



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ. СЕМИНАРЫ

ФЕДОСЕЕВ ДЕНИС АЛЕКСАНДРОВИЧ
ШАФАРЕВИЧ АНДРЕЙ ИГОРЕВИЧ
ОШЕМКОВ АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
ПОПЕЛЕНСКИЙ ФЕДОР ЮРЬЕВИЧ

—
МЕХМАТ МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ



Содержание

Семинар 1. Теория тензоров для линейных пространств	4
Тензор на векторном пространстве	4
Базис в линейном пространстве T_q^p	6
Задачи	7
Семинар 2. Тензорные поля на многообразии. Тензорные операции	11
Тензоры на многообразии	11
Задачи	13
Тензорные операции	16
Свертка тензоров	16
Поднятие и опускание индекса	17
Перестановка индексов	20
Альтернирование и симметризация	21
Семинар 3. Дифференциальные формы	25
Дифференциальные формы	25
Задачи	27
Преобразование форм при отображении	28
Задачи	29
Семинар 4. Интегрирование дифференциальных форм	32
Интегрирование форм	32
Задачи	33
Формула Стокса	35
Примеры	37
Интегральная теорема Коши	39
Семинар 5. Векторные поля	40
Связь дифференциальных форм и векторных полей	40
Примеры	42
Коммутатор векторных полей	44
Примеры	45
Свойства ограничения коммутатора касательных полей к подмногообразию	46
Формула Картана	47
Выпрямление полей и форм	48
Семинар 6. Когомологии	52
Группы когомологий (де Рама)	52
Примеры	53
Семинар 7. Степень отображения	64
Степень отображения	64
Примеры	65

Степень отображения (продолжение)	70
Отображение плоскостей	70
Задачи	70
Индекс особой точки векторного поля	75
Семинар 9. Символы Кристоффеля	78
Символы Кристоффеля	78
Задачи	79
Символы Кристоффеля	80
Семинар 10. Вычисление символов Кристоффеля	81
Теорема существования символов Кристоффеля	81
Вычисление символов Кристоффеля	81
Задача	83
Семинар 11. Решение уравнения параллельного переноса на поверхности	85
Уравнения параллельного переноса в общем виде	85
Уравнение параллельного переноса на плоскости с евклидовой метрикой	85
Уравнение параллельного переноса на сфере	87
Семинар 12. Геодезические линии	90
Решение уравнений геодезических линий	90
Примеры	91
Семинар 13. Геодезические линии (продолжение)	93
Геодезические линии на плоскости Лобачевского	93
Задача	96
Проектирование. Теорема Клеро	97
Параллельный перенос геодезической линии	100

Семинар 1. Теория тензоров для линейных пространств

Тензор на векторном пространстве

Итак, мы начинаем цикл семинаров по дифференциальной геометрии и топологии. Это продолжение курса классической дифференциальной геометрии, геометрии поверхностей. В отличие от него, в этом курсе используется техника тензорного анализа.

Изучение тензоров мы начнем со случая линейного пространства.

Пусть дано векторное пространство V , $\dim V = n < \infty$. Пусть (e_i) – базис пространства V .

Как известно из линейной алгебры, вместе с V существует двойственное пространство V^* – пространство линейных функционалов на V . Его элементы принято называть *ковекторами*.

В пространстве V^* выберем двойственный к базису (e_i) базис (e^j) :

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Заметим, что

$$(V^*)^* \cong V.$$

Поэтому можем сказать, что не только ковектора действуют на вектора, но и наоборот:

$$e^j(e_i) = e_i(e^j).$$

Определение 1.1. Тензором типа (p, q) , где p, q – неотрицательные целые числа, называется отображение¹

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R},$$

линейное по каждому аргументу.

Пример 1.1. Рассмотрим $v \in V$. Вектора действуют на ковектора, а значит, можно рассматривать v как отображение вида

$$v : V^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

Итак, $v \in V$ – тензор типа $(1, 0)$.

Пример 1.2. Аналогично, рассмотрим ковектор $\alpha \in V^*$:

$$\alpha : V \rightarrow \mathbb{R},$$

то есть α – тензор типа $(0, 1)$.

¹Отметим, что вместо $\mathbb{R}$ можно брать другие поля. В рамках текущего курса будет рассматриваться только поле $\mathbb{R}$.

Прежде, чем перейти к рассмотрению следующих примеров, обсудим, как вектора и ковектора должны действовать на ковекторах и векторах соответственно. Пусть $v \in V$ раскладывается по базису (e_i) как

$$v = v^i e_i. \quad (1)$$

Замечание 1.1. Здесь и далее мы пользуемся соглашением Эйнштейна о суммировании. Если в некоторой формуле (например, (1)) встречаются повторяющиеся верхние и нижние индексы, мы полагаем (но не пишем явно) суммирование по этим индексам.

Пусть, кроме того, $\alpha \in V^*$,

$$\alpha = \alpha_j e^j.$$

Заметим, что коэффициенты разложения вектора мы обозначаем верхним индексом (v^i), а коэффициенты разложения ковектора – нижним.

Далее,

$$\alpha(v) = \alpha_j e^j(v^i e_i) = \alpha_j v^i e^j(e_i) = \alpha_j v^i \delta_i^j = \alpha_i v^i.$$

Вектора на ковектора действуют аналогичным образом.

Заметим, что если в качестве α взять базисный ковектор e^j , получим

$$e^j(v) = v^j = v(e^j).$$

Аналогично,

$$e_i(\alpha) = \alpha_i = \alpha(e_i).$$

Пример 1.3. Тензор типа $(0, 0)$ – это число из $\mathbb{R}$.

Пусть

$$A: V \rightarrow V$$

– линейный оператор. Про линейные операторы часто говорят, что они – тензоры типа $(1, 1)$. Запись выше, однако, не согласуется с определением тензора.

Утверждение 1.1. Существует биекция между линейными операторами и тензорами типа $(1, 1)$.

Доказательство. Итак, пусть есть линейный оператор

$$A: V \rightarrow V,$$

в соответствие которому можно поставить матрицу (a_i^j) .

Построим соответствующий ему тензор

$$\hat{A}: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

по следующему правилу:

$$\hat{A}(\alpha, v) = \alpha(Av).$$

Аналогично построим линейный оператор по тензору.

Вычислим теперь

$$\hat{A}(e^j, e_i) = e^j(Ae_i) = e^j(a_i^j) = a_i^j.$$

Итак, тензор $\hat{A}$ задается той же самой матрицей, что и линейный оператор A . $\square$

Базис в линейном пространстве T_q^p

Числа a_i^j называются компонентами линейного оператора. Естественно предположить, что у тензора тоже есть компоненты. Прежде, чем определить компоненты тензора, обсудим, есть ли у пространства тензоров базис (и является ли пространство тензоров линейным пространством вообще).

Действительно, тензоры – это линейные отображения. Линейная комбинация линейных отображений одного и того же пространства является линейным отображением того же пространства. Итак, все тензоры фиксированного типа образуют линейное пространство.

Чтобы определить базис в пространстве тензоров, забежим немного вперед и поговорим о **тензорном умножении**.

Пусть $T \in T_q^p$ (пространству тензоров типа (p, q)), $Q \in T_s^r$. Их запись с аргументами имеет вид

$$T(v_1, \dots, v_p, \alpha_q, \dots, \alpha_q), \quad Q(w_1, \dots, w_s, \beta_1, \dots, \beta_r).$$

Построим тензор $T \otimes Q \in T_{q+s}^{p+r}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} T \otimes Q(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_s, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_r) = \\ = T(v_1, \dots, v_p, \alpha_q, \dots, \alpha_q) \cdot Q(w_1, \dots, w_s, \beta_1, \dots, \beta_r). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$T_q^p : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R}.$$

Пусть на первом ковекторном пространстве действует базисный вектор e_{i_1} , на втором – e_{i_2} и далее. На p -м ковекторном пространстве действует базисный вектор e_{i_p} . Аналогично на первом векторном пространстве пусть действует базисный вектор e^{j_1} , на втором – e^{j_2} и так далее. На q -м векторном пространстве действует e^{j_q} .

Перемножим тензорно эти базисные вектора. Множество тензоров вида

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}\} \quad (2)$$

образует базис пространства T_q^p .

Задача 1.1. Вычислить размерность (то есть число элементов базиса) T_q^p .

Решение.

$$\dim T_q^p = \# \{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \mid i_k, j_l \in \{1, \dots, n\}\} = n^{p+q}.$$

Итак,

$$\dim T_q^p = n^{p+q}.$$

Это согласуется с тем, что мы знаем о векторных и ковекторных пространствах:

$$\dim V = \dim V^* = n^{1+0} = n.$$

Любой тензор $T \in T_q^p$, очевидно, можно разложить по базису (2):

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}.$$

Числа $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ и называются *компонентами тензора* T .

Задачи

Задача 1.2. Доказать, что (в фиксированном базисе)

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}). \quad (3)$$

Доказательство. Вычислим

$$\begin{aligned} T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} (e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \\ &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1}(e^{i_1}) \cdot \dots \cdot e_{i_p}(e^{i_p}) \cdot e^{j_1}(e_{j_1}) \cdot \dots \cdot e^{j_q}(e_{j_q}) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned}$$

□

Отметим, что в записи (3) верхние индексы коэффициента $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ соответствуют объектам с нижними индексами $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$, и наоборот.

Задача 1.3. Пусть

$$T = e^1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e^3 \otimes e_3 \otimes e_3. \quad (4)$$

Определить тип тензора T и найти его компоненты.

Решение. Заметим, что в 4 каждое слагаемое состоит из тензорного произведения ковектора и двух векторов. Ковектор действует на векторах, а вектора – на ковекторах, поэтому

$$T : V \times V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R},$$

то есть $T \in T_1^2$ (тензор типа $(2, 1)$).

Из (4) получаем, что

$$T_1^{12} = 1, \quad T_3^{33} = 1,$$

а остальные компоненты T равны 0.

Замечание 1.2. Заметим, что тензорное произведение не является коммутативной операцией:

$$T \otimes Q \neq Q \otimes T.$$

Обсудим, как вычислить компоненты известного тензора при переходе к другому базису.

Задача 1.4. Пусть снова

$$T = e^1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e^3 \otimes e_3 \otimes e_3.$$

Пусть $\dim V = 3$ и дан новый базис

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)A, \quad (5)$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица размера 3×3 .

Требуется найти компоненты $\tilde{T}_1^{11}$ в базисе (f_i) .

Решение. Воспользуемся формулой для компонент тензора

$$\tilde{T}_k^{ij} = T(f_k, f^i, f^j).$$

Отметим, что в разных базисах тензор имеет разные компоненты, но сам T как объект не зависит от базиса.

Пусть новые базисные вектора записываются через старые как

$$f^i = \lambda_j^i e^j, \quad f_i = \mu_i^j e_j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{T}_k^{ij} &= T(f_k, f^i, f^j) = T(\mu_k^i e_i, \lambda_j^i e^j, \lambda_l^j e^l) = \\ &= \mu_k^i \lambda_j^i \lambda_l^j T(e_i, e^j, e^l) = \mu_k^i \lambda_j^i \lambda_l^j T_i^{jl}. \end{aligned}$$

Остается научиться раскладывать элементы нового базиса по старому базису. Для векторов это формула 5. Выясним, как выглядит разложение по старому базису для ковекторов.

Утверждение 1.2.

$$(f^1, \dots, f^n) = (e^1, \dots, e^n) (A^{-1})^T. \quad (6)$$

Доказательство. Перепишем равенство (6) с помощью столбцов:

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произведение

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} (f_1, \dots, f_n) = \underbrace{(f^j(f_i))}_{\text{матрица}} = E.$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} (f_1, \dots, f_n) = B \underbrace{\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n)}_E A = BA,$$

где B – матрица, которую мы ищем. Отсюда

$$B = A^{-1}.$$

□

Пример 1.4. Пусть матрица в (5) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем $\tilde{T}_1^{11}$ тензора (4) в новом базисе.

По условию,

$$f = e_1 + e_2 + e_3.$$

Для того, чтобы выразить f^1 , найдем обратную матрицу:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(f^1, f^2, f^3) = (e^1, e^2, e^3) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

В частности,

$$f^1 = e^1.$$

Наконец, вычислим

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^{11} &= T(f^1, f^1, f_1) = T(e^1, e^1, e_1 + e_2 + e_3) = \\ &= T(e^1, e^1, e_1) + T(e^1, e^1, e_2) + T(e^1, e^1, e_3) = T_1^{11} + T_2^{11} + T_3^{11} = 0 \end{aligned}$$

в силу результата задачи 1.3.

Обобщим задачу про биекцию между тензорами типа $(1, 1)$ и линейными операторами.

Задача 1.5. Пусть дано пространство

$$\mathcal{F} = \{ f : T_q^p \rightarrow T_s^r \mid f - \text{линейно} \}.$$

Доказать, что $\exists$ естественная биекция между $\mathcal{F}$ и T_{p+s}^{r+q} .

Замечание 1.3. Заметим, что задачу 1.5 можно рассматривать как прямое обобщение утверждения 1.1. Действительно, линейные операторы

$$A: V \rightarrow V$$

можно рассматривать как отображения

$$A: T_0^1 \rightarrow T_0^1.$$

Доказательство. (Задача 1.5) Поставим в соответствие отображению $f \in \mathcal{F}$ тензор $\hat{f} \in T_{p+s}^{r+q}$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} & \hat{f}(\alpha^1, \dots, \alpha^r, \alpha^{r+1}, \dots, \alpha^{r+q}, v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+s}) = \\ & = f \left(\overbrace{v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^q}^{\in T_s^r} \right) (\alpha^{q+1}, \dots, \alpha^{q+r}, v_{p+1}, \dots, v_{p+s}) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7)$$

Убедимся, что такой $\hat{f}$ – действительно искомый тензор. Очевидно,

$$\hat{f}: \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r+q} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{p+s} \rightarrow \mathbb{R}.$$

По аргументам

$$\alpha^{q+1}, \dots, \alpha^{q+r}, v_{p+1}, \dots, v_{p+s}$$

отображение $\hat{f}$ линейно по определению. По аргументам

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^q$$

$\hat{f}$ линеен в силу линейности отображения f .

Осталось проверить естественность такой биекции, то есть убедиться, что у отображения f и тензора $\hat{f}$ одинаковые компоненты.

Действительно, чтобы задать отображение f , нужно взять базисные элементы T_q^p и разложить по базисным элементам T_s^r . Однако базисные элементы T_q^p – тензорные произведения базисных векторов и базисных ковекторов. По формуле (7) и определению компонент тензора получаем, что компоненты f и $\hat{f}$ совпадают. $\square$

Семинар 2. Тензорные поля на многообразии. Тензорные операции

Тензоры на многообразии

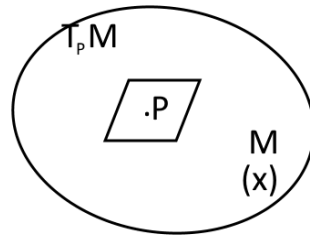


Рис. 2.1. Касательное многообразие $T_p M$ в точке P

Переходим к обсуждению тензоров на многообразиях. Пусть есть гладкое многообразие размерности n M . Известно, что в каждой точке $p \in M$ существует касательное пространство $T_p M$ (рис. 2.1). Здесь (x^i) – локальные координаты в окрестности точки P .

Касательное пространство $T_p M$ состоит из касательных векторов и является линейным пространством размерности n .

Определение 2.1. Тензор типа (p, q) в точке $P \in M$ – это полилинейное отображение

$$T : \underbrace{T^*_M \times \dots \times T^*_M}_p \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_q \rightarrow \mathbb{R}.$$

Как было показано ранее, если в линейном пространстве есть базис, тензор можно разложить по соответствующему базису в пространстве тензоров.

Оказывается, что если мы фиксируем в M локальные координаты (x^i) , в рассматриваемом $T_p M$ возникает так называемый *канонический* базис, с которым удобно работать. Выглядит он следующим образом. Через P проходят базисные линии (линии, которые возникают, если все координаты x^i , кроме одной, зафиксировать). К этим линиям берутся единичные касательные вектора (рис. 2.2). Их принято обозначать $\partial/\partial x^j$. Эти вектора и образуют канонический базис.

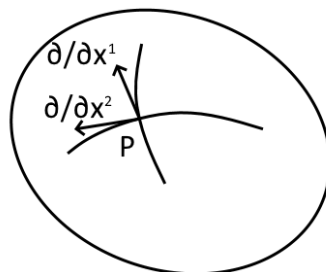


Рис. 2.2. Канонический базис $T_p M$

Обсудим, почему для векторов канонического базиса используется обозначение $\partial/\partial x^j$. Из курса классической дифференциальной геометрии известно, что каждому вектору $v \in T_P M$ с компонентами (v^i) соответствует дифференцирование по направлению. Если

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

– некоторая гладкая функция, то

$$\frac{\partial f}{\partial v} = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (8)$$

Формула (8) имеет следующий смысл. Производная по координате – это мгновенная скорость изменения функции в точке. Дифференцируя по направлению, мы одновременно меняем многие координаты в направлении фиксированного вектора v . Коэффициенты v^i здесь выполняют роль весов, позволяющих учитывать скорость изменения функции вдоль выбранного направления.

В частности, если направление выбрано вдоль координатной линии, соответствующей координате x^i , все слагаемые в (8), кроме слагаемого с номером i , будут равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i} = e_i^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

где e_i – базисный вектор вдоль i -й координатной линии. Отсюда и получаем, что i -му базисному вектору соответствует дифференцирование по i -й координате.

Итак, $\{\partial/\partial x^i\}$ – канонический базис в $T_P M$. Выясним, как будет выглядеть базис в соответствующем кокасательном пространстве $T_P^* M$.

Вспомним, что такое дифференциал отображения. Пусть

$$F : M \rightarrow N,$$

где M, N – гладкие многообразия. В каждой точке $P \in M$ задается линейное отображение

$$d_P F : T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$$

– *дифференциал отображения*. Полезным частным случаем является случай, когда $N = \mathbb{R}$. Тогда

$$F : M \rightarrow \mathbb{R},$$

$$d_P F : T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

– линейное. В этом случае дифференцирование отображения – это ковектор, то есть $d_P F \in T_P^0 M$.

Вернемся к базису $T_P^* M$. Нам нужно подобрать ковектора такие, чтобы при действии на базисных векторах $\partial/\partial x^j$ они давали бы просто символ Кронекера δ_i^j .

Напомним, локальные координаты на M – это некоторое сопоставление набора чисел каждой точке многообразия M с хорошими свойствами. Иными словами, каждая локальная координата – это отображение

$$x^i : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Рассмотрим

$$dx^i : T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

– линейное. Тогда

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} (dx^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

Итак, $\{dx^i\}$ – двойственный базис в $T_P^* M$.

Теперь каждый тензор мы можем разложить по соответствующему базису:

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}.$$

Обсудим, как меняются компоненты $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ тензора T при замене системы локальных координат

$$x^i \mapsto x^{i'}.$$

Компонента тензора T в новых координатах будет связана с компонентой тензора в новых координатах соотношением

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \quad (9)$$

Обратим внимание, что в правой части подразумевается знак суммирования.

Задачи

Задача 2.1. Пусть

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Является ли δ_j^i тензором типа $(1, 1)$?

Решение. Иными словами, надо проверить, что символ Кронекера δ_j^i подчиняется закону преобразования (9) для тензоров типа $(1, 1)$:

$$T_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T_j^i.$$

Здесь в правой части стоит n^2 слагаемых.

Проверим, верно ли, что

$$\delta_{j'}^{i'} \stackrel{?}{=} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \delta_j^i. \quad (10)$$

Так как δ_j^i в большинстве случаев равен 0, перепишем правую часть (10):

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \delta_j^i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} = \begin{cases} 1, & i' = j' \\ 0, & i' \neq j' \end{cases} = \delta_{j'}^{i'}.$$

Задача 2.2. Пусть

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Является ли δ_{ij} тензором типа $(0, 2)$?

Решение. Проверим тензорный закон (9) для тензора типа $(0, 2)$:

$$T_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T_{ij}.$$

Для δ_{ij} этот закон принимает вид

$$\delta_{ij} \stackrel{?}{=} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \delta_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \stackrel{?}{=} \begin{cases} 1, & i' = j' \\ 0, & i' \neq j' \end{cases}$$

Покажем, что равенство не обязательно выполняется. Пусть, например, замена координат – это растяжение:

$$x^{i'} = \lambda x^i.$$

Тогда

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^l}{\partial \lambda x^l} \frac{\partial x^i}{\partial \lambda x^j} = 0$$

в случае $i = j \neq l$.

Итак, набор чисел может задавать тензор фиксированного типа (то есть для одного типа он является тензором, а для другого нет) или не задавать тензор вовсе.

Задача 2.3. Пусть

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

– гладкая функция. Рассмотрим градиент функции

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right).$$

Здесь

$$(df)^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (11)$$

Является ли df вектором?

Решение. Проверим, выполняется ли (9) для векторов для df :

$$(df)^i = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} (df)^i. \quad (12)$$

Заметим, что (12) – тензорный закон для ковекторов, а не для векторов. Таким образом, df – ковектор.

Замечание 2.1. В правой части (12) мы использовали знак суммы, так как оба индекса i – верхние и соглашение Эйнштейна о суммировании не работает.

Заметим, что в (11) мы использовали верхние индексы, так как предполагали, что df – вектор. Если воспользоваться записью $(df)_i$, то индексы в (12) встанут на свои места и необходимость прописывать $\sum_i$ исчезнет.

Это наблюдение можно использовать на практике. Часто (но не всегда), если при записи тензора требуется знак суммирования (несмотря на соглашение Эйнштейна), оказывается, что допущена ошибка в записи.

Задача 2.4. Пусть дана гладкая функция

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Образуют ли величины

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 d}{\partial x^i \partial x^j} \quad (13)$$

тензор?

Решение. Проверим, образуют ли (13) тензор типа $(0, 2)$. Преобразуем

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{j'}} \right). \quad (14)$$

Воспользуемся предыдущей задачей. Получим

$$\begin{aligned} (14) &= \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i'} \partial x^j} = \\ &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{j'}} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}. \end{aligned} \quad (15)$$

Третье слагаемое в (15) – то, что мы хотели получить по тензорному закону. Заметим, что множитель

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{i'}}$$

во втором слагаемом (15) равен 0. Так как зависимость между старыми и новыми координатами может быть любой, слагаемое

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{j'}} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

вполне может быть не равно 0.

Итак, окончательно получаем, что (f_{ij}) образуют тензор типа $(0, 2) \iff$

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = 0 \quad \forall j.$$

Тензорные операции

Перейдем к рассмотрению тензорных операций².

Ранее было показано, что тензорность – условие, которое не всегда выполняется. Набор чисел (или функций) не обязательно задают тензор. Следовательно, результат какого-то действия над тензорами не обязательно будет тензором. Поэтому действия над тензорами, которые условие тензорности сохраняют, выделяют в отдельный класс операций над тензорами.

С двумя такими операциями мы уже сталкивались на предыдущем семинаре:

1. Взятие линейной комбинации тензоров.
2. Тензорное умножение:

$$T_q^p \times T_s^r \rightarrow T_{q+s}^{p+r}.$$

Свертка тензоров

Чуть менее очевидной операцией является *свертка тензоров*.

Пусть дан тензор с компонентами

$$T_{j_1 \dots j_s \dots j_q}^{i_1 \dots i_r \dots i_p}.$$

Зафиксируем³ у него сверху и снизу по одному индексу. Пусть это будут i_r и j_s . Итак, наборы

$$\left(T_{j_1 \dots j_s \dots j_q}^{i_1 \dots i_r \dots i_p} \right)$$

задавало тензор T . Построим *свертку* T по этой паре индексов

$$C_s^r T \in T_{q-1}^{p-1},$$

$$(C_s^r T)_{j_1 \dots \widehat{j_s} \dots j_q}^{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_p} = \sum_{j_r=j_s=\alpha=1}^n T_{j_1 \dots j_s \dots j_q}^{i_1 \dots i_r=\alpha \dots i_p}.$$

Задача 2.5. Пусть $T \in T_2^2$ таков, что

$$T_{qr}^{ij} = 1 \quad \forall i, j, k, r.$$

Найти $(C_1^1 T)$.

Решение. Вычислим

$$\begin{aligned} (C_1^1 T)_m^l &= \sum_{\alpha}^n T_{\alpha m}^{\alpha l} = \\ &= T_{1m}^{1l} + T_{2m}^{2l} + \dots + T_{nm}^{nl} = 1 + \dots + 1 = n. \end{aligned}$$

Итак, в результате свертки $C_1^1 T$ получили новый тензор, у которого все компоненты равны n .

²По-другому их называют операциями тензорной алгебры.

³Имеется в виду, зафиксируем место, на котором стоит индекс.

Задача 2.6. Пусть A – линейный оператор. Найти свертку соответствующего тензора $\hat{A}$.

Решение. Напомним, на прошлом семинаре строили соответствие между линейным оператором A и тензором $\hat{A} \in T_1^1$.

Тогда

$$C_1^1 \hat{A} = \sum_{i=1}^n \hat{A}_i^i = \text{tr} A.$$

Замечание 2.2. Важным является условие фиксировать один нижний и один верхний индекс в компонентах T для операции свертки. В противном случае свертка перестанет быть тензорной операцией.

Проверим, что свертка является тензорной операцией.

Задача 2.7. Пусть T_{qr}^{ij} – тензор типа $(2, 2)$ на M . Доказать, что $(C_1^1 T)$ – тензор.

Решение. Покажем, что

$$T_{ir}^{ij}$$

меняются по тензорному закону (9):

$$T_{q'r'}^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} T_{qr}^{ij}.$$

Распишем

$$\begin{aligned} (C_1^1 T)_{i'}^{j'} &= \sum_{i'=q'=1}^n T_{q'r'}^{i'j'} = \sum_{i'=q'=1}^n \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} T_{qr}^{ij} = \sum_{i'=j'=1}^n \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}} \right) \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} T_{qr}^{ij} = \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^q}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}}_{\delta_i^q} T_{qr}^{ij} = \sum_{i=q=1}^n \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} T_{qr}^{ij} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} (C_1^1 T)_i^j. \end{aligned}$$

Итак, тензорный закон выполнен, а значит, $(C_1^1 T)$ – тензор.

Поднятие и опускание индекса

Четвертая операция – поднятие и опускание индекса – в каком-то смысле является следствием двух предыдущих операций (умножения и свертки).

Пусть даны $T \in T_q^p$ и $g \in T_2^0$. *Опусканием индекса* называется операция

$$C_2^1 (g \otimes T) \in T_{q+1}^{p-1}.$$

Аналогично для $g \in T_0^2$ определяется операция *поднятия индекса*.

Замечание 2.3. Если g – риманова метрика, то

1. Это тензор типа $(0, 2)$;

2. Матрица g^{-1} задает тензор типа $(2, 0)$.

Задача 2.8. Пусть

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

– гладкое отображение. Рассмотрим $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$ – это ковектор. Пусть g – метрика Римана на $\mathbb{R}^n$.

Требуется поднять индекс у df .

Решение. Пусть g задается матрицей G . Обратная матрица G^{-1} задает тензор g^{ij} типа $(2, 0)$.

Далее, по определению поднятия индекса получим

$$g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \text{grad} f.$$

Задача 2.9. Пусть в условиях задачи 2.8 g – евклидова. Вычислить $\text{grad} f$.

Решение. Здесь

$$g_{ij} = \delta_{ij}. \quad (16)$$

Может показаться, что (16) вступает в противоречие с результатом задачи 2.2. Дело в том, что в задаче требовалось, чтобы символ Кронекера δ_{ij} таким оставался в любых координатах. Запись же (16) верна для евклидовых координат. При замене координат ее вид изменится.

Далее, получаем, что

$$g^{ij} = \delta^{ij}.$$

Тогда

$$(\text{grad} f)^j = \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (17)$$

Оказывается, что понятие градиента (17) довольно удобно и обладает примечательными свойствами.

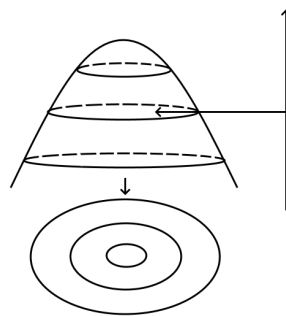


Рис. 2.3. Линии уровня холма

Задача 2.10. Пусть M – многообразие, g – метрика,

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

– гладкая функция. Рассмотрим поверхность уровня⁴

$$S_c = \{x \in M \mid f(x) = c\}.$$

Пусть в точке P df невырожден. Показать, что тогда

$$\text{grad}_P f \perp S_c, \quad (18)$$

где S_c проходит через точку P .

Доказательство. Понятие ортогональности по многообразию (18) равносильно тому, что $\forall v \in T_P S_c$

$$v \perp \text{grad} f.$$

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle v, \text{grad} f \rangle &= g_{ij} v^i (\text{grad} f)^j = g_{ij} v^i g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k} = \\ &= \delta_i^k v^i \frac{\partial f}{\partial x^k} = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы вычислить, чему равна производная по направлению, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. Пусть M – многообразие, $v \in T_P M$, γ – произвольная гладкая кривая такая, что

$$\dot{\gamma}(t_0) = v,$$

если $\gamma(t_0) = P$. Пусть, кроме того,

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

Доказательство. Действительно, для $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$

$$\left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

□

Вернемся к (19). Получим

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad (20)$$

где $\dot{\gamma}(t_0) = v$. Пусть $\gamma \in S_c$. Тогда

$$(20) = \left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_0} = 0.$$

□

⁴Наглядным примером поверхности уровня являются линии уровня холма (2.3). Каждому значению высоты над уровнем моря сопоставляется множество точек холма – горизонтальные срезы.

Перестановка индексов

В отличие от предыдущей операции, перестановка индексов работает с индексами одного типа (верхними либо нижними).

Пусть даны⁵ тензор

$$T_{j_1 \dots j_q}$$

и перестановка $\sigma \in S_q$. Определим

$$(\sigma T)_{j_1 \dots j_q} = T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}. \quad (21)$$

Прежде, чем проверить, что (21) – тензорная операция, решим следующую задачу.

Задача 2.11. Пусть дан тензор T_{ijk} такой, что

$$T_{1jk} = 1,$$

$$T_{2jk} = 2,$$

$$T_{3jk} = 3,$$

и перестановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Требуется найти $(\sigma T)_{123}$.

Решение.

$$(\sigma T)_{123} = T_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}} = T_{213} = 2.$$

Проверим, является ли (21) тензорной операцией.

Задача 2.12. Доказать, что σ – тензорная операция.

Доказательство. Покажем, что σT меняется по тензорному закону (9). Рассмотрим

$$\begin{aligned} (\sigma T)_{j'_1 \dots j'_q} &= T_{j'_{\sigma(1)} \dots j'_{\sigma(q)}} = \\ &= \frac{\partial x^{j_{\sigma(1)}}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_{\sigma(q)}}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}} = \frac{\partial x^{j_{\sigma(1)}}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_{\sigma(q)}}}{\partial x^{j'_q}} (\sigma T)_{j_1 \dots j_q} = \\ &= \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} (\sigma T)_{j_1 \dots j_q}. \end{aligned}$$

Итак, σ является тензорной операцией. □

⁵Здесь, разумеется, есть верхние индексы $i_1 \dots i_p$, но для краткости записи мы их опускаем, так как работаем с $j_1 \dots j_q$.

Альтернирование и симметризация

Определение 2.2. *Симметрическим* называется тензор T такой, что

$$\sigma T = T \quad \forall \sigma.$$

Определение 2.3. *Кососимметрическим* называется тензор T такой, что

$$\sigma T = \text{sgn} \sigma T \quad \forall \sigma.$$

Симметрические и кососимметрические тензоры образуют линейные подпространства. Введем обозначения

$$\Lambda^q = \{ \text{кососимметрич. тензоры типа } (0, q) \}$$

и

$$S^q = \{ \text{симметрич. тензоры типа } (0, q) \}.$$

Пусть $T \in T_q^0$. Тогда операция симметризации вводится как

$$\text{Sym} T = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (\sigma T).$$

Аналогично определяется операция альтернирования

$$\text{Alt} T = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma (\sigma T).$$

Задача 2.13. Доказать, что всякий тензор ранга 2 может быть разложен в сумму симметричного и кососимметричного и такое разложение единственно.

Доказательство. Предположим, что тензор T представим в виде такой суммы:

$$T = S + A. \quad (22)$$

Здесь S и A – симметрический и кососимметрический тензоры соответственно. Применим к T операцию симметризации:

$$\text{Sym} T = \text{Sym} S + \text{Sym} A = S + 0 = S.$$

Аналогично,

$$\text{Alt} T = \text{Alt} S + \text{Alt} A = 0 + A = A.$$

Итак, мы показали, что, если разложение (22) существует, оно единственно. Заметим, что выше мы никак не использовали значение ранга тензора, то есть это верно для любых тензоров.

Пусть тензор T задается матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A = (a_{ij}).$$

Тогда

$$\text{Sym}T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_2} \sigma T,$$

откуда получаем, что матрица $\text{Sym}T$ имеет вид

$$\frac{1}{2} (A + A^T)$$

Аналогично,

$$\text{Alt}T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^\sigma \sigma T.$$

Отсюда матрица $\text{Alt}T$ равна

$$\frac{1}{2} (A - A^T).$$

Отсюда

$$\text{Sym}T + \text{Alt}T = T.$$

□

Задача 2.14. Верно ли утверждение задачи 2.13 для тензоров типа $(0, q)$, где $q > 2$?

В общем случае утверждение задачи 2.14 неверно. Вместо того, чтобы привести соответствующий пример (можно построить такой тензор для $q = 3$), докажем следующее.

Мы уже выяснили, что симметричные тензоры образуют линейное пространство и кососимметричные тензоры также образуют линейное пространство. Выясним, какова размерность этих пространств.

Начнем с Λ^q – пространства кососимметричных тензоров типа $(0, q)$. Очевидно,

$$\Lambda^q \subset T_q^0.$$

Следовательно, любой $\omega \in \Lambda^q$ может быть разложен по базису объемлющего пространства:

$$\omega = \omega_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}.$$

С другой стороны, ω – кососимметрический тензор. Выясним, сколько его компонент достаточно задать, чтобы знать про ω все.

1. Пусть $j_k = j_s = j$. Применим подстановку, которая меняет эти два индекса местами, а остальные оставляет на месте. С одной стороны, такая подстановка должна менять знак компоненты тензора в силу кососимметричности:

$$\omega_{j_1 \dots j_k \dots j_s \dots j_q} = -\omega_{j_1 \dots j_s \dots j_k \dots j_q}.$$

С другой стороны, при перестановке двух одинаковых индексов компонента тензора останется без изменения. Отсюда

$$\omega_{j_1 \dots j \dots j \dots j_q} = 0.$$

2. Пусть есть компонента $\omega_{j_1 \dots j_q}$, $j_1 \neq \dots \neq j_q$. Тогда мы автоматически знаем любую компоненту вида

$$\omega_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}.$$

Итак, для каждого фиксированного набора

$$j_1 \dots j_q$$

известны все компоненты

$$\{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)} \mid \sigma \in S_q\}. \quad (23)$$

Итак, чтобы полностью задать ω , нам не нужно задавать компоненты на наборах с повторяющимися значениями и нужно задать по одному элементу из каждого набора (23).

Получаем, что

$$\dim \Lambda^q = C_n^q.$$

Рассмотрим теперь S^q – множество всех симметрических тензоров типа $(0, q)$. Утверждение пункта 2, установленное для кососимметрических тензоров, остается в силе. Зная значения одного элемента из (23), мы знаем значение всех элементов из набора.

Заметим, что для симметрических тензоров мы не можем сформулировать утверждение, аналогичное по структуре утверждению пункта 1.

Итак, $\dim S^q$ равна количеству наборов из q со значениями от 1 до n без учета порядка (но, возможно, с повторениями).

Вычислим это значение. Рассмотрим наборы

$$j_1 \leq \dots \leq j_q.$$

Так как нам не важен порядок (в силу (23)), считаем, что наборы заранее упорядочены. От них перейдем к наборам

$$a_1 < \dots < a_q, \quad a_i = j_i + i - 1.$$

Заметим, что наборы (j_i) и наборы (a_i) находятся во взаимно однозначном соответствии. Здесь $a_i \in \{1, \dots, n + q - 1\}$. Отсюда

$$\dim S^q = C_{n+q-1}^q.$$

Решение. (Задача 2.14) Пусть каждый тензор типа $(0, q)$, $q > 2$, раскладывается в сумму симметричного и кососимметричного тензоров:

$$T = S + A.$$

Выше было показано (задача 2.13), что, независимо от ранга тензора, такое разложение единственно, если существует. Отсюда

$$T_q^0 = S^q \oplus \Lambda^q.$$

Известно, что в случае прямой суммы пространств их размерности складываются. Тогда

$$n^q = C_{n+q-1}^q + C_n^q. \quad (24)$$

1. Пусть $q = 1$. Тогда (24) не выполняется:

$$n^1 \neq C_n^1 + C_n^1 = 2n.$$

2. Пусть $q = 2$ (задача 2.13). Тогда

$$n^2 = C_{n+1}^2 + C_n^2 = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

3. Наконец, пусть $q > 2$. Изобразим схематично⁶ графики левой и правой частей (24) (рис. 2.4).

Отсюда получаем, что для любого $q > 2 \exists$ тензор T типа $(0, q)$, который нельзя представить в виде

$$T = S + A.$$

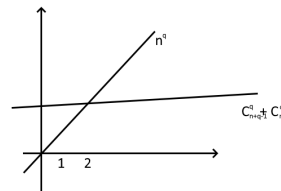


Рис. 2.4. Графическое решение $n^q = C_{n+q-1}^q$

⁶На самом деле зависимость нелинейна.

Семинар 3. Дифференциальные формы

Дифференциальные формы

Напомним сначала определение дифференциальных форм и их основные свойства.

Пусть M – гладкое n -мерное многообразие. В окрестности каждой точки $P \in M$ существуют локальные координаты

$$x = (x^1, \dots, x^n)$$

и касательное пространство $T_P M$. Система локальных координат задает на $T_P M$ базис касательных векторов

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}. \quad (25)$$

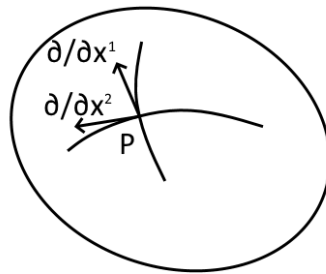


Рис. 3.1. Касательные векторы к координатным линиям

Векторы (25) задают векторные поля, геометрический смысл которых – касательные векторы к координатным линиям (рис. 3.1). Напомним, если точка $P \in M$ имеет координаты

$$P(x_0^1, \dots, x_0^n),$$

то координатные линии задаются как

$$\gamma_j = \begin{cases} x^i = x_0^i, & i \neq j \\ x^j = x_0^j + t \end{cases}$$

Касательное пространство определено инвариантно и его свойства при замене координат сохраняются. Если замена координат имеет вид

$$x \mapsto y = (y^1, \dots, y^n), \quad (26)$$

то новый базис в $T_P M$ будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

В двойственном к пространству $T_P M$ пространстве $T_P M^*$ возникает базис

$$dx^1, \dots, dx^n.$$

Это двойственный базис к базису в $T_P M$, так как

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i.$$

При переходе к новой системе локальных координат (26) новый двойственный базис будет иметь вид

$$\begin{aligned} dy^1, \dots, dy^n, \\ dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j. \end{aligned} \quad (27)$$

Перейдем к определению дифференциальных форм.

Определение 3.1. Гладкая дифференциальная k -форма на M – соответствие, сопоставляющее каждой точке $P \in M$ внешнюю k -форму в $T_P M$, гладко зависящую от P .

Итак, это поле внешних форм (кососимметричных тензоров типа $(0, k)$).

Повторим основные соображения, касающиеся дифференциальных k -форм. Доказательства соображений ниже можно найти в лекционном курсе.

1. Если на M задана карта с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$, то дифференциальная k -форма записывается как

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k. \quad (28)$$

2. При переходе к новой системе координат $x \mapsto y$, запись дифференциальной k -формы преобразуется следующим образом. В (28) следует подставить запись $x(y)$. Дифференциалы dx^i образуются по правилу (27).
3. Так как в каждой точке P дифференциальная форма – это внешняя форма, над ней можно выполнять все те операции, которые есть в алгебре внешних форм.

Итак, любую форму можно умножать на число и на гладкую функцию. Для $f \in C^\infty$ и k -формы ω

$$f\omega$$

– также k -форма.

Кроме того, формы можно умножать на формы. Если α – k -форма, а β – m -форма, то

$$\alpha \wedge \beta$$

– $(k + m)$ -форма. Если на M задана риманова метрика, формы можно умножать поточечно:

$$(\alpha, \beta)_P : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Если M ориентировано, то к дифференциальным формам применим оператор Ходжа $*$, который k -форме сопоставляет $(n - k)$ -форму.

4. Пусть ω – k -форма. Можно вычислить ее дифференциал $d\omega$ – $(k+1)$ -форму,

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Иногда используется запись

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Дифференциал $d\omega$ обладает следующими свойствами. Во-первых, дифференциал линеен:

$$d(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1d\omega_1 + c_2d\omega_2.$$

Во-вторых, для него справедлива формула Лейбница:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \quad (29)$$

Здесь k – степень формы α . Степень β на (29) не влияет.

В-третьих,

$$d(d\omega) = 0.$$

Задачи

Задача 3.1. Пусть задана форма

$$\omega = xdx + ydy + zdz. \quad (30)$$

Требуется записать ω в сферических координатах.

Решение. Напомним, связь между x, y, z и сферическими координатами r, θ, φ следующая:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= dr \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi, \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \omega &= r \sin \theta \cos \varphi (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi) + \\ &+ r \sin \theta \sin \varphi (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi) + \\ &+ r \cos \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) = r dr. \end{aligned}$$

Заметим, что получить

$$\omega = r dr$$

можно было другим способом. Можем внести x, y, z в (30) под соответствующие дифференциалы:

$$\omega = \frac{1}{2}d(x^2) + \frac{1}{2}d(y^2) + \frac{1}{2}d(z^2) = \frac{1}{2}d(r^2) = r dr.$$

Задача 3.2. Дана дифференциальная форма

$$\omega = x dy \wedge dz + 3y dx \wedge dz.$$

Требуется вычислить $d\omega$.

Решение. Вычислим

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + 3dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz - 3dx \wedge dy \wedge dz = -2dx \wedge dy \wedge dz.$$

Задача 3.3. Рассмотрим форму

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

определенную на плоскости везде, кроме начала координат. Требуется вычислить $d\omega$.

Решение. Запишем ω более подробно:

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Вычислим

$$d\omega = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx = \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0.$$

Преобразование форм при отображении

Обсудим, как дифференциальные формы ведут себя при отображениях.

Пусть заданы два многообразия: M размерности n и Q размерности m . Пусть, кроме того, задано отображение

$$f : M \rightarrow Q.$$

Дифференциал df действует следующим образом:

$$df : T_P M \rightarrow T_{f(P)} Q.$$

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты на M , а $(y^1, \dots, y^m)$ – координаты на $T_{f(P)} Q$. В этих координатах f описывается набором функций

$$f : y^i = y^i(x).$$

Пусть на Q задана k -форма ω . Ее прообраз $f^*\omega$ является k -формой на M ,

$$f^*\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(df(\xi_1), \dots, df(\xi_k)).$$

Обсудим, как $f^*\omega$ записывается в координатах. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}. \quad (31)$$

Чтобы получить $f^*\omega$ в координатах, требуется в (31) подставить $y(x^i)$ (и в $\omega_{i_1 \dots i_k}(y)$, и в дифференциалы dy^i).

В частности, если Q – подмногообразие M ,

$$f : Q \hookrightarrow M,$$

на M задана форма ω , то $f^*\omega$, называемая в этом случае *ограничением* $\omega \in M$ на Q , обозначается

$$f^*\omega = \omega|_Q.$$

Ограничение $\omega|_Q$ имеет следующий геометрический смысл. На M задано подпространство Q . Запись $\omega|_Q$ означает, что мы будем вычислять ω только на векторах, которые касаются Q .

Задачи

Задача 3.4. Пусть снова задана форма

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Отметим, что ω задана на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть⁷

$$f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

на $\varphi \in S^1$

$$f(\varphi) = (\cos \varphi; \sin \varphi).$$

Требуется найти $f^*\omega$.

Решение. Здесь

$$\begin{aligned} dx &= -\sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Вычислим

$$f^*\omega = \omega|_{S^1} = \cos^2 \varphi d\varphi + \sin^2 \varphi d\varphi = d\varphi.$$

Заметим, что отсюда сразу следует, что

$$df^*\omega = 0.$$

⁷Здесь S^1 – окружность.

Задача 3.5. Пусть

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \quad (32)$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$$f(u, v, w) = \left(\underbrace{uv + w}_x; \underbrace{2(uv + w)}_y \right).$$

Решение. Легко заметить, что $y = 2x$, а значит, для (32)

$$f^*\omega = 0.$$

Задача 3.6. Пусть задано гладкое отображение

$$f: M \rightarrow Q$$

и ω – дифференциальная k -форма на Q .

Доказать, что⁸

$$f^*d\omega = df^*\omega. \quad (33)$$

Доказательство. Пусть x – координаты на M , y – координаты на Q .

Заметим, что (33) линейно по ω . Поэтому доказательство можно провести только для случая

$$\omega = a(y)dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} f^*\omega &= a(y(x)) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_k} = \\ &= a(y(x)) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} df^*\omega &= \frac{\partial a}{\partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial x^l} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^l \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} + \\ &+ a \frac{\partial^2 y^{i_1}}{\partial x^{j_1} \partial x^l} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} \wedge dx^l \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь, вычислим левую часть (33):

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial a}{\partial y^s} dy^s \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}, \\ f^*d\omega &= \frac{\partial a}{\partial y^s} (y(x)) \frac{\partial y^s}{\partial x^l} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^l \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \end{aligned}$$

⁸Поскольку ω произвольно, используют также краткую запись

$$df^* = f^*d.$$

Итак, $f^*d\omega$ в точности равно первому слагаемому в (34). Покажем, что все остальные слагаемые в (34) равны 0, на примере второго слагаемого:

$$\frac{\partial^2 y^{i_1}}{\partial x^{i_1} \partial x^l} dx^l \wedge dx^{j_1} = 0, \quad (35)$$

так как это свертка кососимметричного тензора с симметричным. По-другому, в этом можно убедиться, если поменять индексы в слагаемых (35) местами. Тогда сумма (35) будет равна самой себе с другим знаком. $\square$



Семинар 4. Интегрирование дифференциальных форм

Интегрирование форм

Перейдем к интегрированию дифференциальных форм. Пусть M – n -мерное многообразие, M – ориентировано. Это означает, что каждое касательное пространство ориентировано, причем эта ориентация гладко меняется от точки к точке. Если рассмотреть произвольную карту с локальными координатами

$$x^1, \dots, x^n$$

и соответствующий базис

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n},$$

то базис во всех точках карты ориентирован одинаково (либо всюду правильно, либо всюду неправильно).

Итак, задано ориентированное многообразие M . Пусть на M задана n -форма ω . Определим интеграл от ω по многообразию M .

1. Предположим сначала, что $\omega = 0$ вне карты U . Выберем в U координаты

$$(x^1, \dots, x^n), \tag{36}$$

которые правильно ориентируют M . Будем считать, что $x^1, \dots, x^n$ меняются во всем $\mathbb{R}^n$. Так как ω – форма старшей степени, в координатах (36)

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Определим

$$\int_M \omega = \underbrace{\int \dots \int}_{\mathbb{R}^n} f(x) dx^1 \dots dx^n.$$

2. Произвольную n -форму ω можно представить⁹ в виде суммы форм ω_j , сосредоточенных в одной карте:

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega_j.$$

Тогда

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^N \int_M \omega_j.$$

⁹С помощью разбиения единицы.

Задачи

Задача 4.1. Пусть

$$\omega = (x + y)dx + (y - x)dy,$$
$$M : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (37)$$

и ориентировано против часовой стрелки (рис. 4.1).

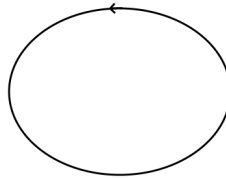


Рис. 4.1. Многообразие M с ориентацией

Вычислить $\int_M \omega$.

Решение. Введем на эллипсе (37) координаты

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$$

Запишем

$$\begin{aligned} \omega \Big|_M &= -(a \cos \varphi + b \sin \varphi) a \sin \varphi d\varphi + (b \sin \varphi - a \cos \varphi) b \cos \varphi d\varphi = \\ &= ((b^2 - a^2) \cos \varphi \sin \varphi - ab) d\varphi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_M \omega = \int_0^{2\pi} [(b^2 - a^2) \cos \varphi \sin \varphi - ab] d\varphi = -2\pi ab.$$

Задача 4.2. Пусть

$$\omega = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

$$M : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \end{cases}$$

Такое M – эллипс (рис. 4.2).

Вычислить $\int_M \omega$.

Решение. Положим

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \end{cases}$$

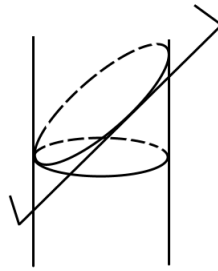


Рис. 4.2. Эллипс M

Тогда, подставляя в

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1,$$

получим, что

$$\cos \varphi = \frac{z}{h} = 1,$$

откуда

$$z = h(1 - \cos \varphi).$$

Здесь считаем, что φ — правильно ориентирующая координата.

Теперь,

$$dx = -a \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = a \cos \varphi d\varphi,$$

$$dz = h \sin \varphi d\varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega \Big|_M &= [- (a \sin \varphi - h + h \cos \varphi) a \sin \varphi + (h - h \cos \varphi - 2 \cos \varphi) a \cos \varphi + \\ &\quad + a (\cos \varphi - \sin \varphi) h \sin \varphi] d\varphi = \\ &= [- (a^2 + ah) \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi + ha (\sin \varphi + \cos \varphi) - ah \cos^2 \varphi] d\varphi = \\ &= [-(a^2 + ah) + ha (\sin \varphi + \cos \varphi)] d\varphi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_M \omega = \int_0^{2\pi} [-(a^2 + ah) + ha (\sin \varphi + \cos \varphi)] d\varphi = -a(a + h)2\pi.$$

Задача 4.3. Рассмотрим

$$\omega = \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z},$$

$$M : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Вычислить $\int_M \omega$.

Решение. Параметризуем эллипсоид M :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \sin \varphi \\ y = b \cos \theta \sin \varphi \\ z = c \sin \theta \end{cases}$$

Здесь

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Вычислим дифференциалы:

$$dx = -a \sin \theta \cos \varphi d\theta - a \cos \theta \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = -b \sin \theta \sin \varphi d\theta + b \cos \theta \cos \varphi d\varphi,$$

$$dz = c \cos \theta d\theta.$$

Тогда

$$dy \wedge dz = bc \cos^2 \theta \cos \varphi d\varphi \wedge d\theta = -bc \cos^2 \theta \cos \varphi d\theta \wedge d\varphi,$$

$$dz \wedge dx = -ac \cos^2 \theta \sin \varphi d\theta \wedge d\varphi,$$

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= -ab \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi + ab \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi d\varphi \wedge d\theta = \\ &= -ab \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\omega|_M = \left(-\frac{bc}{a} \cos \theta - \frac{ac}{b} \cos \theta - \frac{ab}{c} \cos \theta \right) d\theta \wedge d\varphi.$$

Наконец,

$$\int_M \omega = - \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta = -4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$

Формула Стокса

Перейдем к центральной формуле анализа дифференциальных форм – формуле Стокса.

Пусть M – гладкое компактное n -мерное ориентированное многообразие с краем ∂M . Напомним, формально определение многообразия с краем следующее. Многообразие – топологическое пространство, в котором у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Многообразие с краем – такое топологическое пространство, у которого каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной открытому множеству в

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 \leq 0\}.$$

Заметим, что в $\mathbb{R}_+^n$ бывают открытые множества двух типов (рис. 4.3). Множества первого типа не задевают границу $x = 0$, в них можно всегда выделить

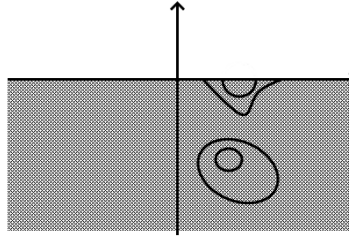


Рис. 4.3. Открытые множества в $\mathbb{R}_-^n$

открытый шар, гомеоморфный всему $\mathbb{R}$. Внутри множеств второго типа, которые имеют общие точки с границей $x = 0$, можно выделить половинку шара, которая гомеоморфна $\mathbb{R}_-^n$.

Итак, в многообразии с краем есть карты двух типов – гомеоморфные $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_-^n$.

Край устроен следующим образом. Это многообразие размерности $n - 1$. В карте, гомеоморфной $\mathbb{R}_-^n$, можно ввести координаты $x_1, \dots, x_n$, $x_1 \leq 0$. Множество, задаваемое в такой карте уравнением

$$x_1 = 0,$$

является частью края ∂M . Объединение таких множеств по всем картам и будет являться краем ∂M .

Если $P \in M$, $P \notin \partial M$, в этой точке, как и везде ранее для многообразий, можно определить касательное пространство $T_P M$.

Пусть $P \in \partial M$. Тогда, во-первых, в этой точке есть n -мерная касательная плоскость ко всему многообразию. Во-вторых, в этой точке есть касательная плоскость к ∂M .

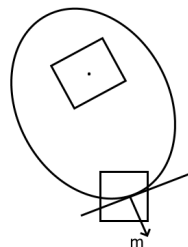


Рис. 4.4. Вектор нормали в касательной плоскости к краю

Если M ориентировано, на крае ∂M есть некоторая каноническая ориентация. Геометрически она задается правилом внешней нормали. Выберем в касательной плоскости к краю вектор нормали (4.4). Базис

$$e_1, \dots, e_{n-1}$$

в $T_P \partial M$ правильно ориентирован $\iff$ правильно ориентирован базис

$$m, e_1, \dots, e_{n-1}$$

в $T_P M$. Другими словами, пусть в M есть карта, гомеоморфная $\mathbb{R}_-^n$, с координатами

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

правильно ориентирующими M . Тогда

$$(x_2, \dots, x_n)$$

будут правильно ориентировать ∂M .

Теорема 4.1. (Формула Стокса) Пусть M – гладкое компактное n -мерное ориентированное многообразие с краем ∂M . Пусть ω – $(n-1)$ -форма на M . Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}. \quad (38)$$

Замечание 4.1. Формула Стокса (38) является многомерным обобщением формулы Ньютона – Лейбница.

Примеры

Рассмотрим несколько форм, интегралы от которых вычисляли ранее.

Пример 4.1. Пусть

$$\omega = (x+y)dx + (y-x)dy,$$
$$\partial M : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Вычислим $\int_M \omega$ с помощью формулы Стокса (38):

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Найдем $d\omega$:

$$d\omega = dy \wedge dx - dx \wedge dy = -2dx \wedge dy.$$

Тогда

$$\int_M d\omega = -2 \int_M dx \wedge dy.$$

Пример 4.2. Пусть

$$\omega = \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}, \quad (39)$$
$$M : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Вычислим $\int_M \omega$, используя формулу Стокса (38).

Здесь

$$d\omega = -\frac{1}{x^2}dy \wedge dx \wedge dz - \frac{1}{y^2}dy \wedge dz \wedge dx - \frac{1}{z^2}dz \wedge dx \wedge dy =$$
$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)dx \wedge dy \wedge dz.$$



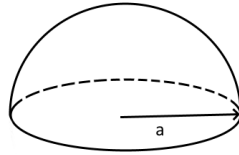


Рис. 4.5. Полушар M

Заметим, что интеграл от $d\omega$ не существует, так как у $d\omega$ есть особенности. Так произошло, потому что исходная форма (39) имеет особенности и формула Стокса к ней неприменима.

Пример 4.3. Пусть

$$M : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

(рис. 4.5). Рассмотрим форму

$$\omega = 2xdy \wedge dz - 2zdx \wedge dz.$$

Вычислим $\int_M \omega$ с помощью формулы Стокса (38). Обратим внимание, что M незамкнута и не ограничивает какой-либо объем. Добавим нижнюю часть полусферы M_0 :

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Тогда

$$M \cup M_0 = \partial D,$$

где

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Запишем теперь формулу Стокса:

$$\int_{M \cup M_0} \omega = \int_D d\omega.$$

С другой стороны,

$$\int_{M \cup M_0} \omega = \int_M \omega + \int_{M_0} \omega.$$

Отсюда

$$\int_M \omega = \int_D d\omega - \int_{M_0} \omega.$$

Вычислим

$$d\omega = 2dx \wedge dy \wedge dz.$$

Заметим, что

$$\omega \Big|_{M_0} = 0,$$

откуда

$$\int_{M_0} \omega = 0.$$

Наконец, получаем

$$\int_M \omega = 2 \int_D dx \wedge dy \wedge dz = 2 \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Интегральная теорема Коши

Напомним интегральную теорему Коши из комплексного анализа. Если есть замкнутый контур γ , ограничивающий область D и задана голоморфная функция f ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (40)$$

Интегральная теорема Коши является частным случаем формулы Стокса.

Убедимся в этом. Перейдем от координат x, y к комплексным координатам $z, \bar{z}$:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases}$$

Функция $F(z, \bar{z})$ голоморфна $\iff$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Теперь,

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\partial D} f dz = \int_D d(f dz).$$

Вычислим

$$d(f dz) = \frac{\partial f}{\partial z} \underbrace{dz \wedge dz}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{=0} d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

Отсюда и получаем (40).

Семинар 5. Векторные поля

Связь дифференциальных форм и векторных полей

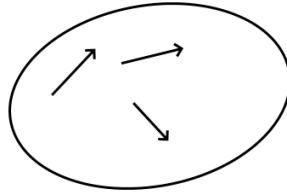


Рис. 5.1. Векторное поле

Напомним, что дифференциальная форма ω – внешняя форма в каждой касательной плоскости. Пусть

$$v_1, \dots, v_k$$

– векторные поля на M . Напомним, векторное поле на M – это касательный вектор к многообразию, заданный в каждой точке M и гладко зависящий от точки (5.1). Если заданы локальные координаты

$$x = (x^1, \dots, x^n),$$

то любое векторное поле записывается как

$$v = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $\partial/\partial x^i$ – базисные вектора в $T_p M$.

Если подставить векторные поля v_i в форму ω , получим

$$\omega(v_1, \dots, v_k)$$

– гладкую функцию. Если подставить, например, только одно векторное поле v , $\omega(v)$ будет формой степени на 1 меньше.

Пусть теперь

$$M = \mathbb{R}^3$$

– евклидово, ориентированное. Пусть v – векторное поле в M (то есть вектор в каждой точке).

Обозначим через G опускание индекса. Рассмотрим

$$\alpha_v = G(v) \tag{41}$$

– дифференциальную 1-форму, на каждом векторе w она равна скалярному произведению:

$$\alpha_v(w) = (v, w)$$

Кроме того, рассмотрим 2-форму

$$\beta_v = *G(v), \tag{42}$$

где $*$ – оператор Ходжа. На векторах u, w она равна смешанному произведению:

$$\beta_v(u, w) = \langle v, u, w \rangle.$$

Формы (41) и (42) мы можем интегрировать и дифференцировать.

Обсудим сначала интегрирование. Пусть γ – ориентированная кривая. Интеграл

$$\int_{\gamma} \alpha_v \quad (43)$$

называется *линейным интегралом поля v вдоль кривой γ* . Этот интеграл можно вычислить следующим образом. В каждой точке γ есть вектор поля v и касательная к кривой (5.2). Возьмем проекцию вектора на касательную, получим скалярную функцию и вычислим интеграл I рода от скалярной функции на γ . Если γ – замкнутая кривая, говорят, что (44) – *циркуляция поля v вдоль контура γ* .

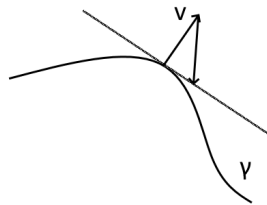


Рис. 5.2. Вектор поля и касательная к кривой γ

Пусть теперь M – ориентированная 2-мерная поверхность. Интеграл

$$\int_M \beta_v \quad (44)$$

называется *поток поля v через поверхность M* . Интеграл (44) можно представить как интеграл I рода. В каждой точке M есть вектор поля v и единичная нормаль к поверхности. Возьмем проекцию вектора на нормаль, получим скалярную функцию и вычислим интеграл I рода.

Кроме того, формы α_v и β_v можно продифференцировать.

$$d\alpha_v = \beta_w \quad (45)$$

– 2-форма, построенная по некоторому другому векторному полю w . Такое w называется *ротором* поля v :

$$w = \text{rot} v.$$

Записав (45) через тензорные операции, получим

$$dG(v) = *G(\text{rot} v),$$

откуда

$$\text{rot} v = G^{-1} * dG(v). \quad (46)$$

Теперь,

$$d\beta_v = f\Omega \quad (47)$$

– 3 форма. Здесь Ω – форма объема, а f – некоторая скалярная функция. f называется *дивергенция поля* v :

$$f = \operatorname{div} v.$$

Распишем (47) через тензорные операции:

$$d * Gv = f\Omega.$$

Отсюда

$$\operatorname{div} v = *d * G(v). \quad (48)$$

Примеры

Формулы (46) и (48), в частности, позволяют вычислять $\operatorname{rot} v$ и $\operatorname{div} v$ в криволинейных координатах.

Рассмотрим $\mathbb{R}^3$. Пусть y – триортогональные координаты, то есть

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = 0, \quad i \neq j.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = E_i(y)$$

– *коэффициенту Ламе* (а не 1, как в евклидовых координатах). В частности, таким свойством обладают цилиндрические и сферические координаты.

Отметим, что при работе с триортогональными координатами векторные поля, как правило, записывают в виде разложения не по базису $\left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)$, а по *ортам*

$$e_j = \frac{1}{\sqrt{E_j}} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Двойственный базис имеет вид

$$e^j = \sqrt{E_j} dy^j.$$

Отметим, что орты не являются векторами скорости к координатным линиям, но в $\mathbb{R}^3$ они образуют ортонормированный базис. Поля, как правило, записываются как

$$v = v^j e_j = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3.$$

Вычислим $\operatorname{div} v$ по формуле (48). Сначала вычислим

$$G(v) = v^1 e^1 + v^2 e^2 + v^3 e^3.$$

Далее,

$$*G(v) = v^1 e^2 \wedge e^3 + v^2 e^3 \wedge e^1 + v^3 e^1 \wedge e^2 = v^1 \sqrt{E_2 E_3} dy^2 \wedge dy^3 + \dots$$

Наконец,

$$\begin{aligned} d * G(v) &= \frac{\partial (v^1 \sqrt{E_2 E_3})}{\partial y^2} dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 + \dots = \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial}{\partial y^1} (v^1 \sqrt{E_2 E_3}) + \frac{\partial}{\partial y^2} (v^2 \sqrt{E_3 E_1}) + \frac{\partial}{\partial y^3} (v^3 \sqrt{E_1 E_2}) \right) e^1 \wedge e^2 \wedge e^3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial}{\partial y^1} (v^1 \sqrt{E_2 E_3}) + \frac{\partial}{\partial y^2} (v^2 \sqrt{E_3 E_1}) + \frac{\partial}{\partial y^3} (v^3 \sqrt{E_1 E_2}) \right). \quad (49)$$

Пусть триортогональные координаты – это цилиндрические координаты

$$\rho, \varphi, z.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_1 &= 1, \quad E_2 = \rho^2, \quad E_3 = 1, \\ x &= \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Если даны сферические координаты

$$r, \theta, \varphi,$$

то

$$\begin{aligned} E_1 &= 1, \quad E_2 = r^2, \quad E_3 = r^2 \sin^2 \theta. \\ x &= \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Обсудим, что в таком случае дает формула Стокса

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Пусть в трехмерном пространстве задана кривая γ , ограничивающая некоторую двумерную поверхность M , и векторное поле v . Тогда

$$\begin{aligned} \text{циркуляция } v \text{ вдоль } \gamma &= \int_{\gamma} dv = \int_{\partial M} dv = \\ &= \int_M d\alpha_v = \int_M \beta_{\operatorname{rot} v} = \text{поток } \operatorname{rot} v \text{ через } M. \end{aligned}$$

Это следствие из формулы Стокса называется *классической формулой Стокса*.

Перейдем ко второму возможному случаю. Предположим теперь, что в $\mathbb{R}^3$ имеется двумерная поверхность M , ограничивающая объем D (5.3). Тогда

$$\text{Поток } v \text{ через } M = \int_M \beta_v = \int_{\partial D} \beta_v = \int_D d\beta_v = \int_D \operatorname{div} v \Omega.$$

Это следствие из формулы Стокса называется *формулой Гаусса – Остроградского*.

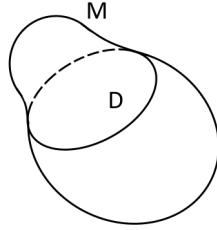


Рис. 5.3. Двумерная поверхность M , ограничивающая объем D

Пример 5.1. Вычислим поток v ,

$$v = (r^2, 0, ar \sin \theta \cos \varphi),$$

через поверхность M ,

$$M = \partial D, \quad D = \begin{cases} r \leq R \\ 0 \leq \varphi < \pi/2 \\ \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

Вычислим $\operatorname{div} v$ по формуле (49):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= \frac{1}{\sqrt{r^2 r^2 \sin^2 \theta}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sqrt{r^4 \sin^2 \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (ar \sin \theta \cos \varphi \sqrt{r^2}) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} (4r^3 \sin \theta - a \sin \varphi \sin \theta r^2) = 4r - a \sin \varphi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_M (v, \vec{ds}) &= \int_D (4r - a \sin \varphi) \sin \theta r^2 dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta (4r^3 \sin \theta - ar^2 \sin \theta \sin \varphi) = 4 \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} - a \frac{R^3}{3} = R^3 \left(\frac{\pi R}{2} - \frac{a}{3} \right). \end{aligned}$$

Коммутатор векторных полей

Обсудим еще одну связь между дифференциальными формами и векторными полями.

Напомним, что представляет собой коммутатор векторных полей. Пусть M – гладкое многообразие, u и v – векторные поля. Каждое из этих полей определяет линейный дифференциальный оператор первого порядка на функциях. Если f – гладкая функция, то

$$\partial_u(f) = u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = df(u).$$

Итак, каждому векторному полю сопоставляется дифференциальный оператор:

$$u \mapsto \partial_u, \quad v \mapsto \partial_v.$$

Тогда

$$[\partial_u, \partial_v] = \partial_u \partial_v - \partial_v \partial_u = \partial_w.$$

Определение 5.1. Поле w называется *коммутатором* полей v и u . Обозначение:

$$w = [u, v].$$

Отметим, что в координатах (x^i) i -я компонента коммутатора имеет вид

$$[u, v]^i = \left(u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right).$$

Обсудим **свойства** этой операции коммутирования.

1. Линейность по u и по v .

2. Симметричность:

$$[u, v] = [v, u].$$

3. Тождество Якоби:

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0.$$

4. Правило Лейбница:

$$[fu, v] = f[u, v] - u\partial_v(f),$$

$$[u, fv] = f[u, v] + v\partial_u(f).$$

Примеры

Пример 5.2. Пусть

$$u = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

$$v = (-y, x).$$

Вычислим

$$\begin{aligned} [u, v]^1 &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \right) (-y) = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{-y\sqrt{x^2 + y^2} - x \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется $[u, v]^2$.

Пример 5.3. Пусть в качестве многообразия дано евклидово пространство $\mathbb{R}^4$. Пусть векторное поле v линейно, то есть представимо в виде

$$v(x) = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

В координатах это записывается как

$$v^i(x) = a_j^i x^j.$$

Пусть, аналогично, векторное поле w линейно:

$$w(x) = Bx,$$

$$w^i(x) = b_j^i x^j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} [v, w]^i &= v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = a_k^j x^k \frac{\partial}{\partial x^j} b_s^i x^s - b_k^j \frac{\partial}{\partial x^j} a_s^i x^s = \\ &= a_k^j x^k b_j^i - b_k^j x^k a_j^i = (b_j^i a_k^j - a_j^i b_k^j) x^k. \end{aligned}$$

Итак, показали, что коммутатор линейных векторных полей – линейное векторное поле в матрицей

$$(b_j^i a_k^j - a_j^i b_k^j).$$

Свойства ограничения коммутатора касательных полей к подмногообразию

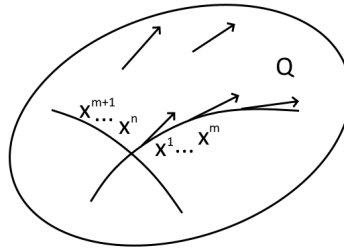


Рис. 5.4. Векторные поля на M , которые касаются Q

Предположим, дано n -мерное многообразие M с t -мерным подмногообразием $Q \subset M$. Пусть также даны v, w – векторные поля на M , которые касаются Q (5.4). Рассмотрим векторные поля, ограниченные на Q :

$$v|_Q, \quad w|_Q.$$

Тогда коммутатор $[v, w]$ будет также векторным полем, касающимся Q ,

$$[v, w]_M = \left[v|_Q, w|_Q \right]_Q.$$

Введем координаты на M следующим образом. Пусть

$$x^1, \dots, x^m$$

– координаты на Q , а оставшиеся

$$x^{m+1}, \dots, x^n$$

расположены поперек (рис. 5.4). Тот факт, что v и w касаются Q , означает, что координаты

$$x^{m+1}, \dots, x^n$$

у них равны 0. Тогда из формулы

$$[v, w]^i = v^i \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$$

получаем, что коммутатор $[v, w]$ также касается Q .

Формула Картана

Пусть задана k -форма ω . Как обсуждалось ранее, если взять векторные поля

$$v_1, \dots, v_k, \quad (50)$$

можно подставить

$$\omega(v_1, \dots, v_k)$$

и получить функцию. Хотим вычислить $d\omega$ на наборе векторных полей (50)

$$d\omega(v_0, v_1, \dots, v_k).$$

Формула, дающая значение $d\omega$ на наборе векторных полей, – это *формула Картана*:

$$\begin{aligned} d\omega(v_0, v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i=0}^k \partial_{v_i} \omega(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) (-1)^i + \\ &\sum_{0 \leq i < j \leq k} \omega([v_i, v_j], v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_k) \cdot (-1)^{i+j}. \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь $\widehat{}$ означает, что аргумент пропущен.

Итак, формула Картана (51) явным образом связывает коммутатор полей и внешнюю производную от формы.

Проверим (51) для простейшего случая, когда $k = 1$. Тогда (51) имеет вид

$$d\omega(v_0, v_1) = \partial_{v_0} \omega(v_1) - \partial_{v_1} \omega(v_0) - \omega([v_0, v_1]). \quad (52)$$

Воспользуемся линейностью формулы (52). Достаточно проверить утверждение для формы

$$\omega = a(x) dx^s.$$

Тогда

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^s.$$

Левая часть (52) в таком случае имеет вид

$$d\omega(v_0, v_1) = \frac{\partial f}{\partial x^j} (v_0^j v_1^s - v_0^s v_1^j).$$

Перейдем к вычислению правой части (52). Здесь

$$\omega(v_1) = a(x)v_1^s,$$

$$\omega(v_0) = a(x)v_0^s.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \partial_{v_0} \omega(v_1) - \partial_{v_1} \omega(v_0) + \omega([v_0, v_1]) = \\ &= v_0^s v_1^j \frac{\partial a}{\partial x^j} + a(x) v_0^j \frac{\partial v_1^s}{\partial x^j} - v_0^s v_1^j \frac{\partial a}{\partial x^j} - a(x) v_1^j \frac{\partial v_0^s}{\partial x^j} - a(x) \left(v_0^j \frac{\partial v_1^s}{\partial x^j} - v_1^j \frac{\partial v_0^s}{\partial x^j} \right) = \\ &= v_0^s v_1^j \frac{\partial a}{\partial x^j} + v_0^s v_1^j \frac{\partial a}{\partial x^j} = d\omega(v_0, v_1). \end{aligned}$$

Обсудим в двух словах доказательство (51) для k -форм. Так как выражения в левой и правой части (51) линейны по форме ω , и, кроме того, при домножении ω на гладкую функцию f остается верным, достаточно рассматривать

$$\omega = dx^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_1}.$$

Кроме того, выражения в левой и правой частях (51) линейны по $v_0, \dots, v_k$. Поэтому достаточно рассматривать поля

$$v_j = q(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Подстановкой можно проверить, что (51) справедлива относительно умножения поля на функцию q . Поэтому достаточно проверить случай

$$v^i = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Этот случай очевиден, так как обе части (51) равны 0.

Выпрямление полей и форм

Обсудим, наконец, выпрямление полей и форм.

Напомним, что $(1, 0)$ -тензорное поле – это векторное поле $v(x)$, а $(0, 1)$ -тензорное поле – 1-форма α . Возникает вопрос: к какому простейшему виду можно привести $v(x)$ и α локальной заменой координат?

Повторим сначала, что известно в таком случае для функций. Пусть дана функция $f(x)$. Рассмотрим некритическую точку P , то есть

$$d_P f \neq 0.$$

По следствию из теоремы о неявной функции, можно выбрать в окрестности P локальные координаты так, чтобы

$$f(x) = x^1.$$

Из курса дифференциальных уравнений известна теорема о выпрямлении векторного поля. Если в точке P

$$v(P) \neq 0,$$

то вблизи этой точки можно выбрать координаты так, чтобы

$$v = (1; 0 \dots 0) = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

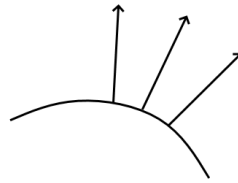


Рис. 5.5. Векторное поле, не касающееся поверхности размерности $n - 1$

Это непосредственное следствие теоремы о существовании и единственности системы ОДУ. В некоторой окрестности точки рассматривается поверхность размерности $n - 1$ такая, что векторное поле ее не касается (5.5), и система

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ x = r(y^1, \dots, y^{n-1}) \end{cases}$$

где

$$r(y^1, \dots, y^{n-1})$$

– параметрическое уравнение рассматриваемой поверхности. Решением такой системы будет

$$x = X(t, y^1, \dots, y^{n-1}).$$

Теорема о существовании и единственности и теорема о гладкой зависимости от начальных условий гарантируют, что это гладкая замена координат.

Перейдем к случаю $(0, 1)$ -тензорного поля. Пусть α – 1-форма и точка P такова, что

$$\alpha(P) \neq 0.$$

Выясним, верно ли, что существуют локальные координаты

$$(x^1, \dots, x^n)$$

такие, что

$$\alpha = c_i dx^i.$$

Разница состоит в следующем. Вся теория дифференциальных уравнений основана на том, что векторное поле можно проинтегрировать. Иными словами, найдутся

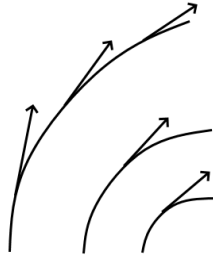


Рис. 5.6. Кривые такие, что векторное поле касается этих кривых

кривые (решения соответствующих систем ОДУ) такие, что векторное поле касается этих кривых (5.6). В таком случае в любой точке $P \in M$ можно рассмотреть $(n - 1)$ -мерную плоскость

$$V_P : \{ \xi \in T_P M : \alpha(\xi) = 0 \}.$$

Предположим, найдутся координаты такие, что

$$\alpha = dx^1.$$

Рассмотрим подмногообразие, заданное уравнением

$$x^1 = 0.$$

Такое подмногообразие будет касаться V_P . Иными словами, найдется $Q \hookrightarrow M$ такое, что $\forall P \in Q$

$$V_P = T_P Q.$$

Отсюда

$$\alpha|_Q = 0,$$

а значит,

$$d\alpha|_Q = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha \wedge d\alpha = 0 \tag{53}$$

всюду (не только на Q). Действительно, выберем в произвольной точке базис

$$e_1, \dots, e_{n-1}$$

и один базисный вектор поперек (рис. 5.7). Тогда (53) равна 0 для любых из векторов.

Итак, получили следующее утверждение.

Утверждение 5.1. Если $\exists$ локальные координаты такие, что α в них выпрямляется, то

$$\alpha \wedge d\alpha = 0. \tag{54}$$

Замечание 5.1. Условие (54) называется *условием Фробениуса*.

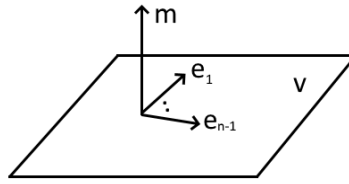


Рис. 5.7. Координаты в M

Задача 5.1. Пусть

$$\alpha = f(z)dx + dy + (x + y)dz.$$

Для каких f

$$\alpha \wedge d\alpha = 0?$$

Решение. Вычислим

$$d\alpha = f'(z)dz \wedge dx + dx \wedge dz + dy \wedge dz.$$

Тогда

$$\alpha \wedge d\alpha = f(z)dx \wedge dy \wedge dz + f'(z)dx \wedge dy \wedge dz - dx \wedge dy \wedge dz,$$

откуда получаем условие на f :

$$f(z) + f'(z) = 1.$$

Задача 5.2. Рассмотрим форму

$$\alpha = xdy + dz.$$

Можно ли перейти к координатам u, v, w таким, что эта форма запишется как

$$udv = \beta?$$

Решение. Вычислим

$$d\alpha = dx \wedge dy,$$

откуда

$$d \wedge d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0.$$

С другой стороны,

$$d\beta = du \wedge dv,$$

откуда

$$\beta \wedge d\beta = 0.$$

Получаем противоречие.

Семинар 6. Когомологии

Группы когомологий (де Рама)

Отметим, что в рамках курса речь будет идти только о группах когомологий де Рама. Далее будем их называться просто группами когомологий.

Пусть задано M^n – n -мерное многообразие. Пусть ω – дифференциальная форма на M .

Определение 6.1. ω называется *замкнутой* тогда и только тогда, когда

$$d\omega = 0.$$

Обозначим множество всех замкнутых форм степени k на M через $Z^k(M)$.

Определение 6.2. ω называется *точной* $\iff \exists$ форма α такая, что

$$d\alpha = \omega.$$

Обозначим множество всех точных k -форм на M через $B^k(M)$.

Напомним, оператор внешнего дифференцирования d обладает следующим свойством:

$$d(d\theta) = 0 \tag{55}$$

для любой формы θ . В обозначениях выше (55) можно записать как

$$B^k(M) \subset Z^k(M).$$

Факторпространство

$$Z^k(M)/B^k(M) = H^k(M)$$

называется k -й группой когомологий M . Отметим, что $H^k(M)$ является линейным пространством. Обозначим

$$\beta_k(M) = \dim H^k(M).$$

Такие $\beta_k(M)$ называются *числами Бетти*.

Отметим как факт следующее утверждение.

Теорема 6.1. Если M компактно, то

$$\dim H^k(M) < \infty.$$

Замечание 6.1. На многообразии размерности n любая форма степени $k > n$ равна 0.

Примеры

Пример 6.1. Рассмотрим многообразия размерности 1. Их всего два: прямая $\mathbb{R}^1$ и окружность S^1 .

1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Найдем

$$H^1(\mathbb{R}^1).$$

Пусть α – 1-форма (форм степени выше единицы на $\mathbb{R}^1$ нет) на $\mathbb{R}^1$. Тогда она замкнута, так как $d\alpha = 0$. Обсудим, будет ли она точной.

Отметим, что на прямой с координатой x общий вид 1-формы следующий:

$$\alpha = f(x)dx.$$

Такая форма – точная, если $\exists$ функция $g(x)$ такая, что

$$dg = \alpha. \quad (56)$$

В координатах (56) записывается как

$$\frac{dg}{dx} = f(x).$$

В наших условиях (все функции гладкие) это означает, что g является первообразной для f :

$$g(x) = g(0) + \int_0^x f(t)dt. \quad (57)$$

Отметим, что для любой достаточно хорошей (гладкой) функции $\exists$ первообразная, поэтому любая 1-форма на $\mathbb{R}^1$ является точной. Отсюда

$$B^1(\mathbb{R}^1) = Z^1(\mathbb{R}^1),$$

откуда

$$\dim H^1 = 0.$$

Здесь

$$\beta_1 = 0.$$

2. Пусть $M = S^1$. Как и выше, возьмем α – произвольную 1-форму на окружности S^1 . Введем на окружности круговую координату $\varphi \pmod{2\pi}$.

Тогда α в координатах записывается как

$$\alpha = f(\varphi)d\varphi.$$

Обсудим, когда существует функция $g(\varphi)$ такая, что

$$dg = \alpha,$$

то есть

$$\frac{dg}{d\varphi} = f(\alpha).$$

Запишем аналогичную (57) формулу:

$$g(\varphi) = g(0) + \int_0^{\varphi} f(t) dt.$$

Эта формула задает функцию на S^1 , если

$$g(2\pi) = g(0),$$

то есть

$$g(0) + \int_0^{2\pi} f(t) dt = g(0),$$

что равносильно тому, что

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0,$$

или, в другой записи,

$$\int_{S^1} \alpha = 0.$$

Чтобы найти

$$\dim H^1(S^1),$$

воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим отображение

$$Z^1(S^1) \xrightarrow{I} \mathbb{R}, \quad (58)$$

$$\alpha \mapsto \int_{S^1} \alpha.$$

По теореме из алгебры,

$$Z^1(S^1) / \text{Ker} I = \text{Im} I.$$

Заметим, что

$$\text{Ker} I = B^1(S^1),$$

откуда

$$Z^1(S^1) / \text{Ker} I = Z^1(S^1) / B^1(S^1) = H^1(S^1).$$

Осталось понять, чему равен $\text{Im} I$. Если $\forall \alpha$

$$\int_{S^1} \alpha = 0,$$

то $\text{Im} I = 0$. Покажем, что это не так (а значит, $\text{Im} I = \mathbb{R}^1$). Пусть, например,

$$\alpha = d\varphi.$$

Тогда

$$\int_{S^1} \alpha = 2\pi \neq 0.$$

Итак,

$$\text{Im} I = \mathbb{R},$$

откуда получаем, что

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}.$$

Здесь

$$\beta_1 = 1.$$

Пример 6.2. Рассмотрим

$$H^1(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}).$$

Напомним утверждение из лекционного курса.

Лемма 6.1.

$$H^k(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Поэтому

$$H^1(\mathbb{R}^2) = 0.$$

Сначала разберем, что происходит на $\mathbb{R}^2$ (прежде, чем перейти к $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$). 1-форма α на плоскости записывается как

$$\alpha = A(x, y)dx + B(x, y)dy.$$

Форма α замкнута, если

$$d\alpha = 0,$$

то есть

$$d\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0. \quad (59)$$

Форма α – точная, если $\exists$ функция $f(x, y)$ такая, что

$$df = \alpha,$$

то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B(x, y).$$

Заметим, что написанное выше будет верно и для

$$f + \text{const}, \quad \text{const} \in \mathbb{R}.$$

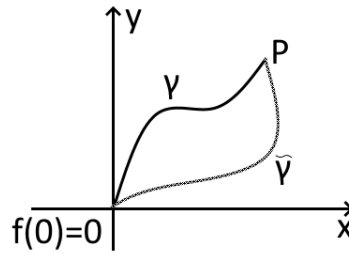


Рис. 6.1. Пути γ и $\tilde{\gamma}$, соединяющие P и Q

Обсудим, как построить f по заданным $A(x, y)$ и $B(x, y)$. Такая функция будет задана с точностью до константы. Будем считать, что мы зафиксировали ее значение в некоторой точке. Пусть

$$f(0) = 0.$$

Определим $f(P)$, где P – произвольная точка. Рассмотрим произвольную кривую γ , соединяющую 0 и P (рис. 6.1). Зададим

$$f(P) = \int_{\gamma} \alpha. \quad (60)$$

Проверим следующее.

1. Корректность (формула (60) не должна зависеть от выбора γ);
2. Должно выполняться

$$df = \alpha.$$

Корректность следует из формулы Стокса.

Утверждение 6.1. (Следствие из формулы Стокса) Интеграл от замкнутой 1-формы по γ не меняется при гомотопии пути γ .

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Пусть даны две кривых (γ и $\tilde{\gamma}$) из A в B (рис. 6.1). Они ограничивают собой область D . Тогда по формуле Стокса

$$\int_{\partial D} \alpha = \pm \int_D d\alpha = 0,$$

так как α замкнута. Здесь вместо конкретного знака пишем $\pm$ (в нашем случае принципиально, каков знак на самом деле).

Отсюда

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_{\gamma} \alpha - \int_{\tilde{\gamma}} \alpha = 0.$$

Заметим, однако, что приведенное выше доказательство не является строгим. Действительно, рассуждения не подходят, например, для случая пересекающихся кривых. На самом деле надо рассматривать гомотопию F (рис. 6.2) и применять формулу Стокса уже к $F^*\alpha$. $\square$

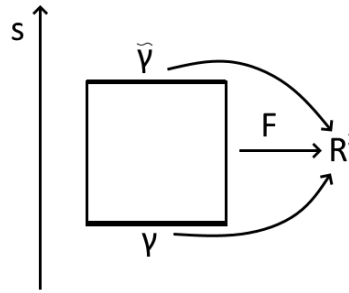


Рис. 6.2. Гомотопия F

Отметим, что на плоскости любые два пути с фиксированными концами гомотопны. Здесь гомотопию можно задать как

$$F(s, t) = s\gamma(t) + (1 - s)\hat{\gamma}(t).$$

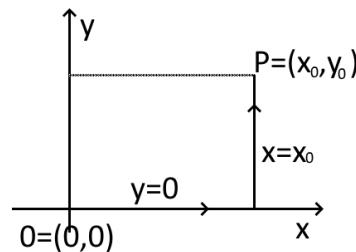


Рис. 6.3. Путь $\{y = 0\} \cup \{x = x_0\}$

Проверим теперь, что для (60)

$$df = \alpha.$$

Так как ранее убедились, что определение f не зависит от кривой γ , рассмотрим следующий путь (рис. 6.3). Тогда

$$f(P) = \int_{\gamma} \alpha = \int_0^{x_0} A(u, 0) du + \int_0^{y_0} B(x_0, v) dv = f(x_0, y_0).$$

Проверяем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_0} &= B(x_0, y_0), \\ \frac{\partial f}{\partial x_0} &= A(x_0, 0) + \int_0^{y_0} \frac{\partial B(x_0, v)}{\partial x_0} dv. \end{aligned} \quad (61)$$

Воспользуемся тем, что α замкнута, а значит, из (59)

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}.$$

Тогда

$$(61) = A(x_0, 0) + \int_0^{y_0} \frac{\partial A(x_0, v)}{\partial v} dv = A(x_0, 0) + A(x_0, y_0) - A(x_0, 0) = A(x_0, y_0).$$

Замечание 6.2. Если

$$df_1 = df_2 = \alpha,$$

то

$$d(f_1 - f_2) = 0,$$

откуда

$$f_1 - f_2 = \text{const.}$$

Итак, показали, что в $\mathbb{R}^2$ любая замкнутая форма является точной, а значит,

$$H^1(\mathbb{R}^2) = 0.$$

Отметим, что рассуждения выше верны для замкнутых 1-форм и в случае $\mathbb{R}^n$.

Вернемся к случаю $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Поймем, является ли замкнутая форма α точной. Строить ее будем, как и прежде, по формуле (60).

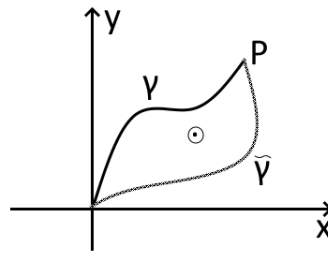


Рис. 6.4. Пути на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Отличие от случая $M = \mathbb{R}^2$ состоит в следующем. На $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ не любые два пути являются гомотопными (6.4). Поэтому следствие из теоремы Стокса (утверждение 6.1) здесь использовать не получится. Однако из этого не следует, что формула (60) определена некорректно.

Отметим, что следующее утверждение верно для произвольного M .

Утверждение 6.2. Замкнутая 1-форма α является точной $\iff$

$$\int_{\gamma} \alpha = 0$$

для любого замкнутого пути γ .

Доказательство. $\Leftarrow$ Обозначим через γ^{-1} путь, пройденный в обратном направлении. Заметим (рис. 6.1), что

$$\gamma \cdot \tilde{\gamma}^{-1}$$

– замкнутый путь. Тогда

$$\int_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}^{-1}} \alpha = \int_{\gamma} \alpha - \int_{\tilde{\gamma}} \alpha.$$

Отсюда получаем корректность (60). Далее, повторяя рассуждения для $\mathbb{R}^2$, можно показать, что α – точная.

□

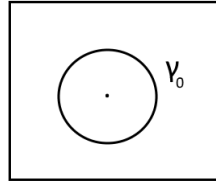


Рис. 6.5. Путь γ_0

Утверждение 6.3. (Для $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) Любой замкнутый путь γ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопен пути вида $m\gamma_0$, где $m \in \mathbb{Z}$, а γ_0 задана условием

$$r = \text{const}$$

в полярных координатах (рис. 6.5).

При $m = 0$ считаем, что мы остаемся в начальной точке.

Заметим, что

$$\int_{m\gamma_0} \alpha = m \int_{\gamma_0} \alpha.$$

Из утверждений 6.2 и 6.3 вытекает следующее.

Утверждение 6.4. Замкнутая 1-форма α на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ является точной $\iff$

$$\int_{\gamma_0} \alpha = 0.$$

Воспользуемся приемом (58). Рассмотрим отображение

$$Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{I} \mathbb{R},$$

$$\alpha \mapsto \int_{\gamma_0} \alpha.$$

Тогда

$$Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \text{Ker} I = \text{Im} I.$$

Здесь

$$\text{Ker} I = B^1(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}),$$

а значит,

$$\text{Im} I = H^1(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}).$$

Приведем пример 1-формы α на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ такой, что

$$\int_{\gamma_0} \alpha \neq 0.$$

Такой формой является, например,

$$\alpha = d\varphi$$

в полярных координатах:

$$\int_{\gamma_0} d\varphi = 2\pi.$$

Заметим, что формула выше верна, так как на плоскости выколота точка 0. Это становится более заметным, если переписать $d\varphi$ в декартовых координатах

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Тогда

$$d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Итак, заметно, что $d\varphi$ имеет особенность в точке $(0, 0)$.

Итак, получаем, что

$$\text{Im} I = \mathbb{R} = H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Пример 6.3. Найдем

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}).$$

Пусть α – замкнутая 1-форма. Поймем, когда α является и точной.

Рассмотрим γ_1 и γ_2 (рис. 6.6).

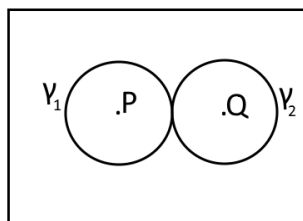


Рис. 6.6. Пути γ_1 и γ_2

Утверждение 6.5. Любой замкнутый путь на $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ гомотопен пути вида¹⁰

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \dots$$

Замечание 6.3.

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 \not\sim \gamma_2 \cdot \gamma_1.$$

Воспользуемся стандартным приемом. Построим отображение

$$Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) \xrightarrow{I} \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha \mapsto \int_{\gamma_1} \alpha \int_{\gamma_2} \alpha.$$

По теореме из линейной алгебры, как обсуждалось ранее,

$$Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) / \text{Ker} I = \text{Im} I.$$

Из утверждения 6.5 следует аналогичное утверждению 6.4 утверждение, что замкнутая 1-форма α является точной $\iff$

$$\int_{\gamma_1} \alpha = 0 \text{ и } \int_{\gamma_2} \alpha = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\text{Ker} I = B^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}).$$

Отсюда

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) = \text{Im} I.$$

Здесь

$$\text{Im} I = \mathbb{R}^2.$$

Для доказательства этого факта достаточно привести пример 1-форм α_1 и α_2 таких, что

$$\int_{\gamma_1} \alpha_1 = 1, \quad \int_{\gamma_2} \alpha_1 = 0,$$

$$\int_{\gamma_1} \alpha_2 = 0, \quad \int_{\gamma_2} \alpha_2 = 1$$

и взять в качестве α

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2.$$

Пусть

$$P = (a_1, b_1), \quad Q = (a_2, b_2).$$

¹⁰Имеется вид некоторое количество γ_1 и γ_2 , взятых в произвольном порядке и, возможно, в обратном направлении (некоторые из них).

Тогда возьмем, например,

$$\alpha_1 = \frac{(x - a_1)dy - (y - b_1)dx}{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} \frac{1}{2\pi},$$
$$\alpha_2 = \frac{(x - a_2)dy - (y - b_2)dx}{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2} \frac{1}{2\pi}.$$

Итак, показали, что

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) = \mathbb{R}^2.$$

Замечание 6.4. Аналогично показывается, что

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}) = \mathbb{R}^k.$$

Докажем утверждение 6.3.

Доказательство. (Утверждение 6.3)

1. Стягиваем $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ на γ_0 . например, в полярных координатах

$$F(r, \varphi, s) = (s + (1 - s)r, \varphi), \quad s \in [0, 1].$$

В результате исходный путь γ заменится на гомотопный $\tilde{\gamma}$, который идет по окружности.

2. Итак,

$$\tilde{\gamma} \sim \gamma(t) = (1, \varphi(t)), \quad t \in [0, T]$$

в полярных координатах. Здесь $\varphi(t)$ – некоторая функция.

Хотим показать, что

$$m\gamma_0(t) = (1, mt).$$

Достаточно рассмотреть

$$\varphi_s(t) = s\varphi(t) + (1 - s)mt.$$

□

Аналогично доказывается утверждение 6.4.

Пример 6.4. Найдем

$$H^1(S^2).$$

Схема решения задачи аналогичная. Рассмотрим замкнутую 1-форму α на сфере S^2 . Будем пытаться строить функцию f такую, что

$$df = \alpha.$$

Как и раньше, такая f существует (то есть α – точная) $\iff$

$$\int_{\gamma} \alpha = 0,$$

где γ – произвольный замкнутый путь на S^1 . Любой замкнутый путь на S^1 стягивается в точку, то есть гомотопен тривиальному (постоянному) пути. Отсюда любая замкнутая форма на сфере – точная.

Итак,

$$H^1(S^1) = 0.$$

Замечание 6.5. Аналогично можно показать

$$H^1(S^n) = 0, \quad n \geq 2.$$

Пример 6.5. Рассмотрим

$$H^1(\mathbb{R}P^2).$$

Напомним, одна из моделей двумерной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ – это двумерный диск, у которого склеены диаметрально противоположные точки на границе.

Утверждение 6.6. *Любой замкнутый путь γ на $\mathbb{R}P^2$ гомотопен либо постоянному пути, либо замкнутому пути γ_0 .*

Заметим, что такой γ_0 не стягивается в точку. Это видно в том числе из того факта, что окрестность такого γ_0 – лента Мёбиуса.

Замечание 6.6. Путь $2\gamma_0$ стягивается.

Отсюда получаем, что

$$\underbrace{\int_{2\gamma_0} \alpha}_{=2 \int_{\gamma_0} \alpha} = 0.$$

Семинар 7. Степень отображения

Степень отображения

Пусть дано отображение

$$f: M \rightarrow N,$$

где M, N – гладкие n -мерные замкнутые¹¹ ориентированные многообразия.

Напомним, точка $x \in M$ – *критическая*, если $df(x)$ имеет ядро. Значение $y \in N$ – *регулярное*, если $f^{-1}(y)$ не содержит критических точек. В частности, y – регулярное, если

$$f^{-1}(y) = \emptyset.$$

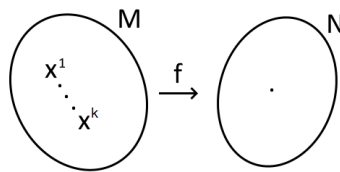


Рис. 7.1. Прообразы точки y

Степень отображения $\deg f$ определяется следующим образом. На N выбирается некоторая регулярная точка y (7.1). Из того, что многообразия компактны, у y может быть только конечное число прообразов

$$x_1, \dots, x_k.$$

Тогда

$$\deg_y f = \sum_{x_i \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} \right) \Big|_{x_i} \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

Здесь (v^i) – координаты в окрестности y , а (u^j) – координаты в окрестности каждого x^l , которые выбираются так, чтобы зафиксировать выбранную ориентацию.

На лекциях доказывалось следующее утверждение.

Теорема 7.1. 1. Степень $\deg_y f$ (62) не зависит от выбора регулярного значения y .

2. Если отображения гомотопны:

$$f \sim g,$$

то

$$\deg f = \deg g.$$

Замечание 7.1. Если

$$f^{-1}(y) = \emptyset,$$

то

$$\deg f = 0.$$

¹¹Компактные без края.

Примеры

Замечание 7.2. Из того, что

$$\deg f = \deg g,$$

вообще говоря, не следует

$$f \sim g.$$

Пример 7.1. Рассмотрим

$$f : \underbrace{S^1}_{\varphi} \rightarrow \underbrace{S^1}_{\psi}$$

Чтобы отображение было непрерывным,

$$\psi(2\pi) = 2\pi k.$$

Тогда

$$k = \deg f.$$

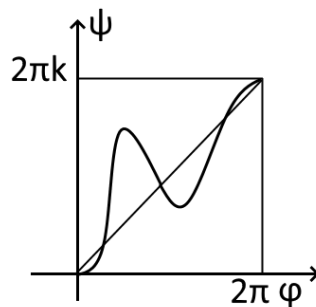


Рис. 7.2. Отображения φ и $k\varphi$

Пусть теперь есть отображения (рис. 7.2):

1. $\psi = \varphi$;
2. $\psi = k\varphi$.

Тогда они гомотопны:

$$\psi_s(\varphi) = s\psi(\varphi) + (1-s)k\varphi.$$

Итак, для S^1 получаем, что

$$\deg f = \deg g \Rightarrow f \sim g.$$

Теорема 7.2. (Хопфа) Для отображений

$$f, g : M^n \rightarrow S^n$$

из того, что

$$\deg f = \deg g,$$

следует, что

$$f \sim g.$$

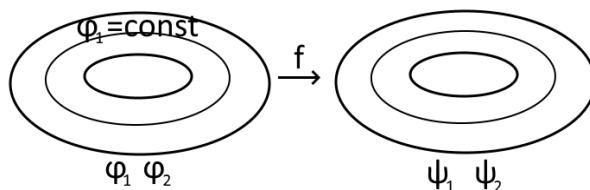


Рис. 7.3. Отображения f, g на торах T^2

Пример 7.2. Хотим построить отображения

$$f, g : T^2 \rightarrow T^2$$

где T^2 – тор (7.3), такие, что

$$\deg f = \deg g = 0,$$

но

$$f \not\sim g.$$

Воспользуемся тем, что если

$$f^{-1}(y) = \emptyset,$$

то

$$\deg f = 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} f(\varphi_1, \varphi_2) &= (\psi_{1,0}, \psi_{2,0}), \\ g(\varphi_1, \varphi_2) &= (\psi_{1,0}, \varphi_2). \end{aligned}$$

Если

$$g \sim f,$$

то цикл

$$\psi_1 = \text{const}$$

стягивается в точку на торе. Это невозможно, так как

$$\int_{\psi_1=\text{const}} d\psi_2 \neq 0$$

(ранее обсуждалось, что если путь гомотопен постоянному пути, то интеграл равен 0).

Пример 7.3. Напомним следующую теорему.

Теорема 7.3. (О ежсе) На S^{2n} не существует ненулевого (в каждой точке) векторного поля.

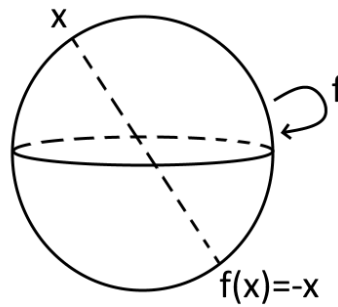


Рис. 7.4. Центральная симметрия на S^n

Теорема 7.3 следует из вычисления, которое позволяет по ненулевому в каждой точке векторному полю построить гомотопию между тождественным отображением и центральной симметрией.

Пусть f (рис. 7.4) – центральная симметрия. Элементу $x \in S^n$ она сопоставляет $f(x)$ – противоположный элемент¹². Найдем $\deg f$.

Отметим, что при замене ориентации на одном из многообразий $\deg f$, конечно, меняет знак. В данном случае

$$\deg f = \pm 1,$$

так как прообраз у каждого $f(x)$ всего 1. Убедимся, что для конкретных n это действительно так.

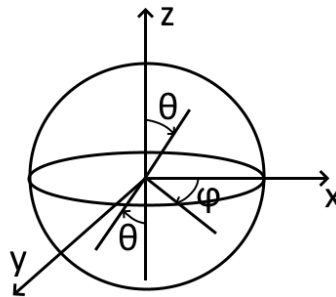


Рис. 7.5. Координаты точки при центральной симметрии на сфере

Пусть $n = 1$. Тогда

$$\varphi \mapsto \varphi + \pi.$$

При $n = 2$

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi + \pi, \pi - \theta)$$

(рис. 7.5). Здесь определитель матрицы Якоби

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 = \deg f.$$

Обсудим интерпретацию $\deg f$, которая не зависит от матрицы Якоби (в отличие от (62)). Хотим паре точек x_k, y (где $f(x_k) = y$) приписать знак $+1$ или -1 . Выберем в

¹²Принято обозначать его $-x$.

касательном пространстве $T_{x_k}M$ базис

$$e_1, \dots, e_n \quad (63)$$

(рис. 7.6 а)) и рассмотрим

$$d_{x_k}f(e_1), \dots, d_{x_k}f(e_n). \quad (64)$$

Это вектора в касательном пространстве T_yN . Если точка x_k – не критическая, (64) образуют базис в T_yN . Будем считать, что (63) согласован с ориентацией на M . Тогда значение $+1$ или -1 у $\deg f$ зависит от того, согласован ли базис (64) с ориентацией на N . Значение $+1$ соответствует случаю, когда базис согласован с ориентацией, а -1 – случаю, когда не согласован.



Рис. 7.6. Базисы в касательном пространстве

Вернемся к нашему случаю. Выберем на S^n два базиса (рис. 7.6 б)). Здесь

$$df(e_1) = -e_1, \dots, df(e_n) = -e_n.$$

Сравним ориентации этих базисов. Из линейной алгебры известно, как сравнивать ориентацию двух базисов в линейном пространстве (это знак определителя матрицы перехода). Базисы (e_i) и $(df(e_i))$ находятся в разных линейных пространствах. Воспользуемся понятием *переноса базиса вдоль пути*. В каждой точке кривой γ рассматривается касательное пространство $T_{\gamma(t)}S^n$ с векторами

$$e_1(t), \dots, e_n(t),$$

где $e_i(t)$ непрерывно зависят от t и в каждой точке линейно независимы (являются базисом).

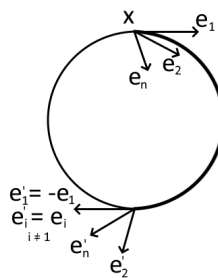


Рис. 7.7. Перенесенный базис на сфере

Итак, переносим e_i в точку $-x$ и уже после этого сравниваем ориентацию базисов. В случае сферы получим, что перенесенный базис

$$e'_1 = -e_1, \quad e'_2 = e_2, \dots, e'_n = e_n \quad (65)$$

(рис. 7.7). Сравнивая (65) с базисом в $T_x S^n$ (64), получим, что матрица перехода от

$$e'_1, \dots, e'_n$$

к

$$df(e_1), \dots, df(e_n)$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\deg f = (-1)^{n-1}.$$



Семинар 8. Степень отображения (продолжение)

Отображение плоскостей

Продолжим говорить про степень отображения $\deg f$. Напомним, речь идет об отображениях вида

$$f: X \rightarrow Y,$$

где X, Y – гладкие n -мерные замкнутые ориентированные многообразия.

Замечание 8.1. Все отображения вида

$$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

гомотопны. Гомотопия здесь имеет вид

$$tg(x) + (1-t)f(x) = F(t, x), \quad x \in X, \quad t \in [0, 1].$$

Замечание 8.2. Пусть

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow X, \tag{66}$$

где X связно. Определим семейство отображений

$$F(t, y) = f(ty), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, 1].$$

При $t = 0$ получаем точку:

$$F(0, y) = f(0).$$

Следовательно, любое отображение вида (66) гомотопно постоянному отображению.

Задачи

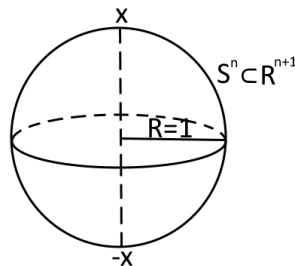


Рис. 8.1. Центральная симметрия на сфере

Задача 8.1. Пусть отображение

$$f: S^n \rightarrow S^n$$

не имеет неподвижных точек, то есть $\forall x \in S^n$

$$f(x) \neq x.$$

Доказать, что тогда $f \sim s$, где s – центральная симметрия (рис. 8.1):

$$s(x) = -x.$$

Доказательство. Пусть радиус S^n равен 1. Рассмотрим семейство

$$F(t, x) = \frac{(1-t)f(x) + ts(x)}{\|(1-t)f(x) + ts(x)\|}, \quad t \in [0, 1]. \quad (67)$$

Заметим, что

$$F(0, x) = f(x), \quad F(1, x) = s(x).$$

Убедимся, что (67) непрерывно по t и по x , а значит, является гомотопией. Единственная проблема в (67) – это точки, в которых знаменатель может обращаться в 0. Это означает, что $f(x)$ и $s(x)$ – линейно зависимые вектора. Такое возможно, когда

$$f(x) = s(x) \text{ или } f(x) = -s(x).$$

По условию $f(x) \neq x$, откуда $f(x) \neq -s(x)$. Если $f(x_0) = s(x_0)$, то

$$F(t, x_0) = f(x_0).$$

Итак, (67) корректно задает гомотопию.

Отметим, что

$$\deg f = (-1)^{n+1}.$$

□

Аналогично доказывается следующее.

Задача 8.2. Если y отображения

$$f: S^n \rightarrow S^n$$

нет таких точек x , что

$$f(x) = -x,$$

то

$$f \sim id,$$

где

$$id: S^n \rightarrow S^n$$

– тождественное отображение. В частности,

$$\deg f = 1.$$

Задача 8.3. Доказать теорему о еж: на четномерной сфере не существует векторного поля без нулей, то есть такого, что

$$\bar{v}(x) \neq 0 \quad \forall x$$

(рис. 8.2).

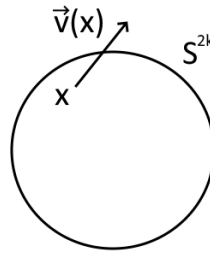


Рис. 8.2. Ненулевое векторное поле на S^{2n}

Доказательство. Зададим

$$\begin{aligned} f : S^{2k} &\rightarrow S^{2k}, \\ f : x &\mapsto \frac{\bar{v}(x)}{\|\bar{v}(x)\|}. \end{aligned} \quad (68)$$

Заметим, что f не имеет неподвижных точек. В силу задачи 8.1

$$f \sim s,$$

откуда

$$\deg f = \deg s = -1.$$

Докажем теорему о еге от противного. Пусть

$$\bar{v}(x) \neq 0 \quad \forall x.$$

Тогда

$$f(x) \neq x \text{ и } f(x) \neq -x \quad \forall x.$$

Получается, что

$$f \sim s \text{ и } f \sim \text{id}.$$

Однако это не так, так как

$$\deg s = -1, \quad \deg \text{id} = 1.$$

□

Задача 8.4. Пусть

$$f : S^n \rightarrow S^n$$

таково, что

$$f(x) \neq x \quad \forall x \in S^n.$$

Показать, что если n чётно, то $\exists x$ такая, что

$$f(x) = x.$$

Решение. Заметим, что при нечетных n утверждение задачи неверно. Примером для $n = 1$ будет

$$f: \varphi \rightarrow \varphi + \varphi_0.$$

Пусть теперь n четно. Пусть есть отображение f такое, что

$$f(x) \neq x \quad \forall x \in S^n.$$

Тогда

$$f \sim \text{id}.$$

Предположим, что у f нет неподвижных точек. Тогда

$$f \sim s.$$

Получаем, что

$$s \sim \text{id},$$

но для S^{2k} это не так.

Задача 8.5. Пусть

$$f: S^n \rightarrow S^n,$$

$\deg f$ четна.

Показать, что тогда $\exists$ пара противоположных точек, которые при отображении f переходят в пару противоположных точек, то есть $\exists x \in S^n$ такой, что

$$f(-x) = -f(x).$$

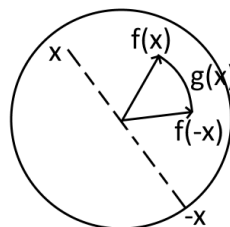


Рис. 8.3. Отображение g

Решение. (От противного) Пусть для $\forall x \in S^n$

$$f(-x) \neq -f(x).$$

Тогда $\exists$ отображение

$$g: S^n \rightarrow S^n$$

такое, что

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{\|f(x) + f(-x)\|}$$

(рис. 8.3). Заметим, что

$$g(x) = g(-x).$$

У g в точке x число прообразов четно, то есть $\deg g$ – четная. С другой стороны, по условию $|tf(x) + (1-t)f(-x)| = F(t, x)$, $t \in [0, 1/2]$.

Задача 8.6. Требуется доказать следующее. Сформулируем утверждение сначала неформально: на поверхности Земли всегда найдутся диаметрально противоположные точки, в которых давление и температура одинаковы.

Более формально утверждение выглядит так. Пусть заданы два отображения

$$f, g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Требуется показать, что $\exists x \in S^2$ такое, что

$$f(x) = f(-x), \quad g(x) = g(-x).$$

Доказательство. Объединим для удобства отображения f, g следующим образом:

$$\Phi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$x \xrightarrow{\Phi} (f(x), g(x)).$$

(От противного) Пусть $\forall x \in S^2$

$$\Phi(x) \neq \Phi(-x).$$

Тогда $\exists$ отображение

$$h : S^2 \rightarrow S^1,$$

сопоставляющее

$$x \xrightarrow{h} \frac{\vec{\Phi(x)}\vec{\Phi(-x)}}{\left\|\vec{\Phi(x)}\vec{\Phi(-x)}\right\|},$$

где

$$h(x) = -h(-x). \quad (69)$$

Покажем, что такого отображения h не существует. Ограничим h на S_0^1 – экватор на S^2 (рис. 8.4):

$$\hat{h} = h|_{S_0^1}.$$

Здесь, очевидно, сохраняется свойство (69)

$$\hat{h}(-x) = -\hat{h}(x).$$

В силу этого условия получаем, что $\deg \hat{h}$ нечетна. Покажем, что это не так. Рассмотрим семейство окружностей S_ε^1 , стягивающихся к полюсу N сферы S^2 , но с минимальным радиусом ε_0 . Точка N отображается в $h(N)$ на S^1 . Тогда в некоторую окрестность $h(N)$ полностью отображается некоторая окрестность N . Для «маленьких» окружностей S_ε^1 ограничение h на них будет иметь точки с пустым прообразом, то есть $\deg = 0$. Получаем противоречие. $\square$

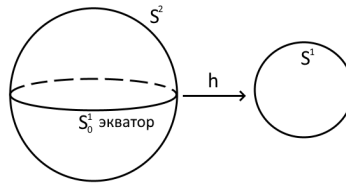


Рис. 8.4. Экватор S^1_0 на S^2

Индекс особой точки векторного поля

Напомним, *особой* называется точка x , в которой поле v равно 0. Будем рассматривать изолированную особую точку x_0 , то есть точку, в окрестности которой у каждой точки x задан вектор $v(x)$ (рис. 8.5).

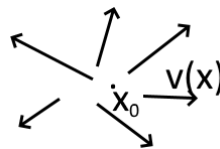


Рис. 8.5. Изолированная особая точка x_0

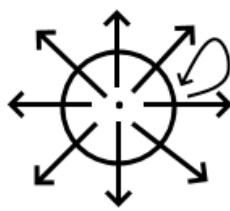
Рассмотрим малую окружность S^1 (лежащую целиком в окрестности x_0 , не содержащей других нулей векторного поля). Рассмотрим отображение

$$f : S^1 \rightarrow S^1,$$

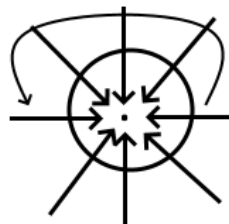
$$f : x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}.$$

Индекс особой точки x_0 векторного поля определяется как

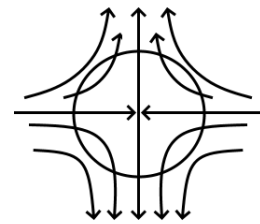
$$\deg f = \text{ind}_{x_0} v.$$



a)



b)



c)

Рис. 8.6. Устойчивые особенности: a) источник; b) сток; c) седло

Пример 8.1. (На $\mathbb{R}^2$)

1. Особенность, называемая *источником*:

$$\bar{v}(x, y) = (x, y)$$

(рис. 8.6, a)). Здесь

$$\text{ind} = 1.$$

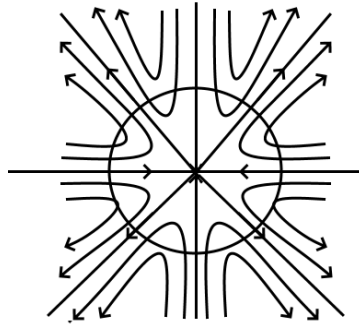


Рис. 8.7. Особенность (пример 4)

2. Сток

$$\bar{v}(x, y) = (-x, -y)$$

(рис. 8.6, b)). Здесь

$$\text{ind} = 1.$$

3. Седло

$$\bar{v}(x, y) = (-x, y)$$

(рис. 8.6, c)). Здесь

$$\text{ind} = -1.$$

4. Выше рассмотрели три примера устойчивых особенностей. Рассмотрим теперь особенность (рис. 8.7). Идем по окружности и смотрим, сколько сделает оборотов вектор скорости:

$$\text{ind} = -3.$$

Задача 8.7. Пусть $\bar{v}_A$ – векторное поле в $\mathbb{R}^n$, заданное формулой

$$v_A(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где A – матрица размера $n \times n$,

$$\det A \neq 0.$$

В таком случае, очевидно, особая точка – это 0. Показать, что

$$\text{ind} = \text{sgn} \det A.$$

Решение. Заметим, что при гомотопии векторного поля такой, что особая точка остается изолированной, ее индекс не меняется.

Рассмотрим пространство всех $n \times n$ -матриц. Будем менять матрицу A некоторым образом. Тогда

$$v_{A(t)} = A(t)x.$$

Если мы деформируем A в области невырожденных матриц, индекс особой точки не меняется.

Утверждается, что множество матриц с целочисленным определителем связно. В частности, если $\det A > 0$, то

$$\operatorname{ind}_0 v_A = \operatorname{ind}_0 v_E = 1.$$

На множестве матриц с $\det < 0$ выберем

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

Можно показать аналогичное утверждение: множество всех матриц с отрицательным определителем связно. Получим, что если $\det A < 0$, то

$$\operatorname{ind}_0 v_A = \operatorname{ind}_0 v_M = -1.$$

Семинар 9. Символы Кристоффеля

Символы Кристоффеля

На семинаре речь пойдет о ковариантном дифференцировании и символах Кристоффеля. Необходимость введения ковариантного дифференцирования была подробно рассмотрена на лекциях.

Пусть задано $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ – тензорное поле типа (p, q) на M . Пусть

$$S_{\alpha j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (70)$$

– так определим S в каждой криволинейной системе координат. Обсудим, будет ли S тензором.

Рассмотрим следующий простой случай. Для простоты будем рассматривать T типа $(1, 0)$. Формулы для T в системах координат $(x^{i'})$ и (x^i) связаны следующим образом:

$$T^{i'} = T^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Теперь,

$$S_\alpha^i = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^i,$$

$$S_{\alpha'}^{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} T^{i'}.$$

Выясним, выполняется ли тензорный закон для S . Вычислим

$$\begin{aligned} S_{\alpha'}^{i'} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(T^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}}_{=1} \frac{\partial T^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + T^i \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^i}. \end{aligned} \quad (71)$$

Второе слагаемое в (71) обращается в 0 в двух случаях: когда T^i равно 0 и когда замена координат линейна, то есть вторая смешанная производная равна 0.

Итак, в общем случае S_α^i не является тензором, то есть попытка определить тензорное дифференцирование как (70) оказывается неудачной.

Задача определения тензорного дифференцирования решается с помощью ковариантного дифференцирования. Ковариантная производная вдоль координаты α имеет вид

$$\nabla_\alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \underbrace{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot \Gamma_{\dots}^{\dots} + \dots}_{p+q \text{ слагаемых}}$$

Здесь Γ – символ Кристоффеля.

Обсудим формулу, по которой меняются символы Кристоффеля при замене координат.

Напомним, на лекциях было дано следующее определение. *Задать связность (ковариантного дифференцирования тензорных полей)* – это задать в каждой криволинейной системе координат (локальной) (в каждой карте многообразия) набор функций Γ_{ij}^k , причем при переходе от одной системы координат к другой верно

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}. \quad (72)$$

Заметим, что второе слагаемое в (72) от Γ не зависит.

Задачи

Задача 9.1. Пусть на M заданы 2 набора символов Кристоффеля: Γ и γ . Проверить, что

$$\Gamma_{ij}^k - \gamma_{ij}^k$$

– тензор типа $(1, 2)$.

Решение. Задача решается с использованием формулы (72).

Задача 9.2. Любой ли тензор типа $(1, 2)$ можно получить так, как показано в задаче 9.1?

Решение. Пусть T – тензорное поле типа $(1, 2)$ (то, которое хотим получить). Пусть γ_{ij}^k – какой-то набор символов Кристоффеля.

Определим

$$\Gamma_{ij}^k = \gamma_{ij}^k + T_{ij}^k.$$

Отметим, что Γ_{ij}^k является символом Кристоффеля. Ясно, что

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \gamma_{ij}^k.$$

Далее на семинарах будет показано, почему γ_{ij}^k существует. Решение выше этот вопрос не учитывает. Существование показывается с помощью следующей теоремы.

Теорема 9.1. Пусть M – многообразие, g – риманова метрика. Существует единственное ковариантное дифференцирование (= набор символов Кристоффеля), которое удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$;
2. $\nabla_k g_{ij} = 0$.

Задача 9.3. Пусть Γ и γ – два набора символов Кристоффеля на M ,

$$\alpha + \beta \equiv 1 \text{ на } M,$$

$\alpha, \beta \in C^\infty(M)$. Требуется показать, что

$$\alpha\Gamma + \beta\gamma$$

– тоже набор символов Кристоффеля.

Символы Кристоффеля

Обсудим еще один контекст, в котором в нашем курсе возникали символы Кристоффеля.

Пусть дано $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданное в параметрическом виде:

$$r(u^1, u^2) : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

На поверхности в $\mathbb{R}^3$ возникают координатные линии, а в каждой точке есть касательная плоскость. Вектора скорости координатных линий образуют базис на касательной плоскости:

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}, \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}.$$

Кроме того, на касательной плоскости в рассматриваемой точке возьмем вектор нормали n .

Таким образом, в каждой точке поверхности в $\mathbb{R}^3$ определен базис

$$r_1, r_2, n.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial u^i} r_j = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + b_{ij} n,$$

где b_{ij} – II квадратичная форма, а Γ_{ij}^k , $k = 1, 2$ – символы Кристоффеля симметричной связности, согласованные с метрикой, возникающей в рамках теоремы 9.1.

Семинар 10. Вычисление символов Кристоффеля

Теорема существования символов Кристоффеля

Речь на семинаре пойдет о вычислении символов Кристоффеля. К изучению рекомендуется пособие А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьев, А.Т. Фоменко «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии». В новом издании задачи, которые требуется рассмотреть, – это номера 10.12 – 10.21.

Вернемся к теореме, упоминавшейся на прошлом семинаре.

Теорема 9.1. Пусть M – многообразие, g – риманова метрика. Существует единственная связность (= ковариантное дифференцирование, = набор символов Кристоффеля) Γ_{ij}^k ,

1. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ (симметричность);
2. $\nabla_k g_{ij} = 0$ (согласованность с метрикой).

Здесь

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (73)$$

где

$$(g^{kl}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Вычисление символов Кристоффеля

Вычислим символы Кристоффеля для нескольких примеров.

Пример 10.1. Обсудим случай плоскости с евклидовой метрикой. Здесь

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в декартовой системе координат. Здесь

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

По формуле (73) получаем

$$\Gamma_{ij}^k \equiv 0.$$

Вычислим символы Кристоффеля для той же самой евклидовой метрики в полярной системе координат. Здесь

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Для удобства будем считать, что

$$(r, \varphi) = (x^1, x^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}_{=0} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\partial r^2}{\partial r} \right) = -r, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2}{\partial r} \right) = \frac{1}{r},\end{aligned}$$

и, наконец,

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\cdot}{\partial x^2} + \frac{\cdot}{\partial x^2} - \frac{\cdot}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Итак, получили, что на плоскости с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad (74)$$

а остальные равны 0.

Пример 10.2. Рассмотрим случай сферических координат (θ, φ) . Здесь

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\underbrace{\frac{\cdot}{\partial x^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\cdot}{\partial x^2}}_{=0} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = -\sin \theta \cos \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = \operatorname{ctg} \theta,\end{aligned}$$

и, наконец,

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Итак, на сфере

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg} \theta, \quad (75)$$

а остальные символы равны 0.

Абсолютно аналогично вычисляются символы Кристоффеля для следующего случая.

Пример 10.3. Рассмотрим модель плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости $\{(x, y) \mid y > 0\}$, здесь

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Тогда

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y},$$

а остальные Γ равны 0. Здесь

$$(x^1, x^2) = (x, y).$$

Задача

Задача 10.1. (10.43 а) Показать, что

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Здесь

$$g = \det(g_{ij}).$$

Решение. Запишем (73) для $k = i$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2}g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{1}{2}g^{il} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \underbrace{\frac{1}{2}g^{il} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}}_{\frac{1}{2}g^{li} \frac{\partial g_{li}}{\partial x^i}} = \\ &= \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2}g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j},\end{aligned}$$

так как два последних слагаемых сокращаются, потому что

$$g^{il} = g^{li}.$$

Далее,

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{p,q} \frac{\partial \det(g_{ij})}{\partial g_{pq}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^j} = \sum_{p,q} A^{pq} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^j}.$$

Здесь A^{pq} – алгебраическое дополнение элемента g_{pq} ,

$$g^{ij} = \frac{1}{g} A^{ji} = \frac{1}{g} A^{ij}.$$

Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = g g^{pq} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^j}.$$



Семинар 11. Решение уравнения параллельного переноса на поверхности

Уравнения параллельного переноса в общем виде

Этот блок курса будет посвящен решению уравнения параллельного переноса на поверхности. Данной теме соответствуют задачи 10.22 – 10.31 и 10.33 – 10.35 из пособия А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьев, А.Т.Фоменко «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии».

Рассмотрим многообразие M и аффинную связность на нем, заданную символами Кристоффеля Γ_{ij}^k . Здесь Γ_{ij}^k будут строиться по римановой метрике (g_{ij}) на M .

Задача, которую мы собираемся решать, выглядит следующим образом. Пусть на M задана кривая

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

на $\gamma(t)$ задана точка, соответствующая значению $t = t_0$ и вектор $V_0 \in V_{\gamma(t_0)}M$ (рис. 11.1). Будем искать $V(t)$, где

$$V(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

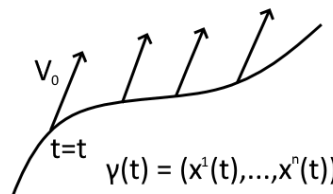


Рис. 11.1. Параллельный перенос вектора $V(0)$ вдоль γ

Требуется, чтобы было выполнено уравнение параллельного переноса:

$$\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} V = 0. \quad (76)$$

Мы будем использовать уравнение (76) в следующем виде:

$$\left\{ \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} V^j = 0, V^k(t_0) = V_0^k \right. \quad (77)$$

Здесь $k = 1 \dots n = \dim M$.

Уравнение параллельного переноса на плоскости с евклидовой метрикой

Возьмем сначала декартову систему координат. На прошлом семинаре обсуждали, что тогда

$$\Gamma_{ij}^k \equiv 0.$$

Поэтому (77) будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dV^k}{dt} + 0 \cdot \dots = 0 \\ V^k(t_0) = V_0^k \end{cases}$$

Решением такого уравнения будет

$$V^k = \text{const},$$

то есть

$$V^k(t) = V_0^k,$$

или, в инвариантной записи

$$V(t) = V_0.$$



Рис. 11.2. Параллельный перенос вдоль дуги AB

Решим теперь ту же самую задачу, но в полярных координатах. На плоскости с евклидовой метрикой в полярной системе координат

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

требуется решить уравнение параллельного переноса вдоль верхней дуги окружности из точки A в точку B (рис. 11.2, а)). Здесь координаты дуги имеют вид

$$(r, \varphi) = (x^1, x^2) = (2, t), \quad t \in [0, \pi].$$

Система (77) записывается как

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dt} + \Gamma_{22}^1 \frac{dx^2}{dt} V^2 = 0 \\ \frac{dV^2}{dt} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{dt} V^2 + \Gamma_{21}^2 \frac{dx^2}{dt} V^1 = 0 \end{cases}$$

С учетом (74) получаем

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dt} - 2V^2 = 0 \\ \frac{dV^2}{dt} + \frac{1}{2}V^1 = 0 \end{cases}$$

Решим это уравнение:

$$\frac{d^2 V^1}{dt^2} = 2 \frac{dV^2}{dt} = -V^1,$$

откуда

$$V^1 = a \cos(t + b), \tag{78}$$

$$V^2 = \frac{1}{2} \frac{dV^1}{dt} = -\frac{a}{2} \sin(t + b). \tag{79}$$

Решим дополнительную задачу. Требуется перенести вектор, показанный на рис. 11.2, b), из A в B . Вектор V_0 очевидно, имеет координаты

$$V_0 = (1, 0),$$

то есть

$$\begin{cases} V^1(0) = 1 \\ V^2(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда в (79), (78)

$$a = 1, \quad b = 0.$$

Получаем, что

$$\begin{cases} V^1(\pi) = 1 \cdot \cos \pi = -1 \\ V^2(\pi) = -\frac{1}{2} \sin \pi = 0. \end{cases}$$

Итак, получаем, что

$$V(\pi) = (-1, 0).$$

Так происходит, потому что базис касательных пространств вдоль кривой в полярных координатах ведет себя следующим образом (рис. 11.3). Иными словами,

$$V(\pi) = -\frac{\partial}{\partial r} = -\partial_1$$

в точке B , поэтому вектор направлен в ту же сторону, что и V_0 .

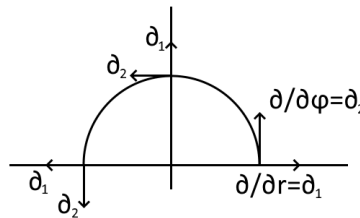


Рис. 11.3. Базис касательных пространств вдоль дуги в полярных координатах

Уравнение параллельного переноса на сфере

Требуется решить уравнение параллельного переноса (77) на сфере с метрикой

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

по параллели

$$\theta = \theta_0 = \text{const}$$

(11.4).

Кроме того, требуется найти угол между начальным и конечным векторами после переноса по всей параллели.

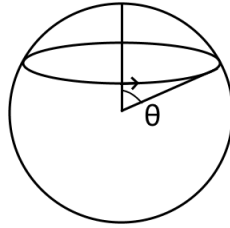


Рис. 11.4. Параллельный перенос на сфере по параллели $\theta = \theta_0$

Итак, по условию уравнение кривой задается как

$$(x^1, x^2) = (\theta, \varphi) = (\theta_0, t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (80)$$

Будем искать $V(t)$ – решение уравнения параллельного переноса вдоль (80) и, соответственно, угол между $V(0)$ и $V(2\pi)$.

Запишем уравнение переноса (77):

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dt} + \Gamma_{22}^1 \frac{dV^2}{dt} V^2 = 0 \\ \frac{dV^2}{dt} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{dt} V^2 + \Gamma_{21}^2 \frac{dV^2}{dt} V^1 = 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись (75), получим

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dt} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 V^2 = 0 \\ \frac{dV^2}{dt} + 0 + \operatorname{ctg} \theta_0 V^1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{d^2 V^1}{dt^2} = \sin \theta_0 \cos \theta_0 \frac{dV^2}{dt} = -\sin \theta_0 \cos \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0 V^1,$$

то есть

$$\frac{d^2 V^1}{dt^2} = -\cos^2 \theta_0 V^1.$$

Решая, получим

$$V^1(t) = a \cos(t \cos \theta_0 + b).$$

Аналогично,

$$V^2(t) = \frac{1}{\sin \theta_0 \cos \theta_0} (-a \cos \theta_0 \sin(t \cos \theta_0 + b)).$$

Итого, получили, что

$$\begin{cases} V^1(t) = a \cos(t \cos \theta_0 + b) \\ V^2(t) = -\frac{a}{\sin \theta_0} \sin(t \cos \theta_0 + b). \end{cases}$$

Осталось вычислить угол между $V(0)$ и $V(2\pi)$. Напомним, $\cos$ угла между векторами вычисляется как

$$\frac{\langle V(0), V(2\pi) \rangle}{\sqrt{\langle V(0), V(0) \rangle} \sqrt{\langle V(2\pi), V(2\pi) \rangle}},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Напомним, что метрика ds^2 в матричном виде имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Вычислим

$$\langle V(0), V(0) \rangle = (V^1(0))^2 + \sin^2 \theta_0 (V^2(0))^2 = a^2,$$

$$\langle V(2\pi), V(2\pi) \rangle = (V^1(2\pi))^2 + \sin^2 \theta_0 (V^2(2\pi))^2 = a^2,$$

$$\begin{aligned} \langle V(0), V(2\pi) \rangle &= a^2 \cos(b) \cos(2\pi \cos \theta_0 + b) + a^2 \sin b \cos(2\pi \cos \theta_0 + b) = \\ &= a^2 \cos(2\pi \cos \theta_0). \end{aligned}$$

Итак, получаем, что

$$\cos(\widehat{V(0), V(2\pi)}) = \cos(2\pi \cos \theta_0).$$



Семинар 12. Геодезические линии

Решение уравнений геодезических линий

Перейдем к обсуждению геодезических линий. Пусть дано многообразие M с метрикой g и набор символов Кристоффеля Γ_{ij}^k , которые строятся по g .

Запишем уравнение

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0. \quad (81)$$

Заметим, что если записать кривую γ в локальных координатах:

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

то (81) можно записать в виде

$$\left\{ \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1 \dots n. \right. \quad (82)$$

К этой системе можно добавить начальные условия:

$$\gamma(t_0) = P_0 \in M, \quad \gamma'(t_0) = V_0 \in T_{P_0} M.$$

Заметим, что уравнения (82) нелинейны и в общем случае решать их тяжело. Далее убедимся, что в простейших случаях для них можно найти решение, но интегрировать их напрямую даже в этом случае затруднительно.

Отметим следующие свойства.

1. $\|d\gamma/dt\| = \text{const}$, параметр t пропорционален натуральному;
2. Если $\gamma(t)$ – геодезическая, то $\gamma(t+c)$ – тоже геодезическая;
3. Если $\gamma(t)$ – геодезическая, то $\gamma(ct)$ – тоже геодезическая;
4. Через каждую точку в каждом направлении проходит единственная геодезическая. Имеется в виду следующее. Пусть через точку P проходит два вектора V и W ,

$$W = \lambda V.$$

Пусть геодезические линии таковы, что

$$\gamma_1 : \gamma_1(0) = P, \quad \gamma_1'(0) = V,$$

$$\gamma_2 : \gamma_2(0) = P, \quad \gamma_2'(0) = W.$$

Тогда

$$\gamma_1(\lambda t) = \gamma_2(t).$$

Примеры

Пример 12.1. Пусть задана плоскость с евклидовой метрикой. Напомним, на предыдущем семинаре, обсуждая параллельный перенос, мы столкнулись с тем, что вычисления могут сильно отличаться для разных координат.

Пусть заданы декартовы координаты:

$$(x, y) = (x^1, x^2).$$

Тогда, напомним,

$$\Gamma_{ij}^k = 0,$$

и система (82) имеет вид

$$\left\{ \frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0, \quad k = 1, 2 \right.$$

Тогда

$$x^k = a^k t + b^k$$

– прямые. Заметим, например, что

$$x = t^3, \quad y = t^3$$

– параметризация кривой $x = y$, но уравнению геодезической не удовлетворяет.

Пример 12.2. Обсудим теперь, как выглядят геодезические линии на сфере со стандартной метрикой.

В этом случае нет необходимости интегрировать уравнения геодезических (82).

Воспользуемся двумя фактами. Чуть позднее (следующий пример) эти же утверждения будут использованы для случая плоскости Лобачевского.

Лемма 12.1. Пусть

$$f: M \rightarrow N$$

– изометрия, а $\gamma(t)$ – геодезическая на M . Тогда $f(\gamma(t))$ – геодезическая на N .

Заметим, что лемму 12.1 удобно применять в случае $M = N$. Так, например, множество изометрий на сфере велико, так как сферу можно по-разному поворачивать.

Лемма 12.2. Пусть

$$\tau: M \rightarrow M$$

– изометрия, у которой множество неподвижных точек – гладкая регулярная кривая γ . Тогда γ – геодезическая.

Доказательство леммы 12.1 основано на том факте, что символы Кристоффеля при изометрии сохраняются.

Обсудим идею доказательства леммы 12.2. Пусть $P \in \gamma$, где γ – множество неподвижных точек изометрии из условия, V касается γ . Рассмотрим геодезическую γ_1 с начальными условиями

$$\gamma_1(0) = P, \quad \gamma_1'(0) = V.$$

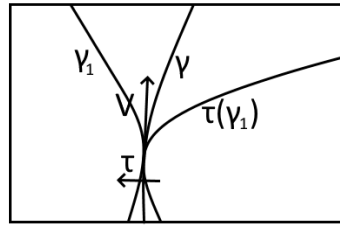


Рис. 12.1. Иллюстрация к доказательству леммы 12.2

Утверждается, что γ_1 совпадает с γ . Если это не так, то $\tau(\gamma_1(t))$ – другая геодезическая с теми же начальными условиями (рис. 12.1). Получаем противоречие, так как в этом случае

$$\gamma_1(t) = \tau(\gamma_1(t)).$$

Вернемся к обсуждению геодезических на сфере. Утверждается, что в случае сферы геодезические = это дуги больших окружностей (= сечения плоскостями, проходящими через центр).

Убедимся в этом.

⇐ Рассмотрим сечение сферы плоскостью α , проходящий через центр сферы,

$$\alpha \cap S^2 = \gamma$$

(рис. 12.2). Пусть τ – отражение в плоскость α . По лемме 12.2 γ является геодезической.

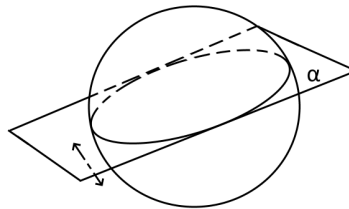


Рис. 12.2. Сечение сферы плоскостью α

⇒ Возьмем

$$P \in S^2, \quad V \in T_P S^2.$$

Хотим найти γ – геодезическую:

$$\gamma(0) = P, \quad \gamma'(0) = V. \quad (83)$$

Заметим, что центр сферы O , P и V определяют плоскость α , в которой они лежат (рис. 12.3). По предыдущему пункту сечение сферы плоскостью α – геодезическая, при подходящей параметризации она удовлетворяет условию (83).

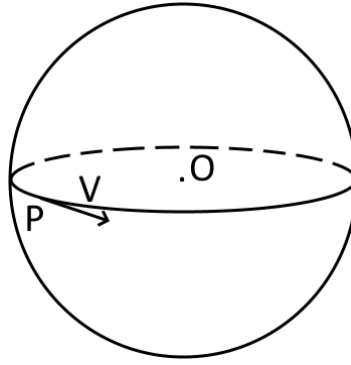


Рис. 12.3. Плоскость задаваемая точками P , O и вектором V

Семинар 13. Геодезические линии (продолжение)

Геодезические линии на плоскости Лобачевского

Обсудим, как выглядят геодезические на плоскости Лобачевского.

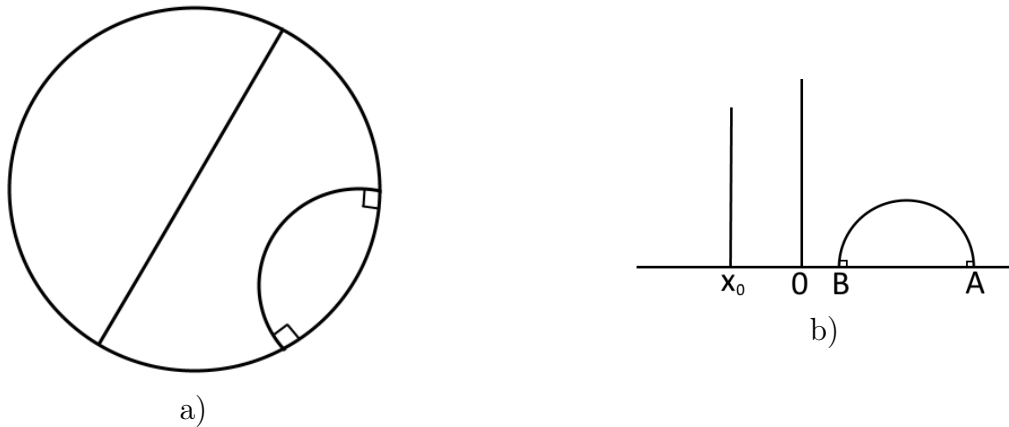


Рис. 13.1. Модели плоскости Лобачевского: а) на круге; б) на верхней полуплоскости

Будем рассматривать две модели плоскости Лобачевского.

1. Первая модель – модель на круге, здесь геодезическими являются диаметры или дуги, перпендикулярные абсолюту (рис. 13.1, а)).
2. Вторая модель – модель на верхней полуплоскости $\{y > 0\}$ с метрикой

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \quad (84)$$

Символы Кристоффеля в такой метрике имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Здесь геодезическими являются лучи и дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту (рис. 13.1, b)).

Будем рассматривать вторую модель. Модель на круге можно получить из нее подходящим дробно-линейным преобразованием.

Упражнение. Проверить, что $x = x_0$ – геодезическая плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости.

Решение. Обсудим сначала неправильное решение, которое не приведет нас к нужному результату. Рассмотрим параметризацию

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = t. \quad (85)$$

Обозначим

$$(x, y) = (x^1, x^2).$$

Запишем уравнения геодезических:

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} + \Gamma_{12}^1 \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{21}^1 \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} = 0, \quad (86)$$

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 \neq 0, \quad (87)$$

так как первые два слагаемых = 0, а

$$\Gamma_{22}^2 \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{t} 1^2 \neq 0.$$

Кажется, что линии, заданные параметризацией (85), не являются геодезическими. Однако это не так. Дело в том, что параметризация (85) не сохраняет постоянным вектор скорости $(0, 1)$ в метрике (84).

Итак, нужно задать параметризацию

$$x(t) = x_0, \quad y = f(t),$$

где $f(t)$ – некоторая функция такая, что линия, заданная такой параметризацией, является геодезической, то есть вектор скорости

$$(0, f')$$

является постоянным в метрике (84).

Уравнение (86) в новой параметризации по-прежнему равно 0. Уравнение (87) принимает вид

$$f''(t) - \frac{1}{f} (f')^2 = 0. \quad (88)$$

Его решение остается в качестве упражнения.

Пойдем другим путем. Найдем $f(t)$ из геометрических соображений. Длина вектора $(0, f')$ в точке (x_0, f) вычисляется с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} \end{pmatrix}$$

Получаем, что

$$\frac{f'}{f} = \text{const},$$

откуда

$$f(t) = e^{Ct}.$$

Можно подставить это решение в (88) и убедиться, что противоречия нет.

Итак, нужная параметризация имеет вид

$$(x_0, e^{Ct}).$$

Решим, наконец, эту же задачу без использования уравнений. Рассмотрим полупрямую

$$x = 0, \quad y > 0. \quad (89)$$

Пусть

$$\tau : (x, y) \mapsto (-x, y)$$

– симметрия относительно луча (89). Эта изометрия сохраняет метрику (84). Заметим, что неподвижными точками τ является луч (89). Поэтому такой луч – геодезическая (см. леммы 12.1 и 12.2). Остается, однако, подобрать правильную параметризацию.

Осталось найти остальные геодезические линии. Для вертикально направленных касательных векторов, очевидно, это лучи вида $x = x_0$. Обсудим, что будет в случае направленных в сторону векторов.

Известно, что

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (90)$$

– изометрия в модели Лобачевского на верхней полуплоскости. Утверждается, что вертикальный луч $x = 0$ с помощью преобразования вида (90) можно перевести в полуокружность (13.1, b)). Запишем

$$z \mapsto \frac{z - A}{z - B} = w, \quad -B + A > 0. \quad (91)$$

Тогда

$$B \mapsto \infty, \quad A \mapsto 0.$$

Заметим, однако, что преобразование (91) переводит полуокружность в луч. Обратное (искомое) преобразование имеет вид

$$z = \frac{Bw - A}{w - 1}.$$

Здесь

$$0 \mapsto A, \quad \infty \mapsto B.$$

Задача

Итак, геодезические для плоскости Лобачевского (как ранее и для сферы) мы нашли без использования уравнений (82). Обсудим идею¹³ решения задачи, где используются уравнения геодезических.

Предположим, что метрический тензор на поверхности имеет вид

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v)) (du^2 + dv^2). \quad (92)$$

Заметим, что метрика (92) является диагональной, и, кроме того, зависимость от переменных расщеплена.

В этом случае можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 13.1. *Линия*

$$(u(s), v(s))$$

является геодезической $\iff$

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u) + a}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{\psi(v) - a}}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (93)$$

Доказательство. (Идея доказательства) Заметим, что (93) является уравнением первого порядка. Выразим из этого равенства a :

$$a = \frac{u'_t \psi(v) - v'_t \varphi(u)}{(u'_t)^2 + (v'_t)^2}$$

– 1-й интеграл уравнений геодезических.

1. Требуется найти Γ_{ij}^k для метрики (92).
2. Затем явно выписать уравнения геодезических.
3. Проверить, что числитель $d(93)/dt$ равен 0 в силу пункта 2.

□

Пусть теперь $M^2 \subset \mathbb{R}^3$.

γ – геодезическая на M $\iff$

$$\text{pr}_{T_{\gamma(t)}}^\perp \gamma'' \equiv 0 \quad (94)$$

(здесь γ'' – трехмерный вектор).

Рассмотрим случай сферы (рис. 13.2). Здесь

$$\nabla_{\gamma'} \gamma'' = \text{pr}_{T_{\gamma(t)}}^\perp \gamma'',$$

$$\nabla_{\gamma'} T = \text{pr}_{T_{\gamma(t)}}^\perp \frac{dT}{dt}.$$

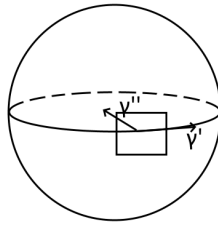


Рис. 13.2. Случай сферы

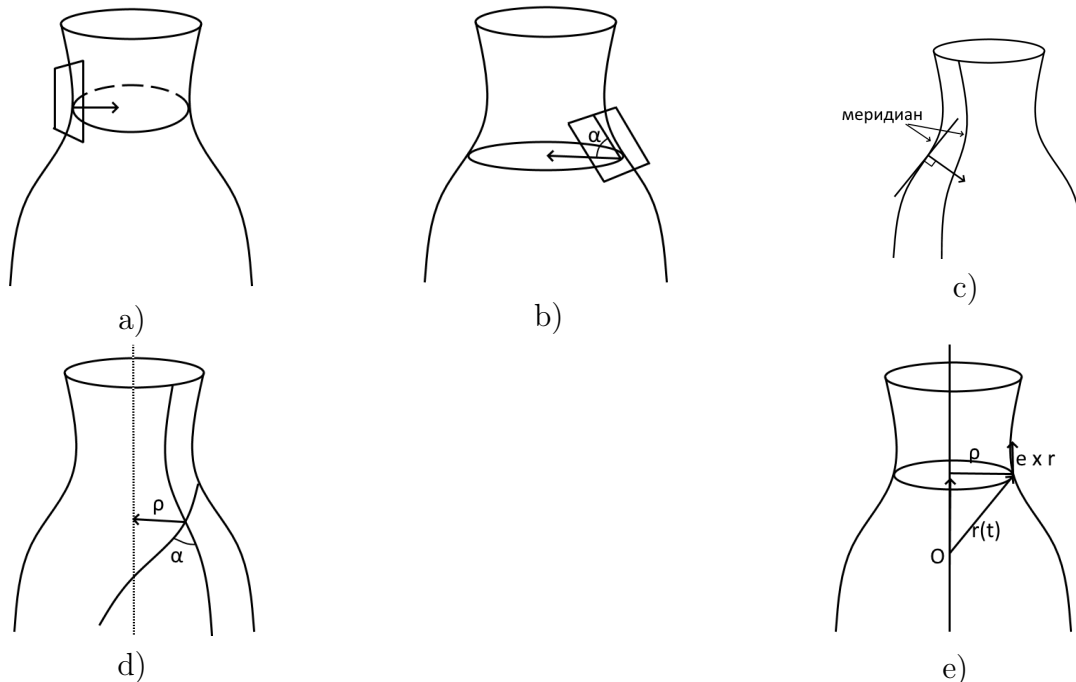


Рис. 13.3. Геодезические поверхности вращения

Проектирование. Теорема Клеро

Рассмотрим поверхность вращения (13.3, a)):

$$\begin{cases} z = f(z) \cos \varphi \\ y = f(z) \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (95)$$

Обсудим, какие здесь геодезические. Заметим, что самые широкие и самые узкие места поверхности (95) соответствуют точкам z таким, что

$$f'(z) = 0.$$

Касательные плоскости к точкам вдоль таких кривых направлены вертикально, поэтому $\gamma''(t)$ перпендикулярен им и в силу (94) такие кривые являются геодезическими.

¹³Из-за громоздких вычислений полное решение не приводится.

Для остальных линий, то есть

$$f'(z) \neq 0,$$

очевидно, условие (94) не выполняется, как угол между касательной плоскостью и γ'' не равен $\pi/2$ (рис. 13.3, b)), поэтому геодезическими они не являются.

Рассмотрим, наконец, меридианы. Как видно из (рис. 13.3, c)), касательная плоскость перпендикулярна вектору ускорения, а значит, меридианы являются геодезическими.

Теорема 13.2. (Клеро) Произведение расстояния до оси вращения на синус угла с меридианом на геодезической линии равно const (рис. 13.3, d)).

Доказательство. Рассмотрим единичный вектор на оси вращения:

$$\|e\| = 1$$

и $r(t)$ – радиус-вектор линии на поверхности (геодезической) (рис. 13.3, e)).

Возьмем векторное произведение $e \times r$. Здесь

$$\|e \times r\| = \rho,$$

$e \times r$ касается параллели. В этой же касательной плоскости лежит r' вектор скорости геодезической,

$$\|r'\| = \text{const}.$$

Рассмотрим смешанное произведение

$$(e, r, r') = \langle e \times r, r' \rangle = \|e \times r\| \|r'\| \cos(\pi/2 - \alpha) = \rho \sin \alpha \underbrace{\|r'\|}_{\text{const}}.$$

Отсюда

$$\rho \sin \alpha = \text{const} \iff (e, r, r') = \text{const}.$$

Проверим, что смешанное произведение равно константе (тогда производная от него равна 0):

$$\frac{d}{dt}(e, r, r') = \underbrace{(e, r', r')}_{=0} + (e, r, r'') = \langle e \times r, r'' \rangle = 0,$$

так как $e \times r \in T$ – касательной плоскости, а $r'' \perp T$. □

С помощью такого проектирования можно решить серию задач. Рассмотрим одну из них (другие можно найти в сборнике).

Задача 13.1. Пусть дано $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть материальная точка $\in M$ движется только под действием нормальной реакции опоры.

Показать, что траектория γ движения материальной точки является геодезической.

Решение. Заметим, что длина вектора скорости в таком случае будет сохраняться (так как сила реакции опоры действует перпендикулярно вектору скорости).

Здесь в силу второго закона Ньютона

$$\gamma'' = a = \frac{F}{m} \perp T_\gamma.$$

Тогда

$$\text{pr}^\perp \gamma'' \equiv 0,$$

откуда получаем, что γ – геодезическая.

С проектированием связано несколько задач на параллельный перенос. Обсудим одну из них, которую мы уже решали ранее.

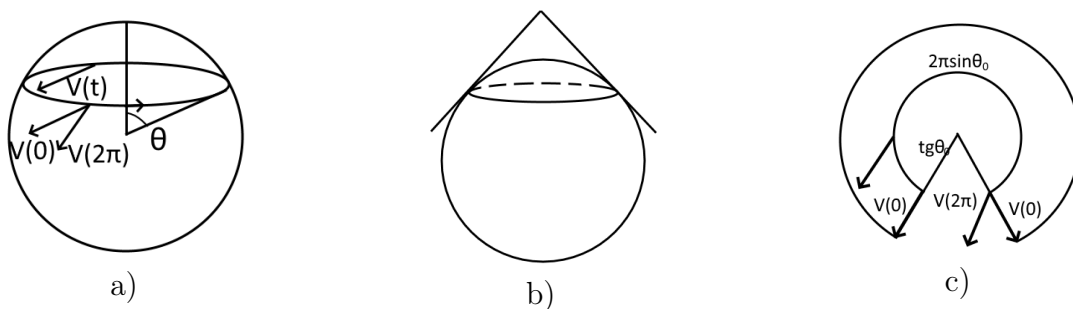


Рис. 13.4. Параллельный перенос вдоль параллели сферы

Задача 13.2. На сфере (будем считать радиус = 1) выберем параллель, отвечающую углу θ_0 (рис. 13.4, а)). Найти угол между $V(0)$ и $V(2\pi)$.

Решение. Рассмотрим конус, который касается сферы по параллели $\theta = \theta_0$ (рис. 13.4, б)).

Покажем, что параллельный перенос по сфере вдоль γ и по конусу вдоль γ дают один результат. Так происходит, потому что касательные поверхности вдоль γ к сфере и к конусу совпадают,

$$\text{pr}_T^\perp \frac{dV}{dt} \equiv 0.$$

Поэтому вместо задачи на сфере мы можем решать задачу на конусе. Возьмем конус, разрежем по одной из параллелей и развернем на плоскость/ Геодезическая в таком случае разворачивается в дугу (рис. 13.4, с)). Длина такой дуги равна $2\pi \sin \theta_0$, а ее радиус = $\text{tg } \theta_0$. Задача параллельного переноса вектора сводится к параллельному переносу на плоскости. Так как мы разрезали конус, получаем следующую картину (рис. 13.4, с)). Отсюда угол равен

$$\frac{2\pi \sin \theta_0}{\text{tg } \theta_0} = 2\pi \cos \theta_0.$$

Параллельный перенос геодезической линии

Обсудим в завершение семинара параллельный перенос геодезических, который позволяет решать задачи параллельного переноса векторов вдоль геодезических линий.

Рассмотриваем параллельный перенос в симметрической связности некоторой метрики. На лекциях обсуждалась следующая теорема.

Теорема 13.3. Пусть $V(t)$ и $W(t)$ – векторные поля, параллельные вдоль γ . Тогда

1. $\|V(t)\| = \text{const}$;
2. $\angle(V(t), W(t)) = \text{const}$;
3. $\langle V(t), W(t) \rangle = \text{const}$.

На геодезической есть векторное поле $d\gamma/dt$, параллельное вдоль γ . В силу теоремы 13.3 вдоль γ угол между $\gamma'(t)$ и $V(t)$ и длина $V(t)$ должна сохраняться (рис. 13.5).

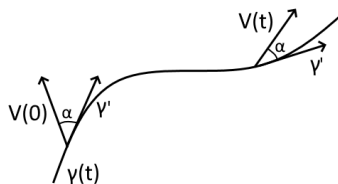


Рис. 13.5. Угол между $\gamma'(t)$ и $V(t)$

Рассмотрим примеры.

Пример 13.1. Пусть дана сфера, на меридиане γ в некоторой точке задан $V_0 \in T$.

Его параллельный перенос вдоль γ осуществляется так. Достаточно вычислить угол α между V_0 и γ и в интересующей нас точке $\in \gamma$ построить вектор, имеющий тот же угол с γ (рис. 13.6).

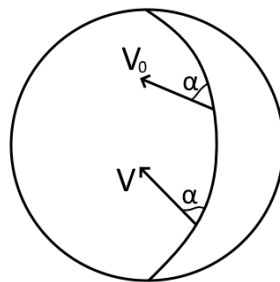


Рис. 13.6. Параллельный перенос вдоль меридиана сферы

Пример 13.2. Пусть дана плоскость Лобачевского на верхней полуплоскости и

$$\gamma : (x_0, t).$$

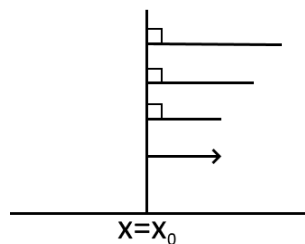


Рис. 13.7. Параллельный перенос вдоль геодезической $x = x_0$

Пусть дан вектор $V = (1, 0)$ в точке $(x_0, 1)$.

Параллельный его перенос вдоль γ осуществляется следующим образом (рис. 13.7), так как γ – геодезическая. Так как метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

в точке (x_0, t) вектор равен $(t, 0)$ (то есть его длина увеличивается в y раз).

Рекомендуется проработать задачи на тензор кривизны, номера 12: 1, 2, 4 – 9, 11, 14 (из сборника).



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У