



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ. СЕМИНАРЫ

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Оглавление

Семинар 1. Гладкие регулярные кривые и поверхности в $\mathbb{R}^n$, заданные параметрически или неявно.	6
Задача 1.1	6
Задача 1.2	8
Задача 1.3	10
Задача 1.4	11
Задача 1.5	12
Семинар 2. Гладкие многообразия, гладкие функции.	14
Задача 2.1	14
Задача 2.2	18
Задача 2.3	19
Задача 2.4	20
Задача 2.5	21
Задача 2.6	24
Задача 2.7	25
Семинар 3. Касательные векторы, векторные поля, коммутатор векторных полей, дифференциал отображения. Часть 1.	27
Задача 3.1	27
Задача 3.2	28
Задача 3.3	32
Задача 3.4	34
Семинар 4. Касательные векторы, векторные поля, коммутатор векторных полей, дифференциал отображения. Часть 2.	36
Задача 4.1	36
Задача 4.2	36
Задача 4.3	38
Задача 4.4	39
Задача 4.5	40
Задача 4.6	40
Задача 4.7	41
Семинар 5. Дифференциал отображения, дифференциал функции, дифференциальные формы.	42
Задача 5.1	42

Задача 5.2.....	43
Задача 5.3.....	44
Задача 5.4.....	46
Задача 5.5.....	47
Задача 5.6.....	47
Семинар 6. Дифференциальные формы и операции с ними. Часть 1.....	50
Задача 6.1.....	50
Задача 6.2.....	50
Задача 6.3.....	50
Задача 6.4.....	51
Задача 6.5.....	51
Задача 6.6.....	52
Задача 6.7.....	53
Задача 6.8.....	54
Задача 6.9.....	55
Задача 6.10.....	55
Семинар 7. Дифференциальные формы и операции с ними. Часть 2.....	56
Задача 7.1.....	56
Задача 7.2.....	56
Задача 7.3.....	57
Задача 7.4.....	58
Задача 7.5.....	59
Задача 7.6.....	60
Задача 7.7.....	60
Задача 7.8.....	61
Задача 7.9.....	61
Задача 7.10.....	61
Семинар 8. Дифференциальные формы, их интегрирование.....	63
Задача 8.1.....	63
Задача 8.2.....	63
Задача 8.3.....	64
Задача 8.4.....	64
Задача 8.5.....	66
Задача 8.6.....	66

Задача 8.7.....	67
Задача 8.8.....	67
Задача 8.9.....	67
Задача 8.10.....	69
Семинары 9 и 10. Ориентация. Разбиение единицы. Многообразия с краем. Теорема Стокса.	71
Задача 9-10.1	71
Задача 9-10.2	72
Задача 9-10.3	75
Задача 9-10.4	77
Задача 9-10.5	77
Задача 9-10.6	78
Задача 9-10.7	78
Задача 9-10.8	80
Задача 9-10.9	80
Задача 9-10.10	81
Семинар 11. Риманова метрика, форма объёма. Тензоры и тензорные поля.....	83
Задача 11.1.....	83
Задача 11.2.....	84
Задача 11.3.....	84
Задача 11.4.....	85
Задача 11.5.....	85
Задача 11.6.....	87
Задача 11.7.....	88
Задача 11.8.....	89
Задача 11.9.....	89
Задача 11.10.....	90
Семинар 12. Производная Ли тензорных полей. Конструкции многообразий. Погружения, подмногообразия и вложения.	91
Задача 12.1.....	91
Задача 12.2.....	92
Задача 12.3.....	97
Задача 12.4.....	97
Задача 12.5.....	98
Задача 12.6.....	99

Задача 12.7.....	100
Задача 12.8.....	101
Задача 12.9.....	102
Задача 12.10.....	103
Семинар 13. Связности на многообразиях.	105
Задача 13.1.....	105
Задача 13.2.....	106
Задача 13.3.....	107
Задача 13.4.....	107
Задача 13.5.....	110
Задача 13.6.....	112
Задача 13.7.....	113
Задача 13.8.....	114
Задача 13.9.....	114
Задача 13.10.....	114
Семинар 14. Связности. Параллельный перенос.	116
Задача 14.1.....	116
Задача 14.2.....	119
Задача 14.3.....	122
Задача 14.4.....	122
Задача 14.5.....	122
Задача 14.6.....	125
Задача 14.7.....	128
Задача 14.8.....	128
Семинар 15. Геодезические.....	130
Задача 15.1.....	130
Задача 15.2.....	130
Задача 15.3.....	132
Задача 15.4.....	134
Задача 15.5.....	134
Задача 15.6.....	135
Задача 15.7.....	136
Задача 15.8.....	137
Задача 15.9.....	138

Задача 15.10.....	140
Семинар 16. Геодезические. Тензор кривизны Римана, тензор Риччи, скалярная кривизна.....	141
Задача 16.1.....	141
Задача 16.2.....	142
Задача 16.3.....	142
Задача 16.4.....	143
Задача 16.5.....	143
Задача 16.6.....	144
Задача 16.7.....	145
Задача 16.8.....	145
Задача 16.9.....	148
Задача 16.10.....	149
Семинар 17. Когомологии де Рама.....	151
Задача 17.1.....	152
Задача 17.2.....	152
Задача 17.3.....	153
Задача 17.4.....	154
Задача 17.5.....	156
Задача 17.6.....	159

Семинар 1. Гладкие регулярные кривые и поверхности в $\mathbb{R}^n$, заданные параметрически или неявно.

Данный курс практических занятий по дифференциальной геометрии и топологии соответствует курсу лекций “Дифференциальная геометрия и топология” (лектор А. В. Пенской), размещенном на нашем сайте. Каждый семинар посвящен соответствующей лекции.

Задача 1.1. Доказать, что стандартная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью в аффинном пространстве. Какова её размерность? Какие можно выбрать локальные координаты?

Решение.

Сфера задается уравнением $F(x^0, \dots, x^n) = (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - R^2 = 0$.

Гладкость: $F \in C^\infty$ — это многочлен, гладкость очевидна.

Регулярность: проверим, что $rk \left(\frac{\partial F}{\partial x^0} \dots \frac{\partial F}{\partial x^n} \right) = 1$ на сфере.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^0} \dots \frac{\partial F}{\partial x^n} \right) = (2x^0 \dots 2x^n)$$

Точка $(0, \dots, 0)$, в которой ранг данной матрицы равен 0, не принадлежит сфере, поэтому $rk \left(\frac{\partial F}{\partial x^0} \dots \frac{\partial F}{\partial x^n} \right) = 1$ в любой точке сферы и условие регулярности выполнено.

Таким образом, сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью.

Размерность: $\dim S^n = \dim \mathbb{R}^{n+1} - \text{количество уравнений} = n + 1 - 1 = n$.

Существует несколько способов выбора локальных координат на сфере.

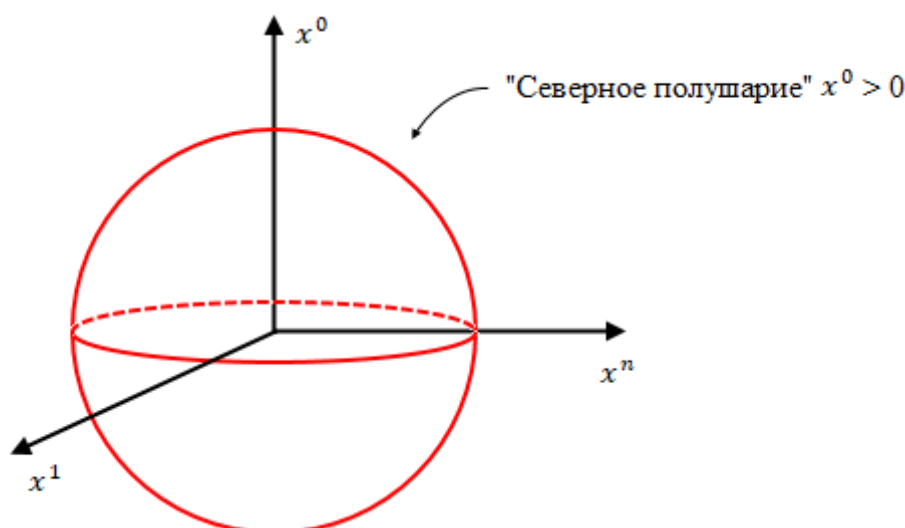


Рис. 1.1. Один из способов выбора локальных координат на сфере (к задаче 1.1)

Первый способ.

Выберем северное полушарие сферы $x^0 > 0$ (см. рис. 1.1). В нем можно выбрать локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$ – очевидно, что в этом случае каждой точке $(x^1, \dots, x^n)$ соответствует одна точка сферы.

Второй способ (обобщенные сферические координаты).

В $\mathbb{R}^3$ сфера S^2 задается с помощью сферических координат $(\varphi^1, \varphi^2$ – локальные координаты):

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi^1 \cos \varphi^2 \\ y = R \sin \varphi^1 \cos \varphi^2 \\ z = R \sin \varphi^2 \end{cases}$$

По аналогии в $\mathbb{R}^{n+1}$ сфера S^n задается следующим образом:

$$\begin{cases} x^0 = R \cos \varphi^1 \cos \varphi^2 \dots \cos \varphi^{n-1} \\ x^1 = R \sin \varphi^1 \cos \varphi^2 \dots \cos \varphi^{n-1} \\ \dots \\ x^{n-2} = R \sin \varphi^{n-3} \cos \varphi^{n-2} \cos \varphi^{n-1} \\ x^{n-1} = R \sin \varphi^{n-2} \sin \varphi^{n-1} \\ x^n = R \sin \varphi^{n-1} \end{cases}$$

Упражнение: убедиться, что в самом деле $(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = R^2$.

Третий способ (стереографические координаты – координаты, построенные при помощи стереографической проекции).

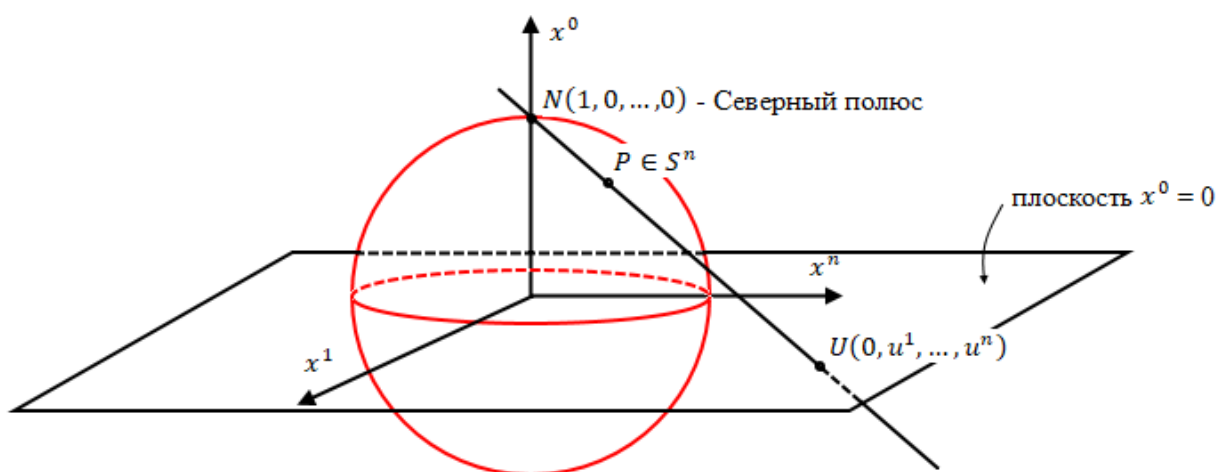


Рис. 1.2. Один из способов выбора локальных координат на сфере (к задаче 1.1) – стереографические координаты

Будем считать, что радиус сферы $R = 1$, вывод формул для произвольного радиуса оставим в качестве упражнения.

Пусть $(u^1, \dots, u^n)$ – локальные координаты на $S^n \setminus \{N\}$.

$\overrightarrow{NU} = (-1, u^1, \dots, u^n)$. Тогда прямая NU задается как $N + t \cdot \overrightarrow{NU}$:

$$\begin{cases} x^0 = 1 - t \\ x^1 = tu^1 \\ \dots \\ x^n = tu^n \end{cases}$$

Пусть P – точка пересечения прямой NU со сферой S^n . Тогда

$$(1 - t)^2 + (tu^1)^2 + \dots + (tu^n)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2 = 0$$

Данное уравнение имеет два корня, соответствующих двум точкам пересечения прямой со сферой:

$t = 0$ соответствует точке N – северному полюсу,

$t = \frac{2}{1 + (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2}$ соответствует точке P

Получаем

$$\begin{cases} x^0 = \frac{-1 + (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2}{1 + (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2} \\ x^1 = \frac{2u^1}{1 + (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2} \\ \dots \\ x^n = \frac{2u^n}{1 + (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2} \end{cases}$$

- параметризация сферы с помощью координат, построенных через стереографическую проекцию.

Задача 1.2. Доказать, что $SO(3)$ — регулярная гладкая неявно заданная поверхность в пространстве вещественных 3×3 - матриц. Аналогичный вопрос для группы $O(n)$. Какова размерность этих групп?

Решение.

$$O(n) = \{A \in Mat(n \times n) \mid AA^T = E\}$$

$$SO(n) = \{A \in Mat(n \times n) \mid AA^T = E, \det A = 1\}$$

Начнем с группы $O(n)$. Рассмотрим случай $n = 3$, в общем случае рассуждения будут аналогичными. Пусть $A \in O(3)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

По определению

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- получили матричное уравнение, задающее матрицы $A \in O(3)$, эквивалентное 9 алгебраическим уравнениям на элементы a_{ij} матрицы $A \in O(3)$.

Однако, уравнения, получающиеся при умножении i -ой строки на j -ый столбец и j -ой строки на i -ый столбец совпадают, поэтому останется 6 независимых уравнений (в общем случае для $O(n)$ останется $\frac{n(n+1)}{2}$ независимых уравнений):

$$F_{11}: (a_{11})^2 + (a_{12})^2 + (a_{13})^2 - 1 = 0$$

$$F_{12}: a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$

$$F_{13}: a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0$$

$$F_{22}: (a_{21})^2 + (a_{22})^2 + (a_{23})^2 - 1 = 0$$

$$F_{23}: a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

$$F_{33}: (a_{31})^2 + (a_{32})^2 + (a_{33})^2 - 1 = 0$$

Гладкость: каждое уравнение – это многочлен, гладкость очевидна.

Регулярность: найдем $rk\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial a_{kl}}\right)$.

	$\frac{\partial}{\partial a_{11}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{12}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{13}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{21}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{22}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{23}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{31}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{32}}$	$\frac{\partial}{\partial a_{33}}$
$\frac{\partial F_{11}}{\partial}$	$2a_{11}$	$2a_{12}$	$2a_{13}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{\partial F_{12}}{\partial}$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	0	0	0
$\frac{\partial F_{13}}{\partial}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\frac{\partial F_{22}}{\partial}$	0	0	0	$2a_{21}$	$2a_{22}$	$2a_{23}$	0	0	0
$\frac{\partial F_{23}}{\partial}$	0	0	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\frac{\partial F_{33}}{\partial}$	0	0	0	0	0	0	$2a_{31}$	$2a_{32}$	$2a_{33}$

Наблюдение: если рассмотреть строки получившейся матрицы как вектора $V_1, \dots, V_6$ из $\mathbb{R}^9$, то можно заметить, что

$$(V_i, V_i) \neq 0 \quad \forall i$$

$$(V_i, V_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

Таким образом, строки – ненулевые ортогональные друг другу вектора из $\mathbb{R}^9$, значит, они линейно независимы. Следовательно, $rk\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial a_{kl}}\right) = 6$, то есть, условие регулярности выполнено.

Для $O(n)$ рассуждения аналогичные. Таким образом, $O(n)$ – регулярная неявно заданная гладкая поверхность в $Mat(n \times n)$.

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

В частности, $\dim O(3) = 6$.

Теперь рассмотрим $SO(3)$.

$SO(n)$ – подгруппа в $O(n)$, характеризующаяся условием $\det A = 1$. Так как

$$AA^T = E \Rightarrow \det(AA^T) = \det E \Leftrightarrow \det A \det A^T = 1 \Leftrightarrow (\det A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det A = \pm 1$$

то $\det A = 1$ не является независимым уравнением.

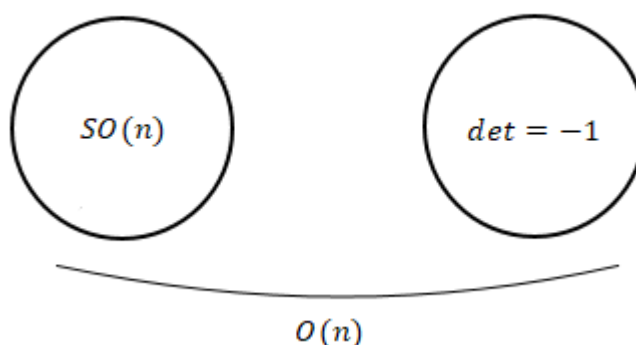


Рис. 1.3. Устройство группы $O(n)$

Таким образом, $SO(n)$ – регулярная неявно заданная гладкая поверхность в $Mat(n \times n)$.

$$\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

В частности, $\dim SO(3) = 6$.

Задача 1.3. Доказать, что $SL(n, \mathbb{R})$ – регулярная гладкая гиперповерхность в пространстве $n \times n$ – матриц.

Решение.

Данное подмножество задается уравнением $\det A - 1 = 0$.

Гладкость: определитель – многочлен от элементов матрицы, гладкость очевидна.

Регулярность: нужно доказать, что $rk \left(\frac{\partial \det A}{\partial a_{11}} \dots \frac{\partial \det A}{\partial a_{nn}} \right) = 1$, то есть, что хотя бы одна производная $\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}}$ не равна 0.

Воспользуемся разложением определителя по i -ой строке:

$$\det A = a_{i1} \hat{A}_{i1} + \dots + a_{in} \hat{A}_{in}$$

где $\hat{A}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} . Тогда

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} (a_{i1}\hat{A}_{i1} + \dots + a_{in}\hat{A}_{in}) = \hat{A}_{ij}$$

Допустим, что все $\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = \hat{A}_{ij} = 0$. Тогда $1 = \det A = a_{i1}\hat{A}_{i1} + \dots + a_{in}\hat{A}_{in} = 0$ – противоречие. Таким образом, условие регулярности выполнено и $SL(n, \mathbb{R})$ является регулярной гладкой неявно заданной поверхностью размерности $n^2 - 1$ в $Mat(n \times n)$.

Задача 1.4. Задать тор вращения как гладкую гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Неособа ли эта поверхность?

Решение.

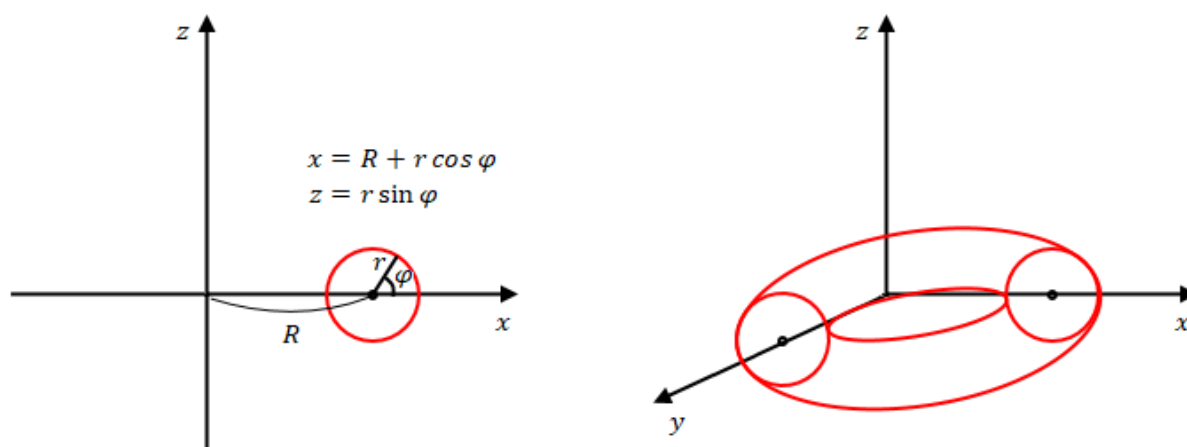


Рис. 1.4. Тор

Параметрическое уравнение тора (предполагаем, что $r < R$):

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

Из данной параметризации следует, что $x^2 + y^2 = (R + r \cos \varphi)^2$. Тогда

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 + 2Rr \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = R^2 + 2Rr \cos \varphi + r^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = 2Rr \cos \varphi \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 &= 4R^2r^2 \cos^2 \varphi = 4R^2r^2 - 4R^2r^2 \sin^2 \varphi = 4R^2r^2 - 4R^2z^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4R^2r^2 + 4R^2z^2 = 0 \end{aligned}$$

Гладкость: полученное уравнение полиномиальное, гладкость очевидна.

Регулярность: $rk \left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \right) = 1 \Leftrightarrow$ в каждой точке тора хотя бы одна из производных $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ не равна нулю.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2) \cdot 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2) \cdot 2z + 8R^2z$$

$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + r^2 \Leftrightarrow d(0, (x, y, z)) = \sqrt{R^2 + r^2}$ –
данное равенство выполнено, только если мы находимся на окружности $z = \pm r$:

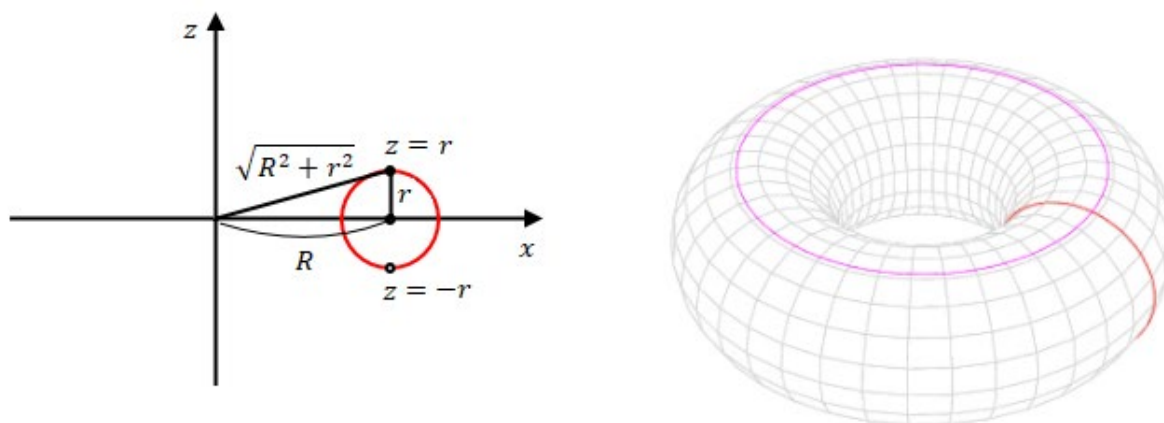


Рис. 1.5. К задаче 1.4

Поэтому, если $z \neq \pm r$, то и $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 \neq 0$, откуда следует, что хотя бы одна из производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ или $\frac{\partial F}{\partial y}$ не обращается в ноль.

Если $z = \pm r$, то $\frac{\partial F}{\partial z} = 8R^2z = \pm 8R^2r \neq 0$.

Таким образом, тор вращения – регулярная гладкая неявно заданная поверхность.

Задача 1.5. Описать множество ортонормированных k -реперов с началом в точке $(0, \dots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$ как неявно заданную поверхность в аффинном пространстве $k \times n$ - матриц. Доказать, что эта поверхность гладкая и регулярная, найти её размерность. Эта поверхность называется многообразием Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Что можно сказать про $V_1(\mathbb{R}^n)$ и $V_n(\mathbb{R}^n)$?

Решение.

Ортонормированный k -репер: $|e_1| = \dots = |e_k|$, $e_i \perp e_j$, $i \neq j$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \dots & e_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & e_k & \dots \end{pmatrix}$$

размера $k \times n$, у которой по строкам записаны координаты векторов $e_1, \dots, e_k$. Условие $|e_1| = \dots = |e_k|$, $e_i \perp e_j$, $i \neq j$ эквивалентно матричному соотношению $AA^T = E$.

Таким образом, многообразие Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$ – это множество

$$V_k(\mathbb{R}^n) = \{A \in \text{Mat}(k \times n) \mid AA^T = E\}$$

Доказательство гладкости и регулярности аналогично задаче 1.2.

Рассуждения для определения размерности такие же, как в задаче 1.2: уравнения, получающиеся при умножении i -ой строки на j -ый столбец и j -ой строки на i -ый столбец совпадают, поэтому останется $\frac{k(k+1)}{2}$ независимых уравнений на элементы a_{ij} матрицы $A \in V_k(\mathbb{R}^n)$ и

$$\dim V_k(\mathbb{R}^n) = nk - \frac{k(k+1)}{2}$$

Из задания многообразия Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n) = \{A \in \text{Mat}(k \times n) \mid AA^T = E\}$ получаем, что

$$V_n(\mathbb{R}^n) = O(n)$$

и

$$V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$$

Семинар 2. Гладкие многообразия, гладкие функции.

Задача 2.1. Рассмотрим двумерную сферу S^2 и два атласа: первый задаётся с помощью стереографических проекций из южного и северного полюсов, а другой с помощью параметризаций открытых полусфер через пару координат в трёхмерном евклидовом пространстве (например, в верхней полусфере в качестве координат используются x и y). Докажите, что это действительно атласы, то есть карты удовлетворяют определению карт и согласованы. Эквивалентны ли эти два атласа?

Решение.

Стереографическая проекция из северного полюса:

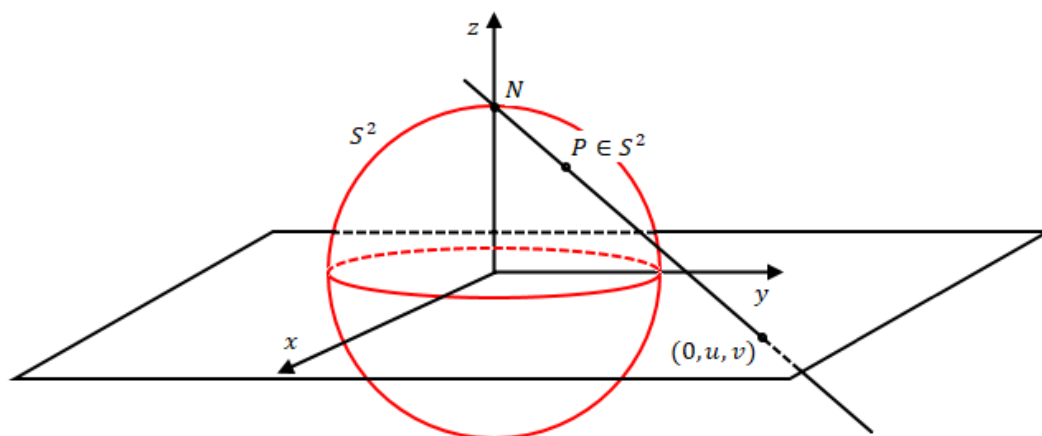


Рис. 2.1. Стереографическая проекция из северного полюса

$$pr_N(P) = (0, u, v)$$

Карта $\varphi_N: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_N(P) = (u, v)$.

$N = (0, 0, 1)$, $P = (x_0, y_0, z_0)$. Тогда $\overrightarrow{NP} = (x_0, y_0, z_0 - 1)$ и прямая $NP = N + t \cdot \overrightarrow{NP}$:

$$\begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ z = 1 + t(z_0 - 1) \end{cases}$$

Точка пересечения прямой NP с плоскостью $z = 0$:

$$0 = 1 + t(z_0 - 1) \Leftrightarrow t = \frac{1}{1 - z_0}$$

Получаем

$$u = \frac{x_0}{1 - z_0}$$

$$v = \frac{y_0}{1 - z_0}$$

Тогда $\varphi_N(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$, или

$$u = \frac{x}{1-z}$$

$$v = \frac{y}{1-z}$$

Обратное отображение (см. задачу 1.1):

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases}$$

Стереографическая проекция из южного полюса:

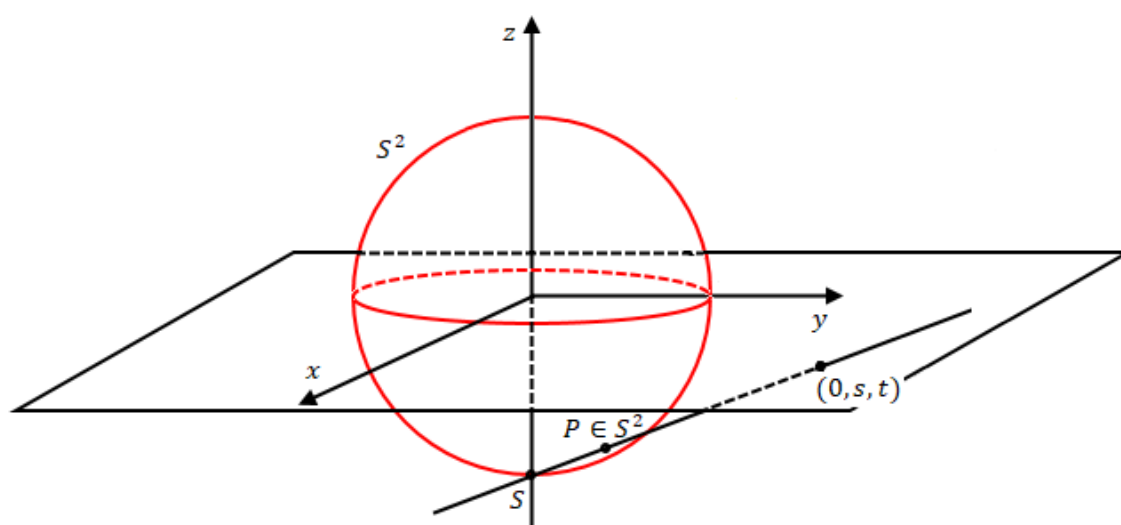


Рис. 2.2. Стереографическая проекция из южного полюса

$$pr_S(P) = (0, s, t)$$

$$\text{Карта } \varphi_S: S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_S(P) = (s, t).$$

Заметим, что при обращении оси z южный полюс превратится в северный, поэтому формулы для стереографической проекции из южного полюса будут аналогичны формулам для северного, только у z изменится знак:

$$\varphi_S(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

$$s = \frac{x}{1+z}$$

$$t = \frac{y}{1+z}$$

Обратное отображение:

$$\begin{cases} x = \frac{2s}{1+s^2+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+s^2+t^2} \\ z = \frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2} \end{cases}$$

Замена локальных координат (отображение склейки):

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(u, v) &= \varphi_S \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\frac{2u}{1+u^2+v^2}}{1+\frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2}}, \frac{\frac{2v}{1+u^2+v^2}}{1+\frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2}} \right) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} s &= \frac{u}{u^2+v^2} \\ t &= \frac{v}{u^2+v^2} \end{aligned}$$

Докажем, что это атлас: карты φ_N и φ_S определены на сфере без одной точки (без северного и южного полюса соответственно). Пересечение этих карт $S^2 \setminus \{N, S\}$ – сфера без обоих полюсов. Южный полюс S имеет координаты $u = v = 0$, то есть, требуется гладкость замены координат при $(u, v) \neq (0, 0)$. Но $s = \frac{u}{u^2+v^2}$ и $t = \frac{v}{u^2+v^2}$ – рациональные функции, гладкие при $(u, v) \neq (0, 0)$.

Также $S^2 \setminus \{N\} \cup S^2 \setminus \{S\} = S^2$ – карты φ_N и φ_S покрывают все сферу, значит, это действительно атлас.

Перейдем ко второму атласу:

Рассмотрим северную полусферу $S_{z>0}^2$. Из нее можно построить карту

$$\begin{aligned} \varphi_{z>0}: S_{z>0}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

То есть, мы просто точки, принадлежащие верхней полусфере, проецируем на плоскость Oxy (см. рис. 2.3):

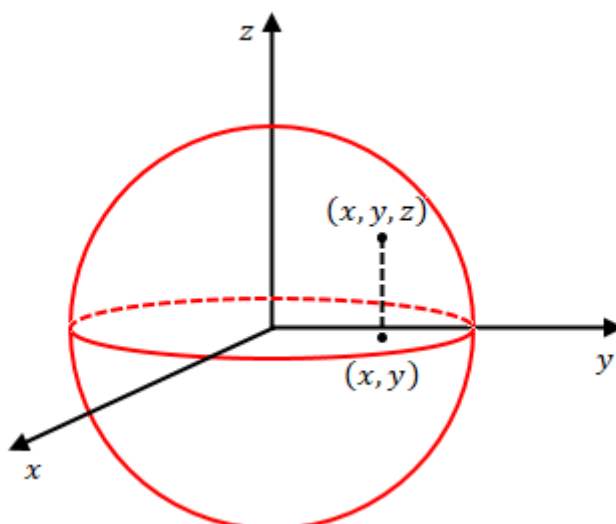


Рис. 2.3. Параметризация верхней полусферы

Аналогично из нижней полусферы можно построить карту:

$$\varphi_{z < 0}: S_{z < 0}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y)$$

Весь атлас будет состоять из 6 карт, соответствующих полусферам $z > 0, z < 0, x > 0, x < 0, y > 0, y < 0$ – очевидно, их объединение будет покрывать сферу.

Проверим, что функции перехода (отображения склейки, замены координат) действительно гладкие. Всего карт 6, количество их попарных комбинаций 15. Найдем функции перехода для карт $z > 0$ и $x < 0$ (остальные находятся аналогично):

В $z > 0$ координаты (x, y) , в $x < 0$ координаты (y, z) . Замена координат:

$$y = y$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Замена координат гладкая всюду, кроме $x = y = 0$, но эта точка не лежит в карте $x < 0$, а значит, и в пересечении карт $z > 0$ и $x < 0$. Значит, это действительно атлас.

Теперь докажем эквивалентность двух построенных выше атласов: в самом деле, рассмотрим, например, функции перехода от $z > 0$ к u, v :

$$u = \frac{x}{1 - z} = \frac{x}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$v = \frac{y}{1 - z} = \frac{y}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Гладкость нарушается при:

- 1) $x = y = 0 \Rightarrow z = \pm 1$. Но $z = 1$ не лежит в $S^2 \setminus \{N\}$, а $z = -1$ не лежит в $z > 0$.

2) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow z = 0$. Но $z = 0$ не лежит в карте $z > 0$.

Таким образом, на пересечении карт отображение склейки является гладким, и атласы эквивалентны.

Задача 2.2. Рассмотрим на стандартной сфере S^2 , заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

функцию $f(x, y, z) = z$. Запишите эту функцию в локальных координатах u, v , соответствующих стереографической проекции из северного полюса. Запишите эту функцию в локальных координатах $\tilde{u}, \tilde{v}$, соответствующих стереографической проекции из южного полюса. Сделайте замену переменных и убедитесь, что

$$f(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) = f(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Что обозначает буква f в правой и левой части этого равенства?

Решение.

Запишем функцию $f(x, y, z) = z$ в локальных координатах u, v . Параметризация сферы без северного полюса:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2} \\ y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2} \\ z = \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \end{cases}$$

Поэтому

$$f(u, v) = \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}$$

Запишем функцию $f(x, y, z) = z$ в локальных координатах $\tilde{u}, \tilde{v}$ (для удобства обозначим $\tilde{u} = s, \tilde{v} = t$). Параметризация сферы без южного полюса:

$$\begin{cases} x = \frac{2s}{1 + s^2 + t^2} \\ y = \frac{2t}{1 + s^2 + t^2} \\ z = \frac{1 - s^2 - t^2}{1 + s^2 + t^2} \end{cases}$$

Поэтому

$$f(\tilde{u}, \tilde{v}) = f(s, t) = \frac{1 - s^2 - t^2}{1 + s^2 + t^2}$$

Теперь убедимся, что

$$f(u(s, t), v(s, t)) = f(s, t)$$

Функции f в левой и правой части равенства – разные: справа $f(s, t) = \frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2}$, а слева $f(u, v)$, куда вместо u и v подставляем выражения для u и v через s и t . Эти выражения мы уже находили в задаче 2.1: $u = \frac{s}{s^2+t^2}$, $v = \frac{t}{s^2+t^2}$. Получаем

$$f(u(s, t), v(s, t)) = \frac{-1 + \left(\frac{s}{s^2+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{s^2+t^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{s}{s^2+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{s^2+t^2}\right)^2} = \frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2} = f(s, t)$$

Задача 2.3. Пусть $(R, \mathfrak{F}_1)$ – это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(R, \mathfrak{F}_3)$ – это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_3$ не эквивалентны, но $(R, \mathfrak{F}_1)$ и $(R, \mathfrak{F}_3)$ диффеоморфны.

Решение.

$(R, \mathfrak{F}_1)$: $\mathfrak{F}_1$ – атлас из одной карты $(\mathbb{R}, \varphi)$, $\varphi(t) = t$,

$(R, \mathfrak{F}_3)$: $\mathfrak{F}_3$ – атлас из одной карты $(\mathbb{R}, \psi)$, $\psi(t) = t^3$.

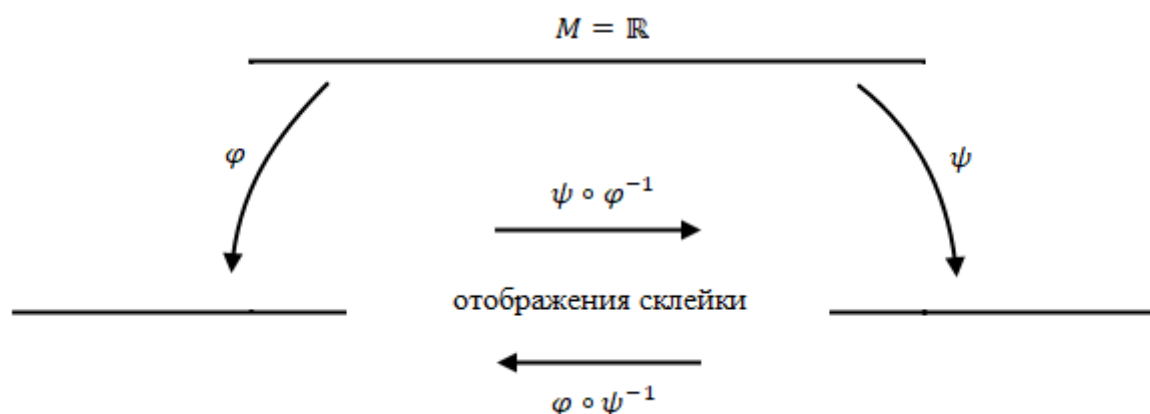


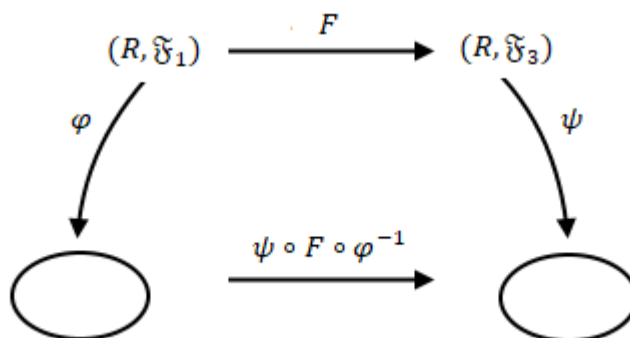
Рис. 2.4. К задаче 2.3

Эти атласы не эквивалентны. В самом деле,

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (t)^3 = t^3$$

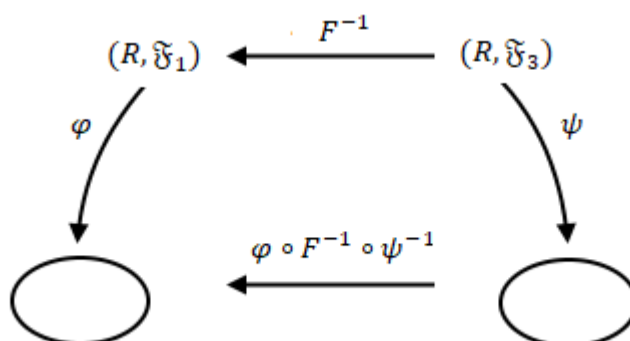
$$\varphi \circ \psi^{-1} = (\sqrt[3]{t}) = \sqrt[3]{t}$$

Между этими двумя картами отображения склейки не являются гладкими – $\varphi \circ \psi^{-1}$ не гладкое в нуле. Однако, $(R, \mathfrak{F}_1)$ и $(R, \mathfrak{F}_3)$ диффеоморфны:



Рассмотрим $F(t) = \sqrt[3]{t}$. Тогда

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = (\sqrt[3]{t})^3 = t - \text{гладкое}$$



Рассмотрим $F^{-1}(t) = t^3$. Тогда

$$\varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1} = (\sqrt[3]{t})^3 = t - \text{гладкое}$$

Задача 2.4. Рассмотрим тор вращения T^2 и карту на нём, заданную формулами

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \psi \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \psi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

где, например, $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : T^2 \rightarrow S^2$, которое точке $p \in T^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in S^2$ к тору в точке p . Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v , полученные проекцией из северного полюса. Запишите отображение N в координатах φ, ψ на T^2 и u, v на S^2 . Является ли отображение Гаусса гладким?

Решение.

Пусть $P = (x, y, z)$. Тогда

$$P_\varphi = (-r \sin \varphi \cos \psi, -r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \varphi)$$

$$P_\psi = (-(R + r \cos \varphi) \sin \psi, (R + r \cos \varphi) \cos \psi, 0)$$

Вектор нормали N ищем как

$$N = -\frac{[P_\varphi, P_\psi]}{||[P_\varphi, P_\psi]||} = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi)$$

Таким образом,

$$N(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi) \in S^2$$

В стереографических координатах

$$u = \frac{x}{1-z} = \frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi}$$

$$v = \frac{y}{1-z} = \frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi}$$

Является ли это отображение гладким?

Гладкость нарушается при $\sin \varphi = 1$ (что соответствует точкам на торе $z = r$):

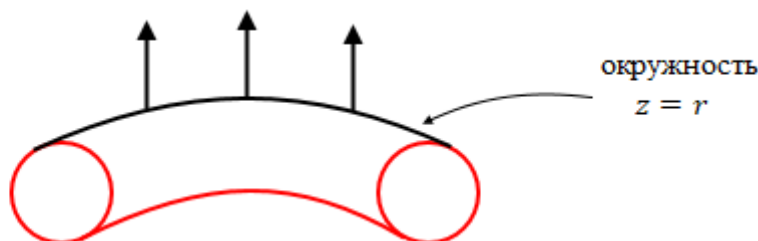


Рис. 2.5. Нормали к тору в точках, соответствующих $z = r$

- в этих точках нормаль сонаправлена оси z , поэтому

$$N(z = r) = \text{северный полюс } N \in S^2$$

где координаты u и v не действуют. Таким образом, отображение Гаусса является гладким.

Задача 2.5. Множество k -плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

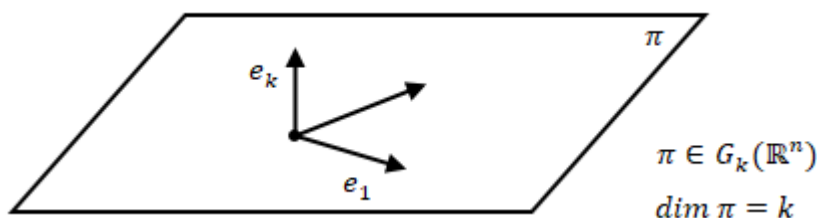
Решение.

Многообразие Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$ – это обобщение проективного пространства (прямые $G_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^{n-1}$ образуют проективную плоскость). Поэтому будем вводить на нем однородные и неоднородные координаты по аналогии с проективными пространствами.

Однородные координаты:

на $\mathbb{RP}^{n-1}$ в качестве однородных координат мы выбирали координаты направляющего вектора прямой. На $G_k(\mathbb{R}^n)$ в качестве однородных координат выберем матрицу Z размера $k \times n$, где по строкам записаны координаты базисных векторов $e_1, \dots, e_k$:

$$Z = \begin{pmatrix} \dots & e_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & e_k & \dots \end{pmatrix}$$

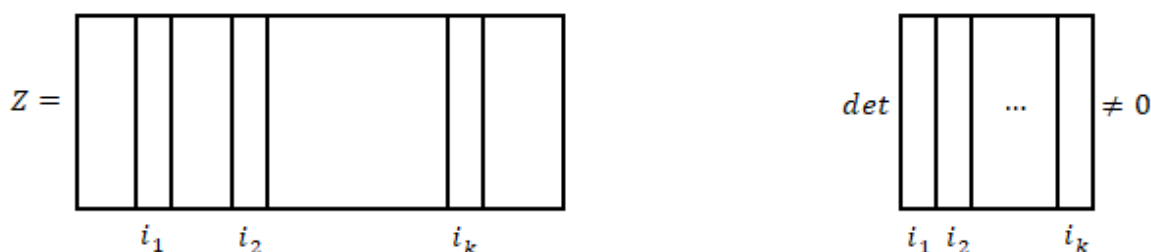


По аналогии с требованием ненулевого направляющего вектора прямой, потребуем $rkZ = k$.

В одномерном случае однородные координаты были определены с точностью до умножения на ненулевое число. В плоскости π можно выбирать различные базисы, переход от одного базиса к другому осуществляется с помощью умножения на матрицу $A \in GL(k)$, поэтому

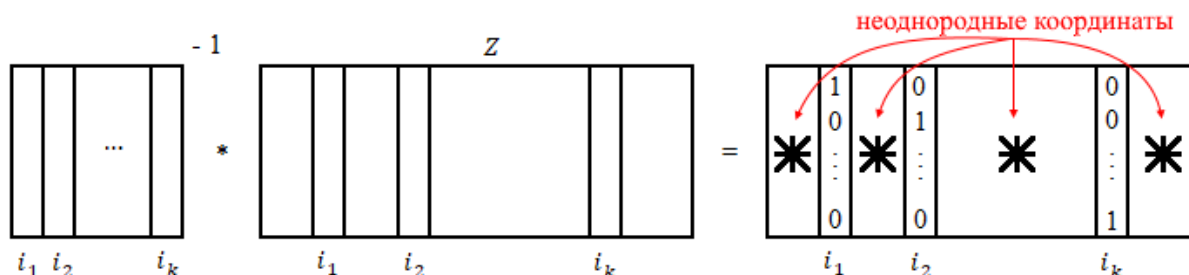
$$Z \sim AZ$$

Аффинные карты: в качестве аффинных карт выберем $U_{i_1 \dots i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ – множества, на которых невырожден фиксированный минор матрицы Z :



Неоднородные координаты:

по аналогии с одномерным случаем, умножим матрицу Z на матрицу, обратную к минору, соответствующему $U_{i_1 \dots i_k}$:



Рассмотрим пример: пусть $2k > n$.

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \end{array} \quad \text{- однородные координаты}$$

$k \qquad n-2k \qquad k$

Карта $U_{1\dots k}$:

$$A^{-1} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline E & A^{-1}B & A^{-1}C \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{неоднородные координаты}}$

Карта $U_{n-k+1\dots n}$:

$$C^{-1} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline C^{-1}A & C^{-1}B & E \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{неоднородные координаты}}$

Найдем замену координат $PQ \rightarrow RS$:

$$Q^{-1} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline E & P & Q \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline Q^{-1} & Q^{-1}P & E \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{неоднородные координаты}}$

Получаем (сравните с формулами замены координат в проективном пространстве):

$$R = Q^{-1}$$

$$S = Q^{-1}P$$

Задача 2.6. Введите однородные и неоднородные комплексные координаты на $\mathbb{CP}^1$. Докажите, что $\mathbb{CP}^1$ является (вещественным) гладким двумерным многообразием. Докажите, что как вещественное многообразие $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно S^2 . *Указание: если в координатах на сфере, введённых с помощью стереографической проекции, положить $z = u + iv$, $w = \tilde{u} - i\tilde{v}$, то отображение склейки принимает вид*

$$z = \frac{1}{w}$$

(проверьте!)

Решение.

Устройство комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ похоже на устройство вещественной проективной прямой.

Однородные координаты:

$$(z^0, z^1) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}^2, \quad (z^0, z^1) \sim (\lambda z^0, \lambda z^1), \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}^1$$

$[z^0 : z^1]$ – класс эквивалентности однородных координат.

Аффинные карты:

$U_0: z^0 \neq 0$, неоднородная координата $x = \frac{z_1}{z_0}$.

$U_1: z^1 \neq 0$, неоднородная координата $y = \frac{z_0}{z_1}$.

Замена координат: $y = \frac{1}{x}$.

Докажем, что это – вещественное гладкое двумерное многообразие.

Аффинные карты:

$$(U_0, \varphi), \quad \varphi(x) = (\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x) = (\alpha, \beta)$$

$$(U_1, \psi), \quad \psi(y) = (\operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y) = (\gamma, \delta)$$

Убедимся, что замена координат устроена правильно:

$$y = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\gamma = \operatorname{Re} y = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\delta = \operatorname{Im} y = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

- гладкая замена координат (на пересечении карт $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Как вещественное многообразие $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно S^2 :

$$U_0 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

$$x = \alpha + i\beta \rightarrow \begin{matrix} u = \alpha \\ v = -\beta \end{matrix}$$

$$U_1 \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$$

$$y = \gamma + i\delta \rightarrow \begin{matrix} s = \gamma \\ t = \delta \end{matrix}$$

Замена координат

$$y = \frac{1}{x}$$

перейдет в замену

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

$$t = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

- получили ту же замену координат, что и в задаче 2.1 (стереографические проекции). Таким образом, отображение задано корректно и $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно S^2 .

Задача 2.7. Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

Решение.

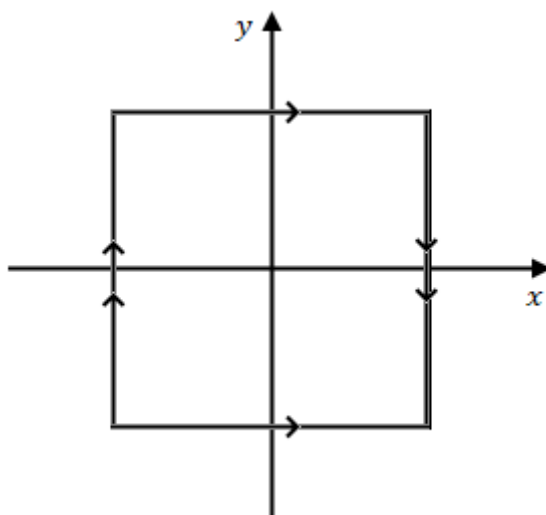
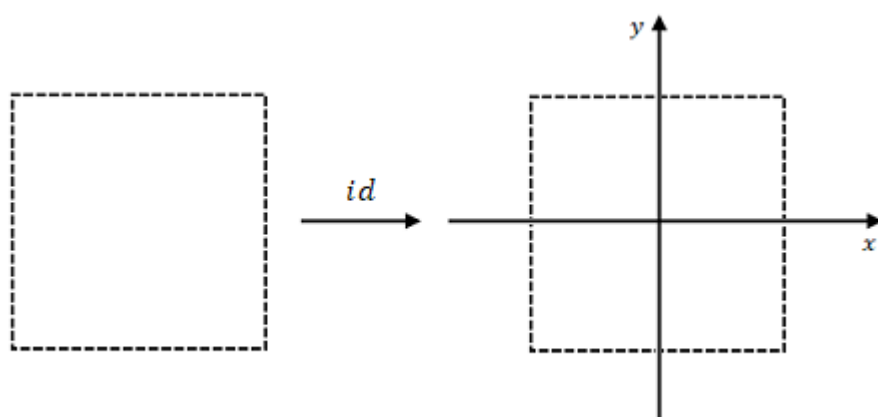


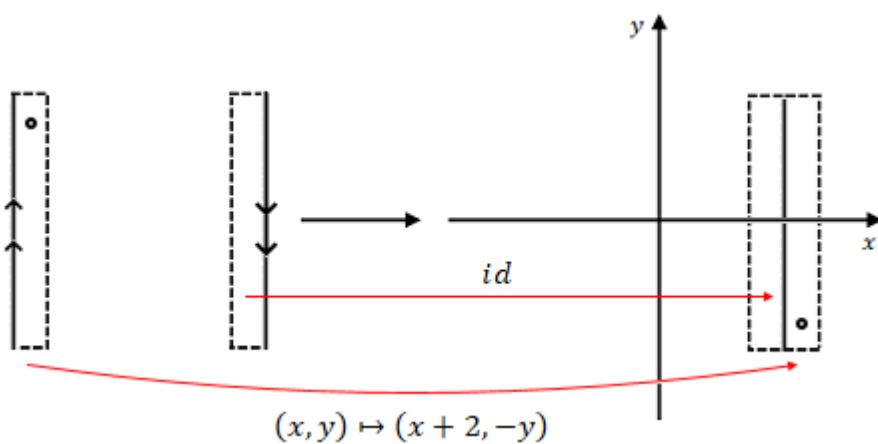
Рис. 2.6. Бутылка Клейна

Построим атлас:

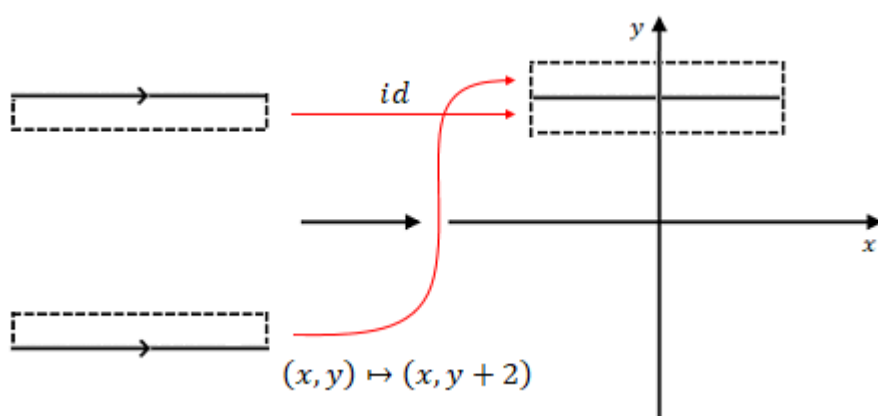
Первая карта:



Вторая карта:



Третья карта:



Легко убедиться, что три вышеприведенные карты покрывают всю бутылку Клейна, и что все замены координат будут гладкими.

Семинар 3. Касательные векторы, векторные поля, коммутатор векторных полей, дифференциал отображения. Часть 1.

Задача 3.1. Рассмотрим окружность S^1 , заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и точку $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Какова размерность касательного пространства $T_P S^1$?
Найти какой-либо базис в касательном пространстве $T_P S^1$.

Решение.

При решении подобных задач иногда возникает путаница: касательное пространство к многообразию в точке – это векторное пространство, но обычно его изображают как аффинное пространство. Например, в нашем случае касательное пространство – это прямая, проходящая через начало координат, а изображают его часто как касательную к окружности (т.е. как аффинное пространство).

Параметризуем окружность:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad r(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

Базис в касательном пространстве будет состоять из производных r по всем локальным координатам (в нашем случае по φ):

$r_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ – базисный вектор $T_P S^1$. Таким образом:

- 1) $\dim T_P S^1 = 1$;
- 2) Точке $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ соответствует значение $\varphi = \frac{\pi}{4}$, поэтому
 $r_\varphi(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ – базис в $T_P S^1$.

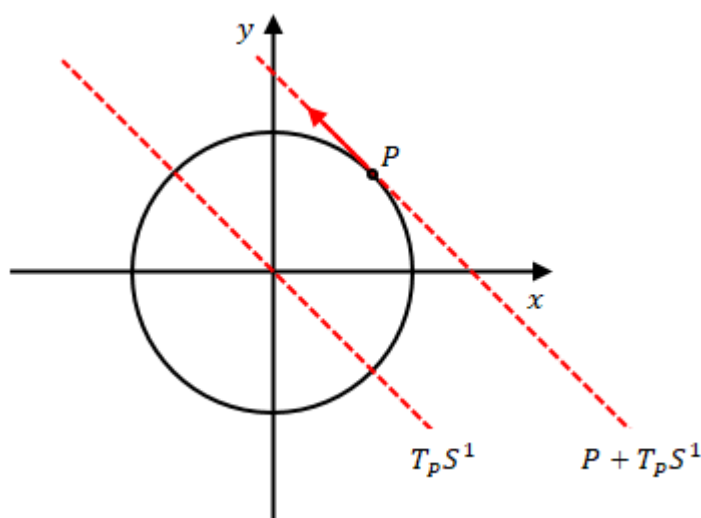


Рис. 3.1. Касательное пространство $T_P S^1$

$T_P S^1$ – векторное пространство, которому мы сопоставляем аффинное пространство $P + T_P S^1$, задающееся уравнением:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} - t \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + t \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

или

$$x + y = \sqrt{2}$$

Ответ: $T_P S^1$ - одномерное векторное пространство с базисом $r_\varphi = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Аффинное пространство $P + T_P S^1$ задается уравнением $x + y = \sqrt{2}$.

Задача 3.2. (а) Описать в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство $T_P S^2$ к сфере S^2 , заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

(б) Пусть u и v обозначают стереографические координаты, полученные проекцией из северного полюса. Найти координаты точки P .

(в) Найти координаты базисных векторов $\frac{\partial}{\partial u}$ и $\frac{\partial}{\partial v}$ пространства $T_P S^2$ в стандартном базисе объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$.

(г) Рассмотрим вектор $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in T_P S^2$. Найти его координаты в базисе $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$, где s и t обозначают стереографические координаты, полученные проекцией из южного полюса.

(д) Пусть $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции $x + y + z$ на сферу. Найти $\partial_V f$.

Решение.

(а) Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то касательный вектор к ней можно рассматривать как вектор скорости кривых, лежащих на поверхности.

Кривая, лежащая на F , удовлетворяет уравнению $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Продифференцируем по t :

$$F_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t) + F_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{y}(t) + F_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{z}(t) = 0$$

Пусть

$$(x(0), y(0), z(0)) = P$$

$$(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (v^1, v^2, v^3)$$

Тогда

$$F_x(P) \cdot v^1 + F_y(P) \cdot v^2 + F_z(P) \cdot v^3 = 0$$

В нашем случае $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z$. Получаем

$$\frac{4}{3}v^1 + \frac{4}{3}v^2 + \frac{2}{3}v^3 = 0 \Leftrightarrow 2v^1 + 2v^2 + v^3 = 0$$

Таким образом,

$$v = (v^1, v^2, v^3) \in T_p S^2 \Leftrightarrow 2v^1 + 2v^2 + v^3 = 0$$

Базис в $T_p S^2$ – это фундаментальная система решений уравнения $2v^1 + 2v^2 + v^3 = 0$. Можно найти базис и в параметрическом виде – так как в следующих пунктах задачи используются стереографические координаты, будем использовать стереографическую проекцию.

Параметризация сферы без северного полюса:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

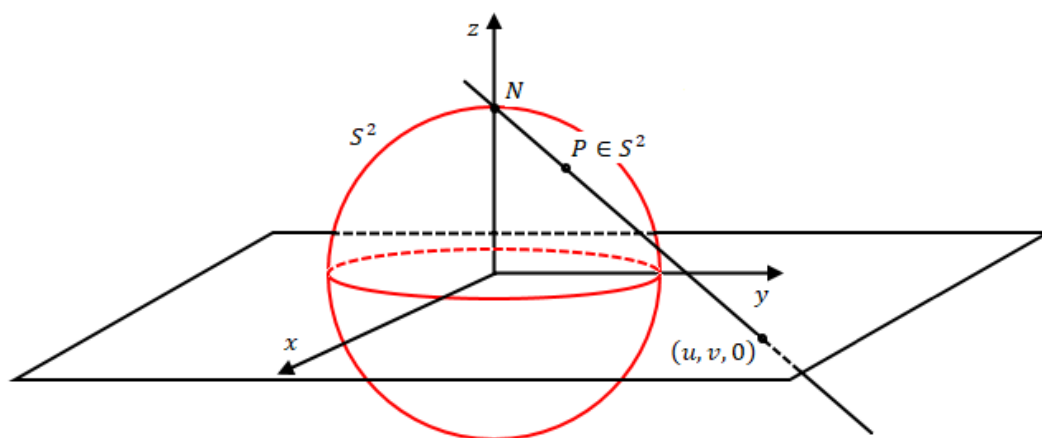


Рис. 3.2. Стереографическая проекция из северного полюса

В частности,

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow u = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1, v = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$

Уравнение сферы:

$$r(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1 - u^2 + v^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{4uv}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{4uv}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1 - u^2 + v^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{4u}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{4v}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

Тогда

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad r_u(P) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

$$r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right), \quad r_v(P) = \left(-\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

Проверка: легко видеть, что координаты $r_u(P)$ и $r_v(P)$ удовлетворяют уравнению $2v^1 + 2v^2 + v^3 = 0$.

Таким образом,

$$T_P S^2 = \{v \mid 2v^1 + 2v^2 + v^3 = 0\}$$

или

$$T_P S^2 = \text{span} \left(\left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{9} \right), \left(-\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right) \right) = \text{span}((1, -2, 2), (-2, 1, 2))$$

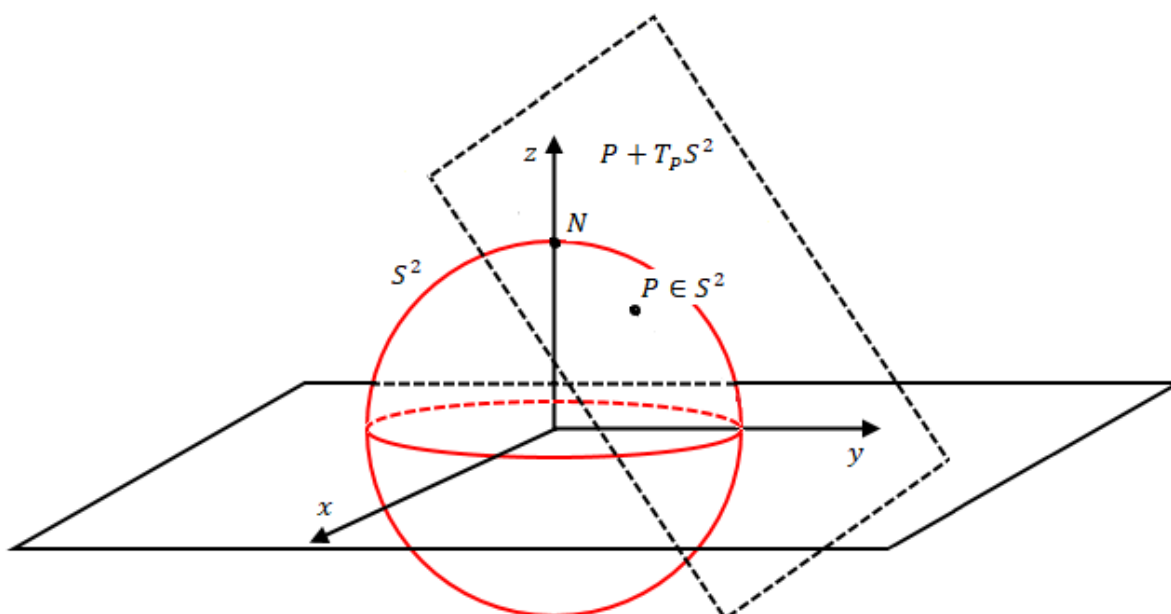


Рис. 3.3. $P + T_P S^2$

На рис. 3.3 изображено аффинное подпространство $P + T_P S^2$. Найдем его уравнение. Пусть $(x, y, z) \in P + T_P S^2$. Тогда

$$(x, y, z) - P \in T_P S^2 \Leftrightarrow 2(x - \frac{2}{3}) + 2(y - \frac{2}{3}) + z - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 3 = 0$$

(б) Найдем координаты (u, v) точки P :

$$u = \frac{x}{1-z} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1, \quad v = \frac{y}{1-z} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

(в) Найдем координаты базисных векторов $\frac{\partial}{\partial u}$ и $\frac{\partial}{\partial v}$ пространства $T_P S^2$:

$$\frac{\partial}{\partial u} = r_u = \left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{9} \right) \text{ в точке } P$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = r_v = \left(-\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right) \text{ в точке } P$$

(г) Найдем координаты $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in T_P S^2$ в базисе $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) f &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial}{\partial t} \right)}_{\text{считаем в точке } P} f \end{aligned}$$

Ранее были выведены формулы (см. задачу 2.1):

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

$$t = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial u} &= \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}, & \frac{\partial s}{\partial v} &= \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2} \\ \frac{\partial t}{\partial u} &= \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2}, & \frac{\partial t}{\partial v} &= \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

Тогда в $P = (1, 1)$ получаем

$$V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}$$

Можно найти координаты V в базисе $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$ иначе, умножив вектор V с координатами в базисе $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ на матрицу Якоби:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – координаты V в базисе $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$;

$$J = \begin{pmatrix} \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} & \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2} \\ \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2} & \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{pmatrix}, \quad J(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда координаты V в базисе $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$ равны

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

То есть,

$$V = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}$$

(д) Найдем $\partial_V f$:

$$f(u, v) = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2} + \frac{2v}{1 + u^2 + v^2} + \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} = \frac{-1 + 2u + 2v + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}$$

$$V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \Rightarrow \partial_V f = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{-1 + 2u + 2v + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-1 + 2u + 2v + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right)$$

Найдем $\frac{\partial f}{\partial u}(P)$ и $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P) = \frac{(2 + 2u)(1 + u^2 + v^2) - (-1 + 2u + 2v + u^2 + v^2)2u}{(1 + u^2 + v^2)^2}(P) = \frac{2}{9}$$

Так как f симметрична относительно u и v , то и

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{2}{9}$$

Получаем

$$\partial_V f(P) = \frac{\partial f}{\partial u}(P) + \frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Задача 3.3. Найти касательное пространство к $SO(3)$ в а) точке E , б) точке

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

а) Устройство группы $O(3)$:

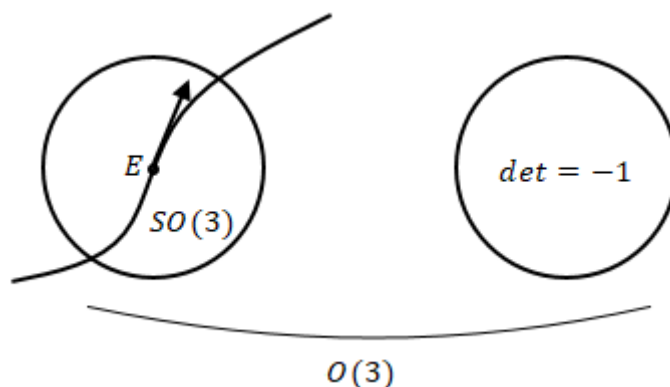


Рис. 3.4. Устройство группы $O(3)$

Группа $O(3)$ состоит из $SO(3)$ и ортогональных матриц с $\det = -1$. Так как $E \in SO(3)$, то и $T_E SO(3) = T_E O(3)$ – касательные пространства в точке E у $O(3)$ и $SO(3)$ совпадают.

Пусть $X(t)$ – кривая на $O(3)$, такая, что $X(0) = E$, $\dot{X}(0) = Y$. Тогда

$$X(t) \in O(3) \Leftrightarrow X(t)X^T(t) = E$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\dot{X}(t)X^T(t) + X(t)\dot{X}^T(t) = 0$$

Подставляя $t = 0$, получим

$$Y + Y^T = 0$$

Таким образом,

$$T_E SO(3) = T_E O(3) = \{Y \in \text{Mat}(3 \times 3) \mid Y + Y^T = 0\}$$

- кососимметрические матрицы 3×3 .

б) Решение аналогично пункту а):

пусть $X(t)$ – кривая на $O(3)$, такая, что $X(0) = P$, $\dot{X}(0) = Y$. Тогда

$$X(t) \in O(3) \Leftrightarrow X(t)X^T(t) = E$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\dot{X}(t)X^T(t) + X(t)\dot{X}^T(t) = 0$$

Подставляя $t = 0$, получим

$$YP^T + PY^T = 0$$

Таким образом,

$$T_pSO(3) = T_pO(3) = \{Y \in Mat(3 \times 3) \mid YP^T + PY^T = 0\}$$

Задача 3.4. Рассмотрим отображение $F: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$, которое в стереографических координатах u и v , полученных проекцией из северного полюса N , задаётся формулой $z \mapsto z^2$, где $z = u + iv$. Гладкое ли это отображение? Запишите его в стереографических координатах s и t , полученных проекцией из южного полюса, а также в терминах $w = s - it$. Продолжается ли это отображение в северный полюс? Будет ли оно гладким на всей сфере, включая полюса?

Решение.

Гладкое ли это отображение?

$$z^2 = (u + iv)^2 = u^2 - v^2 + i2uv$$

Таким образом,

$$F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

- гладкое отображение (многочлены – бесконечно дифференцируемые функции).

Запишем его в стереографических координатах s и t :

$$(s, t) \mapsto \begin{aligned} u &= \frac{s}{s^2 + t^2} \\ v &= \frac{t}{s^2 + t^2} \end{aligned}$$

$$F(u, v) = \left(\left(\frac{s}{s^2 + t^2} \right)^2 - \left(\frac{t}{s^2 + t^2} \right)^2, \frac{2st}{(s^2 + t^2)^2} \right)$$

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{\frac{s^2 - t^2}{(s^2 + t^2)^2}}{\frac{(s^2 - t^2)^2}{(s^2 + t^2)^4} + \frac{4s^2t^2}{(s^2 + t^2)^4}} = s^2 - t^2$$

$$t = \frac{\frac{2st}{(s^2 + t^2)^2}}{\frac{(s^2 - t^2)^2}{(s^2 + t^2)^4} + \frac{4s^2t^2}{(s^2 + t^2)^4}} = 2st$$

- в координатах s и t отображение F имеет вид:

$$F(s, t) = (s^2 - t^2, 2st)$$

Пусть $w = s - it$. Тогда

$$w^2 = (s - it)^2 = s^2 - t^2 - i2st$$

То есть, F осуществляет отображение

$$w \mapsto w^2$$

Северный полюс N имеет координаты $s = 0, t = 0$. Таким образом, F определено в N и гладко на всей сфере.



Семинар 4. Касательные векторы, векторные поля, коммутатор векторных полей, дифференциал отображения. Часть 2.

Задача 4.1. Рассмотрим отображение $F: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$, которое в стереографических координатах u и v , полученных проекцией из северного полюса N , задаётся формулой $z \mapsto z^2$, где $z = u + iv$. Рассмотрим точку P с координатами $u = 1, v = 1$ и вектор $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in T_P S^2$. Найти $d_P F(V)$. Найти дифференциал F в произвольной точке в координатах u, v , а также в стереографических координатах s и t , полученных проекцией из южного полюса.

Решение.

$$z^2 = (u + iv)^2 = u^2 - v^2 + i2uv$$

$$F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

Найдем дифференциал F в координатах u, v : матрица дифференциала – это матрица Якоби:

$$dF = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

$P = (1, 1), V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$. Чтобы найти $d_P F(V)$, умножим вектор V на матрицу dF , вычисленные в точке P :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

То есть,

$$d_P F(V) = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + 4 \cdot \frac{\partial}{\partial v} = 4 \frac{\partial}{\partial v}$$

Найти дифференциал F в стереографических координатах s и t : в этих координатах отображение F имеет вид (см. задачу 3.4)

$$F(s, t) = (s^2 - t^2, 2st)$$

Матрица дифференциала:

$$dF = \begin{pmatrix} 2s & -2t \\ 2t & 2s \end{pmatrix}$$

Задача 4.2. Рассмотрим стандартное отображение $p: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, сопоставляющее точке A на сфере точку проективной плоскости, отвечающей проходящей через A прямой. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u и v , полученных проекцией из северного полюса N , а на проективной плоскости однородные координаты $[z^0: z^1: z^2]$ и неоднородные координаты $x^1 = \frac{z^1}{z^0}, x^2 = \frac{z^2}{z^0}$ в аффинной карте U_0 . Записать отображение p в координатах u, v и x^1, x^2 . Найти дифференциал p в произвольной точке сферы в этих координатах.

Решение.

В общем виде, записать отображение двух многообразий в координатах – это значит записать отображение $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$:

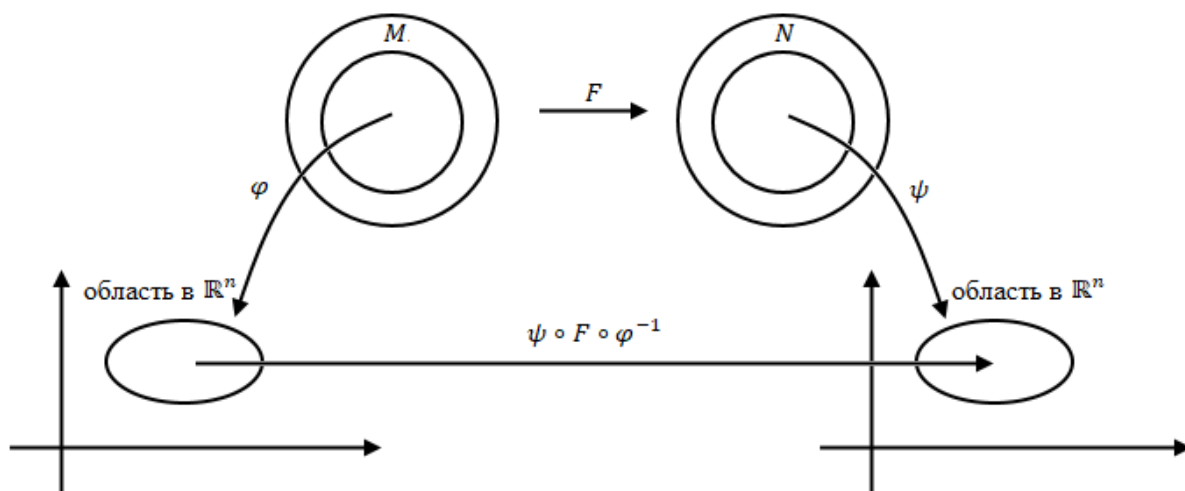


Рис. 4.1. Отображение многообразия M в многообразие N в координатах

В нашем случае:

$$\varphi^{-1}: (u, v) \mapsto (x, y, z)$$

$$x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}$$

$$F: (x, y, z) = [x: y: z]$$

$$F \circ \varphi^{-1}:$$

$$z^0 = x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad z^1 = y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \quad z^2 = z = \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}$$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}:$$

$$x^1 = \frac{z^1}{z^0} = \frac{y}{x} = \frac{v}{u}, \quad x^2 = \frac{z^2}{z^0} = \frac{z}{x} = \frac{-1 + u^2 + v^2}{u}$$

Таким образом, отображение p в координатах u, v на S^2 и x^1, x^2 на $\mathbb{RP}^2$ имеет вид

$$x^1 = \frac{v}{u}$$

$$x^2 = \frac{-1 + u^2 + v^2}{u}$$

Найдем дифференциал p в произвольной точке сферы в этих координатах:

$$\frac{\partial x^1}{\partial u} = -\frac{v}{u^2}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial v} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial u} = \frac{1 + u^2 - v^2}{u^2}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial v} = \frac{2v}{u}$$

Получаем, матрица dp в базисах $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ на $T_A S$ и $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}$ на $T_{p(A)} \mathbb{RP}^2$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ \frac{1 + u^2 - v^2}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{pmatrix}$$

Задача 4.3. Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Записать векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial r}$ и $Y = r \frac{\partial}{\partial \varphi}$ в декартовых координатах и найти их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в обеих системах координат. Убедиться, что результат не зависит от выбора локальных координат.

Решение.

В полярных координатах коммутатор проще посчитать по определению:

$$[X, Y]f = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) - r \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} + r \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} - r \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

таким образом,

$$[X, Y] = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

В декартовых координатах:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X = \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

$$X^1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad X^2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned} Y = r \frac{\partial}{\partial \varphi} &= r \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \right) = r(-r \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= -\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot x \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

$$Y^1 = -y\sqrt{x^2 + y^2}, \quad Y^2 = x\sqrt{x^2 + y^2}$$

Посчитаем коммутатор по явной формуле:

$$\begin{aligned}
 [X, Y]^i &= X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \\
 [X, Y]^1 &= X^1 \frac{\partial Y^1}{\partial x} + X^2 \frac{\partial Y^1}{\partial y} - Y^1 \frac{\partial X^1}{\partial x} - Y^2 \frac{\partial X^1}{\partial y} = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial(-y\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial(-y\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} + y\sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\partial x} - \\
 &- x\sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\partial y} = -\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - y - \frac{y^3}{x^2 + y^2} + y - \frac{yx^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = -y
 \end{aligned}$$

Получили

$$[X, Y]^1 = -y$$

Вычисление $[X, Y]^2$ оставляется читателю в качестве упражнения.

Пересчитаем $[X, Y]^1$ в декартовых координатах. В полярных координатах $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial \varphi}$,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Таким образом,

$$[X, Y]^1 = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^1 \text{ (декартова)} = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}\right)^1 = -y$$

В самом деле, результат не зависит от выбора локальных координат.

Задача 4.4. Пусть M – регулярная гладкая k -мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пусть X и Y – векторные поля на $\mathbb{R}^n$, определённые в некоторой окрестности M , касательные к M , то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $X(P), Y(P) \in T_P M$. Докажите, что тогда $[X, Y]$ тоже касается M , то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $[X, Y](P) \in T_P M$.

Решение.

Для решения этой задачи удобно использовать неявное задание поверхности:

$$\begin{cases} F_1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \dots \\ F_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

X касательно к $M \Leftrightarrow \forall i \quad \partial_X F_i = 0$ (в более современных обозначениях $XF_i = 0$).

В самом деле, касательный вектор к поверхности – это вектор скорости некоторой кривой $\gamma(t)$, лежащей на этой поверхности. Но

$$\partial_x F_i = \frac{\partial F_i}{\partial x^1} x^1 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x^n} x^n = \frac{d}{dt} F_i(\gamma(t))|_{t=0} = 0.$$

Верно равенство

$$[X, Y]F_i = X(YF_i) - Y(XF_i)$$

Но $XF_i = 0$ и $YF_i = 0$, так как X и Y – касательные. Поэтому $[X, Y]F_i = 0$, то есть, $[X, Y]$ – касательное векторное поле.

Задача 4.5. Докажите, что $[X, fY] = \partial_x f \cdot Y + f \cdot [X, Y]$.

Решение.

Будем использовать обозначение $\partial_x f = Xf$.

$$\begin{aligned} [X, fY]\varphi &= X(f \cdot Y\varphi) - fY(X\varphi) = (Xf)(Y\varphi) + f(X(Y\varphi)) - fY(X\varphi) = \\ &= ((Xf) \cdot Y + f \cdot [X, Y])\varphi \end{aligned}$$

Задача 4.6. Является ли образ гладкого векторного поля при гладком отображении гладким векторным полем?

Решение.

Мы знаем, что касательное пространство в точке A с помощью дифференциала F переходит в касательное пространство $F(A)$:

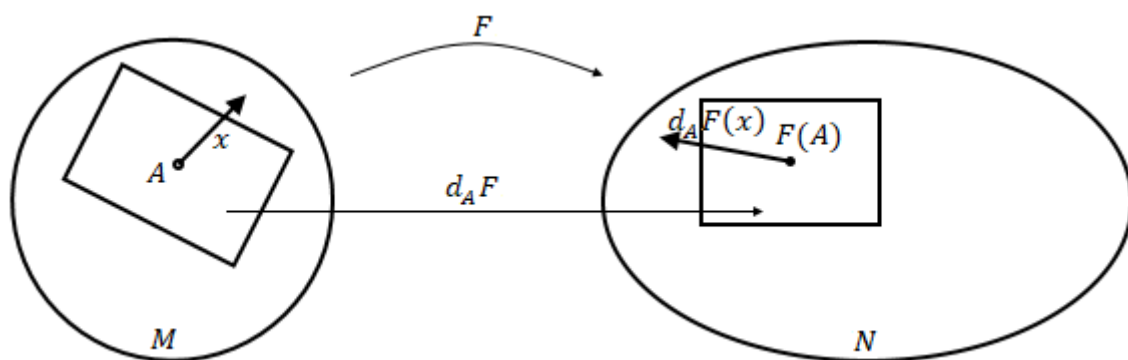


Рис. 4.2. Отображение касательных пространств

Естественно предположить, что образ гладкого векторного поля будет гладким векторным полем, однако, это не так: если гладкое отображение $M \rightarrow N$ не инъективно (точки при отображении “склеиваются”), то мы не можем определить векторное поле на N , а если $M \rightarrow N$ не сюръективно (не все точки лежат в образе), то мы не можем определить векторное поле на M .

Задача 4.7. Проверьте, сохраняется ли коммутатор векторных полей при отображениях многообразий. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ локальный диффеоморфизм, X, Y векторные поля на M . Верно ли, что тогда $d\varphi_P[X, Y] = [d\varphi X, d\varphi Y]$?

Решение.

Пусть $f \in C^\infty(N)$. Тогда по определению дифференциала

$$d\varphi_P[X, Y]f = [X, Y]\varphi^*f = X(Y\varphi^*f) - Y(X\varphi^*f)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [d\varphi X, d\varphi Y]f &= d\varphi X(d\varphi Yf) - d\varphi Y(d\varphi Xf) = d\varphi X(Y\varphi^*f) - d\varphi Y(X\varphi^*f) = \\ &= X(Y\varphi^*f) - Y(X\varphi^*f) \end{aligned}$$

Обратите внимание: в выражении $d\varphi X(Y\varphi^*f) - d\varphi Y(X\varphi^*f)$ мы $d\varphi X$ и $d\varphi Y$ применяем к функции на N , а $Y\varphi^*f$ и $X\varphi^*f$ – функции на M , поэтому здесь под $Y\varphi^*f$ и $X\varphi^*f$ следует понимать $Y\varphi^*f \circ \varphi^{-1}$ и $X\varphi^*f \circ \varphi^{-1}$ соответственно.

Таким образом,

$$d\varphi_P[X, Y] = [d\varphi X, d\varphi Y]$$

Упражнение: доказать данное равенство, используя локальные координаты.

Семинар 5. Дифференциал отображения, дифференциал функции, дифференциальные формы.

Задача 5.1. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $F: M \rightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p , что отображение $F: U \rightarrow F(U)$ является диффеоморфизмом U на открытое множество $F(U)$.

Решение.

Доказательство данной теоремы сводится к теореме об обратной функции из математического анализа.

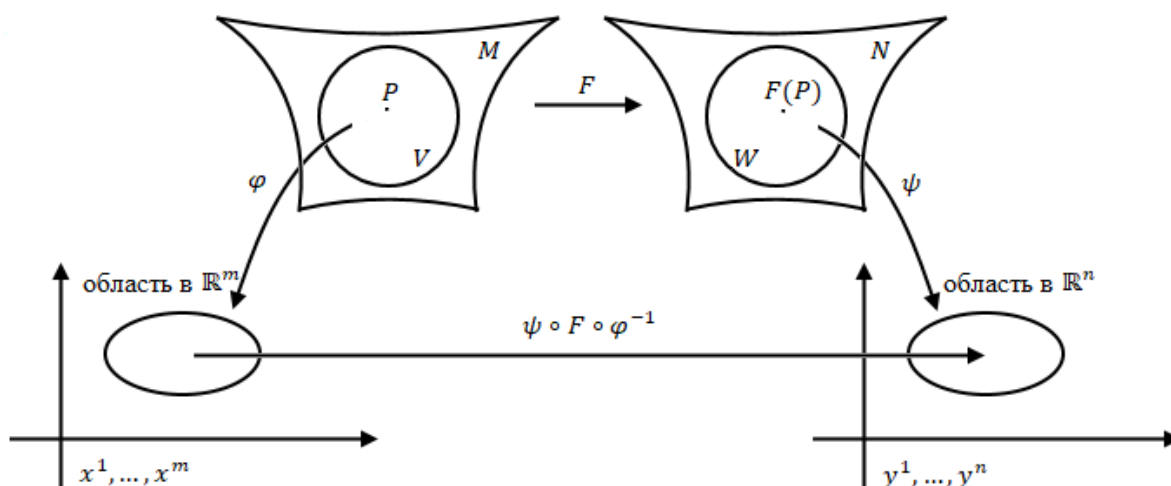


Рис. 5.1. $F: M \rightarrow N$ – гладкое отображение многообразий

Пусть

(V, φ) – карта на M , $p \in V$, (W, ψ) – карта на N , $F(p) \in W$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(V) \rightarrow \psi(W)$$

$x^1, \dots, x^m$ – локальные координаты в V , $y^1, \dots, y^n$ – локальные координаты в W .

Тогда отображение $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ можно записать в виде:

$$\begin{cases} y^1(x^1, \dots, x^m) = 0 \\ \dots \\ y^n(x^1, \dots, x^m) = 0 \end{cases}$$

Тогда матрица Якоби дифференциала $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ в базисах $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ в $T_p M$ и $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ в $T_{F(p)} N$ имеет вид:

$$J(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(P) & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m}(P) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(P) & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m}(P) \end{pmatrix}$$

$J(P)$ невырождена, поэтому (из теоремы об обратной функции из курса математического анализа) существует обратное гладкое отображение

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

определенное в окрестности $\tilde{W}$ точки $\psi(F(p))$.

Тогда определено отображение

$$F^{-1} = \varphi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1} \circ \psi,$$

$$F^{-1}: \psi^{-1}(\tilde{W}) \rightarrow F^{-1}(\psi^{-1}(\tilde{W})).$$

Тогда F диффеоморфно отображает U на $\psi^{-1}(\tilde{W}) = F(U)$. Так как F и F^{-1} – гладкие отображения, то $F: U \rightarrow F(U)$ – диффеоморфизм.

Задача 5.2. Рассмотрим сферу S^2 , заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть u и v – стереографические координаты, полученные проекцией из северного полюса. Рассмотрим векторное поле $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ и функцию $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, являющуюся ограничением функции $x + y + z$ на сферу. Найти координаты дифференциала df в базисе du, dv . Используя полученный ответ, вычислить $df(V)$. Сравнить результат с $\partial_V f$.

Решение.

Найдем координаты дифференциала df в базисе du, dv :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

Найдем $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$: так как u и v – стереографические координаты, полученные проекцией из северного полюса, то (см. задачу 2.1):

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases}$$

$$x + y + z = \frac{2u}{1+u^2+v^2} + \frac{2v}{1+u^2+v^2} + \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} = \frac{-1+2u+2v+u^2+v^2}{1+u^2+v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2 + 4u - 2u^2 - 4uv + 2v^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

Так как f симметрична относительно u и v , то

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2 + 4v - 2v^2 - 4uv + 2u^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

Получаем

$$df(V) = \frac{\partial f}{\partial u} du(V) + \frac{\partial f}{\partial v} dv(V) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{4 + 4u + 4v - 8uv}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

$$df(V)|_{(1,1)} = \frac{4}{9}$$

Таким образом, $df(V) = \partial_V f$ (см. задачу 3.2(д)).

Задача 5.3. Рассмотрим тор вращения T^2 и такую карту (U, α) на нём, что α^{-1} задаётся формулами

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \psi \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \psi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

а U – неравенствами $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N: T^2 \rightarrow S^2$, которое точке $p \in T^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in S^2$ к тору в точке p . Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v , полученные проекцией из северного полюса. Для произвольной точки $A \in T^2$ найдите $\partial_A N \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ и $\partial_A N \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right)$ в координатах u, v . Найдите матрицу дифференциала отображения N в базисах $\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$.

Решение.

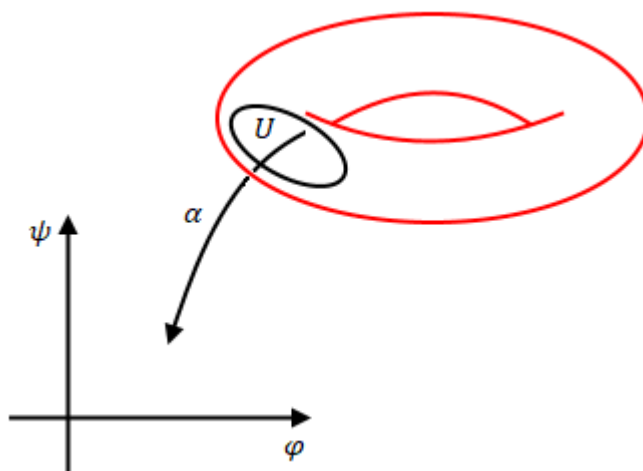


Рис. 5.2. К задаче 5.3

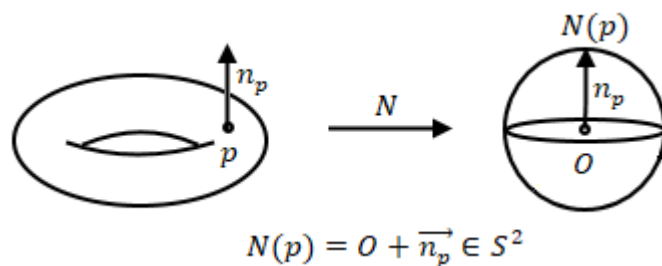


Рис. 5.3. Отображение Гаусса

Запишем, как отображение N устроено в координатах φ, ψ на T^2 и u, v на S^2 :

$$T^2: \quad F(\varphi, \psi) = ((R + r \cos \varphi) \cos \psi, (R + r \cos \varphi) \sin \psi, r \sin \varphi)$$

$$F_\varphi = (-r \sin \varphi \cos \psi, -r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \varphi)$$

$$F_\psi = (-(R + r \cos \varphi) \sin \psi, (R + r \cos \varphi) \cos \psi, 0)$$

F_φ и F_ψ – касательные векторы, поэтому они ортогональны нормали n_p и

$$n_p = -\frac{[F_\varphi, F_\psi]}{||[F_\varphi, F_\psi]||} = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi)$$

Таким образом,

$$N(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi) \in S^2$$

В стереографических координатах u, v на S^2 :

$$u = \frac{x}{1-z} = \frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi}$$

$$v = \frac{y}{1-z} = \frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi}$$

Отображение Гаусса является гладким (см. задачу 2.4).

Найдем матрицу дифференциала $d_A N$:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\cos \psi}{1 - \sin \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = -\frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\sin \psi}{1 - \sin \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi}$$

$$d_A N = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(A) & \frac{\partial u}{\partial \psi}(A) \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi}(A) & \frac{\partial v}{\partial \psi}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \psi}{1 - \sin \varphi} & -\frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi} \\ \frac{\sin \psi}{1 - \sin \varphi} & \frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 dN\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\cos\psi}{1-\sin\varphi} & -\frac{\cos\varphi\sin\psi}{1-\sin\varphi} \\ \frac{\sin\psi}{1-\sin\varphi} & \frac{\cos\varphi\cos\psi}{1-\sin\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\psi}{1-\sin\varphi} \\ \frac{\sin\psi}{1-\sin\varphi} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{\cos\psi}{1-\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\sin\psi}{1-\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial v} \\
 dN\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\cos\psi}{1-\sin\varphi} & -\frac{\cos\varphi\sin\psi}{1-\sin\varphi} \\ \frac{\sin\psi}{1-\sin\varphi} & \frac{\cos\varphi\cos\psi}{1-\sin\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos\varphi\sin\psi}{1-\sin\varphi} \\ \frac{\cos\varphi\cos\psi}{1-\sin\varphi} \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{\cos\varphi\sin\psi}{1-\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos\varphi\cos\psi}{1-\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial v}
 \end{aligned}$$

Выразить множители при $\frac{\partial}{\partial u}$ и $\frac{\partial}{\partial v}$ через φ и ψ нельзя, так как отображение Гаусса не является взаимно-однозначным.

Задача 5.4. Пусть M многообразие размерности k , а $f_1, \dots, f_k$ такие функции на M , что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \dots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Решение.

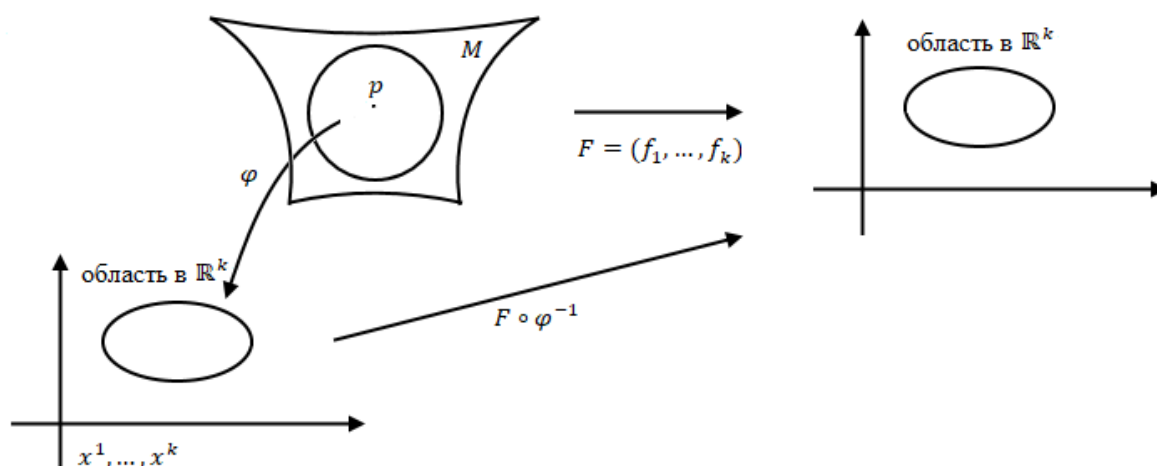


Рис. 5.4. К задаче 5.4

Рассмотрим гладкое (как композиция гладких) отображение

$$F \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Существует ли отображение, обратное к $F \circ \varphi^{-1}$?

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x^1} dx^1 + \dots \frac{\partial f_i}{\partial x^n} dx^n$$

Так как $df_1, \dots, df_k$ линейно независимы в p , то

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^m}(p) \end{pmatrix} \neq 0$$

Но это – в точности якобиан отображения F . Значит, по теореме об обратной функции, в некоторой окрестности $F(p)$ существует обратное гладкое отображение F^{-1} .

Тогда (см. рис. 5.4) в некоторой окрестности $F(p)$ существует обратное гладкое отображение

$$(F \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ F^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

и в некоторой окрестности точки p F – карта, функции $f_1, \dots, f_k$ – локальные координаты.

Задача 5.5. Пусть M многообразие размерности k , а $f_1, \dots, f_l$, $l < k$ – такие функции на M , что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \dots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Решение.

Выберем $x^1, \dots, x^k$ – локальные координаты в окрестности p . Рассмотрим

$$df_1, \dots, df_l, dx^1, \dots, dx^k$$

- систему ковекторов в касательном пространстве T_p^*M .

Системы $df_1, \dots, df_l$ и $dx^1, \dots, dx^k$ линейно независимы, значит, можно выбрать базис

$$df_1, \dots, df_l, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_{k-l}}$$

Из предыдущей задачи 5.4 следует, что $df_1, \dots, df_l, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_{k-l}}$ – локальные координаты в некоторой окрестности p .

Задача 5.6. Пусть $F: M \rightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $F(p) \in N$ функции $x^1, \dots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ F, \dots, x^l \circ F$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p .

Решение.

Сведем эту задачу к предыдущей – докажем, что дифференциалы $x^1 \circ F, \dots, x^l \circ F$ линейно независимы.

Дифференциал сложной функции:

$$d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \cdot d_pF$$

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{F} & N & \xrightarrow{G} & K \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & G \circ F & & \end{array}$$

Получаем

$$d_p(x^1 \circ F) = d_{F(p)}x^1 \cdot d_pF$$

...

$$d_p(x^l \circ F) = d_{F(p)}x^l \cdot d_pF$$

Верно равенство:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d_p(x^1 \circ F) \\ \dots & \dots & \dots \\ d_p(x^l \circ F) \end{pmatrix}}_{\text{матрица } l \times k} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{F(p)}x^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{F(p)}x^l \end{pmatrix}}_{\text{матрица } l \times l} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{матрица} \\ d_pF \end{pmatrix}}_{\text{матрица } l \times k}$$

Так как отображение $d_pF: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ сюръективно, то $\dim N = l \leq k$.

Так как в окрестности $F(p) \in N$ функции $x^1, \dots, x^l$ образуют локальную систему координат, то матрица $\begin{pmatrix} d_{F(p)}x^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{F(p)}x^l \end{pmatrix}$ невырождена:

$$rk \begin{pmatrix} d_{F(p)}x^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{F(p)}x^l \end{pmatrix} = l$$

Так как отображение $d_pF: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ сюръективно, то

$$rk \begin{pmatrix} \text{матрица} \\ d_pF \end{pmatrix} = l$$

Поэтому

$$rk \begin{pmatrix} d_p(x^1 \circ F) \\ \dots & \dots & \dots \\ d_p(x^l \circ F) \end{pmatrix} = l$$

Отсюда следует, что дифференциалы $d_p(x^1 \circ F), \dots, d_p(x^l \circ F)$ линейно независимы, а значит, функции $x^1 \circ F, \dots, x^l \circ F$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p .

Семинар 6. Дифференциальные формы и операции с ними. Часть 1.

Задача 6.1. Доказать, что если для любой гладкой 1-формы ω функция $\omega(X)$ является гладкой, то векторное поле X является гладким.

Решение.

Пусть $x^1, \dots, x^n$ – локальные координаты. Рассмотрим форму $\omega = dx^i$. Тогда $\omega(X) = dx^i(X) = X^i$ – гладкая функция $\Rightarrow X$ – гладкое векторное поле (на лекциях была доказана теорема о равносильности условий гладкости векторного поля и гладкости всех его координат).

Задача 6.2. Доказать, что нет нетривиальных кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве V от k аргументов, если $k > \dim V$.

Решение.

Пусть $\xi \in \wedge^k V^*$ – кососимметрическая полилинейная функция на векторном пространстве V от k аргументов. Тогда

$$\xi(v^1, \dots, v^k) = \xi(v_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, v_1^{j_k} e_{j_k}) = v_1^{j_1} \dots v_1^{j_k} \xi(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

Так как $k > \dim V$, то среди $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ есть одинаковые, а это значит (по общему свойству кососимметрических функций), что

$$\xi(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$$

Задача 6.3. Рассмотрим 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ и векторные поля $X_1, \dots, X_k$. Доказать, что

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_k(X_1) & \dots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}$$

Решение.

Докажем по индукции.

$k = 1$: $\omega_1(X_1) = \omega_1(X_1)$ – верно.

Пусть утверждение верно для $k - 1$, докажем для k . Выберем порядок внешнего произведения:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k) = (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}) \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k).$$

По определению внешнего произведения:

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}) \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k) = \\ &= \frac{1}{(k-1)! 1!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn } \pi \cdot \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k-1)}) \cdot \omega_k(X_{\pi(k)}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(k-1)!}{(k-1)!} \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \omega_k(X_i) \cdot \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) =$$

(здесь $\hat{X}_i$ означает пропуск X_i , знак $(-1)^{k-i} = \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k & i \end{pmatrix}$)

$$= \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \omega_k(X_i) \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{k-1}(X_1) & \dots & \omega_{k-1}(X_k) \end{vmatrix}$$

- подразумевается, что в каждом сомножителе среди столбцов

$$\begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{k-1}(X_1) & \dots & \omega_{k-1}(X_k) \end{vmatrix} \text{ пропущен столбец } \begin{pmatrix} \omega_1(X_i) \\ \dots \\ \omega_1(X_i) \end{pmatrix}.$$

Но, как нетрудно заметить, это – разложение определителя

$$\begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_k(X_1) & \dots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}$$

по последней строке:

$$\begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_k(X_1) & \dots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \omega_k(X_i) \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{k-1}(X_1) & \dots & \omega_{k-1}(X_k) \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_k(X_1) & \dots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}$$

Задача 6.4. Пусть V векторное пространство размерности n . Найти размерность пространства $\Lambda^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций на V от k аргументов.

Решение.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V , тогда $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ – базис в $\Lambda^k V^*$.

Таким образом, задача свелась к нахождению количества таких наборов:

$$\dim \Lambda^k V^* = |\{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}|$$

Заметим, что это – в точности количество способов выбрать k предметов из n (выбираем различные k индексов из n и упорядочиваем их), поэтому

$$\dim \Lambda^k V^* = C_n^k$$

Задача 6.5. Доказать, что если дифференциальные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_p$ линейно зависимы, то $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$. Верно ли обратное? Что можно сказать про k -формы?

Решение.

Пусть формы $\omega_1, \dots, \omega_p$ линейно зависимы, тогда одна из них является линейной комбинацией остальных (не умаляя общности, можем считать, что это ω_p):

$$\omega_p = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_{p-1} \omega_{p-1}$$

Тогда

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p-1} \wedge (\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_{p-1} \omega_{p-1}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_i = 0,$$

так как для любого $1 \leq i \leq p-1$ в произведении $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_i$ будут два одинаковых сомножителя.

Верно ли обратное?

Пусть $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$ и $\omega_1, \dots, \omega_p$ – линейно независимы. Выберем в качестве базиса в пространстве 1-форм

$$e^1 = \omega_1, \dots, e^p = \omega_p, e^{p+1}, \dots, e^n$$

(дополним $\omega_1, \dots, \omega_p$ до базиса). Тогда $e^1 \wedge \dots \wedge e^p$ – базисный вектор $\Lambda^p V^*$, но по условию $e^1 \wedge \dots \wedge e^p = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$ – противоречие, значит, $\omega_1, \dots, \omega_p$ линейно зависимы.

Что можно сказать про k -формы?

Для k -форм утверждение задачи неверно. В качестве примера рассмотрим $\mathbb{R}^3$ и 2-формы $\omega_1 = dx \wedge dy$ и $\omega_2 = dx \wedge dz$. Эти 2-формы линейно независимы, но

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = dx \wedge dy \wedge dx \wedge dz = 0$$

Задача 6.6. Найти $d\omega$, $\iota_X \omega$ и $\omega \wedge (dx + dy + dz)$, если

$$X = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \omega = x^2 dx \wedge dy + xz dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Решение.

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x^2 dx \wedge dy + xz dy \wedge dz) = d(x^2) \wedge dx \wedge dy + d(xz) \wedge dy \wedge dz = \\ &= 2x dx \wedge dx \wedge dy + (z dx + x dz) \wedge dy \wedge dz = z dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_X \omega &= \iota_X(x^2 dx \wedge dy + xz dy \wedge dz) = \iota_X(x^2) dx \wedge dy + x^2 \iota_X(dx) \wedge dy - x^2 dx \iota_X(dy) + \\ &+ \iota_X(xz) dy \wedge dz + xz \iota_X(dy) \wedge dz - xz dy \wedge \iota_X(dz) = x^2 y dy \end{aligned}$$

$$\omega \wedge (dx + dy + dz) = (x^2 dx \wedge dy + xz dy \wedge dz) \wedge (dx + dy + dz) =$$

$$= x^2 dx \wedge dy \wedge dz + xz dy \wedge dz \wedge dx = x^2 dx \wedge dy \wedge dz + xz dx \wedge dy \wedge dz = \\ = (x^2 + xz) dx \wedge dy \wedge dz$$

Задача 6.7. Найти $d\omega$ и $f^*\omega$, если $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, а $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Найти ограничение $\omega|_{S^1}$ формы ω на окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Решение.

Найдем $d\omega$:

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ d\omega = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy = \\ = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0$$

Также можно было заметить, что

$$\omega = d \left(\arctg \frac{y}{x} \right) \Rightarrow d\omega = d^2 \left(\arctg \frac{y}{x} \right) = 0$$

Найдем $f^*\omega$:

Свойства $f^*\omega$:

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2) \\ f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2 \\ f^* d\omega = df^*\omega$$

поэтому при нахождении $f^*\omega$ все сводится к подстановке функций. Поясним на примере: пусть $\theta = x dy$. Тогда

$$f^*\theta = f^*(x dy) = f^*(x) f^*(dy) = f^*(x) df^*(y) = (u^2 - v^2) d(2uv)$$

- то есть, можно сразу заменять x и y на выражения $x(u, v)$ и $y(u, v)$, пропуская промежуточные этапы. Поэтому

$$f^*\omega = f^* \left(\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(u^2 - v^2) d(2uv) - 2uv d(u^2 - v^2)}{(u^2 - v^2)^2 + 4u^2 v^2} = \\ = \frac{(u^2 - v^2) 2(v du + u dv) - 2uv(2u du - 2v dv)}{(u^2 + v^2)^2} = 2 \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}$$

Также можно было заметить, что в полярных координатах r, φ

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} \Rightarrow \omega = d\varphi$$

тогда

$$f^*\omega = f^*d\varphi = df^*\varphi$$

Заметим, что если $z = x + iy$, то $f: z \rightarrow z^2$, а при возведении комплексного числа в квадрат его аргумент φ увеличивается вдвое.

Найдем $\omega|_{S^1}$:

Параметризация S^1 :

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\iota: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

получаем

$$\omega|_{S^1} = \iota^*\omega = \frac{\cos \varphi d \sin \varphi - \sin \varphi d \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = d\varphi$$

Задача 6.8. Записать в полярных координатах дифференциальные формы

$$\omega = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \quad \sigma = \sqrt{x^2 + y^2} dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2).$$

Решение.

Замена координат – это обратный образ отображения:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{id} & M \\ r, \varphi & & x, y \end{array}$$

$$\omega = (id)^*\omega$$

Полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega &= f(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)(r \cos \varphi d(r \cos \varphi) + r \sin \varphi d(r \sin \varphi)) = \\ &= f(r^2)(r \cos \varphi (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) + r \sin \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi)) = \\ &= f(r^2)((r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi)dr + (-r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi)d\varphi) = f(r^2)rdr \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) =$$

$$= r(r \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi - r \sin^2 \varphi d\varphi \wedge dr) = r(r \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi + r \sin^2 \varphi dr \wedge d\varphi) = \\ = r^2 dr \wedge d\varphi$$

Задача 6.9. Пусть Ω дифференциальная p -форма, а ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Решение.

Пусть $\Omega = \theta \wedge \omega$. Тогда

$$\Omega \wedge \omega = \theta \wedge \omega \wedge \omega = 0.$$

Пусть $\Omega \wedge \omega = 0$. Выберем базис в пространстве 1-форм: $e^1 = \omega, e^2, \dots, e^n$. Тогда

$$\Omega = \omega_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}.$$

$$\Omega \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow \omega_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \wedge e^1 \Leftrightarrow 1 \in i_1, \dots, i_p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Omega = e^1 \wedge (\omega_{1 i_2 \dots i_p} e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p})$$

$\parallel$
 ω

$\parallel$
 θ

Задача 6.10. Записать форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ в сферических координатах.

Решение.

Сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$$dx = \cos \varphi \cos \theta dr - r \sin \varphi \cos \theta d\varphi - r \cos \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \varphi \cos \theta dr + r \cos \varphi \cos \theta d\varphi - r \sin \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dz = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

Тогда

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz = (\cos \varphi \cos \theta dr - r \sin \varphi \cos \theta d\varphi - r \cos \varphi \sin \theta d\theta) \wedge \\ \wedge (\sin \varphi \cos \theta dr + r \cos \varphi \cos \theta d\varphi - r \sin \varphi \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = \\ = (r^2 \cos^2 \varphi \cos^3 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \cos^3 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta) dr \\ \wedge d\varphi \wedge d\theta = (r^2 \cos^3 \theta + r^2 \sin^2 \theta \cos \theta) dr \wedge d\varphi \wedge d\theta = r^2 \cos \theta dr \wedge d\varphi \wedge d\theta$$

Семинар 7. Дифференциальные формы и операции с ними. Часть 2.

Задача 7.1. Пусть r, φ полярные координаты в плоскости. Доказать, что, хотя функция φ определена с точностью до добавления кратного 2π , её дифференциал $d\varphi$ является корректно определённой 1-формой. Записать $d\varphi$ в декартовых координатах.

Решение.

Так как $d(\varphi + 2\pi k) = d\varphi$, то дифференциал $d\varphi$ корректно определен.

Полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

откуда

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi k.$$

Тогда в декартовых координатах

$$\begin{aligned} d\varphi &= d\left(\arctg \frac{y}{x} + \pi k\right) = d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctg \frac{y}{x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctg \frac{y}{x}\right) dy = \\ &= \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Задача 7.2. На лекции было доказано, что производная Ли 1-формы ω вдоль векторного поля Y может быть в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ найдена так: если

$$\omega = \omega_i dx^i, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

то

$$L_Y \omega = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} Y^j + \omega_l \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} \right) dx^i$$

Вывести аналогичную формулу для производной Ли k -формы

$$\sigma = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sigma_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Решение.

Производная Ли от суммы форм – это сумма производных Ли:

$$L_Y \sigma = \sum_{i_1 < \dots < i_k} L_Y (\sigma_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) =$$

производная Ли от произведения форм – это произведение производных Ли:

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left((L_Y \sigma_{i_1 \dots i_k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^k \sigma_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge (L_Y dx^{i_j}) \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) =$$

производная Ли коммутирует с дифференциалом (так как она определяется через обратный образ, коммутирующий с дифференциалом), поэтому $L_Y dx^{i_j} = dL_Y x^{i_j}$. Таким образом, решение задачи свелось к вычислению производной Ли от функций, а это – производная вдоль соответствующего векторного поля:

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(Y^l \frac{\partial \sigma_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^k \sigma_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d \left(Y^l \frac{\partial x^{i_j}}{\partial x^l} \right) \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) =$$

так как $d \left(Y^l \frac{\partial x^{i_j}}{\partial x^l} \right) = dY^{i_j} = \frac{\partial Y^{i_j}}{\partial x^l} dx^l$, получаем

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial \sigma_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^l} Y^l dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sigma_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial Y^{i_j}}{\partial x^l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^l \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(в последней сумме dx^l стоит на j -ом месте).

Задача 7.3. Найти интегральные кривые векторного поля $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ на плоскости.

Решение.

В каждой точке интегральной кривой $\gamma(t)$ вектор скорости совпадает с соответствующим вектором Z :

$$\dot{\gamma}(t) = Z(\gamma(t))$$

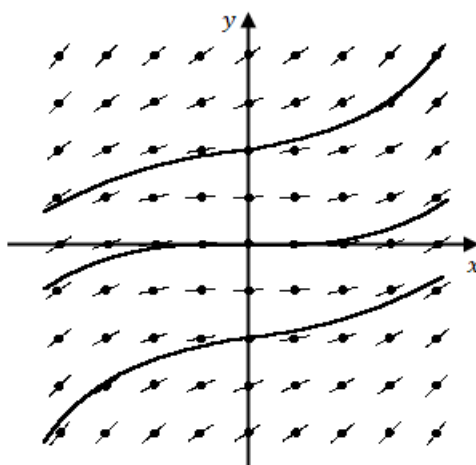


Рис. 7.1. Интегральные кривые

Получаем систему из двух автономных ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение и подставляя $\dot{y}(t)$ во второе уравнение системы, получаем известное уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Его решение:

$$x = A \cos t + B \sin t,$$

тогда

$$y = A \sin t - B \cos t.$$

Получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -B \end{pmatrix}$$

Матрица $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол t . Таким образом, интегральные кривые – это концентрические окружности с центром в начале координат:

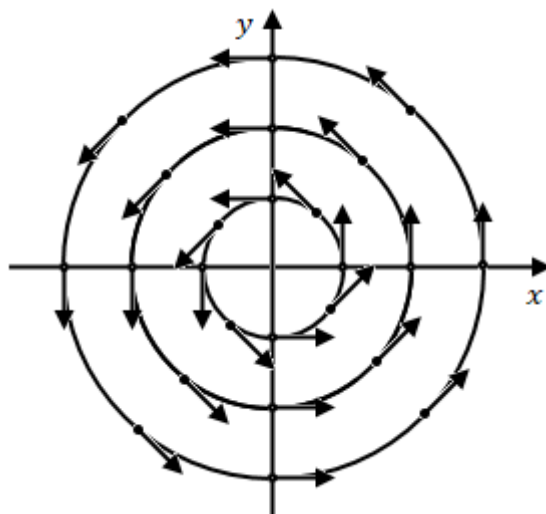


Рис. 7.2. Интегральные кривые – концентрические окружности

Задача 7.4. Найти производную Ли формы $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ вдоль векторного поля $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.

Решение.

Найдем $L_Z \omega$ двумя способами.

1) По определению,

$$L_Z \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t^Z)^* \omega$$

Так как интегральные кривые векторного поля Z – окружности (см. задачу 7.3), то

$$\Phi_t^Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos t + y \sin t \\ -x \sin t + y \cos t \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\Phi_t^Z)^* \omega &= d(x \cos t + y \sin t) \wedge d(-x \sin t + y \cos t) = \\ &= (\cos t dx + \sin t dy) \wedge d(-\sin t dx + \cos t dy) = \cos^2 t dx \wedge dy - \sin^2 t dy \wedge dx = \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t) dx \wedge dy = dx \wedge dy \end{aligned}$$

Обратите внимание: t – параметр, а не координата на многообразии, поэтому при дифференцировании смотрим на $f(t)$ как на константу.

Полученный результат неудивителен – подставив в форму $\omega = dx \wedge dy$ два вектора, мы получим ориентированную площадь параллелограмма. Так как интегральные кривые векторного поля Z – окружности, то однопараметрическая группа Φ_t^Z совершает поворот. Таким образом, то, что обратный образ формы $(\Phi_t^Z)^* \omega$ равен ω , означает лишь то, что при повороте параллелограмма его площадь не меняется. Получаем

$$L_Z \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dx \wedge dy = 0$$

2) Производная Ли – это дифференцирование степени 0. Применим тождество Лейбница:

$$\begin{aligned} L_Z \omega &= L_Z(dx \wedge dy) = (L_Z dx) \wedge dy + dx \wedge (L_Z dy) = d(L_Z x) \wedge dy + dx \wedge d(L_Z y) = \\ &= d(-y) \wedge dy + dx \wedge dx = 0 \end{aligned}$$

Задача 7.5. Найти $d(\iota_Z \omega) + \iota_Z(d\omega)$ для $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ и $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ и сравнить с $L_Z \omega$.

Решение.

По формуле цепной гомотопии Картана,

$$d(\iota_Z \omega) + \iota_Z(d\omega) = L_Z \omega.$$

Проверим это: контракция – это дифференцирование степени -1 , поэтому

$$\iota_Z \omega = \iota_Z(dx \wedge dy) = (\iota_Z dx) \wedge dy - dx \wedge (\iota_Z dy) = -y dy - x dx$$

Тогда

$$d(\iota_Z \omega) = d(-y dy - x dx) = 0$$

Так как $d\omega = 0$, то и $\iota_Z(d\omega) = 0$. Поэтому $d(\iota_Z \omega) + \iota_Z(d\omega) = 0 = L_Z \omega$.

Задача 7.6. Доказать, что

$$[L_X, \iota_Y] \omega = \iota_{[X, Y]} \omega.$$

Решение.

Доказательство устроено так же, как доказательство формулы цепной гомотопии Картана.

$$[L_X, \iota_Y] \omega = L_X(\iota_Y \omega) - \iota_Y(L_X \omega)$$

(1) Проверим, что утверждение задачи верно для функций: если $\omega = f \in C^\infty = \Omega^0$, то

$$L_X(\iota_Y f) - \iota_Y(L_X f) = -\iota_Y(Xf) = 0$$

и

$$\iota_{[X, Y]} \omega = 0$$

- таким образом, утверждение задачи верно для функций.

(2) Проверим, что утверждение задачи верно для дифференциалов: если $\omega = df$, $f \in C^\infty = \Omega^0$, то

$$\begin{aligned} L_X(\iota_Y \omega) - \iota_Y(L_X \omega) &= L_X(\iota_Y df) - \iota_Y(L_X df) = L_X(Yf) - \iota_Y d(L_X f) = \\ &= L_X(Yf) - \iota_Y d(Xf) = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f = \iota_{[X, Y]} df \end{aligned}$$

- таким образом, утверждение задачи верно для дифференциалов.

(3) Докажем, что $[L_X, \iota_Y]$ – дифференцирование степени -1 :

$$\begin{aligned} [L_X, \iota_Y](\sigma \wedge \tau) &= L_X(\iota_Y \sigma \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge \iota_Y \tau) - \iota_Y(L_X \sigma \wedge \tau + \sigma \wedge L_X \tau) = \\ &= L_X(\iota_Y \sigma) \wedge \tau + \iota_Y \sigma \wedge L_X \tau + (-1)^{|\sigma|} L_X \sigma \wedge \iota_Y \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge L_X(\iota_Y \tau) - \iota_Y(L_X \sigma) \wedge \tau - \\ &\quad - (-1)^{|\sigma|} L_X \sigma \wedge \iota_Y \tau - \iota_Y \sigma \wedge L_X \tau - (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge \iota_Y(L_X \tau) = \\ &= L_X(\iota_Y \sigma) \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge L_X(\iota_Y \tau) - \iota_Y(L_X \sigma) \wedge \tau - (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge \iota_Y(L_X \tau) = \\ &= ([L_X, \iota_Y] \sigma) \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge [L_X, \iota_Y] \tau \end{aligned}$$

- таким образом, $[L_X, \iota_Y]$ – действительно дифференцирование степени -1 .

Тогда из (1), (2) и (3) следует, что $[L_X, \iota_Y]$ и $\iota_{[X, Y]}$ совпадают на всех формах. Действительно, достаточно сравнить их на мономах $f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. При дифференцировании применим к мономам тождество Лейбница, тогда сравнение $[L_X, \iota_Y]$ и $\iota_{[X, Y]}$ сведется к сравнению на функциях f и дифференциалах координат dx^{i_k} , но на них они равны, как было доказано выше.

Задача 7.7. Доказать, что

$$L_f X \omega = f L_X \omega + df \wedge \iota_X \omega,$$

где f – гладкая функция.

Решение.

Воспользуемся формулой цепной гомотопии Картана:

$$\begin{aligned} L_{fX}\omega &= d(\iota_{fX}\omega) + \iota_{fX}(d\omega) = d(f\iota_X\omega) + f\iota_X(d\omega) = df \wedge \iota_X\omega + f d(\iota_X\omega) + f\iota_X(d\omega) = \\ &= fL_X\omega + df \wedge \iota_X\omega \end{aligned}$$

Задача 7.8. Найти коммутатор векторных полей

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Решение.

Применим к функции:

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= X(Yf) - Y(Xf) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \right) + y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\ &= -y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[X, Y] = \frac{\partial}{\partial y}$$

Задача 7.9. Пусть даны 1-форма $\omega = xdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $d\omega(X, Y)$ с помощью формулы вычисления внешнего дифференциала формы через коммутаторы векторных полей.

Решение.

Найдем $d\omega(X, Y)$ двумя способами:

$$1) d\omega = d(xdy) = dx \wedge dy$$

$$d\omega(X, Y) = 1 \cdot x - (-y) \cdot 0 = x$$

$$2) d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 - (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) \cdot 0 - x = x$$

Задача 7.10. Пусть даны 1-форма $\omega = xdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $(L_Y\omega)(X)$ с помощью формулы вычисления производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

Решение.

Найдем $(L_Y\omega)(X)$ двумя способами:

$$1) L_Y\omega = L_Y(xdy) = (L_Yx)dy + xL_Y(dy) = (Yx)dy + xd(Yy) = -ydy + xdx$$

Тогда

$$d(L_Y\omega)(X) = x$$

$$2) L_Y(\omega(X)) = (L_X\omega)(X) + \omega([Y, X])$$

Тогда

$$(L_X\omega)(X) = L_Y(\omega(X)) - \omega([Y, X]) = \omega([X, Y]) = x$$

Семинар 8. Дифференциальные формы, их интегрирование.

Задача 8.1. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

где L – ориентированный отрезок от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$ в $\mathbb{R}^2$.

Решение.

Параметризуем отрезок L :

$$L = A + t \cdot \overrightarrow{AB},$$

$A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$. Получаем параметризацию L :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

Тогда

$$dx = dt$$

$$dy = -dt$$

и

$$\int_L \frac{y dx - x dy}{y^2} = \int_0^1 \frac{(2-t)dt - (1+t)(-dt)}{(2-t)^2} = 3 \int_0^1 \frac{d(t-2)}{(t-2)^2} = \left. \frac{-3}{t-2} \right|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Задача 8.2. Вычислить интеграл

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Решение.

Параметризуем окружность L :

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Тогда

$$dx = -R \sin t dt$$

$$dy = R \cos t dt$$

и

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos t)(R \cos t dt) - (R \sin t)(-R \sin t dt)}{(R \cos t)^2 + (R \sin t)^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Задача 8.3. Вычислить интеграл от формы

$$\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$$

по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv.$$

Решение.

$$dx = du + dv$$

$$dy = du - dv$$

$$dz = v du + u dv$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_D \Omega &= \iint_{-1-1}^{11} (u+v)^2 (du-dv) \wedge (vdu+udv) + (u-v)^2 (vdu+udv) \wedge (du+dv) \\ &\quad + (uv)^2 (du+dv) \wedge (du-dv) = \\ &= \iint_{-1-1}^{11} (u+v)^2 (udu \wedge dv - vdv \wedge du) + (u-v)^2 (vdu \wedge dv + u dv \wedge du) \\ &\quad + u^2 v^2 (-du \wedge dv + dv \wedge du) = \\ &= \iint_{-1-1}^{11} ((u+v)^2(u+v) + (u-v)^2(v-u) + u^2 v^2(-2)) du \wedge dv = \\ &= \iint_{-1-1}^{11} (6u^2 v + 2v^3 - 2u^2 v^2) dudv = (\text{по теореме Фубини}) = \\ &= 6 \int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 v dv + 2 \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 v^3 dv - 2 \int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 v^2 dv = -2 \int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 v^2 dv = \\ &= -2 \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^1 \frac{v^3}{3} \Big|_{-1}^1 = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

Задача 8.4. Вычислить интеграл по сфере радиуса 1 с центром в $(0, 0, 0)$ от формы

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Решение.

Можно вычислить интеграл напрямую. Параметризация сферы:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cos \theta \\ y = \cos \varphi \sin \theta, \\ z = \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$$

Тогда можно найти

$$\int_{S^2} \omega.$$

Поступим по-другому - воспользуемся формулой Стокса (ее частным случаем – формулой Гаусса-Остроградского):

$$\int_{S^2} \omega = \int_{B^3} d\omega$$

- интеграл по многообразию от формы равен интегралу по границе многообразия от дифференциала формы.

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3dx \wedge dy \wedge dz$$

Тогда

$$\int_{B^3} d\omega = 3 \int_{B^3} dx \wedge dy \wedge dz$$

Это утроенный объем шара, который равен 4π . Однако, все же вычислим данный интеграл, перейдя к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta, \\ z = r \sin \theta \end{cases}, \quad r \in [0, 1], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$$

Тогда

$$dx = \cos \varphi \cos \theta dr - r \sin \varphi \cos \theta d\varphi - r \cos \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \varphi \cos \theta dr + r \cos \varphi \cos \theta d\varphi - r \sin \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dz = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

и (см. задачу 6.10)

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \cos \theta dr \wedge d\varphi \wedge d\theta$$

Получаем (используя теорему Фубини)

$$3 \int_{B^3} dx \wedge dy \wedge dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

Задача 8.5. Найти дифференциал от формы $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Записать формулу Грина из курса математического анализа

$$\oint_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

в терминах ω и $d\omega$.

Решение.

Вычислим $d\omega$:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Тогда формула Грина запишется в виде:

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Задача 8.6. Найти дифференциал от формы

$$\omega = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy.$$

Записать формулу Гаусса-Остроградского из курса математического анализа

$$\begin{aligned} \iiint_V P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

в терминах ω и $d\omega$.

Решение.

Вычислим $d\omega$:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Тогда формула Гаусса-Остроградского запишется в виде:

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega$$

Задача 8.7. Найти дифференциал от формы

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Аналогично предыдущим двум задачам записать классическую формулу Стокса

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Sigma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

в терминах ω и $d\omega$.

Решение.

Вычислим $d\omega$:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Тогда формула Стокса запишется в виде:

$$\int_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

Задача 8.8. Пусть $\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Разберитесь, почему

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Решение.

Это традиционные обозначения. Под $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ подразумевается скалярное произведение $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. В физике принято говорить о вычислении интеграла второго рода от поля силы, а не о дифференцировании 1-формы.

Задача 8.9. Пусть $\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, а $\vec{n}$ – поле единичных нормалей к поверхности Σ . Разберитесь, почему

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

Решение.

Параметризуем поверхность Σ :

$$r(u, v) = r(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

В каждой точке поверхности касательное пространство порождается векторами r_u и r_v , а вектор нормали $\vec{n}$ им ортогонален. Тогда $\vec{n}$ можно вычислить как векторное произведение:

$$\vec{n} = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}.$$

По определению, длина векторного произведения – это площадь параллелограмма, натянутого на соответствующие векторы, поэтому

$$dS = |[r_u, r_v]| du \wedge dv$$

Тогда

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot [r_u, r_v] du \wedge dv$$

но $\vec{F} \cdot [r_u, r_v]$ – это смешанное произведение $\vec{F}$, r_u и r_v , поэтому

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot [r_u, r_v] du \wedge dv = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv$$

раскроем определитель по первой строке, получим

$$\iint_{\Sigma} P \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv + Q \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} du \wedge dv + R \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} du \wedge dv.$$

Теперь заметим, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv = dy \wedge dz, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} du \wedge dv = dz \wedge dx, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} du \wedge dv = dx \wedge dy$$

- в самом деле, например

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

Задача 8.10. Перепишите на языке дифференциальных форм классические формулы Стокса

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

и Гаусса-Остроградского

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Решение.

1) формула Стокса:

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Тогда (см. задачу 8.8)

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial \Sigma} P dx + Q dy + R dz$$

и (см. задачу 8.9)

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

На $\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ можно смотреть как на символическое векторное произведение:

если

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

то

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

поэтому формулу Стокса также иногда пишут в виде:

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2) формула Гаусса-Остроградского:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Тогда

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

и (см. задачу 8.9)

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

На $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ можно смотреть как на символическое скалярное произведение:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

поэтому формулу Гаусса-Остроградского также иногда пишут в виде:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Семинары 9 и 10. Ориентация. Разбиение единицы. Многообразия с краем. Теорема Стокса.

Задача 9-10.1. Доказать, что выбор ориентации на двумерной поверхности в трёхмерном ориентированном евклидовом пространстве эквивалентен выбору гладкого поля единичных нормалей к поверхности.

Решение.

Можно по-разному задавать ориентацию на двумерной поверхности: с помощью выбора поля единичных нормалей

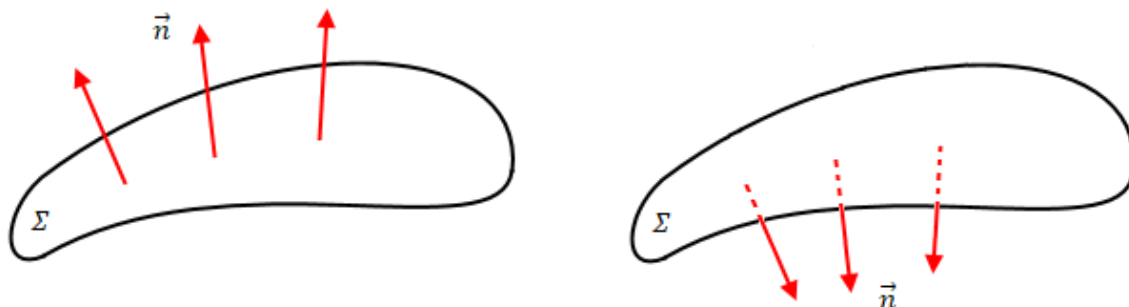


Рис. 9-10.1. Две разные ориентации поверхности Σ , заданные с помощью выбора поля единичных нормалей

и с помощью задания класса атласов, в которых замена переменных между картами имеет положительный якобиан. Докажем, что эти определения эквивалентны.

а) пусть на Σ есть положительно ориентированные координаты u, v (или, что то же самое, положительно ориентированная карта). Тогда v, u будут ориентированы отрицательно. Построим нормаль

$$\vec{n} = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}.$$

Если s, t – другие положительно ориентированные координаты, то

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} > 0$$

$$r_s = \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial s} r_u + \frac{\partial v}{\partial s} r_v$$

$$r_t = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial t} r_u + \frac{\partial v}{\partial t} r_v$$

Матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от r_u, r_v к r_s, r_t .

По определению векторного произведения, базис $r_u, r_v, \vec{n}$ положительно ориентирован. Как будет ориентирован базис $r_s, r_t, \vec{n}$? Матрица перехода от $r_u, r_v, \vec{n}$ к $r_s, r_t, \vec{n}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель положителен:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} > 0,$$

поэтому базис $r_s, r_t, \vec{n}$ также будет ориентирован положительно и

$$\vec{n} = \frac{[r_s, r_t]}{|[r_s, r_t]|}.$$

Таким образом, $\vec{n}$ определен независимо от выбора положительно ориентированных координат.

б) Пусть $\vec{n}$ – поле нормалей. Будем говорить, что координаты u, v положительно ориентированы, если $r_u, r_v, \vec{n}$ – положительно ориентированный базис. Пусть s, t такие локальные координаты, что $r_s, r_t, \vec{n}$ – положительно ориентированный базис. Тогда

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} > 0,$$

откуда следует, что u, v и s, t ориентированы одинаково.

Задача 9-10.2. Построить атлас на многообразии с краем – единичном замкнутом диске $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ в евклидовой плоскости.

Решение.

У многообразия с краем существуют два вида карт (см. рис. 9 – 10.2): карты без компоненты края, которые отображаются в $\mathbb{R}^n$ и карты с компонентой края, которые отображаются в H^n – полупространство $x^1 \leq 0$:

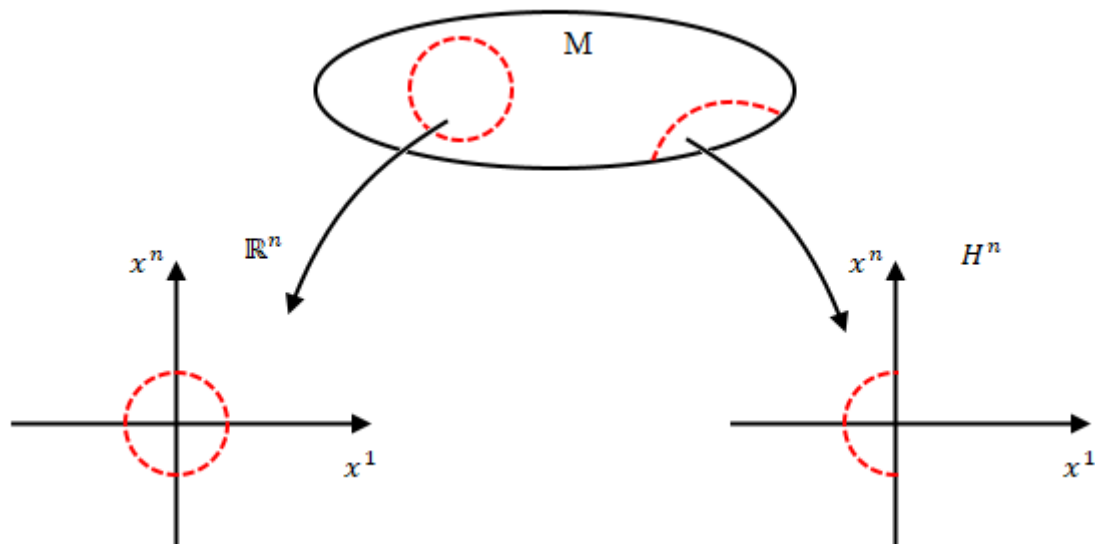


Рис. 9-10.2. Карты с компонентой края и без нее

Построим атлас на D :

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\varphi_1(x, y) = (s, t)$$

$$\begin{cases} s = x \\ t = y \end{cases}$$

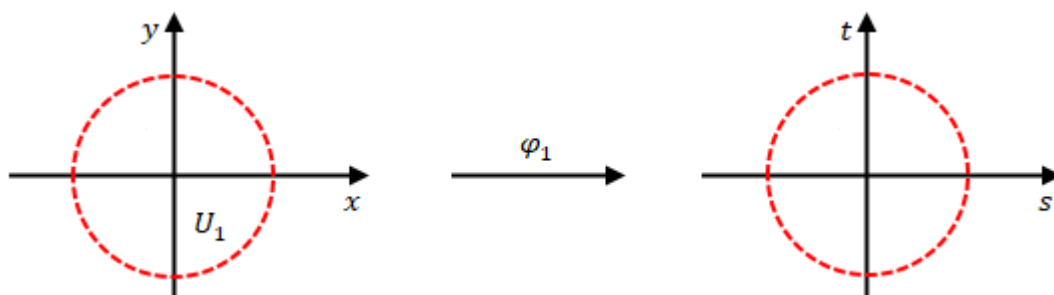


Рис. 9-10.3. Карта U_1, φ_1

$$U_2 = \{(x, y) \in D \mid x > 0, x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\}$$

в качестве координат удобно взять полярные:

$$\varphi_2(x, y) = (u, v)$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \\ v = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

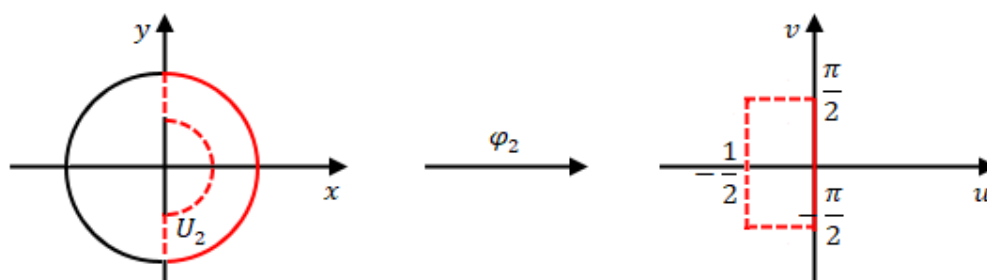


Рис. 9-10.4. Карта U_2, φ_2

Аналогично строим U_3, U_4, U_5 :

$$U_3 = \{(x, y) \in D \mid x < 0, x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\}$$

$$\varphi_3(x, y) = (a, b)$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \\ b = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

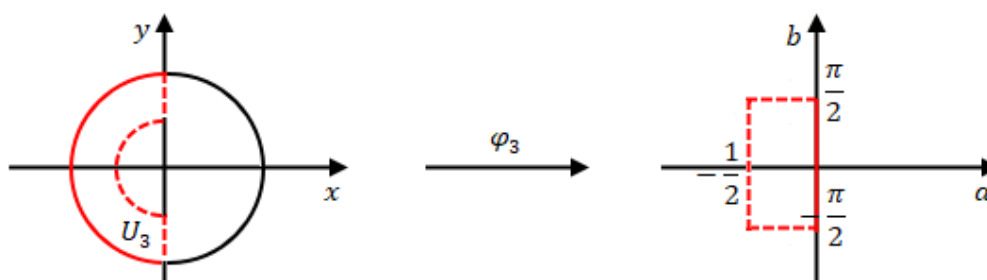


Рис. 9-10.5. Карта U_3, φ_3

$$U_4 = \{(x, y) \in D \mid y > 0, x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\}$$

$$\varphi_4(x, y) = (c, d)$$

$$\begin{cases} c = \arctg \frac{x}{y} \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \end{cases}$$

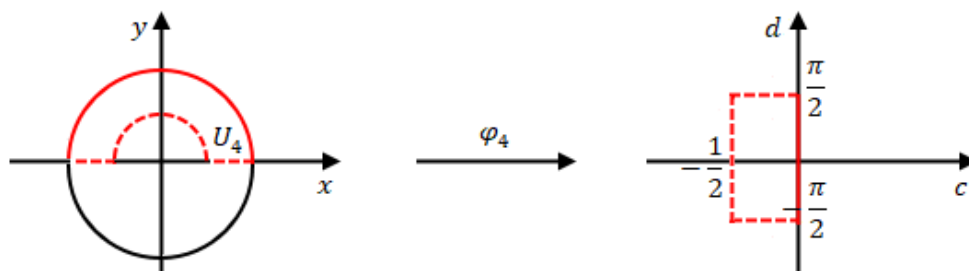


Рис. 9-10.6. Карта U_4, φ_4

$$U_5 = \{(x, y) \in D \mid y < 0, x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\}$$

$$\varphi_5(x, y) = (e, f)$$

$$\begin{cases} e = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \\ f = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \end{cases}$$

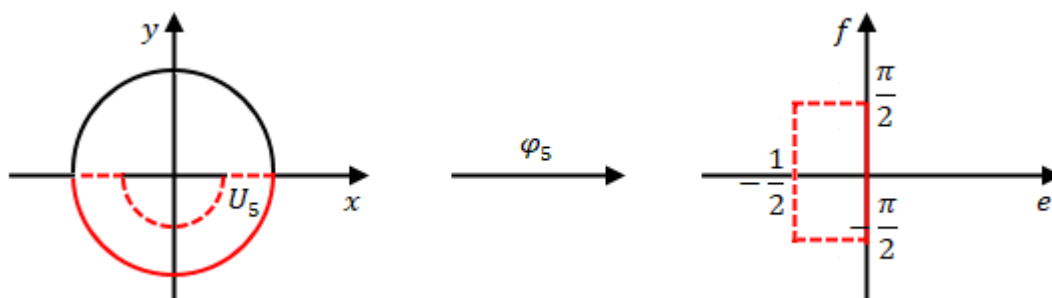


Рис. 9-10.7. Карта U_5, φ_5

Проверим, что функции перехода гладкие.

Рассмотрим, например, $U_1 \cap U_2$. В одну сторону:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = \sqrt{t^2 + s^2} - 1 \\ v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{t}{s} \end{cases}$$

и в другую сторону:

$$\begin{cases} s = x = (u + 1) \cos v \\ t = y = (u + 1) \sin v \end{cases}$$

- функции перехода гладкие.

Рассмотрим также $U_2 \cap U_4$. В одну сторону:

$$\begin{cases} c = v - \frac{\pi}{2} \\ d = u \end{cases}$$

и в другую сторону:

$$\begin{cases} u = d \\ v = c + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- функции перехода гладкие.

Гладкость функций перехода между остальными картами проверяется аналогично.

Задача 9-10.3. Объяснить, как известные из анализа формулы Гаусса-Остроградского и Стокса получаются как частный случай теоремы Стокса для дифференциальных форм.

Почему ориентация границы в классических формулировках точно такая, которая индуцируется на крае многообразия из ориентации многообразия?

Решение.

Формула

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

- общая для формул Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса (см. задачи 8.5, 8.6, 8.7). Обсудим вопрос ориентации границы.

Ориентация поверхности должна быть следующей: если смотреть с конца нормали, то движение по краю происходит против часовой стрелки:

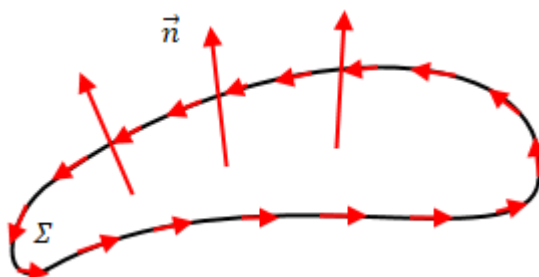


Рис. 9-10.8. Ориентация поверхности

Координаты u, v положительно ориентированы, если $r_u, r_v, \vec{n}$ — положительно ориентированный базис (т.е. имеет такую же ориентацию, как и стандартный базис в $\mathbb{R}^3$):

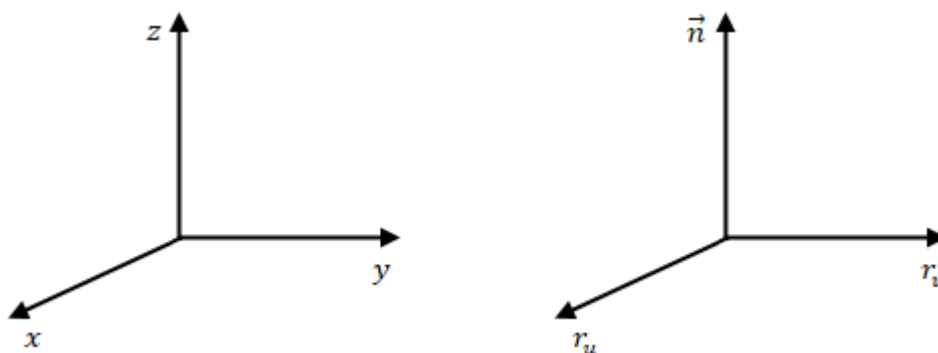


Рис. 9-10.9. Ориентация $r_u, r_v, \vec{n}$

- если смотреть с конца нормали, мы движемся от r_u к r_v против часовой стрелки.

При построении атласа для многообразия с краем, карты, содержащие часть границы, отображаются в H^n — полупространство $u \leq 0$. Так как u, v положительно ориентированы на поверхности, то v будет положительно ориентирован на границе поверхности. Тогда, когда мы смотрим с конца нормали, r_u будет торчать наружу, а r_v будет направлен таким образом, что при обходе по краю поверхность всегда будет по левую руку, то есть, обход будет производиться против часовой стрелки.

Задача 9-10.4. Доказать, что связное многообразие либо неориентируемо, либо допускает ровно две ориентации.

Решение.

Пусть M – ориентируемое многообразие. Тогда есть набор ориентированных атласов A_i . Зафиксируем некоторый атлас A_0 с координатами u^i . Тогда все атласы распадаются на два класса: ориентированных как A_0 и ориентированных противоположно A_0 .

Пусть A_i, v^j и A_j, w^k принадлежат одному классу. Тогда переход от v^j к w^k устроен так:

$$\frac{\partial v^j}{\partial w^k} = \frac{\partial u^i}{\partial w^k} \frac{\partial v^j}{\partial u^i}$$

- отсюда следует, что определитель $\frac{\partial v^j}{\partial w^k}$ положителен (так как он равен произведению определителей матриц $\frac{\partial u^i}{\partial w^k}$ и $\frac{\partial v^j}{\partial u^i}$, а они одного знака, так как A_i и A_j принадлежат одному классу атласов). Поэтому атласы внутри класса ориентированы одинаково.

Таким образом, все атласы разделились на два класса и ориентаций как минимум две. С другой стороны, каждый ориентированный атлас попадает ровно в один из двух классов, поэтому ориентаций не больше двух. Отсюда следует, что ориентаций ровно две.

Задача 9-10.5. Пусть M – гладкое многообразие размерности n . Доказать, что если на M существует не обращающаяся в ноль дифференциальная n -форма, то многообразие ориентируемо.

Решение.

Пусть $\omega \in \Omega^n(M)$ и для $\forall P \in M$ выполнено $\omega_P \neq 0$. Дадим следующее определение ориентируемому многообразию: локальные координаты $u^1, \dots, u^n$ положительно ориентированы, если $\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}\right) > 0$.

Пусть для локальных координат $v^1, \dots, v^n$ выполнено условие $\omega\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}\right) > 0$. Убедимся, что данное выше определение положительной ориентированности не противоречиво (то есть, что координаты $u^1, \dots, u^n$ и $v^1, \dots, v^n$ имеют одинаковую ориентацию).

Запишем ω в локальных координатах $u^1, \dots, u^n$. $du^1 \wedge \dots \wedge du^n$ – базис в $\Omega^n(M)$. Тогда

$$\omega = f(u^1, \dots, u^n) du^1 \wedge \dots \wedge du^n, \quad f(u^1, \dots, u^n) > 0$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}\right) = f \left| du^i \left(\frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right|$$

Но $du^i\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$ – матрица замены координат. Так как $\omega\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}\right) > 0$ и $f > 0$, то и $\left| du^i \left(\frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right| > 0$ – замена координат имеет положительный якобиан. Таким образом,

координаты $u^1, \dots, u^n$ и $v^1, \dots, v^n$ имеют одинаковую ориентацию и определение ориентации через дифференциальную n -форму ω корректно.

Задача 9-10.6. Рассмотрим атлас на многообразии. Назовём упорядоченное множество карт (U_i, φ_i) , $i = 1, \dots, n$, дезориентирующей цепочкой карт, если для любого $i = 1, \dots, n - 1$ пересечение $U_i \cap U_{i+1}$ непусто, якобиан замены координат на этом пересечении положителен, пересечение $U_n \cap U_1$ тоже непусто, но якобиан замены координат на этом пересечении отрицателен. Доказать, что если на многообразии есть дезориентирующая цепочка карт, то многообразие неориентируемо.

Решение.

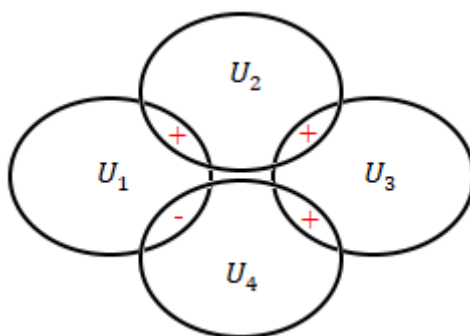


Рис. 9-10.10. Дезориентирующая цепочкой карт

Допустим, многообразие ориентировано. Выберем ориентированный атлас. Как обсуждалось в задаче 9 – 10.4, ориентированные атласы распадаются на два класса – выберем содержащий U_1 . Тогда он содержит U_2 (так как U_2 имеет такую же ориентацию, что и U_1), содержит U_3 (так как U_3 имеет такую же ориентацию, что и U_2), ... , содержит U_n (так как U_n имеет такую же ориентацию, что и U_{n-1}). Но U_n и U_1 ориентированы противоположно и не могут принадлежать одному атласу – противоречие. Следовательно, многообразие неориентируемо.

Задача 9-10.7. Построить на листе Мёбиуса атлас с дезориентирующей цепочкой карт. Вывести из этого, что лист Мёбиуса неориентируем.

Решение.

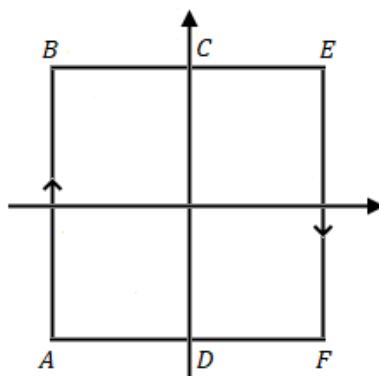
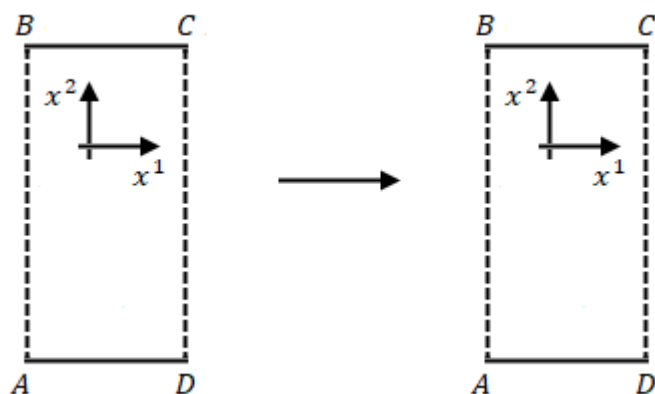


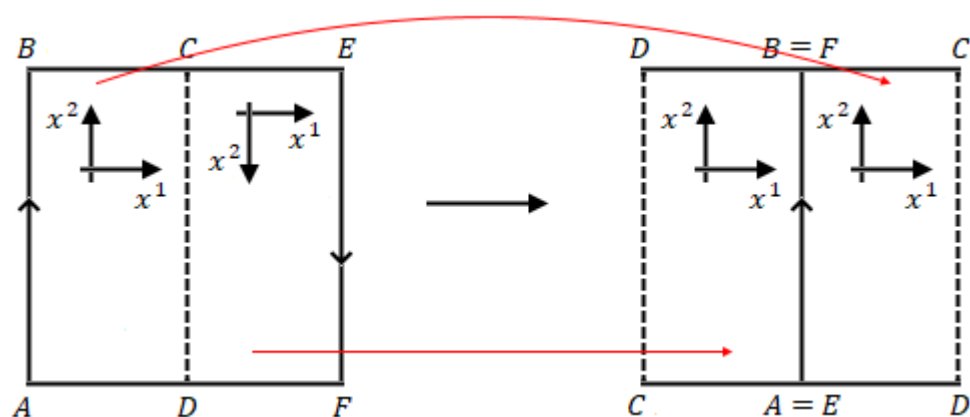
Рис. 9-10.11. Лист Мёбиуса

Построим атлас.

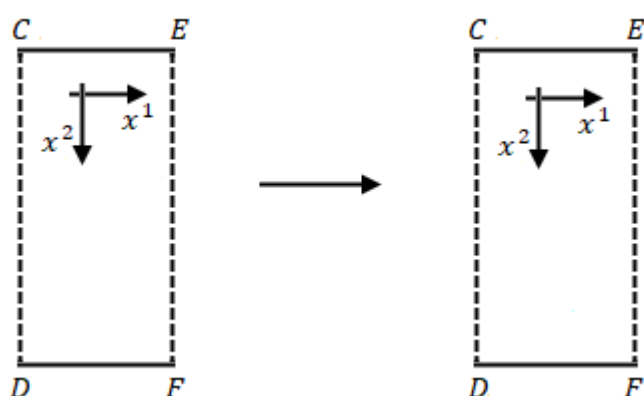
U_1 :



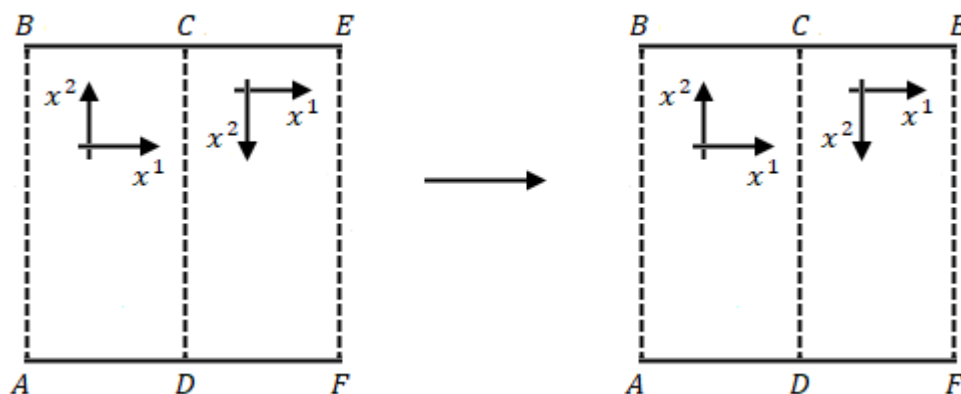
U_2 :



U_3 :



U_4 :



Тогда U_1, U_2, U_3, U_4 – дезориентирующая цепочка карт.

Задача 9-10.8. Найти с помощью теоремы Стокса интеграл по сфере радиуса 1 с центром в $(0, 0, 0)$ от формы

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

из предыдущего семинара.

Решение.

$$\int_{S^2} \omega = \int_{B^3} d\omega = 3 \int_{B^3} dx \wedge dy \wedge dz = 3 \text{Vol}(B^3) = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi = 4\pi$$

Задача 9-10.9. На прошлом семинаре был вычислен интеграл

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении. Заметим, что интегрируемая форма – это просто $d\varphi$, где φ – это полярный угол. Почему полученный ненулевой результат не противоречит теореме Стокса?

Решение.

На прошлом семинаре было выяснено, что

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

С другой стороны, $L = \partial D$ – граница диска, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Тогда по теореме Стокса

$$2\pi = \int_{\partial D} d\varphi = \int_D d^2\varphi = 0$$

- противоречие. Почему так рассуждать нельзя?

Дело в том, что в теореме Стокса форма $\omega = d\varphi$ должна быть определена на всем многообразии, а в нашем случае $d\varphi$ не определена в центре диска, таким образом, теорему Стокса применять нельзя.

Задача 9-10.10. Доказать, что проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема.

Решение.

Однородные координаты на $\mathbb{RP}^2$: $[x^0 : x^1 : x^2]$

Аффинные карты:

$U_0: x^0 \neq 0$, неоднородные координаты $u^1 = \frac{x^1}{x^0}, u^2 = \frac{x^2}{x^0}$,

$U_1: x^1 \neq 0$, неоднородные координаты $v^0 = \frac{x^0}{x^1}, v^2 = \frac{x^2}{x^1}$,

$U_2: x^2 \neq 0$, неоднородные координаты $w^0 = \frac{x^0}{x^2}, w^1 = \frac{x^1}{x^2}$.

Заметим, что $U_0 \cong \mathbb{R}^2$ и $U_1 \cong \mathbb{R}^2 - U_0$ и U_1 гомеоморфны $\mathbb{R}^2$, следовательно, они связные. Но $U_0 \cap U_1$ несвязно: на $U_0 \cap U_1$ одновременно $x^0 \neq 0$ и $x^1 \neq 0$, поэтому $U_0 \cap U_1$ разбивается на две компоненты связности:

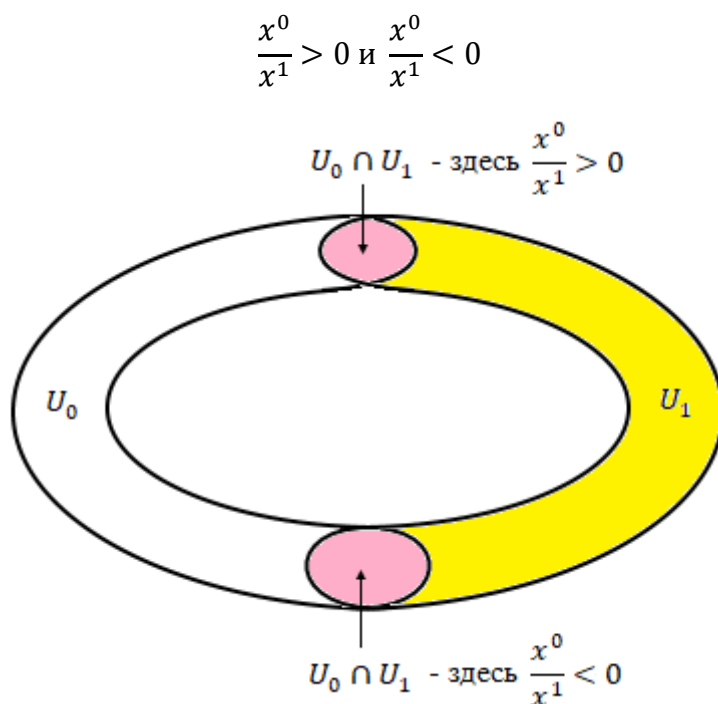


Рис. 9-10.12. Две компоненты связности $U_0 \cap U_1$

Замена координат на $U_0 \cap U_1$:

$$v^0 = \frac{1}{u^1}$$

$$v^2 = \frac{u^2}{u^1}$$
$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{(u^1)^2} & 0 \\ -\frac{u^2}{(u^1)^2} & \frac{1}{u^1} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(u^1)^3}$$

Якобиан $J = -\frac{1}{(u^1)^3} = -\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^3$ имеет разный знак на компонентах связности $U_0 \cap U_1$.

Таким образом, мы получили дезориентирующую цепочку из двух карт U_0 и U_1 – эти карты не могут лежать ни в одном, ни в разных атласах. Следовательно, проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема.

Семинар 11. Риманова метрика, форма объёма. Тензоры и тензорные поля.

Задача 11.1. Найти на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^2$, заданной стандартным уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, индуцированную риманову метрику, то есть первую квадратичную форму, в сферических координатах φ, θ на сфере. Проверить, что поворот сферы на угол α вокруг оси Oz является изометрией сферы. Найти форму объёма и площадь сферы.

Решение.

Параметризация сферы:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \cos \varphi \sin \theta, \\ z = R \sin \theta \end{cases} \quad u^1 = \varphi \in [0, 2\pi], u^2 = \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

Найдем метрику в сферических координатах φ, θ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = r_\varphi = (-R \sin \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \cos \theta, 0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r_\theta = (-R \cos \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \theta),$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^1} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = R^2 \cos^2 \theta,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = 0,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = R^2$$

Получаем

$$g = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Проверим, что поворот $T_\alpha(\varphi, \theta) = (\varphi + \alpha, \theta)$ сферы на угол α вокруг оси Oz является изометрией сферы:

$$g = R^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2$$

$$T_\alpha^* g = R^2 \cos^2 \theta d(\varphi + \alpha)^2 + R^2 d\theta^2 = R^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2 = g$$

Таким образом, T_α — действительно изометрия.

Форма объёма сферы:

$$dVol = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$dVol(S^2) = \sqrt{R^4 \cos^4 \theta} d\varphi \wedge d\theta = R^2 \cos \theta d\varphi \wedge d\theta$$

Площадь сферы:

$$Area(S^2) = \int_{S^2} R^2 \cos \theta d\varphi \wedge d\theta = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 \cdot \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2$$

Задача 11.2. Доказать, что на любом многообразии можно ввести риманову метрику.

Решение.

Пусть M – многообразие, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – атлас, $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$ – координаты в U_α .

Зададим в каждой карте евклидову метрику

$$g^\alpha = \sum_{i=1}^n (dx_\alpha^i)^2.$$

Теперь склеим эти метрики с помощью разбиения 1: пусть ρ_α – разбиение 1, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Рассмотрим

$$g = \sum_{\alpha} \rho_\alpha g^\alpha$$

Форма

$$g(X, Y) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha g^\alpha(X, Y)$$

очевидно, будет симметричной и билинейной. Докажем ее положительную определенность:

$$g(X, X) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha g^\alpha(X, X) \geq 0, \text{ так как } \rho_\alpha \geq 0 \text{ и } g^\alpha(X, X) \geq 0.$$

Пусть теперь $g(X, X) = 0$ в $P \in M$. Тогда $\exists \rho_\beta$ такое, что $\rho_\beta(P) \neq 0$. Но

$$\sum_{\alpha} \rho_\alpha(P) g_P^\alpha(X, X) = 0 \Rightarrow \forall \alpha \quad \rho_\alpha(P) g_P^\alpha(X, X) = 0,$$

в том числе и $\rho_\beta(P) g_P^\beta(X, X) = 0$. Отсюда $g_P^\beta(X, X) = 0$, что означает, что $X_P = 0$.

Таким образом, мы доказали положительную определенность g , а значит, g можно принять в качестве искомой римановой метрики.

Задача 11.3. Доказать, что на n -мерном многообразии M существует дифференциальная n -форма ω , не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда M ориентируемо.

Решение.

Мы уже доказывали, что если на n -мерном многообразии M существует дифференциальная n -форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда M ориентируемо (см. задачу 9 – 10.5): примем, что координаты $u^1, \dots, u^n$ положительно ориентированы, если $\omega(du^1, \dots, du^n) > 0$.

Обратно: пусть M – многообразие, тогда на M есть риманова метрика g (см. задачу 11.2). Если M ориентировано, то существует $dVol$ – форма объема метрики g . Ее и возьмем в качестве дифференциальной n -формы ω , не обращающаяся ни в какой точке M в ноль.

Задача 11.4. Пусть $f: M \rightarrow N$ гладкое отображение многообразия M в риманово многообразие N с римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle^N$. Доказать, что введенная на M по формуле

$$\langle X, Y \rangle_A^M = \langle d_A f(X), d_A f(Y) \rangle_{f(A)}^N$$

билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ является римановой метрикой тогда и только тогда, когда в любой точке дифференциал df инъективен.

Решение.

По определению, дифференциал df инъективен $\Leftrightarrow \forall A \in M \quad \text{Ker } d_A f = 0$.

Необходимость: докажем от противного – пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ – риманова метрика и $\text{Ker } d_A f \ni X \neq 0$. Тогда

$$\langle X, X \rangle_A^M = \langle 0, 0 \rangle_{f(A)}^N = 0$$

- получили противоречие с тем, что $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ – риманова метрика. Значит, df инъективен.

Достаточность: пусть в любой точке дифференциал df инъективен. Для того, чтобы доказать, что билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ является римановой метрикой, нужно доказать ее положительную определенность. Так как $\langle \cdot, \cdot \rangle^N$ – риманова метрика, то

$$\langle X, X \rangle_A^M = \langle d_A f(X), d_A f(X) \rangle_{f(A)}^N \geq 0.$$

Пусть $\langle X, X \rangle_A^M = 0$. Тогда

$$|d_A f(X)|^N = 0 \Rightarrow d_A f(X) = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker } d_A f \Rightarrow X = 0$$

Таким образом, билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ положительно определена, то есть, $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ является римановой метрикой.

Задача 11.5. Пусть V – векторное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$, а $e^1, \dots, e^n$ – соответствующий двойственный базис в V^* . Доказать, что тогда полилинейные функции

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

где $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, n$ образуют базис в пространстве $T_p^q V$ тензоров типа $\binom{p}{q}$, то есть пространстве полилинейных функций от p ковекторов и q векторов. Какова размерность пространства $T_p^q V$? Пространство $\Lambda^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций от k векторов из векторного пространства V является подпространством

пространства тензоров $T_k^0 V$. Доказать, что связь между базисами в этих пространствах выражается формулой

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn } \pi e^{i_{\pi(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\pi(k)}}.$$

Пространство $S^2 V^*$ симметрических полилинейных функций от 2 векторов из векторного пространства V , то есть симметрических билинейных форм, является подпространством пространства тензоров $T_2^0 V$. Доказать, что в качестве базиса в $S^2 V^*$ можно взять

$$e^i \cdot e^j = \frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

Какова размерность пространства $S^2 V^*$?

Решение.

Докажем, что $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ образуют базис в $T_p^q V$.

Рассмотрим $T \in T_p^q V$. Тогда

$$\begin{aligned} T(\xi_1, \dots, \xi_p, x_1, \dots, x_q) &= T\left((\xi_1)_{i_1} e^{i_1}, \dots, (\xi_p)_{i_p} e^{i_p}, x_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, x_q^{j_q} e_{j_q}\right) = \\ &= (\xi_1)_{i_1} \dots (\xi_p)_{i_p} x_1^{j_1} \dots x_q^{j_q} T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}). \end{aligned}$$

Так как $T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$ – число, $e^i(X) = X^i$, $e_i(\xi) = \xi_i$, то

$$T(\xi_1, \dots, \xi_p, x_1, \dots, x_q) = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

то есть, произвольный $T \in T_p^q V$ записывается в виде линейной комбинации $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$.

Осталось доказать, что $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ линейно независимы. Докажем от противного: пусть линейно зависимы, тогда существует их нетривиальная линейная комбинация

$$\sum_{i_k, j_l} \lambda_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} = 0.$$

Подставляя в эту линейную комбинацию набор $(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_p}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_q})$, получим

$$\lambda_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p} = 0.$$

Перебирая все наборы $(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_p}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_q})$ получим, что все коэффициенты в этой линейной комбинации равны нулю, что противоречит предположению о линейной

зависимости. Значит, $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ линейно независимы и образуют базис.

Отсюда сразу следует, что размерность пространства $T_p^q V$ равна n^{p+q} :

$$\dim T_p^q V = n^{p+q}.$$

Перейдем к следующим вопросам задачи.

Заметим, что связь между базисами в $\Lambda^k V^*$ и $T_k^0 V$, выражающаяся формулой

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi e^{i_{\pi(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\pi(k)}}$$

следует из определения внешнего произведения (подставим в левую и правую части формулы набор векторов $x_1, \dots, x_k$).

Рассуждая аналогично, можно показать, что в качестве базиса в $S^2 V^*$ можно взять

$$e^i \cdot e^j = \frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

Тогда размерность пространства $S^2 V^*$ равна количеству наборов (i, j) , удовлетворяющих условию $1 \leq i \leq j \leq n$ – это в точности количество элементов таблицы $n \times n$, которые лежат не ниже главной диагонали: их $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ штук. Таким образом,

$$\dim S^2 V^* = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 11.6. Мы определяли тензоры как полилинейные функции от ковекторов и векторов, а тензорное произведение формулой

$$\begin{aligned} (S_1 \otimes S_2)(\xi_1, \dots, \xi_{p_1+p_2}, v_1, \dots, v_{q_1+q_2}) &= \\ = S_1(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, v_1, \dots, v_{q_1}) S_2(\xi_{p_1+1}, \dots, \xi_{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \dots, v_{q_1+q_2}). \end{aligned}$$

Вывести из этого, что для координат этих тензоров верно равенство

$$(S_1 \otimes S_2)_{j_1, \dots, j_{q_1+q_2}}^{i_1, \dots, i_{p_1+p_2}} = (S_1)_{j_1, \dots, j_{q_1}}^{i_1, \dots, i_{p_1}} (S_2)_{j_{q_1+1}, \dots, j_{q_1+q_2}}^{i_{p_1+1}, \dots, i_{p_1+p_2}}$$

Решение.

Как видно из предыдущей задачи, координаты тензора T в базисе

$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ – это $T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$, то есть, результат подстановки базисных векторов в T . Поэтому

$$(S_1)_{j_1, \dots, j_{q_1}}^{i_1, \dots, i_{p_1}} = S_1(e^{i_1}, \dots, e^{i_{p_1}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{q_1}})$$

$$(S_2)_{j_1, \dots, j_{q_2}}^{i_1, \dots, i_{p_2}} = S_2(e^{i_1}, \dots, e^{i_{p_2}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{q_2}})$$

и

$$\begin{aligned} (S_1 \otimes S_2)_{j_1, \dots, j_{q_1+q_2}}^{i_1, \dots, i_{p_1+p_2}} &= (S_1 \otimes S_2)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{p_1+p_2}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{q_1+q_2}}) = \\ &= S_1(e^{i_1}, \dots, e^{i_{p_1}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{q_1}}) S_2(e^{i_{p_1+1}}, \dots, e^{i_{p_1+p_2}}, e_{j_{q_1+1}}, \dots, e_{j_{q_1+q_2}}) = \\ &= (S_1)_{j_1, \dots, j_{q_1}}^{i_1, \dots, i_{p_1}} (S_2)_{j_{q_1+1}, \dots, j_{q_1+q_2}}^{i_{p_1+1}, \dots, i_{p_1+p_2}} \end{aligned}$$

То есть, при тензорном умножении тензоров соответствующие координаты перемножаются.

Задача 11.7. Доказать, что свертка тензора по одному из верхних и одному из нижних индексов является тензором. Как записать свёртку, если рассматривать тензор как полилинейную функцию от ковекторов и векторов? Почему свёртка не зависит от выбора базиса?

Решение.

Доказательство того, что свертка тензора по одному из верхних и одному из нижних индексов является тензором, в общем случае выглядит довольно громоздко. Для простоты рассмотрим тензор T_{kl}^{ij} и свертку

$$\hat{T}_k^i = T_{kj}^{ij} = T_{k1}^{i1} + \dots + T_{kn}^{in}$$

Чтобы доказать, что $\hat{T}$ – тензор, рассмотрим $\hat{T}(\xi, v)$ как полилинейную функцию от ξ, v :

$$\hat{T}(\xi, v) = \sum_j T(\xi, e^j, v, e_j).$$

Докажем, что при замене координат координаты $\hat{T}$ преобразуются по тензорному закону, заодно докажем, что свёртка не зависит от выбора базиса.

Координаты вектора e_i при замене координат преобразуются как $e_i = A_i^{i'} e_{i'}$, где A – матрица замены базиса, координаты ковектора e^i преобразуются как $e^i = \tilde{A}^i_{i'} e^{i'}$, где $\tilde{A} = A^{-1}$. Тогда

$$\hat{T}_{k'}^{i'} = T_{k'j'}^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} \tilde{A}_k^i \tilde{A}_{j'}^j \hat{T}_k^i$$

Но $A_j^{j'} \tilde{A}_{j'}^j = E$, поэтому

$$\hat{T}_{k'}^{i'} = A_i^{i'} \tilde{A}_k^i \hat{T}_k^i$$

- координаты $\hat{T}$ преобразуются по тензорному закону, таким образом, $\hat{T}$ действительно тензор.

Задача 11.8. Доказать, что отождествление V и V^* при наличии евклидова скалярного произведения в V – это в точности операции опускания и подъёма индекса.

Решение.

Отождествление V и V^* при наличии евклидова скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в V происходит следующим образом: ковектору ξ отвечает такой вектор w , что для любого $v \in V$ выполнено $\xi(v) = \langle w, v \rangle$.

В координатах это записывается так:

$$\xi_i v^i = g_{kl} w^k v^l$$

где g_{ij} – метрика, $\xi = \xi_i e^i$, $v = v^j e_j$, $w = w^k e_k$.

Изменим индекс суммирования (вместо l возьмем i):

$$\xi_i v^i = g_{ki} w^k v^i$$

тогда

$$\xi_i = g_{ki} w^k$$

– в самом деле, ξ получается из w опусканием индекса.

Теперь поднимем индексы:

$$\xi_i g^{il} = g_{ki} g^{il} w^k$$

так как $g_{ki} g^{il} = \delta_k^l$, то $g_{ki} g^{il} w^k = \delta_k^l w^k = w^l$, поэтому

$$w^l = \xi_i g^{il}$$

– в самом деле, w получается из ξ поднятием индекса.

Задача 11.9. Являются ли корректно определёнными тензорными полями на многообразии величины, определённые в произвольных локальных координатах как

a) $T_j^i = \delta_j^i$,

b) $T_{ij} = \delta_{ij}$,

c) $T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$,

d) $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$,

где f – некоторая гладкая функция?

Решение.

a) Да. $T_j^i = \delta_j^i$ означает, что матрица тождественного оператора Id (тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) в любом базисе будет единичной.

б) Нет. $T_{ij} = \delta_{ij}$ означает, что существует билинейная форма (тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$), матрица которой в любом базисе будет единичной. Очевидно, такая билинейная форма определена некорректно: сделаем замену $x^{i'} = 2x^i$, тогда

$$\delta_{ij} = T_{ij} = T_{i'j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} = T_{i'j'} \cdot 4\delta_i^{i'} \delta_j^{j'} = 4T_{ij} = 4\delta_{ij}$$

- противоречие.

с) Нет. Рассуждаем как в пункте б): сделаем замену $x^{i'} = 2x^i$, тогда

$$T_{i'j'} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \cdot 2\delta_i^{i'} \cdot 2\delta_j^{j'} = 4T_{ij}$$

- противоречие.

д) Да. $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ - тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, так как это дифференциал функции (1-форма): $T = df$.

Задача 11.10. Пусть T_{ij} – тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, такой, что $\det T_{ij} \neq 0$. Пусть T^{ij} обозначает элементы матрицы, обратной к T_{ij} . Доказать, что тогда T^{ij} является тензором типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Обозначим $T^{-1} = Q$. При замене координат T преобразуется как $T' = C^T T C$. Тогда

$$Q' = (T')^{-1} = (C^T T C)^{-1} = C^{-1} T^{-1} (C^T)^{-1} = C^{-1} Q (C^{-1})^T$$

- при замене координат Q преобразуется как тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Семинар 12. Производная Ли тензорных полей. Конструкции многообразий. Погружения, подмногообразия и вложения.

Задача 12.1. Найти явную формулу для производной Ли $L_X T$ тензорного поля T типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то есть поля операторов, вдоль векторного поля X . Найти явную формулу для производной Ли $L_X dVol$ формы объема $dVol = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ вдоль векторного поля X на ориентированном римановом многообразии с римановой метрикой $g = g_{ij} dx^i dx^j$ в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$.

Решение.

Так как T - тензорное поле типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то в координатах его можно записать как

$$T = T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

Найдем явную формулу для $L_X T$. Воспользуемся тождеством Лейбница:

$$L_X T = L_X \left(T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \right) = L_X \left(T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \otimes dx^j + T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes L_X(dx^j) =$$

(воспользуемся тем, что на векторных полях производная Ли – это коммутатор, а также тем, что на дифференциальных формах дифференциал коммутирует с производной Ли)

$$= \left[X, T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \otimes dx^j + T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d(L_X x^j) =$$

(производная Ли от функции совпадает с обычной производной вдоль векторного поля)

$$= \left(X^k \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} - T_j^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d \left(X^k \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \right) =$$

(так как $\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \delta_k^j$, то $X^k \frac{\partial x^j}{\partial x^k} = X^j$, поэтому $d \left(X^k \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \right) = d(X^j) = \frac{\partial X^j}{\partial x^l} dx^l$)

$$= \left(X^k \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} - T_j^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial X^j}{\partial x^l} dx^l =$$

(теперь переименуем индексы во втором слагаемом: $\begin{matrix} l \mapsto j \\ j \mapsto k \end{matrix}$)

$$= \left(X^k \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} - T_j^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} + T_k^i \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

Теперь найдем явную формулу для $L_X dVol$. Воспользуемся тождеством Лейбница:

$$\begin{aligned} L_X dVol &= L_X (\sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \\ &= (L_X \sqrt{\det g}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + \sqrt{\det g} L_X(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (X\sqrt{\det g})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n + \sqrt{\det g}(L_X(dx^1) \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots + dx^1 \wedge \cdots \wedge L_X(dx^n)) = \\
 &(\text{так как } L_X(dx^j) = d(X^j) = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} dx^i - \text{уже пользовались этим, когда вычисляли } L_X T) \\
 &= (X\sqrt{\det g})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n + \sqrt{\det g} \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^i} dx^i \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots + dx^1 \wedge \cdots \wedge \frac{\partial X^n}{\partial x^i} dx^i \right) = \\
 &= X^i \frac{\partial \sqrt{\det g}}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n + \sqrt{\det g} \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots + dx^1 \wedge \cdots \wedge \frac{\partial X^n}{\partial x^n} dx^n \right) = \\
 &= X^i \frac{\frac{\partial \det g}{\partial x^i}}{2\sqrt{\det g}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n + \sqrt{\det g} \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\
 &= \left(\frac{1}{2} X^i \frac{\frac{\partial \det g}{\partial x^i}}{\det g} + \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \right) \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\
 &= \left(\frac{1}{2} X^i \frac{\frac{\partial \det g}{\partial x^i}}{\det g} + \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \right) dVol
 \end{aligned}$$

Осталось найти $\frac{\partial \det g}{\partial x^i}$. Пусть g_{ab} – элементы матрицы g , $\widehat{g_{ab}}$ – алгебраическое дополнение элемента g_{ab} , g^{ab} – элементы матрицы g^{-1} . Тогда

$$\frac{\partial \det g}{\partial x^i} = \sum_{a,b} \frac{\partial \det g}{\partial g_{ab}} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} = \sum_{a,b} \widehat{g_{ab}} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} = \det g \sum_{a,b} g^{ab} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i}$$

- здесь мы воспользовались формулой из алгебры для нахождения обратной матрицы через алгебраические дополнения: $g^{ab} = \frac{\widehat{g_{ab}}}{\det g}$. Тогда

$$L_X dVol = \left(\frac{1}{2} X^i g^{ab} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} + \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \right) dVol.$$

Формула, которую мы получили, содержит обобщение понятия дивергенции. С помощью этой формулы мы можем определить дивергенцию векторного поля X на произвольном ориентированном римановом многообразии:

$$L_X dVol = \operatorname{div} X dVol$$

Задача 12.2. Доказать, что на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной декартовой системой координат Oxy векторные поля

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

являются киллинговыми. Доказать, что линейная комбинация двух киллинговых векторных полей тоже является полем Киллинга. Вывести из этого, что векторное поле $Z = X + Y$ тоже киллингово. Найти соответствующие векторным полям X , Y и Z однопараметрические группы диффеоморфизмов.

Решение.

Векторное поле называется киллинговым, если $L_X g = 0$ - производная Ли вдоль этого поля от метрики равна нулю.

$$\begin{aligned} L_X(g_{ij} dx^i \otimes dx^j) &= (L_X g_{ij}) dx^i \otimes dx^j + g_{ij} (L_X dx^i) \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes (L_X dx^j) = \\ &= X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial x^l} dx^l \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes \frac{\partial X^j}{\partial x^l} dx^l = \end{aligned}$$

(теперь переименуем индексы во втором слагаемом: $\begin{matrix} l \mapsto i \\ i \mapsto k \end{matrix}$ и в третьем слагаемом: $\begin{matrix} l \mapsto j \\ j \mapsto k \end{matrix}$)

$$= \left(X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j$$

В нашем случае векторное поле на $\mathbb{R}^2$, координаты $\begin{matrix} x^1 = x \\ x^2 = y \end{matrix}$, метрика $g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$, $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Докажем, что поле $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ киллингово:

$$\begin{aligned} L_X g &= \left(\delta_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \delta_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j = \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j = \\ &= \left(\frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial x} \right) dx \otimes dx + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x} \right) dy \otimes dx + \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx \otimes dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y} \right) dy \otimes dy = 0. \end{aligned}$$

Поэтому X – киллингово поле.

Докажем, что поле $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ киллингово:

$$L_Y g = \left(Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j = 0$$

- очевидно, так как $g_{ij} = \delta_{ij} = \text{const}$, $Y^1 = 0$, $Y^2 = 1$ – все производные зануляются.

Поэтому Y – киллингово поле.

Пусть $Z = X + Y$. Тогда (это следует из формулы, которую мы вывели для $L_X g$)

$$L_Z g = L_{X+Y} g = L_X g + L_Y g$$

Таким образом, если X и Y киллинговы, то $Z = X + Y$ тоже киллингово.

Найдем соответствующие векторным полям X , Y и Z однопараметрические группы диффеоморфизмов.

В задаче 7.3 мы уже находили интегральные кривые векторного поля $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.

Это концентрические окружности с центром в начале координат:

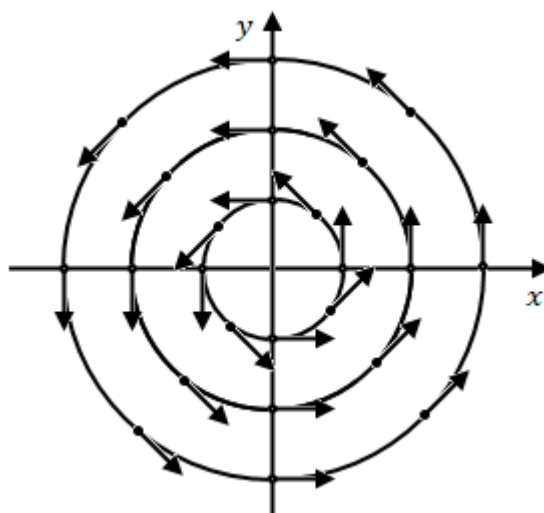


Рис. 12.1. Интегральные кривые X – концентрические окружности

Повторим рассуждения, немного видоизменив их. Задача Коши для нахождения интегральных кривых для X , проходящих через точку (x_0, y_0) при $t = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X^1 \\ \dot{y}(t) = X^2 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение и подставляя $\dot{y}(t)$ во второе уравнение системы, получаем известное уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Его решение:

$$x = A \cos t + B \sin t,$$

тогда

$$y = A \sin t - B \cos t.$$

A и B найдем из начальных условий:

$$x_0 = x(0) = A$$

$$y_0 = y(0) = -B$$

Получаем

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t$$

$$y = x_0 \sin t + y_0 \cos t$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Матрица $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол t . Таким образом, интегральные кривые – это концентрические окружности с центром в начале координат. Получаем

$$\Phi_t^X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Найдем Φ_t^Y :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Y^1 \\ \dot{y}(t) = Y^2 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 1 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Получаем

$$x = A$$

$$y = B + t$$

A и B найдем из начальных условий:

$$x_0 = x(0) = A$$

$$y_0 = y(0) = B$$

Тогда

$$x = x_0$$

$$y = y_0 + t$$

Таким образом, интегральные кривые – это прямые, параллельные оси Oy . Получаем

$$\Phi_t^Y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + t \end{pmatrix}.$$

Найдем Φ_t^Z :

$$Z = X + Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + (x + 1) \frac{\partial}{\partial y}$$

Получаем

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Z^1 \\ \dot{y}(t) = Z^2 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 1 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение и подставляя $\dot{y}(t)$ во второе уравнение системы, получаем линейное неоднородное уравнение:

$$\ddot{x}(t) + x(t) = -1.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x = A \cos t + B \sin t,$$

частное решение неоднородного уравнения:

$$x = -1.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения

$$x = A \cos t + B \sin t - 1,$$

откуда

$$y = -\dot{x}(t) = A \sin t - B \cos t.$$

A и B найдем из начальных условий:

$$x_0 = x(0) = -1 + A$$

$$y_0 = y(0) = -B$$

Получаем

$$x = (x_0 + 1) \cos t - y_0 \sin t - 1$$

$$y = (x_0 + 1) \sin t + y_0 \cos t$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + 1 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$\Phi_t^Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1) \cos t - y \sin t - 1 \\ (x+1) \sin t + y \cos t \end{pmatrix}$$

Интегральные кривые – окружности, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – неподвижная точка.

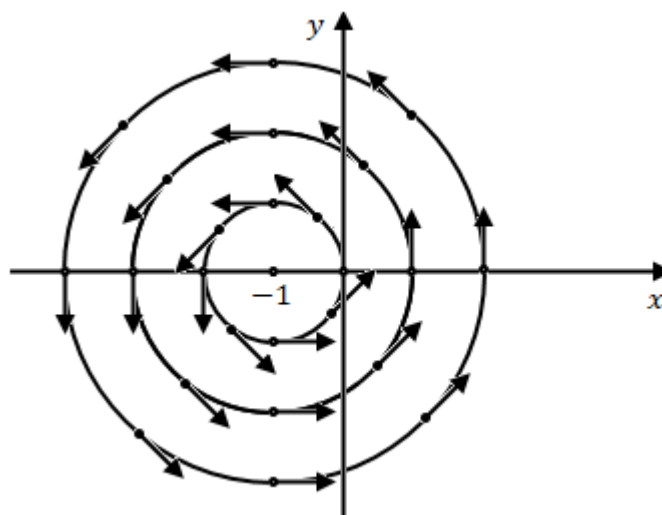


Рис. 12.2. Интегральные кривые Z – концентрические окружности с центром в $(-1,0)$

Задача 12.3. Пусть M и N – гладкие многообразия. Ввести структуру гладкого многообразия на декартовом произведении $M \times N$.

Решение.

M и N – гладкие многообразия (хаусдорфовы топологические пространства со счетной базой), поэтому:

- $M \times N$ топологическое пространство (базой топологии будут прямые произведения открытых множеств на M и N соответственно)
- $M \times N$ хаусдорфово (прямое произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово)
- $M \times N$ со счетной базой

Перейдем к построению карт: пусть $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ – карты на M , $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ – карты на N . Тогда на $M \times N$ выберем карты

$$\{U_\alpha \times V_\beta, (\varphi_\alpha, \psi_\beta)\}.$$

Замена координат:

$$(\varphi_\alpha, \psi_\beta) \circ (\varphi_{\tilde{\alpha}}, \psi_{\tilde{\beta}})^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_{\tilde{\alpha}}^{-1}, \psi_\beta \circ \psi_{\tilde{\beta}}^{-1})$$

- гладкое отображение (так как замены $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\tilde{\alpha}}^{-1}$ и $\psi_\beta \circ \psi_{\tilde{\beta}}^{-1}$ гладкие на M и N соответственно).

Следовательно, мы ввели на $M \times N$ структуру гладкого многообразия.

Задача 12.4. По аналогии с введенной на лекции структурой гладкого многообразия на касательном расслоении $TM = \coprod_{A \in M} T_A M$ к многообразию M ввести структуру гладкого многообразия на кокасательном расслоении $T^*M = \coprod_{A \in M} T_A^* M$ к многообразию M .

Решение.

По определению, кокасательное пространство в точке A – это векторное пространство, двойственное к касательному пространству в точке A : $T_A^*M = (T_A M)^*$. Построение структуры гладкого многообразия на кокасательном расслоении к многообразию полностью аналогично построению структуры гладкого многообразия на касательном расслоении.

Пусть $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ – карты на M , $x^1, \dots, x^n$ – локальные координаты. Рассмотрим

$$\widehat{U}_\alpha = \coprod_{A \in U_\alpha} T_A^*M.$$

Тогда $dx^1, \dots, dx^n$ – базис в каждом из T_A^*M , $A \in U_\alpha$ и $\xi = \xi_1 dx^1 + \dots + \xi_n dx^n$, $\xi \in T_A^*M$.

Каждому элементу $\xi \in T_A^*M$ поставим в соответствие точку P , такую, что $P(\xi) = A \in M$. Тогда

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_\alpha} & (\varphi_\alpha(P(\xi)), \xi_1, \dots, \xi_n) \\ \text{\tiny $\mathfrak{M}$} & & \text{\tiny $x^1, \dots, x^n$} \\ T_A^* & & \end{array}$$

То есть, отображение $\widehat{\varphi}_\alpha$ действует из TU_α в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Поймем, как будут преобразовываться координаты. Для этого вспомним, как преобразуются координаты ковектора при замене базиса: при переходе от $x^1, \dots, x^n$ к $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ координаты ξ преобразуются как

$$\xi = \xi_i dx^i = \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} = \xi_{i'} dx^{i'}$$

или

$$\begin{pmatrix} \xi_{1'} \\ \vdots \\ \xi_{n'} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

где $J = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)$ – матрица Якоби замены координат. Тогда

$$\widehat{\varphi}_{\alpha'} \circ \widehat{\varphi}_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n) = (x^{1'}(x^1, \dots, x^n), \dots, x^{n'}(x^1, \dots, x^n), \xi_{1'}, \dots, \xi_{n'})$$

- гладкая замена, так как $x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$ – гладкие функции, $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)$ – якобиан гладкой замены.

Задача 12.5. Приведите пример подмножества $\mathbb{R}^1$, не являющегося подмногообразием $\mathbb{R}^1$. Аналогичный вопрос для $\mathbb{R}^2$.

Решение.

Подмногообразие – это пара (N, φ) , где $\varphi: N \rightarrow M$ удовлетворяет условиям:

- 1) $d\varphi$ во всех точках невырожден,
- 2) φ инъективно,
- 3) φ – гомеоморфизм на образ (если φ - вложение).

В этой задаче подразумевается, что φ – вложение. Тогда условия 1) и 2) всегда выполнены, а условие 3) выполнено не всегда: топологии на $N \subset \mathbb{R}^n$ и на $\mathbb{R}^n$ не обязаны совпадать.

Рассмотрим множество N с дискретной топологией:

$$N = \bigcup_n \left\{ \frac{1}{n} \right\} \cup 0$$

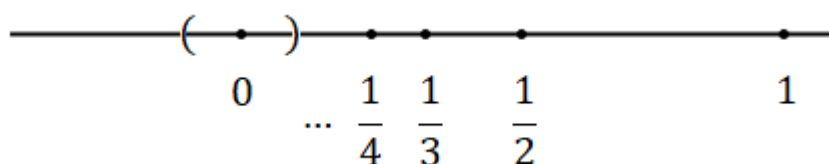


Рис. 12.3. $N \subset \mathbb{R}$, но не является подмногообразием

- в индуцированной топологии любая окрестность нуля содержит в себе бесконечное число точек из N , поэтому у образа $i(N) \subset \mathbb{R}$ индуцированная топология не дискретна.

Аналогично для $\mathbb{R}^2$: в качестве N рассмотрим множество

$$N = \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i, \text{ где } R_i - \text{ это прямая } x = \frac{1}{i}$$

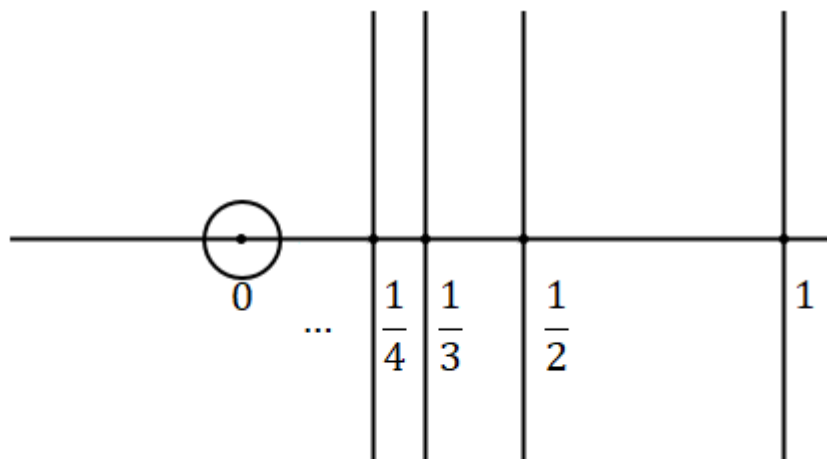
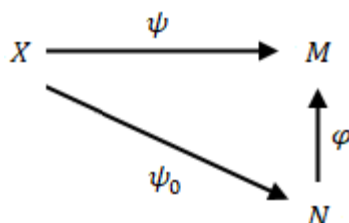


Рис.12.4. $N \subset \mathbb{R}^2$, но не является подмногообразием

Задача 12.6. Пусть M – гладкое многообразие, а A – подмножество M . Фиксируем топологию на A . Доказать, что тогда на A существует не более одной дифференцируемой структуры, такой, что (A, i) – подмногообразие в M , где i – отображение вложения.

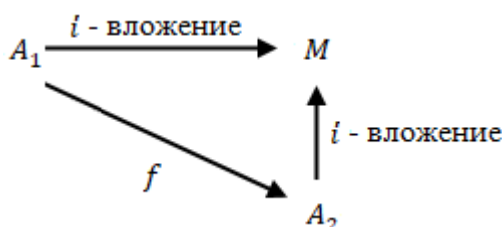
Решение.

Данное утверждение можно доказать с помощью теоремы о пропускании отображения через подмногообразие: пусть M – гладкое многообразие, (N, φ) – подмногообразие, $\psi(X) \subset \varphi(N)$. Тогда существует отображение ψ_0 такое, что следующая диаграмма коммутативна:

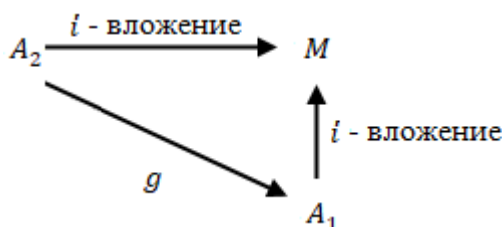


при этом если ψ_0 непрерывно, тогда оно гладкое, а если φ – вложение, тогда ψ_0 непрерывное и гладкое.

Пусть A_1 и A_2 – две различные дифференцируемые структуры на A . Тогда по теореме о пропускании отображения через подмногообразие, существуют гладкое отображение f :



и гладкое отображение g :



Тогда $f = g^{-1}$ и A_1 эквивалентно A_2 .

Задача 12.7. Пусть M – многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ – вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p \iota : T_p N \rightarrow T_{\iota(p)} M$ – мономорфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_p N$ с $d_p \iota(X) \in T_{\iota(p)} M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N , подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)} N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$. Доказать, что коммутатор двух векторных полей на M , касательных к подмногообразию N , – тоже векторное поле, касательное к N .

Решение.

Данное утверждение можно доказать с помощью теоремы о выпрямлении подмногообразия: пусть M – многообразие, $\iota : N \hookrightarrow M$ – вложенное подмногообразие, $P \in N$.

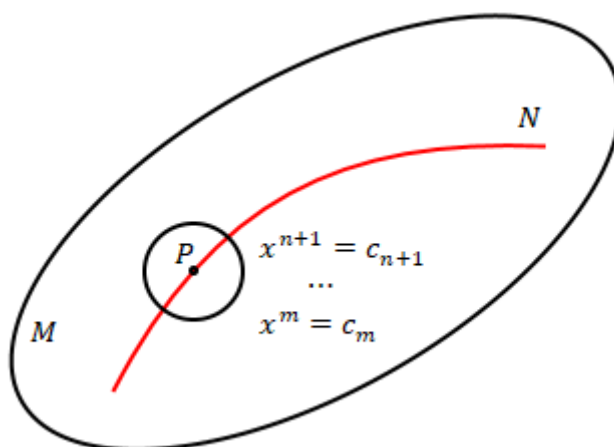


Рис. 12.5. К теореме о выпрямлении подмногообразия

Тогда можно в некоторой окрестности точки P ввести локальные координаты таким образом, что N задается уравнениями ($c_i = \text{const}$):

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= c_{n+1} \\ &\vdots \\ x^m &= c_m \end{aligned}$$

(следует из теоремы о неявной функции).

Пусть векторные поля X и Y касаются N . Это означает, что

$$\begin{cases} Xx^{n+1} = 0 \\ \vdots \\ Xx^m = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Yx^{n+1} = 0 \\ \vdots \\ Yx^m = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$[X, Y]x^j = X(Yx^j) - Y(Xx^j) = 0, \quad j = n+1, \dots, m$$

поэтому $[X, Y]$ тоже касается N .

Задача 12.8. Доказать, что открытая область U многообразия M является многообразием. Является ли естественное отображение $i : U \rightarrow M$ погружением? Является ли (U, i) подмногообразием? Является ли U вложенным подмногообразием?

Решение.

1) Запишем i в координатах:

$$i(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n).$$

Тогда

$$di = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$$

- дифференциал невырожден, значит, i – погружение.

2) i инъективно, поэтому (U, i) – подмногообразие.

3) Если мы рассматриваем U с индуцированной из M топологией, то U – вложенное подмногообразие.

Задача 12.9. Пусть N – связное подмножество n -мерного многообразия M , обладающее таким свойством: у любой точки $A \in M$ существует такая окрестность U с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$, что или $N \cap U = \emptyset$, или $N \cap U$ задаётся в U как решение системы гладких уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ f_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

полного ранга, то есть $rk \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) = n - k$. Доказать, что на N есть такая структура гладкого многообразия, что естественное отображение $i : N \rightarrow M$ является вложением. Всякое ли вложенное подмногообразие может быть получено таким образом?

Решение.

Рассмотрим отображение F :

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{F} \mathbb{R}^{n-k} \\ P &\xrightarrow{F} (f_1(P), \dots, f_{n-k}(P)) \end{aligned}$$

Тогда

$$rk dF = n - k$$

По теореме о ранге, существуют такие локальные координаты $(u^1, \dots, u^n)$ в U и $(v^1, \dots, v^{n-k})$ в $\mathbb{R}^{n-k}$, что F задается как

$$\begin{cases} v^1 = u^1 \\ \vdots \\ v^{n-k} = u^{n-k} \end{cases}$$

(отображение постоянного ранга в локальных координатах линеаризуется, затем линейным преобразованием его можно привести к вышеуказанному виду).

Тогда N – подмножество, задаваемое уравнениями

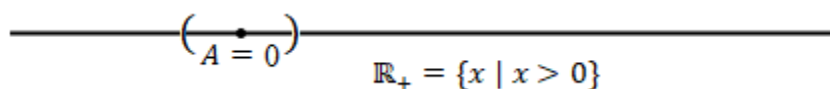
$$\begin{cases} v^1 = u^1 \\ \vdots \\ v^{n-k} = u^{n-k} \end{cases}$$

и можно на N в качестве локальных координат выбрать $u^{n-k+1}, \dots, u^n$. Тогда

$$i(u^{n-k+1}, \dots, u^n) = (0, \dots, 0, u^{n-k+1}, \dots, u^n) - \text{вложение.}$$

Однако, не всякое вложенное подмногообразие может быть получено таким образом – например, так не может быть получена любая открытая область. В качестве примера рассмотрим

$$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x > 0\} - \text{вложенное подмногообразие } \mathbb{R}$$



- не существует такой окрестности 0, в которой подмножество $x > 0$ можно задать как решение уравнения полного ранга, так как не существует такой гладкой функции f с невырожденным дифференциалом, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \neq 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Задача 12.10. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}^2$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α – иррациональное число. Доказать, что φ – погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{T}^2$ (оно называется плотной обмоткой тора). Является ли $(\mathbb{R}, \varphi)$ подмногообразием? Вложенным подмногообразием?

Решение.

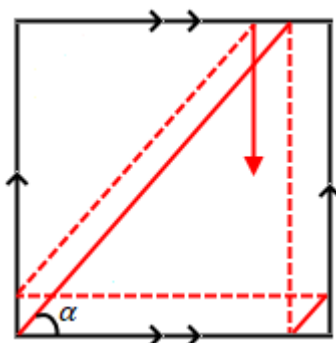


Рис. 12.6. Обмотка тора

Можно сказать, что мы наматываем прямую на тор (как показано на рис. 12.6). Если угол наклона $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, то прямая замкнется, если $\alpha \neq \frac{p}{q}\pi$, то прямая не замкнется, и мы получим плотную обмотку (прямая пройдет через каждую точку тора). Данное отображение будет погружением, также $(\mathbb{R}, \varphi)$ будет являться подмногообразием, но не вложенным подмногообразием.

Рассмотрим окрестность некоторой точки на торе и окрестность прообраза этой точки на $\mathbb{R}$:

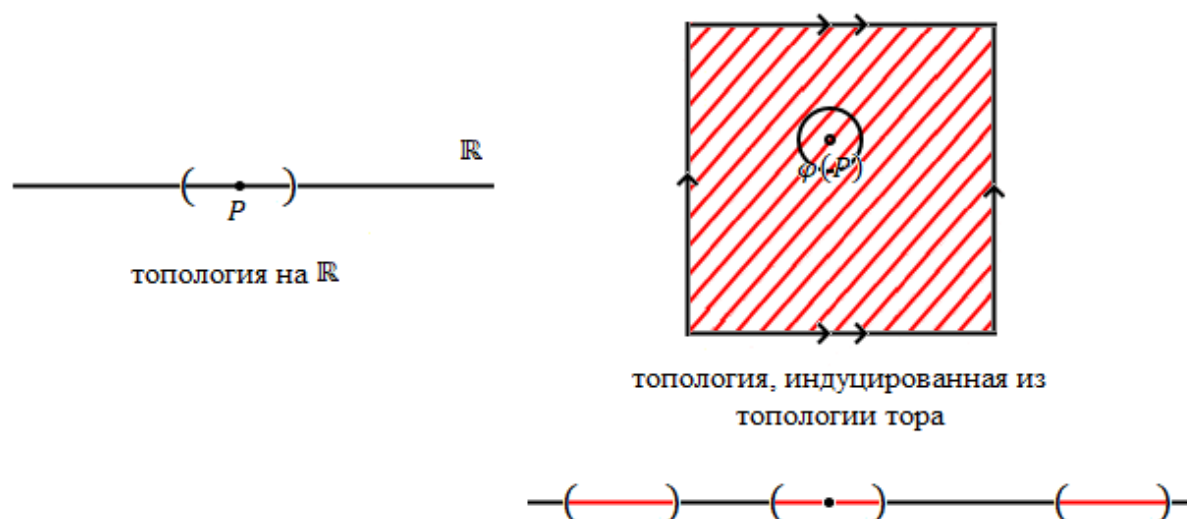


Рис. 12.7. Топология на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{T}^2$

- в топологии, индуцированной из топологии тора любая окрестность точки будет несвязной и состоять из бесконечного количества компонент, поэтому φ – не вложение.

Семинар 13. Связности на многообразиях.

Задача 13.1. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты евклидовой плоскости в полярных координатах.

Решение.

Полярные координаты на $\mathbb{R}^2$ ($r = x^1, \varphi = x^2$):

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Найдем метрику в полярных координатах:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y},$$

поэтому

$$g_{11} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = -r \cos \varphi \sin \varphi + r \cos \varphi \sin \varphi = 0,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2.$$

Получаем

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

тогда

$$(g^{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Найдем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \right)$$

единственная ненулевая производная от компонент метрики – это

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2r,$$

остальные производные будут равны нулю. Поэтому среди Γ_{ij}^k ненулевыми будут лишь те, для которых $\{i, j, k\} = \{1, 2, 2\}$. Получаем три варианта: Γ_{22}^1 , Γ_{21}^2 и Γ_{12}^2 .

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} (-2r) = -r$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2r^2} (2r) = \frac{1}{r}$$

Задача 13.2. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на сфере единичного радиуса в трёхмерном евклидовом пространстве. В качестве координат взять широту и долготу.

Решение.

Параметризация сферы:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \cos \theta, \\ z = \sin \theta \end{cases} \quad x^1 = \varphi \in [0, 2\pi), \quad x^2 = \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

Найдем метрику в сферических координатах φ, θ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = r_\varphi = (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r_\theta = (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \cos^2 \theta,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = 0,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = 1$$

Получаем

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тогда

$$(g^{kl}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \right)$$

единственная ненулевая производная от компонент метрики – это

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -2 \sin \theta \cos \theta,$$

остальные производные будут равны нулю. Поэтому среди Γ_{ij}^k ненулевыми будут лишь те, для которых $\{i, j, k\} = \{1, 1, 2\}$. Получаем три варианта: Γ_{11}^2 , Γ_{12}^1 и Γ_{21}^1 .

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = -\operatorname{tg} \theta$$

Задача 13.3. Найти для разминки явную формулу для ковариантной производной от билинейной формы q_{ij} и поля операторов A_i^j . После этого найти явную формулу для ковариантной производной тензорного поля произвольного типа $\binom{p}{q}$.

Решение данной задачи читателю предлагается найти самостоятельно.

Задача 13.4. Пусть M – риманово многообразие, то есть многообразие с заданной римановой метрикой g . Мы определяли согласованность связности ∇ с метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ как выполнение для любой пары векторных полей X, Y и Z тождества $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$. Доказать, что согласованность связности с метрикой эквивалентно тождеству $\nabla_g = 0$, выписать его в явном виде через g_{ij} .

Решение.

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Нахождение ковариантной производной от произведения тензоров сведем с помощью тождества Лейбница к нахождению ковариантной производной от 1-форм.

Пусть ω 1-форма, X, Y – векторные поля. Тогда найдем $\nabla_X \omega$ из равенства

$$X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) - \omega(\nabla_X Y) \quad (*)$$

Найдем $\nabla_X \omega$ в координатах: пусть $\omega = \omega_i dx^i$, $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Тогда в левой части равенства (*) получаем выражение

$$X(\omega(Y)) = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega_i Y^i) = X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} Y^i + \omega_i X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}$$

Перейдем к правой части (*): на лекциях была выведена формула для $\nabla_X Y$:

$$\nabla_X Y = X^q \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^q} + \Gamma_{qp}^i Y^p \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Тогда

$$\omega(\nabla_X Y) = \omega_i X^q \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^q} + \Gamma_{qp}^i Y^p \right)$$

Пусть

$$\nabla_X \omega = (\nabla_X \omega)_i dx^i,$$

тогда

$$(\nabla_X \omega)(Y) = (\nabla_X \omega)_i Y^i.$$

Подставляя в (*) найденные выражения для слагаемых в левой и правой части, получаем:

$$(\nabla_X \omega)_i Y^i = X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} Y^i + \omega_i X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \omega_i X^q \frac{\partial Y^i}{\partial x^q} - \omega_i X^q \Gamma_{qp}^i Y^p$$

- заметим, что второе и третье слагаемое можно сократить (они отличаются только обозначением индекса суммирования), также в четвертом слагаемом сделаем замену

$p \mapsto i$
индексов: $i \mapsto p$. Тогда
 $q \mapsto j$

$$(\nabla_X \omega)_i Y^i = X^j \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^p \omega_p \right) Y^i$$

откуда

$$(\nabla_X \omega)_i = X^j \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^p \omega_p \right)$$

или

$$\nabla_X \omega = X^j \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^p \omega_p \right) dx^i$$

- формула для ковариантного дифференцирования 1-форм. Воспользуемся ей для нахождения $\nabla_X g = \nabla_X(g_{ij} dx^i \otimes dx^j)$. Чтобы не было путаницы в индексах, сделаем замену индексов $\begin{matrix} j \mapsto q \\ i \mapsto l \end{matrix}$ в формуле, получим

$$\nabla_X \omega = X^q \left(\frac{\partial \omega_l}{\partial x^q} - \Gamma_{ql}^p \omega_p \right) dx^l$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_X g &= \nabla_X(g_{ij} dx^i \otimes dx^j) = \nabla_X(g_{ij} dx^i) \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes \nabla_X dx^j = \\ &= X^q \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - \Gamma_{qi}^p \omega_p \right) dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes X^q (0 - \Gamma_{ql}^p \delta_j^p) dx^l \end{aligned}$$

сделаем замену индексов $\begin{matrix} l \mapsto j \\ j \mapsto r \end{matrix}$ во втором слагаемом, получим

$$\nabla_X g = X^q \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - \Gamma_{qi}^p g_{pj} - \Gamma_{qj}^r g_{ir} \right) dx^i \otimes dx^j$$

запишем в более удобном виде – сделаем замену индекса $r \mapsto p$, получим

$$\nabla_X g = X^q \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - \Gamma_{qi}^p g_{pj} - \Gamma_{qj}^p g_{ip} \right) dx^i \otimes dx^j$$

- формула для ковариантного дифференцирования метрики.

Отсюда следует, что

$$\nabla_g = 0 \Leftrightarrow \forall X \quad \nabla_X g = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - \Gamma_{qi}^p g_{pj} - \Gamma_{qj}^p g_{ip} = 0$$

Теперь докажем, что это соотношение равносильно тождеству

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (**)$$

Запишем X, Y, Z в координатах: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Тогда $\langle Y, Z \rangle = g_{jk} Y^j Z^k$ и левая часть (**) запишется в виде

$$X\langle Y, Z \rangle = X^i \frac{\partial (g_{jk} Y^j Z^k)}{\partial x^i}.$$

Перейдем к правой части (**):

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

тогда

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = g_{jp} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j Y^k \right) Z^p,$$

аналогично

$$\langle Y, \nabla_X Z \rangle = g_{jp} X^i \left(\frac{\partial Z^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j Z^k \right) Y^p.$$

Таким образом, (**) перепишется в виде

$$X^i \frac{\partial (g_{jk} Y^j Z^k)}{\partial x^i} = g_{jp} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j Y^k \right) Z^p + g_{jp} X^i \left(\frac{\partial Z^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j Z^k \right) Y^p$$

теперь воспользуемся тождеством Лейбница и раскроем скобки:

$$X^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} Y^j Z^k + X^i g_{jk} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} Z^k + X^i g_{jk} Y^j \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} =$$

$$= g_{jp} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} Z^p + g_{jp} X^i \Gamma_{ik}^j Y^k Z^p + g_{jp} X^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} Y^p + g_{jp} X^i \Gamma_{ik}^j Z^k Y^p$$

- легко видеть, что зеленые и красные слагаемые в левой и правой части равны. Сократив их и перенеся все в левую часть, получаем

$$X^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} Y^j Z^k - g_{jp} X^i \Gamma_{ik}^j Y^k Z^p - g_{jp} X^i \Gamma_{ik}^j Z^k Y^p = 0$$

Теперь переименуем индексы суммирования:

$$\begin{array}{lll} k \mapsto j & i \mapsto q & i \mapsto q \\ i \mapsto q - \text{первое слагаемое,} & k \mapsto i & p \mapsto i \\ j \mapsto i & p \mapsto j - \text{второе слагаемое,} & k \mapsto j - \text{третье слагаемое.} \\ & j \mapsto p & j \mapsto p \end{array}$$

Получим

$$X^q Y^i Z^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - X^q Y^i Z^j g_{pj} \Gamma_{qi}^p - X^q Y^i Z^j g_{pi} \Gamma_{qj}^p = 0.$$

Вынесем $X^q Y^i Z^j$ за скобки:

$$X^q Y^i Z^j \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - g_{pj} \Gamma_{qi}^p - g_{pi} \Gamma_{qj}^p \right) = 0,$$

откуда

$$\nabla_g = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - g_{pj} \Gamma_{qi}^p - g_{pi} \Gamma_{qj}^p = 0$$

Задача 13.5. Вывести закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат. Является ли символ Кристоффеля тензором типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$? Пусть даны символы Кристоффеля Γ_{jk}^i и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ двух связностей на многообразии M . Доказать, что их разность $T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^i$ является тензором.

Решение.

В координатах x^i символы Кристоффеля записываются как

$$\Gamma_{ij}^k = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^k,$$

откуда

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

При переходе к новым координатам $x^{i'}$ будем иметь $\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$, тогда

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) &= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) &= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i \partial x^{i'}}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) &= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{i'}}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) &= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \end{aligned}$$

Теперь переименуем индекс суммирования $j' \mapsto k'$ и заметим, что

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{i'}}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) = \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^{k'}}$$

сокращая на $\frac{\partial}{\partial x^{k'}}$, получим

$$\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma_{i'j'}^{k'} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ – якобиан замены координат, якобиан обратной замены – обратная матрица $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}$:

$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \delta_k^l$. Умножим обе части уравнения на $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}$:

$$\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma_{i'j'}^{k'} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^l.$$

Получаем

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}$$

переименуя индекс суммирования $l \mapsto k$, окончательно получим

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}$$

- закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат.

Отсюда сразу вытекает, что символ Кристоффеля не является тензором типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, однако $T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^i$ является тензором типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$T_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{j'k'}^{i'} - \tilde{\Gamma}_{j'k'}^{i'} = T_{jk}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}$$

Задача 13.6. Пусть M – многообразие, а ∇ – произвольная связность. Определим формулой $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ кручение связности ∇ . Проверьте, что кручение определяет тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, называемый тензором кручения связности ∇ . Проверьте, что этот тензор кососимметричен по нижним индексам. Заметим, что симметричность связности равносильна нулевому кручению. Доказать, что связность симметрическая тогда и только тогда, когда в локальных координатах $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Решение.

Докажем, что $T(X, Y)$ – тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

Линейность по X :

$$T(X_1 + X_2, Y) = T(X_1, Y) + T(X_2, Y)$$

- очевидно, так как $\nabla_X Y$, $\nabla_Y X$ и $[X, Y]$ линейны.

$$T(fX, Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y]$$

Вычислим $[fX, Y]$:

$$[fX, Y]g = fX(Yg) - Y(fXg) = fX(Yg) - (Yf)(Xg) - fY(Xg) = -(Yf)(Xg) + f[X, Y]g$$

то есть,

$$[fX, Y] = -(Yf)X + f[X, Y]$$

Получаем

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] = \\ &= f\nabla_X Y - (Yf)X - f\nabla_Y X + (Yf)X - f[X, Y] = f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f[X, Y] = fT(X, Y) \end{aligned}$$

Таким образом, $T(X, Y)$ линеен по X . Аналогично можно установить, что

$$T(X, Y_1 + Y_2) = T(X, Y_1) + T(X, Y_2)$$

$$T(X, fY) = fT(X, Y)$$

- $T(X, Y)$ линеен по Y . Поэтому $T(X, Y)$ – тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Проверим, что этот тензор кососимметричен по нижним индексам:

$$T(Y, X) = \nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y, X] = -(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = -T(X, Y)$$

Проверим, что симметричность связности равносильна нулевому кручению:

$$T(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Докажем, что связность симметрическая тогда и только тогда, когда в локальных координатах $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$:

$$\begin{aligned} \nabla \text{симметрична} &\Leftrightarrow T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \end{aligned}$$

Задача 13.7. Пусть M – риманово многообразие, а ∇^M – связность Леви-Чивиты на нём. Пусть $N \subset M$ – подмногообразие. Индуцируем на N риманову метрику, и пусть $P_A: T_A M \rightarrow T_A N$ – поле ортогональных проекторов P . Докажите, что связность Леви-Чивиты на N можно найти по формуле

$$\nabla_X^N Y = P(\nabla_X^M Y).$$

Решение.

По теореме Леви-Чивиты, любое риманово многообразие обладает единственной связностью Леви-Чивиты, поэтому если мы докажем, что $P(\nabla_X^M Y)$ удовлетворяет всем свойствам связности Леви-Чивиты, то тем самым мы докажем формулу $\nabla_X^N Y = P(\nabla_X^M Y)$.

1) Линейность по X очевидна (так как связность ∇^M и оператор P линейны).

2) Линейность по Y :

$$\nabla_X^N (Y_1 + Y_2) = P(\nabla_X^M (Y_1 + Y_2)) = P(\nabla_X^M Y_1 + \nabla_X^M Y_2) = P(\nabla_X^M Y_1) + P(\nabla_X^M Y_2) = \nabla_X^N Y_1 + \nabla_X^N Y_2$$

3) Тожество Лейбница:

$$\nabla_X^N (fY) = P(\nabla_X^M (fY)) = P((Xf)Y + f\nabla_X^M Y) = (Xf)P(Y) + fP(\nabla_X^M Y) = (Xf)Y + f\nabla_X^N Y$$

(при доказательстве воспользовались тем, что для ∇_X^M тождество Лейбница выполнено).

Таким образом, ∇^N – связность.

4) Симметричность:

$$\nabla_X^N Y - \nabla_Y^N X = P(\nabla_X^M Y) - P(\nabla_Y^M X) = P(\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X) = P([X, Y]) = [X, Y]$$

(здесь мы воспользовались результатом задачи 4.4 – если X и Y – векторные поля, касательные к M , то и их коммутатор $[X, Y]$ также будет векторным полем, касательным к M).

5) Согласованность с метрикой:

$$X\langle Y, Z \rangle^N = X\langle Y, Z \rangle^M = \langle \nabla_X^M Y, Z \rangle^M + \langle Y, \nabla_X^M Z \rangle^M =$$

(оставляем только касательные компоненты $\nabla_X^M Y$ и $\nabla_X^M Z$):

$$= \langle P(\nabla_X^M Y), Z \rangle^M + \langle Y, P(\nabla_X^M Z) \rangle^M = \langle \nabla_X^N Y, Z \rangle^N + \langle Y, \nabla_X^N Z \rangle^N$$

(при доказательстве воспользовались тем, что ∇^M согласована с метрикой).

Таким образом, ∇_X^N – симметрическая, согласованная с $\langle \cdot, \cdot \rangle^N$ связность, поэтому (в силу единственности связности Леви-Чивиты), это связность Леви-Чивиты.

Задача 13.8. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X^i_{;i} = \sum_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right)^i,$$

где ∇ – связность Леви-Чивиты метрики. Найдите дивергенцию векторного поля для евклидовой плоскости в полярных координатах.

Комментарии к решению: это несложное вычисление, символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты евклидовой плоскости в полярных координатах были найдены в решении задачи 13.1.

Задача 13.9. Градиент $\operatorname{grad} f$ функции f – это векторное поле, полученное из дифференциала функции f подниманием индекса. Определим оператор Лапласа-Бельтрами от функции f формулой

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Найдите оператор Лапласа-Бельтрами на евклидовой плоскости в полярных координатах.

Комментарии к решению: $f \in C^\infty$, $df \in \Omega^1$. Градиент функции определяем как векторное поле, такое, что

$$\langle \operatorname{grad} f, Y \rangle = df(Y).$$

На это равенство можно посмотреть как на изоморфизм между линейным пространством V со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и двойственным ему пространством V^* – вектору $\operatorname{grad} f$ сопоставляется ковектор df . Как было доказано (см. задачу 11.8) это в точности операция опускания и подъема индекса. В координатах дифференциал df определяется как

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

тогда

$$\operatorname{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Далее используем задачу 13.8.

Задача 13.10. Доказать, что

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det g} X^i)$$

Комментарии к решению: см. задачу 12.1 – там мы проделывали аналогичные вычисления.

Семинар 14. Связности. Параллельный перенос.

Задача 14.1. Найти результат параллельного переноса вдоль кривой на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$ а) касательного вектора, параллельного оси цилиндра, и б) касательного вектора, ортогонального оси цилиндра. Как параллельный перенос зависит от кривой?

Решение.

Параллельный перенос:

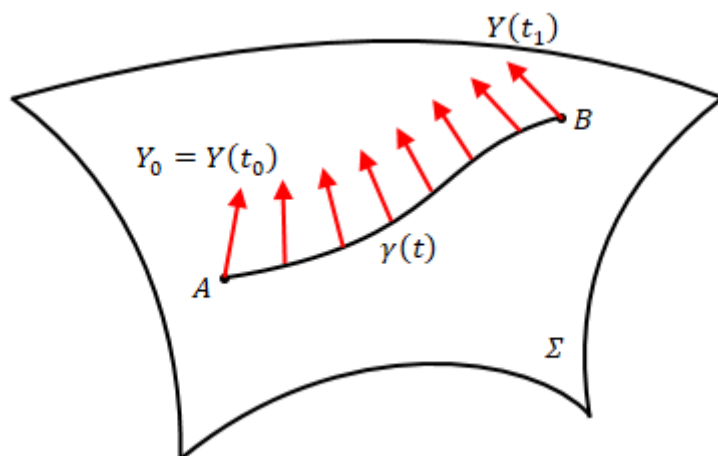


Рис. 14.1. Параллельный перенос

Пусть $Y_0 \in T_A \Sigma$. Строим по Y_0 параллельное векторное поле, удовлетворяющее задаче Коши

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0 \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

получаем вектор $Y(t_1)$ – результат параллельного переноса из точки A в точку B вдоль пути γ .

Уравнение параллельного переноса $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$ в координатах записывается в виде

$$\dot{Y}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(x^1(t), \dots, x^n(t)) \cdot \dot{x}^i(t) \cdot Y^j(t) = 0$$

где

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)).$$

Если Σ – двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, то уравнение параллельного переноса можно записать в виде

$$P\left(\frac{dY}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} \perp T_{\gamma(t)} \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} \perp \vec{m}$$

Где $\vec{m}$ – нормаль к поверхности Σ .

а) Параметризуем цилиндр:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

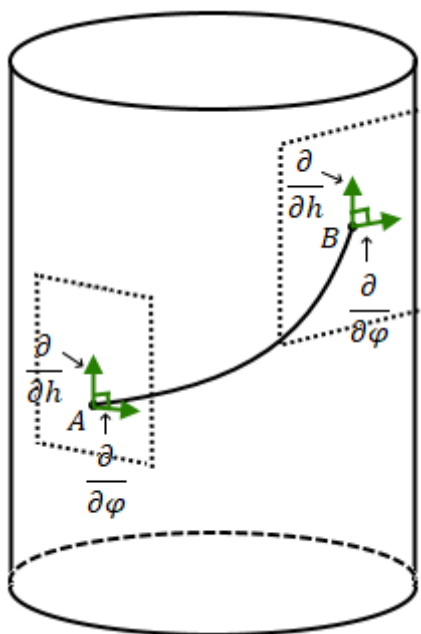


Рис.14.2. к задаче 14.1

$Y_0 = (0, 0, 1)$ в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим поле $Y(t) = (0, 0, 1)$. Тогда

$$\frac{dY}{dt} = (0, 0, 0) \Rightarrow P\left(\frac{dY}{dt}\right) = 0$$

таким образом, поле $Y(t)$ параллельно вдоль любой кривой, поэтому $Y(t_1) = (0, 0, 1)$ – касательный вектор, параллельный оси цилиндра после параллельного переноса переходит в касательный вектор, параллельный оси цилиндра.

б) При параллельном переносе сохраняются длины и углы, поэтому (используя результат пункта а)) касательный вектор, ортогональный оси цилиндра после параллельного переноса переходит в касательный вектор, ортогональный оси цилиндра (см. рис. 14.2).

Таким образом, в локальных координатах (φ, h) вектор $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ перейдет в $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, а вектор $\frac{\partial}{\partial h}$ перейдет в $\frac{\partial}{\partial h}$.

Решим задачу другим способом, используя уравнение параллельного переноса $\nabla_Y Y = 0$:

$$r = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, h)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = r_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} = r_h = (0, 0, 1)$$

Метрика:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = R^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial h} \right) = 0,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial}{\partial h}, \frac{\partial}{\partial h} \right) = 1$$

получаем

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- все компоненты метрики – константы, поэтому все символы Кристоффеля будут равны нулю:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) = 0$$

Тогда уравнение параллельного переноса в координатах запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{Y}^1 = 0 \\ \dot{Y}^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y^1 = c_1 \\ Y^2 = c_2 \end{cases}$$

где c_1, c_2 – константы в базисе $\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial h}$.

Поэтому, если $Y_0 = c_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} + c_2 \frac{\partial}{\partial h}$, то после параллельного переноса он также будет иметь вид $Y(t_1) = c_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} + c_2 \frac{\partial}{\partial h}$ (отметим при этом, что $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ при параллельном переносе будет вращаться в объемлющем пространстве).

На этот результат можно взглянуть немного с другой стороны – рассмотрим следующую параметризацию цилиндра:

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{\theta}{R} \\ y = R \sin \frac{\theta}{R} \\ z = h \end{cases}$$

Тогда в координатах (θ, h) метрика будет евклидовой:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– это интуитивно ясно: если мы разрежем цилиндр, то его развертка будет плоской.

В евклидовой метрике параллельный перенос является тождественным (таким образом, мы ответили на еще один вопрос задачи – параллельный перенос не зависит от кривой).

Задача 14.2. На какой угол повернется касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели с широтой $\psi = \psi_0$? Решить явно дифференциальное уравнение параллельного переноса.

Решение.

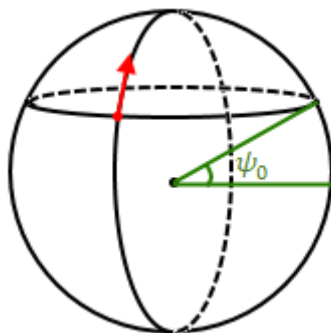


Рис. 14.3. Параллельный перенос вдоль параллели

Параметризация сферы:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \cos \psi \\ y = \sin \theta \cos \psi \\ z = \sin \psi \end{cases}, \quad x^1 = \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x^2 = \theta \in [0, 2\pi),$$

Найдем метрику в сферических координатах φ, θ :

$$r = (\cos \theta \cos \psi, \sin \theta \cos \psi, \sin \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = r_\psi = (-\cos \theta \sin \psi, -\sin \theta \sin \psi, \cos \psi),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r_\theta = (-\sin \theta \cos \psi, \cos \theta \cos \psi, 0),$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial}{\partial \psi}, \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = 1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial}{\partial \psi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = 0,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \cos^2 \psi$$

Получаем

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \psi \end{pmatrix}$$

тогда

$$(g^{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 \psi} \end{pmatrix}.$$

Найдем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \right)$$

единственная ненулевая производная от компонент метрики – это

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -2 \sin \psi \cos \psi,$$

остальные производные будут равны нулю. Поэтому среди Γ_{ij}^k ненулевыми будут лишь те, для которых $\{i, j, k\} = \{1, 2, 2\}$. Получаем три варианта: Γ_{22}^1 , Γ_{12}^2 и Γ_{21}^2 .

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \sin \psi \cos \psi$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = -\operatorname{tg} \psi$$

Уравнения параллельного переноса:

$$\dot{Y}^i + \Gamma_{jk}^i \cdot \dot{x}^j \cdot Y^k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Y}^1 + \Gamma_{22}^1 \cdot \dot{x}^2 \cdot Y^2 = 0 \\ \dot{Y}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \dot{x}^1 \cdot Y^2 + \Gamma_{21}^2 \cdot \dot{x}^2 \cdot Y^1 = 0 \end{cases}$$

Подставим в них ранее найденные Γ_{ij}^k (их значения на параллели) и параметризацию параллели:

$$\begin{cases} x^1 = \psi = \psi_0 \\ x^2 = \theta = t \end{cases}.$$

Получим:

$$\begin{cases} \dot{Y}^1 + \sin \psi_0 \cos \psi_0 \cdot Y^2 = 0 \\ \dot{Y}^2 - \operatorname{tg} \psi_0 \cdot Y^1 = 0 \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение и подставляя $\dot{Y}^2$ во второе уравнение системы, получаем известное уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{Y}^1(t) + \sin^2 \psi_0 Y^1(t) = 0.$$

Его решение:

$$Y^1 = A \cos(t \sin \psi_0) + B \sin(t \sin \psi_0),$$

тогда

$$Y^2 = -\frac{\dot{Y}^1}{\sin \psi_0 \cos \psi_0} = \frac{A \sin(t \sin \psi_0) \sin \psi_0 - B \cos(t \sin \psi_0) \sin \psi_0}{\sin \psi_0 \cos \psi_0} =$$

$$= \frac{A}{\cos \psi_0} \sin(t \sin \psi_0) - \frac{B}{\cos \psi_0} \cos(t \sin \psi_0).$$

A и B найдем из начальных условий: так как параллельный перенос сохраняет длины и углы, достаточно понять, куда под действием параллельного переноса переходит один выбранный вектор. Выберем вектор Y_0 , касательный к меридиану:

$$Y_0 = \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial \psi},$$

его координаты:

$$\begin{cases} Y^1 = 1 \\ Y^2 = 0 \end{cases}.$$

Подставим начальное условие $Y(0) = Y_0$ в решение, получим:

$$1 = Y_0^1 = Y^1(0) = A$$

$$0 = Y_0^2 = Y^2(0) = -\frac{B}{\cos \psi_0}$$

откуда $A = 1, B = 0$. Получаем

$$Y(t) = \left(\cos(t \sin \psi_0), \frac{1}{\cos \psi_0} \sin(t \sin \psi_0) \right).$$

Найдем угол β , на который повернется Y_0 к сфере после параллельного переноса вдоль параллели с широтой $\psi = \psi_0$ (то есть, угол между $Y(0)$ и $Y(2\pi)$):

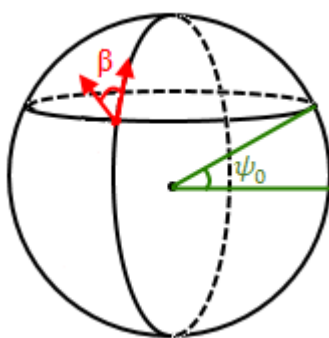


Рис. 14.4. Вектор Y_0 после параллельного переноса

$$\cos \beta = \frac{(Y(0), Y(2\pi))}{|Y(0)| \cdot |Y(2\pi)|} = \frac{(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \psi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi \sin \psi_0) \\ \frac{1}{\cos \psi_0} \sin(2\pi \sin \psi_0) \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \cos(2\pi \sin \psi_0)$$

откуда

$$\beta = 2\pi \sin \psi_0$$

Задача 14.3. Как устроен параллельный перенос на круговом конусе? *Указание: как связаны метрики на конусе и его развертке?*

Решение.

В подходящих координатах метрика на конусе будет евклидовой. Разрежем конус по образующей и сделаем его развертку – для параллельного переноса вдоль кривой на конусе нужно просто сделать параллельный перенос на плоскости.

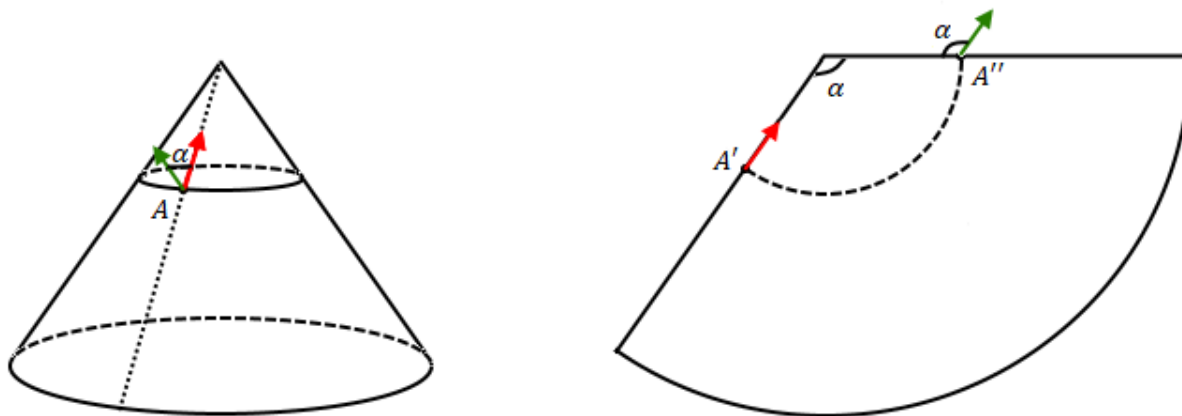


Рис. 14.5. Параллельный перенос на конусе

На рис. 14.5 изображен параллельный перенос вдоль параллели – в результате получится вектор, повернутый по отношению к образующей конуса на угол α (угол при вершине у развертки конуса).

Задача 14.4. Доказать, что если две поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Решение.

Утверждение задачи следует из уравнения параллельного переноса (см. начало задачи 14.1):

$$P\left(\frac{dY}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} \perp T_{\gamma(t)}$$

- в точках кривой касательные плоскости $T_{\gamma(t)}\Sigma_1$ и $T_{\gamma(t)}\Sigma_2$ к поверхностям совпадают, значит, и результат параллельного переноса будет таким же (однако, обратите внимание на то, что в локальных координатах уравнения параллельного переноса не обязаны совпадать – координаты на Σ_1 и Σ_2 не имеют друг с другом ничего общего).

Задача 14.5. Решить задачу 14.2 с помощью задач 14.4, 14.1 и 14.3, не решая явно дифференциальное уравнение параллельного переноса на сфере.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: параллель – это экватор.

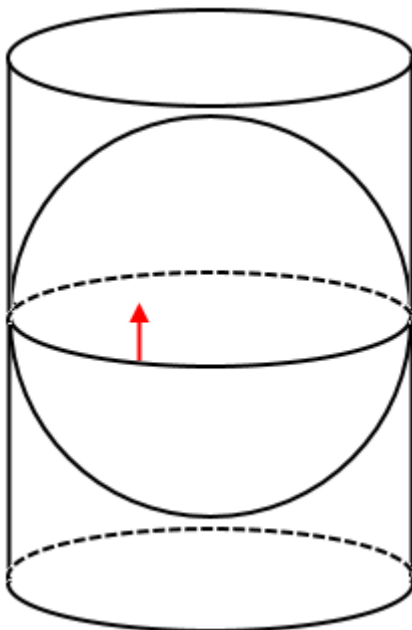


Рис. 14.6. Параллельный перенос вдоль экватора

Впишем сферу в цилиндр, который касается ее по экватору. Тогда результат параллельного переноса касательного вектора вдоль экватора на цилиндре и сфере совпадает. Но на цилиндре этот вектор останется постоянным (см. задачу 14.1), поэтому вектор поворачивается на угол $0 (= 2\pi)$.

Второй случай: параллель не является экватором.

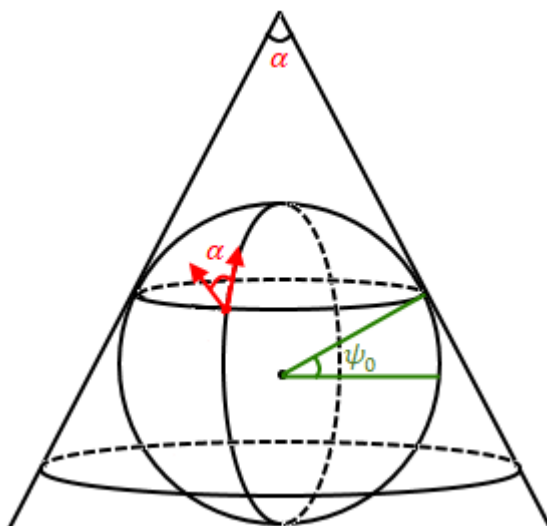


Рис. 14.7. Параллельный перенос вдоль параллели (не экватора)

“Наденем” на сферу конус – они будут касаться по параллели. Тогда результат параллельного переноса касательного вектора вдоль параллели на цилиндре и конусе совпадает. Угол поворота касательного вектора к конусу после параллельного переноса вдоль параллели равен углу при вершине у развертки конуса (см. задачу 14.3)

Нарисуем сечение, проходящее через вершину конуса и центр сферы:

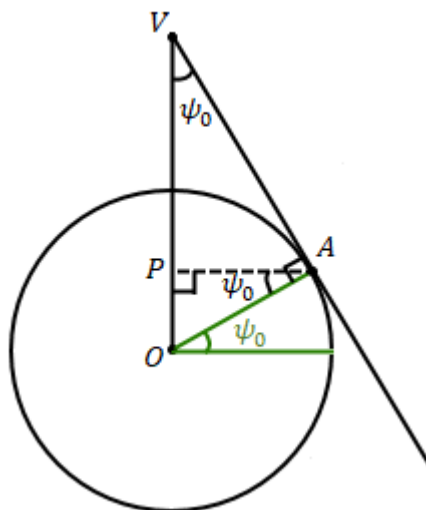


Рис. 14.8. Сечение, проходящее через вершину конуса и центр сферы

Здесь $|OA| = 1$, $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOV = \frac{\pi}{2} - \psi_0 \Rightarrow \angle OVA = \psi_0$. Тогда

$$\frac{|OA|}{|VA|} = \operatorname{tg} \psi_0 \Rightarrow |VA| = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_0}$$

Подсчитаем длину параллели двумя способами: с одной стороны, это – длина дуги окружности радиуса $\frac{1}{\operatorname{tg} \psi_0}$, стягиваемой углом α – она равна $\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \psi_0}$:

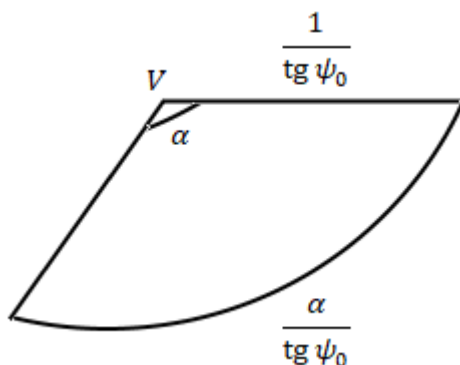


Рис. 14.9. Развертка конуса (дуга окружности соответствует параллели)

С другой стороны, длина параллели – это длина окружности радиуса $|PA| = \cos \psi_0$, поэтому она равна $2\pi \cos \psi_0$.

Получаем

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \psi_0} = 2\pi \cos \psi_0,$$

откуда

$$\alpha = 2\pi \sin \psi_0$$

Задача 14.6. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов. *Указание: используйте задачи 14.4, 14.1 и 14.3.*

Решение.

Параллельный перенос вдоль параллелей.

Параллельный перенос, который происходит вдоль параллели, касательная к которой параллельна оси вращения, равносильна переносу вдоль параллели на прямом круговом цилиндре:

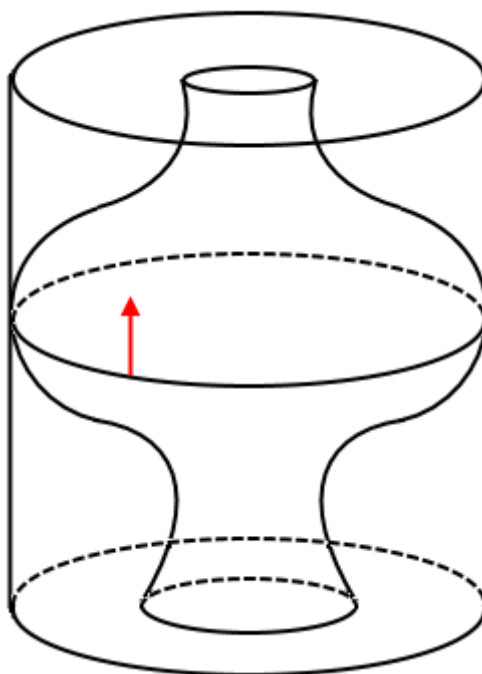


Рис. 14.10. Параллельный перенос вдоль параллели, касательная к которой параллельна оси вращения

Поэтому вектор, касательный к меридиану будет переходить в вектор, касательный к меридиану.

Если параллельный перенос происходит вдоль параллели, касательная к которой не параллельна оси вращения, тогда, как в задаче 14.5, “наденем” на поверхность вращения конус – они будут касаться по параллели. Тогда результат параллельного переноса касательного вектора вдоль параллели на поверхности вращения и конусе совпадает (см. рис. 14.11)

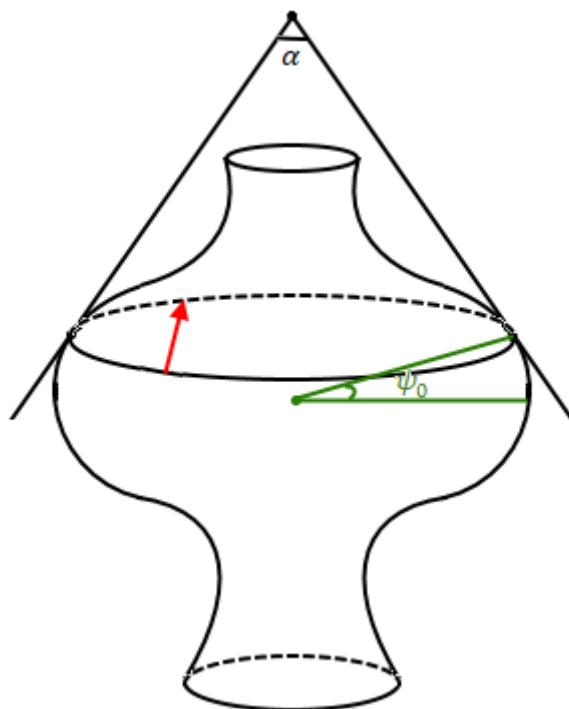


Рис. 14.11. Параллельный перенос вдоль параллели, касательная к которой не параллельна оси вращения

Нарисуем сечение, проходящее через ось вращения:

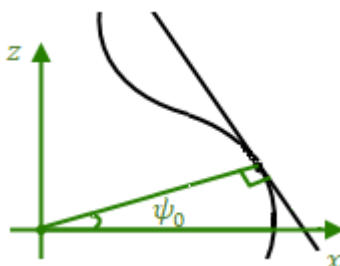


Рис. 14.12. Сечение поверхности вращения

Пусть в сечении поверхность вращения задается уравнением $x = f(z)$. Тогда

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \dot{f},$$

откуда

$$\sin \psi_0 = \frac{\dot{f}}{\sqrt{1 + \dot{f}^2}}$$

Тогда угол поворота касательного вектора к поверхности вращения после параллельного переноса вдоль параллели равен (см. задачу 14.5):

$$\alpha = 2\pi \sin \psi_0 = 2\pi \frac{\dot{f}}{\sqrt{1 + \dot{f}^2}}$$

Параллельный перенос вдоль меридианов.

Рассмотрим плоскую кривую $\gamma(s)$, где s – натуральный параметр и постоянный вектор $\vec{a}$, такой, что $|\vec{a}| = 1$ и $\vec{a} \perp \dot{\gamma}(s)$:

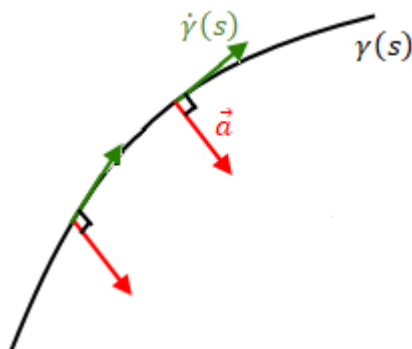


Рис. 14.13. Кривая $\gamma(s)$

Рассмотрим поверхность $r(s, t) = \gamma(s) + \vec{a}t$:

$r_s = \dot{\gamma}$ – единичный вектор, $r_t = \vec{a}$ – единичный вектор, $\vec{a} \perp \dot{\gamma}$, поэтому на $r(s, t)$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- метрика евклидова.

Теперь построим такую поверхность, когда $\gamma(s)$ – меридиан:

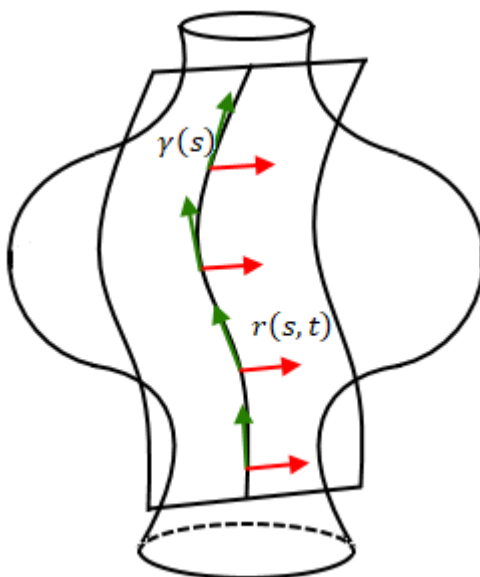


Рис. 14.13. Параллельный перенос вдоль меридиана

На этой поверхности перенос евклидов, она касается поверхности вращения по меридиану γ , поэтому касательный вектор к меридиану (в натуральной параметризации) параллелен вдоль меридиана.

Задача 14.7. Доказать, что X – киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для любых векторных полей Y и Z и связности Леви-Чивиты верно равенство

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0.$$

Решение.

X – киллингово векторное поле, если $L_X g = 0$ – производная Ли вдоль этого поля от метрики равна нулю. Тогда

$$L_X g = 0 \Leftrightarrow (L_X g)(Y, Z) = 0 \text{ для } \forall Y, Z$$

Теперь воспользуемся формулой, доказанной ранее для 1-форм – она будет верна и в нашем случае:

$$L_X(g(Y, Z)) = (L_X g)(Y, Z) + g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) = 0 &\Leftrightarrow L_X(g(Y, Z)) = g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X\langle Y, Z \rangle = \langle L_X Y, Z \rangle + \langle Y, L_X Z \rangle \Leftrightarrow X\langle Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \end{aligned}$$

Связность Леви-Чивиты согласована с метрикой, поэтому $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, также $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ и $[X, Z] = \nabla_X Z - \nabla_Z X$. Получаем

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle - \langle Y, \nabla_Z X \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0 \end{aligned}$$

Задача 14.8. Доказать, что X – киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для связности Леви-Чивиты верно равенство

$$X_{j,i} + X_{i,j} = 0$$

Решение.

Данное равенство – это утверждение задачи 14.7, записанное в тензорном виде:

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0$$

Так как это равенство верно для любых векторных полей Y и Z , то достаточно вычислить на базисных векторах:

$$Y = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Получаем

$$\left\langle X_{;i}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, X_{;j}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow X_{;i}^k g_{kj} + X_{;j}^k g_{ik} = 0$$

Так как опускание индексов для связности Леви-Чивиты коммутирует с дифференцированием, получаем

$$X_{j;i} + X_{i;j} = 0.$$

Семинар 15. Геодезические.

Задача 15.1. Доказать, что если прямая лежит на поверхности в евклидовом пространстве, то она будет геодезической на этой поверхности.

Решение.

Геодезические – это аналоги прямых на искривленных поверхностях.

Если прямая γ лежит на поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то в объемлющем пространстве она задается уравнением

$$\gamma(t) = a + \vec{b}t, \quad a \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

Тогда $\ddot{\gamma}(t) = 0$ – таким образом, прямая γ удовлетворяет уравнению геодезической

$$P(\ddot{\gamma}) = 0.$$

Задача 15.2. Описать геодезические на круговом цилиндре и круговом конусе в трёхмерном евклидовом пространстве. Опишите круговые конусы, на которых существуют самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Решение.

а) Геодезические на круговом цилиндре.

Как обсуждалось в задаче 14.1, если мы параметризуем цилиндр следующим образом:

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{\theta}{R} \\ y = R \sin \frac{\theta}{R} \\ z = h \end{cases}$$

тогда в координатах (θ, h) метрика будет евклидовой:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Уравнение геодезической:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

Так как в евклидовой метрике $\Gamma_{ij}^k = 0$, то уравнение геодезической $\ddot{x}^k = 0$, откуда

$$x^k = a^k + b^k t$$

- прямая линия в координатах (θ, h) :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \theta_1 t \\ h = h_0 + h_1 t \end{cases}$$

В зависимости от значений θ_1 и h_1 геодезические на цилиндре будут выглядеть по-разному:

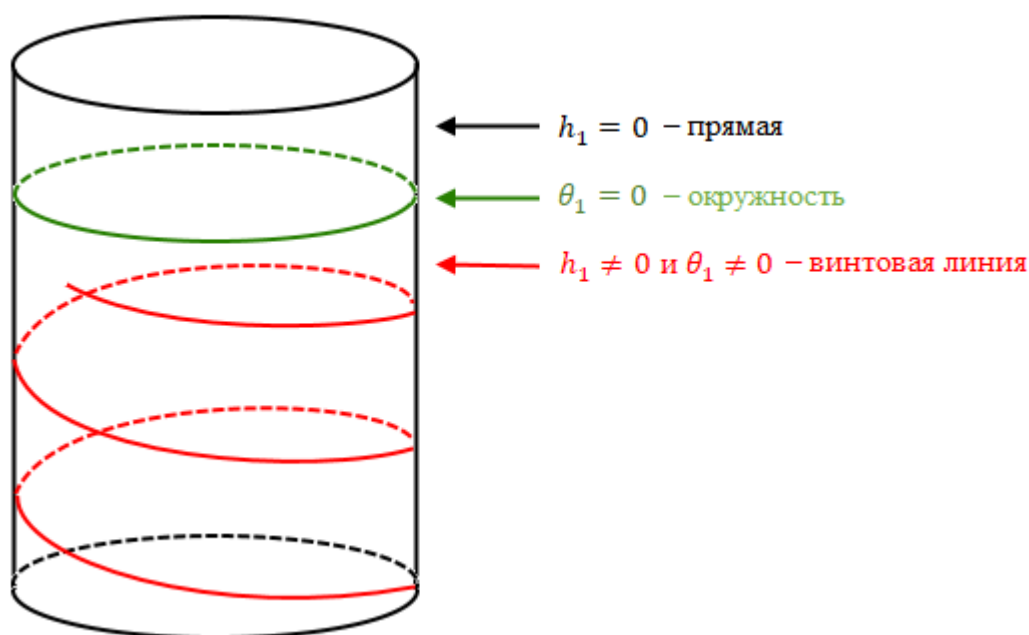


Рис. 15.1. Геодезические на круговом цилиндре

б) Геодезические на круговом конусе.

Как обсуждалось в задаче 14.3, в подходящих координатах метрика на конусе будет евклидовой, тогда геодезические – это прямые. Таким образом, геодезические на прямом круговом конусе – это кривые, которые при развертке переходят в прямые (или части прямых).

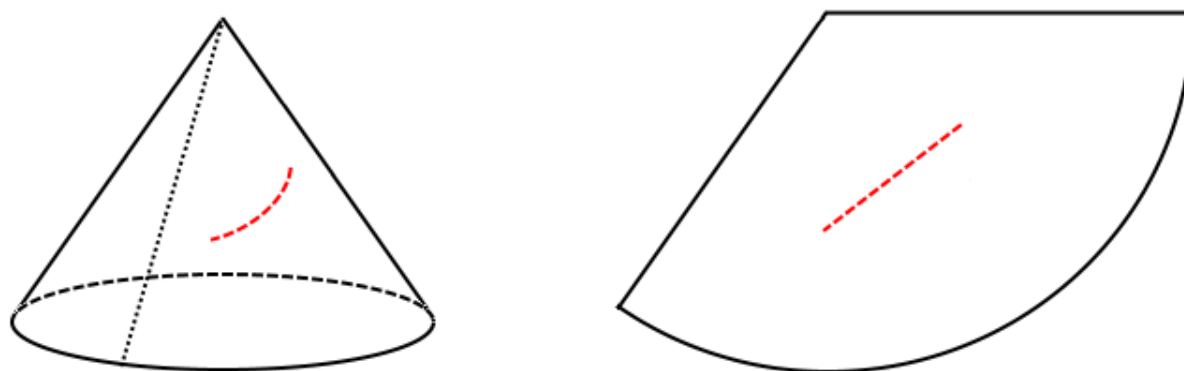


Рис. 15.2. Геодезические на круговом конусе

Опишем круговые конусы, на которых существуют самопересекающиеся геодезические. Выберем P – точку пересечения самопересекающейся геодезической, ближайшую к вершине, и проведем через нее образующую, по которой разсечем конус:

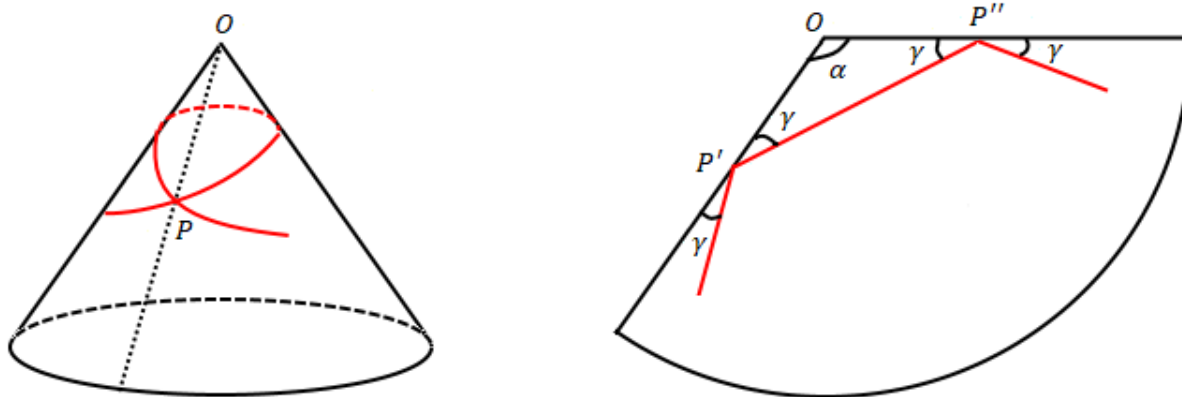


Рис. 15.3. Самопересекающаяся геодезическая на круговом конусе

Из рисунка видно, что самопересекающиеся геодезические на круговом конусе существуют, если выполняется условие $\alpha < \pi$, так как при $\alpha > \pi$ нельзя внутри развертки соединить прямой точки P' и P'' .

Задача 15.3. Найти результат параллельного переноса вектора $(0, 1, 1)$ из точки $(1, 0, 0)$ однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точку $(1, -1, 1)$ вдоль прямолинейной образующей $x = 1, y + z = 0$. Указание: воспользуйтесь тем, что прямая на поверхности является геодезической, а поле скоростей геодезической параллельно вдоль неё.

Решение.

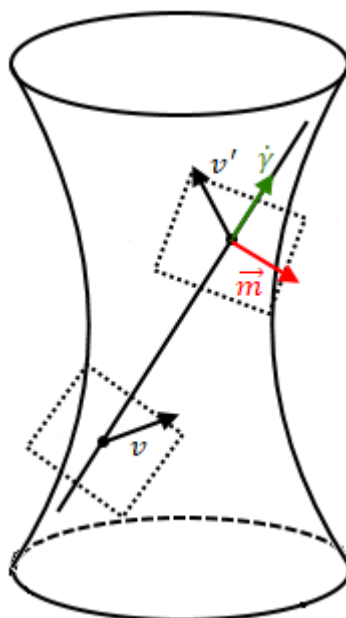


Рис. 15.4. К задаче 15.3

Параметризуем прямолинейную образующую:

$$\gamma = (1, t, -t)$$

тогда

$$\dot{\gamma} = (0, 1, -1).$$

Пусть v' - результат параллельного переноса вектора $v = (0, 1, 1)$ вдоль γ . Заметим, что $\dot{\gamma} \perp v$ - векторы ортогональны в начальной точке, тогда и $\dot{\gamma} \perp v'$ - они должны быть ортогональны и в конечной точке (так как γ - геодезическая).

Пусть $\vec{m}$ - единичная нормаль к поверхности. Воспользуемся тем, что градиент функции в точке ортогонален касательной плоскости в этой точке:

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \text{grad } F + T_{(x,y,z)}\Sigma.$$

В нашем случае

$$\text{grad } F = (2x, 2y, -2z)$$

поэтому в качестве $\vec{m}$ можно выбрать

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, -z).$$

Тогда $\vec{m}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $\vec{m}(1, -1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$

Итак, v' ортогонален $\dot{\gamma}$ и $\vec{m}$, поэтому

$$v' = \pm[\vec{m}(1, 1, 1), \dot{\gamma}]$$

Получаем

$$v' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(2, 1, 1).$$

Осталось выбрать знак v' . Воспользуемся следующим соображением: смешанное произведение $(\vec{m}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t), v(t))$ сохраняет знак (как непрерывная функция от t).

В точке $(1, 0, 0)$, что соответствует $t = 0$, получаем

$$(\vec{m}(1, 0, 0), (0, 1, -1), v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

В точке $(1, -1, 1)$, если выбираем $v' = \frac{1}{\sqrt{3}}(2, 1, 1)$, получаем

$$(\vec{m}(1, -1, 1), (0, 1, -1), v') = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Таким образом, $v' = \frac{1}{\sqrt{3}}(2, 1, 1)$ – результат параллельного переноса вектора $v = (0, 1, 1)$ из точки $(1, 0, 0)$ однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ вдоль γ .

Задача 15.4. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ касаются по кривой, то есть в точках этой кривой касательные плоскости обеих поверхностей совпадают, а кривая – геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Решение.

Пусть поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются по кривой γ , которая является геодезической на Σ_1 .

Запишем уравнение геодезической в виде

$$P_{T_{\gamma(t)}\Sigma_1}(\ddot{\gamma}) = 0.$$

Но на γ касательные плоскости обеих поверхностей совпадают:

$$T_{\gamma(t)}\Sigma_1 = T_{\gamma(t)}\Sigma_2$$

поэтому верно

$$P_{T_{\gamma(t)}\Sigma_2}(\ddot{\gamma}) = 0$$

- то есть, γ – геодезическая и на второй поверхности.

Задача 15.5. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

Решение.

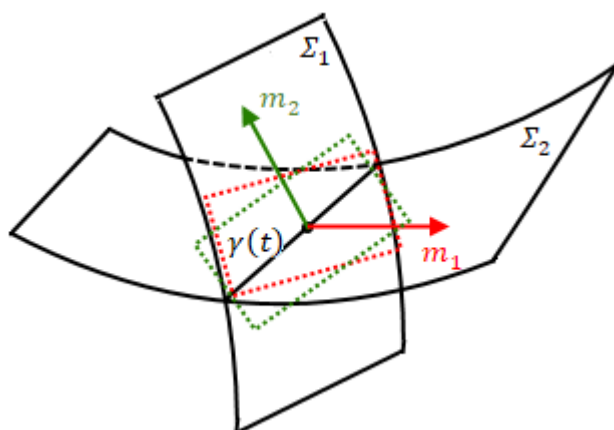


Рис. 15.5. К задаче 15.5.

Пусть поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются по кривой γ , которая является геодезической на Σ_1 и Σ_2 . Рассмотрим точку $\gamma(t)$ на этой кривой. С одной стороны, проекция вектора ускорения на касательную плоскость к Σ_1 в этой точке равна нулю:

$$P_{T_{\gamma(t)}\Sigma_1}(\ddot{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\gamma} \parallel m_1(\gamma(t))$$

– это значит, что $\ddot{\gamma}$ параллелен вектору нормали $m_1(\gamma(t))$ к поверхности Σ_1 .

Аналогично

$$P_{T_{\gamma(t)}\Sigma_2}(\ddot{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\gamma} \parallel m_2(\gamma(t))$$

Так как касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то векторы $m_1(\gamma(t))$ и $m_2(\gamma(t))$ не параллельны – это возможно только при $\ddot{\gamma} = 0$, откуда

$\gamma(t) = a + \vec{b}t$ – геодезическая является прямой линией.

Задача 15.6. Доказать, что меридианы поверхности вращения – геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Решение.

Пусть $\gamma(s)$ – меридиан. Рассмотрим поверхность (см. задачу 14.6) $r(s, t) = \gamma(s) + \vec{a}t$:

$r_s = \dot{\gamma}$ – единичный вектор, $r_t = \vec{a}$ – единичный вектор, $\vec{a} \perp \dot{\gamma}$, поэтому на $r(s, t)$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- метрика евклидова.

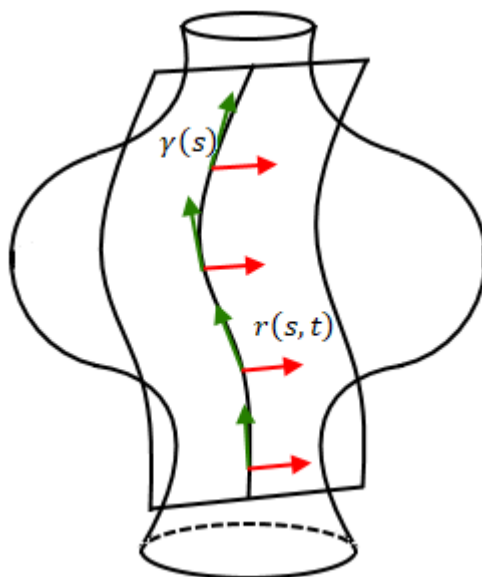


Рис. 15.6. Меридиан поверхности вращения – геодезическая

Тогда прямая $\begin{cases} t = 0 \\ s = \tau \end{cases}$ – геодезическая, поэтому и меридиан $\gamma(s)$ – геодезическая на поверхности вращения (см. задачу 15.4).

При каком условии параллель будет геодезической?

Если касательный вектор к параллели не является параллельным оси вращения, тогда параллель не является геодезической (в самом деле, тогда она была бы геодезической и на касающемся конусе – см. задачи 14.6 и 15.4, но на развертке конуса параллель превращается в дугу окружности, не являющуюся геодезической).

Если же касательный вектор к параллели параллелен оси вращения, тогда параллель – геодезическая (так как она является геодезической и на касательном цилиндре – см. задачи 14.6 и 15.4).

Задача 15.7. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \rightarrow M$ не является а) сюръективным, б) инъективным.

Решение.

а) Рассмотрим $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}$ – плоскость без диска (метрика евклидова)

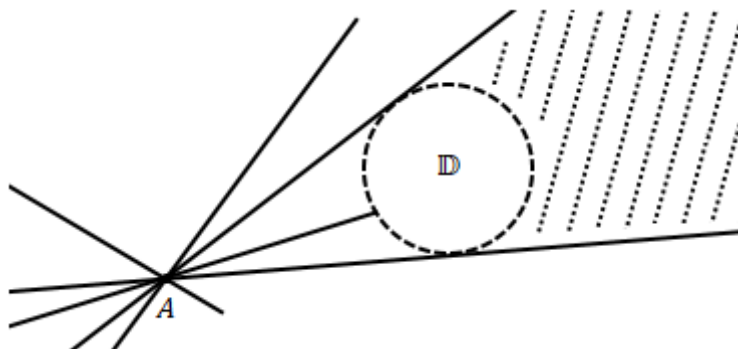


Рис. 15.7. К задаче 15.7.а)

Геодезические, выходящие из точки A – прямые (или лучи, если геодезическая упирается в диск). Тогда заштрихованная область не попадает в образ $\exp_A$, так как в точки этой области невозможно попасть, двигаясь вдоль геодезических, выходящих из точки A .

б) Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$. Геодезические на сфере – это дуги больших окружностей.

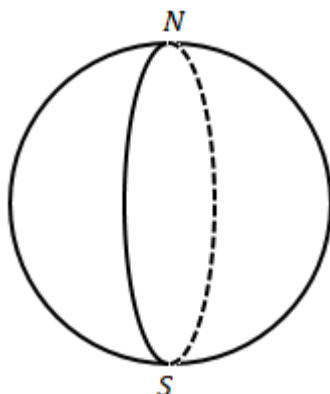


Рис. 15.8. К задаче 15.7.б)

С другой стороны,

$$\int_0^1 \exp_A tX = |X|$$

Длина дуги, соединяющей северный и южный полюс, равна π . Это значит, что для любого $X \in T_N \mathbb{S}^2$, такого, что $|X| = \pi$, выполнено $\exp_N X = S$, поэтому экспонента не инъективна. Аналогично для любого $X \in T_N \mathbb{S}^2$, такого, что $|X| = 2\pi$, выполнено $\exp_N X = N$.

Задача 15.8. Докажите, что при достаточно малых $\delta > 0$ геодезическая $\exp_A tv$ и называемое геодезической сферой радиуса δ с центром в точке A подмногообразие $\exp_A(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_A M \mid |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Решение.

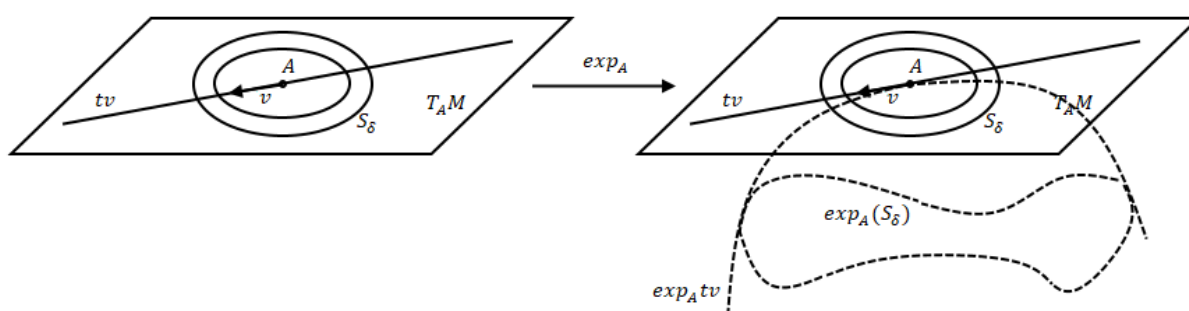


Рис. 15. 9. К задаче 15.8

Под действием отображения $\exp_A$ лучи на $T_A M$ будут переходить в геодезические на M , а сферы на $T_A M$ – в геодезические сферы на M .

Ортогональность $\exp_A tv$ и $\exp_A(S_\delta)$ в точке означает ортогональность вектора скорости $\exp_A tv$ и вектора скорости произвольной кривой, лежащей на $\exp_A(S_\delta)$ и проходящей через данную точку.

Пусть $v(s)$, $|v(s)| = 1$ – кривая на единичном шаре. Рассмотрим

$$\gamma(s, t) = \exp_A tv(s).$$

Зафиксируем s . Тогда $\gamma(s_0, t) = \exp_A tv(s_0)$ – геодезическая.

Зафиксируем t . Тогда $\gamma(s, t_0) = \exp_A(S_{t_0})$ – кривая на геодезической сфере.

Поэтому нам нужно доказать, что для любой кривой $v(s)$, $|v(s)| = 1$ выполнено:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0) \perp \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0)$$

Рассмотрим

$$f(s, t) = \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle.$$

Заметим, что при $t = 0$:

$$\gamma(s, t) = \exp_A tv(s) = A = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial s} = 0 \Rightarrow f(s, 0) = 0. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \stackrel{(2)}{=} \left\langle \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \stackrel{(3)}{=} \left\langle \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \stackrel{(4)}{=} \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \stackrel{(6)}{=} 0 \end{aligned}$$

Поясним переходы:

1) так как производная по параметру на кривой – это то же самое, что и производная вдоль вектора скорости,

2) и 5) так как связность Леви-Чивиты согласована с метрикой,

3) так как $\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0$,

4) так как для симметрической связности верно $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, а $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ и $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ коммутируют: $\left[\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] = 0$, поэтому $\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial \gamma}{\partial t}$,

6) так как длина $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ постоянна, $\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle = \text{const}$.

Таким образом, для $\forall s, t$ выполнено $f(s, t) = 0$, поэтому $\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0) \perp \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0)$.

Задача 15.9. Рассмотрим геодезические координаты $x^1, \dots, x^n$ на римановом многообразии, центрированные в точке A , то есть определённые с помощью отображения $\exp_A$.

Доказать, что в этих геодезических координатах геодезические, проходящие через точку A , имеют вид $x^i = a^i t$, где a^i - некоторые константы.

Доказать, что в этих координатах символы Кристоффеля в точке A обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Доказать, что центрированные в точке A координаты $x^1, \dots, x^n$, то есть такие координаты, что $A = (0, \dots, 0)$, определённые в окрестности $U \ni A$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке A , тогда и только тогда, когда $\Gamma_{jk}^i x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \dots, x^n$ в U .

Решение.

Геодезические координаты:

Выберем декартовы координаты $x^1, \dots, x^n$ в касательном пространстве к точке A , отвечающие ортонормированному базису $e_1, \dots, e_n$ в $T_A M$. Тогда геодезические координаты точки $P \in M$ – это координаты $x^1, \dots, x^n$ вектора $\exp_A^{-1} P$ в $T_A M$.

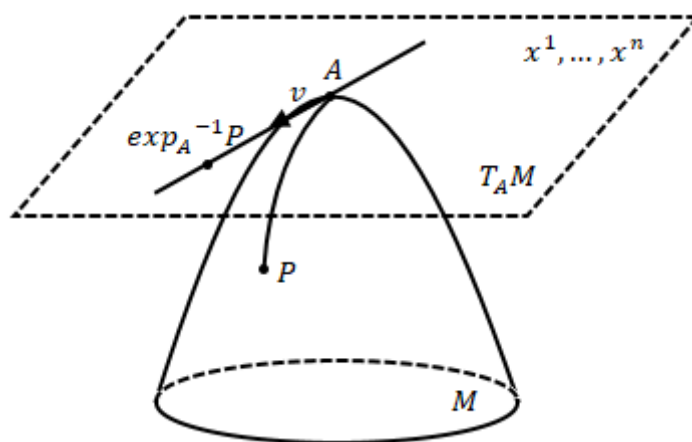


Рис. 15.10. Геодезические координаты

Можно выбрать окрестность точки A , в которой существует единственная геодезическая, соединяющая A с P . Эта геодезическая имеет вид $\exp_A tv$, где $v \in T_A M$. Пусть v имеет координаты $v = (a^1, \dots, a^n)$, тогда у геодезической $\exp_A tv$ будут геодезические координаты $x^i = a^i t$.

Докажем, что в этих координатах $\Gamma_{ij}^k(A) = 0$.

Уравнение геодезической:

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(x^1(t), \dots, x^n(t)) \cdot \dot{x}^i(t) \cdot \dot{x}^j(t) = 0$$

Подставим $x^i = a^i t$, $t = 0$, получим

$$\Gamma_{ij}^k(0, \dots, 0) a^i a^j = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k(A) a^i a^j = 0 \quad \forall i, j$$

- симметричная билинейная форма равна нулю на любом векторе, значит, $\Gamma_{ij}^k(A) = 0$.

Докажем, что центрированные в точке A координаты $x^1, \dots, x^n$ являются геодезическими координатами, центрированными в точке A тогда и только тогда, когда $\Gamma_{jk}^i x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \dots, x^n$ в U .

Необходимость: подставим в уравнение геодезической $x^i = a^i t$, получим

$$\Gamma_{ij}^k(a^1 t, \dots, a^n t) a^i a^j = 0$$

в получившееся соотношение подставим $a^i t = x^i$, $a^i = \frac{x^i}{t}$, $a^j = \frac{x^j}{t}$, получим

$$\frac{1}{t^2} \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n) x^i x^j = 0 \Rightarrow \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n) x^i x^j = 0.$$

Достаточность ($t \neq 0$): обратим рассуждения. Пусть $\Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n)x^i x^j = 0$, тогда $x^i = a^i t$ – геодезическая, тогда $\exp_A(a^1, \dots, a^n) = (a^1, \dots, a^n)$, т.е. координаты $x^1, \dots, x^n$ являются геодезическими координатами.

Задача 15.10. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского как *непараметризованные кривые*. Можно взять любую из моделей плоскости Лобачевского, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что $I_1 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$ является первым интегралом. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите $y(x)$.*

Комментарии к решению: эта задача довольно сложна и интересна. Мы не будем разбирать ее на семинаре, так как решение займет много времени. Всем интересующимся настоятельно рекомендуется ознакомиться с решением в книге И. А. Тайманова “Лекции по дифференциальной геометрии”.

Семинар 16. Геодезические. Тензор кривизны Римана, тензор Риччи, скалярная кривизна.

Задача 16.1. Докажите, что на римановом многообразии в полугеодезических координатах $x^1, \dots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2$$

кривые $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}, x^n = t$ являются геодезическими с натуральным параметром t .

Решение.

Метрика g имеет вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & *** & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметризация кривой:

$$\gamma(t) = (c^1, \dots, c^{n-1}, t),$$

тогда

$$\dot{\gamma}(t) = (0, \dots, 0, 1)$$

и

$$|\dot{\gamma}|^2 = (0, \dots, 0, 1) \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & *** & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow |\dot{\gamma}| = 1.$$

Таким образом, t – натуральный параметр.

Докажем, что γ – геодезическая. Уравнение геодезической:

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(x^1(t), \dots, x^n(t)) \cdot \dot{x}^i(t) \cdot \dot{x}^j(t) = 0$$

в нашем случае $\dot{x}^i(t) = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ 1, & i = n \end{cases}$, поэтому уравнение геодезической запишется в виде:

$$\Gamma_{nn}^k = 0$$

но

$$\Gamma_{nn}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^n} \right) = 0,$$

так как

$$g_{ln} = g_{nl} = \begin{cases} 0, & l \neq n \\ 1, & l = n \end{cases}$$

поэтому γ – геодезическая.

Задача 16.2. Доказать, что сферические координаты в трёхмерном евклидовом пространстве являются полугеодезическими.

Решение.

Сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$\varphi = x^1, \theta = x^2, r = x^3$ – полугеодезические координаты (порядок важен!)

Найдем метрику:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} = (-r \cos \varphi \sin \theta, -r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial r} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right) = r^2 \cos^2 \theta$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right) = r^2$$

$$g_{33} = \left(\frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = 1$$

Остальные $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Получаем

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- таким образом, $\varphi = x^1, \theta = x^2, r = x^3$ – полугеодезические координаты.

Заодно проверим, что кривые $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}, x^n = t$ будут геодезическими с натуральным параметром t : в самом деле, $\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}, r = t$ – это лучи, выходящие из начала координат.

Задача 16.3. Найдите длину геодезической $\exp_A t X$, где $X \in T_A M$, от точки A до точки $\exp_A t_0 X$.

Решение.



Рис. 16.1. К задаче 16.3

Так как длина вектора скорости геодезической постоянна: $|\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\gamma}(0)| = |X|$, то

$$l = \int_0^{t_0} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{t_0} |\dot{\gamma}(0)| dt = \int_0^{t_0} |X| dt = |X| \int_0^{t_0} dt = t_0 |X|$$

Задача 16.4. Выведите из определения тензора кривизны Римана явное выражение для компонент $R_{ij,k}^l$ тензора Римана через символы Кристоффеля Γ_{ij}^k .

Решение.

Мы определяли тензор кривизны Римана как

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$$R_{ij,k}^l = \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^l$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_{ij,k}^l &= \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^l = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^l = \\ &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma_{jk}^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma_{ik}^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right) \right)^l = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^s} + \Gamma_{jk}^s \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^s} - \Gamma_{ik}^s \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^s} \right)^l = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^s} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^p \frac{\partial}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^s} - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right)^l = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l \end{aligned}$$

Задача 16.5. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R_{12,2}^1$.

Решение.

Во-первых, тензор Римана кососимметричен по первым двум нижним индексам:

$$R_{ij,k}^l = -R_{ji,k}^l$$

Поэтому для $\forall k, l$ выполнено $R_{11,k}^l = R_{22,k}^l = 0$ и $R_{12,k}^l = -R_{21,k}^l$

Во-вторых, для тензора Римана верно:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$$

Подставим базисные векторы: $X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, Z = \frac{\partial}{\partial x^k}, W = \frac{\partial}{\partial x^l}$. Получим

$$\left\langle R_{ij,k}^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = -\left\langle R_{ij,l}^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \Leftrightarrow R_{ij,k}^s g_{sl} = -R_{ij,l}^s g_{sk} \Leftrightarrow R_{ij,kl} = R_{ij,lk}$$

- после опускания индекса тензор Римана будет кососимметричен по второй паре нижних индексов.

Поэтому для $\forall i, j$ выполнено $R_{ij,11} = R_{ij,22} = 0$ и $R_{ij,12} = -R_{ij,21}$

Выпишем все 16 компонент тензор Римана (после опускания индекса):

$$\begin{array}{cccccccc} R_{11,11} & R_{11,12} & R_{11,21} & R_{11,22} & R_{12,11} & R_{12,12} & R_{12,21} & R_{12,22} \\ R_{21,11} & R_{21,12} & R_{21,21} & R_{21,22} & R_{22,11} & R_{22,12} & R_{22,21} & R_{22,22} \end{array}$$

- в силу кососимметричности по первым двум нижним индексам, все красные компоненты равны нулю, а зеленые выражаются через черные: $R_{12,lk} = -R_{21,lk}$. Для черных компонент, в силу кососимметричности по второй паре нижних индексов, верно $R_{12,11} = R_{12,22} = 0$ и $R_{12,12} = -R_{12,21}$.

Итак, все компоненты тензора Римана (после опускания индекса) можно выразить через $R_{12,21}$. В свою очередь, $R_{12,21}$ выражается через $R_{12,2}^1$:

$$R_{12,2}^1 = R_{12,2s} g^{s1} = R_{12,21} g^{11} + R_{12,22} g^{21} = R_{12,21} g^{11}$$

откуда

$$R_{12,21} = \frac{1}{g^{11}} R_{12,2}^1.$$

Таким образом, через $R_{12,2}^1$ выражается $R_{12,21}$, через $R_{12,21}$ выражаются все компоненты тензора Римана с нижними индексами, а затем мы поднимаем индекс: $R_{jk,s}^i = R_{jk,sl} g^{li}$.

Задача 16.6. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество для скалярной кривизны

$$R = \frac{2R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Решение.

Вспомним определение тензора Риччи R_{ik} :

$$R_{ik} = R_{ij,k}^j$$

Скалярная кривизна R :

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

Поэтому

$$R = g^{ik} R_{ij,k}^j = g^{ik} g^{jl} R_{ij,kl}$$

В двумерном случае ненулевыми будут лишь четыре компоненты $R_{ij,kl}$, соответствующие $i \neq j$ и $k \neq l$:

$$R = g^{11} g^{22} R_{12,12} + g^{12} g^{21} R_{12,21} + g^{21} g^{12} R_{21,12} + g^{22} g^{11} R_{21,21}$$

- эти ненулевые $R_{ij,kl}$ выражаются через $R_{12,12}$ (см. предыдущую задачу), тогда

$$R = (g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21} - g^{21} g^{12} + g^{22} g^{11}) R_{12,12} = 2(g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21}) R_{12,12}$$

Но

$$g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21} = \det \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}} = \frac{1}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

поэтому

$$R = \frac{2R_{12,12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

Задача 16.7. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивиты является симметрическим, $Ric(X, Y) = Ric(Y, X)$.

Решение.

$$Ric(X, Y) = Ric(Y, X) \Leftrightarrow R_{ij} = R_{ji} \Leftrightarrow R_{ik,j}^k = R_{jk,i}^k$$

Воспользуемся следующим свойством тензора Римана:

$$R_{ik,j}^k + R_{ji,k}^k + R_{kj,i}^k = 0$$

Но $R_{ji,k}^k = 0$ и $R_{kj,i}^k = -R_{jk,i}^k$ (в силу кососимметричности соответствующих пар индексов), поэтому

$$R_{ik,j}^k = R_{jk,i}^k$$

Задача 16.8. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $Ric(X, Y)$ – тензор Риччи, а K – гауссова кривизна M . Доказать, что в данном случае $Ric(X, Y) = K \langle X, Y \rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = K g_{ij}$. Доказать, что скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Решение.

Вычислим гауссову кривизну в произвольной точке A поверхности M . Выберем оси координат таким образом, чтобы точка A была началом координат: $A = (0, 0, 0)$, а ось z была сонаправлена с вектором нормали $\vec{m}$:

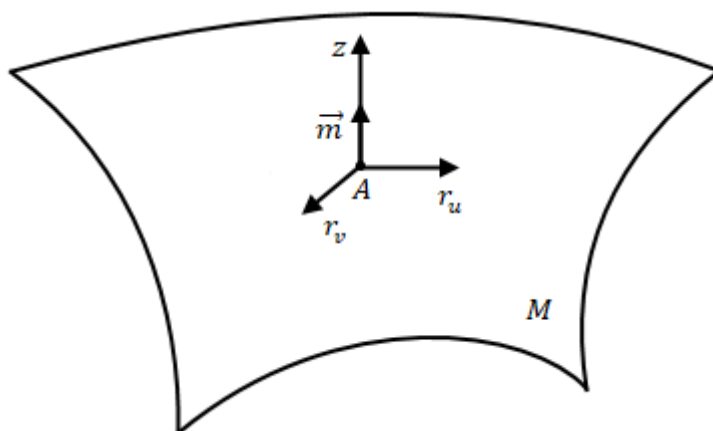


Рис. 16.2. Выбор осей координат

Параметризация поверхности:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

$$r = (u, v, f(u, v))$$

Найдем первую квадратичную форму I:

$$r_u = (1, 0, f_u)$$

$$r_v = (0, 1, f_v)$$

$$g_{11} = 1 + f_u^2$$

$$g_{12} = g_{21} = f_u f_v$$

$$g_{22} = 1 + f_v^2$$

Получаем

$$I = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}$$

Найдем вторую квадратичную форму II :

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$$

В качестве вектора нормали к поверхности выберем

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} (-f_u, -f_v, 1),$$

$$r_{uu} = (0, 0, f_{uu})$$

$$r_{uv} = (0, 0, f_{uv})$$

$$r_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

Тогда

$$II = \frac{1}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$$

В точке A :

$$I(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II(A) = \begin{pmatrix} f_{uu}(A) & f_{uv}(A) \\ f_{uv}(A) & f_{vv}(A) \end{pmatrix}$$

Тогда гауссова кривизна в точке A равна:

$$K(A) = \frac{\det II(A)}{\det I(A)} = \det II(A) = f_{uu}(A)f_{vv}(A) - f_{uv}^2(A)$$

Таким образом,

$$Kg_{ij}(A) = (f_{uu}(A)f_{vv}(A) - f_{uv}^2(A))E$$

Теперь вычислим значение тензора Риччи в точке A . Воспользуемся выражением для компонент $R_{ij,k}^l$ тензора Римана через символы Кристоффеля Γ_{ij}^k (см. задачу 16.4):

$$R_{ik,j}^l = \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ij}^s \Gamma_{ks}^l$$

тогда

$$R_{ij} = R_{ik,j}^k = \frac{\partial \Gamma_{kj}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{is}^k - \Gamma_{ij}^s \Gamma_{ks}^k$$

далее находим $R_{ij}(A)$ и убеждаемся, что $R_{ij}(A) = Kg_{ij}(A)$ – вычисления оставляются читателю. В силу произвольности точки A получаем, что $R_{ij} = Kg_{ij}$.

Докажем, что скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$:

$$R = g^{ij} R_{ij} = Kg_{ij} g^{ji} = 2K$$

(воспользовались тем, что $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, поэтому $g_{ij} g^{ji} = \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 = 1 + 1 = 2$).

Задача 16.9. Доказать, что для n -мерной сферы $S_r^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r с индуцированной метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Комментарии к решению: связность Леви-Чивиты $\nabla_X Y$ на поверхности в $\mathbb{R}^n$ — это проектор от производной Y вдоль X :

$$\nabla_X Y = P(\partial_X Y)$$

Выберем произвольную точку $A \in S_r^n$. Вектор нормали к сфере в этой точке равен

$$\vec{m} = \frac{\vec{A}}{r}$$

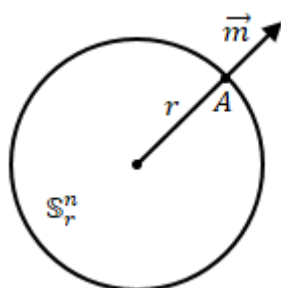


Рис. 16.3. К задаче 16.9

Поэтому для произвольного вектора v выполнено:

$$P_A(v) = v - \left\langle v, \frac{A}{r} \right\rangle \frac{A}{r} = v - \frac{1}{r^2} \langle v, A \rangle A$$

Тогда

$$\nabla_X Y(A) = P_A(\partial_X Y) = \partial_X Y(A) - \frac{1}{r^2} \langle \partial_X Y, A \rangle A$$

Теперь поймем, как вычислять $\partial_X \vec{m}$ — производную вдоль X от нормального вектора $\vec{m}$ — эта задача сводится к вычислению на одномерной сфере, которая натянута на X и $\vec{m}$:

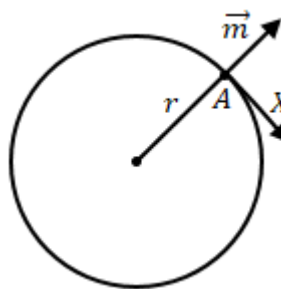


Рис. 16.4. К задаче 16.9

Воспользуемся формулой Френе:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{v}$$

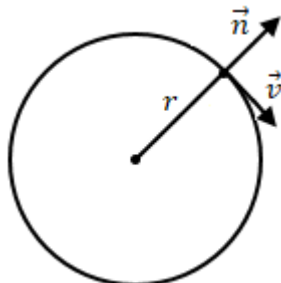


Рис. 16.5. К задаче 16.9

Получаем

$$\partial_v n = \frac{1}{r} v,$$

поэтому

$$\partial_X \vec{m} = |X| \partial_{\frac{X}{|X|}} \vec{m} = \frac{|X|}{r} \frac{X}{|X|} = \frac{X}{r}$$

Теперь мы можем вычислить

$$\nabla_X Y(A) = \partial_X Y(A) - \frac{1}{r^2} \langle \partial_X Y, A \rangle A$$

Далее нужно воспользоваться определением тензора Римана:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Задача 16.10. Доказать, что для двумерной поверхности M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой верна формула

$$\langle R(X, Y)Z, V \rangle = \Pi(Y, Z)\Pi(X, V) - \Pi(X, Z)\Pi(Y, V),$$

где Π – вторая квадратичная форма.

Комментарии к решению: связность Леви-Чивиты $\nabla_X Y$ на поверхности в $\mathbb{R}^n$ – это проектор от производной Y вдоль X :

$$\nabla_X Y = P(\partial_X Y)$$

Используя это, далее нужно преобразовать левую часть, воспользовавшись определением тензора Римана:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

При этом нужно не забывать, что, так как на $\mathbb{E}^3$ метрика евклидова, то для $\partial_X Y$ тензор кривизны обращается в ноль:

$$\partial_X \partial_Y Z - \partial_Y \partial_X Z - \partial_{[X,Y]} Z = 0$$

Семинар 17. Когомологии де Рама.

Вспомним некоторые факты, излагавшиеся на лекциях, которые помогут нам в решении задач.

k -ая группа когомологии:

$$H^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} / \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega = d\theta\}$$

– это факторгруппа всех замкнутых форм в $\Omega^k(M)$ по подгруппе точных форм.

На лекциях мы успели найти группы когомологий для некоторых многообразий:

$$H^0(M) = \mathbb{R}$$

$$H^k(M) = 0, \text{ если } k > \dim M$$

$$H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \end{cases}$$

$$H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

$$H^k(M \times \mathbb{R}) = H^k(M) \text{ – лемма Пуанкаре}$$

Пусть f – отображение из многообразия M в многообразие N :

$$f: M \rightarrow N,$$

тогда существует отображение обратного образа на дифференциальных формах:

$$f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M).$$

На лекциях мы убедились в том, что оно индуцирует отображение обратного образа на когомологиях:

$$f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M).$$

Далее, если f_0 и f_1 – отображения из M в N и они гомотопны: $f_0 \sim f_1$, то

$$f_0^* = f_1^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M).$$

Из этого мы вывели следующий важный факт: M и N гомотопически эквивалентны – $M \sim N$, если существуют отображения $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow M$, такие, что:

$$g \circ f \sim id_M,$$

$$f \circ g \sim id_N.$$

Также было доказано, что если $M \sim N$, то $H^k(M) = H^k(N)$ – гомотопическая эквивалентность многообразий влечет за собой равенство групп когомологий.

На лекциях также обсуждалась длинная точная последовательность Майера-Вьеториса:

(последовательность $\xrightarrow{f} A \xrightarrow{g}$ точная $\Leftrightarrow Im f = Ker g$).

Пусть $M = U \cup V$. Тогда следующая последовательность точна:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(M) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(U) \oplus H^n(V) \rightarrow H^n(U \cap V) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Вспомним, как определяются отображения в длинной точной последовательности Майера-Вьеториса:

$$\begin{aligned} H^i(M) \rightarrow H^i(U) \oplus H^i(V) \\ [\omega] \rightarrow ([\omega|_U], [\omega|_V]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^i(U) \oplus H^i(V) \rightarrow H^i(U \cap V) \\ ([\sigma], [\tau]) \rightarrow [\sigma|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^i(U \cap V) \rightarrow H^{i+1}(M) \\ [\sigma] \rightarrow [\omega] \end{aligned}$$

где ω определяется следующим образом: пусть ρ_U и ρ_V – разбиения единицы, подчиняющиеся покрытиям U и V соответственно, тогда

$$\omega = \begin{cases} \rho_U \sigma \text{ на } U \\ -\rho_V \sigma \text{ на } V \end{cases}$$

Задача 17.1. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение). Докажите, что

$$H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2).$$

Решение.

Так как $M = M_1 \sqcup M_2$, то $\Omega^k(M) = \Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2)$ и $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Тогда $d\omega = (d\omega_1, d\omega_2)$ и (следует из определения $H^p(M)$):

$$H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2).$$

Задача 17.2. Найдите когомологии плоскости без одной точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Решение.

Докажем гомотопическую эквивалентность $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и $\mathbb{S}^1$: построим отображения $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{S}^1$, такие, что:

$$\begin{aligned} g \circ f \sim id_{\mathbb{S}^1} \\ f \circ g \sim id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}} \end{aligned}$$

Очевидно, $f = i$ – вложение окружности $\mathbb{S}^1$ в плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Построим g :

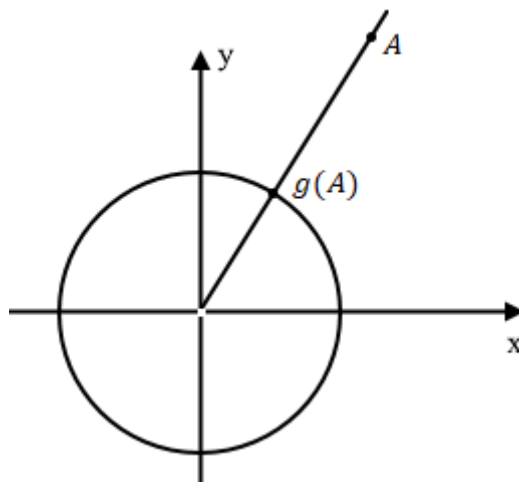


Рис. 17.1. Отображение g

Пусть $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Тогда $g(A) = \frac{A}{|A|}$ (считаем $\mathbb{S}^1$ единичной окружностью).

Тогда $g \circ f \sim id_{\mathbb{S}^1}$ – тождественное отображение окружности, $f \circ g(A) = \frac{A}{|A|}$ – точка на окружности. Построим гомотопию $f \circ g \sim id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$, т.е. гладкое отображение $H(A, t)$ такое, что

$$H(A, 0) = A$$

$$H(A, 1) = \frac{A}{|A|}$$

- нетрудно видеть, что в качестве такого отображения подойдет

$$H(A, t) = \frac{A}{t|A| + 1 - t}$$

Итак, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и $\mathbb{S}^1$ гомотопны. Тогда

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) = H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

Задача 17.3. Найдите кохомологии цилиндра $Z \subset \mathbb{R}^3$.

Решение.

Как и в прошлой задаче, докажем гомотопическую эквивалентность Z и $\mathbb{S}^1$: построим отображения $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow Z$ и $g: Z \rightarrow \mathbb{S}^1$, такие, что:

$$g \circ f \sim id_{\mathbb{S}^1}$$

$$f \circ g \sim id_Z$$

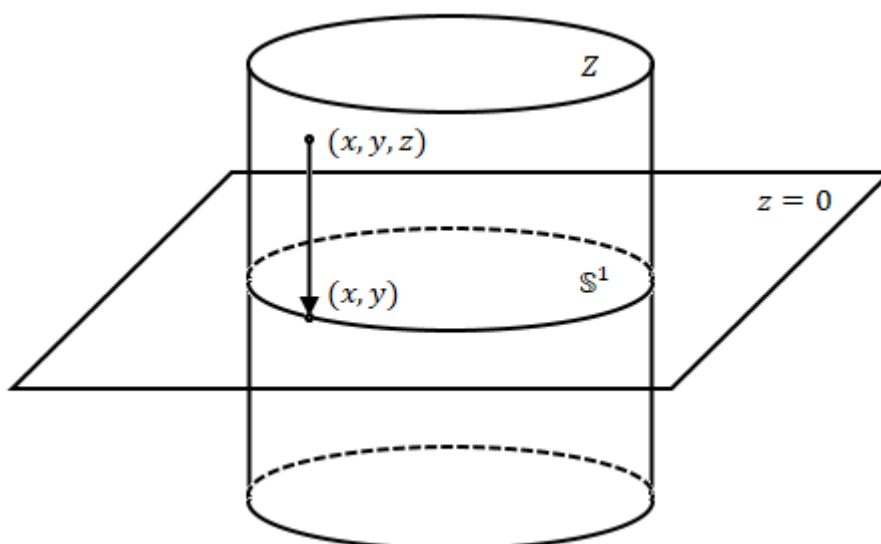


Рис. 17.2. Отображение g

Выберем

$$f(x, y) = (x, y, 0)$$

$$g(x, y, z) = (x, y)$$

Тогда $g \circ f \sim id_{S^1}$ – тождественное отображение окружности,

$$f \circ g(x, y, z) = f(x, y) = (x, y, 0).$$

Построим гомотопию $f \circ g \sim id_Z$, т.е. гладкое отображение $H(x, y, z, t)$ такое, что

$$H(x, y, z, 0) = (x, y, 0)$$

$$H(x, y, z, 1) = (x, y, z)$$

- нетрудно видеть, что в качестве такого отображения подойдет

$$H(x, y, z, t) = (x, y, zt).$$

Итак, Z и S^1 гомотопны. Тогда

$$H^k(Z) = H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

Также решить задачу можно воспользовавшись леммой Пуанкаре:

$$H^k(Z) = H^k(S^1 \times \mathbb{R}) = H^k(S^1)$$

Задача 17.4. Найдите когомологии S^2 .

Решение.

Так как S^2 – связное многообразие, то $H^0(S^2) = \mathbb{R}$, также $H^k(S^2) = 0$ при $k > 2$ (так как $\dim S^2 = 2$). Осталось найти $H^1(S^2)$ и $H^2(S^2)$.

Покроем сферу двумя открытыми множествами U и V :

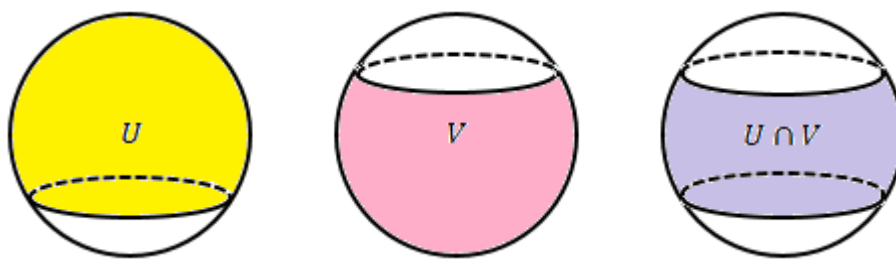


Рис. 17.3. Покрытие сферы

$U \sim pt$ - U гомотопически эквивалентен точке (по меридиану стягиваем все в северный полюс), поэтому (так как у точки одна компонента связности и при $k > 0$ на ней не существует дифференциальных форм):

$$H^k(U) = H^k(pt) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \end{cases}$$

аналогично

$$H^k(V) = H^k(pt) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \end{cases}$$

$U \cap V \sim S^1$ - $U \cap V$ гомотопически эквивалентен окружности (по меридиану стягиваем все в экватор), поэтому

$$H^k(U \cap V) = H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

Получаем следующую длинную точную последовательность Майера-Вьеториса:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(S^2) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(S^2) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(S^2) \rightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \rightarrow H^2(U \cap V) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для данного покрытия открытыми множествами U и V :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \\ \rightarrow H^1(S^2) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \\ \rightarrow H^2(S^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

В нашем случае последовательность распадается на две части – воспользуемся этим. Первая часть:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^2(S^2) \rightarrow 0$$

- отсюда следует, что $H^2(S^2) = \mathbb{R}$ - пространства $H^2(S^2)$ и $\mathbb{R}$ изоморфны (обсуждалось на лекциях).

Рассмотрим вторую часть последовательности Майера-Вьеториса:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$$

Воспользуемся следующим фактом (лемма об альтернировании размерности): если

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \rightarrow 0$$

- точная последовательность, то

$$\sum_i (-1)^i \dim A_i = 0$$

(В самом деле, рассмотрим $f_i: A_i \rightarrow A_{i+1}$. Как известно, $\text{Im } f_i \cong A_i / \text{Ker } f_i$ – образ линейного отображения изоморфен исходному пространству по ядру. Но, так как последовательность точная, то $\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i-1}$, тогда $\text{Im } f_i \cong A_i / \text{Im } f_{i-1}$. Отсюда следует, что $\dim A_i = \dim \text{Im } f_i + \dim \text{Im } f_{i-1}$. Подставив полученное выражение для $\dim A_i$ в исходную сумму, получим требуемое).

В нашем случае $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Получаем

$$1 - 2 + 1 - \dim H^1(\mathbb{S}^2) = 0$$

откуда

$$\dim H^1(\mathbb{S}^2) = 0 \Rightarrow H^1(\mathbb{S}^2) = 0$$

Таким образом,

$$H^k(\mathbb{S}^2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 2 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 2 \end{cases}$$

Задача 17.5. Найдите когомологии двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

Решение.

Будем действовать как в предыдущей задаче.

Так как $\mathbb{T}^2$ – связное многообразие, то $H^0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$, также $H^k(\mathbb{T}^2) = 0$ при $k > 2$ (так как $\dim \mathbb{T}^2 = 2$). Осталось найти $H^1(\mathbb{T}^2)$ и $H^2(\mathbb{T}^2)$.

Покроем тор двумя открытыми множествами U и V :



Рис. 17.4. Покрывение тора

$U \sim \mathbb{S}^1$ - U гомотопически эквивалентен окружности (так как диффеоморфен цилиндру), поэтому (см. задачу 17.3):

$$H^k(U) = H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

аналогично

$$H^k(V) = H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

$U \cap V \sim \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ - $U \cap V$ имеет две компоненты связности, каждая из которых гомотопически эквивалентна окружности, поэтому (см. задачу 17.1):

$$H^k(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

Получаем следующую длинную точную последовательность Майера-Вьеториса:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{T}^2) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(\mathbb{T}^2) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \rightarrow H^2(U \cap V) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для данного покрытия открытыми множествами U и V :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \\ \rightarrow H^1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \\ \rightarrow H^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой об альтернировании размерности (см. предыдущую задачу):

$$1 - 2 + 2 - \dim H^1(\mathbb{T}^2) + 2 - 2 + \dim H^2(\mathbb{T}^2) = 0$$

откуда

$$\dim H^2(\mathbb{T}^2) = \dim H^1(\mathbb{T}^2) - 1$$

Теперь посмотрим на тор как на произведение двух окружностей: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, а на окружность $\mathbb{S}^1$ как на группу $SO(2)$.

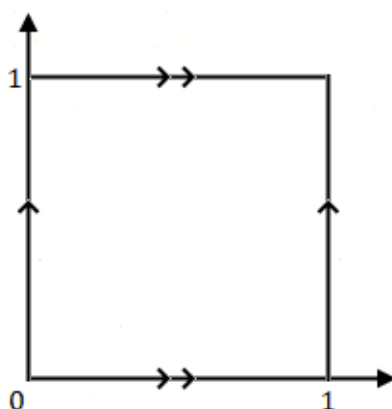


Рис. 17.5. Тор

Действие $SO(2) \times SO(2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$ на $\mathbb{T}^2$:

$$\alpha((\beta, \gamma), (x, y)) = (x + \beta, y + \gamma) \bmod 1$$

Заметим, что отображение тора в себя

$$(\beta, \gamma): \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

гомотопн отображению

$$(0, 0): \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

(рассмотрим отображение $(t\beta, t\gamma)$ – при $t = 0$ получим $(0, 0)$, при $t = 1$ получим (β, γ)). Отсюда следует, что

$$[(\beta, \gamma)^* \omega] = [(0, 0)^* \omega] = [\omega]$$

- обратный образ формы ω имеет тот же самый кохомологический класс, что и $[(0, 0)^* \omega]$, то есть, $[\omega]$.

Теперь рассмотрим

$$\int_{(\beta, \gamma) \in \mathbb{T}^2} (\beta, \gamma)^* \omega \, d\beta \, d\gamma$$

По определению, определенный интеграл – это предел соответствующих интегральных сумм. Но все слагаемые в интегральной сумме будут иметь тот же самый кохомологический класс, что и $[\omega]$, поэтому

$$\left[\int_{(\beta, \gamma) \in \mathbb{T}^2} (\beta, \gamma)^* \omega \, d\beta \, d\gamma \right] = [\omega]$$

Но форма $\int_{(\beta, \gamma) \in \mathbb{T}^2} (\beta, \gamma)^* \omega \, d\beta \, d\gamma$ – это константа. В самом деле, подставим форму

$$\omega = f(x, y) dx \, dy$$

в интеграл, получим

$$\left[\int_{(\beta, \gamma) \in \mathbb{T}^2} f(x + \beta, y + \gamma) \, d\beta \, d\gamma \right] dx \, dy$$

сделаем замену координат: $\beta' = x + \beta$
 $\gamma' = y + \gamma$, получим

$$\left[\int_{(\beta', \gamma') \in \mathbb{T}^2} f(\beta', \gamma') \, d\beta' \, d\gamma' \right] dx \, dy = \text{const} \, dx \, dy$$

Это означает, что любая 2-форма $\omega \in \Omega^2(\mathbb{T}^2)$ кохомологична форме $[\omega] = [\text{const} \, dx \, dy]$

Тогда $H^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$, откуда $H^1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}^2$. Окончательно получаем:

$$H^k(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 2 \\ \mathbb{R}^2, & \text{если } k = 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0, 1 \text{ или } 2 \end{cases}$$

Задача 17.6. Найдите кохомологии $\mathbb{RP}^2$.

Решение.

Заметим, что $\mathbb{RP}^n$ гомеоморфно B^n по отображению склейки (отождествляем антиподальные точки на границе). Например, $\mathbb{RP}^1$ – это одномерный диск, у которого склеены антиподальные точки (окружность), а $\mathbb{RP}^2$ – это двумерный диск, у которого склеены антиподальные точки.

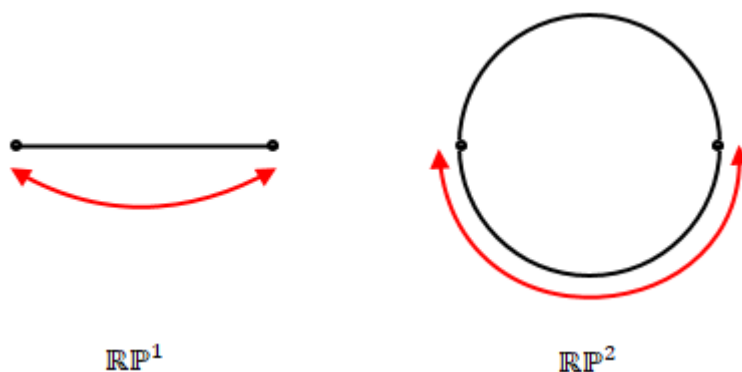


Рис. 17.6. $\mathbb{RP}^1$ и $\mathbb{RP}^2$

Разберемся, почему это так, на примере $\mathbb{RP}^2$:

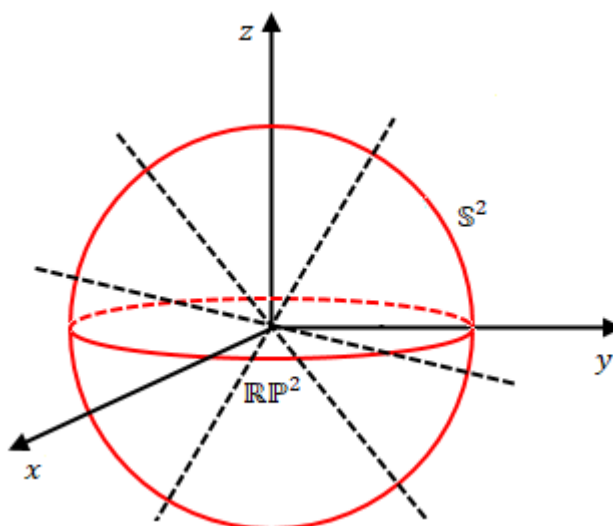


Рис. 17.7. $\mathbb{RP}^2$

$\mathbb{RP}^2$ состоит из прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат. Каждая такая прямая пересекает сферу S^2 в двух противоположных точках, поэтому $\mathbb{RP}^2$ – это то же самое, что и сфера, у которой отождествили диаметрально противоположные точки.

Рассмотрим полусферу. Каждой прямой, проходящей через начало координат, будет соответствовать одна точка на полусфере, кроме прямых, лежащих в плоскости $z = 0$ – им будет соответствовать две точки на полусфере.



Рис. 17.8. Проекция полусферы на плоскость $z = 0$

Спроецируем полусферу на плоскость $z = 0$ – получим двумерный диск, у которого склеены антиподальные точки.

Покроем диск двумя открытыми множествами U и V :

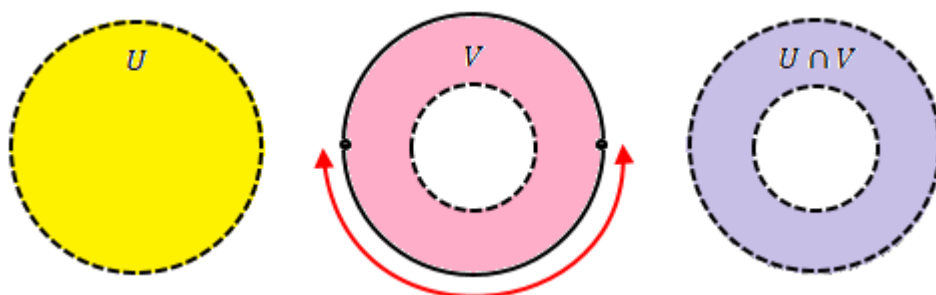


Рис. 17.9. Покрытие $\mathbb{RP}^2$

$U \sim pt$ – открытый диск гомотопически эквивалентен точке, поэтому

$$H^k(U) = H^k(pt) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \end{cases}$$

$V \sim S^1$ – V гомотопически эквивалентно окружности, у которой склеены противоположные точки – это $\mathbb{RP}^1$, которое диффеоморфно S^1 , поэтому

$$H^k(V) = H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

$U \cap V \sim S^1$ – кольцо диффеоморфно цилиндру, который гомотопически эквивалентен S^1 (см. задачу 17.3), поэтому

$$H^k(U \cap V) = H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

Получаем следующую длинную точную последовательность Майера-Вьеториса:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow H^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \rightarrow H^2(U \cap V) \rightarrow 0$$

для данного покрытия открытыми множествами U и V :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой об альтернировании размерности (см. задачу 17.4):

$$1 - 2 + 1 - \dim H^1(\mathbb{RP}^2) + 1 - 1 + \dim H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$$

откуда

$$\dim H^2(\mathbb{RP}^2) = \dim H^1(\mathbb{RP}^2)$$

Теперь поподробнее рассмотрим цепочку отображений

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\alpha} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\alpha'} H^1(U) \oplus H^1(V)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= (\omega, \omega) \\ \beta(\sigma, \tau) &= \sigma - \tau, \quad \text{Im } \beta = \mathbb{R} \end{aligned}$$

В силу точности последовательности Майера-Вьеториса,

$$\text{Ker } \delta = \text{Im } \beta = \mathbb{R}$$

Тогда

$$\text{Im } \beta = \mathbb{R} / \text{Ker } \delta = \mathbb{R} / \mathbb{R} = 0$$

и

$$\text{Ker } \alpha' = \text{Im } \delta = 0$$

Таким образом, α' инъективно, поэтому $\dim H^1(\mathbb{RP}^2) = 0$ или $\dim H^1(\mathbb{RP}^2) = 1$. Также можно записать

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow 0$$

Теперь рассмотрим, как устроено двулистное накрытие $\mathbb{S}^2$ над $\mathbb{RP}^2$: точка сферы переходит в соответствующую прямую. Поэтому существует отображение

$$p^*: H^k(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H^k(\mathbb{S}^2)$$

Его образ $p^*\omega$ — это формы, инвариантные относительно антиподального отображения. Пусть $a: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ — антиподальное отображение. Рассмотрим $\omega \in H^1(\mathbb{RP}^2)$. Тогда $[p^*\omega] \in H^1(\mathbb{S}^2)$. Но $H^1(\mathbb{S}^2) = 0$ (см. задачу 17.4), поэтому $p^*\omega = d\theta$.

Усредним θ по действию антиподального отображения. $\frac{\theta + a^*\theta}{2}$ инвариантно относительно антиподального отображения. Тогда $\frac{\theta + a^*\theta}{2} = p^*\sigma$. Но тогда $\omega = d\sigma$, поэтому любая 1-форма, замкнутая на $\mathbb{RP}^2$, будет точной, поэтому $H^1(\mathbb{RP}^2) = 0$, тогда и $H^0(\mathbb{RP}^2) = 0$. Окончательно получаем

$$H^k(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \end{cases}$$



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У