МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Содержание

Лекция 1

Вступительное слово к курсу

Курс называется «Дифференциальная геометрия и топология». На самом деле топологии в курсе почти не будет, а первая часть курса будет посвящена анализу на многообразиях.

Ранее в программе обучения были курсы аналитической геометрии, линейной алгебры и топологии. Напомним, в топологии обобщается понятие непрерывной функции с евклидова пространства на более сложные пространства.

Итак, первая часть курса посвящена анализу на многообразиях. Мы будем обсуждать, как обобщается понятие гладкой функции на абстрактные многообразия.

У нас есть три контекста, в которых исторически развивалась дифференциальная геометрия. В первой части курса мы будем рассматривать все три.

1. Области в $\mathbb{R}^n$;
2. Регулярные гладкие поверхности в $\mathbb{R}^n$;
3. Гладкие многообразия.

Векторные аффинные пространства

Напомним, векторное пространство V является группой по сложению, $0 \in V$.

Вспомним, что такое векторные аффинные пространства. Это пара (X, V), где X – множество точек, а V – векторное пространство.

В аффинном пространстве определена операция сложения вектора и точки

$$+: \ X \times V \ \to \ V.$$

Кроме того, можно определить операцию

$$-: \ X \times X \ \to \ V,$$

$$B - A = \vec{AB}.$$

В аффинном пространстве нет выделенного элемента (как $0 \in V$).

В пространстве V, как правило, вводится некоторый базис

$$e_1, \ldots, e_n.$$

Произвольный вектор $v \in V$ раскладывается как

$$v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n.$$

В таком случае мы говорим о взаимно однозначном соответствии

$$v \ \leftrightarrow \ \left(v^1, \ldots, v^n\right).$$

В аффинном пространстве (X,V) вводится репер – базисная точка O (начало координат) + базис. Координаты точки $A \in X$ определяются как координаты вектора $\vec{OA}$.

Криволинейные системы координат

В предыдущих курсах рассматривались разные системы координат: декартовы, полярные, цилиндрические и т.д. Поговорим еще раз о *криволинейных системах координат.*

Вспомним, как в аналитической геометрии вводились полярные координаты. Выбирается точка O и луч. Для произвольной M вычисляются 2 значения: расстояние r от O до M и угол φ между r и лучом по направлению[1] против часовой стрелки (рис. (1.1)).

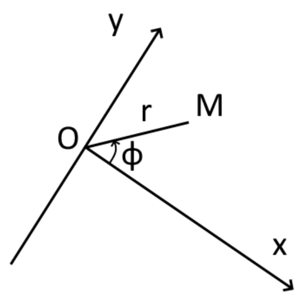


Рис. 1.1: Полярная система координат

Декартова и полярная система координат связываются очень просто:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Отметим проблемы полярной системы координат. В точке O не определен угол, а в остальных точках φ определен с точностью до 2π. Поэтому соответствие

$$(r,\varphi) \;\leftrightarrow\; \text{точки плоскости}$$

не взаимно однозначно.

Итак, криволинейные координаты[2] определены в области в $\mathbb{R}^n$ без луча.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\mathbb{E}^2$ – евклидова[3] плоскость. Выберем $O \in \mathbb{E}^2$ и рассмотрим

$$f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(P) = d(O,P) = \left|\vec{OP}\right|.$$

[1] То есть плокость ориентирована.
[2] Исторически это все координаты, кроме декартовых.
[3] То есть на ней введено расстояние.

Если ввести на $\mathbb{E}^2$ декартову систему координат x, y, то

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В полярных координатах r,φ

$$f(r,\varphi) = r. \tag{1.1}$$

Выражая одни координаты через другие, запишем

$$f(r, \varphi) = f\left(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\right), \tag{1.2}$$

откуда и получаем

$$r = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}.$$

Функции в геометрии

Обсудим, как в геометрии думают о функциях.

В геометрии функция – это всегда функция от точки:

$$\mathbb{E}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Задание координат означает, что паре чисел сопоставляется точка. Задать координаты можно различными способами. Например,

$$\underbrace{\mathbb{R}^2}_{x,y} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{E}^2$$

или

$$\underbrace{\mathbb{R}^2}_{r,\varphi} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{E}^2.$$

Здесь получаем, что

$$f \circ \Phi(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$f \circ \Psi(r,\varphi) = r.$$

Конечно, запись с $\circ$, как выше, опускается. Вместо $f \circ \Phi(x,y)$, например, пишут просто $f(x,y)$ (это называется «f в координатах x,y»).

Отметим, что в геометрии функция $f(x,y)$ определяется не только в зависимости от f, но и от координат.

Распишем формулу ((1.2)):

$$f \circ \Psi(x,y) = f \circ \Psi \circ \Psi^{-1} \circ \Phi(x,y).$$

Под гладкостью f будем подразумевать, что $f \in C^\infty$.

Регулярные гладкие k-мерные поверхности

Перейдем ко второму контексту, в котором есть анализ на многообразиях – регулярным гладким поверхностям в $\mathbb{R}^n$.

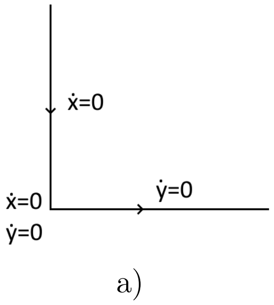
Рассмотрим плоскую кривую. Она может быть задана двумя способами:

1. Параметрически:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$
Отметим, что этот способ наиболее предпочитаем в дифференциальной геометрии.

2. Неявно:
$$F(x,y,z) = 0.$$

Сосредоточимся на параметрическом способе задания кривой r:
$$r : \ (a,b) \ \to \ \mathbb{R}^2,$$
$$r(t) = (x(t), y(t))\,.$$

Здесь $r \in C^\infty$.



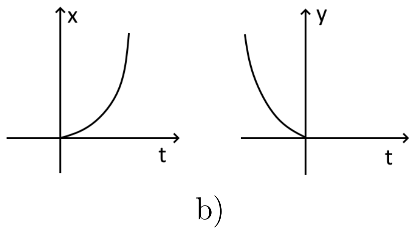


Рис. 1.2: Кривая $\gamma(t)$ и графики $x(t)$, $y(t)$

Пример 1.1. Рассмотрим следующий пример (рис. (1.2), a). Эта кривая – гладкая параметризованная кривая. Особенность ее заключается в том, что в вертикальной части $\dot{x} = 0$, а в горизонтальной части $\dot{y} = 0$. Таким образом, кривая содержит точку
$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Покоординатные графики здесь имеют вид (рис. (1.2), b). Обе $x(t)$, $y(t)$ C^∞-гладкие.

Чтобы избежать таких ситуаций, наложим на рассматриваемые кривые условие *регулярности.* Это значит, что $\forall\ t \in (a,b)$
$$\dot{r}(t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\right) \neq 0.$$

Обсудим, почему условие регулярности важно. Выберем некоторую точку $t_0 \in$ $\in (a,b)$,

$$x = x(t_0), \;\; y = y(t_0).$$

Тогда обе производные в точке t_0 не могут обращаться в 0. Пусть $\dot{x}(t_0) \neq 0$.

Из теоремы об обратной функции следует, что $\exists$ окрестность t_0 такая, что $t = t(x)$ – гладкая. Получаем, что

$$y\left(t(x)\right) = y(x)$$

– гладкая функция. Поэтому ситуация, как в примере выше, возникнуть в окрестности t_0 не может.

Дадим по аналогии определении поверхности. Пусть есть пространство $\mathbb{R}^k$ с координатами $u^1, \ldots, u^k$ и пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$. Пусть задано отображение

$$r : \underbrace{D}_{\subset \mathbb{R}^k} \;\to\; \mathbb{R}^n$$

(рис. (1.3)).

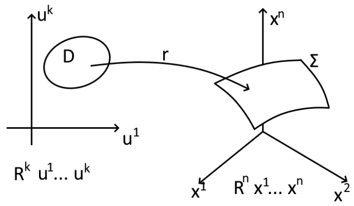


Рис. 1.3: Отображение r из $D \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$

Определение 1.1. *Регулярная гладкая k-мерная параметризованная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $k < n$,* – это отображение

$$r : \underbrace{D}_{\subset \mathbb{R}^k} \;\to\; \mathbb{R}^n$$

такое, что

1. $r \in C^\infty(D)$ (гладкость);
2. $\operatorname{rk} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)_{n \times k} = k$ (регулярность).

Утверждение 1.1. У любой точки есть такая окрестность, что в ней $n - k$ переменных x^i можно выразить через k других переменных (теорема об обратной функции).

Вернемся к случаю неявного задания поверхности. Рассмотрим плоскую кривую, задаваемую уравнением

$$F(x,y) = 0.$$

Гладкость кривой в данном случае = гладкости F.

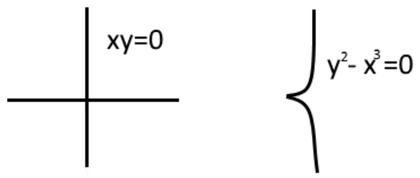


Рис. 1.4: Функции с особыми точками

Заметим, например, что гладкая функция

$$xy = 0$$

задает «крест» (рис. (**??**)) с особой точкой. Другим примером особой точки будет

$$y^2 - x^3 = 0$$

(рис. (**??**)).

Итак, кроме гладкости, необходимо условие регулярности.

Теорема о неявной функции

Обсудим, когда можно выразить $x(y)$ или $y(x)$ для уравнения

$$F(x,y) = 0.$$

Например, в уравнении

$$ax + by + c = 0$$

можно выразить $y(x)$, если $b \neq 0$.

Запишем теорему о неявной функции для случая одного уравнения от двух переменных. Это самый простой случай.

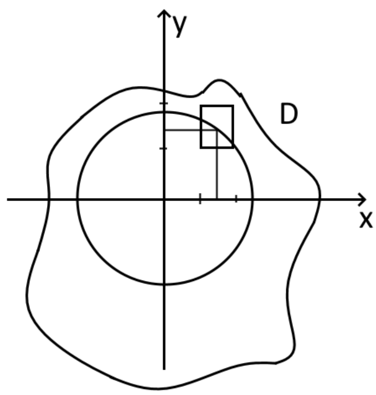


Рис. 1.5: Иллюстрация к теореме о неявной функции

Теорема 1.1. *(О неявной функции) Пусть $F \in C^k(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, и пусть*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Тогда $\exists$ окрестность U_x точки x_0, $\exists$ окрестность U_y точки y_0 и функция $y(x)$, определенная на U_x (рис. (1.5)) такие, что

1. *$U_x \times U_y \subset D$;*
2. *В $U_x \times U_y$*
$$F(x,y) = 0 \iff y = y(x);$$
3. *$y(x) \in C^k$;*
4. *Справедливо*
$$y'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y(x)\right)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\left(x, y(x)\right). \tag{1.3}$$

Формула ((1.3)) следует из

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x, y(x)\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y(x)\right) y'(x) = 0,$$

так как

$$F\left(x, y(x)\right) = 0.$$

Плоская гладкая неявно заданная кривая – это множество точек, удовлетворяющих $F(x,y) = 0$, где

1. $F \in C^\infty(D)$ (гладкость);
2. $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 1$ при $F(x,y) = 0$ (регулярность).

Перейдем к общему случаю. Поверхность может быть задана несколькими уравнениями.

Пусть дано пространство $\mathbb{R}^n$,

$$F: \ \mathbb{R}^n \ \to \ \mathbb{R}^{n-k}.$$

Уравнение

$$F\left(x^1, \ldots, x^n\right) = 0$$

эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} F^1\left(x^1, \ldots, x^n\right) = 0 \\ \ldots \\ F^{n-k}\left(x^1, \ldots, x^n\right) = 0 \end{cases}$$

Теорема 1.2. *(О неявной функции, общий случай) Пусть $F \in C^k(D, \mathbb{R}^{n-k})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть*

$$rk\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)\right) = n - k,$$

$$F\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right) = 0.$$

Тогда можно выбрать k переменных[4] $x^i, \ldots, x^k$ таких, что

1. $rk\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)\right) = n - k$, *где* $i = 1, \ldots, n-k$, $j = k+1, \ldots, n$;
2. $\exists$ *окрестность* $U' \subset \mathbb{R}^k$ *точки*
$$\left(x_0^1, \ldots, x_0^k\right),$$
$\exists$ *окрестность* $U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ *точки*
$$\left(x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n\right).$$
3. $\exists$ *отображение*
$$\Phi : \underset{x^1,\ldots,x^k}{\mathbb{R}^k} \to \underset{x^{k+1},\ldots,x^n}{\mathbb{R}^{n-k}}$$
такое, что в $U' \times U''$
$$F\left(x^1, \ldots, x^n\right) = 0$$
эквивалентно тому, что
$$\left(x^{k+1}, \ldots, x^n\right) = \Phi\left(x^1, \ldots, x^k\right). \tag{1.4}$$

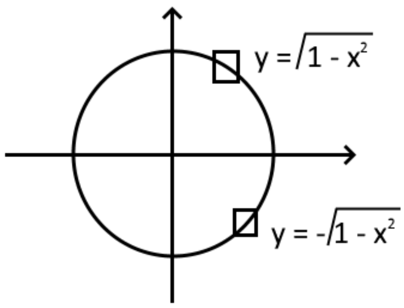


Рис. 1.6: Зависимость выражения для неявной функции от начальной точки

Замечание 1.1. Выражение ((1.4)) локально и зависит от выбора начальной точки. Простым примером может послужить уравнение окружности (рис. (1.6)).

[4]При необходимости изменив нумерацию переменных.

Регулярная гладкая k-мерная неявно заданная поверхность

Определение 1.2. *Регулярная гладкая k-мерная неявно заданная поверхность* – это множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$F\left(x^1,\ldots,x^n\right)=0,$$

где

1. $F\in C^\infty\left(D,\mathbb{R}^{n-k}\right)$, $D\subset\mathbb{R}^n$ (гладкость);
2. $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)=n-k$ в любой точке, где

$$F\left(x^1,\ldots,x^n\right)=0.$$

Неявно заданная поверхность устроена так. Разные ее куски мы можем рассматривать как параметрическую поверхность. Например, рассмотрим сферу

$$x^2+y^2+z^2-1=0.$$

В отмеченной области поверхность задается уравнением

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

По-другому, можем составить параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x=u^1\\ y=u^2\\ z=\sqrt{1-(u^1)^2+(u^2)^2}\end{cases}$$

Итак, неявно заданная поверхность локально может рассматриваться как параметризованная.

$u^1,\ldots,u^k$ (рис. (1.3)) называются *локальные координаты на поверхности.* $x^1,\ldots,x^n$ – глобальные кординаты в объемлющем пространстве.

Гладкие многообразия, с которыми будем работать далее, обладают двумя свойствами. Во-первых, они никуда не вложены (нет объемлющего пространства). Во-вторых, на гладких многообразиях можно говорить про гладкие функции.

Лекция 2

Гладкие функции

Итак, работаем с гладкими регулярными k-мерными поверхностями в n-мерном аффинном пространстве.

На n-мерном аффинной пространстве вводим декартову систему координат и отождествляем его с $\mathbb{R}^n$. Строим отображение r из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ (рис. (1.3)). На это отображение накладывали следующие ограничения:

1. $r \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R}^k$ (гладкость);
2. $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) = k$ (регулярность).

Обсудим, что такое гладкая функция. Пусть

$$F: \ \mathbb{R}^n \ \to \ \mathbb{R},$$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ограничение $F\Big|_\Sigma$ можно назвать гладким.

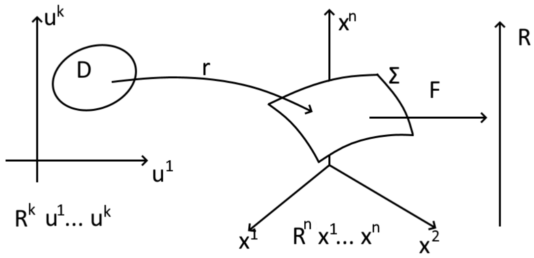


Рис. 2.1: Отображения r и F

Запишем в локальных координатах:

$$F\left(u^1, \ldots, u^k\right) = F \circ r\left(u^1, \ldots, u^k\right)$$

(рис. (2.1)). Далее, так как $F \in C^\infty$ и $r \in C^\infty$,

$$F \circ r \in C^\infty(D, \mathbb{R}).$$

Посмотрим, что будет в обратной ситуации. Пусть

$$G\left(u^1, \ldots, u^k\right)$$

– гладкая функция,

$$G: \ \underbrace{D}_{\mathbb{R}^k} \ \to \ \mathbb{R}.$$

Вспомним условие регулярности:

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) = k.$$

Здесь матрица имеет размер $n \times k$, $n > k$. Из условия регулярности следует, что $\exists$ невырожденный минор размера $k \times k$.

Без ограничения общности можно считать, что это

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right), \ \ i,j = 1, \ldots ,k.$$

Воспользуемся теоремой об обратной функции. Выразим гладко

$$\begin{gathered} u^1 = u^1\left(x^1, \ldots ,x^k\right) \\ \ldots \\ u^n = u^n\left(x^1, \ldots ,x^k\right) \end{gathered}$$

Тогда

$$G\left(u^1\left(x^1, \ldots ,x^k\right), \ldots ,u^n\left(x^1, \ldots ,x^k\right)\right)$$

– гладкая функция на некоторой окрестности Σ в $\mathbb{R}^n$.

Итак, приходим к следующему **выводу**: гладкость функции в локальных и глобальных координатах эквивалентна. Заметим, что условие регулярности здесь вносит существенный вклад.

Замена координат

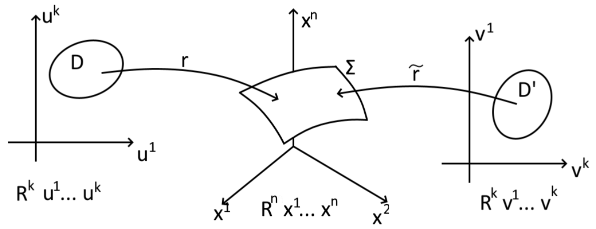


Рис. 2.2: Отображения r и $\widetilde{r}$

Обсудим замену локальных координат. Пусть, как и прежде, дано объемлющее пространство $\mathbb{R}^n$, но параметры (локальные координаты) выбраны двумя различными способами (рис. (2.2)).

Замена координат означает, что мы одни координаты выражаем через другие:

$$\begin{gathered} u^1 = u^1\left(v^1, \ldots ,v^k\right) \\ \ldots \\ u^k = u^k\left(v^1, \ldots ,v^k\right) \end{gathered}$$

Получаем, что

$$r^{-1} \circ \widetilde{r}\left(v^1, \ldots ,v^k\right) = \left(u^1, \ldots ,u^k\right).$$

Обсудим, гладкая ли такая замена координат. Воспользуемся, как и выше, соображениями регулярности. Запишем

$$u^1 = u^1\left(x^1\left(v^1, \ldots ,v^k\right), \ldots ,x^k\left(v^1, \ldots ,v^k\right)\right).$$

Здесь $u^i\left(x^1,\ldots,x^k\right)$ есть в сиу регулярности.

Лемма 2.1. *Если $u^1,\ldots,u^k$ и $v^1,\ldots,v^k$ – локальные координаты для регулярных гладких параметризаций одного и того же множества Σ, то их можно гладко выражать друг через друга:*

$$\begin{matrix} u^1 = u^1\left(v^1,\ldots,v^k\right) \\ \ldots \\ u^k = u^k\left(v^1,\ldots,v^k\right) \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} v^1 = v^1\left(u^1,\ldots,u^k\right) \\ \ldots \\ v^k = v^k\left(u^1,\ldots,u^k\right) \end{matrix}$$

Для гладких функций это значит следующее. Если $G\left(u^1,\ldots,u^k\right)$ – гладкая, то

$$G\left(u^1\left(v^1,\ldots,v^k\right),\ldots,u^k\left(v^1,\ldots,v^k\right)\right)$$

– также гладкая.

Утверждение 2.1. На регулярной гладкой поверхности можно гладкость функции проверять в любых локальных координатах.

Возникает вопрос: нужно ли нам объемлющее пространство, если мы все делаем в локальных координатах?

Гладкие многообразия

Пусть M – топологическое пространство, которое

1. Хаусдорфово;
2. Со второй аксиомой счетности (существует счетная база топологии).

Требование выполнения второй аксиомы четности необходимо, чтобы у нас была возможность интегрировать на M.

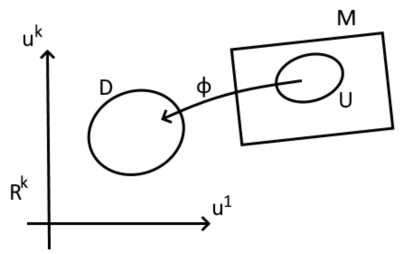


Рис. 2.3: Карта (U,φ)

Определение 2.1. Пара (U,φ), где U – открытое подмножество M, а φ – гомеоморфизм U в $D \subset \mathbb{R}^k$ (рис. (2.3)) называется *картой.*

φ называется *координатным отображением.*

У точки $P \in U$ тогда локальные координаты

$$u^1 \circ \varphi(P), \ldots, u^k \circ \varphi(P).$$

Мы обычно $\varphi(P)$ опускаем и пишем просто

$$u^1, \ldots, u^k.$$

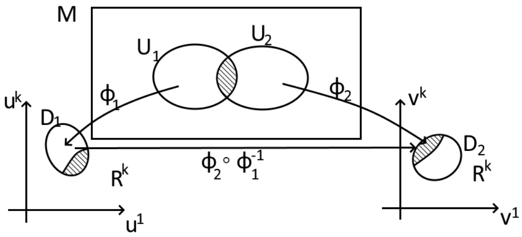


Рис. 2.4: Карты (U_1,φ_1) и (U_2,φ_2)

Обсудим замену координат. Рассмотрим случай, когда даны две карты (U_1,φ_1) и (U_2,φ_2), $U1 \cap U_2 \neq \emptyset$ (рис. (2.4)). Тогда существует отображение

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \ \mathbb{R}^k \ \to \ \mathbb{R}^k$$

– *замена локальных координат.*

Определение 2.2. Карты (U_1,φ_1) и (U_2,φ_2) *согласованы* (класса C^l), если $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ – диффеоморфизм (класса C^l) на $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$.

Определение 2.3. Коллекция $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ – *атлас* (класса C^l) на M, если $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ – карты, которые

1. Попарно согласованы (класса C^l);
2. $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$.

Определение 2.4. Атлас

$$A_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

эквивалентен атласу

$$A_2 = \{(V_\beta,\psi_\beta)\},$$

если их объединение – тоже атлас.

Определение 2.5. Множество эквивалетных атласов называется *гладкой структурой на M.*

Определение 2.6. Топологическое пространство M (хаусдорфово, со второй аксиомой четности) с гладкой структурой (класса C^l) называется *гладким многообразием* (класса C^l).

Отметим, что достаточно задать один атлас. Он уже определяет гладкую структуру.

Определение 2.7. *Максимальным атласом* называется объединение всех атласов, эквивалетных какому-то атласу.

Утверждение 2.2. Эквивалетность атласов – отношение эквивалетности.

Доказательство:

- Рефлексивность очевидна (атлас эквивалентен сам себе).
- Симметричность очевидна (если первый атлас эквивалентен второму, то второй эквивалетен первому).
- Проверим транзитивность. Пусть есть атласы A_1, A_2 и A_3. Пусть A_1 и A_2 эквивалентны, A_2 и A_3 эквивалентны.

  Возьмем $(U,\varphi) \in A_1$, $(V,\psi) \in A_3$. $\exists$ $(W,\chi) \in A_2$ такая, что $A \in W$, где A – точка из $U \cap V$.

  Далее,
  $$\psi \circ \varphi^{-1} = \left(\psi \circ \chi^{-1}\right) \circ \left(\chi \circ \varphi^{-1}\right)$$
  – гладкое в $\varphi\left(U \cap V \cap W\right)$, которое содержит в себе окрестность $\varphi(A)$. Поэтому
  $$\psi \circ \varphi^{-1} : \ \mathbb{R}^k \ \to \ \mathbb{R}^k$$
  – гладкое в $\varphi(U \cap V)$, а значит, $(U,\varphi) \in A_1$ согласована с $(V,\psi) \in A_3$.

  Итак, показали, что A_1 и A_3 эквивалентны.

■

Гладкие функции

Пусть есть некоторая функция
$$f : \ M \ \to \ \mathbb{R}.$$
Возьмем карту (U, φ) (рис. (2.3)).

Определение 2.8. f – *гладкая функция на* M (класса C^m, $m \leqslant l$, где M – класса C^l), если для любой карты (U,φ) отображение
$$f \circ \varphi^{-1} : \ \underbrace{D}_{\subset \mathbb{R}^k} \ \to \ \mathbb{R}$$
– гладкое (класса C^m).

Обсудим случай, когда есть две карты: (U,φ) и (V,ψ). В таком случае

$$f \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\left(f \circ \psi^{-1}\right)}_{C^m} \circ \underbrace{\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)}_{C^l}.$$

Композиция отображений из C^m и C^l, $m \leqslant l$, принадлежит классу C^m. Заметим, что мы не можем корректно определять функции гладкости большей, чем гладкость многообразия.

Итак, определение корректно, так как гладкость не зависит от локальных координат (хотя вводили мы ее через локальные координаты).

Утверждение 2.3. Гладкость функции определена корректно.

$C^\infty(M)$ $(C^m(M))$ – кольцо гладких (класса C^m) функций на M.

Гладкие отображения

Пусть даны два многообразия: M и N,

$$\dim M = m, \quad \dim N = n.$$

Пусть также дано отображение

$$F: \ M \ \to \ N.$$

Чтобы определить гладкость отображения, следует взять карту (U,φ) в M и (V,ψ) в N. Будем рассматривать отображение $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ (рис. (2.5)). Строго говоря, такое отображение определено не везде.

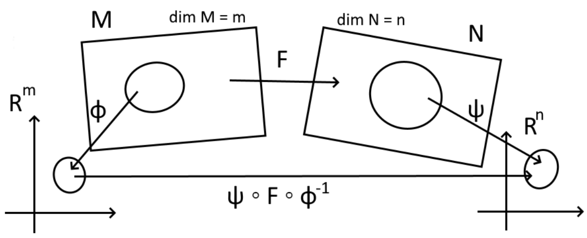


Рис. 2.5: Гладкость отображения F

Определение 2.9. Отображение

$$F: \ M \ \to \ N$$

гладкое (класса C^s, $s \leqslant$ гладкости M и N), если для любых карт (U,φ) на M и (V,ψ) на N

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \ \mathbb{R}^m \ \to \ \mathbb{R}^n$$

– гладкое отображение на области определения.

Утверждение 2.4. Гладкость отображения определена корректно.

Обсудим, как гладкие отображения (рис. (2.5)) записываются в координатах. Здесь

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\left(u^1, \ldots, u^m\right) = \left(v^1, \ldots, v^n\right).$$

В таком случае мы говорим, что F в координаха $u^1, \ldots, u^m$ на M и $v^1, \ldots, v^n$ на N имеет вид

$$\begin{aligned} v^1 &= v^1\left(u^1, \ldots, u^m\right) \\ &\ldots \\ v^n &= v^n\left(u^1, \ldots, u^m\right) \end{aligned}$$

Важным является следующее понятие. Говорят, что

$$F: M \to N$$

– *диффеоморфизм* (класса C^l), если $F \in C^l(M,N)$ и $\exists\ F^{-1}$, $F^{-1} \in C^l(N,M)$.

В таком случае пишем

$$F: M \xrightarrow{\sim} N$$

и говорим, что M и N диффеморфны: $M \simeq N$.

Пример 2.1. (Нехаусдорфов пример) Построим многообразие, которое удовлетворяет всему, кроме хаусдорфовости.

Рассмотрим

$$\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}/_{\sim},$$

где факторизация ведется по отношению эквивалентности

$$x \sim y, \text{ если } x = y \neq 0.$$

Итак, у нас есть прямая с двумя 0 (прямая с двойной точкой).

Возьмем карту (U_1,φ_1), которая отображает верхнюю точку на прямую, и карту (U_2,φ_2), которая отображает нижнюю точку на прямую. Тогда

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

– тождественное отображение, естественно, гладкое.

Итак, требование хаусдорфовости нужно, чтобы не возникало таких странных объектов.

Проективные пространства

Итак, мы избавились от объемлющего пространства и работаем с абстрактным многообразием.

Рассмотрим *проективную плоскость* $\mathbb{R}P^2$. Заметим, что случай проективного пространства рассматривается аналогично.

Одной из моделей проективной плоскости в курсе аналитической геометрии было множество прямых, проходящих через точку 0 в пространстве. Такое пространство является метрическим, так как угол между прямыми – расстояние, удовлетворяющее аксиомам метрического пространства. Кроме того, такое пространство топологическое и хаусдорфово, 2-я аксиома счетности выполнена.

С проективной плоскостью мы работали следующим образом. На прямой выбирался направляющий вектор. У этого вектора есть, очевидно, разложение через базис e_1,e_2,e_3: (x^0, x^1, x^2). Очевидно,

$$0 \neq (x^0, x^1, x^2),$$

но нам неважно,

$$(x^0, x^1, x^2)$$

рассматривать или

$$(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$$

(точность до пропорциональности). Чаще будем пользоваться записью

$$[x^0, x^1, x^2]$$

– однородные координаты точки $\mathbb{R}P^2$. Однородные координаты не являются координатами (нет взаимно однозначного соответствия с точкой в силу пропорциональности).

Введем карты. Рассмотрим

$$U_0 : \; x^0 \neq 0,$$
$$U_1 : \; x^1 \neq 0,$$
$$U_2 : \; x^2 \neq 0.$$

Такие U_i называются *аффинными картами*. Заметим, что

$$U_0 \cup U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}P^2.$$

В общем случае для $\mathbb{R}P^n$ будет $n+1$ аффинная карта.

Введем координаты.

$$U_0 \overset{\varphi_0}{\to} \mathbb{R}^2,$$

отобразим

$$[x^0, x^1, x^2] \; \to \; \left(\underbrace{\frac{x^1}{x^0}}_{z^1}, \underbrace{\frac{x^2}{x^0}}_{z^2} \right).$$

Такие координаты называются *неоднородными координатами в* U.

Аналогично,

$$U_1 \overset{\varphi_1}{\to} \mathbb{R}^2,$$

$$[x^0, x^1, x^2] \; \to \; \left(\underbrace{\frac{x^0}{x^1}}_{y^0}, \underbrace{\frac{x^2}{x^1}}_{y^2} \right)$$

– неоднородные координаты в U_1. Аналогично и для U_2.

Запишем замену координат:

$$y^0 = \frac{x^0}{x^1} = \frac{1}{z^1},$$

$$y^2 = \frac{x^2}{x^1} = \frac{\frac{x^2}{x^0}}{\frac{x^1}{x^0}} = \frac{z^2}{z^1}.$$

Это рациональные функции, поэтому они гладкие там, где знаменатель не обращается в 0 (а это область определения).

Обратно,

$$z^1 = \frac{1}{y^0}, \;\; z^2 = \frac{y^2}{y^1}$$

– также гладкие функции.

Лекция 3

Векторы в аффинном пространстве

Итак, ранее обсудили, как устроены точки (в аффинном пространстве, на поверхностях и в абстрактных многообразиях). В аффинном пространстве, кроме точек, по умолчанию определены векторы. Нам бы хотелось ввести векторы и для остальных случаев.

Начнем обсуждение векторов со случая аффинного пространства

$$\mathbb{A}^n = (X, V).$$

Здесь X – множество точек, а V – множество вектором.

Напомним, что аффинное пространство может отождествляться с $\mathbb{R}^n$, если на нем выбран репер. Пока будем работать с абстрактным аффинным пространством.

Напомним также, что никаких координат по умолчанию в аффинном пространстве не введено.

В линейной алгебре мы делали следующее. Для V выбирали базис $e_1, \ldots, e_n$, тогда $\forall\ v \in V$ представляется в виде

$$v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n.$$

Мы отождествляем вектор v со строчкой его координат $(v^1, \ldots, v^n$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

В этот момент у нас и возникает отождествление

$$V \cong \mathbb{R}^n.$$

Возьмем точку $0 \in X$ – начало координат. У нас возникает репер $0, e_1, \ldots, e_n$. Тогда для $P \in X$

$$\vec{OP} = P^1 e_1 + \ldots + P^n e_n.$$

Поэтому мы отождествляем

$$P \ \leftrightarrow \ \left(P^1, \ldots, P^n\right),$$

и благодаря этому отождествляем

$$X \ \leftrightarrow \ \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим случай криволинейных координат. Пусть задано гладкое взаимно однозначное отображение

$$\underset{u^1,\ldots,u^n}{\mathbb{R}^n} \ \xrightarrow{\Phi}\ X.$$

Примером, например, являются полярные координаты, когда

$$(r, \varphi) \ \to \ X.$$

Заметим, что мы ничего не сказали про координаты векторов.

Посмотрим на вектор как на вектор скорости кривой

$$\gamma :\ (a,b)\ \to\ X.$$

Будем считать, что γ – гладкая кривая (в любых декартовых или криволинейных координатах). Пусть

$$\gamma(0) = P.$$

$\dot\gamma(0)$ – вектор скорости.

Заметим, что для вычисления $\dot\gamma(0)$ нам не требуются координаты:

$$\dot\gamma(0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma(\varepsilon)-\gamma(0)}{\varepsilon}.$$

Заметим, что здесь $\gamma(\varepsilon)$, $\gamma(0)$ – точки, а $\gamma(\varepsilon)-\gamma(0)$ – вектор.

Пусть $u^1,\ldots,u^n$ – координаты (возможно, криволинейные). Тогда

$$\gamma(t) = \big(u^1(t),\ldots,u^n(t)\big) = \Phi^{-1}\circ\gamma(t).$$

Возьмем производную $\gamma(t)$:

$$\dot\gamma(t) = \left(\dot u^1(t),\ldots,\dot u^n(t)\right).$$

Тогда

$$\dot\gamma(0) = \left(\dot u^1(0),\ldots,\dot u^n(0)\right).$$

Будем говорить, что это координаты вектора $\dot\gamma(0)$ в координатах $u^1,\ldots,u^n$.

Пусть есть два набора (возможно, криволинейных) координат

$$\underset{u^1,\ldots,u^n}{\mathbb{R}^n} \overset{\Phi}{\to} X$$

и

$$\underset{v^1,\ldots,v^n}{\mathbb{R}^n} \overset{\Psi}{\to} X.$$

Тогда

$$\gamma(t) = \big(u^1(t),\ldots,u^n(t)\big) = \Phi^{-1}\circ\gamma$$

в координатах $u^1,\ldots,u^n$,

$$\gamma(t) = \big(v^1(t),\ldots,v(t)\big) = \Psi^{-1}\circ\gamma$$

в координатах $v^1,\ldots,v^n$.

Далее, выразим координаты друг через друга:

$$\begin{cases} u^1 = u^1\left(v^1,\ldots,v^n\right)\\ \ldots\\ u^n = u^n\left(v^1,\ldots,v^n\right)\end{cases}$$

Система выше – это отображение $\Phi^{-1}\circ\Psi$. Подставим это в выражения для $\gamma(t)$:

$$\gamma(t)=\left(u^1\left(v^1(t),\ldots,v^n(t)\right),\ldots,u^n\left(v^1(t),\ldots,v^n(t)\right)\right).$$

Получаем

$$\Phi^{-1}\circ\gamma=\left(\Phi^{-1}\circ\Psi\right)\circ\left(\Psi^{-1}\circ\gamma\right).$$

Это отображение действует из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Можно применить правило дифференцирования сложной функции. Получим

$$\dot{u}^i=\frac{\partial u^i}{\partial v^1}\dot{v}^1+\ldots+\frac{\partial u^i}{\partial v^n}\dot{v}^n,$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\left(u^i\left(v^1(t),\ldots,v^n(t)\right)\right)=\frac{\partial u^i}{\partial v^1}\left(v^1(t),\ldots,v^n(t)\right)\dot{v}^1+\ldots+\frac{\partial u^i}{\partial v^n}\left(v^1(t),\ldots,v^n(t)\right)\dot{v}^n.$$

Подставим в выражение выше $t=0$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(u^i\left(v^1(0),\ldots,v^n(0)\right)\right)}_{i\text{-я к-та }\gamma(0)\text{ в к-тах }u^1,\ldots,u^n}=\frac{\partial u^i}{\partial v^1}\left(\underbrace{v^1(0),\ldots,v^n(0)}_{\text{к-ты т. }P\text{ в к-тах }v^1,\ldots,v^n}\right)\underbrace{\dot{v}^1(0)}_{\text{к-ты }\gamma(0)\text{в к-тах }v^1,\ldots,v^n}+\ldots \tag{3.1}$$

Обозначим

$$\dot{\gamma}(0)=\left(Y^1,\ldots,Y^n\right)$$

в координатах $u^1,\ldots,u^n$,

$$\dot{\gamma}(0)=\left(Z^1,\ldots,Z^n\right)$$

в координатах $v^1,\ldots,v^n$. Здесь, очевидно,

$$Y^i=\dot{u}^i(0),$$

$$Z^j=\dot{v}^j(0).$$

Перепишем формулу ((3.1)) в следующем виде:

$$Y^i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\left(P^1,\ldots,P^n\right)Z^i, \tag{3.2}$$

где $(P^1,\ldots,P^n)$ – координаты точки P в $u^1,\ldots,u^n$.

Везде далее будем пользоваться **соглашением Энштейна о суммировании**. Если один индекс встречается в формуле вверху и внизу, будем опускать знак суммирования:

$$Y^i=\frac{\partial u^i}{\partial v^j}(P)Z^i.$$

Кроме того, обратим внимание, что в дифференциальной геометрии принято писать индексы координат сверху, а не снизу, как в других областях.

Ту же самую формулу перепишем с помощью матриц:

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}(P)\right) \begin{pmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^n \end{pmatrix}$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}(P)\right)$$

– матрица Якоби[5] замены координат. Заметим, что эта матрица зависит от точки P.

В качестве примера перейдем от полярной системы координат к декартовой. Пусть

$$u^1 = x,\ \ u^2 = y,$$

$$v^1 = r,\ \ v^2 = \varphi.$$

Матрица Якоби здесь имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Обсудим, что будет, если мы один и тот же вектор V в точке P реализуем с помощью двух разных кривых $\gamma(t)$ и $\omega(t)$, то есть

$$\gamma(0) = \omega(0) = P,$$

$$\dot\gamma(0) = \dot\omega(0). \tag{3.3}$$

Так как в ((3.2)) участвует только точка P и вектор ((3.3)), замена координат не зависит от выбора кривой.

Определение 3.1. *Вектором в точке P аффинного пространства* $\mathbb{A}^n$ называется сопоставляемый каждой системе криволинейных координат $u^1, \ldots, u^n$, определенных в окрестности точки P, n-ка чисел

$$\left(X^1, \ldots, X^n\right),$$

причем при замене координат $u^1, \ldots, u^n$ на $v^1, \ldots, v^n$ соответствующие n-ки

$$\left(X^1, \ldots, X^n\right) \text{ и } \left(Y^1, \ldots, Y^n\right)$$

связаны соотношением

$$X^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}(P) Y^j.$$

[5]Мы не используем здесь термин «Якобиан», потому что иногда под ним подразумевается матрица, а иногда – ее определитель. В данном случае речь идет, конечно, о матрице.

n-ка

$$\left(X^1,\ldots,X^n\right)$$

называется координатами вектора в системе координат $u^1,\ldots,u^n$.

Проверим, что определение (3.1) корректно определено.

Пусть есть 3 системы координат

$$u^1,\ldots,u^n\ (X^1,\ldots,X^n),$$

$$v^1,\ldots,v^n\ (Y^1,\ldots,Y^n),$$

$$w^1,\ldots,w^n\ (Z^1,\ldots,Z^n).$$

Здесь справа записаны координаты вектора в соответствующей системе координат. Тогда

$$X^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}(P)Y^j,$$

$$Y^j = \frac{\partial v^j}{\partial v^k}(P)Z^k,$$

откуда получаем, что[6]

$$X^i = \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}(P)\frac{\partial v^j}{\partial w^k}}_{=\frac{\partial u^i}{\partial w^k}}Z^k$$

в силу теоремы о дифференцировании сложной функции.

Производная вдоль вектора

Напомним (известно из курса анализа), что *производная функции f вдоль вектора V в точке P* – это

$$\partial_V f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(A+\varepsilon V)-F(A)}{\varepsilon}.$$

Заметим, что в таком определении нет координат. В декартовой системе координат

$$A = \left(A^1,\ldots,A^n\right),$$

$$V = \left(V^1,\ldots,V^n\right).$$

Тогда

$$\partial_V f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(A^1+\varepsilon V^1,\ldots,A^n+\varepsilon V^n\right)-f\left(A^1,\ldots,A^n\right)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}f\left(A^1+\varepsilon V^1,\ldots,A^n+\varepsilon V^n\right)\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{\partial f|}{\partial u^1}\left(A^1,\ldots,A^n\right)V^1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u^n}\left(A^1,\ldots,A^n\right)V^n = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)V^i.$$

[6] Здесь суммирование ведется по индексам j и k.

Рассмотрим теперь кривую
$$\gamma(t) = A + tV.$$
Здесь, заметим,
$$\gamma(0) = A,\ \ \dot{\gamma}(0) = V.$$
Тогда
$$\frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(\gamma(0)\right)\gamma^i(0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)V^i.$$
Заметим, что мы можем брать любую кривую, отвечающую вектору V в точке A. Для двух таких кривых γ и ω получим
$$\gamma(0) = \omega(0) = A,$$
$$\dot{\gamma}(0) = \dot{\omega}(0),$$
$$\frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)\dot{\gamma}^i(0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)\dot{\omega}(0) = \frac{d}{dt} f\left(\omega(t)\right)\Big|_{t=0}.$$
Итак, производная не зависит от выбора кривой, отвечающей данному вектору.

Теперь, в записи
$$\frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0}$$
нет координат. Здесь
$$(a,b)\ {}^{\gamma} \rightarrow\ \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$
$$f\left(\gamma(t)\right) = f \circ \gamma(t).$$
Поэтому в любых координатах можем определить производную вдоль вектора как
$$\partial_V f(A) = \frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0}.$$

Обсудим теперь, что будет, если ввести координаты. Пусть
$$\underset{u^1,\ldots,u^n}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}^n.$$
Тогда
$$\gamma(t) = \left(u^1(t), \ldots, u^n(t)\right) = \Phi^{-1} \circ \gamma,$$
$$f\left(u^1, \ldots, u^n\right) = f \circ \Phi,$$
и, наконец,
$$f\left(\gamma(t)\right) = f\left(u^1(t), \ldots, u^n(t)\right) = (f \circ \Phi) \circ \left(\Phi^{-1} \circ \gamma\right) = f \circ \gamma.$$

Итак, $\partial_V f(A)$ определена независимо от координат, но ее можно записать в координатах. Пусть есть вектор $(X^1, \ldots, X^n)$ в координатах $u^1, \ldots, u^n$. Тогда $\exists$ кривая

$$\gamma(t) = \left(u^1(t), \ldots, u^n(t)\right),$$

$$\gamma(0) = A, \;\; \dot\gamma(0) = \left(\dot u^1(t), \ldots, \dot u^n(t)\right),$$

и

$$\partial_V f(A) = \frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f\left(\dot u^1(t), \ldots, \dot u^n(t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u^1}\left(\dot u^1(t), \ldots, \dot u^n(t)\right)\dot u^1(0) + \ldots = \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1, \ldots, A^n\right) X^i = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A) X^i.$$

Заметим, что это согласовано с правилом замены координат.

Пусть даны две системы локальных координат

$$u^1, \ldots, u^n \;\; \left(X^1, \ldots, X^n\right),$$

$$v^1, \ldots, v^n \;\; \left(Y^1, \ldots, Y^n\right)$$

(здесь справа – координаты рассматриваемого вектора в данной системе локальных координат). Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(A) X^i = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u^i}(A)\frac{\partial u^i}{\partial v^j}(A)}_{\frac{\partial f}{\partial v^j}(A)} Y^j =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial v^j}(A) Y^j.$$

Утверждение 3.1. (Свойства производной вдоль вектора ∂_V) Для $\forall\ f, g$, определенных в некоторой окрестности точки A, верно

1. $\partial_V(f+g)(A) = \partial_V f(A) + \partial_V g(A)$;
2. $$\partial_V(fg)(A) = \left(\partial_V f(A)\right) g(A) + f(A)\left(\partial_V g(A)\right).$$

Дифференцирование в точке

Определение 3.2. D – *дифференцирование в точке* A, если для $\forall$ дифференцируемой функции f, определенной в окрестности точки A, $Df \in \mathbb{R}$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $D(f+g) = Df + Dg$;
2. $D(fg) = (Df)g(A) + f(A)(Dg)$;

$$V \;\mapsto\; \partial_V \cdot (A)$$

– сопоставление вектору дифференцирования.

Теорема 3.1. *На C^∞-функциях любое дифференцирование имеет вид ∂_V для некоторого вектора V.*

Доказательство:

Пусть $u^1,\ldots,u^n$ – локальные координаты. $A^1,\ldots,A^n$ – координаты точки A, а $V^1,\ldots,V^n$ – координаты вектора V в этой локальной системе координат.

Запишем одну из форм остаточного члена ряда Тейлора для функции f:

$$f\left(u^1,\ldots,u^n\right) = f\left(A^1,\ldots,A^n\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1,\ldots,A^n\right)\left(u^i - A^i\right) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\left(u^1,\ldots,u^n\right)\left(u^i - A^i\right)\left(u^j - A^j\right),$$

где $h_{ij} \in C^\infty$.

Положим в аксиоме 2 определения (3.2) $f = g = 1$. Тогда

$$D1 = (D1)1 + 1D(1),$$

$$D1 = 2D1,$$

откуда $D1 = 0$.

В качестве упражнения остается показать, что для $c \in \mathbb{R}$ $Dc = 0$, а

$$D(cf) = cD(f).$$

Кроме того, заметим, что если

$$f(A) = g(A) = 0,$$

то $D(fg) = 0$.

Теперь,

$$Df = \underbrace{D\left(f\left(A^1,\ldots,A^n\right)\right)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1,\ldots,A^n\right) D\left(u^i - A^i\right) +$$

$$+ \sum_{i,j} D\left(\underbrace{h_{ij}\left(u^i - A^i\right)}_{=f, f(A)=0}\underbrace{\left(u^j - A^j\right)}_{=g, g(A)=0}\right) = \sum_{i=1}^{n} D\left(u^i - A^i\right)\frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1,\ldots,A^n\right).$$

Определим

$$V^i = D\left(u^i - A^i\right).$$

Тогда

$$Df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1,\ldots,A^n\right) V^i,$$

то есть $D = \partial_V$. ■

Заметим, что в определении (3.2) нет никаких координат. По теореме (3.1) получаем, что $V \leftrightarrow \partial_V$ – взаимно однозначное соответствие между векторами и дифференцированием. Напомним,

$$\partial_V = V^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \ldots + V^n \frac{\partial}{\partial u^n}.$$

Так как мы отождествляем векторы и дифференцирование, будем далее писать векторы в виде

$$V^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \ldots + V^n \frac{\partial}{\partial u^n}.$$

Кроме того, вместо $\partial_V f$ можем писать Vf.

Гладкие регулярные поверхности в аффинном пространстве

Перейдем ко второй ситуации: гладким регулярным поверхностям в аффинном пространстве. Вводим в аффинном пространстве систему координат и строим отображение r (рис. (1.3)).

Кривая $\gamma(t)$ имеет вид

$$\left(u^1(t), \ldots, u^k(t)\right)$$

в локальных координатах $u^1, \ldots, u^k$. С помощью r она отображается на $\mathbb{R}^n$:

$$\left(x^1\left(u^1(t), \ldots, u^k(t)\right), \ldots, x^n\left(u^1(t), \ldots, u^k(t)\right)\right).$$

Пусть на отображенной кривой взята точка A,

$$A = r\left(A^1, \ldots, A^k\right),$$

где $A^1, \ldots, A^k$ – локальные координаты A. Тогда

$$\dot\gamma(0) = \frac{d}{dt} r\left(u^1(t), \ldots, u^k(t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial r}{\partial u^1}\left(A^1, \ldots, A^k\right) \dot{u}^1(0) + \ldots = r_{u_1}(A)\dot{u}^1(0) + \ldots + r_{u_K}(A)\dot{u}^k(0).$$

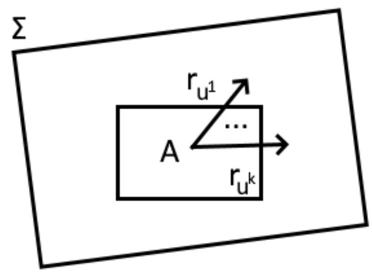


Рис. 3.1: Касательное пространство $T_A\Sigma$

Итак, ситуация следующая (рис. (3.1)). Вектора $r_{u^i}(A)$ порождают *касательное* *пространство к Σ в точке A*

$$T_A\Sigma = \operatorname{span}\left(r_{u^1}(A), \ldots, r^{u^k}(A)\right).$$

Заметим, что

$$\operatorname{rk}(r_{u_1}, \ldots, r_{u_k}) = \operatorname{rk}\left(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}(A)\right) = k$$

в силу условия регулярности. Поэтому

$$\dim T_A\Sigma = k = \dim \Sigma.$$

Обсудим, верно ли, что $\forall$ вектор из $T_A\Sigma$ является вектором скорости некоторой кривой. Произвольный вектор V

$$V^1 r_{u^1}(A) + \ldots + V^k r_{u^k}(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r\left(u^1(A), \ldots, u^k(t)\right),$$

где $u^i = A^i + tV^i$. Итак, любой вектор из T_Σ – вектор скорости кривой на поверхности.

Выясним, что происходит при локальной замене координат.

Пусть даны локальные координаты

$$u^1, \ldots, u^k$$

и

$$v^1, \ldots, v^k.$$

У нас есть базис

$$r_{u^1}(A), \ldots, r_{u^k}(A).$$

Заметим, что по правилу дифференцирования сложной функции

$$r_{v^i}(A) = \frac{\partial r}{\partial v^i}(A) = \frac{\partial r}{\partial u^j}(A)\frac{\partial u^j}{\partial v^i}(A).$$

Отсюда получаем, что

$$\operatorname{span}(r_{v^1}(A), \ldots, r_{v^k}(A)) \subset \operatorname{span}(r_{u^1}(A), \ldots, r_{u^k}(A))$$

Аналогично включение в обратную сторону $\supset$. Поэтому

$$\operatorname{span}(r_{v^1}(A), \ldots, r_{v^k}(A)) = \operatorname{span}(r_{u^1}(A), \ldots, r_{u^k}(A))$$

Отсюда получаем, что $T_A\Sigma$ не зависит от выбора координат.

Заметим, что, с одной стороны,

$$V = X^i r_{u^i}(A),$$

а с другой,

$$V = Y^j r_{v^j}(A).$$

$$X^i r_{u^i}(A) = X^i r_{u^j}(A) \frac{\partial r^j}{\partial u^i}(A) = \frac{\partial r^j}{\partial u^i}(A) X^i r_{v^j}(A),$$

откуда

$$\frac{\partial r^j}{\partial u^i}(A) X^i = Y^j.$$

Итак, в очередной раз из правила дифференцирования сложной функции получаем закон преобразования координат

$$Y^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}(A) X^i,$$

что записывается, как

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^k \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}(A) \right) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^k \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Итак, в данной ситуации мы тже можем определить векторы как наборы чисел, которые преобразуются как ((3.4)).

Пусть $f\left(u^1, \ldots, u^k\right)$ – гладкая функция Σ. На следующей лекции подробнее поговорим о сопоставлении $V \mapsto \partial_V f$, которое ставит в соответствие

$$V = V^1 r_{u^1} + \ldots + V^k r_{u^k} \ \mapsto \ V^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \ldots + V^k \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Лекция 4

Касательные векторы

Напомним, в прошлый раз рассматривали области в аффинном пространстве

$$\mathbb{A}^n = (X, V),$$

где X – множество точек, V – множество векторов.

В абстрактном же многообразии нет векторов по умолчанию. Нам нужно научиться говорить про касательные векторы так, чтобы это можно было перевести в ситуацию, когда есть только точки, локальные координаты и гладкие функции (как в абстрактном многообразии).

Итак, мы обнаружили, что если $W \in V$, W в точке $P \in X$ (вообще говоря, в аффинном пространстве векторы не прикреплены к точке, но мы будем считать, что это так) а $u^1, \ldots, u^n$ – локальные координаты, то W мы сопоставляем набор его координат:

$$W \;\to\; \left(W^1, \ldots, W^n\right).$$

Если $v^1, \ldots, v^n$ – какие-то другие локальные координаты, то

$$W \;\to\; \left(\widetilde{W}^1, \ldots, \widetilde{W}^n\right),$$

где координаты W^i и $\widetilde{W}^i$ связаны преобразованием

$$\widetilde{W}^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(P) W^j.$$

В векторном виде это можно записать как

$$\begin{pmatrix} \widetilde{W}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{W}^n \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}(P)\right)}_{\text{матрица Якоби}} \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix}$$

Вектору W сопоставляется дифференцирование

$$W \;\mapsto\; \partial_W\Big|_P,$$

$$\partial_W f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(P + \varepsilon W) - F(P)}{\varepsilon}.$$

Заметим, что в таком определении нет координат. В любых координатах $u^1, \ldots, u^n$ дифференцирование может быть вычислено как

$$\partial_W f(P) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(P) W^i.$$

Дифференцирование D мы вводили аксиоматически. D – дифференцирование в точке P, если каждой гладкой функции, определенной в некоторой окрестности P сопоставляет число, причем

$$D(f+g) = Df + Dg,$$

$$D(fg) = (Df)g(P) + f(P)(Dg).$$

В прошлый раз доказали следующий факт.

Утверждение 4.1. $\forall$ D на C^∞-функциях существует единственный вектор W в точке P такой, что

$$\partial_W f(P) = Df.$$

Локально можем записать

$$D = \left(W^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \ldots + W^n \frac{\partial}{\partial u^n} \right) \Big|_P .$$

Поэтому мы отождествляем W и D.

Гладкие регулярные поверхности в аффинном пространстве

Второй контекст, который у нас есть – это гладкие регулярные поверхности в аффинном пространстве. Будем их задавать параметрически.

В объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ выберем декартову координат $x^1, \ldots, x^n$. С помощью отображения r отправляем область D из области параметров $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ (рис. (1.3)). Образом D является некоторая поверхность Σ. Здесь

1. $r \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ (гладкость);
2. $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) = k$ (регулярность).

В прошлый раз обсуждали, что векторы – это векторы скорости кривых. Для любого вектора мы можем построить кривую, проходящую через точку с заданным вектором скорости.

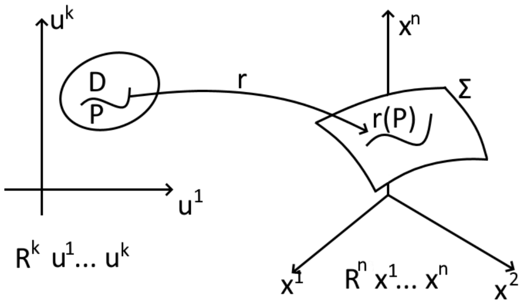


Рис. 4.1: Отображение кривой в D на Σ.

Любая кривая в D отображается на кривую в Σ (рис. (**??**)). С помощью теоремы о неявной функции можно показать, что любая кривая в Σ получается таким образом.

$$r(t) = \left(x^1\left(u^1(t),\ldots,u^k(t)\right),\ldots,x^n\left(u^1(t),\ldots,u^k(t)\right)\right),$$

тогда

$$\dot{r}(t) = r_{u^1}\dot{u}^1(t) + \ldots + r_{u^k}\dot{u}^k(t),$$

где

$$r_{u^i} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i},\ldots,\frac{\partial x^n}{\partial u^i}\right).$$

Для W в точке P на кривой на поверхности Σ

$$W = W^1 r_{u^1}(P) + \ldots + W^k r_{u^k}(P).$$

Далее, пусть

$$T_P\Sigma = \operatorname{span}\left(r_{u^1}(P),\ldots,r_{u^k}(P)\right)$$

– касательное пространство в точке P к поверхности Σ. Здесь из регулярности следует, что

$$\dim T_P\Sigma = k = \dim\Sigma.$$

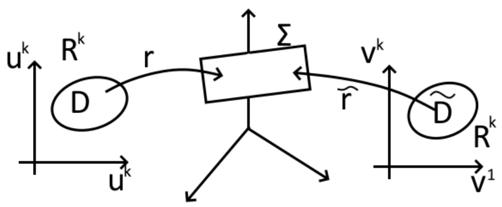


Рис. 4.2: Две параметризации

Пусть теперь есть две параметризации (рис. (4.2)). Тогда

$$W = W^1 r_{u1}(P) + \ldots + W^k r_{u^k}(P),$$

с другой стороны,

$$W = \widetilde{W}^1 t_{v^1}(P) + \ldots + \widetilde{W}^k r_{v^k}(P).$$

Таким образом, между координатами есть связь:

$$\widetilde{W}^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(P) W^j.$$

Дифференцирование

Обсудим одну тонкость. Если попробуем определять производную, как и раньше, через предел:

$$\partial_W f(P) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(P+\varepsilon W) - F(P)}{\varepsilon},$$

возникнет следующая проблема. Для иллюстрации рассмотрим кривую Σ в двумерном пространстве (рис. (4.3)). Здесь, очевидно, $P+\varepsilon W \notin \Sigma$.

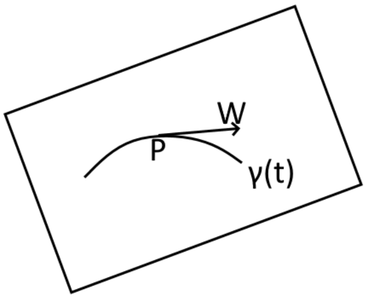


Рис. 4.3: Кривая $\gamma(t)$ с вектором скорости в точке P

Итак, если f определена только на Σ, то $f(P+\varepsilon W)$ может быть не определено.

Поэтому будем действовать по-другому. Пусть Σ – поверхность, $P \in \Sigma$ и задан вектор W.

1. Доопределим f как-нибудь гладко в окрестности Σ;
2. $\exists\ \gamma(t)$ такая, что
   1) $\forall\ t\ \gamma(t) \in \Sigma$
   2) $\gamma(0) = P$;
   3) $\dot\gamma(0) = W$.
3. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – координаты в объемлющем пространстве. Тогда
$$\partial_W f(P) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) W^i,$$
где W^i – координаты в $x^1, \ldots, x^n$.

   С другой стороны,
$$\frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(P) x^1(0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(P) x^n(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) W^i = \partial W f(P).$$
4. Запишем
$$\frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0} = \partial_W f(P). \tag{4.1}$$
   Эта запись не зависит от координат.
5. Кроме того, левая часть ((4.1)) берется на поверхности Σ, и значит, результат не зависит от того, как мы поверхность продлили.

   Утверждение 4.2. Для касательных векторов к поверхности производная вдоль них от функций на поверхности корректно определена.

Произведем последнее вычисление. Возьмем поверхность, вектор W в точке P, $u^1,\ldots,u^k$ – локальные координаты. Тогда

$$W = W^1 r_{u^1}(P) + \ldots + W^k r_{u^k}(P).$$

Как обсуждалось ранее, мы можем взять любую кривую такую, что W будет вектором ее скорости. Если

$$p = (p^1,\ldots,p^k)$$

в локальных координатах $u^1,\ldots,u^k$, то в качестве γ можно взять

$$\begin{aligned} u^1 &= p^1 + tW^1 \\ &\ldots \\ u^k &= p^k + tW^k \end{aligned}$$

Тогда

$$W = \dot{\gamma}(0).$$

Вычислим

$$\partial_W f(P) = \frac{d}{dt} f\left(\gamma(t)\right)\Big|_{t=0}. \tag{4.2}$$

Будем писать f в локальных координатах $u^1,\ldots,u^k$:

$$f\left(u^1,\ldots,u^k\right).$$

Тогда

$$((4.2)) = \frac{d}{dt} f\left(P^1 + tW^1,\ldots,P^k + tW^k\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^1}\left(P^1 + tW^1\right)W^1 + \ldots\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u^1}(P)W^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u^k}(P)W^k = \frac{\partial f}{\partial u^i}(P)W^i.$$

Мы получили ту же формулу, что у нас была в локальных координатах для аффинного пространства. Получаем, что

$$\partial_W\Big|_P = W^1 k \frac{\partial}{\partial u^k}\Big|_P.$$

Аналогично случаю аффинного пространства доказывается, что для функций из C^∞ любое дифференцирование – это производная вдоль вектора.

Абстрактное многообразие

Перейдем к случаю **(абстрактного) многообразия**. Здесь под абстрактностью мы подразумеваем невложенность в евклидово пространство.

Итак, у нас есть топологическое пространство M, Хаусдорфово и со второй аксиомой счетности. Мы определяем карты на нем. Пусть (U,φ) – карта в $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$. Пусть есть другая карта (V, ψ) в $\mathbb{R}^n$ с координатами $y^1, \ldots, y^n$. Тогда между этими двумя пространствами есть отображение

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

– замена координат. Тогда

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1\left(x^1, \ldots, x^n\right) \\ &\ldots \\ y^n &= y^n\left(x^1, \ldots, x^n\right) \end{aligned}$$

Ранее обсуждали, что карты образуют атлас, если они согласованы, то есть на пересечениях (если они не пусты) замена координат должна быть гладкой. Напомним, функция f гладкая, если для любой карты (U,φ)

$$f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

– гладкое отображение (рис. (2.3)).

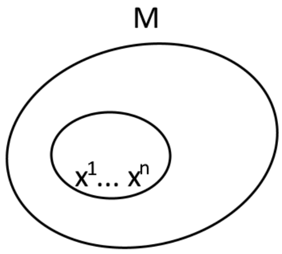


Рис. 4.4: Локальные координаты

Замечание 4.1. Часто вместо рис. (2.3) мы будем рисовать следующее (рис. (4.4)). Здесь $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты в области U.

Итак, карта (U,φ) эквивалентна тому, что в U заданы локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Теперь нужно ввести векторы.

Два определения касательных векторов

Определим касательные вектора двумя способами, которые уже были опробованы на областях афинного пространства и на поверхностях.

1. Пусть M – многообразие размерности n (класса гладкости[7] C^k, $k \geqslant 1$, или C^∞), $P \in M$.

   Тогда касательный вектор в точке P – это сопоставляемый каждой определенной в некоторой окрестности P системе локальных координат $x^1, \ldots, x^n$ упорядоченный набор
$$\left(W^1, \ldots, W^n\right),$$

[7] Сколько раз дифференцируема замена координат

причем если системе локальных координат $y^1, \ldots, y^n$ сопоставлен упорядоченный набор

$$\left(V^1, \ldots, V^n\right),$$

то

$$V^i = \frac{\partial y^j}{\partial x^j}(P) W^j.$$

Набор $(W^1, \ldots, W^n)$ называется *координатами этого вектора в локальных координатах* $x^1, \ldots, x^n$.

2. Определение дифференцирования мы вводим, как и раньше.

   Определение 4.1. Пусть M – многообразие размерности n класса C^∞. Тогда *касательный вектор* – это дифференцирование C^∞-функций в точке P.

Утверждение 4.3. Для C^∞-многообразий определения выше эквивалентны.

Доказательство:
Пусть D – дифференцирование,

$$x^1, \ldots, x^n \text{ и } y^1, \ldots, y^n$$

– локальные координаты. Тогда $\exists\ W^i, V^i$ такие, что

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) W^i,$$

$$Df = \frac{\partial f}{\partial y^j}(P) V^j.$$

По правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(P) W^i = \frac{\partial f}{\partial y^j}(P) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(P) W^i.$$

Отсюда

$$V^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(P) W^i.$$

■

Теперь, вектору W сопоставляется дифференцирование вдоль него $\partial_W\Big|_P$. Поэтому будем писать

$$W = W^1 \frac{\partial}{+} \ldots + W^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Вместо $\partial_W f$ мы пишем прото Wf.

Замечание 4.2. Обговорим, что говорить «касательные векторы» – это вопрос традиции. Других векторов на абстрактном многообразии, кроме касательных, нет.

Пусть M – многообразие, $P \in M$.

Определение 4.2. *Касательное пространство в точке P к M* (обозначается T_PM) – это множество касательных векторов в P.

В случае, когда M – поверхность, T_PM является реальным подпространством объемлющего пространства. В определении (4.2) речь идет об абстрактном множестве.

Заметим, что сумма двух дифференцирований и умножение дифференцирования на число являются дифференцированиями. То, что при замене координат сумма переходит в сумму, а множение на число – в умножение на число, видно из формулы замены координат.

Утверждение 4.4. T_PM – векторное пространство.

Векторные поля

Перейдем к обсуждению векторных полей.

Определение 4.3. *Векторное поле Z* – это отображение

$$M \ \to \ \sqcup_{P\in M}T_PM$$

такое, что

$$z(P) \in T_PM,$$

где $z(P)$ – вектор в точке P.

Определение 4.4. Векторное поле *гладкое*, если в любой локальной системе координат координаты вектора – гладкие функции.

Лемма 4.1. *Векторное поле Z гладкое $\iff$ $\forall$ гладкой функции f функция*[8] *Zf гладкая.*

Доказательство:

$\Rightarrow$ Распишем разложение Zf:

$$Zf = Z^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + Z^n\frac{\partial f}{\partial x^n}.$$

Все Z^i и $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ гладкие, а значит, и Zf гладкая.

$\Leftarrow$ Возьмем $f = x^i$. Эта функция гладкая. Тогда

$$Zf = Zx^i = Z^j\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = Z^i$$

– тоже гладкая. Следовательно, Z – гладкое векторное поле.

[8]Здесь

$$(Zf)(P) = Z(P)f.$$

■

Отметим, что удобно, что мы можем говорить про гладкость векторного поля без использования координат (через дифференцирование).

Коммутатор

Напомним, в линейной алгебре коммутатор матриц A и B определялся как

$$[A,B] = AB - BA.$$

Вычислим коммутатор векторных полей

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf). \tag{4.3}$$

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты. Тогда[9]

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \;\; Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Тогда

$$((4.3)) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$

$$= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \underbrace{Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}}_{i \leftrightarrow j} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} =$$

$$= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{|partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Это дифференцирование вдоль векторного поля

$$\left(X^i \frac{\partial Y^j}{|partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{4.4}$$

Определение 4.5. Векторное поле ((4.4)) обозначается $[X,Y]$ и называется коммутатором X и Y.

Дифференциал $d_P F$

Напомним, в курсе анализа вычисляли производные от функций. Потом были функции многих переменных, дифференциал которых – матрица Якоби.

Обсудим, что будет в рассматриваемой сейчас ситуации. Пусть M, N – многообразия,

$$F:\; M \;\to\; N.$$

В точке $P \in M$ есть $T_P M$, вектор $W \in T_P M$. В точке $F(P) \in T_{F(P)} N$ вектор $d_P F(W)$ (рис. (4.5)).

[9]Напомним, что мы опускаем знак суммирования для краткости записи.

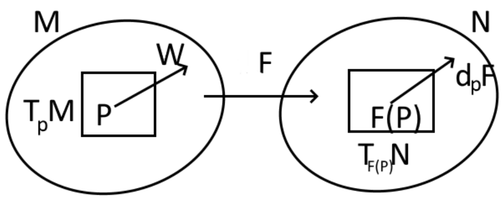


Рис. 4.5: Дифференциал d_PF

Мы хотим построить отображение

$$T_PM \ {}^{d_PF}\, T_{F(P)}N$$

– дифференциал F в точке P (так, чтобы в случае функций многих переменных он совпадал с матрицей Якоби).

Так, пусть есть

$$M \overset{F}{\to} N \overset{f}{\to} \mathbb{R}.$$

По-другому это можно записать как

$$M \overset{f\circ F}{\to} \mathbb{R}.$$

Обозначим $f \circ F = F^*f$. Тогда

$$M \overset{F}{\to} N,$$

$$C^k(M) \overset{F^*}{\leftarrow} C^k(N).$$

Определение 4.6. F^*f – обратный образ f при отображении f.

Определение 4.7.

$$d_PF(W)f = W\left(F^*f\right).$$

Вычислим дифференциал в локальных координатах. Пусть в окрестности $P \in M$ локальные координаты $x^1, \ldots, x^m$, а в окрестности $F(P) \in N$ локальные координаты $y^1, \ldots, y^n$.

Далее, f зависит от $y^1, \ldots, y^n$,

$$W = W^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + W^m \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Перейдем к отображению F. Здесь

$$\begin{array}{ccc} y^1 & = & y^1\left(x^1, \ldots, x^m\right) \\ & \ldots & \\ y^n & = & y^n\left(x^1, \ldots, x^m\right) \end{array}$$

Тогда

$$F^*f\left(x^1, \ldots, x^m\right) = f\left(y^1\left(x^1, \ldots, x^m\right), \ldots, y^n\left(x^1, \ldots, x^m\right)\right).$$

Наконец,

$$d_P F(W) f = W(F^* f) = W^i \frac{\partial}{\partial x^i} f\left(y^1\left(x^1,\ldots,x^m\right),\ldots,y^n\left(x^1,\ldots,x^m\right)\right) =$$

$$= W^i \frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \left(\underbrace{\frac{\partial y^j}{\partial x^i} W^i \frac{\partial}{\partial y^j}}_{d_P F(W)}\right) f.$$

Получаем, что

$$(d_P F(W))^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(P) W^i,$$

или, в развернутой записи,

$$\begin{pmatrix} d_P F(W)^1 \\ \vdots \\ d_P F(W)^n \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(P)\right)}_{\text{матрица Якоби}} \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^m \end{pmatrix}$$

Заметим, что это линейный оператор. Это согласуется с тем, что в курсе анализа дифференциалом называлась линейная часть приращения.

Лекция 5

Повторение

На каждой следующей лекции мы немного продолжаем то, что было обсуждено в предыдущих.

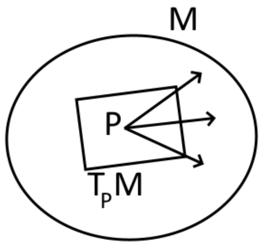


Рис. 5.1: Касательное пространство $T_P M$

Напомним, две лекции у нас были посвящены векторам. Если на многообразии (области) M есть некоторая точка $P \in M$, в этой точке есть векторы (рис. (5.1)). Векторы мы определяли либо как наборы из координат, как-то преобразующиеся при замене системы координат, либо как дифференцирование. Вектора образуют множество $T_P M$ – касательное пространство к M в точке P (множество всех касательных[10] в точке P).

О $T_P M$ известно следующее. Во-первых, это векторно пространство.

Во-вторых, можно пользоваться записью через координаты. Пусть

$$u^1, \ldots, u^n, \ \ n = \dim M$$

– локальные координаты. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n} \tag{5.1}$$

– базис в касательном пространстве. Любой вектор из $T_P M$ можно записать в виде

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Заметим, что в записи ((5.1)) не учитывается зависимость от точки P. На самом деле, конечно, в $T_P M$ базис имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n}\Big|_p.$$

Пример 5.1. Пусть дана плоскость $\mathbb{R}^2$ с полярными координатами r, φ (рис. (5.2)). В разных точках базис

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial r},$$

[10]Напомним, что на абстрактном многообразии нет никаких других векторов, кроме касательных.

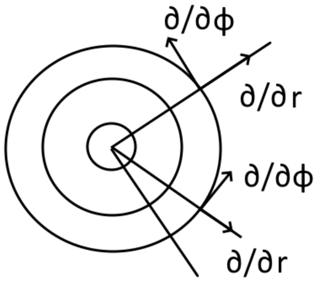


Рис. 5.2: Базис касательного пространства в полярных координатах

как можно убедиться, различен.

Запись зависимости от точки обычно подразумевается и для краткости не пишется.

Пусть есть отображение (рис. (4.5))

$$F:\ M\ \to\ N.$$

Точка $P \overset{F}{\mapsto} F(P)$. Дифференциал d_PF – это отображение

$$d_PF:\ T_PM\ \to\ T_{F(P)}N.$$

Далее, пусть есть цепочка отображений

$$M\ \overset{F}{\to}\ N\ \overset{\varphi}{\to}\ \mathbb{R}.$$

По-другому ее можно записать как

$$M\ \overset{\varphi\circ F=F^*\varphi}{\to}\ \mathbb{R}.$$

Здесь $F^*\varphi$ – *обратный образ* φ *при отображении* F,

$$F^*:\ C^k(N)\ \to\ C^k(M).$$

Итак, если

$$M\ \overset{F}{\to}\ N,$$

то

$$C^\infty(M)\ \overset{F^*}{\leftarrow}\ C^\infty(N).$$

Теперь, имеем

$$C^\infty(M)\ \overset{F^*}{\leftarrow}\ C^\infty(N),$$

$$T_PM\ \overset{d_PF}{\to}\ T_{F(P)}N,$$

$X\in T_PM$, $\varphi\in C^\infty(N)$. Тогда

$$d_PF(X)\varphi = XF^*\varphi.$$

Пусть в M в окрестности точки P есть локальные координаты $x^1, \ldots, x^m$, а в N в окрестности точки $F(P)$ – локальные координаты $y^1, \ldots, y^n$.

Вектор $V \in T_P(M)$ можно записать

$$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда

$$d_P F(X) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_P V^i \frac{\partial}{\partial y^j},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} d_P F(x)^1 \\ \vdots \\ d)pF(X)^n \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(P)\right)}_{\text{матрица Якоби}} \begin{pmatrix} V^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}$$

На этом факте мы остановились в прошлый раз.

Обратим внимание на следующий факт.

Утверждение 5.1.

$$d_P F : \ T_P M \ \to \ T_{F(P)} N$$

– линейный оператор.

Доказательство:

Распишем

$$d_P F(X+Y)\varphi = (X+Y)F^*\varphi = XF^*\varphi + YF^*\varphi =$$
$$= d_P F(X)\varphi + d_P F(Y)\varphi = (d_P F(X) + d_P F(Y))\,\varphi.$$

■

Заметим, что матица Якоби $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})(P)\right)_{m\times n}$ – это матрица линейного оератора

$$d_P F : \ T_P M \ \to \ T_{F(P)} N$$

в базисах

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

в $T_P M$ и

$$\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}$$

в $T_{F(P)} N$.

Рассмотрим теперь частный случай

$$F : \ M \ \to \ N = \mathbb{R}.$$

Пусть $P \in M$ и локальные координаты $x^1, \ldots, x^m$. Тогда $F(P) \in \mathbb{R}$, локальную координату здесь обозначим t (стандартная координата на $\mathbb{R}$).

Далее,

$$T_P M \overset{d_P F}{\to} T_{F(P)} \mathbb{R}.$$

Тогда

$$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{d_P F}{\mapsto} \frac{\partial t}{\partial x^i} V^i \frac{d}{dt}.$$

В любой точке a мы можем отождествить

$$T_a \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}.$$

Здесь отождествляются базисы

$$b\frac{d}{dt} \leftrightarrow b.$$

Итак,

$$T_P M \overset{d_P F}{\to} T_{F(P)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R},$$

а значит,

$$\underbrace{d_P F(V)}_{\in T_P M} = \frac{\partial F}{\partial x^i} V^i \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что это линейное отображение.

Итак,

$$F: M \to \mathbb{R},$$

$$d_P F: T_P M \ \mathbb{R}$$

– линейная функция (= *ковектор*). Ковекторы, как известно, образуют двойственное пространство, то есть

$$d_P F \in (T_P M)^*.$$

Кокасательное пространство. Ковекторы

Итак, мы начинаем изучение дифференциальных форм.

Определение 5.1. *Двойственное к $T_P M$ пространство*

$$T_P^* M = (T_P M)^*$$

– кокасательное пространство к M в точке P.

Итак, выше показали, что любой функции можем сопоставить ковектор:

$$F: M \to \mathbb{R}$$

дает

$$d_P F \in T_P^* M.$$

Определение 5.2. Справедлива запись без координат

$$d_P F(V) = \partial_V F = VF.$$

Такая запись называется *дифференциалом функции*

$$F: M \to \mathbb{R}$$

в точке P.

Напомним одно понятие из линейной алгебры. Пусть в V есть базис

$$e_1, \ldots, e_n. \tag{5.2}$$

Тогда в V^* $\exists$ *двойственный (дуальный)* базис к ((5.2))

$$e^1, \ldots, e^n$$

такой, что

$$e^i\left(e_j\right) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Вернемся к дифференциальной геометрии. Пусть $P \in M$. В окрестности точки P есть локальные координаты

$$x^1, \ldots, x^n.$$

В $T_P M$ есть базис

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{5.3}$$

Утверждение 5.2. Двойственным к ((5.3)) базисом в $T^*_P M$ является

$$d_P x^1, \ldots, d_P x^n.$$

Доказательство:
Вычислим

$$d_P x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} x^i = \delta^i_j.$$

■

Далее, можем записать

$$d_P F = \omega_1 d_P x^1 + \ldots + \omega_n d_P x^n = \omega_i d_P x^i.$$

Здесь ω_i – координаты $d_P F$ в базисе

$$d_P x^1, \ldots, d_P x^n.$$

Вычислим значение $d_P F$ на векторе V:

$$d_P F(V) = \omega_i d_P x^i(V).$$

В качестве V возьмем $\frac{\partial}{\partial x^j}$. Тогда

$$d_P F(V) = \omega_i \underbrace{d_P x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{\delta^i_j} = \omega_i \delta^i_j = \omega_j.$$

С другой стороны,

$$d_P F(V) = VF = \frac{\partial}{\partial x^j} F = \frac{\partial F}{\partial x^j}.$$

Напомним, что мы пишем $\frac{\partial}{\partial x^i}$ вместо $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P$. Аналогично, пишем dx^i вместо $d_P x^i$ (зависимость от точки подразумевается по контексту).

Выше доказали следующее утверждение.

Утверждение 5.3. Пусть

$$F:\ M\ \to\ \mathbb{R},$$

$x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты на M. Тогда

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x^n} dx^n. \tag{5.4}$$

Замечание 5.1. Формула ((5.4)) знакома нам из курса анализа. Ее смысл таков. Разложение ковектора dF в базисе из ковектором $dx^1, \ldots, dx^n$. Частные производные здесь – это координаты разложения.

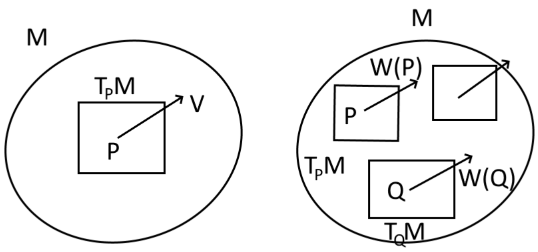


Рис. 5.3: Вектор V и векторное поле W на многообразии M

Итак, у нас были вектор $V \in T_P M$ и векторное поле W M (рис. (5.3)). Каждой точке векторного поля сопоставляется векто в данной точке.

Далее, есть ковектор $\xi \in T^*_P M$,

$$\xi:\ T_P M\ \to\ \mathbb{R}.$$

По аналогии можно рассмотреть ковекторное поле ω на M (рис. (5.4)).

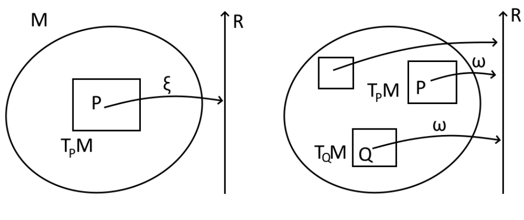


Рис. 5.4: Ковектор ξ и ковекторное поле ω на M

Ранее обсуждали, что векторное поле W – это отображение

$$W:\ M\ \to\ \sqcup_{P \in M} T_P M$$

такое, что $W(Q) \in T_Q M$.

Аналогично, ковекторное поле ω – это отображение

$$\omega : \ M \ \to \ \sqcup_{P \in M} T_P^* M$$

такое, что $\omega_Q \in T_Q^* M$, то есть

$$\omega_Q : \ T_Q M \ \to \ \mathbb{R}$$

– линейное отображение.

Замечание 5.2. В литературе по дифференциальной геометрии ковекторные поля называются *дифференциальными* 1*-формами.*

Дифференциальные 1-формы. Гладкие формы

Обсудим теперь ситуацию, когда у нас есть дифференциальная[11] 1-форма ω и векторное поле X.

Определение 5.3. $\omega(X)$ – функция, определенная как

$$(\omega(X))(P) = \omega_P (X(P)).$$

Заметим, что мы пишем $\omega(X)$, но это зависит от точки P.

Посмотрим теперь, как это выглядит в локальных координатах (рис. (4.4)). Векторное поле имеет вид

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где X^i – функции точки и $\partial / \partial x^i$ также зависит от точки. Тогда[12]

$$\omega = \omega_d x^j.$$

Здесь ω_j и dx^j зависят от точки.

Далее, по линейности dx^j как ковектора (*) можем записать

$$\omega(X) = \omega_j dx^j \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \overset{(*)}{=} \omega_j X^i dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) =$$

$$= \omega_j \underbrace{X^i \delta^i_j}_{X^j} = \omega_j X^j.$$

Здесь, заметим, и ω_j, и X^j зависят от точки.

Итак, доказали следующее утверждение.

[11] Иногда «дифференциальная» будет опускаться, так как никаких других форм в курсе не рассматривается.

[12] Так как индекс повторяется два раза, по соглашению Эйнштейна о суммировании мы опускаем знак суммы.

Утверждение 5.4.

$$\omega(X) = \omega_j X^j = \omega_1 X^1 + \ldots + \omega_n X^n.$$

Определение 5.4. ω называется *гладкой*, если $\forall$ гладкого векторного поля X $\omega(X)$ – гладкая функция.

Утверждение 5.5. Пусть в локальных координатах

$$\omega = \omega_i dx^i.$$

Тогда ω гладкая $\iff$ функции $\omega_1, \ldots, \omega_k$ гладкие.

Доказательство:

$\Rightarrow$ Представим

$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

Оба множителя в правой части – гладкие, а значит, ω_i тоже гладкая.

$\Leftarrow$ Представим

$$\omega(X) = \omega_i X^i.$$

По условию и ω_i, и X^i гладкие, а значит, и $\omega(X)$ гладкая.

■

Вездее далее будут рассматриваться только **гладкие** 1-формы.

Полилинейные кососимметрические функции

Напомним, в курсе линейной алгебры был раздел, посвященный тензорам. Тензоры используются в том числе дифференциальной геометрии (дифференциальные формы).

Поговорим немного о *полилинейной аглгебре*. Пусть V – векторное пространство, а V^* – двойственное к нему. $\xi \in V^*$ – ковектор, то есть

$$\xi : V \to \mathbb{R}$$

– линейное отображение.

Хотим рассматривать не только функции вида $\xi(v) \in \mathbb{R}$, $v \in V$, а функции от нескольких аргументов. Функции вида

$$\omega(v_1, \ldots, v_n)$$

называются *полилинейными*, если она линейна по каждому аргументу.

Замечание 5.3. Ранее в курсе линейной алгебры слушатели уже сталкивались с билинейными формами. В частности, рассматривались симметрические и кососимметрические билинейные формы.

Симметрические билинейные формы называют также квадратичными, так как между ними существует взаимно-однозначное соответствие. Известным примером такой формы является скалярное произведение.

Типичным примером кососимметрической билинейной формы является ориентированная площадь.

Оказывается, что в дифференциальной геометрии важную роль играют кососимметические полилинейные функции. Напомним, *кососимметрическими* называются функции, которые при перемене местами двух аргументов меняют свой знак:

$$\omega\left(v_1, v_2 \ldots ,\underset{i}{v_i}, \ldots ,\underset{j}{v_j}, \ldots , v_n\right) = -\omega\left(v_1,v_2, \ldots ,\underset{i}{v_j}, \ldots ,\underset{j}{v_i}, \ldots ,v_n\right).$$

Пространство кососимметрических полилинейных функций от n агументов на V обозначается $\Lambda^n V^*$. Если $\omega \in \Lambda^n V^*$, $v_1, \ldots ,v_n \in V$, то, очевидно,

$$\omega\left(v_1, \ldots ,v_n\right) \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $\Lambda^n V^*$ – линейное пространство.

Внешнее произведение

Обсудим операцию *внешнего произведения*

$$\wedge : \ \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \ \to \ \Lambda^{k+l} V^*.$$

Определим $\wedge$. Пусть $\sigma \in \Lambda^k V^*$, то есть

$$|\sigma| = \deg \sigma = k,$$

и $\tau \in \Lambda^l V^*$. Хотим построить

$$\sigma \wedge \tau \in \Lambda^{k+l} V^*.$$

Определение 5.5. Пусть $v_1, \ldots , v_{k+l} \in V$. Определим

$$\sigma \wedge \tau\left(v_1, \ldots ,v_{k+l}\right) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \sigma\left(v_{\pi(1)}, \ldots ,v_{\pi(k)}\right) \tau\left(v_{\pi(k+1)}, \ldots ,v_{\pi(k+l)}\right). \tag{5.5}$$

Здесь $\pi \in S_{k+l}$ – перестановки из $k + l$ элементов, $\mathrm{sgn}\pi$ – знак перестановки.

Замечание 5.4. В литературе встречается 2 разных способа определения $\sigma \wedge \tau$. Везде далее мы будем использовать определение ((5.5)). В альтернативном определении вместо множителя $\frac{1}{k!l!}$ используется $\frac{1}{(k+l)!}$.

Пример 5.2. Пусть $k = l = 1$.

Здесь

$$\pi \in S_{1+1} = S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда

$$\sigma \wedge \tau\,(v_1, v_2) = \frac{1}{1!1!}\,(+\sigma(v_1)\tau(v_2) + (-1)\sigma(v_2)\tau(v_1)) = \sigma(v_1)\tau(v_2) - \sigma(v_2)\tau(v_1).$$

Замечание 5.5. Для альтенативного определения пример выше будет иметь вид

$$\sigma \wedge \tau(v_1,v_2) = \frac{\sigma(v_1)\tau(v_2) - \sigma(v_2)\tau(v_1)}{2}.$$

Замечание 5.6. Отметим, что определение ((6.4)), которое мы используем, – это обобщение определителя.

Альтернативное же определение – это формула альтернирования из курса линейной алгебры.

Лекция 6

Векторное пространство полилинейных кососимметричных функций

Работаем с полилинейной алгеброй. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$. $\Lambda^k V^*$ – векторное пространство полилинейных кососимметрических функций от k векторов. Если

$$\sigma \in \Lambda^k V^*, \;\; X_1, \ldots, X_k \in V,$$

то

$$\sigma(X_1, \ldots, X_k) \in \mathbb{R}.$$

Рассматриваемые $\sigma \in \Lambda^k V^*$ обладают следующими свойствами:

1. Линейность по каждому аргументу (полилинейность):

$$\sigma\left(\alpha X_1' + \beta X_1'', X_2, \ldots, X_k\right) = \alpha\sigma\left(X_1', X_2, \ldots, X_k\right) + \beta\sigma\left(X_1'', X_2, \ldots, X_k\right),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Коссосиметричность, то есть при перемене местами двух аргументов меняется знак:

$$\sigma\left(X_1, \ldots, \underset{i}{X_i}, \ldots, \underset{j}{X_j}, \ldots, X_k\right) = -\sigma\left(X_1, \ldots, \underset{i}{X_j}, \ldots, \underset{j}{X_i}, \ldots, X_k\right).$$

Следствие. Если два аргумента равны, то результат применения σ к этим аргументам равен 0.

Доказательство:
Здесь

$$\sigma\left(X, X, X_3, \ldots, X_k\right) = -\sigma\left(X, X, X_3, \ldots, X_k\right),$$

откуда получаем, что

$$\sigma\left(X, X, X_3, \ldots, X_k\right) = 0.$$

■

Обсудим, какие есть операции в $\Lambda^k V^*$.

1. Сложение

$$+ : \; \Lambda^k V^* \times \Lambda^k V^* \; \to \; \Lambda^k V^*;$$

2. Умножением на число $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda\cdot : \; \Lambda^k V^* \; \to \; \Lambda^k V^*,$$

$$(\lambda\sigma)\left(X_1, \ldots, X_k\right) = \lambda\sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right);$$

Первые две операции превращают $\Lambda^k V^*$ в векторное пространство.

3. Наконец, третья операция[13], $\wedge$, превращает рассматриваемое множество в алгебру.

   Пусть $\sigma \in \Lambda^k V^*$, $\tau \in \Lambda^l V^*$. Тогда
   $$\sigma \wedge \tau \in \Lambda^{k+l} V^*.$$
   Здесь[14]
   $$\sigma \wedge \tau \left(X_1, \ldots, X_{k+l}\right) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}\pi \sigma \left(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}\right) \tau \left(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(k+l)}\right). \tag{6.1}$$

Перейдем к обсуждению **свойств** $\wedge$.

1. Справедливо
   $$(\sigma_1 + \sigma_2) \wedge \tau = \sigma_1 \wedge \tau + \sigma_2 \wedge \tau,$$
   $$\sigma \wedge (\tau_1 + \tau_2) = \sigma \wedge \tau_1 + \sigma \wedge \tau_2;$$

2. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то
   $$(\lambda\sigma) \wedge \tau = \lambda (\sigma \wedge \tau),$$
   $$\sigma \wedge (\lambda\tau) = \lambda (\sigma \wedge \tau);$$

   Эти два свойства дают линейность $\wedge$.

3. Пусь $\sigma \in \Lambda^k V^*$. Обозначим
   $$\deg \sigma = |\sigma| = k$$
   – степень σ.

   Перейдем теперь к свойству градуированной симметричности $\wedge$:
   $$\sigma \wedge \tau = (-1)^{|\sigma||\tau|} \tau \wedge \sigma.$$
   Здесь степень -1 получается из ((6.1)), так как при перестановке местами аргументов мы получаем
   $$\left((-1)^k\right)^l = (-1)^{kl}.$$

4. Пусть $\lambda \in \mathbb{R} = \Lambda^0 V^*$. Тогда
   $$\lambda \wedge \sigma = \lambda\sigma, \ \ \sigma \in \Lambda^k V^*.$$
   Действительно,
   $$(\lambda \wedge \sigma) (X_1, \ldots, X_k) = \frac{1}{0!k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}\pi \lambda\sigma \left(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}\right) =$$

[13]Команда «wedge» в LaTeX.
[14]Существует два разных соглашения, какой множитель используется в записи ниже. Везде далее будет использоваться указанная запись.

$$= \lambda \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \mathrm{sgn}\pi \mathrm{sgn}\pi^{-1} \sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right) = \lambda \sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right) \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{\pi \in S_k} 1}_{=k!} = \lambda \sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right).$$

5. Ассоциативность:
$$(\sigma \wedge \tau) \wedge \theta = \sigma \wedge (\tau \wedge \theta). \tag{6.2}$$
Доказательство этого свойства довольно сложное. Идея заключается в следуещем. Надо показать, что и правая, и левая части ((6.2)) равны одному выражению. Пусть степени σ, τ и θ равны соответственно k, l и m. Так, например,
$$((\sigma \wedge \tau) \wedge \theta)\left(X_1, \ldots, X_{k+l+m}\right) =$$
$$= \frac{1}{k!l!m!} \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} \mathrm{sgn}\pi \sigma\left(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}\right) \times$$
$$\times \tau\left(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(K+l)}\right) \theta\left(X_{\pi(k+l+1}, \ldots, X_{ß(k+l+m)}\right).$$
Полное доказательство см. в учебниках по линейной алгебре.

Определим теперь
$$\Lambda V^* = \oplus_{k=0}^{\cdots} \Lambda^k V^*.$$
На ΛV^* опеределы операции
$$+, \lambda \cdot, \wedge : \ \Lambda V^* \ \to \ \Lambda V^*.$$
Элементами ΛV^* являются суммы, где разные слагаемые могут иметь разные степени. Заметим, что
$$\deg(\sigma \wedge \tau) = \deg \sigma + \deg \tau.$$
В силу этого ΛV^* называется *градуированной алгеброй.*

В силу свойства
$$\sigma \wedge \tau = (-1)^{\deg \sigma \deg \tau} \tau \wedge \sigma$$
градуированная алгебра ΛV^* называется коммутативной.

Итак, ΛV^* – коммутативная градуированная алгебра кососимметрических плилинейных функций на векторно пространстве V.

Сформулируем следующий факт. Подробнее он будет рассмотрен на семинарах.

Упражнение 6.1. Пусть
$$\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Lambda^1 V^*, \ \ X_1, \ldots, X_k \in V,$$
$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \in \Lambda^k V^*.$$
Тогда
$$omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k\left(X_1, \ldots, X_k\right) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \ldots & \omega_1(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(X_1) & \ldots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}$$

Подсказка: доказательство проводится по индукции. Для $k = 1$ очевидно. Переход от k к $k+1$ проводится для функции

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k) \wedge \omega_{k+1}.$$

Определитель следует разложить по последней строке.

Базис. Двойственный базис

Пусть V – векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$, $n = \dim V$.

Утверждение 6.1. В V^* тогда $\exists$ единственный базис $e^1, \ldots, e^n$ такой, что

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Базис из утверждения (6.1) называется *двойственным* к $e_1, \ldots, e_n$.

Отметим, что

$$\Lambda^1 V^* = V^*.$$

Утверждение 6.2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Тогда набор $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$, где $i_1 < \ldots < i_k$, является базисом в $\Lambda^k V^*$.

Пример 6.1. Рассмотрим случай $k = 2$.

Пусть $\sigma \in \Lambda^1 V^*$, $X, Y \in V$. Тогда[15]

$$X = \sum_i X^i e_i = X^i e_i = X^1 e_1 + \ldots + X^n e_n,$$

$$Y = Y^j e_j.$$

Тогда

$$\sigma(X,Y) = \sigma\left(X^i e_i, Y^j e_j\right) = X^i Y^j \sigma(e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i<j} X^i Y^j \sigma(e_i, e_j) + \sum_{i=j} X^i Y^j \underbrace{\sigma(e_i,e_j)}_{=0} + \sum_{i>j} X^i Y^j \underbrace{\sigma(e_i,e_j)}_{=-\sigma(e_j,e_i)}. \tag{6.3}$$

Переименуем в последней сумме индексы: $i \to j$, $j \to i$. Тогда

$$((6.3)) = \sum_{i<j} X^i Y^j \sigma(e_i, e_j) - \sum_{i<j} X^j Y^i \sigma(e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i<j} \sigma(e_i,e_j) \left(\underbrace{X^i Y^j - X^j Y^i}_{e^i \wedge e^j (X,Y)}\right) = \left(\sum_{i<j} \sigma(e_i,e_j) e^i \wedge e^j\right)(X,Y),$$

[15] Напомним, что мы пользуемся для записей соглашением Энштейна о суммировании. Если в выражении два раза встречается индекс, подразумевается сумма по этому индексу.

то есть

$$\sigma = \sum_{i<j} \underbrace{\sigma(e_i,e_j)}_{\in\mathbb{R}} e^i \wedge e^j.$$

Отдельно проговорим, почему

$$X^iY^j - X^jY^i = e^i \wedge e^j(X,Y).$$

Распишем

$$e^i \wedge e^j(X,Y) = \begin{vmatrix} e^i(X) & e^i(Y) \\ e^j(X) & e^j(Y) \end{vmatrix} = X^iY^j - X^jY^i,$$

так как

$$e^i(X) = e^i\left(X^1e_1 + \ldots + X^ne_n\right) = X^1e_i(e_1) + \ldots + X^ne^i(e_n) = X^i.$$

Обобщим теперь соображения примера выше и докажем утверждение (6.2).

Доказательство:
(Утверждение (6.2))

1. Пусть $\sigma \in \Lambda^kV^*$, $X_1,\ldots,X_k \in V$. Заметим, что для этих векторов справедлива запись

$$X_1 = X_1^ie_{i+1},\ldots,X_k = X_k^{i_k}e_{i_k}.$$

Тогда

$$\sigma\left(X_1,\ldots,X_k\right) = \sigma\left(X_1^{i_1}e_{i_1},\ldots,X_k^{i_k}e_{i_k}\right) = X_1^{i_1}\ldots X_k^{i_k}\sigma\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\right) =$$

$$= \sum i_1 < \ldots < i_k\sigma\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\right)\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sgn}\pi X_{\pi(1)}^{i_1}\ldots X_{\pi(k)}^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k}\sigma\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\right)\begin{vmatrix} e^{i_1}(X_1) & \ldots & e^{i_1}(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i_k}(X_1) & \ldots & e^{i_k}(X_k)\end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k}\sigma\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\right)e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}.$$

Итак,

$$\sigma = \sum_{i_1<\ldots<i_k}\underbrace{\sigma\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\right)}_{\in\mathbb{R}}e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}.$$

2. Мы доказали, что

$$e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k},\ \ i_1<\ldots<i_k$$

порождает Λ^kV^*. Чтобы доказать, что это базис, достаточно доказать, что они линейно независимы.

Пусть некоторая их линейная комбинация равна 0:

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} \lambda_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = 0. \tag{6.4}$$

Заметим, что

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\right) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь $j_1 < \ldots < j_k$. Для доказательства этого факта следует воспользоваться формулой через определитель. Это остается в качестве упражнения.

Далее, подставим в ((6.4)) векторы

$$e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}, \;\; j_1 < \ldots < j_k.$$

С учетом записанного выше получим

$$\lambda_{j_1 \ldots j_k} = 0.$$

Следовательно, комбинация ((6.4)) тривиальна, то есть

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$$

линейно независимы. Получаем, что это базис.

■

Контракция

Пусть $\sigma \in \Lambda^k V^*$ (линейная функция от k векторов), $X \in V$. Определим[16] *контракцию* (внутреннее произведение с вектором X) ι_X,

$$\iota_X \sigma \in \Lambda^{k-1} V^*,$$

следующим образом. Для $X_2, \ldots, X_k \in V$

$$\left(\iota_X \sigma\right)\left(X_2, \ldots, X_k\right) = \sigma\left(X, X_2, \ldots, X_k\right).$$

Итак,

$$\iota_X : \; \Lambda^k V^* \;\to\; \Lambda^{k-1} V^k.$$

Закономерно возникает вопрос: что делать в случае $k = 0$?

По определению, для $\lambda \in \mathbb{R} = \Lambda^0 V^*$ полагается

$$\iota_X \lambda = 0.$$

[16]Здесь ι – греческая буква «йота».

Вернемся немного назад и сформулируем следствие из утверждения про базис.

Следствие. Если $\dim V = n$ и $k > n$, то

$$\Lambda^k V^* = 0.$$

Доказательство:

Базис образуют элементы $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$. Таких последовательностей не больше, чем n штук. При $k = n$ последовательность $1 < 2 < \ldots < n$ единственна. Для $k > n$ такой последовательности нет, то есть $\Lambda^k V^* = 0$. ■

Утверждение 6.3. (Свойства контракции)

1. $\iota_X (\sigma_1 + \sigma_2) = \iota_X \sigma_1 + \iota_X \sigma_2$;
2. $\iota_X (\lambda \sigma) = \lambda \iota_X \sigma$;
3. $\iota_X^2 = 0$;
4. Справедливо равенство

$$\iota_X (\sigma \wedge \tau) = (\iota_X \sigma) \wedge \tau + (-1)^{\deg \sigma} \sigma \wedge (\iota_X \tau).$$

Доказательство:

1,2. Очевидно.

3. Пусть $\deg \sigma = 1$, тогда

$$\deg \iota_X \sigma = 0,$$

откуда

$$\iota_X^1 \sigma = \iota_X (\iota_X \sigma) = 0.$$

Пусть теперь $\deg \sigma \geqslant 2$. Тогда

$$\left(\iota_X^2 \sigma\right)(X_3, \ldots, X_k) = \iota_X (\iota_X \sigma)(X_3, \ldots, X_k) =$$

$$= \iota_X \sigma (X, X_3, \ldots, X_k) = \sigma (X, X, X_3, \ldots, X_k) = 0.$$

4. Пусть

$$\sigma \in \Lambda^k V^*, \;\; \tau \in \Lambda^k V^*,$$

тогда

$$\iota_{X_1} (\sigma \wedge \tau)(X_2, \ldots, X_k) = \sigma \wedge \tau (X_1, X_2, \ldots, X_k) =$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \mathrm{sgn} \pi \sigma (X_\pi(1), \ldots, X_\pi(k)) \, \tau (X_\pi(k+1), \ldots, X_\pi(k+l)) =$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{\pi \in S_{k+l} \\ \pi(1) \in \{1, \ldots, k\}}} \mathrm{sgn} \pi \sigma (\ldots) + \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{\pi \in S_k \\ \pi(1) \in \{k+1, \ldots, k+l\}}} \mathrm{sgn} \pi \sigma (\ldots) \tau (\ldots) =$$

$$= \frac{1}{l!k!} \sum_{\underbrace{\pi \in S_{k+l}}\pi(1)=1} \operatorname{sgn}\pi k\sigma\left(X_1, X_\pi(2), \ldots, X_\pi(k)\right)\tau\left(X_\pi(k+1), \ldots, X_\pi(k+l)\right) +$$

$$+ \frac{1}{k!l!} \sum_{\underbrace{\pi(k+1)=1}\pi\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}\pi\sigma\left(X_\pi(1), \ldots, X_\pi(k)\right) l\tau\left(X_\pi(k+1), \ldots, X_\pi(k+l)\right) =$$

$$= \left(\ldots_X \sigma\right) \wedge \tau\left(X_2, \ldots, X_{k+l}\right) + (-1)^k\left(\sigma \wedge \iota_X \tau\right)\left(X_2, \ldots, X_{k+l}\right).$$

■

Дифференциальные формы. Дифференциальная k-форма

Пусть дано некоторое многообразие M. $\forall\ P \in M$ существует T_PM – касательное пространство в точке P ((5.1)). Пусть X – векторное поле, $\forall\ P\ X(P) \in T_PM$ (рис. (6.1)).

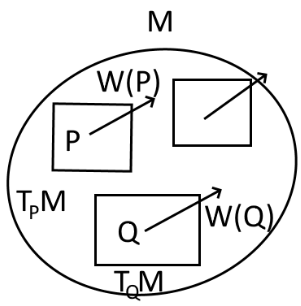


Рис. 6.1: Векторное поле X на M

Далее, ω – дифференциальная 1-форма (= ковекторное поле). $\forall\ P \in M\ \omega_P \in$ $\in T_P^kM$, то есть

$$\omega_P:\ T_PM\ \to\ \mathbb{R}$$

(рис. (6.2)).

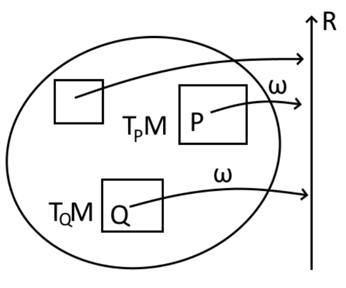


Рис. 6.2: Ковекторное поле ω на M

Если ω – 1-форма, а X – векторное поле, то $\omega(X)$ – функция на M:

$$\omega(X)(P) = \omega_P\left(X(P)\right) \in \mathbb{R}.$$

Далее, дифференциальная k-форма – это поле кососимметрических полилинейных форм от k аргументов. Если ω – k-форма, $P \in M$, $X_1, \ldots, X_k \in T_P M$, то

$$\omega_P\left(X_1, \ldots, X_k\right) \in \mathbb{R}.$$

Если ω – k-форма на M, $X_1, \ldots, X_k$ – векторные поля, то $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ – функция,

$$\omega\left(X_1, \ldots, X_k\right)(P) = \omega_P\left(X_1(P), \ldots, X_k(P)\right).$$

Определение 6.1. Дифференциальная k-форма ω называется *гладкой*, если $\forall$ гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_k$ функция $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ гладкая.

Пусть $U \subset M$ – область. Введем обозначение $\Omega^k(U)$ – *пространство гладких дифференциальных k-форм на U*. Заметим, что

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U).$$

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты в U, тогда

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

– базис в $T_P M$ для $P \in U$,

$$dx^1, \ldots, dx^n$$

– базис в $T_P^k M$ для $P \in U$.

Тогда

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \;\; i_1 < \ldots < i_k$$

– базис в $\Lambda^l T_P^* M$, то есть, если $\omega \in \Omega^k(U)$, то

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \underbrace{\omega_{i_1, \ldots, i_k}}_{\text{функция}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

где

$$\omega_{i_1, \ldots, i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right).$$

Упражнение 6.2. Показать, что ω гладкая $\iff$ все функции $\omega_{i_1, \ldots, i_k}$ гладкие.

Алгебраические операции над дифференциальными формами

Определим поточечно следующие операции:

1. Сложение:
$$\left(\omega_1 + \omega_2\right)_P = \left(\omega_1\right)_P + \left(\omega_2\right)_P;$$

2. Умножение на $f \in C^\infty(U)$:
$$\left(f\omega\right)_P = f(P)\omega_P;$$

3. Внешнее умножение:
$$(\sigma \wedge \tau)_P = \sigma_P \wedge \tau_P;$$

4. Пусть $\sigma \in \Omega^k(U)$, X – векторно поле на U. Контрактация:
$$(\iota_X \sigma)_P = \iota_{X(P)} \sigma_P.$$

Начнем, кроме того, рассматривать некоторые неалгебраические операции: F^*, d и L_X.

Пусть
$$M \overset{F}{\to} N,$$
где M, N – многообразия. Тогда
$$T_P M \overset{d_P F}{\to} T_P N.$$
Определим F^* – *обратный образ*:
$$\Omega^k(M) \overset{F^*}{\leftarrow} \Omega^k(N),$$
$$(F^*\omega)_P (X_1(P), \ldots, X_k(P)) = \omega_{F(P)} (d_P F (X_1(P)), \ldots, d_P F (X_k(P))).$$

Перейдем к внешнему дифференциалу d. Пусть сначала $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$. Тогда $df \in \Omega^1(U)$.

Итак,
$$\Omega^0(U) \overset{d}{\to} \Omega^1(U).$$
Хотелось бы продолжить далее по цепочке
$$\Omega^1(U) \overset{d}{\to} \Omega^2(U) \ \ldots$$
Оказывается, так сделать действительно можно.

Утверждение 6.4. a. Существует единственная операция d (внешний дифференциал) со свойствами

1. На $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ совпадает с дифференциалом функции;
2. $d(\sigma + \tau) = d\sigma + d\tau$;
3. Справедлива формула
$$d(\sigma \wedge \tau) = d\sigma \wedge \tau + (-1)^{|\sigma}\sigma \wedge \tau;$$
4. $d^2 = 0$.

b. В координатах для
$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

справедлива формула

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Лекция 7

Алгебраические операции с дифференциальными формами

Напомним, мы работаем с $\Omega^k(U)$ – пространством дифференциальных k-форм на области $U \subset M$. На этом пространстве определены операции сложения

$$+:\ \Omega^k(U) \times \Omega^k(U) \ \to\ \Omega^k(U),$$

умножения на гладкую функцию[17]

$$\underbrace{f}_{C^\infty(U)} \cdot :\ \Omega^k(U) \ \to\ \Omega^k(U),$$

внешнего умножения

$$\wedge:\ \Omega^k(U) \times \Omega^l(U)\ \Omega^{k+l}(U).$$

Для $\omega \in \Omega^k(U)$ будем обозначать

$$k = |\omega| = \deg \omega.$$

Удобно рассматривать[18]

$$\Omega(U) = \oplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(U)$$

– градуированную алгебру дифференциальных форм.

Кроме того, напомним, что

$$\sigma \wedge \tau = (-1)^{\deg \sigma \deg \tau} \tau \wedge \sigma,$$

то есть градуированная алгебра коммутативна.

Напомним, наконец, операцию контракции. Пусть X – векторное поле. Контракция

$$\iota_X:\ \Omega^k(U) \ \to\ \Omega^{k-1}(U)$$

является алгебраической операцией. Если $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$, то по определению $\iota_x f = 0$. В остальных случаях

$$\deg\left(\iota_X \omega\right) = \deg \omega - 1.$$

Определяется контракция как

$$\left(\iota_X \omega\right)\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \omega\left(X, X_1, \ldots, X_n\right).$$

Это алгебраические операции, которые обсуждали в прошлый раз. Далее более подробно будем говорить о неалгебраических операциях.

[17]В том числе и умножение на число λ.

[18]Напомним, что все формы степени $> \dim M$ являются нулевыми.

Обратный образ при отображении F

Будем работать с F^* – обратным образом при отображении F.

Здесь

$$M \overset{F}{\to} N$$

– гладкое отображение многообразий. Тогда для $\varphi \in C^\infty(N)$

$$M \overset{F}{\to} N \overset{\varphi}{\to} \mathbb{R}$$

можно записать как композицию

$$M \overset{F^*\varphi=\varphi\circ F}{\to} \mathbb{R}.$$

Здесь $F^*\varphi$ – обратный образ функции,

$$C^\infty() \overset{F^*}{\leftarrow} C^\infty(N).$$

Итак, определили обратный образ F^* для 0-форм, то есть гладких функций.

Далее, напомним, мы определили отображение касательных пространств:

$$T_PM \overset{d_PF}{\to} T_{F(P)}N,$$

d_PF – дифференциал F в точке P. Если $X \in T_PM$, $\varphi \in C^\infty N$, то

$$d_PF(X)\varphi = X\left(F^*\varphi\right).$$

Далее, имеем

$$M \overset{F}{\to} N,$$

$$T_PM \overset{d_PF}{\to} T_{F(P)}N.$$

Хотим отобразить

$$\Omega^k(M) \overset{F^*}{\leftarrow} \Omega^k(N),$$

где F^* называется *обратным образом формы при отображении* F. Здесь определим

$$F^*\omega\left(X_1,\ldots,X_k\right)(P) = \omega_P\left(d_PF\left(X_1(P)\right),\ldots,d_PF\left(X_k(P)\right)\right).$$

Точку P в записи выше часто опускают и пишут

$$F^*\omega\left(X_1,\ldots,X_k\right) = \omega\left(dF(X_1),\ldots,dF(X_k)\right).$$

$F^*\omega$ – обратный образ формы ω при отображении F.

Утверждение 7.1. (Свойства F^*)

1. $F^*\left(\sigma+\tau\right) = F^*\sigma + F^*\tau$;
2. $F^*\left(\sigma\wedge\tau\right) = F^*\sigma\wedge F^*\tau$;

3. $\deg F^*\omega = \deg \omega$;

4. Из свойств 1, 2, 3 следует, что

$$F^* : \ \Omega(N) \ \to \ \Omega(M)$$

– гомоморфизм градуированных алгебр.

Внешний дифференциал

Перейдем к обсуждению d – внешнего дифференциала. Это обобщение дифференциала функции.

Замечание 7.1. Заметим, что «внешний дифференциал» – название, которое сложилось исторически. Из него не следует, что есть еще какой-то внутренний дифференциал формы. Часто «внешний» в названии опускают и d называют просто дифференциалом формы.

Внешний дифференциал d мы вводили аксиоматически:

1. $d : \ \Omega^k(U) \ \to \ \Omega^{k+1}(U)$;

2. На функциях d совпадает с обычным дифференциалом:

$$df = \frac{df}{dx^i}dx^i,$$

или, воспользовавшись записью без координат,

$$df(X) = Xf.$$

3. $d\,(\sigma + \tau) = d\sigma + d\tau$;

4. Справедливо тождество Лейбница

$$d\,(\sigma \wedge \tau) = d\sigma \wedge \tau + (-1)^{\deg \sigma}\sigma \wedge d\tau;$$

5. $d^2 = 0$, то есть $d\,(d\omega) = 0$, какую бы форму ω мы бы не взяли.

Утверждение 7.2. 1. d существует и единственен;

2. В локальных координатах $x^1, \ldots ,x^n$, если

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

то

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_i \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{7.1}$$

Доказательство:

1. Пусть d существует. Тогда

$$ddx^i = d^2x^i \overset{(5)}{=} 0.$$

Здесь и далее (i) над $=$ означает номер аксиомы для d, в силу которой равенство справедливо.

Далее,

$$d\left(\underbrace{dx^{i_1}}_{\sigma}\wedge\underbrace{\ldots\wedge x^{i_k}}_{\tau}\right)\overset{(4)}{=}\underbrace{dd}_{=0}x^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}-$$

$$-dx^{i_1}\wedge\quad\underbrace{d\left(dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\right)}_{=0\text{по предположению индукции}}\quad=0,$$

$$d\omega\overset{(3)}{=}\sum_{i_1<\ldots<i_k}d\left(\underbrace{\omega_{i_1,\ldots,i_k}}_{0}\underbrace{dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}}_{\tau}\right)\overset{(4)}{=}\sum_{i_1<\ldots<i_k}(d\omega_{i_1,\ldots,i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}+$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1,\ldots,i_k}\underbrace{d\left(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\right)}_{=0}=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

Итак, из явной формулы следует, что $d\omega$ единственно.

2. Докажем существование. Определим в координатной окрестности $x^1,\ldots,x^n$ $d\omega$ формулой ((7.1)).

Проверим аксиомы d. Выполнение аксиом 1 – 3 очевидно. Покажем, что аксиома 4 тоже выполняется. Так как 3 верно, достаточно доказать 4 для

$$\sigma = f dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\in\Omega^k(U)$$

и

$$\tau = g dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}\in\Omega^l(U).$$

Тогда

$$\sigma\wedge\tau = fg dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l},$$

$$d(\sigma\wedge\tau)=\frac{\partial(fg)}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}d+f\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}=$$

$$=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}}_{d\sigma}\wedge\underbrace{g dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}}_{\tau}+$$

$$+(-1)^k\underbrace{f dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}}_{\sigma}\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}}_{d\tau}=d\sigma\wedge\tau+(-1)^{\deg\sigma}\sigma\wedge d\tau.$$

Покажем, наконец, что выполняется аксиома 5:

$$d^2\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \underbrace{\underbrace{\frac{\partial^2\omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^j \partial x^i}}_{\text{симметр. при} i\leftrightarrow j} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{\text{кососимметр. при} i\leftrightarrow j}}_{=0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Итак, для ((7.1)) все аксиомы выполнены. Осталось обсудить следующий вопрос.

Пусть у нас есть окрестность координат $x^1, \ldots, x^n$, где

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

и окрестность координат $y^1, \ldots, y^n$, где

$$d\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{\partial\omega_{j_1,\ldots,j_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$$

На пересечении координатных окрестностей оба определения $d\omega$ выше равны в силу единственности.

■

Утверждение 7.3. $F^*d = dF^*$, то есть

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Доказательство:

1. Пусть $\omega = f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$. Тогда

$$F^*(df)(X) = df(dF(X)) = dF(X)f = X(F^*f) = (d(F^*f))(X).$$

2. Пусть $\omega = df \in \Omega^1(U)$. Тогда

$$F^*(d\omega) = F^*\left(\underbrace{ddf}_{=0}\right) = 0,$$

$$d(F^*\omega) = d(F^*d) = d(dF^*f) = d^2F^*f = 0.$$

3. Общий случай. Заметим, что

$$\frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^i} dx^i.$$

Тогда

$$F^*(d\omega) = F^*\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} d\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k} F^* d\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}.$$

С другой стороны,

$$d(F^*\omega) = dF^*\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) =$$

$$= d\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} F^*\omega_{i_1,\ldots,i_k} F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}\right) =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \left(dF^*\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} + d\left(F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}\right)\right). \quad (7.2)$$

Покажем по индукции, что

$$d\left(F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}\right) = 0. \quad (7.3)$$

База индкции:

$$dF^* dx^i = F^* d^2 x^i = 0.$$

Перейдем к шагу индукции. Пусть ((7.3)) верно для $k-1$. Покажем, что тогда это равенство верно и для k:

$$d\left(F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}\right) = \underbrace{dF^* dx^{i_1}}_{=0} \wedge \left(F^* dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}\right) -$$

$$-F^* dx^{i_1} \wedge \underbrace{d\left(F^* dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}\right)}_{=0} = 0.$$

Здесь вторая часть $= 0$ по предположению индукции.

Итак,

$$((7.2)) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} F^* d\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k}.$$

■

Дифференцирование градуированной алгебры дифференциальных форм

Обсудим еще одну важную операцию. Пусть

$$A = \oplus_k A^k$$

– градуированная алгебра. Здесь k принимает значения от 0 до, может быть, ∞ (это неважно). На алгебре определены операции сложения $+$, умножения на число $\lambda\cdot$ и умножения элементов $*$, где

$$\deg(\sigma * \tau) = \deg\sigma + \deg\tau.$$

Определение 7.1. Отображение

$$D:\ A\ \to\ A$$

называется *дифференцированием градуированной алгебры A степени l (*$\deg D = l$*)*, если

1. Если $\deg\sigma = k$, то
$$\deg\left(D\sigma\right) = k + l;$$
2. $D\left(\sigma + \tau\right) = D\sigma + D\tau$;
3. Выполнено
$$D\left(\sigma * \tau\right) = D\sigma * \tau + (-1)^{\deg\sigma\deg D}\sigma * D\tau.$$

Утверждение 7.4. 1. ι_X – дифференцирование степени -1 алгебры $\Omega(U)$;

2. d – дифференцирование степени $+1$ алгебры $\Omega(U)$;

Таких операций, конечно, больше двух. Построим далее дифференцирование градуированной алгебры степени 0.

Пусть X – векторное поле.

Определение 7.2. Кривая $\gamma(t)$ многообразии M называется *интегральной кривой векторного поля X*, если $\forall\ t$

$$\dot\gamma(t) = X\left(\gamma(t)\right) \tag{7.4}$$

Запишем соответствующее условие в координатах. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты,

$$\gamma(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right),$$

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда условие ((7.4)) эквивалентно условию

$$\begin{cases} \dot x^1(t) = X^1\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right) \\ \ldots \\ \dot x^n(t) = X^n\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right) \end{cases} \tag{7.5}$$

Выше, заметим, записана система автономных ОДУ 1-го порядка. Автономность означает, что зависимость от t в правой части уравнений имеет место только через зависимость от $x^i(t)$.

Итак, геометрический смысл систем автономных ОДУ 1-го порядка связан с поиском интегральныых кривых векторного поля X.

Замечание 7.2. Систему неавтономных ОДУ можно превратить в систему автономных ОДУ, рассмотрев t как еще одну переменную.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Требуется найти такую интегральную кривую, что при $t = t_0$ она проходит через точку A:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X\left(\gamma(t)\right) \\ \gamma(t_0) = A \end{cases}$$

На языке координат это означает следующее. В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$

$$A = \left(A^1, \ldots, A^n\right).$$

Получаем, что

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = X^1\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right) \\ \ldots \\ \dot{x}^n(t) = X^n\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right) \\ x^1(t_0) = A^1 \\ \ldots \\ x^n(t_0) = A^n \end{cases}$$

Выше записана задача Коши для системы ((7.5)). Решение задачи Коши зависит от начальных данных.

Будем рассматривать случай $t_0 = 0$. Решение обозначим через $\gamma(t,A)$:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t,A) = X\left(\gamma(t,A)\right) \\ \gamma(0,A) = A \end{cases}$$

В силу теоремы о гладкой зависимости от начальных данных $\gamma(t,A)$ гладко зависит от A.

Определим отображение

$$\begin{aligned} \Phi_t^X &: \ M \ \to \ M, \\ \Phi_t^X(A) &= \gamma(t,A). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Геометрический смысл $\Phi_t^X(A)$ – куда переместится A за время t вдоль $\gamma(t,A)$.

Замечание 7.3. У описанного выше есть следующая гидродинамическая интерпретация. Представим, что в некоторой области течет поток жидкости. Здесь векторное поле X – это векторы скорости жидкости. Интегральные кривые – это траектории, по которым движутся молекулы воды.

Тогда преобразование $\Phi_t^X(A)$ говорит, в каком месте окажется крошка, брошенная в поток в точке A, в момент времени t.

Вернемся к решению задачи Коши. Мы знаем, что решение существует для t из некоторой окрестности начальных данных. Теорема единственности решения не гарантирует существование решения для всех t.

Значит, ((7.6)) определено для достаточно малых t. Заметим, что

$$\Phi_0^X = i^d,$$

$$\Phi_s^x \circ \Phi_t^X = \Phi_{s+t}^X$$

для тех s и t, для которых все отображения определены.

В силу сказанного выше и того факта, что

$$\Phi_{-t}^X = \left(\Phi_t^X\right)^{-1},$$

Φ_t^X называется *локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов*.

Определение 7.3.

$$L_X\omega = \frac{d}{dt}\left(\Phi_t^X\right)^*\omega\Big|_{t=0}$$

называется *производной Ли формы ω вдоль векторного поля X*.

Утверждение 7.5. (Свойства $L_X\omega$)

1.

Доказательство:

Покажем свойство 3. Распишем

$$L_X\left(\sigma\wedge\tau\right) = \frac{d}{dt}\left(\Phi_t^X\right)^*\left(\sigma\wedge\tau\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\left(\Phi_t^X\right)^*\sigma\wedge\left(\Phi_t^X\right)^*\tau\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\Phi_t^X\right)^*\Big|_{t=0}\wedge\left(\Phi_t^X\right)^*\tau\Big|_{t=0} + \left(\Phi_t^X\right)^*\sigma\Big|_{t=0}\wedge\frac{d}{dt}\left(\Phi_t^X\right)^*\tau\Big|_{t=0} = L_X\sigma\wedge\tau + \sigma\wedge L_X\tau.$$

■

Сформулируем еще некоторые свойства $L_X\omega$.

Утверждение 7.6. 1. $L_Xd = dL_X$;

2. Справедливо тождество цепной гомотопии Картана:

$$L_X = d\iota_X + \iota_X d;$$

3.

$$\left(L_X\omega\right)\left(X_1,\ldots,X_k\right) = X\left(\omega\left(X_1,\ldots,X_k\right)\right) - \omega\left([X_1,X_1],X_2,\ldots,X_k\right) - \ldots -$$

$$-\omega\left(X_1,\ldots,X_{k-1},[X_k,X_k]\right);$$

4. Справедливо

$$d\omega\left(X_0,X_1,\ldots,X_k\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^iX_i\omega\left(X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_k\right) +$$

$$+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}(-1)^{i+j}\omega\left([X_i,X_j],X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\widehat{X_j},\ldots,X_k\right).$$

Эти свойства будут доказаны в следующий раз.

Замечание 7.4. Заметим, что из свойств утверждения (7.5) следует, что L_x – дифференцирование градуированной алгебры дифференциальных форм $\Omega(U)$ степени 0.

Лекция 8

Запись обратного образа формы

Пусть F – отображение многообразия M (локальные координаты: $x^1, \ldots, x^m$) в многообразие N (локальные координаты: $y^1, \ldots, y^n$). Тогда F в координатах $x^1, \ldots, x^m$ и $y^1, \ldots, y^n$ имеет следующий вид:

$$y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^m), \qquad \ldots, \qquad y^n = y^n(x^1, \ldots, x^m).$$

Пусть $f \in C^\infty(N)$, тогда формально эта функция записывается так: $f(y^1, \ldots, y^n)$. Её обратный образ: $F^*f = f \circ F$. В то же время $F^*f(x^1, \ldots, x^m) = f(y^1(x^1, \ldots, x^m), \ \ldots, \ y^n(x^1, \ldots, x^m))$.

Теперь пусть $\omega = dy^i$. Тогда в силу коммутирования получаем:

$$F^*dy^i = dF^*y^i = dy^i(x^1, \ldots, x^m) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Теперь пусть $\omega = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, , \ldots, i_k}(y^1, \ldots, y^n) dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$. Тогда в силу коммутирования получаем:

$$\begin{aligned} F^*\omega = &\sum_{i_1 < \ldots < i_k} F^*\omega(y^1, \ldots, y^n) F^*dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^*dy^{i_k} = \\ = &\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega(y^1(x^1, \ldots, x^m), \ \ldots, \ y^n(x_1, \ldots, y^m)) dy^{i_1}(x^1, \ldots, x^m) \wedge \ldots \wedge \\ &\wedge dy^{i_k}(x^1, \ldots, x^m). \end{aligned}$$

Вычисление производной Ли

Рассмотрим векторное поле X, точку A и интегральную кривую $\Phi_t^X(A) = \gamma(t, A)$. Тогда $L_x\omega = \dfrac{d}{dt} \left(\Phi_t^X\right)^* \omega \Big|_{t=0}$.

Введём локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$. Пусть $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда уравнение интегральной кривой можно записать так:

$$\begin{aligned} &\dot{x}^1 = X^1(x^1, \ldots, x^n), \qquad \ldots, \qquad \dot{x}^n = X^n(x^1, \ldots, x^n), \\ &x^1(0) = A^1, \qquad \ldots, \qquad x^n(0) = A^n. \end{aligned}$$

Вспомним формулу $f(t) = f(0) + t\dot{f}(0) + o(t)$ при $t \to 0$ (по сути это определение производной). Применим эту формулу для $x^i(t)$, получим:

$$x^i(t) = x^i(0) + t\dot{x}^i(0) + o(t) = A^i + tX^i(A^1, \ldots, A^n) + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Это уравнение, которому удовлетворяет кривая $\gamma(t, A)$. Значит, что

$$(\Phi_t^X(A))^i = A^i + tX^i(A^1, \ldots, A^n) + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Так как A – произвольная точка, переобозначим A^i через x^i, получим: $\Phi_t^X : M \to \to M$ ($x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты в M) и в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ отображение Φ_t^X имеет следующий вид:

$$(\Phi_t^X)^i(x^1, \ldots, x^n) = x^i + tX^i(x^1, \ldots, x^n) + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Пусть $f(x^1, \ldots, x^n)$ – некоторая функция, тогда

$$\begin{aligned}
&(\Phi_t^X)^* f(x^1, \ldots, x^n) = \\
&= f\left(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t), \ \ldots, \ x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right); \\
&L_X f = \frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* f\bigg|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i(x^1, \ldots, x^n) + o(1)\bigg|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^i} X^i(x^1, \ldots, x^n) = Xf.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующую формулу:

$$L_X f = Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Теперь пусть $\omega \in \Omega^1(U)$. Тогда $\omega = \omega_i(x^1, \ldots, x^n)dx^i$. Запишем обратный образ:

$$\begin{aligned}
&(\Phi_t^X)^*\omega = \omega_i\left(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t), \ \ldots, \ x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right) \cdot \\
&\cdot d(x^i + tX^i(x^1, \ldots, x^n) + o(t)); \\
&L_X\omega = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j dx^i + \omega_i dX^i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j dx^i + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^l} dx^l = \left(X^j \frac{\partial \omega_l}{\partial x^j} + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^l}\right) dx^l.
\end{aligned}$$

Упражнение 8.1. Найти явную формулу для $L_X\omega$ для $\omega \in \Omega^k(U)$.

Утверждение 8.1. $L_X d = dL_X$.

Доказательство:

$$L_X d\omega = \frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* d\omega\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} d(\Phi_t^X)^*\omega\bigg|_{t=0} = d\frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^*\omega\bigg|_{t=0} = dL_X\omega.$$

■

Тождество цепной гомотопии Картана

Утверждение 8.2. $L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$, *или* $L_X\omega = \iota_X(d\omega) + d(\iota_X\omega)$.

Доказательство:

1) Проверим для $\omega = f \in C^\infty(U)$:

$$L_X f = Xf = df(X); \qquad \iota_X(df) + d(\iota_X f) = df(X).$$

2) Проверим для $\omega = df$, где $f \in C^\infty(U)$:

$$L_X df = d(L_X f) = d(Xf); \qquad \iota_X(ddf) + d(\iota_X df) = d(df(X)) = d(Xf).$$

3) Докажем, что $\iota_X \circ d + d \circ \iota_X$ является дифференцированием градуированной алгебры $\Omega(U)$ степени 0:

$$\begin{aligned}
&\deg \omega = k, \qquad \deg d\omega = k+1, \qquad \deg \iota_X\omega = k-1;\\
&\deg(\iota_X d\omega) = k+1-1 = k, \quad \deg(d\iota_X\omega) = k-1+1 = k \quad \Rightarrow \quad \deg = 0.
\end{aligned}$$

Введём обозначение $\mathcal{D} \coloneqq \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$. Тогда $\mathcal{D}(\sigma+\tau) = \mathcal{D}\sigma + \mathcal{D}\tau$.

Надо проверить, что $\mathcal{D}(\sigma \wedge \tau) = \mathcal{D}\sigma \wedge \tau + \sigma \wedge \mathcal{D}\tau$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\sigma \wedge \tau) = \iota_X(d(\sigma\wedge\tau)) + d(\iota_X(\sigma\wedge\tau)) =\\
&= \iota_X\left(d\sigma\wedge\tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge d\tau\right) + d\left(\iota_X\sigma\wedge\tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge\iota_X\tau\right) =\\
&= \iota_X(d\sigma)\wedge\tau + (-1)^{|\sigma|+1}d\sigma\wedge\iota_X\tau + (-1)^{|\sigma|}\iota_X\sigma\wedge d\tau + \left((-1)^{|\sigma|}\right)^2\sigma\wedge\iota_X d\tau +\\
&+ d(\iota_X\sigma)\wedge\tau + (-1)^{|\sigma|-1}\iota_X\sigma\wedge d\tau + (-1)^{|\sigma|}d\sigma\wedge\iota_X\tau + \left((-1)^{|\sigma|}\right)^2\sigma\wedge d(\iota_X\tau) =\\
&= \iota_X(d\sigma)\wedge\tau + \sigma\wedge\iota_X(d\tau) + d(\iota_X\sigma)\wedge\tau + \sigma\wedge d(\iota_X\tau) =\\
&= (\iota_X(d\sigma) + d(\iota_X\sigma))\wedge\tau + \sigma\wedge(\iota_X(d\tau) + d(\iota_X\tau)) = \mathcal{D}\sigma\wedge\tau + \sigma\wedge\mathcal{D}\tau.
\end{aligned}$$

4) Пусть $\omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$.

$$\begin{aligned}
L_X\omega &= \sum_{i_1<\ldots<i_k} L_X\omega_{i_1,\ldots,i_k} L_X dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge L_X dx^{i_k} =\\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \mathcal{D}\omega_{i_1,\ldots,i_k}\mathcal{D}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathcal{D}dx^{i_k} = \mathcal{D}\omega.
\end{aligned}$$

■

Вычисление производной Ли (продолжение)

Утверждение 8.3. *Пусть X, $Y_1, \ldots, Y_k$ – векторные поля на U, $\omega \in \Omega^k(U)$. Тогда*

$$L_X(\omega(Y_1,\ldots,Y_k)) = (L_X\omega)(Y_1,\ldots,Y_k) + \sum_{i=1}^k \omega(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_k).$$

Доказательство:

$$[X, Y_i]^j = X^s \frac{\partial Y_i^j}{\partial x^s} - Y_i^s \frac{\partial X^j}{\partial x^s}.$$

Рассмотрим частный случай: $\omega = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_k) = \sum_{i=1}^{k} \begin{vmatrix} Y_1^{j_1} & \ldots & [X, Y_i]^{j_1} & \ldots & Y_k^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{j_k} & \ldots & [X, Y_i]^{j_k} & \ldots & Y_k^{j_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} X^s \begin{vmatrix} Y_1^{j_1} & \ldots & \dfrac{\partial Y_i^{j_1}}{\partial x^s} & \ldots & Y_k^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{j_k} & \ldots & \dfrac{\partial Y_i^{j_k}}{\partial x^s} & \ldots & Y_k^{j_k} \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^{k} \begin{vmatrix} Y_1^{j_1} & \ldots & Y_i^s \dfrac{\partial X^{j_1}}{\partial x^s} & \ldots & Y_k^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{j_k} & \ldots & Y_i^s \dfrac{\partial X^{j_k}}{\partial x^s} & \ldots & Y_k^{j_k} \end{vmatrix} =$$

$$= X^s \frac{\partial}{\partial x^s} \begin{vmatrix} Y_1^{j_1} & \ldots & Y_k^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{j_k} & \ldots & Y_k^{j_k} \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+j} \sum_{p=1}^{k} Y_i^s \frac{\partial X^{j_p}}{\partial x^s} \begin{vmatrix} Y_1^{j_1} & \ldots & Y_k^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{j_k} & \ldots & Y_k^{j_k} \end{vmatrix}_{\substack{\text{без строки } i \\ \text{и стобца } p}} =$$

$$= L_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{p=1}^{k} \begin{vmatrix} Y_1^{j_1} & \ldots & Y_k^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X^{j_p}}{\partial x^s} Y_1^s & \ldots & \dfrac{\partial X^{j_p}}{\partial x^s} Y_k^s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{j_k} & \ldots & Y_k^{j_k} \end{vmatrix} =$$

$$= L_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{p=1}^{k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial X^{j_p}}{\partial x^s} dx^s \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} =$$

$$= L_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{p=1}^{k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge L_X dx^{j_p} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} =$$

$$= L_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) - (L_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_k).$$

Теперь пусть $\omega = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ и пусть $\sigma = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Тогда:

$$L_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) = L_X(f\sigma(Y_1, \ldots, Y_k)) = Xf\sigma(Y_1, \ldots, Y_k) + fL_X(\sigma(Y_1, \ldots, Y_k)) =$$

$$= Xf\sigma(Y_1, \ldots, Y_k) + f(L_X\sigma)(Y_1, \ldots, Y_k) + \sum_{i=1}^{k} \sigma(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_k) =$$

$$= (L_X(f\sigma))(Y_1, \ldots, Y_k) + \sum_{i=1}^{k} f\sigma(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_k) =$$

$$= (L_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_k) + \sum_{i=1}^{k} \omega(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_k)$$

■

Вычисление дифференциала от формы без использования координат

Утверждение 8.4. *Пусть $\omega \in \Omega^k(U)$ и $Y_0, \ldots, Y_k$ – векторные поля. Тогда*

$$d\omega(Y_0, \ldots, Y_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i Y_i \left(\omega\left(Y_0, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots, Y_k\right)\right) +$$
$$+ \sum_{0 \leqslant i<j \leqslant k} (-1)^{i+j} \omega\left([Y_i, Y_j], Y_0, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots, \hat{Y}_j, \ldots, Y_k\right),$$

где символ «крышечка» обозначает отсутствие в записи.

Рассмотрим примеры:

1) Пусть $\omega = f \in C^\infty = \Omega^0(U)$, тогда:

$$df(Y_0) = Y_0 f.$$

2) Пусть $\omega \in \Omega^1(U)$, тогда:

$$d\omega(Y_0 Y_1) = Y_0\omega(Y_1) - Y_1\omega(Y_0) - \omega([Y_0, Y_1]).$$

Докажем в этом случае:

Доказательство:

$$d\omega(Y_0 Y_1) = (\iota_{Y_0} d\omega)(Y_1) \ominus$$

Учитывая формулу цепной гомотопии Картана $L_{Y_0}\omega = \iota_{Y_0}(d\omega) + d(\iota_{Y_0}\omega)$, получаем:

$$\ominus\ (L_{Y_0}\omega)(Y_1) - d(\iota_{Y_0}\omega)(Y_1) = Y_0\omega(Y_1) - \omega([Y_0, Y_1]) - Y_1\omega(Y_0).$$

■

Теперь докажем утверждение (8.4) по индукции по степени формы:

Доказательство:
Пусть для $(k-1)$-форм доказано.

$$d\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_k) = (\iota_{Y_0} d\omega)(Y_1, \ldots, Y_k) = (L_{Y_0}\omega)(Y_1, \ldots, Y_k) -$$
$$- d(\iota_{Y_0}\omega)(Y_1, \ldots, Y_k) = Y_0\omega(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_{i=1}^{k} \omega(Y_1, \ldots, [Y_0, Y_i], \ldots, Y_k) -$$
$$- d(\iota_{Y_0}\omega)(Y_1, \ldots, Y_k).$$

Для $d(\iota_{Y_0}\omega)(Y_1, \ldots, Y_k)$ есть формула по индукции. ■

Интегрирование форм в $\mathbb{R}^n$

В случае $\mathbb{R}^1$ формула замены переменной $x = \varphi(y)$ в интеграле выглядит следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy. \tag{8.1}$$

Пусть $\omega = f(x)\,dx$, тогда $\int\limits_a^b \omega = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi^*\omega$.

В случае $\mathbb{R}^n$ формула замены переменной в интеграле выглядит следующим образом:

$$\int\limits_D f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_D f(x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n))|\det J|\,dy^1 \ldots dy^n,$$

где $J = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ – матрица Якоби.

При $n = 1$ получим:

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx = \int\limits_{[\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)]} f(\varphi(y))|\varphi'(y)|\,dy. \tag{8.2}$$

Возникает вопрос: почему в формуле (8.1) стоит $\varphi'(y)$, а в формуле (8.2) стоит $|\varphi'(y)|$? Дело в разных определениях интеграла.

Интеграл в $\mathbb{R}^1$ определяется как предел интегральных сумм $\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Заметим, что Δx_i может быть как положительной величиной, так и отрицательной.

Интеграл в $\mathbb{R}^n$ определяется как предел интегральных сумм $\sum\limits_i f(\xi_i) \prod\limits_{a=1}^{n} |\Delta x_i^a|$, где $\xi_i \in [x_i^1, x_{i+1}^1] \times \ldots \times [x_i^n, x_{i+1}^n]$ и $\Delta x_i^a = x_{i+1}^a - x_i^a$. При $n = 1$ это даёт предел интегральных сумм $\sum\limits_i f(\xi_i)|\Delta x_i|$.

Таким образом, если $b > a$, то $\int\limits_a^b = \int\limits_{[a,\,b]}$, а если $b < a$, то $\int\limits_a^b = -\int\limits_{[a,\,b]}$.

Поставим вопрос.

Дано:

1) $\mathbb{R}^n$, $x^1, \ldots, x^n$ – какие-то (может быть, криволинейные) координаты, $y^1, \ldots, y^n$ – другие координаты;

2) $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, то есть $\omega = f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Как преобразовывается ω при замене координат $x^1 = x^1(y^1, \ldots, y^n)$, …, $x^n = x^n(y^1, \ldots, y^n)$?

Замена координат – частный случай обратного образа. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\omega = f(x^1(y^1, \ldots, y^n),\ \ldots,\ x^n(y^1, \ldots, y^n))\, dx^1(y^1, \ldots, y^n) \wedge \ldots \wedge dx^n(y^1, \ldots, y^n) = \\
&= f(x^1(y^1, \ldots, y^n),\ \ldots,\ x^n(y^1, \ldots, y^n)) \frac{\partial x^1}{\partial y^{i_1}}\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial y^{i_n}}\, dy^{i_n} = \\
&= f(x^1(y^1, \ldots, y^n),\ \ldots,\ x^n(y^1, \ldots, y^n)) \cdot \\
&\cdot \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \frac{\partial x^1}{\partial y^{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^{\pi(n)}}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \\
&= f(x^1(y^1, \ldots, y^n),\ \ldots,\ x^n(y^1, \ldots, y^n)) \det J\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n,
\end{aligned}$$

где $J = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ – матрица Якоби.

Получили следующее:

Утверждение 8.5. *Для n-форм на $\mathbb{R}^n$:*

$$f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = f(x^1(y^1, \ldots, y^n),\ \ldots,\ x^n(y^1, \ldots, y^n)) \det J\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

Определение 8.1. Пусть $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, то есть $\omega = f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Определим

$$\int\limits_D \omega = \int\limits_D f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n.$$

Утверждение 8.6. *Определение (8.1) корректно, если рассматривать только замены переменных с положительным якобианом.*

Доказательство:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_D f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \coloneqq \int\limits_D f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \\
&= \int\limits_D f(x^1(y^1, \ldots, y^n), \; \ldots, \; x^n(y^1, \ldots, y^n))|\det J| dy^1 \ldots dy^n = \\
&= \int\limits_D f(x^1(y^1, \ldots, y^n), \; \ldots, \; x^n(y^1, \ldots, y^n)) \det J\, dy^1 \ldots dy^n = \\
&= \int\limits_D f(x^1(y^1, \ldots, y^n), \; \ldots, \; x^n(y^1, \ldots, y^n)) \det J\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n,
\end{aligned}$$

то есть $\int\limits_D \omega$ не зависит от выбора координат. ■

Лекция 9

Интегрирование форм в $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Рассмотрим область $U \subset \mathbb{R}^n$.

Из линейной алгебры: V ориентировано, если в V выбран класс эквивалентности одинаково ориентированных базисов. Но можно сказать и так: V ориентировано, если в V выбран класс эквивалентности декартовых координат с $\det T > 0$, где T – матрица перехода от одних координат к другим.

Пусть в U есть локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$.

Определение 9.1. $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ *одинаково ориентированы*, если $\det J > 0$, где $J = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ – матрица Якоби.

Определение 9.2. Область $U \subset \mathbb{R}^n$ *ориентирована*, если выбран класс эквивалентности одинаково ориентированных координат.

Пусть $\omega \in \Omega^n(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\omega = f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Пусть $y^1, \ldots, y^n$ – другие координаты. На предыдущем семинаре было показано, что

$$\omega = f(x^1(y^1, \ldots, y^n),\ \ldots,\ x^n(y^1, \ldots, y^n)) \det J\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n,$$

где $J = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ – матрица Якоби. При этом есть формула преобразования координат в интеграле:

$$\int\limits_D f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_D f(x^1(y^1, \ldots, y^n),\ \ldots,\ x^n(y^1, \ldots, y^n))|\det J|\, dy^1 \ldots dy^n.$$

Определение 9.3.

$$\int\limits_D \omega = \int\limits_D f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n := \int\limits_D f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n.$$

Утверждение 9.1. *Если U ориентировано и рассматриваются только положительно ориентированные координаты, то определение (9.3) корректно.*

Интегрирование форм на гладких регулярных поверхностях

Пусть в $\mathbb{R}^k$ заданы локальные координаты $u^1, \ldots, u^k$ и область $D \subset \mathbb{R}^k$. Пусть r – отображение D в $\mathbb{R}^n$, Σ – образ этого отображения. Тогда $\dim \Sigma = k$.

Пусть $\omega \in \Omega^k(\Sigma)$. Тогда $\omega = f(u^1, \ldots, u^k)\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^k$.

Выберем ориентацию Σ. Это значит, что мы рассматриваем такие локальные системы координат, что якобиан перехода между ними положительный. Тогда интегрирование форм происходит аналогично случаю в $\mathbb{R}^k$.

Традиция: обычно интегрируют k-форму, заданную в $\mathbb{R}^n$. То есть $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, $D \xrightarrow{r} \mathbb{R}^n$, и если $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, то $\int\limits_\Sigma \omega \coloneqq \int\limits_\Sigma i^*\omega = \int\limits_D r^*\omega$.

Рассмотрим примеры.

1) Кривая в $\mathbb{R}^2$: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Пусть $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, то есть $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega &= P(x(t),y(t))\,dx(t) + Q(x(t),y(t))\,dy(t) = \\ &= (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt;\end{aligned}$$

$$\int\limits_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt.$$

Получили криволинейный интеграл 2-го рода в $\mathbb{R}^2$.

2) Кривая в $\mathbb{R}^3$. Этот случай аналогичен.

$$\begin{aligned}&\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3);\\ &\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t)) : (a,b) \to \mathbb{R}^3;\\ &\gamma^*\omega = P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\,dt + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\,dt + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt;\\ &\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \gamma^*\omega = \\ &= \int\limits_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,dt.\end{aligned}$$

Получили криволинейный интеграл 2-го рода в $\mathbb{R}^3$.

3) Поверхность в $\mathbb{R}^3$: $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, $\dim\Sigma = 2$. Пусть r – отображение двумерной области D с координатами (u,v) на поверхность Σ в трёхмерном пространстве с координатами (x,y,z). Тогда $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Пусть $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, то есть $\omega = P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy$. Тогда получаем:

$$\int\limits_\Sigma \omega \coloneqq \int\limits_D r^*\omega = \int\limits_D \left(P(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + Q(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix} + R(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right) du\wedge dv.$$

Получили поверхностный интеграл 2-го рода.

Интегрирование форм на многообразиях

Рассмотрим многообразие M. Пусть оно покрыто картами, некоторая область $U_\alpha \subset M$ отображается в $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ с локальными координатами $x^1, \ldots, x^n$ (отображение φ_α), а другая область $U_\beta \subset M$ – в $V_\beta \subset \mathbb{R}^n$ с локальными координатами $y^1, \ldots, y^n$ (отображение φ_β). Пусть эти две области имеют непустое пересечение, на котором между координатами $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ существует отображение $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ – замена координат (функция склейки): $y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n)$.

Определение 9.4. Карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и карта (U_β, φ_β) *одинаково ориентированы*, если $\det J_{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} > 0$, где $J = \left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ – якобиан замены координат.

Определение 9.5. Атлас $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M называется *ориентированным*, если все карты одинаково ориентированы.

Определение 9.6.

Если на многообразии M можно выбрать ориентированный атлас, то M называется *ориентируемым*.

M с таким выбранным атласом называется *ориентированным*.

Если на M нельзя выбрать ориентированный атлас, то M называется *неориентируемым*.

Пусть $\dim M = n$, $\omega \in \Omega^n(M)$.

Определение 9.7. $\operatorname{supp} \omega = \overline{\{A \in M \mid \omega(A) \neq 0\}}$ – *носитель формы* ω.

Пусть $\operatorname{supp} \omega \subset U_\alpha$. Тогда:

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{U_\alpha} \omega = \int\limits_{V_\alpha} f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Если дополнительно известно, что $\operatorname{supp} \omega \subset U_\beta$, то будет аналогично со случаем области в пространстве. В U_α и в U_β есть локальные координаты, интеграл можно записать и в одних координатах, и в других, так как все замены координат с положительным определителем. Интеграл тогда определяется так:

$$\int\limits_{V_\alpha} f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int\limits_{V_\alpha} f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n.$$

Пусть теперь $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие многообразия.

Определение 9.8.

Набор гладких функций ρ_i называется *разбиением единицы, подчинённым покрытию* $\{U_\alpha\}$, если:

1) $\rho_i \geqslant 0$;

2) $\forall i \ \ \exists \alpha(i)\colon\ \operatorname{supp} \rho_i \subset U_{\alpha(i)}$;

3) $\sum\limits_{i\in I} \rho_i(x) \equiv 1$ (множество I может быть не только неконечным, но и несчётным), причём в каждой точке x только конечное количество ρ_i отлично от 0.

Определение 9.9.

Набор гладких функций ρ_α называется *разбиением единицы, подчинённым покрытию $\{U_\alpha\}$ с тем же множеством индексов*, если:

1) $\rho_\alpha \geqslant 0$;

2) $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$;

3) $\sum\limits_{\alpha\in A} \rho_\alpha(x) \equiv 1$ (множество A может быть не только неконечным, но и несчётным), причём в каждой точке x только конечное количество ρ_α отлично от 0.

Пусть теперь многообразие M ориентировано, то есть выбран атлас $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, и ρ_α – разбиение единицы. Пусть $\omega \in \Omega^n(M)$. Тогда $\operatorname{supp}(\rho_\alpha\omega) \subset \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$.

Определение 9.10.

$$\int\limits_M \omega := \sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

Утверждение 9.2. $\int\limits_M \omega$ *из определения (9.10) не зависит от выбора атласа A и разбиения единицы.*

Доказательство:

Пусть $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и ρ_α – атлас и разбиение единицы, $\tilde{A} = \{(W_\beta, \psi_\beta)\}$ и σ_β – другие атлас и разбиение единицы. Причём пусть $A \cup \tilde{A}$ – ориентированный атлас.

$$\sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega = \sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \left(\sum_\beta \sigma_\beta\right) \rho_\alpha\omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int\limits_{U_\alpha} \sigma_\beta\rho_\alpha\omega \circleddash$$

$\operatorname{supp} \sigma_\beta\rho_\alpha\omega \subset \operatorname{supp} \sigma_\beta\rho_\alpha = \operatorname{supp} \sigma_\beta \cap \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset W_\beta \cap U_\alpha$;

$$\circleddash \sum_\alpha \sum_\beta \int\limits_{W_\beta\cap U_\alpha} \sigma_\beta\rho_\alpha\omega;$$

$$\sum_\beta \int\limits_{W_\beta} \sigma_\beta\omega = \sum_\beta \int\limits_{W_\beta} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) \sigma_\beta\omega = \sum_\beta \sum_\alpha \int\limits_{W_\beta} \sigma_\beta\rho_\alpha\omega = \sum_\beta \sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha\cap W_\beta} \sigma_\beta\rho_\alpha\omega.$$

■

Теорема Стокса

Пусть D – область в $\mathbb{R}^2$, обходимая по границе $\gamma = \partial D$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Тогда:

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

– формула Грина из математического анализа.

Пусть $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Тогда:

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\right) \wedge dy =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Значит, формула Грина может быть записана следующим образом:

$$\oint\limits_{\partial D} \omega = \iint\limits_{D} d\omega.$$

Но заметим, что область D не является многообразием, так как в многообразии у каждой точки должна быть окрестность, гомеоморфная открытому диску (у граничных точек область D таких окрестностей нет).

Теперь пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ и $\Sigma = \partial V$ (граница ориентирована наружу). Тогда:

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

– формула Гаусса-Остроградского. Можно аналогично убедиться, что эта формула может быть записана следующим образом:

$$\iint\limits_{\partial V} \omega = \iiint\limits_{V} d\omega.$$

Причём снова область V не является многообразием.

Пусть $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \mid x^1 \leqslant 0\}$ – n-мерное полупространство.

Определение 9.11. На *многообразии с краем* кроме карт со значениями в $\mathbb{R}^n$ могут быть карты со значениями в $\mathbb{H}^n$.

Рассмотрим на многообразии две области U_α и U_β с непустым пересечением, причём пусть они отображаются в $V_\alpha \subset \mathbb{H}^n$ и в $V_\beta \subset \mathbb{H}^n$ соответственно (отображения φ_α и φ_β). Тогда отображение общей части из V_α в V_β будет $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Потребуем, чтобы это отображение было диффеоморфизмом. Диффеоморфизм переводит внутренние точки во внутренние точки (по теореме об обратной функции). Значит, край многообразия ∂M состоит из таких точек x, что $x^1(\varphi_\alpha(x)) = 0$. Тогда $\Big(U_\alpha \cap \partial M,\, \varphi_\alpha\big|_{U_\alpha \cap \partial M}\Big)$ – карты на ∂M и $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\big|_{x^1=0\,\cap V_\alpha}$ – диффеоморфизм на области определения. Значит, $A' = \Big\{\Big(U_\alpha \cap \partial M,\, \varphi_\alpha\big|_{U_\alpha \cap \partial M}\Big)\Big\}$ – атлас на крае (будем называть его *индуцированным*) и ∂M – гладкое многообразие.

В качестве примера рассмотрим единичную сферу в n-мерном пространстве с центром в начале координат. Пусть $S^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \mid x^n \geqslant 0\}$, тогда $\partial S^n_+ = S^{n-1} = S^n_+\big|_{x^n=0}$.

Пусть теперь многообразие M ориентировано. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ – локальные координаты на M, соответствующие картам, содержащим край. Так как M ориентировано, то $y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n)$, …, $y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n)$ и $\det\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) > 0$. Рассмотрим, что происходит при $x^1 = 0$ (на границе). Тогда

$$J\big|_{x^1=0} = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & 0 \ \ldots \ 0 \\ \hline \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \\ \vdots & \left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{2\leqslant i,\, j\leqslant n} \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \end{array}\right),$$

где $\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{2\leqslant i,\, j\leqslant n} = J_{\partial M}$. Заметим, что $\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} > 0$ в силу того, что $x^1 = 0$ и $y^1 = 0$ – границы. Так как $\det J > 0$ и $\det J = \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} \cdot \det J_{\partial M}$, то $\det J_{\partial M} > 0$. Таким образом, мы доказали следующее:

Утверждение 9.3. *Индуцированный атлас является ориентированным.*

Если $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты на M, то $x^2, \ldots, x^n$ – локальные координаты на ∂M.

Определение 9.12. Задаваемая этим атласом ориентация на ∂M называется *индуцированной из ориентации M ориентацией.*

Теорема 9.1 (Теорема Стокса). *Пусть M – ориентированное многообразие размерности n, а ∂M – край M с индуцированной ориентацией. Пусть $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega.$$

Замечание 9.1. Интегрирование по ∂M понимается в следующем смысле. Если N – подмногообразие M (отображение i) и $\omega \in \Omega(M)$, то $\displaystyle\int\limits_N \omega = \int\limits_N i^*\omega$, где $i^*\omega = \omega\big|_N$.

Лекция 10

Теорема Стокса (продолжение)

Теорема 10.1 (Теорема Стокса)**.** *Пусть M – ориентированное многообразие размерности n, а ∂M – край M с индуцированной ориентацией. Пусть $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega.$$

Замечание 10.1. Интегрирование по ∂M понимается в следующем смысле. Так как ∂M – подмногообразие M (отображение i), то $\int\limits_{\partial M} \omega := \int\limits_{\partial M} i^*\omega$, где $i^*\omega = \omega\big|_{\partial M}$.

i в координатах $x^1, \ldots, x^n$ устроено так: $i(x^2, \ldots, x^n) = (0, x^2, \ldots, x^n)$.

Так как $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, то

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{2,\ldots,n}\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n + \omega_{1,3,\ldots,n}\, dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots = \\ &= \sum_i \omega_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.\end{aligned}$$

Учитывая, что для $i^*\omega$ выполняется $x^1 = 0$ и $dx^1 = 0$, получаем:

$$i^*\omega = \omega_{2,\ldots,n}(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Замечание 10.2. Если $\partial M = \varnothing$, то теорема верна в виде $\int\limits_M d\omega = 0$.

Замечание 10.3. При другом соглашении об индуцированной ориентации края формула Стокса имеет вид

$$\int\limits_{\partial M} \omega = (-1)^n \int\limits_M d\omega.$$

Докажем теорему Стокса (10.1).

Доказательство:

Пусть U_α – покрытие картами многообразия M, ρ_α – разбиение единицы с тем же множеством индексов. Тогда $\partial M \cap U_\alpha$ – покрытие картами и $\rho_\alpha\big|_{\partial M}$ – разбиение единицы с тем же множеством индексов.

Достаточно доказать Стокса для форм с носителем внутри одной карты. В самом деле, $\int\limits_{\partial M} \omega = \sum\limits_\alpha \int\limits_{\partial M} \rho_\alpha \omega$, причём $\operatorname{supp} \rho_\alpha \omega \subset \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$. Тогда получаем:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial M} \omega = \sum_\alpha \int\limits_{\partial M} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int\limits_M d(\rho_\alpha \omega) = \sum_\alpha \int\limits_M (d\rho_\alpha \wedge \omega + \rho_\alpha\, d\omega) = \\
&= \int\limits_M \left(\sum_\alpha d\rho_\alpha \right) \omega + \sum_\alpha \int\limits_M \rho_\alpha\, d\omega \circleddash \\
&\sum_\alpha \rho_\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \sum_\alpha d\rho_\alpha = 0; \\
&\circleddash \sum_\alpha \int\limits_M \rho_\alpha\, d\omega = \int\limits_M d\omega.
\end{aligned}
$$

Пусть $U_\alpha \subset M$ отображается в $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ (отображение φ_α). Заметим, что $\mathbb{R}^n$ диффеоморфно $(-1;\ 1)^n$ (отображение ψ): для этого можно взять отображение $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x^1,\ \ldots,\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x^n \right)$. Заменим атлас $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на атлас $A' = \{(U_\alpha,\ \psi \circ \varphi_\alpha)\}$, то есть можно, при необходимости заменив атлас, считать, что образы карт лежат в кубах $(-1;\ 1)^n$.

Если $\int\limits_{\partial M} \omega_i = \int\limits_M d\omega_i$, где $i = 1, 2$, то $\int\limits_{\partial M} (\omega_1 + \omega_2) = \int\limits_M d(\omega_1 + \omega_2)$. Тогда достаточно доказать для $\omega = \omega_{1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$, причём $\operatorname{supp} \omega \subset U_\alpha$.

Случай 1: $U_\alpha \cap \partial M = \varnothing$.

$\int\limits_{\partial M} \omega = 0$, так как $\operatorname{supp} \omega \subset U_\alpha$. Значит, $\omega_i = 0$ на ∂M.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_M d\omega = \int\limits_{U_\alpha} \frac{\partial \omega_{1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \hat{dx^i} \wedge \ldots dx^n = \\
&= (-1)^{i-1} \int\limits_{(-1;\ 1)^n} \frac{\partial \omega_{1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n}}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \\
&= (-1)^{i-1} \int\limits_{(-1;\ 1)^n} \frac{\partial \omega_{1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n}}{\partial x^i}\, dx^1 \ldots dx^n = \\
&= (-1)^{i-1} \int\limits_{(-1;\ 1)^{n-1}} \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial \omega_{1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n}}{\partial x^i}\, dx^i \right) dx^1 \ldots \hat{dx^i} \ldots dx^n = 0,
\end{aligned}
$$

так как

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial \omega_{1,\,\ldots,\,\hat{i},\,\ldots,\,n}}{\partial x^i}\, dx^i = \omega(x^1,\, \ldots, 1,\, \ldots, x^n) - \omega(x^1,\, \ldots,\, -1,\, \ldots, x^n);$$

$$\omega(x^1,\, \ldots, 1,\, \ldots, x^n) = \omega(x^1,\, \ldots,\, -1,\, \ldots, x^n) = 0.$$

Случай 2: $U_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing$.

Пусть $U_\alpha \in M$ отображается в $V_\alpha \in (-1;\ 1)^n$ (отображение φ_α), причём $\partial M \subset U_\alpha$ отображается в $\{x^1 = 0\} \subset V_\alpha$.

Пусть $\omega = \omega_{1,\,\ldots,\,\hat{i},\,\ldots,\,n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$. Тогда:

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial M} i^*\omega = \begin{cases} 0, & i \neq 1 \\ \int\limits_{\partial M} \omega_{2,\,\ldots,\,n}(0, x^2,\, \ldots, x^n)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n, & i = 1 \end{cases}.$$

$$\int\limits_{M} d\omega = \int\limits_{U_\alpha} \frac{\partial \omega_{1,\,\ldots,\,\hat{i},\,\ldots,\,n}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \hat{dx^i} \wedge \ldots dx^n.$$

Если $i \neq 1$, то это равно 0 (как раньше). А если $i = 1$, получаем:

$$\int\limits_{M} d\omega = \int\limits_{(-1;\ 1)^{n-1}} \left(\int\limits_{-1}^{0} \frac{\partial \omega_{2,\,\ldots,\,n}}{\partial x^1}\, dx^1 \right) dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$
$$= \int\limits_{(-1;\ 1)^{n-1}} \big(\omega_{2,\,\ldots,\,n}(0, x^2,\, \ldots, x^n) - \omega_{2,\,\ldots,\,n}(-1, x^2,\, \ldots, x^n)\big)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$
$$= \int\limits_{(-1;\ 1)^{n-1}} \omega_{2,\,\ldots,\,n}(0, x^2,\, \ldots, x^n)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int\limits_{\partial M} i^*\omega.$$

■

Разбиение единицы

Пусть теперь $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие многообразия.

Определение 10.1.

Набор гладких функций ρ_i называется *разбиением единицы, подчинённым покрытию* $\{U_\alpha\}$, если:

1) $\rho_i \geqslant 0$;

2) $\forall i \ \ \exists \alpha(i)\colon\ \operatorname{supp} \rho_i \subset U_{\alpha(i)}$;

3) $\sum\limits_{i\in I}\rho_i(x) \equiv 1$ (множество I может быть не только неконечным, но и несчётным), причём в каждой точке x только конечное количество ρ_i отлично от 0.

Определение 10.2.

Набор гладких функций ρ_α называется *разбиением единицы, подчинённым покрытию* $\{U_\alpha\}$ *с тем же множеством индексов*, если:

1) $\rho_\alpha \geqslant 0$;

2) $\operatorname{supp}\rho_\alpha \subset U_\alpha$;

3) $\sum\limits_{\alpha\in A}\rho_\alpha(x) \equiv 1$ (множество A может быть не только неконечным, но и несчётным), причём в каждой точке x только конечное количество ρ_α отлично от 0.

Рассмотрим пример. Пусть $\mathbb{R}$ покрыто двумя пересекающимися лучами U и V. Тогда ρ_U и ρ_V – разбиение единицы, подчинённое этому покрытию с тем же набором индексов. Так как $\rho_U + \rho_V \equiv 1$, то на $U\backslash V$ имеем: $\rho_U = 1, \rho_V = 0$; на $V\backslash U$ имеем: $\rho_V = 1, \rho_U = 0$; на $U \cap V$ имеем: $\rho_U + \rho_V = 1$.

Рассмотрим функцию $f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0\end{cases}$. Заметим, что $0 < f(t) < 1$ при $t > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$ и $f(t) \in C^\infty$.

Рассмотрим функцию $g(t) = \dfrac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$. Заметим, что $g(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$, $0 < g(t) < 1$ при $0 < t < 1$, $g(t) \equiv 1$ при $t \geqslant 1$ и $g(t) \in C^\infty$.

Рассмотрим функцию $h(t) = g(t + 2) \cdot g(2 - t)$. Заметим, что $g(t) \equiv 0$ при $t \in (-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$, $0 < g(t) < 1$ при $t \in (-2;\ -1) \cup (1; 2)$, $g(t) \equiv 1$ при $t \in [-1;\ 1]$ и $g(t) \in C^\infty$.

Рассмотрим функцию $H(x^1, \ldots, x^n) = h(x^1) \cdot \ldots \cdot h(x^n)\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Заметим, что $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $H \equiv 1$ на $[-1;\ 1]^n$ (будем называть этот куб $C(1)$), $H \equiv 0$ вне $[-2;\ 2]^n$ (будем называть этот куб $C(2)$).

Пусть V_β – открытое покрытие многообразия M. Возьмём $p \in M$. Цель: сконструировать функцию ψ_p такую, что $\exists\beta(p)$ такое, что: 1) $\psi_p \in C^\infty(M)$; 2) $0 \leqslant \psi_p \leqslant 1$ и $\psi_p(p) = 1$; 3) $\operatorname{supp}\psi_p \subset V_{\beta(p)}$.

Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – атлас на M. $\exists\alpha(p)\colon\ p \in U_{\alpha(p)}$. «Подкрутим» φ_α: 1) сделаем сдвиг так, чтобы $\varphi_\alpha(p) = (0, \ldots, 0)$; 2) можно, применив при необходимости подходящий диффеоморфизм, считать, что $C(2) = [-2;\ 2]^n \subset \varphi_\alpha\left(U_{\alpha(p)} \cap V_{\beta(p)}\right)$ (диффеоморфизмом может быть гомотетия). Тогда возьмём $\psi_p = H(x^1(\varphi_\alpha), \ldots, x^n(\varphi_\alpha))$.

Теорема 10.2.

Пусть M – многообразие (с второй аксиомой счётности), V_α – открытое покрытие. Тогда $\exists$ разбиение единицы ρ_i со счётным множеством индексов $\{i\}$ и компактными носителями, подчинённое покрытию V_α.

Если отказаться от требования компактности носителя, то можно будет построить разбиение единицы с тем же множеством индексов.

Доказательство:

1) Рассмотрим случай, когда M компактно.

Возьмём V_α и $\forall p \in M$ построим ψ_p. У ψ_p есть открытое множество W_p такое, что $\psi_p\big|_{W_p} \equiv 1$. $\{W_p\}_{p\in M}$ – открытое покрытие M. Можно выбрать конечное подпокрытие $W_{p_1}, \ldots, W_{p_k}$. Заметим, что $\sum\limits_j \psi_{p_j}$: 1) $\in C^\infty$; 2) не обращается в 0, так как $\psi_p \geqslant 0$ и $\forall q \in M \ \ \exists W_{p_i} \ni q \ \Rightarrow \ \psi_{p_i}(q) \neq 0$.

По построению $\forall p \ \ \exists \alpha(p)\colon \ \operatorname{supp}\psi_p \subset V_\alpha(p)$. Определим

$$\rho_\alpha = \begin{cases} 0, \ \text{если нет } p\colon \ \alpha(p) = \alpha \\ \dfrac{\sum\limits_{p_i|\alpha(p_i)=\alpha} \psi_{p_i}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \psi_{p_j}}, \ \text{иначе} \end{cases}.$$

Тогда $\rho_\alpha \in C^\infty(M)$ и 1) $\rho_\alpha \geqslant 0$; 2) $\operatorname{supp}\rho_\alpha \subset V_\alpha$; 3) среди ρ_α конечное количество функций, отличных от 0.

2) Рассмотрим случай, когда M некомпактно.

У M вторая аксиома счётности, значит, есть счётная база топологии $B_1, B_2, \ldots$.

В $\mathbb{R}^n$ у любой точки окрестность в виде шара, замыкание шара – компакт. Тогда у $p \in M$ тоже есть окрестность с компактным замыканием.

Пусть U открыто и $\overline{U}$ – компакт, тогда $V \subset U$ и V открыто, значит, $\overline{V} \subset \overline{U}$ и $\overline{V}$ замкнуто, значит, $\overline{V}$ – компакт.

Пусть $U = \bigcup\limits_{p\in U} U_p$. 1) U_p открыто; 2) $U_p \subset U$; 3) $\overline{U}_p$ – компакт. $U_p = \bigcup\limits_{i\in I_p} B_i$, при этом $\overline{B}_i \subset \overline{U}_p$ и $\overline{U}_p$ – компакт, поэтому $\overline{B}_i$ – компакт.

Таким образом, любое открытое множество M можно получить из элементов базы топологии с компактным замыканием. То есть если выкинуть из базы топологии элементы без компактного замыкания, то мы получим базу топологии из множеств с компактным замыканием $U_1, U_2, \ldots$.

Пусть $G_1 = U_1$; $G_2 = U_1 \cup \ldots \cup U_k$, где k такое, что $U_1 \cup \ldots \cup U_{k-1} \subset G_1$, а $U_1 \cup \ldots \cup U_k \not\subset G_1$ (отметим, что $G_2 \ni G_1$); $\ldots$; если $G_l = U_1 \cup \ldots \cup U_{k_l}$, то $G_{l+1} = U_1 \cup \ldots \cup U_{k_{l+1}}$, где $U_1 \cup \ldots \cup U_{k_{l+1}-1} \subset G_{l-1}$, а $U_1 \cup \ldots \cup U_{k_l} \not\subset G_{l-1}$. Отметим, что G_i открыты и $\overline{G}_i$ – компакт.

$\overline{G}_{k+1} \backslash G_k$ – компакт, который лежит внутри $G_{k+2} \backslash \overline{G}_{k-1}$. V_β – открытое покрытие M, значит, $V_\beta \cap \left(G_{k+2} \backslash \overline{G}_{k-1}\right)$ – открытое покрытие компакта $\overline{G}_{k+1} \backslash G_k$.

Применим конструкцию для компакта, получим точки $p_{k,1}, \ \ldots, \ p_{k,l_k}$ такие, что: 1) $\psi_{p_{k,\,i}} \in C^\infty$ и $0 \leqslant \psi_{p_{k,\,i}} \leqslant 1$; 2) $\psi_{p_{k,\,i}}\big|_{W_{p_{k,\,i}}} \equiv 1$ и $W_{p_{k,\,i}} \subset G_{k+2} \backslash \overline{G}_{k-1}$; 3) $\forall p_{k,\,i} \ \ \exists \alpha(p_{k,\,i})$ такое, что $\operatorname{supp}\psi_{p_{k,\,i}} \subset V_{\alpha(p_{k,\,i})}$.

Перенумеруем все точки $p_{k,\,i}$ в p_j (их счётное количество). $\operatorname{supp}\psi_{p_j} \subset \left(\overline{G}_{k+2} \backslash G_{k-1}\right)$ и $\overline{G}_{k+2} \backslash G_{k-1}$ – компакт, поэтому $\operatorname{supp}\psi_{p_j}$ – компакт.

$\rho_i = \dfrac{\psi_{p_i}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \psi_{p_j}}$ – разбиение единицы, которые мы ищем. В самом деле, 1) $\in C^\infty$;

2) $\rho_i \geqslant 0$; 3) счётное; 4) с компактным носителем; 5) у каждой точки есть окрестность, задевающая не больше двух поясов, значит, носители только конечного количества ψ_{p_i} задевают эту окрестность, значит, в каждой точке только конечное количество ρ_i отлично от 0.

Теперь построим разбиение единицы с тем же множеством индексов, может быть, пожертвовав компактностью носителя. $\forall i$ выберем $\alpha(i)$ такое, что $\operatorname{supp}\rho_i \subset V_{\alpha(i)}$.

$\hat{\rho}_\alpha = \sum\limits_{i|\alpha(i)=\alpha} \rho_i$ – разбиение единицы с тем же множеством индексов, так как $\operatorname{supp}\hat{\rho}_\alpha \subset V_\alpha$. ■

Лекция 11

Риманова метрика

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$.

Определение 11.1. *Евклидово скалярное произведение* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ – симметрическая положительно определённая билинейная форма.

$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ – матрица Грама для базиса $\{e_k\}$. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – криволинейные координаты. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в векторах. Тогда $g_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$ – матрица скалярного произведения в базисе $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$.

Теперь рассмотрим $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$.

Внутри $\mathbb{R}^n$ есть скалярное произведение $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Пусть $T_A\Sigma$ – касательное пространство к поверхности Σ в точке A. Тогда $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\big|_{T_A\Sigma} = \mathrm{I}_A$ – симметрическая положительно определённая билинейная форма, то есть евклидово скалярное произведение в $T_A\Sigma$. I_A называется *первая квадратичная форма.*

Пусть $u_1, \ldots, u_k$ – локальные координаты, r – соответствующее отображение из $D \subset \mathbb{R}^k$ в $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Тогда им соответствуют базисные векторы $\dfrac{\partial r}{\partial u^i} = r_{u^i}$.

Упражнение 11.1. Проверить, что $r_{u^i} = \dfrac{\partial}{\partial u^i}$.

Тогда $g_{ij} = \mathrm{I}\left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}, \dfrac{\partial}{\partial u^j}\right) = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial u^i}, \dfrac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle$.

В случае $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ есть классические обозначения: $u^1 = u$, $u^2 = v$, $g_{11} = E = \langle r_u, r_u\rangle$, $g_{12} = g_{21} = F = \langle r_u, r_v\rangle$, $g_{22} = G = \langle r_v, r_v\rangle$, $g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

Матрица g_{ij} гладко зависит от точки.

Теперь рассмотрим многообразие M.

Определение 11.2. *Риманова метрика на* M – это заданное $\forall A \in M$ евклидово скалярное произведение $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_A$ на T_AM (то есть симметрическая билинейная положительно определённая форма), причём если X и Y – гладкие векторные поля, то функция $\langle X, Y\rangle(A) = \langle X(A), Y(A)\rangle_A$ гладкая.

Определение 11.3. Многообразие с римановой метрикой называется *римановым многообразием.* Обозначение: (M, g) или $(M, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$.

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты на U, тогда $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в векторных полях на U. Определим $g_{ij}(A) = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_A, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\Big|_A\right\rangle_A$.

Утверждение 11.1.

$$\langle X, Y\rangle = X^i Y^j g_{ij}.$$

Доказательство:

$$\langle X, Y\rangle = \left\langle X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = X^iY^j\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = X^iY^jg_{ij}.$$

■

Можно использовать матричную форму записи:

$$\langle X, Y\rangle = \begin{pmatrix} X^1 & \dots & X^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{ij}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n\end{pmatrix}.$$

Утверждение 11.2. *g гладкая тогда и только тогда, когда $\forall i, j \;\; g_{ij}$ гладкие.*

Замена координат в римановой метрике

Пусть есть координаты $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^n$. Им соответствуют $g_{ij} = \left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$ и $\hat{g}_{ij} = \left\langle\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right\rangle$.

Традиционные обозначения: новые координаты будем вместо $y^1, \dots, y^n$ обозначать $x^{1'}, \dots, x^{n'}$. Тогда $g_{i'j'} = \left\langle\frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right\rangle$.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{i'}};$$
$$g_{ij} = \left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right\rangle = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right\rangle = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}g_{i'j'}.$$

В матричном виде это выглядит так: $G = C^TG'C$.

Форма объёма. Объём риманова многообразия

Утверждение 11.3. *Пусть M – ориентированное риманово многообразие размерности n. Тогда определённая в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ форма $d\mathrm{Vol} = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ корректно определена.*

Доказательство:
Замена координат $x^{1'}, \dots, x^{n'}$.

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \det\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'};$$
$$\det g = (\det c)^2\det g'; \qquad \sqrt{\det g} = \left|\det\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|\sqrt{\det g'}.$$

Поэтому, так как $\det J > 0$, получаем:

$$d\mathrm{Vol} = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sqrt{\det g'} \det \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \det \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'} =$$
$$= \sqrt{\det g'}\, dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'}.$$

■

Определение 11.4. $d\mathrm{Vol}$ – *форма объёма.*

Определение 11.5. $\mathrm{Vol}(M) = \int\limits_M d\mathrm{Vol}$ – *объём риманова многообразия.*

Утверждение 11.4. *Если* $\mathrm{Vol}(M) \neq +\infty$*, то* $\mathrm{Vol}(M) > 0$.

Рассмотрим примеры.

1) Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – декартовы координаты. Тогда $g = E$, то есть $g_{ij} = \delta_{ij}$ и $\det g = 1$. Значит, $d\mathrm{Vol} = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

2) Рассмотрим $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ с метрикой $g = I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Тогда $d\mathrm{Vol} = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$.

Утверждение 11.5. *В ориентированном римановом многообразии функции интегрируются так:* $\int\limits_M f\, d\mathrm{Vol}$*, где* $d\mathrm{Vol} \in \Omega^n(M)$.

Рассмотрим примеры:

1) Рассмотрим кривую $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \;:\; [a, b] \to \mathbb{R}^2$ в плоскости, где t – локальная координата. Тогда $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = (\dot{x}, \dot{y})$. Значит, получаем:

$$g = g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \dot{x}^2 + \dot{y}^2;$$
$$d\mathrm{Vol} = \sqrt{\det g}\, dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt;$$
$$\int\limits_\gamma f\, d\mathrm{Vol} = \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Получили криволинейный интеграл 1-го рода.

2) Рассмотрим поверхность $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$, то есть $r \;:\; D \to \mathbb{R}^3$, где $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\int\limits_\Sigma f\, d\mathrm{Vol} = \iint\limits_D f(x(u, v),\, y(u, v),\, z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Получили поверхностный интеграл первого рода.

Римановы многообразия

Рассмотрим римановы многообразия M с метрикой $\langle\cdot\,,\cdot\rangle^M$ и N с метрикой $\langle\cdot\,,\cdot\rangle^N$.

Определение 11.6. $f\ :\ M\to N$ – *изометрическое отображение*, если $\forall$ векторов $X,Y\in T_AM$ верно $\langle X,Y\rangle_A^M=\langle d_Af(x),\,d_Af(Y)\rangle_{f(A)}^N$.

Определение 11.7. Если $f\ :\ M\to N$ – диффеоморфизм и изометрическое отображение, то оно называется *изометрией*.

Упражнение 11.2. Пусть $f\ :\ M\to N$, где N – многообразие с римановой метрикой $\langle\cdot\,,\cdot\rangle^N$. Показать, что формула $\langle X,Y\rangle_A^M=\langle d_Af(x),\,d_Af(Y)\rangle_{f(A)}^N$ задаёт на M риманову метрику тогда и только тогда, когда $\forall A\in M\quad \operatorname{Ker} d_Af=0$.

Замечание 11.1. Это называется *обратный образ метрики при отображении* f. Обозначение: $f^*\langle\cdot\,,\cdot\rangle^N$ или f^*g^N.

Пусть X – векторное поле на M. Рассмотрим $\Phi_t^X\ :\ M\to M$. Если (M,g) риманово, то могут быть такие векторные поля, что $(\Phi_t^X)_g^*=g$.

Тензоры

Пусть V – векторное пространство, $\xi\in V^*\ :\ V\to V$ – ковектор. Тогда $\xi(v)$ – линейная функция от вектора. Пусть $g(v_1,v_2)$ – билинейная форма – билинейная функция от двух векторов. Пусть $v\in V$, тогда $v:V^*\to V^*$ и $v(\xi)=\xi(v)$ – линейная функция от ковектора. Пусть $A\ :\ V\to V$ – линейный оператор. Тогда $A(\xi,v)=$ $=\xi(Av)$ – билинейная функция от ковектора и вектора.

Определение 11.8. S – *тензор типа* (p,q) *на векторном пространстве* V, если это полилинейная функция от p ковекторов и q векторов: $S(\xi_1,\,\dots,\xi_p,v_1,\,\dots,v_q)$.

Вектор – тензор типа $(1,0)$. Ковектор – тензор типа $(0,1)$. Билинейная форма – тензор типа $(0,2)$. Линейный оператор – тензор типа $(1,1)$.

Будем обозначать $T_q^pV=V\otimes\ldots\otimes V\otimes V^*\otimes\ldots\otimes V^*$ (p раз V и q раз V^*) – векторное пространство тензоров типа (p,q).

T_k^0V – полилинейные функции от k векторов. Λ^kV^* – кососимметрические полилинейные функции от k векторов. S^kV^* – симметрические полилинейные функции от k векторов.

Из линейной алгебры: S^2V^* – пространство симметрических билинейных форм; $T_2^0=\Lambda^2V^*\oplus S^2V^*$.

Пусть $e_1,\,\dots,e_n$ – базис в V, $e^1,\,\dots,e^n$ – базис в V^*.

$$e^i(v)=e^i(v^je_j)=v^je^i(e_j)=v^j\delta_j^i=v^i.$$

Аналогично: $e_i(\xi)=e_i(\xi_je^j)=\xi_i$.

Определение 11.9. Если $S\in T_{q_1}^{p_1}V$ и $T\in T_{q_2}^{p_2}V$, то $S\otimes T\in T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}V$ – *тензорное произведение*:

$$\begin{aligned}&(S\otimes T)(\xi_1,\,\dots,x_{p_1+p_2},v_1,\,\dots,v_{q_1+q_2})=\\&=S(\xi_1,\,\dots,\xi_{p_1},v_1,\,\dots,v_{q_1})\cdot T(\xi_{p_1+1},\,\dots,\xi_{p_1+p_2},v_{q_1+1},\,\dots,v_{q_1+q_2}).\end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned}&e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, v_1, \ldots, v_q) = \\ &= e_{i_1}(\xi_1) \ldots e_{i_p}(\xi_p) e^{j_1}(v_1) \ldots e^{j_q}(v_q) = (\xi_1)_{i_1} \ldots (\xi_p)_{i_p} v_1^{j_1} \ldots v_q^{j_q}.\end{aligned}$$

Упражнение 11.3. Показать, что

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \qquad (i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n = \dim V)$$

образуют базис в $T_q^p V$.

Получаем следствие:

$$S \in T_q^p V \ \Rightarrow \ S = S_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}.$$

S часто отождествляют с набором $\left\{ S_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \right\}$ – координаты (или компоненты) тензора S в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V.

Упражнение 11.4. $\Lambda^k V^* \subset T_k^0 V$; $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$, где $i_1 < \ldots < i_k$ – базис в $\Lambda^k V^*$; $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$ – базис в $T_k^0 V$. Показать, что

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi e^{i_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi(k)}}.$$

В частности, $e^1 \wedge e^2 = e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1$.

$S^2 V^* \subset T_2^0 V$; $e^i \cdot e^j = \dfrac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}$ – базис в $S^2 V^*$; $e^i \otimes e^j$ – базис в $T_2^0 V$.

Преобразование при замене базиса

Рассмотрим базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Пусть $e_i = T_i^{i'} e_{i'}$, где $T_i^{i'}$ – матрица замены базиса.

$v = v^i e_i = v^i T_i^{i'} e_{i'} = v^{i'} e_{i'}$. Значит, $v^{i'} = T_i^{i'} v^i$.

$e^{i'}(e_j) = e^{i'} \left(T_j^{j'} e_{j'} \right) = T_j^{j'} \delta_{j'}^{i'} = T_j^{i'}$ и $e^{i'}(e_j) = A_i^{i'} e^i(e_j) = A_i^{i'} \delta_j^i = A_j^{i'}$. Значит, $e^{i'} = T_i^{i'} e^i$. Тогда $e^i = (T^{-1})_{i'}^i e^{i'}$.

$$\begin{aligned}&S = S_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} = \\ &= S_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} T_{i_1}^{i'_1} e_{i'_1} \otimes \ldots \otimes T_{i_p}^{i'_p} e_{i'_p} \otimes (T^{-1})_{j'_1}^{j_1} e^{j'_1} \otimes \ldots \otimes (T^{-1})_{j'_q}^{j_q} e^{j'_q} = \\ &= S_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} T_{i_1}^{i'_1} \ldots T_{i_p}^{i'_p} (T^{-1})_{j'_1}^{j_1} \ldots (T^{-1})_{j'_q}^{j_q} e_{i'_1} \otimes \ldots \otimes e_{i'_p} e^{j'_1} \otimes \ldots \otimes e^{j'_q}.\end{aligned}$$

Утверждение 11.6. *При замене базиса в V координаты тензора типа (p, q) меняются по формуле*

$$S_{j'_1 \ldots j'_q}^{i'_1 \ldots i'_p} = S_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} T_{i_1}^{i'_1} \ldots T_{i_p}^{i'_p} (T^{-1})_{j'_1}^{j_1} \ldots (T^{-1})_{j'_q}^{j_q}.$$

Алгебраические операции с тензорами

1) $S+T$ – сложение:

$$(S+T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

2) λS – умножение на число ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\lambda S)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \lambda S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

3) Пусть $S \in T^{p_1}_{q_1}V$, $T \in T^{p_2}_{q_2}V$. $(S \otimes T)$ – произведение тензоров:

$$(S\otimes T)^{i_1\dots i_{p_1+p_2}}_{j_1\dots j_{q_1+q_2}} = S^{i_1\dots i_{p_1}}_{j_1\dots j_{q_1}} \cdot T^{i_{p_1+1}\dots i_{p_1+p_2}}_{j_{q_1+1}\dots j_{q_1+q_2}}.$$

4) Свёртка по паре индексов.

Пусть есть тензор $S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$. Выберем i_a сверху и j_b снизу.

$$S^{i_1\dots\hat{i}_a\dots i_p}_{j_1\dots\hat{j}_b\dots j_q} = S^{i_1\dots i_{a-1} i i_{a+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_{b-1} i j_{b+1}\dots j_q}. \tag{11.1}$$

Замечание 11.2. В формуле (11.1) подразумевается сумма по i.

Упражнение 11.5. Доказать, что свёртка тензора по паре индексов является корректно определённым тензором.

5) Опускание и поднятие индекса.

Пусть в V есть скалярное произведение $g = (g_{ij})$.

Определение 11.10. g^{ij} – элементы матрицы g^{-1}.

5.1) Опускание индекса: тензорно умножаем на g_{ij} и выполняем свёртку одного верхнего индекса тензора с одним из нижних индексов g_{ij}.

5.2) Поднятие индекса: тензорно умножаем на g^{ij} и выполняем свёртку одного нижнего индекса тензора с одним из верхних индексов g_{ij}.

Упражнение 11.6. Показать, что $v^i g_{ij} \in V^*$, где $v \in V$, и $\xi_i g^{ij} \in V$, где $\xi \in V^*$.

Лекция 12

Тензорное поле

Объекту число сопоставляется поле числовое поле – функция.

Объекту вектор сопоставляется векторное поле.

Объекту ковектор сопоставляется поле – дифференциальная 1-форма.

Объекту полилинейная кососимметрическая функция от векторов сопоставляется поле – дифференциальная k-форма.

Объекту тензор типа (p, q) сопоставляется тензорное поле (или тензор) типа (p, q).

Если S – тензор типа (p, q), то $S_A \in T^p_q T_A M$, где A – точка многообразия M.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Тогда он определяет двойственный базис $e^1, \ldots, e^n$ в V^*. И тогда $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$ – базис в $T^p_q V$. Поэтому

$$S \in T^p_q V \;\Rightarrow\; S = S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}.$$

Пусть M – многообразие $M \supset U$ – координатная окрестность, $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в векторных полях в U, то есть $\forall A \in U \quad \left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_A, \ldots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_A$ – базис в $T_A M$.

$dx^1, \ldots, dx^n$ – двойственный базис в 1-формах на U, то есть $dx^1\big|_A, \ldots, dx^n\big|_A$ – базис в $T^*_A M$, двойственный к базису $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_A, \ldots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_A$. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes$ $\otimes\, dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$ – базис в пространстве тензорных полей типа (p, q) в M. Значит,

$$S = S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q},$$

где $S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ – функция. В частности,

$$S_A = S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(A) \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_A \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_A \otimes dx^{j_1}\Big|_A \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}\Big|_A.$$

Определение 12.1. Тензорное поле S *гладкое*, если в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ соответствующие координаты $S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ – гладкие функции.

Пусть S и T – тензорные поля, тогда:

1) $(S + T)_A = S_A + T_A$;

2) если $f \in C^\infty$, то $(fS)_A = f(A) S_A$;

3) $(S \otimes T)_A = S_A \otimes T_A$.

Аналогично определяется свёртка по паре индексов тензорных полей, а также поднятие и опускание индекса.

Производная Ли тензорного поля

Пусть $X = X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ – векторное поле. Тогда интегральные кривые задаются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = X^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}^n = X^n(x^1, \ldots, x^n) \end{cases}.$$

Если интегральная кривая в начальный момент должна проходить через точку A, то получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = X^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}^n = X^n(x^1, \ldots, x^n) \\ x^1(0) = A^1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x^n(0) = A^n \end{cases}.$$

Её решения – интегральные кривые, такие, что при $t = 0$ они проходят через точку A.

Будем называть$\gamma(t, A) = (x^1(t, A), ld, x^n(t, A))$ решение этой задачи Коши. $\gamma(t, A)$ гладко зависит от A.

Пусть $\Phi_t^X \;:\; M \to M$ и $\Phi_t^X(A) = \gamma(t, A)$. Тогда

$$\Phi_t^X(x^1, \ldots, x^n) = \big(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\; \ldots,\; x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\big)$$

при $t \to 0$.

Тогда $L_X\omega = \dfrac{d}{dt}(\Phi_t^X)^*\omega\Big|_{t=0}$ – производная Ли вдоль X от дифференциальной формы ω.

Посчитаем $L_X f$:

$$\begin{aligned} &(\Phi_t^X)^* f(x^1, \ldots, x^n) = \\ &= f\left(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\; \ldots,\; x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right); \\ &L_X f = \frac{d}{dt}\left(\Phi_t^X\right)^* f(x^1, \ldots, x^n)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\; \ldots,\; x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right)\cdot \\ &\cdot\left(X^1(x^1, \ldots, x^n) + o(1),\; \ldots,\; X^n(x^1, \ldots, x^n) + o(1)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^n) X^i(x^1, \ldots, x^n) = Xf. \end{aligned}$$

Пусть $\omega \in \Omega^1(U)$, тогда $\omega = \omega_i\, dx^i = \omega_i(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i$. Посчитаем $L_X\omega$:

$$\begin{aligned}
&(\Phi_t^X)^*\omega(x^1, \ldots, x^n) = \\
&= \omega_i\left(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\ \ldots,\ x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right) \cdot \\
&\cdot d\left(x^i + tX^i(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right);\\
&L_X\omega = \frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^*\omega(x^1, \ldots, x^n)\Big|_{t=0} = \\
&= \Bigg(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\left(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\ \ldots,\ x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right) \cdot \\
&\cdot \left(X^k(x^1, \ldots, x^n) + o(1)\right)\, d\left(x^i + tX^i(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right) + \\
&+ \omega_i\left(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\ \ldots,\ x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right) \cdot \\
&\cdot d\left(X^i(x^1, \ldots, x^n) + o(1)\right)\Bigg)\Bigg|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}(x^1, \ldots, x^n)X^k(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i + \omega_i(x^1, \ldots, x^n)\, dX^i(x^1, \ldots, x^n) = \\
&= \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}X^k\, dx^i + \omega^i\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\, dx^j = \left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x^k}X^k + \omega_i\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) dx^j;\\
&(L_X\omega)_i = \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}X^k + \omega_i\frac{\partial X^i}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Теперь пусть Y – векторное поле. Хотим определить L_xY (обратного образа нет). Так как Φ_t^X – диффеоморфизм, то $\left(\Phi_t^X\right)^{-1} = \Phi_{-t}^X$. Запишем это в координатах.

$$\Phi_{-t}^X(x^1, \ldots, x^n) = \left(x^1 - tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\ \ldots,\ x^n - tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right).$$

Матрица dF в локальных координатах – это матрица Якоби, то есть

$$\begin{aligned}
&d_{(x^1, \ldots, x^n)}\Phi_{-t}^X = \left(\frac{\partial\left(x^i - tX^i(x^1, \ldots, x^n) + o(t)\right)}{\partial x^j}\right) = \left(\delta_j^i - t\frac{\partial X^i(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^j} + o(t)\right);\\
&\left(d_{\Phi_t^X(x^1, \ldots, x^n)}\Phi_{-t}^X Y\right)^i = \\
&= \left(\delta_j^i - t\frac{\partial X^i(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\ \ldots,\ x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t))}{\partial x^j} + o(t)\right) \cdot \\
&\cdot Y^j(x^1 + tX^1(x^1, \ldots, x^n) + o(t),\ \ldots,\ x^n + tX^n(x^1, \ldots, x^n) + o(t)).
\end{aligned}$$

Определение 12.2.

$$L_XY = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_{\Phi_t^X(x^1, \ldots, x^n)}\Phi_{-t}^X(Y).$$

$$
\begin{aligned}
&(L_XY)^i = \left(\frac{d}{dt}d_{(x^1,\,\dots,\,x^n)}\Phi^X_{-t}\Big|_{t=0}\right)^i = \\
&= \Bigg(\bigg(\frac{\partial X^i(x^1+tX^1(x^1,\,\dots,x^n)+o(t),\ \dots,\ x^n+tX^n(x^1,\,\dots,x^n)+o(t))}{\partial x^j}- \\
&-t\cdot\ldots+o(1)\bigg)\cdot \\
&\cdot Y^j(x^1+tX^1(x^1,\,\dots,x^n)+o(t),\ \dots,\ x^n+tX^n(x^1,\,\dots,x^n)+o(t))+ \\
&+\left(\delta^i_j - t\frac{\partial X^i(x^1+tX^1(x^1,\,\dots,x^n)+o(t),\ \dots,\ x^n+tX^n(x^1,\,\dots,x^n)+o(t))}{\partial x^j}+o(t)\right)\cdot \\
&\cdot\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}(x^1+tX^1(x^1,\,\dots,x^n)+o(t),\ \dots,\ x^n+tX^n(x^1,\,\dots,x^n)+o(t))\cdot \\
&\cdot\big(X^k(x^1,\,\dots,x^n)+o(1)\big)\Bigg)\Bigg|_{t=0} = \\
&= -\frac{\partial X^i(x^1,\,\dots,x^n)}{\partial x^j}Y^j(x^1,\,\dots,x^n)+\delta^i_j\frac{\partial Y^j(x^1,\,\dots,x^n)}{\partial x^k}X^k(x^1,\,\dots,x^n) = \\
&= -\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j+\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}X^k.
\end{aligned}
$$

Утверждение 12.1.

$$(L_XY)^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}X^k - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j};$$

$$L_XY = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}X^k - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Определение 12.3.

$$L_X(S\otimes T) = L_XT\otimes S + T\otimes L_XS.$$

Тогда можно посчитать L_X от любого тензора, так как

$$S = S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_q}.$$

Приведём пример. Пусть T – тензор типа $(1,1)$, то есть поле линейных операторов, тогда $T = T^i_j\dfrac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$.

$$
\begin{aligned}
&L_X T = L_X\left(T^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\right) = \\
&= (L_X T^i_j)\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j + T^i_j\left(L_X\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\otimes dx^j + T^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes L_X(dx^j) \ominus \\
&L_X T^i_j = X T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}X^k; \\
&L_X\frac{\partial}{\partial x^{i_0}} = -\delta^j_{i_0}\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial X^i}{\partial x^{i_0}}\frac{\partial}{\partial x^i}; \qquad L_X\frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}; \\
&L_X dx^{j_0} = \delta^{j_0}_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\,dx^i = \frac{\partial X^{j_0}}{\partial x^i}\,dx^i; \qquad L_X dx^j = \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\,dx^i; \\
&\ominus \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}X^k\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j - T^i_j\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\otimes dx^j + T^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial X^j}{\partial x^k}\,dx^k = \\
&= \left(\frac{\partial T^a_b}{\partial x^k}X^k - T^i_b\frac{\partial X^a}{\partial x^i} + T^a_j\frac{\partial X^j}{\partial x^b}\right)\frac{\partial}{\partial x^a}\otimes dx^b.
\end{aligned}
$$

Утверждение 12.2. *Для* $T = T^a_b\dfrac{\partial}{\partial x^a}\otimes dx^b$

$$L_X T = \left(\frac{\partial T^a_b}{\partial x^k}X^k - T^i_b\frac{\partial X^a}{\partial x^i} + T^a_j\frac{\partial X^j}{\partial x^b}\right)\frac{\partial}{\partial x^a}\otimes dx^b;$$

$$(L_X T)^a_b = \frac{\partial T^a_b}{\partial x^k}X^k - T^i_b\frac{\partial X^a}{\partial x^i} + T^a_j\frac{\partial X^j}{\partial x^b}.$$

Пусть (M, g) – риманово многообразие. $g = (g_{ij})$ – тензор типа $(0,2)$. Φ^X_t – изометрия. Тогда $(\Phi^X_t)^* g = g \;\Rightarrow\; L_X g = 0$.

Определение 12.4. Векторное поле X называется *киллинговым* (*векторным полем Киллинга*), если $L_X g = 0$.

Немного дифференциальной топологии

Пусть M и N – гладкие многообразия, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ – атлас на M, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ – атлас на N.

Утверждение 12.3. *$M \times N$ имеет естественную структуру гладкого многообразия.*

Теперь пусть M – многообразие. Рассмотрим $TM = \bigsqcup\limits_{A\in M} T_A M$. Заметим, что есть естественное отображение $p : TM \to M$ – проекция, где $p(v) = A$, если $v \in T_A M$.

Утверждение 12.4. *На TM существует структура гладкого многообразия, причём p будет гладким для этой структуры.*

Определение 12.5. TM называется *касательным расслоением к* M.

Доказательство:

Выберем на M некоторый атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Пусть $x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha$ – локальные координаты.

Если $Y \in T_A M$, то $Y = Y^1_\alpha \left.\dfrac{\partial}{\partial x^1_\alpha}\right|_A + \ldots + Y^n_\alpha \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right|_A$.

Тогда для $TU_\alpha \subset TM$ имеем: $TU_\alpha \xrightarrow{\hat{\varphi}_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, так как для $Y \in TU_\alpha$ имеем: $Y \mapsto (x^1_\alpha(p(Y)),\ \ldots,\ x^n_\alpha(p(Y)), Y^1_\alpha,\ \ldots, Y^n_\alpha)$.

Рассмотрим пересекающиеся U_α с локальными координатами $x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha$ и U_β с локальными координатами $x^1_\beta, \ldots, x^n_\beta$. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x^i_\alpha} = \dfrac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}\dfrac{\partial}{\partial x^j_\beta}$.

$$
\begin{aligned}
&Y = Y^i_\alpha \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}\frac{\partial}{\partial x^j_\alpha}; \qquad Y^j_\beta = Y^i_\alpha \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha};\\
&Y \overset{\hat{\varphi}_\beta}{\mapsto} \left(x^1_\beta(p(Y)),\ \ldots,\ x^n_\beta(p(Y)), Y^1_\beta,\ \ldots,\ Y^n_\beta\right);\\
&Y^j_\beta = \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha} Y^i_\alpha; \qquad x^j_\beta = x^j_\beta(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha).
\end{aligned}
$$

На TU_α введём топологию как на $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ с помощью $\hat{\varphi}_\alpha$. $TM = \left(\bigsqcup\limits_\alpha TU_\alpha\right) / \sim$ – это определяет топологию на T.

Упражнение 12.1. Показать, что это хаусдорфова топология с второй аксиомой счётности.

TU_α открытые, тогда $\hat{\varphi}_\alpha$ – карты. Значит, $\{(TU_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)\}$ – атлас.

Упражнение 12.2. Показать, что p гладкое.

■

Замечание 12.1. Аналогично можно ввести структуру гладкого многообразия на $T^*M = \bigsqcup\limits_{A \in M} T^*_A M$, где $p\ :\ T^*M \to M$ – проекция. Это называется кокасательное расслоение к M.

Подмногообразие

Определение 12.6. Гладкое отображение $f\ :\ N \to M$ называется *погружением*, если в каждой точке $A \in N$ дифференциал $d_A f\ :\ T_A N \to T_{f(A)} M$ невырожден, то есть $\operatorname{Ker} d_A f = 0$.

Определение 12.7. Пара (N, f), где $f\ :\ N \to M$ – гладкое отображение, называется *подмногообразием* M, если f – инъективное погружение.

Определение 12.8. Инъективное погружение $f\ :\ N \to M$ называется *вложением*, если это гомеоморфизм на образ.

Важно: на одном и том же подмножестве M можно ввести разные структуры подмногообразия.

Лекция 13

Подмногообразие (продолжение)

Определение 13.1. Два подмногообразия (N_1, φ_1) и (N_2, φ_2) многообразия M называются *эквивалентными*, если $\exists$ диффеоморфизм $\alpha : N_1 \to N_2$ такой, что $\varphi_2 \circ \alpha = \varphi_1$, где $\alpha : N_1 \to N_2$.

Подмногообразия не всегда могут быть эквивалентны.

Упражнение 13.1. Рассмотрим многообразие M. Пусть A – подмножество M (отображение i). Если на A фиксировать топологию, то на A существует не более одной (с точностью до эквивалентности) структуры гладкого многообразия, такой, что (A, i) – подмногообразие.

Теорема о пропускании отображения через многообразие

Пусть M – многообразие, (P, φ) – подмногообразие M, $\psi : N \to M$ – гладкое отображение, причём $\psi(N) \subset \varphi(P)$.

(P, φ) – подмногообразие $\Rightarrow \varphi$ инъективно. Тогда $\forall A \in N$ у $\psi(A) \subset \varphi(P)$ есть единственный прообраз при φ: $\varphi^{-1}(\psi(A))$. То есть $\exists$ отображение $\psi_0 : N \to P$ такое, что $\varphi \circ \psi_0 = \psi$.

Это называется «ψ *пропускается* через P».

ψ_0 может быть даже не непрерывным.

Теорема 13.1 (о пропускании отображения через многообразие)**.**

Пусть M – многообразие, (P, φ) – подмногообразие M, $\psi : N \to M$ – гладкое отображение, причём $\psi(N) \subset \varphi(P)$, то есть ψ пропускается через P, $\exists \psi_0 : N \to P$ такой, что $\varphi \circ \psi_0 = \psi$. Тогда:

а) если ψ_0 непрерывное, то оно гладкое;

б) если φ – вложение, то ψ_0 непрерывно.

Доказательство:

б) Пусть U открыто в P, тогда $\varphi(U)$ открыто в M, так как φ – гомеоморфизм на образ. Тогда $\psi^{-1}(\varphi(U))$ открыто, так как ψ непрерывно. Но тогда $\psi_0^{-1}(U) = \psi^{-1}(\varphi(U))$ открыто, поэтому ψ_0 непрерывно.

а) Выберем $A \in P$. Пусть $y^1, \ldots, y^p$ – локальные координаты в окрестности A. Так как $\varphi(A) \in M$, то пусть $x^1, \ldots, x^m$ – локальные координаты в окрестности $\varphi(A) \in M$.

(P, φ) – подмногообразие $\Rightarrow \varphi$ – погружение $\Rightarrow d_A\varphi : T_AP \to T_{\varphi(A)}M$ – инъекция $\Rightarrow (d_A\varphi)^* : T^*_{\varphi(A)}M \to T^*_AP$ – сюръекция.

$T^*_{\varphi(A)}M$ порождается $(dx^1, \ldots, dx^n) \Rightarrow T^*_AP$ порождается $(\varphi^*dx^1, \ldots, \varphi^*dx^n)$, то есть $\exists i_1, \ldots, i_p$ такие, что T^*_AP порождается $(\varphi^*dx^{i_1}, \ldots, \varphi^*dx^{i_p})$.

$\varphi^*dx^i = d\varphi^*x^i = dx^i(\varphi)$.

Пусть $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = (x^1, \ldots, x^m)$ – карта в окрестности $\varphi(A)$.

Если T_A^*P порождается $(\varphi^* dx^{i_1}, \ldots, \varphi^* dx^{i_p})$, то $dx^{i_1}(\varphi), \ldots, dx^{i_p}(\varphi)$ линейно независимы $\Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial x^{i_k}}{\partial y^l}\right)(A) \neq 0 \Rightarrow$ эта матрица невырождена и в окрестности $A \Rightarrow$ $x^{i_1}(\varphi), \ldots, x^{i_p}(\varphi)$ можно взять в качестве координат в этой окрестности.

Пусть $\pi(x^1, \ldots, x^m) = (x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})$. Тогда $\pi \circ \gamma \circ \varphi$ – карта в окрестности A. ψ_0 в этой карте – это $\pi \circ \gamma \circ \varphi \circ \psi_0 = \pi \circ \gamma \circ \psi$ – гладкое как композиция гладких отображений. Значит, ψ_0 гладкое. ■

Упражнение 13.2. Где в доказательстве теоремы (13.1) о пропускании отображения через многообразие использовалась непрерывность ψ_0?

Дифференцирование в $\mathbb{R}^n$ и на поверхности

Пусть f – гладкая функция, X – вектор в точке A, тогда есть $Xf(A) = \partial_X f(A)$ – производная f вдоль X в точке A.

Пусть Y – векторное поле, X – вектор в точке A, можно ли ввести производную Y вдоль X в точке A?

1) Рассмотрим $\mathbb{R}^n$.

Тогда $\partial_X f(A) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(A + \varepsilon X) - f(A)}{\varepsilon}$.

Пусть $\partial_X Y(A) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{Y(A + \varepsilon X) - Y(A)}{\varepsilon}$ – определено в $\mathbb{R}^n$.

2) Рассмотрим $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ – гладкую регулярную k-мерную поверхность.

Если $X \in T_A\Sigma$, то $\exists \gamma \in \Sigma\colon\ \gamma(0) = A$, $\dot\gamma(0) = X$. Тогда $\partial_X f(A) = \dfrac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = $ $= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(\gamma(\varepsilon)) - f(\gamma(0))}{\varepsilon}$.

Если Y – касательное верное поле на Σ и $X \in T_A\Sigma$, то пусть $\partial_X Y(A) =$ $= \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(\gamma(t)) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{Y(\gamma(t)) - Y(\gamma(0))}{\varepsilon}$.

Заметим, что $Y(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ и $Y(\gamma(0)) \in T_A\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Так как $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, то $\partial_X Y(A)$ определена корректно.

Замечание 13.1. $\partial_X Y(A)$ может не быть касательным вектором.

Приведём пример. Пусть Σ – плоская кривая. Тогда по формулам Френе получаем: $\partial_v v = \dfrac{dv}{ds} = kn$ – нормальный вектор.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ стандартное евклидово скалярное произведение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Пусть $P_A\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – ортогональный проектор на $T_A\Sigma$. Тогда P – поле ортогональных проекторов.

Упражнение 13.3. Доказать, что P гладко зависит от A.

Определение 13.2. $\nabla_X Y = P(\partial_X Y)$ – *ковариантная производная векторного поля Y вдоль вектора X.*

Обозначим $\Gamma(T\Sigma)$ – пространство касательных векторных полей на Σ.

$\nabla\ :\ T_A\Sigma\times\Gamma(T\Sigma)\to T_A\Sigma$, то есть $(\nabla_X Y)(A)=P_A(\partial_X Y(A))$.

Если X – векторное поле, и мы в каждой точке делаем эту операцию, то получаем векторное поле $(\nabla_X Y)(A)=(\nabla_{X(A)}Y)(A)$. Тогда $\nabla\ :\ \Gamma(T\Sigma)\times\Gamma(T\Sigma)\to\Gamma(T\Sigma)$.

Свойства ковариантной производной на поверхности

Утверждение 13.1. $\nabla_X Y$ *линейно по* X*:*

$$\nabla_{\alpha X_1+\beta X_2}Y=\alpha\nabla_{X_1}Y+\beta\nabla_{X_2}Y.$$

Доказательство:

P – линейный оператор, $\partial_X Y$ линейно по X. ■

Утверждение 13.2.

$$\nabla_X(Y_1+Y_2)=\nabla_X Y_1+\nabla_X Y_2.$$

Доказательство:

P – линейный оператор, $\partial_X(Y_1+Y_2)=\partial_X Y_1+\partial_X Y_2$. ■

Утверждение 13.3 (Тождество Лейбница)**.**

$$\nabla_X(fY)=(\partial_X f)Y+f\nabla_X Y.$$

Доказательство:

$$\nabla_X(fY)=P(\partial_X(fY))=P((\partial_X f)Y+f(\partial_X Y))=$$
$$=(\partial_X f)P(Y)+fP(\partial_X Y)=(\partial_X f)Y+f\nabla_X Y.$$

■

Утверждение 13.4.

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y].$$

Доказательство:

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=P(\partial_X Y)-P(\partial_Y X)=P(\partial_X Y-\partial_Y X)=P([X,Y])=[X,Y].$$

■

Утверждение 13.5.

$$\partial_X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle.$$

Доказательство:

$$\partial_X\langle Y,Z\rangle=\langle\partial_X Y,Z\rangle+\langle Y,\partial_X Z\rangle=$$
$$=\langle P(\partial_X Y),Z\rangle+\langle Y,P(\partial_X Z)\rangle=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle.$$

■

Дифференцирование на многообразии

Рассмотрим многообразие M. Объемлющего пространства нет, поэтому $\partial_X Y$ и P не определены.

Определение 13.3.

Связность на многообразии M – это операция ∇, сопоставляющая каждому векторному полю Y на M, определённому в окрестности точки $A \in M$, и касательному вектору $X \in T_A M$ касательный вектор $\nabla_X Y \in T_A M$, причём:

1) $\nabla_X Y$ линейно по X;

2) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$;

3) $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$, где $f \in C^\infty$;

4) если X – гладкое векторное поле, то поле $\nabla_X Y$, определённое как $(\nabla_X Y)(A) = \nabla_{X(A)} Y$, гладкое.

Определение 13.4. $\nabla_X Y$ – *ковариантная производная* Y *вдоль* X.

Пусть $U \subset M$ – координатная окрестность, $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в касательных векторных полях.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j};$$

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \ominus$$

Определение 13.5. Γ^k_{ij} – *символы Кристоффеля*, где $\Gamma^k_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \dfrac{\partial}{\partial x^j}$.

$$\ominus X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k};$$

$$(\nabla_X Y)^k = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k};$$

$$(\nabla_X Y)^k = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ij} \right).$$

Из свойства 4 определения (13.3) связности на многообразии следует, что Γ^k_{ij} – гладкие функции точки.

Определение 13.6. Связность ∇ называется *симметрической*, если для любых двух векторных полей верно $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Упражнение 13.4. Доказать, что ∇ – симметрическая тогда и только тогда, когда $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Пусть (M, g) – риманово многообразие.

Определение 13.7. Связность ∇ *согласована с римановой метрикой*, если $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

Теорема 13.2 (Теорема Леви-Чивиты)**.** *На римановом многообразии существует и единственна симметрическая связность, согласованная с метрикой, причём*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g^{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g^{il}}{\partial x^j}\right).$$

Ковариантная производная тензорного поля

Ковариантную производную можно продлить на тензорные поля произвольного типа.

1) Если Y – векторное поле, то есть тензор типа $(1,0)$, то $\nabla_X Y$ уже есть.

2) Если f – функция, то есть тензор типа $(0,0)$, то определим $\nabla_X f \coloneqq Xf$.

3) Рассмотрим $\omega \in \Omega^1$, то есть тензор типа $(0,1)$.

$\langle \omega, Y\rangle = \omega(Y)$ – спаривание 1-формы и векторного поля.

Определение 13.8. $\nabla_X \omega$ определено так, чтобы было верно тождество

$$X\langle \omega, Y\rangle = \langle \nabla_X \omega, Y\rangle + \langle \omega, \nabla_X Y\rangle.$$

Выведем явную формулу:

$$\begin{aligned}
&X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\\
&\nabla_X Y = X^i\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k};\\
&\omega = \omega_l\, dx^l, \qquad \langle \omega, Y\rangle = \omega_j Y j;\\
&X(\omega_j Y^j) = (\nabla_X \omega)_j Y^j + \omega_k X^i\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ij}\right);\\
&(\nabla_X \omega)_j Y^j X^k \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} Y^j + \omega_j \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} X^k - \omega_k X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - X^i \omega_k Y^j \Gamma^k_{ij} =\\
&= \left(X^k \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - X^i \omega_k \Gamma^k_{ij}\right) Y^j;\\
&(\nabla_X \omega)_j = X^i\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \omega_k \Gamma^k_{ij}\right); \qquad \nabla_X \omega = X^i\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \omega_k \Gamma^k_{ij}\right) dx^j.
\end{aligned}$$

4) $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$.

Как следствие получаем: на дифференциальных формах верно

$$\nabla_X(\sigma \wedge \tau) = \nabla_X \sigma \wedge \tau + \sigma \wedge \nabla_X \tau.$$

Обсудим традиционную форму записи ковариантной производной.

Пусть $\omega \in \Omega^1$, то есть тензор типа $(0,1)$. $(\nabla_X \omega)(Y)$ линейна и по X, и по Y. Тогда $\nabla \omega$ – тензор типа $(0,2)$.

Это верно и в общем случае. Если T – тензор типа (p, q), то ∇T – тензор типа $(p,\, q+1)$.

Если T имеет координаты $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, то координаты ∇T записывают так: $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q;\,k}$.

Например, пусть $\omega = \omega_l\, dx^l$, тогда $\omega_{l;\,i} = \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \omega_k \Gamma^k_{ij}$.

Пусть $Y = Y^l \dfrac{\partial}{\partial x^l}$, тогда $Y^l_{;\,i} = \dfrac{\partial Y^l}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^l_{ij}$.

Вообще говоря, $(\nabla_X T)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = X^k T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q;\,k}$, так как

$$(\nabla_X T)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \left(\nabla_{X^k \frac{\partial}{\partial x^k}} T\right)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = X^k \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} T\right)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = X^k T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q;\,k}.$$

Лекция 14

Напоминание

Напомним, что *связность* ∇ — это операция, которая позволяет нам определить $\nabla_X Y$ — *ковариантная производная* векторного поля Y вдоль вектора или векторного поля X. Результатом будет вектор или векторное поле соответственно.

Аксиомы:

1) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$;
2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$.

Два этих свойства вместе обозначают, что ковариантная производная линейна по аргументу.

3) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$;
4) *(тождество Лейбница)* $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$.

Из аксиом мы вывели явную формулу:

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^\ell}{\partial x^i} + \Gamma^\ell_{ij} Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^\ell}.$$

Будем обозначать результат применения 1–формы ω к векторному полю Y как спаривание:

$$\omega(X) = \langle \omega, X \rangle.$$

Тогда мы определяем ковариантную производную ω так, чтобы было верно следующее свойство:

$$X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle.$$

В данном равенстве известны все объекты, кроме $\nabla_X \omega$, поэтому это равенство его полностью определяет. Из этого мы вывели формулу

$$\nabla_X \omega = X^i \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} - \Gamma^\ell_{ik} \omega_\ell \right) dx^k.$$

Дальше мы продолжили это на тензор произвольного ранга с помощью тождества Лейбница:

$$L_X (T \otimes S) = L_X T \otimes S + T \otimes L_X S.$$

Таких связностей много. Если мы добавим к нашим аксиомам два дополнительных требования, тогда связность становится единственной.

5) Связность ∇ — симметрическая: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \Longleftrightarrow \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$;
6) (M, g) — риманово многообразие, где g — риманова метрика, метрический тензор, произведение которого будем обозначать $\langle \ , \ \rangle$.

Тогда мы говорим, что связность ∇ *согласована* с метрикой $\langle \ , \ \rangle$, если для векторных полей X, Y, Z верно следующее тождество:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \tag{14.1}$$

Требовать эти свойства естественно, поскольку на поверхности в евклидовом пространстве связность обладала этими свойствами.

Теорема Леви–Чивиты

Теорема 14.1*(Леви–Чивиты).* На римановом многообразии существует единственная симметрическая связность ∇, согласованная с метрикой.

При этом

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} \right), \tag{14.2}$$

где $g^{k\ell}$ — элементы матрицы, обратной к матрице Грама метрики g. В скобке здесь стоят производные элементов матрицы Грама по x. Эта формула равносильна (позже будет приведён вывод из формулы ((*)) формулы ((14.2))).

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \tfrac{1}{2}\Big(\underline{X\langle Y, Z\rangle} + \underline{\underline{Y\langle Z, X\rangle}} - \underline{\underline{\underline{Z\langle X, Y\rangle}}} + \\ + \big\langle Z, [X, Y]\big\rangle + \big\langle Y, [Z, X]\big\rangle - \big\langle X, [Y, Z]\big\rangle\Big). \tag{*}$$

В левой части стоит скалярное произведение производной Y вдоль X с Z. Заметим, что если мы знаем произведение вектора с любым вектором, то этот вектор нам известен, потому что координаты вектора в ортонормированном базисе — это просто координаты вектора в этом базисе, поэтому мы знаем все координаты вектора, а, значит, и сам вектор.

Обратим внимание на то, что стоит в формуле ((*)) справа. Первые три слагаемых — это скалярные произведения, это получается функция, от которой берётся производная вдоль векторного поля. В остальных слагаемых берутся коммутаторы, это векторное поле, и они скалярно умножаются на векторное поле.

Замечание 14.1. Такая связность называется *связностью Леви–Чивиты.*

Доказательство:

<u>Единственность.</u> Пусть ∇ существует. Тогда правая часть от ((*)) равна:

$$\tfrac{1}{2}\Big(\underline{\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \cancel{\langle Y, \nabla_X Z\rangle}} + \underline{\underline{\cancel{\langle \nabla_Y Z, X\rangle} + \cancel{\langle Z, \nabla_Y X\rangle}}} - \underline{\underline{\underline{\cancel{\langle \nabla_Z X, Y\rangle} - \cancel{\langle X, \nabla_Z Y\rangle}}}} + \\ + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \cancel{\langle Z, \nabla_Y X\rangle} + \cancel{\langle Y, \nabla_Z X\rangle} - \cancel{\langle Y, \nabla_X Z\rangle} - \cancel{\langle X, \nabla_Y Z\rangle} + \cancel{\langle X, \nabla_Z Y\rangle}\Big) = \\ = \tfrac{1}{2}\big(\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle\big) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ ((*)) верна $\Longrightarrow$ ∇ единственна. Здесь мы воспользовались свойством согласованности метрик и связности ((14.1)) и свойством симметричности (5)).

Подставим в ((*)) $X = e_i$, $Y = e_j$, $Z = e_\ell$, где $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Longrightarrow [e_i, e_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$. Получаем

$$\langle \Gamma_{ij}^{k} e_k, e_\ell\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{j\ell} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{\ell i} - \frac{\partial}{\partial x^\ell} g_{ij}\right).$$

Функцию Γ^k_{ij} можно вынести из под скалярного произведения, а также поменяем местами индексы у $g_{j\ell}$ и $g_{\ell i}$, поскольку элементы матрицы Грама симметричны, тогда получим

$$\Gamma^k_{ij} g_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\right).$$

Вспомним, что $g_{k\ell} g^{\ell p} = \delta^p_k$, поскольку матрица g с нижними индексами и матрица g с верхними индексами по определению взаимно обратны. Тогда при умножении нашего уравнения на $g^{\ell p}$, получим

$$\underbrace{\Gamma^k_{ij}\delta^p_k}_{=\Gamma^p_{ij}} = \frac{1}{2} g^{p\ell}\left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\right).$$

Получаем следующую формулу:

$$\boxed{\Gamma^p_{ij} = \frac{1}{2} g^{p\ell}\left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\right)}$$

Получили формулу ((14.2)), нужно только переименовать индекс p в k.

Если у нас есть связанность Леви–Чивиты, то она будет единственна, поскольку она полностью определяется формулой ((*)) или ((14.2)), потому что зная символ Кристоффеля, мы полностью знаем и саму связность.

Существование. Докажем, что связанность ∇ Леви–Чивиты существует. Для векторных полей X, Y, Z рассмотрим функцию $F_{X,Y}(Z)$, равную правой части формулы ((*)). Тогда у нас определены все объекты из правой части: различные скалярные произведения, производные векторного поля и коммутаторы векторных полей.

а) Докажем, что функция $F_{X,Y}(Z)$ линейна по Z:

Свойство $F_{X,Y}(Z_1 + Z_2) = F_{X,Y}(Z_1) + F_{X,Y}(Z_2)$ очевидно, потому что скалярное произведение линейно, коммутатор сумму переводит в сумму, а производная от суммы — это сумма от производных.

Распишем честно:

$$F_{X,Y}(fZ) = \tfrac{1}{2}\Big(\underline{X\langle Y, fZ\rangle} + \underline{\underline{Y\langle fZ, X\rangle}} - \underline{\underline{fZ\langle X, Y\rangle}} + \\ + \underline{\big\langle fZ, [X,Y]\big\rangle} + \underline{\big\langle Y, [fZ, X]\big\rangle} - \underline{\big\langle X, [Y, fZ]\big\rangle}\Big) =$$

Поскольку коммутатор на второе векторное поле действует как дифференцирование, то

$$[Y, fZ] = (Yf)Z + f[Y,Z],$$

$$[fZ, X] = -[X, fZ] = -(Xf)Z - f[X,Z] = -(Xf)Z + f[Z,X].$$

Воспользуемся этими формулами, а также линейностью скалярного произведения и тождеством Лейбница:

$$= \frac{1}{2}\Big(\cancel{(Xf)\langle Y,Z\rangle} + fX\langle Y,Z\rangle + \cancel{(Yf)\langle Z,X\rangle} + fY\langle Z,X\rangle - fZ\langle X,Y\rangle + f\big\langle Z,[X,Y]\big\rangle -$$

$$- \cancel{(Xf)\langle Y,Z\rangle} + f\big\langle Y,[Z,X]\big\rangle - \cancel{(Yf)\langle X,Z\rangle} - f\big\langle X,[Y,Z]\big\rangle\Big) = fF_{X,Y}(Z).$$

б) Линейная алгебра: $V \cong V^*$, то есть $\forall \xi \in V^*\ \exists v$ такой, что $\xi(w) = \langle v, w\rangle$,

то есть любая линейная функция может быть представлена как скалярное произведение с каким-то вектором. Следовательно, существует векторное поле $D_{X,Y}$ такое, что $F_{X,Y}(Z) = \langle D_{X,Y}, Z\rangle$.

Упражнение 14.1. $D_{X,Y}$ — гладкое векторное поле.
Подсказка. это следует из того, что $F_{X,Y}(Z)$ — гладкая функция.

в) $D_{X,Y}$ линейна по $X \iff F_{X,Y}(Z)$ линейна по Y.

Доказательство аналогично пункту а).

г)

$$D_{X,Y_1+Y_2} = D_{X,Y_1} + D_{X,Y_2} \iff F_{X,Y_1+Y_2}(Z) = F_{X,Y_1}(Z) + F_{X,Y_2}(Z),$$
$$D_{X,fY} = (Xf)Y + fD_{X,Y} \iff F_{X,fY}(Z) = (Xf)\langle Y,Z\rangle + fF_{X,Y}(Z).$$

Доказательство аналогично пункту а).

д) Это значит, что $D_{X,Y}$ удовлетворяет аксиомам связанности.

Будем обозначать $D_{X,Y} = \nabla_X Y$. У нас вышло, что мы вышли с многообразия, где есть метрика, и построили некоторую связность.

е) Надо доказать, что что ∇ — связность Леви–Чивиты, то есть

- симметрична $\iff \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \iff F_{X,Y}(Z) - F_{Y,X}(Z) = \big\langle [X,Y], Z\big\rangle$

(проверяется непосредственно подстановкой определения F);

- согласована с метрикой $\iff$

$$\iff X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \iff X\langle Y,Z\rangle = F_{X,Y}(Z) + F_{X,Z}(Y)$$

(проверяется непосредственно подстановкой определения F)
$\Longrightarrow \nabla$ — связность Леви–Чивиты. ■

Параллельный перенос

Аффинное пространство

В аффинном пространстве операция параллельного переноса очень проста, мы часто даже не задумываемся над ней (см. рис. (14.1)).

Заметим важное свойство, что длина вектора при этом сохранилась. Углы между векторами также сохраняются.

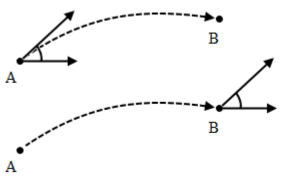


Рис. 14.1: Параллельный перенос в аффинном пространстве

Гладкие регулярные поверхности в аффинном пространстве

Пример 14.1. Рассмотрим одномерную поверхность в $\mathbb{R}^2$ (плоскую кривую).

Стандартный параллельный перенос касательного вектора из точки A попадёт в некасательный вектор, выходящий из точки B (см. рис. (14.2)).

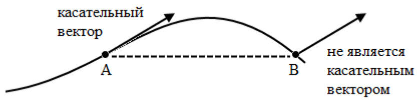


Рис. 14.2: Стандартный параллельный перенос в аффинной плоскости не подходит для плоской кривой

Однако мы хотим придумать такой способ параллельного переноса, чтобы он работал автоматически в любом случае, в том числе и на абстрактных многообразиях, а на них есть только касательные вектора. Поэтому для получения общей конструкции параллельного переноса, нам нужно, чтобы из касательного вектора получался касательный.

Наивная идея: возьмём касательное пространство в точке B и спроецируем на него вектор X, перенесённый в точку B. Таким образом мы из касательного вектора получаем снова касательный вектор, то есть X в $A \mapsto P_B(X)$ в B. Проблема в том, что в этом случае не будут сохраняться длины и углы, это можно проверить.

Поэтому нужен другой подход. На самом деле, если мы хотим, чтобы параллельный перенос сохранял длины и углы, нам нужно пожертвовать тем, что перенос у нас просто из точки A в точку B, он будет зависеть от пути.

Если у нас есть поверхность Σ, точки A, B и кривая $\gamma(t)$. Векторное поле $Y(t)$ — касательное к Σ на $\gamma(t)$, если выполнено следующее свойство: $\forall t$ из области определения $Y(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$ (касательное пространство к Σ в соответствующей точке). Эти векторы определены только в точках нашей кривой, но при этом они каждый раз касательные к поверхности.

Определение 14.1. $Y(t)$ — параллельное векторное поле вдоль кривой $\gamma(t)$, если

$$Y(t+\varepsilon) = P_{\gamma(t+\varepsilon)}Y(t) + o(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

То есть мы требуем, чтобы вектор векторного поля в точке $\gamma(t+\varepsilon)$ отличался от наивного подхода только на $o(\varepsilon)$. Эта конструкция очень жёсткая, хотя и функций, отличающихся на $o(\varepsilon)$ колоссальное количество.

Заметим, что $Y(t+\varepsilon) \in T_{\gamma(t+\varepsilon)}\Sigma \Longrightarrow P_{\gamma(t+\varepsilon)}\gamma(t+\varepsilon) = \gamma(t+\varepsilon)$. Воспользуемся этим, а также тем, что проектор линейный, и перенесём его в левую часть:

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)}\big(Y(t+\varepsilon)-Y(t)\big)=o(\varepsilon).$$

По определению производной $Y(t+\varepsilon)-Y(t)=\varepsilon\frac{dY}{dt}+o(\varepsilon)$. Оператор $P_{\gamma(t+\varepsilon)}$ зависит от ε гладко, разложим его в ряд Тейлора:

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)}=P_{\gamma(t)}+\varepsilon\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}(P_{\gamma(t+\varepsilon)})+o(\varepsilon).$$

Подставим полученные выражения и раскроем скобки, получим:

$$\varepsilon P_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right)=o(\varepsilon)\text{ при }\varepsilon\to 0.$$

Делим на ε и устремляем ε в 0:

$$P_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right)=0.$$

Мы знаем, что производная вдоль параметра на кривой — это тоже самое, что производная вдоль касательного вектора этой кривой: $P(\partial_{\dot\gamma}Y)=0$, а это значит, что $\nabla_{\dot\gamma}Y=0$. Мы доказали следующее утверждение:

Утверждение 14.1. Если Y параллельна вдоль $\gamma(t)$, то тогда

$$\frac{dY}{dt}\perp T_{\gamma(t)}\Sigma\Longleftrightarrow P\left(\frac{dY}{dt}\right)=0\Longleftrightarrow\nabla_{\dot\gamma}Y=0.$$

Это три эквивалентных условия параллельности. Каждое из них полезно, но сейчас нам особенно интересно *уравнение параллельного переноса* $\nabla_{\dot\gamma}Y=0$.

В координатах $x^1,\dots,x^n$ рассмотрим $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, и $\gamma(t)=\big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big)$. Тогда $\dot\gamma(t)=\big(\dot x^1(t),\dots,\dot x^n(t)\big)$. Вспомним, что $\nabla_XY=X^i\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}Y^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$. Поэтому $\nabla_XY=0\Longleftrightarrow X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}X^iY^j=0$, $k=1,\dots,\dim\Sigma$.

В нашем случае $\nabla_{\dot\gamma}Y\implies X^i=\dot x^i$, поэтому наше уравнение превращается в $\nabla_{\dot\gamma}Y=0\Longleftrightarrow\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}\dot x^iY^j=0$.

По правилу полной производной от сложной функции $\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}=\frac{dY^k}{dt}$, поэтому

Утверждение 14.2. В координатах уравнение параллельного переноса имеет вид

$$\frac{dY^k}{dt}+\Gamma^k_{ij}\dot x^iY^j=0,\ k=1,\dots,\dim\Sigma.$$

(Абстрактные) многообразия

Пусть у нас есть многообразие M, связность ∇ и $\gamma(t)$ — кривая на M.

Определение 14.2. Векторное поле $Y(t)$ на $\gamma(t)$ называется *параллельным* вдоль кривой γ, если $\nabla_{\dot\gamma}Y=0\Longleftrightarrow\frac{dY^k}{dt}+\Gamma^k_{ij}\dot x^iY^j=0$, $k=1,\dots,\dim M=n$.

То есть мы можем векторное поле определить с помощью уравнения параллельного переноса. Посмотрим на это уравнение более внимательно:

$$\frac{dY^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)\dot{x}^i Y^j = 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Это система <u>линейных</u> обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными $Y^1(t), \ldots, Y^n(t)$.

Это важно, потому что для них теорема существования и единственности решения очень специальная, потому что решение существует везде, где определена правая часть, а не только в маленькой окрестности начальной точки.

Таким образом, у нас есть многообразие M, на нём кривая $\gamma(t)$, исходная точка $A = \gamma(t_0)$, конечная точка $B = \gamma(t_1)$, вектор $Y_0 = (Y_0^1, \ldots, Y_0^n)$.

Рассмотрим задачу Коши: уравнение параллельного переноса $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$ и начальное условие $Y(t_0) = Y_0$. Можем выписать это в координатах:

$$\begin{cases} \frac{dY^1}{dt} + \Gamma^1_{ij}\dot{x}^i Y^j = 0 \\ \vdots \\ \frac{dY^n}{dt} + \Gamma^n_{ij}\dot{x}^i Y^j = 0; \\ Y^1(t_0) = Y_0 \\ \vdots \\ Y^n(t_0) = Y_n. \end{cases}$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы <u>линейных</u> обыкновенных дифференциальных уравнений, существует единственное решение на всём интервале $t \in [t_0, t_1]$.

Поэтому в каждой точке из $\gamma(t)$ появляется векторное поле $Y(t)$. В частности, появился вектор $Y(t_1)$ (см. рис. (14.3)).

Рис. 14.3: Порождаемое поле

Определение 14.3. $Y(t_1)$ называется *результатом параллельного переноса* вектора $Y_0 = Y(t_0)$ из точки A в точку B <u>вдоль γ</u>.

Отметим, что если переносить вектор вдоль разных кривых, то результат может быть разным.

Когда мы начали обсуждать параллельный перенос, мы хотели, чтобы он сохранял длины и углы. Давайте проверим, что это будет выполнено:

Теорема 14.2. Пусть (M, g) — риманова метрика, а ∇ — связность Леви–Чивиты. Тогда при параллельном переносе вдоль γ сохраняются длины и углы.

Доказательство:

Пусть в начальной точке A есть два вектора: X_0 и Y_0. Мы построили в каждой точке соответствующие параллельные вдоль γ векторные поля $X(t)$, $Y(t)$, $X(t_0) =$

$= X_0$, $Y(t_0) = Y_0$. Посмотрим на

$$\frac{d}{dt}\big\langle X(t), Y(t)\big\rangle = \dot\gamma\langle X, Y\rangle = \langle\underbrace{\nabla_{\dot\gamma}X}_{=0}, Y\rangle + \langle X, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma}Y}_{=0}\rangle = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \big\langle X(t), Y(t)\big\rangle = \big\langle X(t_0), Y(t_0)\big\rangle \Longrightarrow \big\langle X(t_1), Y(t_1)\big\rangle = \langle X_0, Y_0\rangle,$$

поэтому у нас сохраняется скалярное произведение векторов, а значит, длины и углы, поскольку мы считаем их через скалярное произведение. ■

Рассмотрим поверхность M, $\dim M = 2$ и $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ — мы вернулись в точку, из которой вышли. Мы начали из начального вектора $Y(t_0) = Y_0$ и пришли в какой-то вектор $Y(t_1)$. Так как сохраняются длины и углы, то параллельный перенос — ортогональное преобразование касательного пространства. Поскольку петелька лежит в одной координатной карте и непрерывная, у нас она будет с положительным определителем 1, а ортогональное преобразование с определителем 1 — это просто поворот на угол α (см. рис. (14.4)).

Рис. 14.4: Частный случай параллельного переноса — поворот

Поскольку угол между векторами сохраняется, то в результате параллельного переноса вдоль петли любой касательный вектор поворачивает на один и тот же угол (см. рис. (14.5)). Это специфика размерности 2.

Рис. 14.5: Все вектора поворачиваются на один и тот же угол из-за сохранения углов

Лекция 15

Случай двухмерной поверхности

Вспомним, что означает данное понятие в классической дифференциальной геометрии. Рассмотрим случай двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$. На поверхности Σ есть точка A, с нормалью к поверхности $\vec{m}$; есть кривая $\gamma(s)$ с вектором ускорения $\ddot{\gamma}(s)$, где s — натуральный параметр на γ. Тогда у нас есть касательная плоскость. У вектора $\ddot{\gamma}(s)$ есть две проекции — на нормальную компоненту $\big(|d-P\big)(\ddot{\gamma})$ и на касательную плоскость $P\big(\ddot{\gamma}(s)\big)$ (см. рис.(15.1)).

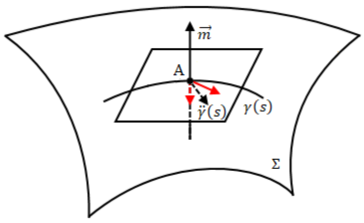


Рис. 15.1: Проекции $\ddot{\gamma}$ на нормальную компоненту и касательную плоскость

Из классической дифференциальной геометрии мы помним, что

- $k_n = \Big|\big(|d-P\big)(\ddot{\gamma})\Big|$ — *нормальная кривизна* кривой γ;
- $k_g = \big|P(\ddot{\gamma})\big|$ — *геодезическая кривизна* кривой γ.

Теорема 15.3. $\pm k_n = \mathrm{II}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$.

То есть, с точностью до знака, нормальная кривизна — вторая квадратичная форма на векторе скорости. А так как кривизна — это длина вектора ускорения $k = |\ddot{\gamma}|$, поэтому по теореме Пифагора верно: $k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$.

Рассмотрим единичный касательный вектор $\dot{\gamma}$ в точке A. Разные кривые с одним касательным вектором $\dot{\gamma}$ имеют одинаковую нормальную кривизну k_n (см. рис. (15.2)).

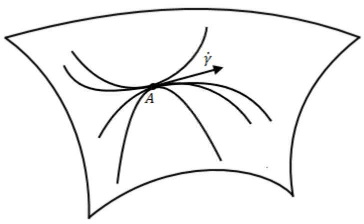


Рис. 15.2: Различные кривые с одинаковой k_n

Кривая с $k_g = 0$ имеет минимальную кривизну k среди всех кривых в той же точке с тем же касательным вектором. Перепишем это уравнение:

$$k_g = 0 \Longleftrightarrow \big|P(\ddot{\gamma})\big| = 0 \Longleftrightarrow P(\ddot{\gamma}) = 0.$$

С одной стороны, последнее равенство эквивалентно тому, что вектор ускорения в каждой точке ортогонален касательной плоскости: $\boxed{\ddot{\gamma} \perp T_\gamma\Sigma}$. С другой стороны, оно эквивалентно $P\left(\frac{d}{ds}\dot\gamma\right) = 0 \iff P(\partial_{\dot\gamma}\dot\gamma) = 0 \iff \boxed{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0}$, то есть ковариантная производная вектора скорости вдоль вектора скорости равна 0.

Определение 15.4. Кривая — *геодезическая*, если в натуральной параметризации $k_g = 0 \iff \ddot\gamma \perp T_\gamma\Sigma \iff \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$.

Случай риманова многообразия

Теперь рассмотрим ситуацию, когда мы находимся на римановом многообразии (M, g). Теперь у нас нет объемлющего пространства, нормальной кривизны и проектора, но уравнение $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ по-прежнему имеет смысл, если мы введём ∇ — связность Леви–Чивиты.

Определение 15.5. Кривая $\gamma(t)$ — *геодезическая*, если $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ (это *уравнение геодезических*).

Это определение несколько шире определения (15.4), потому что там мы требовали, чтобы параметр был натуральный, а здесь мы этого не требуем.

Вспомним, что у нас было уравнение параллельного переноса на векторное поле $\nabla_{\dot\gamma}Y = 0$. Если подставить $Y = \dot\gamma$, получим уравнение геодезических. Позже мы обсудим, что эти уравнения сильно отличаются, но сейчас это наблюдение поможет нам написать уравнение геодезических в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$: подставим $Y = \dot\gamma$ в $\frac{dY^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\dot x^i Y^j = 0$:

$$\ddot x^k(t) + \Gamma^k_{ij}\big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)\dot x^i(t)\,\dot x^j(t) = 0,\ k = 1, \ldots, n = \dim M.$$

Заметим, что эта ситуация достаточно отличается от уравнения параллельного переноса. В уравнение параллельного переноса мы осуществляли перенос вдоль известной кривой γ, то есть $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ было известно, а неизвестно было векторное поле Y. Сейчас же мы получили уравнение, в котором неизвестны функции $x^1(t), \ldots, x^n(t)$, то есть кривая.

В случае уравнения геодезических, мы получили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на неизвестные $x^1(t), \ldots, x^n(t)$.

Вспомним, как устроена задача Коши для уравнений второго порядка. Нам нужны первые производные в начальной точке и начальные данные:

$$\begin{cases} \ddot x^k + \Gamma^k_{ij}\dot x^i\dot x^j = 0,\ k = 1, \ldots, n; \\ x^k(t_0) = A^k,\ k = 1, \ldots, n; \\ \dot x^k(t_0) = X^k,\ k = 1, \ldots, n \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0, \\ \gamma(t_0) = A, \\ \dot\gamma(t_0) = X. \end{cases} \tag{15.1}$$

По теореме существования и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными данными (задачи Коши), существует единственное решение, определённое в какой-то окрестности начальных данных. В геометрических терминах это значит, что если мы выберем начальные координаты $x^1, \ldots, x^n$; A^k — координаты точки A; X^k — координаты вектора X, тогда эта задача Коши описывает геодезическую, которая проходит через точку A с касательным вектором X (см. рис. (15.3)).

Теорема 15.4. Пусть на римановом многообразии M выбраны точка $A \in M$ и

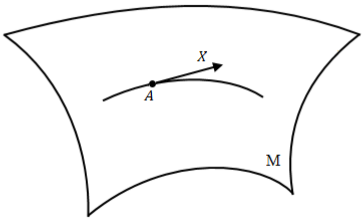


Рис. 15.3: Геодезическая, соответствующая системе уравнений ((15.1))

вектор $X \in T_AM$. Тогда существует единственная геодезическая, определённая на интервале $(a, b) \ni t_0$ такая, что $\gamma(t_0) = A$, $\dot\gamma(t_0) = X$.

Когда мы говорим про единственность решения, мы всегда полагаем, что решение непродолжимое, в том смысле, что оно определено на максимально возможном интервале и не может быть продлено дальше.

Если $t_0 = 0$, то решение будем обозначать $\gamma_{A,X}(t)$ или $\gamma(t, A, X)$.

По теореме о зависимости решений задачи Коши от начальных данных, решение гладко зависит от A и X, то есть функция $\gamma^i(t, A^1, \ldots, A^n, X_1, \ldots, X^n)$ будет гладко зависеть от A^j и от X^j.

Вспомним, что если векторное поле Y было параллельно, то есть $\nabla_{\dot\gamma} Y = 0$, то из этого следовало, что $\left|Y(t)\right| = \mathrm{const}$. Подставив в это уравнение, как раньше, $\dot\gamma$ вместо Y, получим следующее следствие:

Следствие 15.1. $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \mathrm{const} = c$.

Таким образом, длина вектора скорости геодезической постоянна.

$$\left|\frac{d}{ds}\gamma\left(\frac{s}{c}\right)\right| = \left|\frac{d\gamma}{dt}\left(\frac{s}{c}\right)\cdot\frac{1}{c}\right| = \frac{1}{c}\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \frac{1}{c}\cdot c = 1.$$

Это значит, что $\frac{s}{c}$ — натуральный параметр. При этом у нас $\boxed{t = \frac{s}{c}}$.

Определение 15.6. Если параметр s на кривой — натуральный, параметры вида $as + b$, $a \neq 0$ называются *аффинными натуральными параметрами*.

В натуральном параметре длина скорости равна 1, а в аффинном натуральном параметре длина скорости равна константе, это верно для t.

Утверждение 15.3. Если $\gamma(t)$ — геодезическая, то есть решение уравнения геодезических $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, то t — аффинный натуральный параметр.

То есть у уравнения геодезических первый интеграл — квадрат длины вектора скорости, поскольку просто длина — плохая функция.

Следствие 15.2. $\dot\gamma$ параллельна вдоль γ.

То есть на геодезической вектор скорости всегда параллелен вдоль γ.

Хотим вдоль геодезической γ перенести вектор Y_0 из точки с вектором скорости $\dot\gamma(t_0)$ в точку с $\dot\gamma(t_1)$. Знаем, что и $\dot\gamma$, и Y параллельны вдоль γ, где Y — решение уравнения параллельного переноса $\nabla_{\dot\gamma} Y = 0$, поэтому

Утверждение 15.4. При параллельном переносе вектора вдоль геодезической угол с $\dot\gamma$ сохраняется (см. рис.(15.4)).

Утверждение 15.5. При параллельном переносе вектора Y_0 из $\gamma(t_0)$ в $\gamma(t_1)$ вдоль геодезической γ на поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, $\dim\Sigma = 2$, получится такой вектор Y_1,

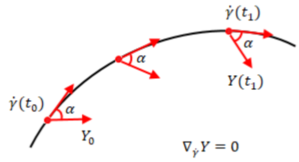


Рис. 15.4: Сохранение угла с $\dot\gamma$ при параллельном переносе

что угол между Y_1 и $\dot\gamma(t_1)$ равен углу между Y_0 и $\dot\gamma(t_0)$, $|Y_1| = |Y_0|$ и $\big(\dot\gamma(t_0), Y_0, m\big) = \big(\dot\gamma(t_1), Y_1, m\big)$.

Поскольку касательная плоскость в точек $\gamma(t_1)$ двумерная, у нас есть два кандидата в результат параллельного переноса вектора Y_0. Чтобы выбрать правильный, мы взяли единичное нормальное поле m, потому что из-за непрерывности процесса, ориентация тройки $\dot\gamma(t), Y, m$ не поменяется (см. рис. (15.5)). С помощью этого на практике очень легко делать перенос вдоль геодезических, даже если они очень сложные.

Рис. 15.5: Определение вектора Y_1, полученного при параллельном переносе

Пусть у нас есть решение $\gamma_{A,X}(t)$. Это такая геодезическая, которая из точки A в момент времени 0 вылетает с вектором скорости X.

Построим $\widehat{\gamma}(t) = \gamma_{A,X}(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, то есть растянем время в λ раз. Тогда $\frac{d\widehat{\gamma}}{dt} = \lambda \frac{d\gamma}{dt}$, поэтому $\nabla_{\frac{d\widehat{\gamma}}{dt}} \frac{d\widehat{\gamma}}{dt} = \nabla_{\lambda \frac{d\gamma}{dt}} \lambda \frac{d\gamma}{dt} = \lambda^2 \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$, потому что γ — геодезическая $\Longrightarrow \widehat{\gamma}(t)$ тоже геодезическая, причём $\widehat{\gamma}(0) = \gamma_{A,X}(0) = A$, $\frac{d\widehat{\gamma}}{dt}(0) = \lambda \frac{d\gamma_{A,X}}{dt}(0) = \lambda X$. В силу единственности, получаем, что

$$\boxed{\gamma_{A,X}(\lambda t) = \gamma_{A,\lambda X}(t)} \qquad (*)$$

То есть бежать быстрее в λ раз — тоже самое, что стартовать из той же точки с в λ раз более длинным вектором.

Экспоненциальное отображение в точке

Определение 15.7. $\exp_A \colon T_A M \to M$ — *экспоненциальное отображение* в точке A, если $\exp_A(X) = \gamma_{A,X}(1)$ (см. рис.(15.6)).

Рис. 15.6: Экспоненциальное отображение в точке A

Заметим, что это отображение может быть не определено для всех X, так как $\gamma_{A,X}$ может существовать на интервале $(a, b) \not\ni 1$.

Заметим, что $\gamma_{A,0}(t) \equiv A$, поэтому $\exp_A(0) = \gamma_{A,0}(1) = A$, поэтому $\exp_A$ точно определена хотя бы в одной точке $0 \in T_A M$.

Теорема 15.5 *(о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных дан-*

ных).

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0; \\ \gamma(0) = A; \\ \dot\gamma(0) = X. \end{cases}$$

Пусть $A_0 \in M$, тогда $\exists \varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и окрестность U точки A_0 на M такие, что для $|t| < \varepsilon$, $A \in U$, $|X| < \delta$ решение $\gamma_{A,X}(t)$ определено и гладко зависит от A и X.

В уравнении ((*)) обозначим λt за t, тогда t переобозначится в $\frac{t}{\lambda}$:

$$\gamma_{A,X}(t) = \gamma_{A,\lambda X}\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

Это значит, что если мы растянули X в λ раз, то мы можем сжать t в λ раз, а можно, наоборот, сжать вектор X в λ раз и растянуть область определения в λ раз:

$$\gamma_{A,X}(t) = \gamma_{A,\frac{1}{\lambda}X}(\lambda t).$$

Решение есть при $|X| < \delta$ и $|t| < \varepsilon$, тогда оно есть при $|X| < \frac{\delta}{2}$ и $|t| < 2\varepsilon$. Если возьмём $|X| < \frac{\delta}{4}$, тогда решение будет при $|t| < 4\varepsilon$ и так далее: чем короче мы берём векторы, тем длиннее интервал, на котором существует решение. В частности, можем взять $|X| < \frac{\delta}{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon\delta}{2}$, тогда $|t| < \frac{2}{\varepsilon}\varepsilon = 2$, то есть при $|X| < \frac{\varepsilon\delta}{2} = \delta'$ $\gamma_{A,X}(t)$ определена при $t \in (-2, 2)$, в том числе при $t = 1$.

Следствие 15.3. Пусть $A_0 \in M$. Тогда существует окрестность U точки A_0 и $\delta' > 0$ такие, что при $A \in U$ и $X \in T_AM$ таких, что $|X| < \delta'$, $\exp_A(X)$ определена и гладко зависит от A и X.

Более того, из ((*)) следует, что если $\exp_A X$ определена, то и $\exp_A sX$ тоже определена при $s \in [0, 1]$, так как $\exp_A(sX) = \gamma_{A,sX}(1) = \gamma_{A,X}(s)$ — определена.

Определение 15.8. Множество, в котором вместе с каждой точкой, соединяющей её с выделенной точкой, принадлежит и весь отрезок, называется *звёздным множеством* (см. рис. (15.7)).

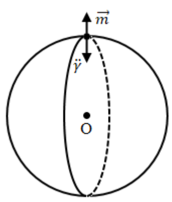


Рис. 15.7: Пример звёздного множества

Следствие 15.4. $\exp_A$ определена на звёздной окрестности $0 \in T_AM$.

Пусть V — векторное пространство. Тогда его касательное пространство в 0, как и в любой другой точке, канонически отождествляется с V: $T_0V \cong V$.

У нас $\exp_A\colon T_AM \to M$ — гладкое отображение, тогда у него есть дифференциал в точке 0: $d_0 \exp_A\colon T_0(T_AM) \to T_AM$. В силу нашего наблюдения, векторное пространство $T_0(T_AM)$ можно отождествить с T_AM, поэтому дифференциал экспоненциального отображения в точке A можно рассматривать как отображение касательного пространства в точке A в себя: $d_0 \exp_A : T_A M \to T_A M$.

Утверждение 15.6. $d_0 \exp_A = Id$.

Доказательство:

Нам понадобится тождество ((*)). Запишем в локальных координатах: $\gamma_A^i(t, X^1, \ldots, X^n)$, $i = 1, \ldots, n = \dim M$. Тогда ((*)) запишется в виде

$$\gamma_A^i(\lambda t, X^1, \ldots, X^n) = \gamma_A^i(t, \lambda X^1, \ldots, \lambda X^n).$$

Продифференцируем по параметру однородности λ:

$$t \frac{\partial \gamma_A^i}{\partial t}(\lambda t, X^1, \ldots, X^n) = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial \gamma_A^i}{\partial X^j}(t, \lambda X^1, \ldots, \lambda X^n).$$

Подставим $\lambda = 0$, $t = 1$:

$$\frac{\partial \gamma_A^i}{\partial t}(0, X^1, \ldots, X^n) = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial \gamma_A^i}{\partial X^j}(1, 0, \ldots, 0).$$

Вектор скорости геодезической $\frac{\partial \gamma_A}{\partial t}$ в момент времени 0 — это просто начальный вектор скорости X. А в правой части видим производную экспоненты по X^j на нулевом векторе, поэтому уравнение перепишется в виде

$$X^i = \sum_{j=1}^n (d_0 \exp_A)^i_j X^j.$$

У нас была какая-то матрица, мы её умножаем на вектор–столбец и получаем тот же самый вектор–столбец. Это может быть тогда и только тогда, когда $(d_0 \exp_A)^i_j = \delta^i_j$, поэтому $d_0 \exp_A = Id$. ∎

Значит, в $0 \in T_A M$ дифференциал $\exp_A$ не вырожден $\Longrightarrow$ $\exp_A$ — локальный диффеоморфизм в 0. Более точно:

Утверждение 15.7. Существует окрестность U точки 0 в $T_A M$ и окрестность V точки A на M такие, что $U \xrightarrow[\sim]{\exp_A} V$ — диффеоморфизм. Такое отображение называется *локальным диффеоморфизмом в точке.*

Геодезические координаты

Чтобы построить геодезические координаты, нужно

1) в $T_A M$ введём ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$;
2) для точки $P \in V$ определим её геодезические координаты как координаты вектора $\exp_A^{-1}(P)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Такие координаты оказываются очень удобными для многих вычислений.

Примеры

Пример 15.2. Возьмём евклидово n–мерное пространство $\mathbb{E}^n$ и $x^1, \ldots, x^n$ — прямоугольные декартовы координаты. Знаем, что матрица Грама единичная: $g_{ij} = \delta_{ij}$, поэтому все символы Кристоффеля равны 0: $\Gamma^k_{ij} = 0$. Тогда уравнение геодезических будет иметь вид $\ddot{x}^k = 0$, это значит, что $x^k = a^k t + b^k$ — прямая. То есть геодезические в n–мерном евклидовом пространстве — прямые, и, наоборот, каждая прямая является решением уравнения геодезических.

Пример 15.3. Рассмотрим в $\mathbb{S}^2$ 2–мерную сферу S^2. Плоскость, проходящая через центр сферы O, высекает окружность, которая называется *большой круг.* У окружности вектор ускорения $\ddot{\gamma}$ смотрит в сторону центра. С другой стороны мы знаем, что нормаль m на сфере лежит на радиусе (см. рис. (15.8)). Поэтому $\ddot{\gamma} \parallel m \Longrightarrow \ddot{\gamma} \perp T_\gamma S^2 \Longrightarrow \gamma$ — геодезическая, то есть большие круги — геодезические.

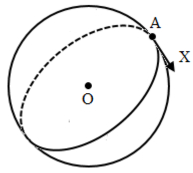


Рис. 15.8: Большой круг на сфере является геодезической

Теперь рассмотрим точку A и вектор X на сфере S^2 с центром в точке O. Рассмотрим плоскость $\pi\colon O, A \in \pi$, $X \parallel \pi$. Тогда большой круг $\pi \cap S^2$ касается X (см. рис. (15.9)), поэтому при подходящей параметризации $\gamma(0) = A$, $\dot{\gamma}(0) = X$. То есть мы начали с произвольной точки и произвольного вектора, а получили большой круг, который геодезический и удовлетворяет этим начальным данным, тогда, в силу единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, получаем, что все геодезические — большие круги.

Рис. 15.9: Геодезическая из произвольной точки сферы

Три свойства прямых в евклидовой геометрии:

1) через две точки $A \neq B$ можно провести прямую;
2) эта прямая единственна;
3) отрезок $[A\,B]$ этой прямой — кратчайшая кривая, соединяющая A и B.

Эти утверждения не верны для геодезических.

Пример 15.4. Возьмём $\mathbb{R}^2 \setminus D^2$, метрика евклидова. Рассмотрим точки A и B, лежащие по разные стороны от диска. Так как метрика евклидова, геодезические должны быть только прямые. Из-за того, что диска нет, у нас нет прямой, которая проходит через A и B (см. рис. (15.10)).

Рис. 15.10: Геодезической между A и B не существует

Пример 15.5. Возьмём сферу S^2, а на ней возьмём северный N и южный S полюса. Любой меридиан является дугой большого круга, поэтому у нас существует бесконечно много геодезических, соединяющих северный и южный полюс. (см. рис. (15.11))

Рис. 15.11: Бесконечное количество геодезических, соединяющих две точки

Пример 15.6. Рассмотрим сферу и точки A и B, которые не антиподальные на сфере. Мы можем выбрать две различные дуги большого круга, соединяющие их. Одна из них точно не будет кратчайшей, потому что вторая геодезическая короче (см. рис. (15.12)).

Рис. 15.12: Красная геодезическая — не кратчайшая кривая, соединяющая A и B

Теорема Уайтхеда о нормальной окрестности

Однако свойства (1))–(3)) верны локально, то есть они верны в маленьких окрестностях.

Теорема 15.6 *(Уайтхеда о нормальной окрестности).* Пусть (M, g) — риманово многообразие со связностью Леви–Чивиты (мы знаем, что она существует и единственна). У каждой точки A существует окрестность W (называемая *нормальной*) такая, что любые две точки $P \neq Q$ из W соединяются в W единственной геодезической.

На рис. (15.12) такая маленькая окрестность обведена, и зелёная геодезическая единственная, поскольку красная выходит за пределы маленькой окрестности W.

Доказательство:

1) Рассмотрим отображение $F\colon TM \to M \times M$, которое устроено следующим образом: $F(x, v) = (x, \exp_x v)$, $x \in M$, $v \in T_X M$.

Заметим, что оно не везде определено, но, по теореме о гладкой зависимости от изначальных данных, оно гладкое где определено. Если у нас в образе F лежат две какие-то точки, то есть они получаются из каких-то x и v, то тогда это значит, что если мы стартуем из первой точки с этим начальным вектором, то мы за время 1 приедем в эту точку, поэтому это отображение нам интересно.

$$\forall (x, 0)\ d_{(x,0)} F = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline * & E \end{array}\right),$$

поскольку $d_0 \exp_x = E$. Эта матрица не вырождена $\Longrightarrow$

2) Существует окрестность $\widetilde{U}$ точки $(A,0)$ в TM и окрестность U точки $(A,A) = F(A,0)$ в $M \times M$ такие, что $\widetilde{U} \xrightarrow[\sim]{F} U$ — диффеоморфизм.

3) На $M \times M$ есть два естественных отображения — проекции на первый и на второй сомножители $\pi_1(x,y) = x$ и $\pi_2(x,y) = y$.

Скажем, что $V := \pi_2(U)$. Уменьшив, при необходимости, окрестности $\widetilde{U}$ и U, можем считать, что V содержится в координатной окрестности точки A с координатами $x^1, \ldots, x^n$ и $x^1(A) = \ldots = x^n(A) = 0$ (можем сдвинуть точку A в начало координат).

4) Уменьшив, при необходимости, $\widetilde{U}$ и U, можно считать, что в $V = \pi_2(U)$ матрица $\delta_{ij} - \sum\limits_{i=1}^{n} \Gamma^i_{jk} x^i > 0$ (положительно определена).

Если мы находимся в точке A, то есть $x^i = 0$, наша матрица просто единичная, то есть она положительно определена; при очень маленьких x, в маленькой окрестности, второе слагаемое будет настолько меньше единичной матрицы, что их разность всё ещё будет положительно определена, поэтому в некоторой окрестности точки A это верно, можно уменьшить $\widetilde{U}$ и U так, чтобы это было выполнено.

5) Пусть $x = (x^1, \ldots, x^n)$, тогда $\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$. Аналогично $v = (v^1, \ldots, v^n)$, $\|v\| = \sqrt{(v^1)^2 + \ldots + (v^n)^2}$.

6) Уменьшив, при необходимости, $\widetilde{U}$ и U, можно считать, что

$$\widetilde{U} = \big\{(u,v) \,\big|\, \|x\| < \mu,\ \|v\| < \nu\big\}.$$

7) Существует $W = \big\{x \,\big|\, \|x\| < \lambda\big\}$ такая, что $W \times W \subset U$ и содержит точку (A,A).

Нарисуем, как у нас всё устроено. Поскольку $W \times W \subset U$, то $W \subset \pi_1(U)$. При этом $V = \pi_2(U)$ будет ещё больше, чем $\pi_1(U)$, потому что F устроена так, что вторая координата — те точки, куда из x можно приехать с помощью начального вектора вдоль геодезической, но из x в x всегда можно приехать, поэтому $\pi_1(U) \subset \pi_2(U)$ (см. рис. (15.13)). Вспомним также, что в $\pi_2(U)$ есть координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Рис. 15.13: Взаимное расположение введённых окрестностей

8) Пусть точки $P, Q \in W$. Поскольку $W \times W \in U$, имеем $(P,Q) \in U$. Это значит, что существует вектор $v \in T_P M$ такой, что $\exp_P v = Q$.

9) $(P,v) \in \widetilde{U}$, поэтому $(P,tv) \in \widetilde{U}$ при $|t| \leq 1$. Тогда $(P, \exp_P tv) \in U$.

Замечание 15.2. В силу свойства однородности, $\gamma_{A,X}(t) = \gamma_{A,tX}(1) = \exp_A tX$, поэтому мы любую геодезическую можем представить в качестве экспоненты. Поэтому $\exp_p tv$ — геодезическая, соединяющая P и Q в $\pi_2(U) = V$. На рис. (15.13) гипотетическая геодезическая $\gamma_{P,Q}(t)$ показана красным цветом, она не может выходить дальше V, а V лежит в координатной окрестности, поэтому геодезическая будет записываться в координатах.

10) Эта единственная геодезическая, соединяющая P и Q в $V = \pi_2(U)$, так как иначе был бы ещё один вектор скорости v': $\exp_P v' = Q$ и $F(p, v) = Q$, $F(p, v') = Q$, что противоречит $\widetilde{U} \xrightarrow[\sim]{F} U$.

11) Рассмотрим $f(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$. Тогда $f(P) \le \lambda^2$, $f(Q) \le \lambda^2$.

12) Хотим взять $f\big(\gamma_{P,Q}(t)\big)$. В координатах $\gamma_{P,Q}(t) = \big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)$. Будем считать производные по t от f:

$$\dot{f} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\big(x^i(t)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} 2x^i(t)\dot{x}^i(t);$$

$$\ddot{f} = \sum_{i=1}^{n}\big(2(\dot{x}^i)^2 + 2x^i\ddot{x}^i\big) = 2\sum_{i=1}^{n}\big((\dot{x}^i)^2 - x^i\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k\big) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_{jk} - \sum_{i=1}^{n}\Gamma^i_{jk}x^i\right]\dot{x}^j\dot{x}^k \ge 0$$

13) Мы знаем, что $f(P) \le \lambda^2$, $f(Q) \le \lambda^2$. Поскольку вторая производная

≥ 0, это значит, что график функции выпукл снизу (см. рис. (15.14)). Это значит, что $\forall t \in [0, 1]$ $f(t) \le \lambda^2 \Longrightarrow \gamma_{P,Q}(t) \subset W$.

Рис. 15.14: Функция f выпукла снизу

Это говорит о том, что на самом деле наша геодезическая не выезжает за пределы W, то есть рис. (15.13) невозможен. Более правильное расположение геодезической показано на рис. (15.15)

Рис. 15.15: Правильное расположение геодезической из рис. (15.13)

Получилось ровно то утверждение, которое мы хотели. Для точки A мы построили некоторую окрестность W, мы взяли две произвольные точки P и Q там, нашли там геодезическую, соединяющую их в V, мы доказали, что в V она единственна, а потом мы ещё и доказали, что эта геодезическая никогда не выходит за пределы W. Получилось ровно то, что мы хотели: у любой точки A существует такая окрестность W, что в ней любые две точки соединяются единственной геодезической в этой окрестности. ■

Лекция 16

Полугеодезические координаты

В прошлый раз мы доказали теорему Уайтхеда и показали, что первые два свойства прямых локально выполняются на геодезической. Разберёмся со свойством о том, что локально геодезическая — это кратчайшая кривая, соединяющая точки A и B.

Определение 16.9. Локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ на римановом многообразии называются *полугеодезическими*, если в них метрика имеет вид

$$g = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & * & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} d_x^i d_x^j + (dx^n)^2.$$

Упражнение 16.2. Кривые $\begin{cases} x^1 = c^1, \\ \vdots \\ x^{n-1} = c^{n-1}; \\ x^n = t \end{cases}$ (*координатные кривые*) являются в такой метрике геодезическими.

Пример 16.7. Возьмём $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, g_{\text{евкл}})$ — еклидова плоскость с евклидовой метрикой. Выберем здесь прямоугольные декартовы координаты x, y, тогда метрика имеет вид $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а кривые вида $x = c$, $y = t$ — это просто вертикальные прямые. Ясно, что прямые у нас геодезические.

Пример 16.8. Посмотрим снова на плоскость $\mathbb{E}^2$, но теперь возьмём полярные координаты φ, r. Тогда метрика имеет вид $g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Если вспомнить координатные кривые, то для r это окружность, а для φ — это лучи. Кривые $\varphi = c$, $r = t$ — это такие лучи, выходящие из полюса системы полярных координат. Прямые в евклидовой плоскости, конечно же, будут геодезическими.

Пример 16.9. Возьмём трехмерное евклидово пространство $\mathbb{E}^3$ и сферические координаты φ, θ, r в нём. Они также будут являться полугеодезическими.

Один из способов построения полугеодезических координат

Мы будем вдохновляться полярными и сферическими координатами. Пусть у нас (M, g) — риманово многообразие, g — риманова метрика. Выберем точку $A \in M$, построим в точке A касательное пространство T_AM. Мы знаем, что $\exp_A \colon T_AM \to M$ — диффеоморфизм $\exp_A \colon \widetilde{U} \underset{\sim}{\to} U$, где $\widetilde{U}$ — окрестность 0 в T_AM, а U — окрестность A в M. Вспомним, что $\exp_A tX$ — геодезическая, выходящая из точки A, то есть если мы испускаем лучи, то лучи tX отображаются в геодезические (см. рис. (16.1)).

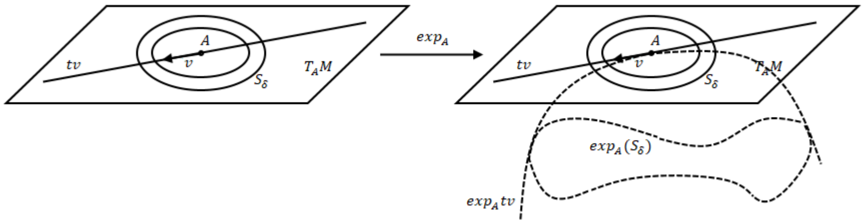


Рис. 16.1: Лучи на касательном пространстве отражаются в геодезические на многообразии

Пусть у нас $S_r = \{X \in T_AM \,\big|\, |X| = r\}$ — сфера радиуса r и центром 0 в T_AM. Отобразим их на M с помощью экспоненциального отображения. $\exp_A(S_r)$ — *геодезическая сфера* радиуса r центром в точке A.

Упражнение 16.3. Геодезические $\exp_A tX$ ортогональны геодезическим сферам. Это значит, что вектор скорости всегда ортогонален касательному пространству к геодезической сфере.

С помощью этого наблюдения можно ввести полугеодезические координаты следующим образом:

1) выберем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в T_AM;
2) пусть $x^1, \ldots, x^n$ — соответствующие декартовы координаты в T_AM;
3) введём $\varphi^1, \ldots, \varphi^{n-1}, r$ — обобщенные сферические координаты в T_AM.

Вспомним, как устроены сферические координаты:

$$\begin{aligned}
x^1 &= r\cos\varphi^1\cos\varphi^2\ldots\cos\varphi^{n-1};\\
x^2 &= r\sin\varphi^1\cos\varphi^2\ldots\cos\varphi^{n-1};\\
&\vdots\\
x^{n-2} &= r\sin\varphi^{n-3}\cos\varphi^{n-2}\cos\varphi^{n-1};\\
x^{n-1} &= r\sin\varphi^{n-2}\cos\varphi^{n-1};\\
x^n &= r\sin\varphi^{n-1}.
\end{aligned}$$

4) введём в U координаты так: координатами точки $P \in U$ являются обобщенные сферические координаты $\varphi^1, \ldots, \varphi^{n-1}, r$ точки $\exp_A^{-1}(P)$.

Утверждение 16.8. Координаты $\varphi^1, \ldots, \varphi^{n-1}, r$ в U полугеодезические.

Доказательство:

Вектор $\frac{\partial}{\partial r}$ — просто вектор касательной к геодезической, он будет иметь длину 1, потому что у нас $\frac{\partial}{\partial r}$ в касательном производстве имеет длину 1, значит, он будет переходить в вектор длины 1. А касательными векторами к геодезической сфере будут $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}$. Они ортогональны, так как у нас геодезические ортогональны геодезическим сферам. Поэтому

$$g = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & * & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

■

Это позволяет нам работать с геодезическими. Рассмотрим точку A и окрестность U, где у нас работают полугеодезические координаты, введённые с помощью $\exp_A \colon \varphi^1, \ldots, \varphi^{n-1}, r$. Также рассмотрим точку $B \in U$. У точки B есть какой-то прообраз, там они соединяются с точкой A лучом, значит, точки A и B соединяются геодезической ω, или $\exp_A tX$. В этих координатах ω имеет вид

$$\begin{cases} \varphi^1 = c^1, \\ \vdots \\ \varphi^{n-1} = c^{n-1}; \\ r = t,\ t \text{ — натуральный параметр.} \end{cases}$$

Мы хотим сравнить её длину с длиной другой кривой γ, которая соединяет A и B. Сначала рассмотрим простой случай: r можно выбрать как параметр на γ. Это значит, что координата r на γ только растёт. Тогда γ можно параметризовать так:

$$\begin{gathered} \varphi^1 = \varphi^1(t) \\ \vdots \\ \varphi^{n-1} = \varphi^{n-1}(t) \\ r = t \end{gathered}$$

Точка A отвечает $r = 0$, а B отвечает $r = r_0$. Посмотрим на длину кривой γ:

$$L[\gamma] = \int\limits_0^{r_0} \sqrt{\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle}\, dt = \int\limits_0^{r_0} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} \dot\varphi^i \dot\varphi^j + 1}\, dt \geq$$

Подкоренное выражение в правой части ≥ 1, так как g_{ij} положительно определена. Равенство возможно только при $\dot\varphi^i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$.

$$\geq \int\limits_0^{r_0} \sqrt{1}\, dt = r_0 = L[\omega],$$

причём $L[\gamma] = L[\omega] \iff \begin{cases} \varphi^1 = c^1 \\ \vdots \\ \varphi^{n-1} = c^{n-1} \\ r = t \end{cases} \iff \gamma = \omega$. Получили, что длина любой кривой со свойством, что r можно выбрать как параметр, больше или равна длине геодезической, причём равенство будет только тогда, когда это и есть геодезическая.

Покажем, что нам ничего не нужно делать, если ситуация более сложная, потому что это только увеличит длину. Пусть у нас есть $\gamma(t)$, у которой $r(t)$ не строго возрастающая (см. рис. (16.2)). Геометрически это значит, что по пути из точки A в точку B радиус сперва растёт, потом он убывает, а потом он снова растёт, но тогда мы можем разбить на участки (см. рис. (16.3)) и

$$L[\gamma] = L[\gamma_1] + L[\gamma_2] + L[\gamma_3] + L[\gamma_4] > L[\gamma_1] + L[\gamma_4] \ominus$$

Рис. 16.2: Пример сложной ситуации

16.06.png

Рис. 16.3: Разбиение пути на участки

На γ_1 и γ_4 r можно взять в качестве параметра

$$\ominus \int\limits_0^{r_1} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}\dot{\varphi}^i\dot{\varphi}^j + 1}\, dt + \int\limits_{r_1}^{r_0} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}\dot{\varphi}^i\dot{\varphi}^j + 1}\, dt \geq \int\limits_0^{r_1} dt + \int\limits_{r_1}^{r_0} dt = r_0 = L[\omega].$$

То есть, если у нас кривая не монотонно возрастает, то её длина от этого будет только больше.

Мы показали, что у любой точки A есть такая окрестность, что геодезическая экспонента, соединяющая A с B в этой окрестности, короче, чем любая другая кривая.

Тензор Римана

Пусть X, Y, Z — векторные поля на многообразии M со связностью ∇. Нам не обязательно, чтобы многообразие было риманово, а связность была симметрической или согласованной с метрикой. Метрики у нас может вообще не быть. Введём операцию

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Утверждение 16.9. $R(X,Y)Z$ линеен по каждому из трёх аргументов.

Доказательство:

Докажем для X, для других аналогично.

$R(X_1+X_2,Y)Z = R(X_1,Y)Z + R(X_2,Y)Z$ — очевидно, потому что ковариантные производные и коммутатор сумму переводят в сумму для любого аргумент.

Теперь посмотрим, что будет если мы X умножим на $f \in C^\infty$ (помним, что $[fX, Y] = -(Yf)X + f[X, Y]$ и тождество Лейбница):

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z = \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) + \nabla_{(Yf)X}Z - \nabla_{f[X,Y]}Z = \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - \cancel{(Yf)\nabla_X Z} - f\nabla_Y\nabla_X Z + \cancel{(Yf)\nabla_X Z} - f\nabla_{[X,Y]}Z = f\,R(X,Y)Z \end{aligned}$$

■

Поэтому $R(X,Y)Z$ — такая функция на векторных полях, которая у нас ещё и линейна по каждому аргументу, поэтому R — тензор типа $\binom{1}{3}$. То есть

$$\big\langle R(X,Y)Z, \omega\big\rangle = \omega\big(R(X,Y)Z\big),$$

где ω — какая-то 1–форма.

Определение 16.10. R — *тензор кривизны Римана.*

Как каждый тензор типа $\binom{1}{3}$, он должен записаться у нас вот так:

$$R = R_{jk,\ell}^{\;\;i}\tfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^\ell.$$

Существует много разных соглашения, поэтому нужно быть очень внимательными относительно нумерации индексов.

По определению $R_{jk,\ell}^{\;\;i} = \big(R(e_j, e_k)\, e_\ell\big)^i$.

Геометрический смысл тензора Римана

Возьмём точку $A = (A^1, \ldots, A^n)$ и выберем локальные координаты в её окрестности $x^1, \ldots, x^n$, тогда $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}$.

В координатах можем построить параллелограмм (см. рис. (16.4))

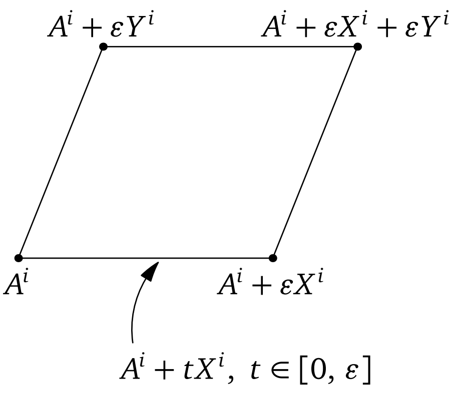


Рис. 16.4: Параллелограмм, построенный в координатах

В реальности он может выглядеть совершенно по-другому, например, в полярных координатах (см. рис. (16.5)). Здесь мы взяли $X = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $Y = \frac{\partial}{\partial r}$.

Возьмём вектор Z и устроим параллельный перенос в противоположную вершину параллелограмма двумя разными способами, получим два разных ответа Z' и Z'',

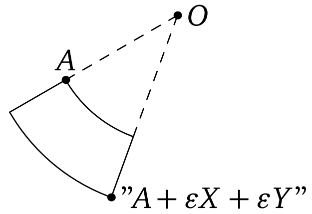


Рис. 16.5: Параллелограмм в полярных координатах

потому что параллельный перенос зависит от выбора точки. При этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{Z''-Z'}{\varepsilon^2}=R(X,Y)Z.$$

То есть геометрический смысл тензора Римана заключается в том, что он меряет, в каком-то смысле, до какой степени параллельный перенос зависит от пути.

Теорема о симметриях тензора Римана

Напомним про поднимание и опускание индексов. Пусть у нас есть $R_{ij,k}^{\ \ \ \ \ell}$, если мы умножим его на $g_{\ell p}$, получим опускание индекса ℓ. Будем считать, что у нас этот индекс опускается на последнее место, потому что всегда нужно выбрать место, на которое опускается индекс: $R_{ij,k}^{\ \ \ \ \ell}g_{\ell p}=R_{ij,kp}$.

Теорема 16.7 *(о симметриях тензора Римана).*

1) для любой связности верно $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$ или $R_{ij,k}^{\ \ \ \ \ell}=-R_{ji,k}^{\ \ \ \ \ell}$;

2) для симметрической связанности верно

$$R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X=0 \text{ или } R_{ij,k}^{\ \ \ \ \ell}+R_{ki,j}^{\ \ \ \ \ell}+R_{jk,i}^{\ \ \ \ \ell}=0;$$

3) для связности, согласованной с метрикой верно

$$\big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle+\big\langle R(X,Y)W,Z\big\rangle=0 \text{ или } R_{ij,k\ell}+R_{ij,\ell k}=0;$$

4) для связности Леви–Чивиты верно тождество

$$\big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle=\big\langle R(Z,W)X,Y\big\rangle.$$

Доказательство:

(1)) следует сразу из определения:

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z.$$

Если мы поменяем X и Y местами, первые два слагаемых поменяются местами, поэтому знак сменится, а у коммутатора сменится знак в силу косимметричности, поэтому общий знак сменится.

(2)) в силу линейности R, достаточно доказать для базисных векторов. Пусть у нас $X=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z=\frac{\partial}{\partial x^k}$. Тогда все коммутаторы исчезнут, поскольку

$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = 0$ и т. д. Тогда

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = \\
&\quad = \underline{\nabla_X\nabla_Y Z} - \underline{\underline{\nabla_Y\nabla_X Z}} + \underline{\nabla_Z\nabla_X Y} - \underline{\nabla_X\nabla_Z Y} + \underline{\underline{\nabla_Y\nabla_Z X}} - \underline{\nabla_Z\nabla_Y X} = \\
&\quad = \underline{\nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)} + \underline{\underline{\nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z)}} + \underline{\nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X)} = \\
&\quad = \nabla_X \underbrace{[Y, Z]}_{=0} + \nabla_Y \underbrace{[Z, X]}_{=0} + \nabla_Z \underbrace{[X, Y]}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

(3)) в силу линейности R достаточно доказать для $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Посчитаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\langle Z, Z\rangle &= \frac{\partial}{\partial x^i} Y\langle Z, Z\rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}\big(2\langle \nabla_Y Z, Z\rangle\big) = \\
&= 2X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle
\end{aligned}$$

С другой стороны, это же (можем переставить порядок, потому что смешанные производные равны)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}\langle Z, Z\rangle = \ldots = 2\langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle.$$

Тогда $\langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle = \langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle$.

Перенесём всё в левую часть: $\langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \underbrace{\nabla_{[X,Y]}Z}_{=0}, Z\rangle = 0$.

То есть $\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = 0\ \forall Z$, поэтому можем подставить вместо Z $Z+W$: $\langle R(X,Y)(Z+W), Z+W\rangle = 0$. Раскроем по линейности, получим искомое тождество:

$$\cancel{\big\langle R(X,Y)Z, Z\big\rangle} + \big\langle R(X,Y)Z, W\big\rangle + \big\langle R(X,Y)W, Z\big\rangle + \cancel{\big\langle R(X,Y)W, W\big\rangle} = 0$$

(4)) возьмём $R(X,Y)Z$. Связность Леви–Чивиты в том числе симметрическая, поэтому возьмём тождество (2)), умножив его на W:

$$\underline{\big\langle R(X,Y)Z, W\big\rangle} + \cancel{\big\langle R(Z,X)Y, W\big\rangle} + \cancel{\big\langle R(Y,Z)X, W\big\rangle} = 0.$$

Теперь воспользуемся тождеством (3)), поменяв знаки и процикрировав:

$$\underline{-\big\langle R(X,Y)W, Z\big\rangle} - \cancel{\big\langle R(W,X)Y, Z\big\rangle} - \cancel{\big\langle R(Y,W)X, Z\big\rangle} = 0.$$

Аналогично,

$$\underline{\underline{-\big\langle R(Z,W)X, Y\big\rangle}} - \cancel{\big\langle R(W,X)Z, Y\big\rangle} - \cancel{\big\langle R(X,Z)W, Y\big\rangle} = 0.$$

Обменяв знак и процикрировав, получим

$$\underline{\underline{\big\langle R(Z,W)Y, X\big\rangle}} + \cancel{\big\langle R(W,Y)Z, X\big\rangle} + \cancel{\big\langle R(Y,Z)W, X\big\rangle} = 0.$$

Сложим выписанные выше тождества:

$$\underline{2\big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle} - 2\big\langle R(Z,W)X,Y\big\rangle = 0 \Longleftrightarrow \big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle = \big\langle R(Z,W)X,Y\big\rangle.$$

■

Тензор Риччи и кривизны

Тензор Римана имеет очень много компонент: есть четыре индекса, каждый принимает значение от 1 до n, это значит, что n^4 компонент. Для большой размерности этого очень много, даже несмотря на то, что между ними есть очень много симметрий. Поэтому иногда имеет смысл извлечь из тензора Римана экстракт некоторый, то есть получить из него какие-то более обозримые объекты.

Пусть у нас есть $R_{ij,k}^{\ \ \ \ell}$. Выполним свёртку индексов. Тензор $\mathrm{Ric}_{ik} = R_{ik} = R_{ij,k}^{\ \ \ \ell}$ называется *тензором Риччи*. Рассмотрим оператор $Y \mapsto R(X,Y)Z$ и след от него $\mathrm{tr}\,\big[Y \mapsto R(X,Y)Z\big]$, это будет равно $\mathrm{Ric}(X,Z)$.

Тензор Риччи очень полезный, например, для связности Леви–Чивиты он будет симметрический, в простых случаях он выражается через уже известные величины, например, на поверхностях он гауссова кривизна на первую квадратичную форму.

Можем взять R_{ik} и свернуть его с метрикой с верхними индексами, получится некоторое число в каждой точке, то есть функция $R = R_{ik}g^{ik}$ — *скалярная кривизна*. В простых случаях она выражается через известные вещи, например, на поверхностях это будет удвоенное гауссова кривизна.

Пусть у нас есть многообразие M, точка A на нём, касательное пространство T_AM. Возьмём два вектора $X, Y \in T_AM$. Рассмотрим следующую величину:

$$K_\sigma = \frac{\big\langle R(X,Y)Y,X\big\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

Заметим, что она не меняется при преобразованиях

1) $X \mapsto \lambda X$, $Y \mapsto Y$;
2) $X \mapsto Y$, $Y \mapsto X$;
3) $X \mapsto X+Y$, $Y \mapsto Y$.

Так как (1)), (2)), (3)) порождают все аффинные преобразования плоскости, то эта величина инвариантна при преобразованиях $\binom{X}{Y} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}}_{\det(\ )\neq 0}\binom{X}{Y}$.

То есть эта величина зависит только от двумерной плоскости, порождаемой X и Y: $\sigma = \mathrm{span}(X,Y) \subset T_AM$.

Величина K_σ называется *секционной кривизной* в точке A в направлении двумерной плоскости σ. Эта величина полезна, поскольку является обобщением гауссовой кривизны на многомерный случай.

Лекция 17

Дифференциальные формы

Пусть M — многообразие. Знаем, что существует $\Omega^k(M)$ — пространство k–форм. Оно состоит из дифференциальных форм степени k.

Определение 17.11. Форма ω *замкнута*, если $d\omega = 0$. Пространство замкнутых форм обозначим через $Z^k(M) = \left\{\omega \in \Omega^k(M) \,\middle|\, d\omega = 0\right\}$.

Заметим, что $\Omega^k(M)$ — линейное пространство, а $Z^k(M)$ — его линейное подпространство.

Определение 17.12. Форма ω *точная*, если существует форма $\theta\colon \omega = d\theta$. Пространство таких форм обозначается $B^k(M) = \left\{\omega \in \Omega^k(M) \,\middle|\, \exists\theta\colon \omega = d\theta\right\}$.

Утверждение 17.10. Точная форма замкнута, то есть $B^k(M) \subset Z^k(M)$.

Доказательство:
$d\omega = d(d\theta) = d^2\theta = 0$ по одной из аксиом внешнего дифференциала. ■

Определение 17.13. $H^k(M) = Z^k(M) \big/ B^k(M)$ — факторпространство, которое называется *k-ой группой когомологий де Рана многообразия M*.

Замечание 17.3. Это линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Замечание 17.4. Часто обозначается $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$, поскольку в алгебраической топологии есть много разных групп когомологий.

Пространство форм, $Z^k(M)$ и $B^k(M)$ — бесконечномерные пространства. Но их фактормножество $H^k(M)$ для разумных многообразий оказывается конечномерным, поэтому разумно ввести следующее определение:

Определение 17.14. $b_k(M) = \dim H^k(M)$ — *k-ое число Бетти многообразия M*.

Когомологические классы

Элементами факторпространства являются классы эквивалентности. Пусть у нас есть $[\omega] \in H^k(M)$.

Определение 17.15. $[\omega]$ — *когомологический класс* (формы ω), ω — *представитель* класса $[\omega]$.

Утверждение 17.11. σ и τ замкнутые, тогда их внешнее произведение $\sigma \wedge \tau$ тоже замкнутое $\big(\in Z^k(M)\big)$.

Доказательство:
$d(\sigma \wedge \tau) = \underbrace{d\sigma}_{=0} \wedge\tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge \underbrace{d\tau}_{=0} = 0.$ ■

Поскольку произведение замкнутых форм замкнутое, можем определить структуру произведения. Возьмём $H(M) = \bigoplus\limits_{k=0} H^k(M)$.

Определим $\wedge$ — *внешнее умножение когомологических классов*. Пусть есть $[\sigma] \in$ $\in H^k(M)$, $[\tau] \in H^\ell(M)$. Тогда $[\sigma] \wedge [\tau] := [\sigma \wedge \tau]$

Утверждение 17.12. Это произведение определено корректно, то есть не зависит от выбора представителя.

Доказательство:

$[\sigma + d\theta] = [\sigma]$. Подставим в определение внешнего умножения и проверим, что результат не изменился:

$$[\sigma + d\theta] \wedge [\tau] = \big[(\sigma + d\theta) \wedge \tau\big] = [\sigma \wedge \tau + d\theta \wedge \tau] =$$

Заметим, что

$$d(\theta \wedge \tau) = d\theta \wedge \tau + (-1)^{|\theta|}\theta \wedge \underbrace{d\tau}_{=0} = d\theta \wedge \tau.$$

$$= \big[\sigma \wedge \tau + d(\theta \wedge \tau)\big] = [\sigma \wedge \tau].$$

Получается, если мы выберем другого представителя в классе $[\sigma]$, результат будет тот же. Доказательство того, что будет, если мы в $[\tau]$ выберем другого представителя точно такое же. ■

Значит, $H(M)$ — кольцо когомологии многообразия M, в котором есть внешнее произведение $\wedge\colon H^k(M) \times H^\ell(M) \to H^{k+\ell}(M)$. Это для тех элементов из прямой суммы, которые однородные, а дальше мы это умножение просто распространяем по линейности на все формы.

Попробуем понять, что такое $H^0(M)$:

$$H^0(M) = Z^0(M) \big/ 0 = Z^0(M) = \big\{f \in C^\infty(M) \,\big|\, df = 0\big\} = ,$$

поскольку дифференциалов от -1–форм не существует.

Может показаться, что это константы, но это не совсем так, потому что если дифференциал равен нулю, то f — константа на компоненте связности, а на разных компонентах связности это может быть разное (см. рис. (17.1)).

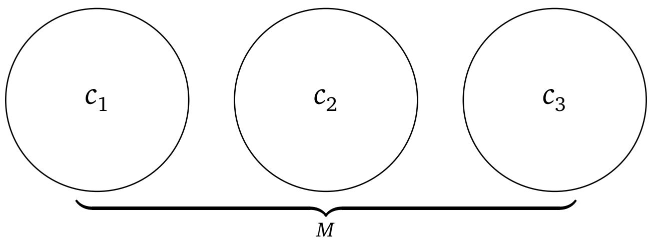


Рис. 17.1: Пример многообразия и функции, не равной константе, но дифференциал которой равен нулю

На рис. (17.1) три компоненты связности, поэтому $f \longleftrightarrow (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Понятно, что если у нас будет n компонент связности, функция f будет во взаимно–однозначном соответствии с набором из n чисел.

$=$ $\mathbb{R}^n$, где n — количество компонент связности. То есть мы доказали следующее утверждение:

Утверждение 17.13. $H^0(M) = \mathbb{R}^{\#\text{ компонент связности}}$, $b_0(M) = \#$компонент связности.

Мы знаем, что если взять внешнюю степень векторного пространства степени, большую чем размерность этого пространства, то там будет только 0, потому что это будет вытекать в силу кососимметричности. Для нас это значит, что на многообразии размерности n нет дифференциальных форм степени больше, чем n, кроме нулевых.

Утверждение 17.14. Если $\dim M = n$, то при $k > n \;\; H^k(M) = 0$.

Здесь под нулём подразумевается не число 0, а векторное пространство $\{0\}$.

Примеры

Пример 17.10. Рассмотрим случай, когда $M = \mathbb{R}$. Знаем, что $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, так как связно; $H^k(\mathbb{R}) = 0$ при $k > 1$. Поймём, что такое $H^1(\mathbb{R})$:

$$H^1(\mathbb{R}) = Z^1(\mathbb{R}) \,/\, B^1(\mathbb{R}) = \big\{\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}) \,\big|\, d\omega = 0\big\} \Big/ \big\{df \,\big|\, f \in C^\infty(M)\big\} =$$
$$= \Omega^1(\mathbb{R}) \Big/ \big\{df \,\big|\, f \in C^\infty(M)\big\},$$

поскольку условие $d\omega = 0$ выполнено автоматически.

У нас здесь возник вопрос, всякая ли 1–форма является дифференциалом функции, а если нет, то как там это дело устроено.

Возьмём $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$ — произвольная 1–форма. Тогда она локально запишется в виде $\omega = g(x)\,dx$, а $df = f'(x)\,dx$. Из этого следует, что

$$\omega = df \iff g(x) = f'(x).$$

Мы осознали, что g — производная функции f. Мы всегда можем такую f предъявить: возьмём $f(x) = \int\limits_0^x g(x)\,dx$, тогда у нас $f'(x) = g(x)$, то есть каждая ω является дифференциалом функции.

Лемма 17.1. Любая $\omega = g(x)\,dx \in \Omega^1(\mathbb{R})$ является df, где

$$f(x) = \int\limits_0^x g(x)\,dx = \int\limits_0^x \omega.$$

То есть $\Omega^1(\mathbb{R}) = \big\{df \,\big|\, f \in C^\infty(M)\big\} \Longrightarrow H^1(\mathbb{R}) = 0$.

<u>Ответ</u>: $H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0; \\ 0, & k > 0. \end{cases}$

Пример 17.11. $M = S^1$ — окружность. Знаем, что $H^0(S^1) = \mathbb{R}$, так как связно; $H^k(S^1) = 0$ при $k > 1$. Будем искать $H^1(S^1)$:

$$H^1(S^1) = Z^1(S^1) \,/\, B^1(S^1) = \Omega^1(S^1) \Big/ \big\{df \,\big|\, f \in C^\infty(S^1)\big\}.$$

Пусть у нас есть $\omega \in \Omega^1(S^1)$. Она запишется в виде $\omega = g(\varphi)\,d\varphi$. Угловая координата φ на окружности определена с точностью до 2π, поэтому функция на окружности будет отвечать 2π–периодическим функциям, то есть $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$. Опять-таки, $df = f'(\varphi)\,d\varphi$, где $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$.

Хотим понять, когда $\omega = df$. $\omega = df \iff g = f'$ и

$$f(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} g(\varphi)\, d\varphi. \tag{*}$$

Если g — периодическая, то f — не обязательно периодическая.

Пример 17.12. Возьмём $g(\varphi) = 1$ — это периодическая функция, тогда как $f(\varphi) = \varphi$ — не периодическая.

Значит, уже не каждая форма ω является дифференциалом функции. Попробуем понять, когда $f(\varphi)$, определённая формулой ((*)), периодическая. Хотим: $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$, то есть $\int\limits_0^{\varphi+2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = \int\limits_0^{\varphi} g(\varphi)\, d\varphi$. Перенесём всё в левую часть: $\int\limits_0^{\varphi+2\pi} g(\varphi)\, d\varphi - \int\limits_0^{\varphi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$, что тоже самое, что $\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$.

Лемма 17.2. $\omega = df \iff \int\limits_0^{2\pi} \omega = 0$.

Возьмём каждую ω и представим её в таком виде:

$$\omega = \omega - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega}_{\text{число}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega}_{\text{число}}.$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\omega - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega\right) = \int\limits_0^{2\pi}\omega - \frac{2\pi}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega = 0.$$

Получается, что $[\omega] = \left[\underbrace{\omega - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega}_{df} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega\right] = \left[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega}_{\text{число}}\right]$. Получается, что у нас каждый когомологический эквивалентен классу какого-то числа. Это значит, что $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ и это отображение устроено следующим образом: $[\omega] \to \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\omega \in \mathbb{R}$.

1) это сюръекция, потому что мы можем взять ω равной любому числу;
2) ядро преобразования равно нулю, потому что если форма переходит в ноль, тогда она у нас является точной.

Поэтому мы имеем дело с изоморфизмом между линейными пространствами $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$

Свойства когомологических классов

Дальше действовать просто по определению становится невозможно, потому что оказывается, что всё гораздо сложнее, и нужно иметь дополнительные инструменты.

Пусть у нас есть $M \xrightarrow{f} N$. Тогда мы знаем, что у нас есть отображение $\Omega^k(M) \xleftarrow{f^*} \Omega^k(N)$.

Вспомним, что $df^* = f^*d$. Пусть ω — замкнута $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow d\omega = 0 \Longrightarrow df^*\omega = f^*d\omega = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow f^*\omega$ — замкнута. То есть образный образ замкнутые формы переводит в замкнутые.

Точно так же, ω — точная $\Longrightarrow \omega = d\theta \Longrightarrow f^*\omega = f^*d\theta = d(f^*\theta) \Longrightarrow f^*\omega$ — точная. Получили следующее утверждение:

Утверждение 17.15. $f^*Z^k(N) \subset Z^k(M)$; $f^*B^k(N) \subset B^k(M) \Longrightarrow$ есть корректно определённое отображение $H^k(M) \xleftarrow{f^*} H^k(N)$, где $f^*[\omega] := [f^*\omega]$.

Возьмём и заменим представителя в когомологическом классе, чтобы проверить корректность определения:

$$f^*[\omega + d\theta] = [f^*\omega + f^*d\theta] = [f^*\omega + df^*\theta] = [f^*\omega].$$

$f^*\colon H^k(N) \to H^k(M)$ — гомоморфизм линейных пространств. Более того, так как $f^*(\sigma \wedge \tau) = f^*\sigma \wedge f^* \wedge \tau$, то $f^*\colon H(N) \to H(M)$ — гомоморфизм колец когомологий.

Заметим следующую вещь: если у нас есть

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & N \arrow[r, "g"] & L, \end{tikzcd}$$

то в когомологиях отображения будут обратные:

$$\begin{tikzcd} H^k(M) & H^k(N) \arrow[l, "f^*"'] & H^k(L), \arrow[l, "g^*"'] \arrow[ll, bend left, "(g\circ f)^*"] \end{tikzcd}$$

Мы из этого видим, что $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Лемма Пуанкаре

Лемма 17.3 *(Пуанкаре).* $H^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = H^k(\mathbb{R}^n)$.

Это значит, что когомологии у $\mathbb{R}^2$ такие же, как у $\mathbb{R}$; у $\mathbb{R}^3$ такие же, как у $\mathbb{R}^2$, то есть такие же, как у $\mathbb{R}$; и так далее, то есть когомологии у R^n, по индукции, получаются такие же, как у $\mathbb{R}$.

Доказательство:

Рассматриваем $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Будем обозначать координаты в $\mathbb{R}^n$ через $x = (x^1, \ldots, x^n)$, а в $\mathbb{R}$ — через t.

У нас есть отображение $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\pi(x, t) = x$ (*проекция*), также у нас есть обратное отображение $S_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $S_0(x) = (x, 0)$ (*вложение с нулевым сечением*).

Заметим, что $\pi \circ S_0 = id$, поэтому $(\pi \circ S_0)^* = id^*$, то есть

$$S_0^* \circ \pi^* = id\colon H^k(\mathbb{R}^n) \to H^k(\mathbb{R}^n).$$

Докажем, что на формах $id - \pi^* \circ S_0^* = \pm dK \pm Kd$ для некоторого отображения $K\colon \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Если это так, то на когомологиях

$$(id - \pi^* \circ S_0^*)[\omega] = [\pm dK\omega \pm K \underbrace{d\omega}_{=0(\text{замкнута})}] = [\underbrace{\pm dK\omega}_{\text{точная}}] = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \pi^* \circ S_0^* = id\colon H^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to H^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Если форма $\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, то она представляется в виде

$$\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_q}(x,t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} + \widehat{\omega}_{j_1,\ldots,j_{q-1}}(x,t)\, dt \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{q-1}}.$$

Определим K таким образом, что $K\omega$ отправлял первое слагаемое из ω в 0, а второе — в интеграл:

$$K\omega = \left(\int_0^t \widehat{\omega}_{j_1,\ldots,j_{q-1}}\, dt \right) dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{q-1}}.$$

Посмотрим, что сделают $S_0^*\omega$, $\pi^* \circ S_0^*\omega$ и $(id - \pi^* \circ S_0^*)\omega$:

$$S_0^*\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_q}(x,0)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q};$$

$$\pi^* \circ S_0^*\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_q}(x,0)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q};$$

$$(id - \pi^* \circ S_0^*)\omega = \underline{\omega} - \underline{\underline{\omega_{i_1,\ldots,i_q}(x,0)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}}}.$$

Также посчитаем $dK\omega$ и $d\omega$:

$$dK\omega = \underline{\widehat{\omega}_{j_1,\ldots,j_{q-1}}(x,t)\, dt \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{q-1}}} + \\ + \underline{\underline{\left(\int_0^t \frac{\partial \widehat{\omega}_{j_1,\ldots,j_{q-1}}}{\partial x^\ell}(x,t)\, dt \right) dx^\ell \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{q-1}}}};$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_q}}{\partial t}(x,t)\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} + \\ + \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_q}}{\partial x^\ell}(x,t)\, dx^\ell \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} + \frac{\partial \widehat{\omega}_{j_1,\ldots,j_{q-1}}}{\partial x^\ell} dx^\ell \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{q-1}}.$$

Применим K к последнему тождеству:

$$Kd = \underline{\omega_{i_1,\dots,i_q}(x,t)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_q}} - \underline{\underline{\omega_{i_1,\dots,i_q}(x,0)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_q}}} - \underline{\underline{\underline{\left(\int\limits_0^t \widehat{\omega}_{j_1,\dots,j_{q-1}}(x,t)\,dt\right) dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{q-1}}}}}.$$

Объединив все уравнения выше, получим, что $id - \pi^*\circ S_0^* = dK + Kd$.

Поэтому $H^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[\sim]{\pi^*} H^k(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$; $H^k(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}) \xrightarrow[\sim]{S_0^*} H^k(\mathbb{R}^n)$ ■

Заметим, что если заменить в лемме Пуанкаре $\mathbb{R}^n$ на любое многообразие, то у нас будет работать то же доказательство.

Лемма 17.4*(Пуанкаре в общем случае).* $H^k(M\times\mathbb{R}) = H^k(M)$.

Доказательство:

В каждой карте K определяем как и раньше. ■

Замечание 17.5. Если взять $S_1(x) = (x,1)$, то это доказательство работает для K, где $\int\limits_1^t$.

Определение 17.16. Два гладких отображения $f_0, f_1\colon M\to N$ *(гладко) гомотопны*, если есть гладкое отображение (называемое *гомотопией*)

$$F\colon M\times[0,1]\to N$$

такое, что $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$. Обозначение: $f_0\sim f_1$.

Теорема 17.8. Если $f_0\sim f_1$, то $f_0^* = f_1^*\colon H^k(N)\to H^k(M)$.

Доказательство:

Продлим F до $F\colon M\times\mathbb{R}\to N$ не важно как. У нас есть отображение $M\xrightarrow{S_0} M\times\mathbb{R}$, $S_0(x) = (x,0)$ и отображение $M\xrightarrow{S_1} M\times\mathbb{R}$, $S_1(x) = (x,1)$.

У нас $f_0 = F\circ S_0$, $f_1 = F\circ S_1$. Поэтому

$$f_0^* = (F\circ S_0)^* = S_0^*\circ F^* = (\pi^*)^{-1}\circ F^* = S_1^*\circ F^* = (F\circ S_1)^* = f_1^*$$

■

$M\simeq N$ диффеоморфны $\Longleftrightarrow f\circ g = id_N$, $g\circ f = id_M$, где $M\xrightarrow{f} N$, $N\xrightarrow{g} M$.

Определение 17.17. M и N *гомотопически эквивалентны*, если существуют отображения $f\colon M\to N$ и $g\colon N\to M$ такие, что $f\circ g\sim id_N$, $g\circ f\sim id_M$. Обозначение: $M\sim N$.

Утверждение 17.16. Если $M\sim N$, то $H^k(M)\simeq H^k(N)$

Доказательство:

У нас есть $M\xrightarrow{f} N$, $N\xrightarrow{g} M$. Тогда с гомотопическими группами у нас будет $H^k(N)\xrightarrow{f^*} H^k(M)$, $H^k(M)\xrightarrow{g^*} H^k(N)$. Мы знаем, что $f\circ g\sim id_N$. Это значит, что $(f\circ g)^* = g^*\circ f^* = id\colon H^k(N)\to H^k(N)$. А из $g\circ f\sim id_M$ в силу теоремы (17.8) $(g\circ f)^* = f^*\circ g^* = id\colon H^k(M)\to H^k(M)$. Отсюда следует, что $f^* = (g^*)^{-1}$ ■

Язык точных последовательностей

Последовательность — набор отображений векторных пространств и гомоморфизмов между ними.

$$\longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow$$

Здесь A_j — векторные пространства, f_j — гомоморфизмы векторных пространств.

Определение 17.18. Последовательность *точна в* A_i, если $\operatorname{Im} f_{i-1} = \operatorname{Ker} f_i$

Определение 17.19. Последовательность *точна*, если она точна в каждом члене.

Пример 17.13. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ точна $\Longrightarrow \operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Im} 0 = 0 \Longrightarrow \alpha$ — инъекция (мономорфизм).

Пример 17.14. $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ точна $\Longrightarrow \operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker} 0 = B \Longrightarrow \alpha$ — сюръекция (эпиморфизм).

Пример 17.15. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ точна $\Longrightarrow \alpha$ — изоморфизм.

Пример 17.16. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ точна $\Longrightarrow \beta$ — сюрьекция $\longrightarrow$

$$\Longrightarrow C \simeq B \big/ \operatorname{Ker}\beta = B \big/ \operatorname{Im}\alpha = B \big/ \alpha(A) = B \big/ A.$$

Пусть у нас есть M — многообразие. Представим его как объединение двух открытых его областей $M = U \cup V$.

Теорема 17.9*(о длинной точной последовательности Майера–Виеториса).* Следующая последовательность точна ($n = \dim M$):

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(M) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to \\ \to H^1(M) \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to \ldots \to \\ \to H^n(M) \to H^n(U) \oplus H^n(V) \to H^n(U \cap V) \to 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые простые отображения: $H^k(M) \xrightarrow{\alpha} H^k(U) \oplus H^k(V)$. Здесь $\alpha[\omega] = \big([\omega|_U], [\omega|_V]\big)$. Следующее отображение: $H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\beta} H^k(U \cap V)$. Здесь $\beta\big([\sigma], [\tau]\big) = [\sigma|_{U\cap V} - \tau|_{U\cap V}]$.

Эта длинная последовательность позволяет вычислять когомологии M в каких-то случаях по когомологиям его частей U и V.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ