}_{\approx 2\omega} \approx 2\omega\Delta\omega, \quad \omega \approx \omega_0$$

$$\Delta\omega = \pm \frac{q}{2m} B = \pm \gamma_L B$$

$$L = mvr = m\omega r^2 \quad \leftrightarrow \quad p_m = \gamma_L L$$

$$\Delta L = m\Delta\omega r^2 \quad \leftrightarrow \quad \Delta p_m = \gamma_L \Delta L = \gamma_L \Delta L = \gamma_L m \Delta\omega r^2$$

$$\Delta M = \Delta p_m \cdot N \cdot Z \cdot 1, \quad \Delta M = \chi_m \Delta B = \chi_m B$$

$Z$  – количество электронов в атоме,  $N$  – количество атомов в единице объема

$$\Delta p_m = \frac{q}{2m} \cdot m \cdot \frac{q}{2m} B r^2 = \frac{q^2}{4m} B r^2$$

$$\Delta M = NZ \frac{q^2}{4m} \langle r^2 \rangle B$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = \langle R^2 \rangle, \quad R \text{ – размер атома}$$

$$\frac{\langle R^2 \rangle}{3} = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle, \quad \langle x^2 + y^2 \rangle = \langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle R^2 \rangle$$

$$\Delta M = \underbrace{\frac{q^2}{6m} NZ \langle R^2 \rangle}_{\chi_m} B$$

$$\chi_m \approx 10^8 \text{ с}^{-1} \text{Тл}^{-1}$$

Особенности диамагнетизма:

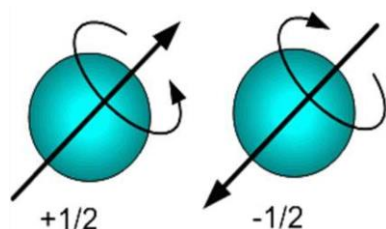
1. Диамагнетизм зависит от межатомных взаимодействий.
2.  $\chi < 1$  – не зависит от  $T$ .
3. Существует в любом веществе.

### Парамагнетики

Парамагнетики – вещества, в которых существуют атомные магнитные диполи при отсутствии внешнего магнитного поля.

Виды – ионы переходных металлов.

### Спиновый магнетизм



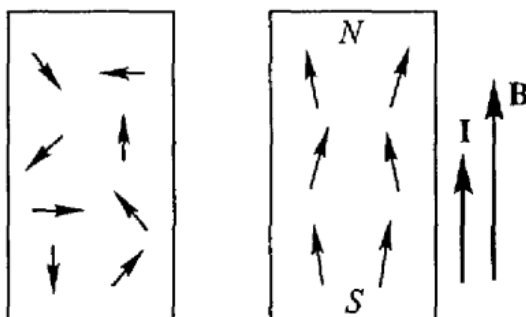
$$p_{\text{сп}} = \gamma_L L_{\text{сп}} g, \quad g \text{ – «g-фактор», для электронов } g = 2$$

$$\gamma_L = \frac{e}{2m}, \quad p_m \approx \mu_B, \quad \mu_B \approx 10^{-20} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

$\mu_B$  – магнетон Бора,  $1 \text{ Гс} = 10^4 \text{ Тл}$ ,  $1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж}$

$\text{Fe}^{3+}$ ,  $\text{Cu}^{2+}$

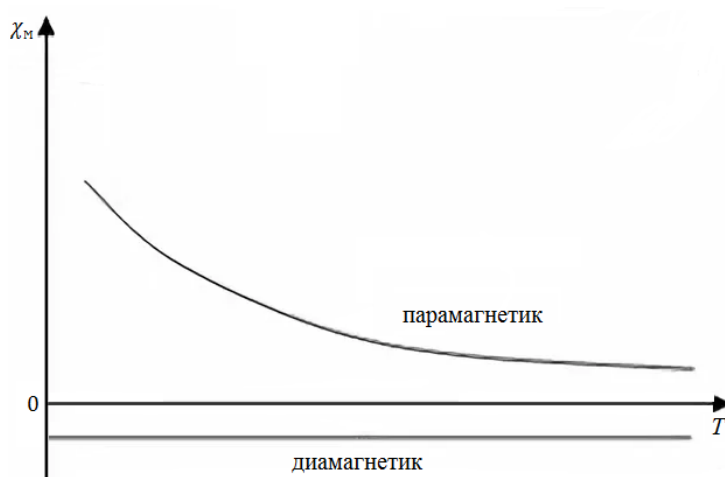
$$W = -p_m \cdot B, \quad [p_m] = \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$



$$\langle p_{m,B} \rangle = p_m \mathcal{L}(\xi), \quad \xi = \frac{\mu_B B}{k_B T}$$

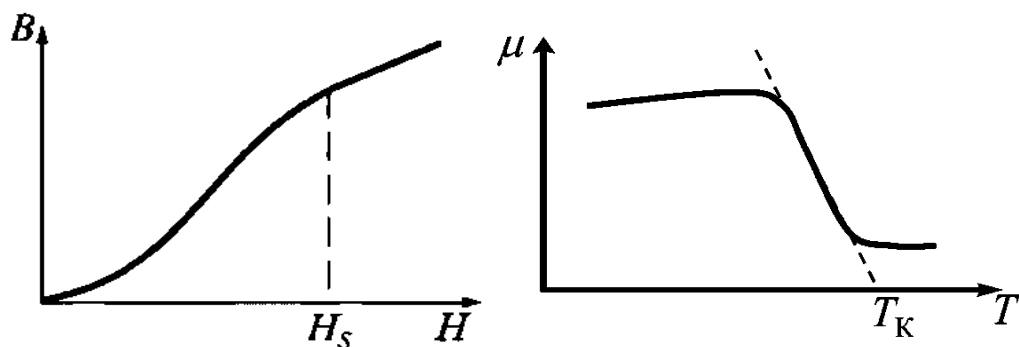
$$\xi \ll 1 \Rightarrow \mathcal{L}(\xi) \approx \frac{\xi}{3}, \quad \langle p_{m,B} \rangle = \frac{p_m^2}{3k_B T} B$$

$$\chi_m = N \frac{p_m^2}{2k_B T}$$



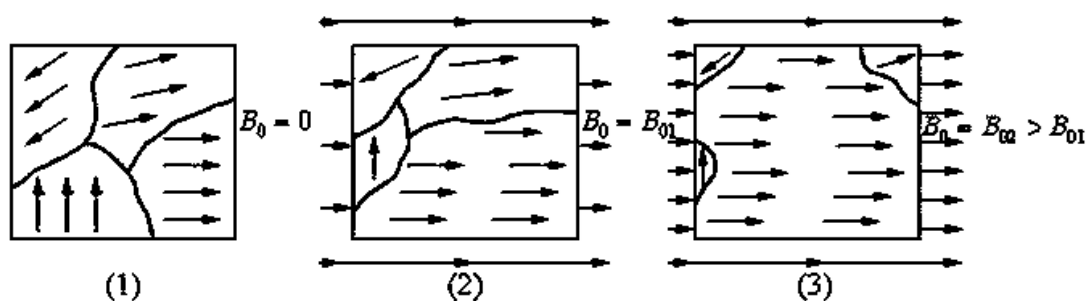
### Ферромагнетики

Ферромагнетики – сильномагнитные вещества

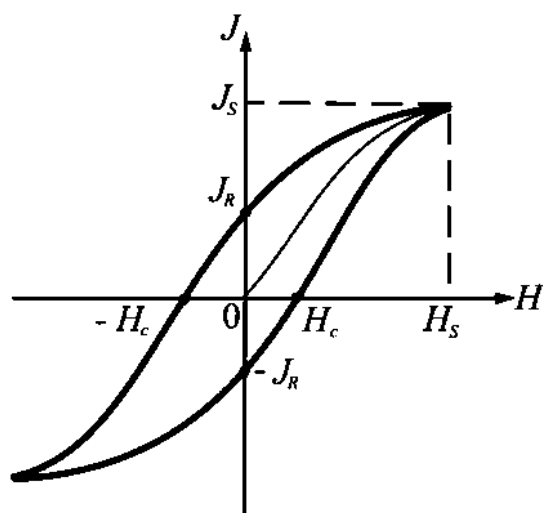


Система стремится уменьшить свою энергию.

$$W = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

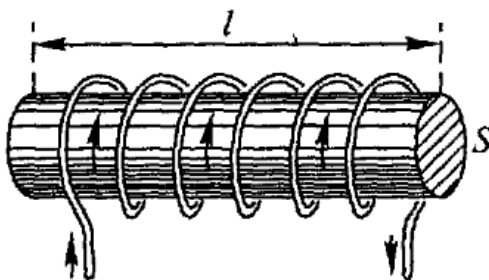


Для ферромагнетиков характерна петля гистерезиса.



## Лекция 18

### Энергия и силы в магнитном поле при наличии магнетика



$$Id\Phi = dW_{\text{магн}} + \delta A_{\text{Ампер}}$$

$$H = nI = \frac{N}{L}I, \quad \Phi = BSN, \quad d\Phi = NSdB$$

$$Id\Phi = \frac{HL}{N}SNdB = HVdB = dW_{\text{магн}}$$

$$dW_{\text{магн}} = (\vec{H} \cdot d\vec{B})\delta V \Rightarrow \boxed{W_{\text{магн}} = \iiint_V \left( \int_0^{B_0} (\vec{H} \cdot d\vec{B}) \right) \delta V}$$

Для однородной изотропной среды:  $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$

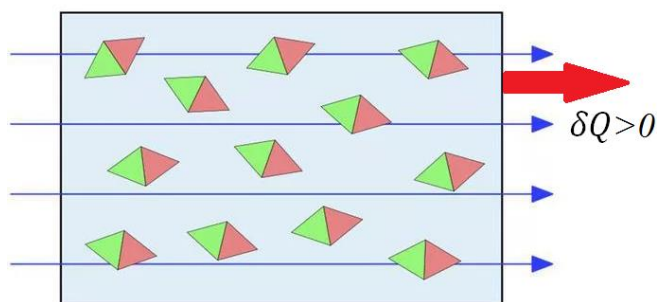
$$w_{\text{магн}} = \frac{dW_{\text{магн}}}{dV} = (\vec{H} \cdot d\vec{B}) = \frac{1}{\mu\mu_0} (\vec{B} \cdot d\vec{B}) = d\left(\frac{B^2}{2\mu\mu_0}\right) = d\left(\frac{(\vec{B} \cdot \vec{H})}{2}\right)$$

$$W_{\text{магн}} = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{H})}{2}V = \frac{\mu_0((\vec{H} + \vec{M}) \cdot \vec{H})}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2} + \frac{\mu_0(\vec{H} \cdot \vec{M})}{2}$$

В случае парамагнетика энергия уменьшается:

$$W_{\text{дип}} = -(\vec{m} \cdot \vec{B}), \quad M_x = \chi H$$





I-е начало термодинамики:

$\delta Q = \delta A_{\text{мех}} + dU - HdM \rightarrow$  происходит выделение теплоты при намагничивании.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{B}) = \mu_0(\vec{H} \cdot d\vec{H}) + \mu_0(\vec{H} \cdot d\vec{M})$$

$$F_{\text{дип}} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}), \quad m = \text{const} \Rightarrow F_{\text{дип}} = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{E}$$

В веществе:  $\vec{m} = \vec{M}dV$

$$\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H} = \frac{\mu - 1}{\mu_0\mu}\vec{B}, \quad \mu = \text{const}$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu - 1}{\mu_0\mu}(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}dV, \quad (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} = \frac{\nabla B^2}{2}$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu - 1}{2\mu_0\mu}\nabla B^2$$

$\mu > 1$  – парамагнетик  $\leftrightarrow d\vec{F}$  направлена в сторону увеличения поля

$\mu < 1$  – диамагнетик  $\leftrightarrow d\vec{F}$  направлена в сторону уменьшения поля

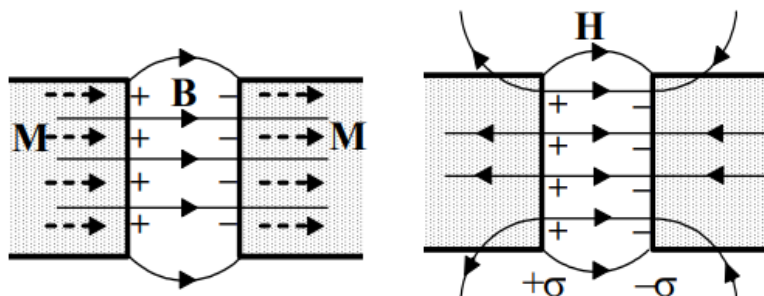
Для постоянных магнитов  $\vec{M} \neq (\mu - 1)\vec{H}$

$$\vec{F}_{\text{магн}} = \iiint_V \rho_{\text{магн}} \vec{B}_{\text{внеш}} dV + \iint_{\Sigma} \sigma_{\text{м}} \vec{B}_{\text{внеш}} dS$$

Внешнее поле не включает поле самого магнита.

$$\rho_{\text{магн}} = -\text{div } \vec{M}$$

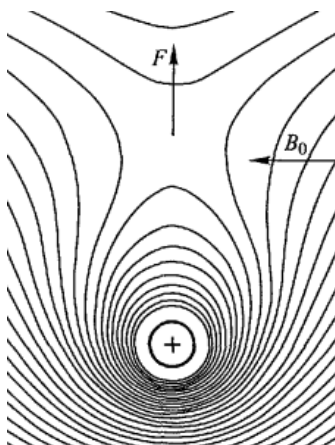
### Магнит с постоянной намагниченностью, разделенный на две части



$$H = \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

$$F = \sigma_m S B_{\text{внеш}} = MS \cdot \frac{\mu_0 M}{2} = \frac{\mu_0 M^2}{2} S$$

### Тензор напряжения Максвелла для линейной изотропной среды

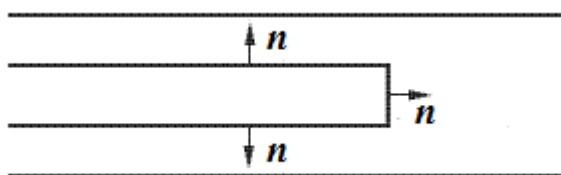


$$\vec{F}_\Sigma = \mu_0 \iint_\Sigma \left( (\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} H^2 \vec{n} \right) dS$$

### Затягивание магнетика в соленоид

$$F_\xi = \left. \frac{dW_{\text{магн}}}{d\xi} \right|_{I=\text{const}}$$

#### Способ 1

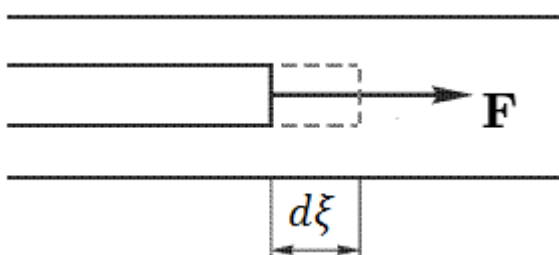


$$d\vec{F} = \frac{\mu - 1}{2\mu_0\mu} \nabla B^2 \Rightarrow \vec{F} = \frac{\mu - 1}{2\mu_0\mu} \iiint_V \nabla B^2 dV$$

$$\iiint_V \nabla \varphi dV = \oint_{\delta V} \varphi \vec{n} dS, \quad \delta V = d\xi \cdot S$$

$$F = \frac{\mu - 1}{2\mu_0\mu} B^2 S$$

Способ 2



$$\delta W_{\text{нач}} = \frac{\mu_0 H^2}{2} d\xi \cdot S$$

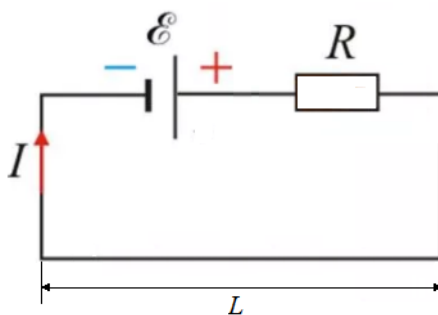
$$\delta W_{\text{кон}} = \frac{BH}{2} d\xi \cdot S = \frac{\mu_0 \mu H \cdot H}{2} d\xi \cdot S = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} d\xi S$$

$$\delta W_{\text{магн}} = \delta W_{\text{кон}} - \delta W_{\text{нач}} = \frac{\mu_0}{2} d\xi S H^2 (\mu - 1)$$

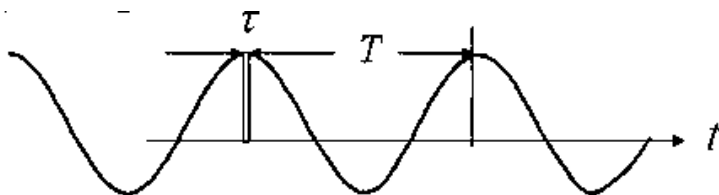
$$F = \left. \frac{\delta W_{\text{магн}}}{d\xi} \right|_{I=\text{const}} = \frac{\mu_0 (\mu - 1)}{2} H^2 S = \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu^2} B^2 S$$

$$\mu \approx 1 \Rightarrow F \approx \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu} B^2 S$$

## Квазистационарные токи. Критерий квазистационарности



1. Сила тока во всех участках неразветвленной цепи постоянна.



$$\lambda = cT, \quad l_{\text{хар}} \approx c \cdot \tau_{\text{хар}} \gg L$$

$$\tau_{\text{хар}} \gg \frac{L}{c}$$

$$\nu = 50 \text{ Гц}, \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ м} = 6 \cdot 10^3 \text{ км}$$

2.  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}}$

$$\vec{H} \rightarrow \vec{B} \rightarrow \Phi \rightarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$j_{\text{смещ}} \ll j_{\text{пров}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{j}_{\text{пров}} = \sigma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{j}_{\text{пров}}}{\partial t}$$

$$\vec{j}_{\text{пров}} \sim \cos \omega t, \quad \frac{\partial \vec{j}_{\text{пров}}}{\partial t} \sim \omega \vec{j}_{\text{пров}}$$

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \omega j_{\text{пров}} \ll j_{\text{пров}}$$

$$\boxed{\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$$

$$\varepsilon \approx 1, \quad \sigma \approx 10^8, \quad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}, \quad \omega \ll 10^{19} \text{ с}^{-1}$$

$$\nu_{\text{вид.света}} \approx 10^{15} \text{ Гц}$$

3. Для постоянного тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0$$

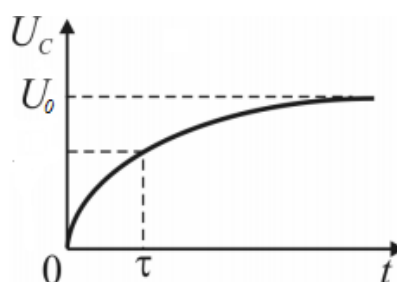
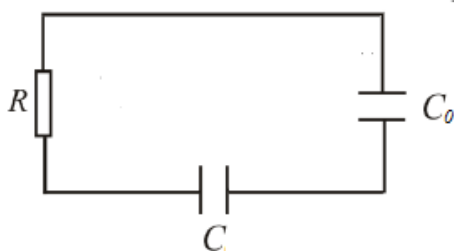
$$\begin{cases} \vec{j} = \sigma \vec{E} \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\right)^{-1} dt$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

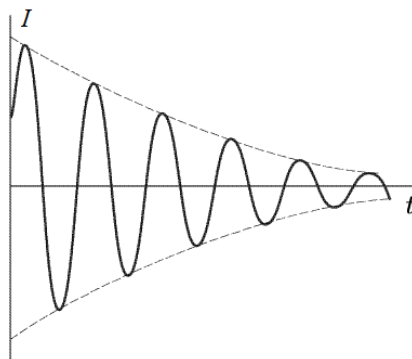
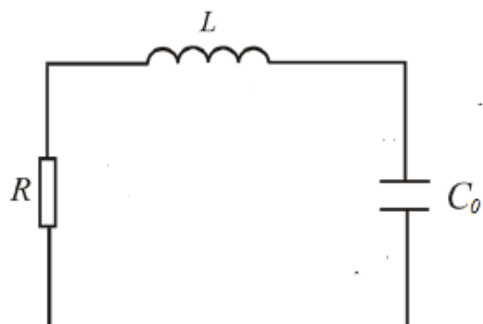
$$T = \frac{1}{\nu} \gg \tau \Rightarrow \boxed{\nu \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

### Квазистационарные процессы

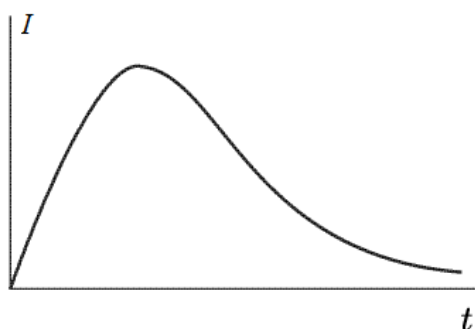
#### 1) Переходные процессы



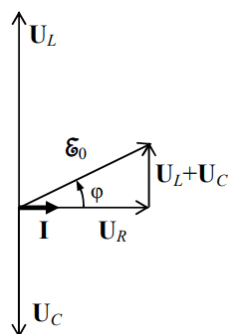
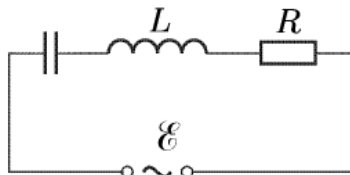
#### 2) Электрические колебания (затухающие, вынужденные)



При большом  $R$  затухание велико:

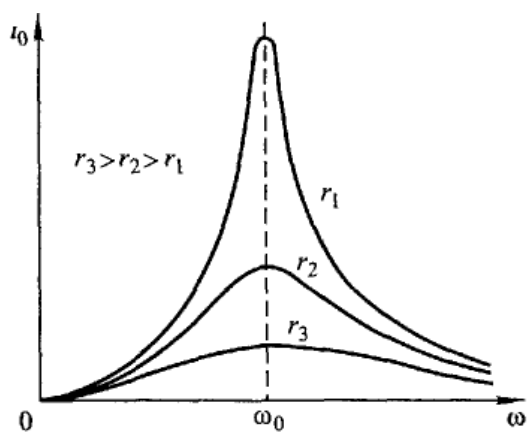


### 3) Переменный ток



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad |U_R| \sim R, \quad |U_C| \sim \frac{1}{\omega C}, \quad |U_L| \sim \omega L$$

$$\mathcal{E}^2 = (U_L - U_C)^2 + U_R^2$$



Квазистационарные токи подчиняются законам Ома и правилам Кирхгофа.

## Лекция 19

Закон сохранения энергии в цепях квазистационарного тока

$$Id\Phi = dW_{\text{магн}} + \delta A_{\text{АМП}}$$

$$\mathcal{E}I = I^2R + Id\Phi + \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

$\mathcal{E}I$  — мощность внешнего источника

Если  $\delta A_{\text{АМП}} = 0$ :

$$\mathcal{E}I = I^2R + \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{L}I^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right), \quad \mathcal{L}, C = \text{const}$$

$$\mathcal{E}I = I^2R + LI\dot{I} + \frac{q}{C}\dot{q}, \quad \dot{q} = I$$

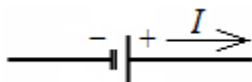
$$\mathcal{E} = IR + \mathcal{L}\dot{I} + \frac{q}{C}, \quad U_R = IR, \quad U_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\dot{I}, \quad U_C = \frac{q}{C}$$

Закон Ома для цепи квазистационарного тока

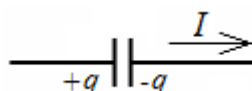
$$\boxed{\sum_j \mathcal{E}_j = \sum_i U_i}$$

Правила знаков

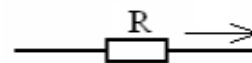
1)  $\mathcal{E} > 0$



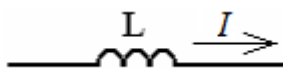
2)  $U_C > 0$



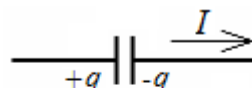
3)  $U_R > 0$



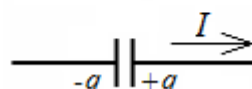
4)  $U_{\mathcal{L}} > 0$



5)  $\dot{q} = +I$



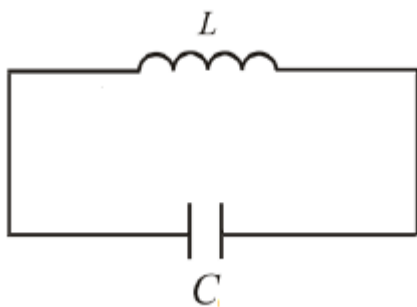
$\dot{q} = -I$



Собственные электрические колебания

1. Гармонические колебания:  $R = 0$





$$\begin{cases} \frac{q}{C} + \mathcal{L}i = 0 \\ \dot{q} = I \end{cases} \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{\mathcal{L}C}q = 0$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \leftrightarrow \text{гармонический осциллятор}$$

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - \text{решение единственно}$$

$$q_0 = \sqrt{q^2(0) + \frac{I^2(0)}{\omega_0^2}}$$

$$\dot{q} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I(0) = -q_0 \omega_0 \sin \varphi$$

$$q(0) = q_0 \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I(0)}{q(0)\omega_0}$$

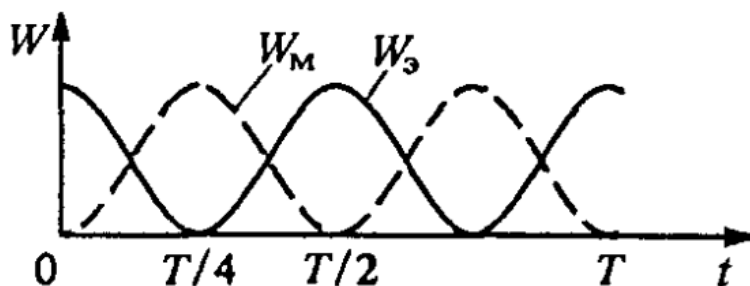
$\omega_0$  – частота собственных незатухающих колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

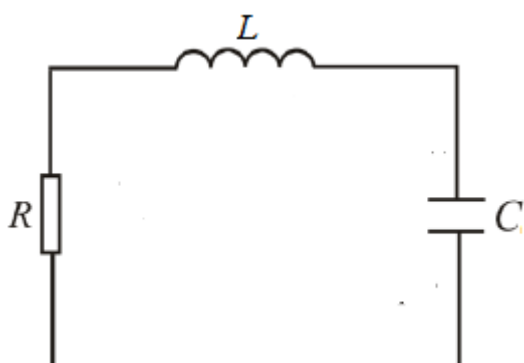
$T_0 = 2\pi\sqrt{\mathcal{L}C}$  – формула Томсона для периода собственных незатухающих колебаний

Превращение энергии:

$$W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \frac{q_{\text{max}}^2}{2C} = \frac{\mathcal{L}I_{\text{max}}^2}{2} = \text{const}$$



2. Затухающие колебания:  $R \neq 0$



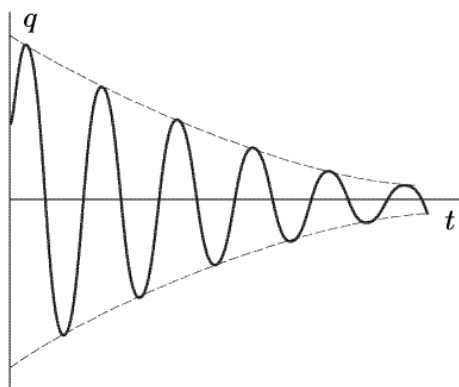
$$\begin{cases} IR + \frac{q}{C} + \mathcal{L} \dot{I} = 0 \\ \dot{q} = I \end{cases} \Rightarrow \ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\gamma = \frac{R}{2\mathcal{L}}$$

$q = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$  – решение единственно

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Считаем, что  $\gamma \ll \omega_0$  (затухание слабое).



$$\ln\left(\frac{q_0 e^{-\gamma(t)}}{q_0 e^{-\gamma(t+T_1)}}\right) = \ln(e^{\gamma T_1}) = \gamma T_1$$

$\boxed{\theta = \gamma T_1}$  – логарифмический декремент затухания

$$\gamma \ll \omega_1 \Rightarrow \theta = \gamma \frac{2\pi}{\omega_1} \ll 1$$

Добротность колебательного контура

$$\boxed{Q \equiv 2\pi \frac{\langle W_{\text{КОНТ}} \rangle}{|\Delta W_T|}}$$

$$\langle W_{\text{КОНТ}} \rangle = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2\gamma t}$$

$$|\Delta W_T| = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2\gamma t} - \frac{q_0^2}{2C} e^{-2\gamma(t+T_1)} = \underbrace{\frac{q_0^2}{2C} e^{-2\gamma t}}_{\langle W_{\text{КОНТ}} \rangle} (1 - e^{-2\gamma T_1})$$

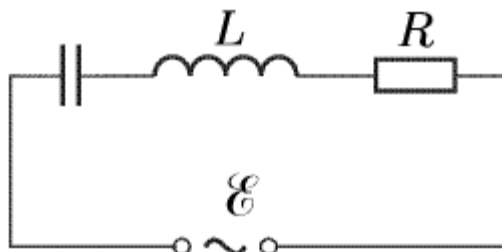
$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T_1}} \approx \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\gamma T_1)} = \frac{\pi}{\gamma T_1} \quad (e^x \approx 1 + x, \quad x \ll 1)$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\theta}}$$

$$\theta = \gamma T_1 = \gamma \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{R}{2\mathcal{L}} \cdot 2\pi\sqrt{\mathcal{L}C} = \pi R \sqrt{\frac{C}{\mathcal{L}}}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}}}$$

Вынужденные колебания в  $R\mathcal{L}C$  – контуре

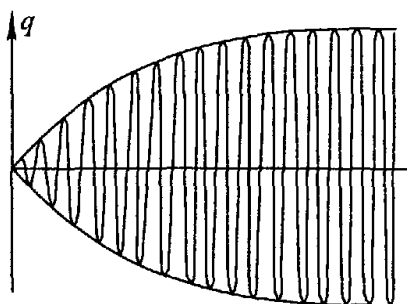


$$IR + \mathcal{L}\dot{I} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad I = \dot{q}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L}} \cos \omega t$$

(общее решение НУ) = (общее решение ОУ) + (частное решение НУ)

$$q_{0y} = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$



Время установления колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

При установившихся колебаниях:

$$q = q_0 \cos(\omega t + \psi)$$

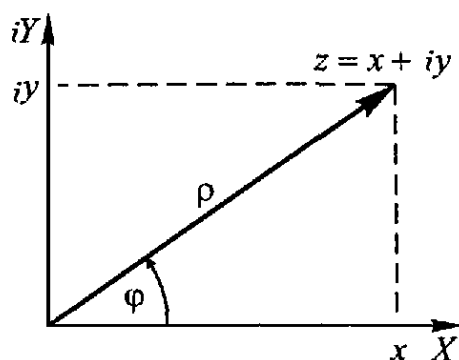
$$I = \dot{q} = -\omega q_0 \sin(\omega t + \psi) = I_0 \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right), \quad I_0 = q_0 \omega$$

$$U_L = \mathcal{L}\dot{I} = \mathcal{L}q_0 \omega^2 \cos(\omega t + \psi + \pi)$$

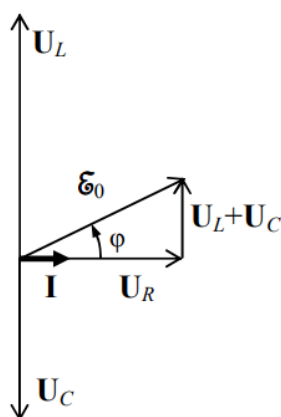
Представление в комплексном виде

$$\mathcal{E} = A \cos(\omega t + \alpha) \leftrightarrow z = \rho e^{i\varphi}$$

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad x = \operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi, \quad y = \operatorname{Im} z = \rho \sin \varphi$$



### Метод векторных диаграмм



$$\vec{U}_L + \vec{U}_C + \vec{U}_R = \vec{\mathcal{E}} \Rightarrow U_{Lx} + U_{Cx} + U_{Rx} = \mathcal{E}_x$$

$$U_{Lx} = U_{0x} \cos(\omega t + \alpha), \quad \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

$$U_C \sim q, \quad U_R \sim \dot{q}, \quad U_L \sim \ddot{q}$$

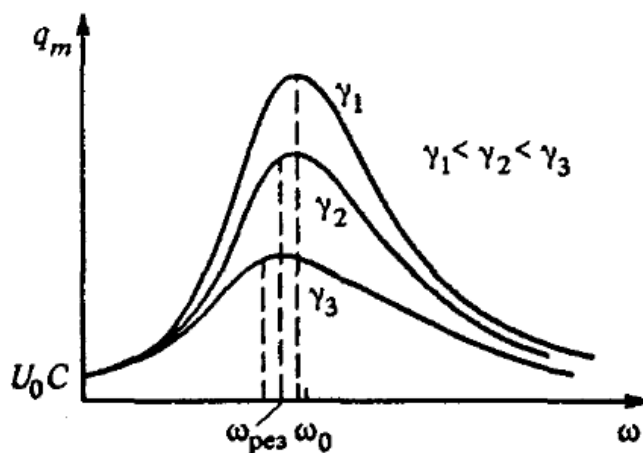
$$|\vec{\xi}|^2 = |\vec{U}_L + \vec{U}_C|^2 + |\vec{U}_R|^2$$

$$U_{R_0} = q_0 \omega_0 R, \quad U_{L_0} = \mathcal{L} q_0 R, \quad U_{C_0} = \frac{q_0}{C}$$

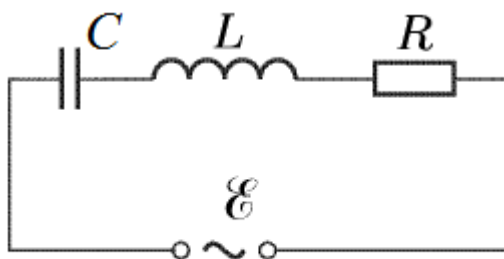
$$\mathcal{E}_0^2 = q_0^2 \left( \mathcal{L} \omega^2 - \frac{1}{C} \right)^2 + q_0^2 \omega^2 R^2 = q_0^2 \mathcal{L}^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q_0^2 \omega^2 R^2$$

$$q_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{L}^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2}}, \quad \gamma = \frac{R}{2\mathcal{L}}, \quad Q = \frac{q_{max}}{\xi_0 C}$$

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L} \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}}, \quad \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$



## Лекция 20



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad \mathcal{E} = U_L + U_C + U_R$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \psi), \quad \psi < 0$$

$$U_R = IR = I_0 R \cos(\omega t + \psi), \quad I_{R_0} = I_0 R$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega t + \psi_1), \quad I = \dot{q}$$

$$I_0 \cos(\omega t + \psi) = q_0 \omega \cos\left(\omega t + \psi_1 + \frac{\pi}{2}\right), \quad q_0 = I_0 / \omega_0$$

$$U_{C_0} = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega C} = I_0 \frac{1}{\omega C}$$

$$\frac{1}{\omega C} - \text{«сопротивление» конденсатора по переменному току}$$

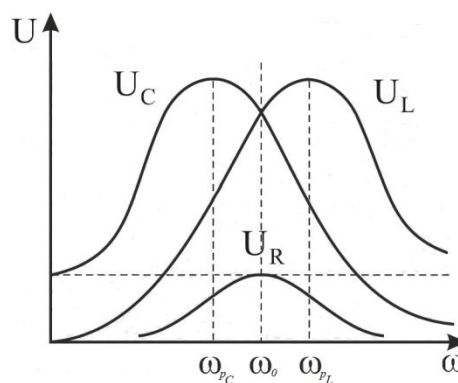
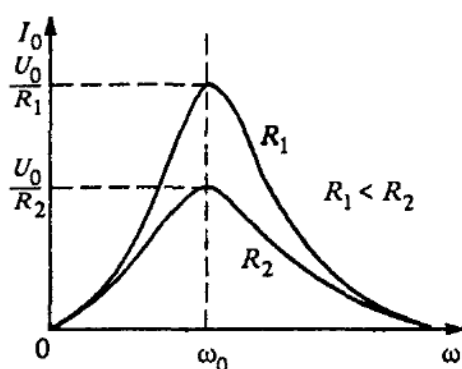
$$U_L = \mathcal{L} \dot{I} = I_0 (\omega \mathcal{L})$$

$\omega\mathcal{L}$  – «сопротивление» катушки по переменному току

$$\mathcal{E}_0^2 = I_0^2 \left( \left( \omega\mathcal{L} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \right)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left( \omega\mathcal{L} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}}, \quad q_0 = \frac{I_0}{\omega}$$

### Резонансные кривые



$$\omega_{pC} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad \omega_{pL} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

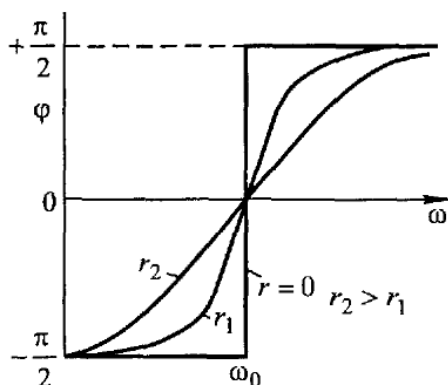
$$\boxed{\omega_0^2 = \omega_{pC} \cdot \omega_{pL}}$$

### Резонанс напряжений

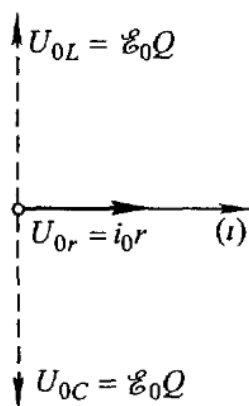
$$U_R \sim I_0 R, \quad U_C \sim I_0 \left( \frac{1}{\omega C} \right), \quad U_L \sim I_0 (\omega \mathcal{L})$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow U_{L_0} \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow U_{C_0} \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{U_{L_0} - U_{C_0}}{U_{R_0}} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$



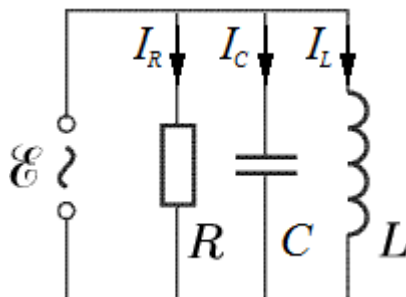
При  $\omega = \omega_0$ :



$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}, U_{C_0} = I_0 \left( \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{\varepsilon_0}{R} \frac{1}{\omega C}$$

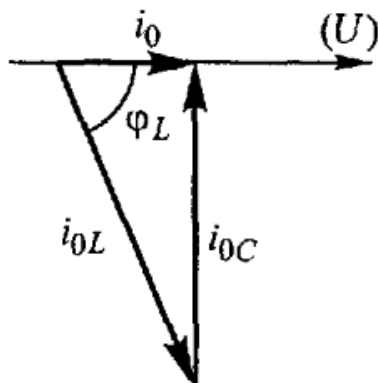
$$\frac{1}{\omega C R} \gg 1 \Rightarrow U_{C_0} = U_{L_0} \gg \varepsilon_0$$

Резонанс токов



$$I_{L_0} = \frac{\varepsilon_0}{\omega L}, \quad I_{C_0} = \varepsilon_0 \omega C, \quad I_{R_0} = \frac{\varepsilon_0}{R}$$





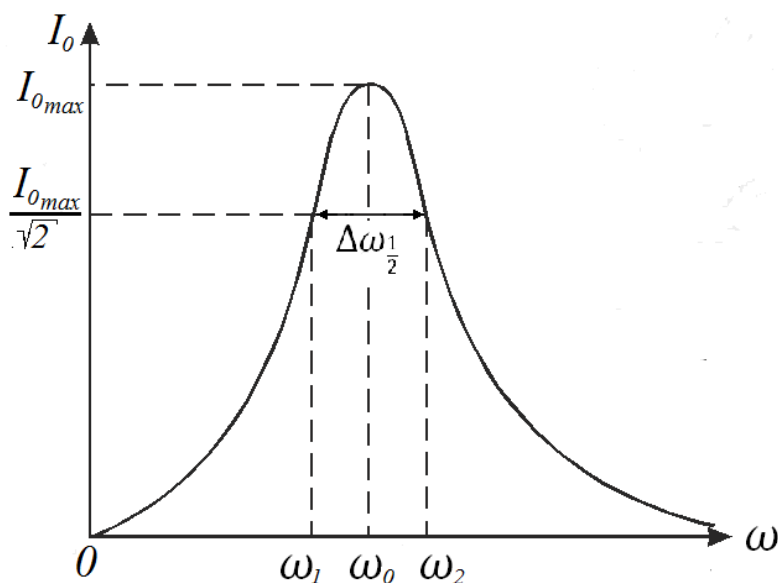
$$I_0^2 = \varepsilon_0^2 \left( \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \right)$$

$$U_{C_0} = \frac{I_0}{\omega C} = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}}$$

$$U_{C_0 \max} \approx \frac{\varepsilon_0}{R} \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\varepsilon_0}{R} \frac{\sqrt{LC}}{C} = \varepsilon_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 Q$$

$$Q = \frac{\sqrt{U_{L_0} U_{C_0}}}{U_{R_0}}$$

Полуширина резонансной кривой



$$\Delta\omega_{\frac{1}{2}} = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{\omega}{\theta}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\omega\mathcal{L} - \frac{1}{\omega\mathcal{C}}\right)^2 + R^2}}, \quad I_{0max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$R^2 = \left(\omega\mathcal{L} - \frac{1}{\omega\mathcal{C}}\right)^2 = \mathcal{L}^2 \left(\omega - \frac{1}{\omega\mathcal{L}\mathcal{C}}\right)^2 = \mathcal{L}^2 \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 = \frac{\mathcal{L}^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2$$

$$R = \frac{\mathcal{L}}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) = \mathcal{L}(\omega + \omega_0) \underbrace{(\omega - \omega_0)}_{\frac{1}{2}\Delta\omega_{\frac{1}{2}}} \approx 2\omega_0 \cdot \frac{1}{2} \Delta\omega_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\mathcal{L}}{\omega_0}$$

$$R \approx \mathcal{L} \Delta\omega_{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \frac{\mathcal{L}}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = Q$$

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\frac{1}{2}}}$$

Метод комплексных амплитуд

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

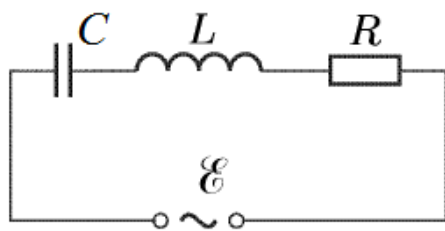
$$\hat{U}_C = \hat{I}_C \hat{Z}, \quad \hat{Z} - \text{импеданс}$$

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega\mathcal{C}} = \frac{1}{\omega\mathcal{C}} (-i) = \frac{1}{\omega\mathcal{C}} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\hat{U}_C = I_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\omega\mathcal{C}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{I_0}{\omega\mathcal{C}} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega\mathcal{C}}, \quad \hat{Z}_L = i\omega\mathcal{L}, \quad \hat{Z}_R = R$$

Пример:  $R\mathcal{L}\mathcal{C}$  – цепь.



$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{U}_C + \hat{U}_L + \hat{U}_R$$

$$\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = \hat{I} \cdot \frac{1}{i\omega C} + \hat{I} \cdot i\omega L + \hat{I}R$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{I} \left( R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right)$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \left( R - i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\hat{z} = a + ib = \rho e^{i\psi} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \arctg \left( \frac{b}{a} \right)}$$

$$I_0 = \sqrt{\hat{I} \hat{I}^*} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad \text{tg } \psi = - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Активные потери в цепи

$r$  – сопротивление линии передачи

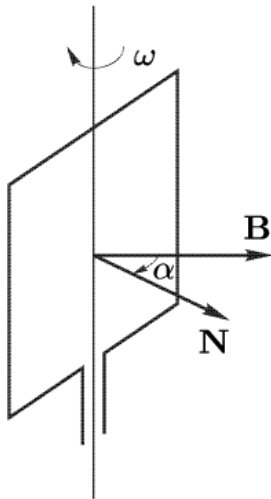
$$P_{\text{потери}} = I^2 r, \quad P_{\text{потреб}} = IU = fix$$

$$P_{\text{потери}} = \frac{P_{\text{потреб}}^2}{U^2} \cdot r$$

Чтобы избежать высоких потерь, нужно повышать напряжение.

Генераторы тока

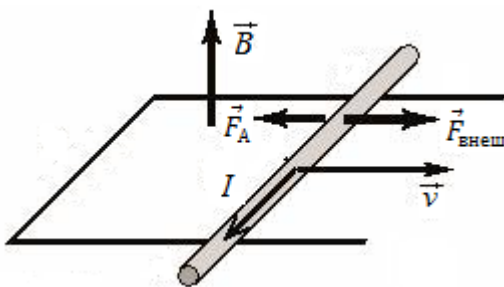
Замкнутый контур в магнитном поле



$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad \alpha = \omega t$$

$$\mathcal{E}_i = -\dot{\Phi} = BS\omega \sin \omega t$$

Подвижный проводник на рельсах



$$\delta A_{\text{внеш}} = -\delta A_{\text{АМП}}, \quad |\vec{F}_A| = |\vec{F}_{\text{внеш}}|$$

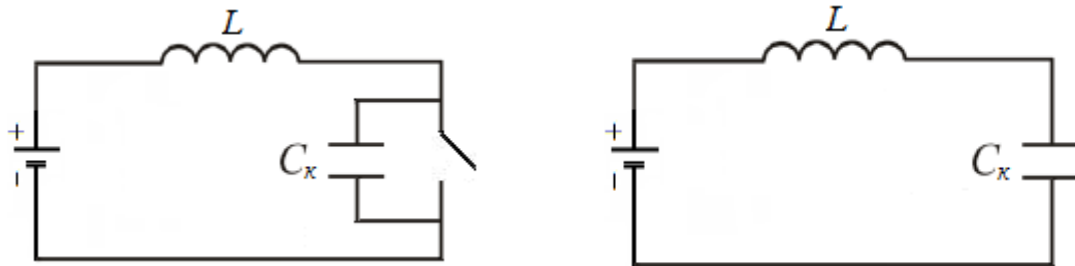
$$\delta A_{\text{Лор}} = \delta A_{\text{АМП}} + \delta A_{\text{ЭДС}} = 0$$

$$\delta A_{\text{ЭДС}} = -\delta A_{\text{АМП}} = \delta A_{\text{внеш}}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = IR$$

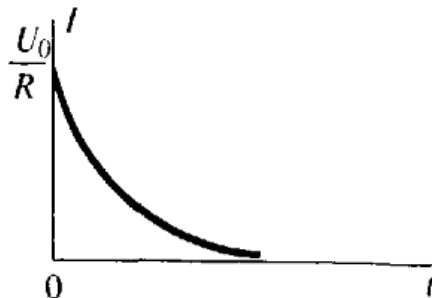
$$\mathcal{E}_i I = I^2 R = \frac{\delta A_{\text{внеш}}}{dt}$$

Экстратоки. Токи размыкания.



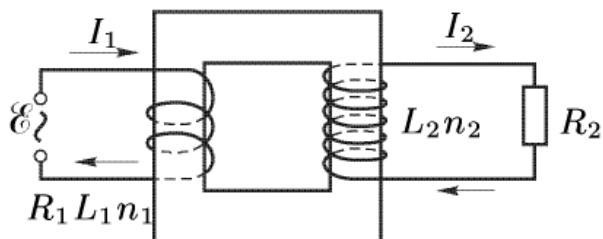
$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{LI^2}{2}, \quad U = \sqrt{\frac{2W}{C_{\text{ключа}}}}$$

$C_{\text{ключа}}$  мала.



## Лекция 21

### Трансформатор

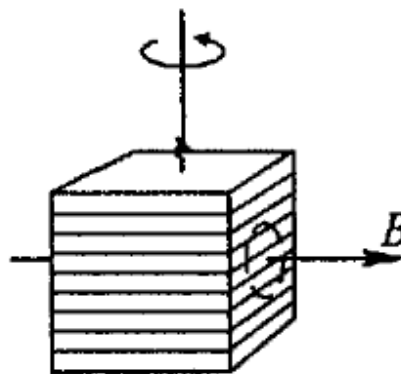
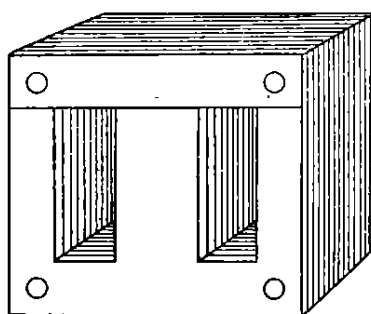


$N_1 < N_2 \leftrightarrow$  повышающий трансформатор

$N_1 > N_2 \leftrightarrow$  понижающий трансформатор

Из закона сохранения энергии:  $\mathcal{E}_1 I_1 \approx U_2 I_2$

В сердечнике:  $\mu \gg 1$ , набор пластин уменьшает токи Фуко.



$\mathcal{L}_{12} \equiv \mathcal{M}$  – коэффициент взаимной индукции

$$\mathcal{L}_1 = \mu_0 \mu \left( \frac{N_1}{L_1} \right)^2 V_1 \sim N_1^2, \quad \mathcal{L}_2 = \mu_0 \mu \left( \frac{N_2}{L_2} \right)^2 V_2 \sim N_2^2$$

$$\mathcal{M} = \sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} \sim N_1 N_2$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} \cos \omega t, \quad \hat{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

Правила Кирхгофа:

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{E}}_1 = \hat{U}_{R_1} + \hat{U}_{\mathcal{L}_1} \\ 0 = \hat{U}_{R_2} + \hat{U}_{\mathcal{L}_2} \end{cases}$$

$$\hat{U}_{R_1} = \hat{I}_1 R_1, \quad \hat{U}_2 = \hat{I}_2 R_2$$

$$\hat{U}_{\mathcal{L}_1} = \hat{I}_1 i\omega \mathcal{L}_1 + \hat{I}_2 i\omega \mathcal{M}, \quad \hat{U}_{\mathcal{L}_2} = \hat{I}_2 i\omega \mathcal{L}_2 + \hat{I}_1 i\omega \mathcal{M}$$

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{E}}_1 = \hat{I}_1 (R_1 + i\omega \mathcal{L}_1) + \hat{I}_2 i\omega \mathcal{M} \\ 0 = \hat{I}_2 (R_2 + i\omega \mathcal{L}_2) + \hat{I}_1 i\omega \mathcal{M} \end{cases}$$

$$\hat{I}_2 = -\frac{\hat{I}_1 i\omega \mathcal{M}}{R_2 + i\omega \mathcal{L}_2} \approx -\hat{I}_1 \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_2} = -\hat{I}_1 \sqrt{\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}} = -\hat{I}_1 \frac{N_1}{N_2}$$

$$\hat{I}_2 N_2 = -\hat{I}_1 N_1$$

$$\boxed{I_{20} N_2 = I_{10} N_1}$$

$\hat{U}_2 = \hat{I}_2 R_2$  – выходное напряжение трансформатора

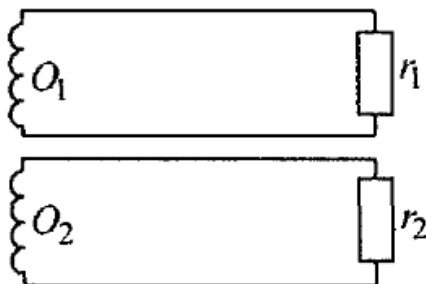
$$\hat{U}_2 = -i\omega\mathcal{L}_2\hat{I}_2 - i\omega\mathcal{M}\hat{I}_1$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \hat{I}_1 R_1 + i\omega\mathcal{L}_1\hat{I}_1 + i\omega\mathcal{M}\hat{I}_2 \approx i\omega\mathcal{L}_1\hat{I}_1 + i\omega\mathcal{M}\hat{I}_2 = -i\omega\mathcal{L}_1 \frac{N_2}{N_1} \hat{I}_2 - i\omega\mathcal{M}\hat{I}_1 \frac{N_1}{N_2} \\ &= \\ &= -i\omega\mathcal{L}_2 \frac{N_1}{N_2} \hat{I}_1 - i\omega\mathcal{M}\hat{I}_1 \frac{N_1}{N_2}\end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}, \quad \mathcal{E}_1 N_2 = \hat{U}_2 N_1$$

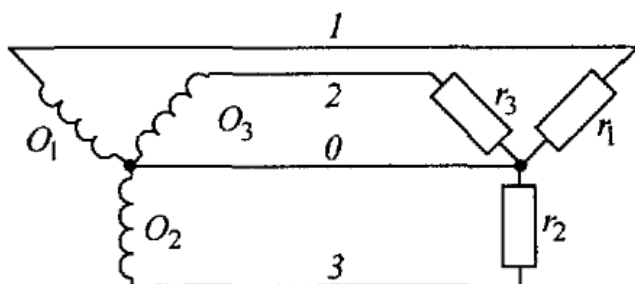
$$\boxed{\mathcal{E}_{1_0} N_2 = U_{2_0} N_1}$$

Двухфазная система (связанные контуры)



## Трехфазный ток

### Соединение звездой

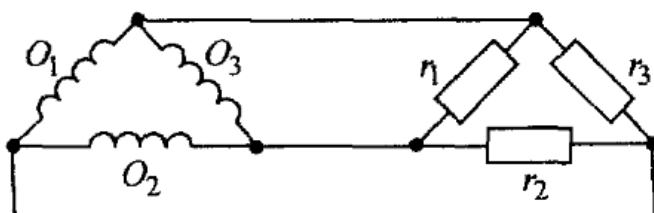


$R_1 > R_3 \Rightarrow U_1 > U_3$  (если убрать нулевой провод)

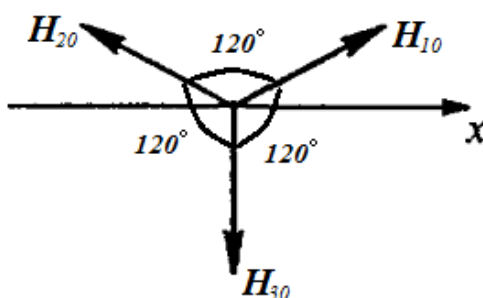
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1_0} \cos \omega t, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{2_0} \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{3_0} \cos \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\varepsilon_{1_0} = \varepsilon_{2_0} = \varepsilon_{3_0} = \varepsilon_0$$

### Соединение треугольником



## Вращающееся магнитное поле



(не векторная диаграмма!)

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1_0} \cos \omega t, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_{2_0} \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \quad \vec{H}_3 = \vec{H}_{3_0} \cos \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right)$$



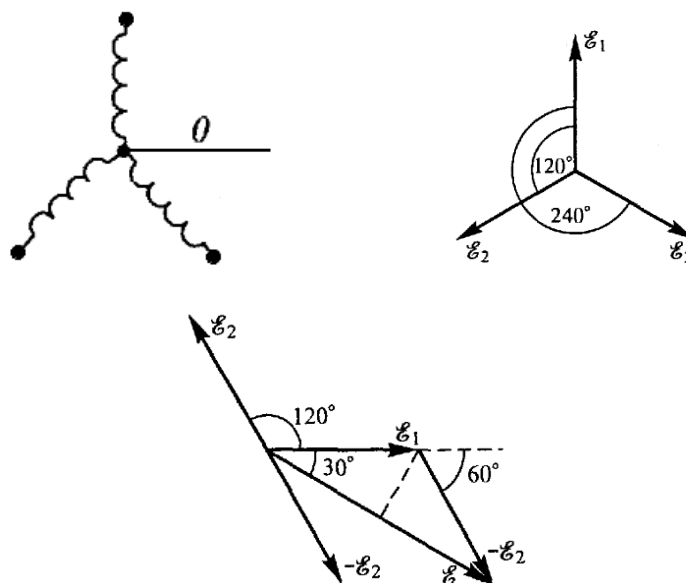
$$H_x = \frac{\sqrt{3}}{2} H_0 \cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} H_0 \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) + 0$$

$$= H_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 2 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\beta + \alpha}{2}$$

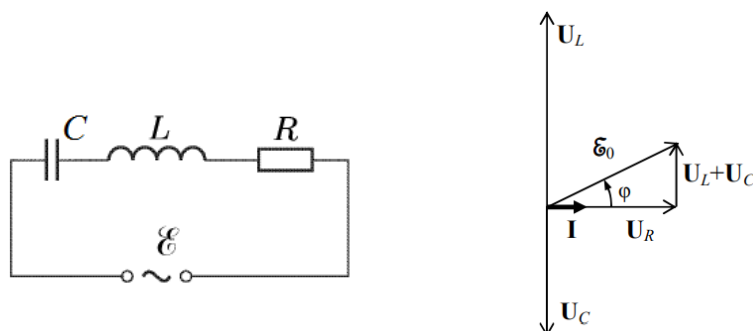
$$H_x = \frac{3}{2} H_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

Линейное и фазное напряжения



$$U_{\text{фаз}} = \mathcal{E}_0, \quad U_{\text{лин}} = \mathcal{E}_0 \sin 60^\circ \cdot 2 = \sqrt{3} \mathcal{E}_0$$

Мощность переменного тока



$$\mathcal{E} = U_R + U_L + U_C, \quad \mathcal{E}I = IU_R + IU_L + IU_C$$

$$P = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \equiv \langle f \rangle_T$$

$$\langle P_\varepsilon \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) dt$$

$$\langle P_\varepsilon \rangle_T = \frac{1}{2T} \varepsilon_0 I_0 \left\{ \int_0^T \cos \varphi dt + \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \right\} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} \cos \varphi$$

$$\boxed{\langle P_\varepsilon \rangle_T = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} \cos \varphi}$$

$$\langle P_R \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I dt = \frac{U_{R0} I_0}{2} = \frac{I_0^2 R}{2} = I_{\text{эфф}}^2 R$$

$$\boxed{I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{эфф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\langle P_\varepsilon \rangle_T = \varepsilon_{\text{эфф}} I_{\text{эфф}} \cos \varphi, \quad \langle P_L \rangle_T = \langle P_C \rangle_T = 0}$$

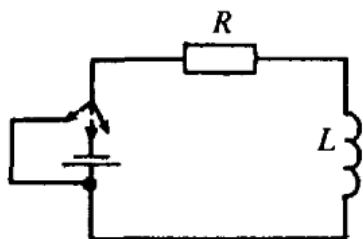
$$\cos \varphi = \max \leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

RL и -цепи. Переходные процессы.

Не может измениться мгновенно:

- 1) Ток через катушку
- 2) Заряд на конденсатор

RL-цепь



$$\mathcal{E} = \mathcal{L}\dot{I} + IR$$

$$I_1 = I + A = \text{const}, \quad \dot{I} = I$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{L}\dot{I}_1 + R(I_1 - A)$$

$$A = -\frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow 0 = \mathcal{L}\dot{I}_1 + RI_1$$

$$\frac{dI_1}{I_1} = -\frac{R}{\mathcal{L}}dt$$

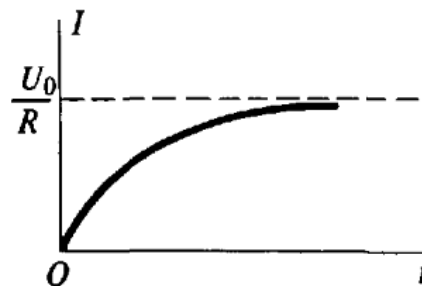
$$\ln \frac{I_1}{I_{1_0}} = -\frac{R}{\mathcal{L}}t$$

$$I_1 = I_{1_0} \exp\left(-\frac{R}{\mathcal{L}}t\right), I = I_{1_0} \exp\left(-\frac{R}{\mathcal{L}}t\right) + \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Включение:

$$I(0) = 0 \Rightarrow I_{1_0} = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

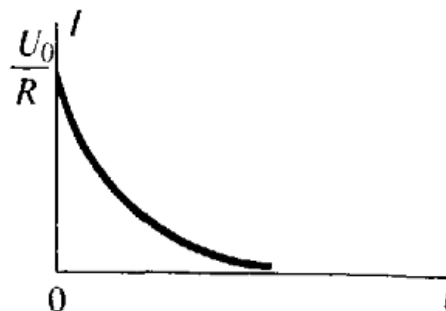
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{\mathcal{L}}t\right)\right)$$



Выключение:

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I_{1_0} = 0$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{R}{\mathcal{L}}t\right)$$



$$\tau = \frac{\mathcal{L}}{R}$$

В случае  $RC$ -цепи:  $\tau = RC$

## Лекция 22

### Высокочастотные токи

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ?$$

1. Критерий квазистационарности:  $j_{\text{смещ}} \ll j_{\text{пров}}$  — не выполняется!

$$E = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{S\epsilon_0} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{S\epsilon_0} I = \frac{j}{\epsilon_0}$$

Необходимо учитывать ток смещения.

2.  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\text{div rot } \vec{B} = \mu_0 \text{div } \vec{j}$$

$$0 = \mu_0 \text{div } \vec{j} \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0 ?$$

$$\boxed{\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} !!!$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{j} = -\epsilon_0 \text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## Система уравнений Максвелла

1) для вакуума

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

2) для вещества

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\rho_{\text{своб.непол.}}}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{мол}} \right)$$

Для решения системы уравнений Максвелла в веществе, необходимо дополнить ее материальными уравнениями (в общем случае определяются из эксперимента).

Для линейной, однородной, изотропной среды:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \mu = \text{const}, \quad \varepsilon = \text{const}$$

## Обобщенное волновое уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E})}_{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$\rho_{\text{полн}} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{1}{\mu_0 \mu}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = \left(\frac{1}{\mu_0 \mu}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\vec{J}_{\text{проб}}}_{\sigma \vec{E}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \right)$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$\sigma = 0$ :

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \xi_0 = f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad \xi_{\text{ч}} = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$$

Решение ВУ:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_x x + \vec{r}_y y + \vec{r}_z z, \quad \vec{k} = k_x \vec{r}_x + k_y \vec{r}_y + k_z \vec{r}_z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))}$$

Свойства электромагнитных волн

$$1) \vec{B}_0 \perp \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-i[\vec{k} \times \vec{E}_0] e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))} = -i\omega \vec{B}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))}$$

$$\boxed{\omega \vec{B}_0 = [\vec{k} \times \vec{E}_0]}$$

2) фазы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  совпадают

3)  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  – правая тройка

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 & \leftrightarrow (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \\ \operatorname{div} B = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}_0, \vec{B}_0$$

$$4) |\vec{E}| = v|\vec{B}|$$

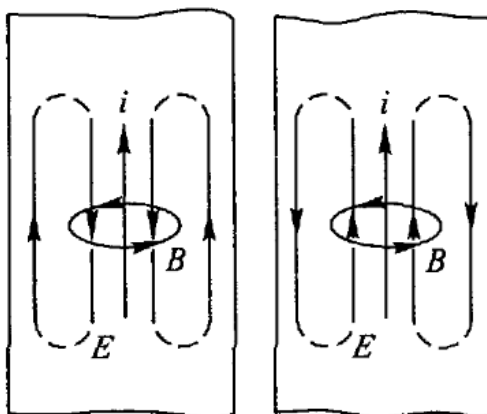
$$\omega B_0 = k E_0 \Leftrightarrow v B_0 = E_0$$

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))} \rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-k^2 = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))} = \frac{1}{v^2} \left( -\omega^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))} \right) \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

### Скин-эффект



Поле  $\vec{E}$  всегда усиливает  $\vec{j}$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}} \quad - \text{глубина скин-слоя}$$

При  $\nu = 50$  Гц  $\delta \approx 3$  см (эффект мал)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$E_x = E_{x_0} e^{\alpha z} e^{i\omega t}$$

$$\alpha^2 E_{x_0} e^{\alpha z} e^{i\omega t} = \mu_0 \mu \sigma \cdot i\omega \cdot E_{x_0} e^{\alpha z} e^{i\omega t} \Rightarrow \alpha^2 = i\mu_0 \mu \sigma \omega$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}}$$

$$\sim e^{+\frac{z}{\delta}} \rightarrow \text{волна не может усиливаться!}$$

$$E_{x_0} \sim e^{-\frac{z}{\delta}}$$



## Лекция 23

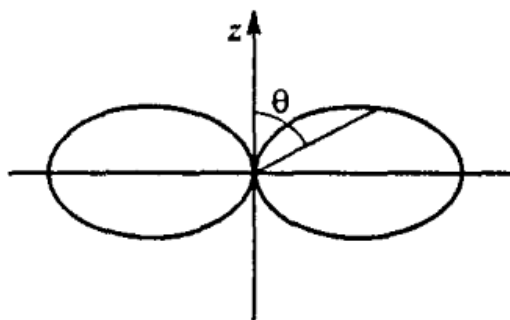
$$q, v = 0 \rightarrow \vec{E}$$

$$q, v = \text{const} \rightarrow \vec{B}, \vec{E}$$

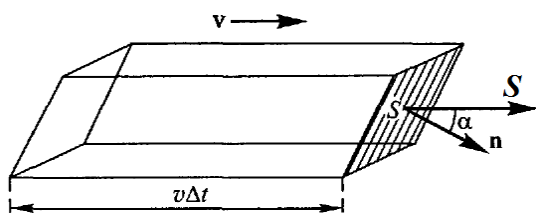
$$q, v \neq \text{const} \rightarrow \text{э/м волны}$$

Источник электромагнитных волн. Интенсивность излучения.

Диаграмма направленности излучения:



$$I_A \sim \sin^2 \theta$$



$$\delta W = w \cdot v dt \cdot S$$

$$\Phi_W \equiv \frac{\delta W}{\Delta t} = w \cdot v \cdot S$$

$$J \equiv \frac{\Phi_W}{S} = w \cdot v$$

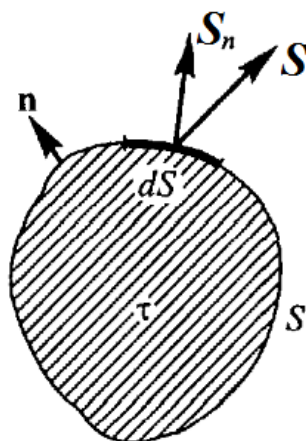
$$w = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{2} + \frac{(\vec{H} \cdot \vec{B})}{2}$$

В плоской волны вакууме:

$$\begin{cases} w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ E = vB = cB = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}B \\ \phantom{E = } = \varepsilon_0 E^2 \end{cases} \Rightarrow w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

$$J = \varepsilon E^2 c$$

Вектор Умова – Пойнтинга



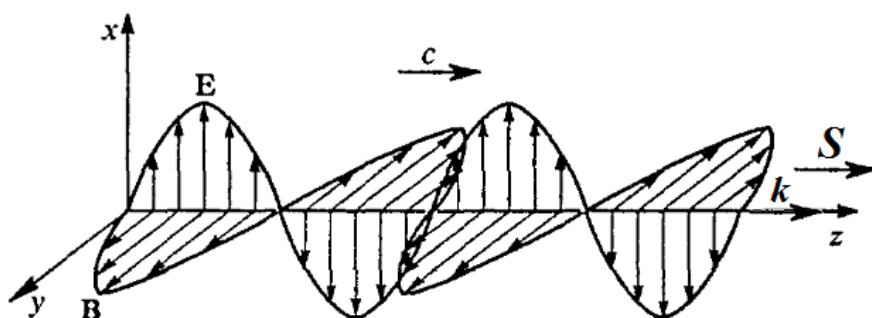
$\vec{S}$  – вектор плотности потока энергии излучения

$$\frac{\delta W}{dt} = \iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = - \oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{a}) - \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV$$

$$\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{S} dV - \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{j}) = - \frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{S}$$

$$\vec{j} = nq\vec{v} \Rightarrow (\vec{E} \cdot \vec{j}) = n(q\vec{E} \cdot \vec{v}), \quad n\delta V = \delta N$$



$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$  – вектор Умова – Пойнтинга, показывает направление распространения ВОЛНЫ

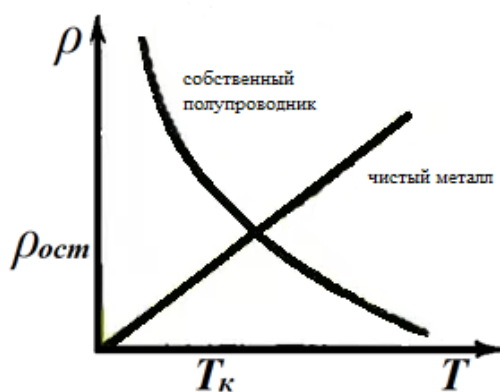
$$|\vec{S}| = J$$

Электрические свойства веществ

проводники  $\rightarrow \sigma \neq 0, \varepsilon = 1$

диэлектрики  $\rightarrow \sigma = 0, \varepsilon > 1$

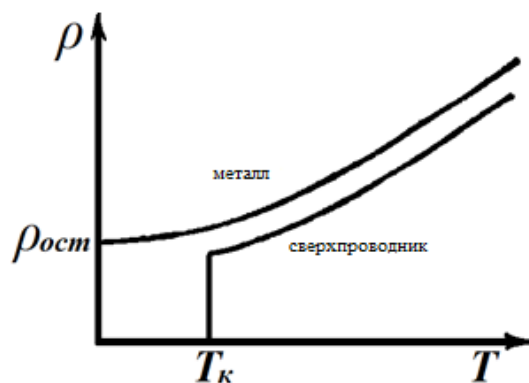
полупроводники  $\rightarrow \sigma \neq 0, \varepsilon > 1$



$\rho = \rho(1 + \alpha t) \leftrightarrow$  чистый металл

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}, \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

Значительное влияние дефектов кристаллической решетки при низких  $T$ .

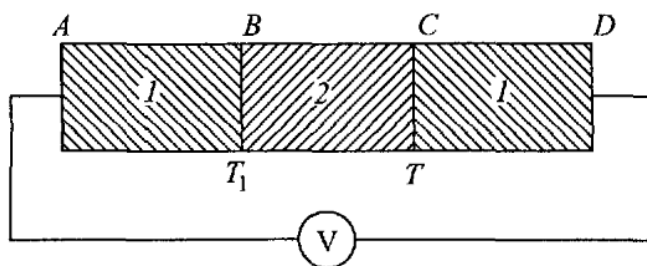


### Основные свойства сверхпроводников

1.  $R = 0 \Rightarrow Q_{дж} = 0$
2.  $B_{внутр} = 0$  (эффект Мейснера)
3. При  $B > B_{крит}$  сверхпроводимость исчезает
4. При  $I > I_{крит}$  сверхпроводимость исчезает

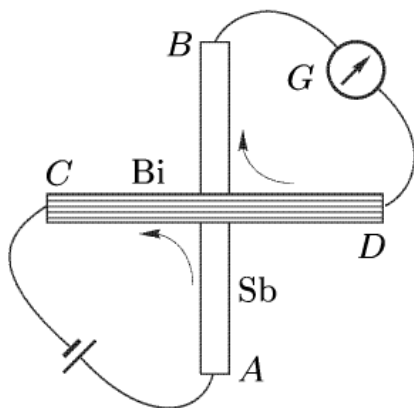
### Термоэлектрические явления. Термопара.

#### Эффект Зеебека



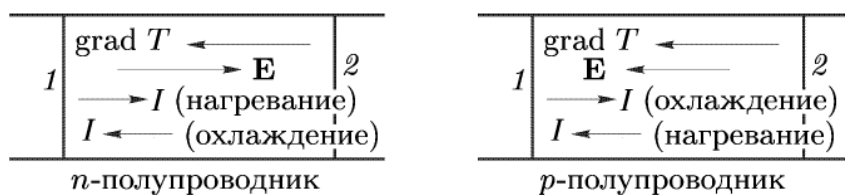
$n_1 > n_2 \Rightarrow$  запирающее  $\vec{E} \Rightarrow$  термоЭДС,  $\xi \sim T_1 - T \leq 10^2$  мВ

#### Эффект Пельтье



$Q = \Delta q \cdot \Pi$ , меняет направление при изменении тока

### Эффект Томсона

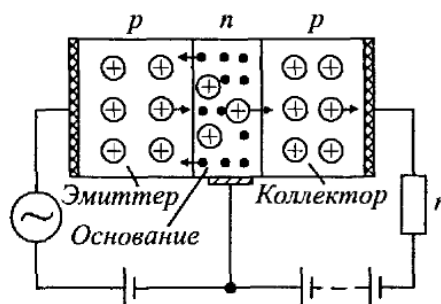


$E_1, E_2$  – энергии носителей заряда

$E_2 > E_1 \Rightarrow Q < 0$  (поглощение тепла)

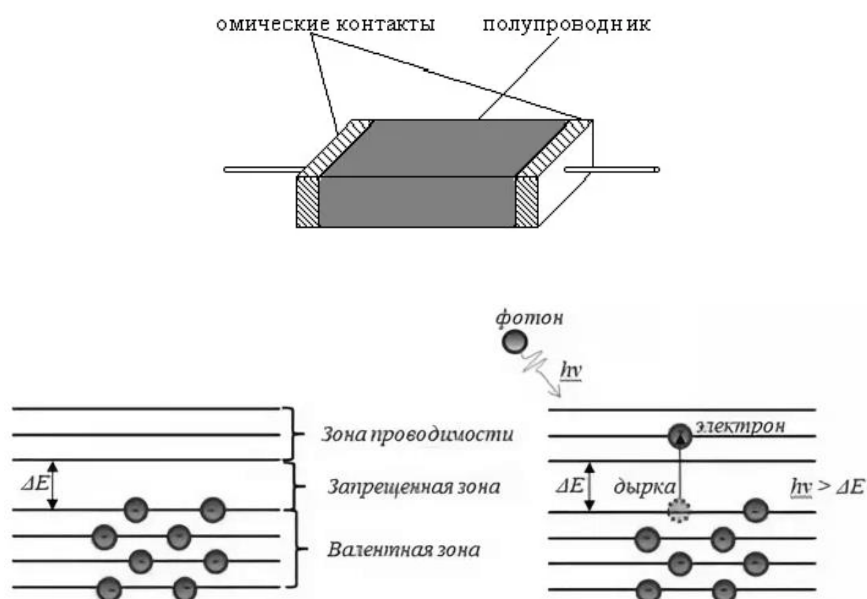
$E_1 > E_2 \Rightarrow Q > 0$  (выделение тепла)

### Полупроводниковый биполярный транзистор

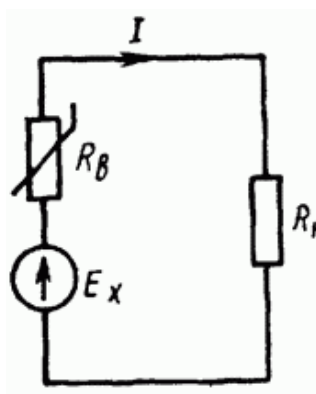


Основан на принципе внутреннего фотоэффекта.

### Фоторезистор



## Терморезистор





ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА



*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ