



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

ИВАНОВ
АЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ЧУГРРЕВУ ГАЛИНУ НИКОЛАЕВНУ



Содержание

ЛЕКЦИЯ 1..... 5

Гладкая функция	5
Касательный вектор	5
Билинейная форма	6
Двойственное пространство	6
Обозначения в тензорном анализе	8
Тензорный закон	8
Тензорное поле	8
Инвариантное определение тензора	9
Лемма о полилинейных отображениях	10
Теорема об эквивалентности координатного и инвариантного представлений тензора)	10
Теорема о линейном пространстве	10

ЛЕКЦИЯ 2..... 13

Тензоры и поля (повторение)	13
Алгебраические операции над тензорами и тензорными полями	14
Линейные комбинации	14
Перестановки индексов одного типа	14
Свёртка	15
Тензорное произведение	16
Операции опускания и поднятия индексов	17
Симметрирование	18
Альтернирование	19
Обозначения	19

ЛЕКЦИЯ 3..... 21

Кососимметрические тензоры	22
Дифференциальные формы	22
Внешнее умножение	24
Формы и отображения	25
Внешнее дифференцирование	26
Корректность определений	26

ЛЕКЦИЯ 4..... 27

Внешние дифференциальные формы (повторение)	27
Внешнее дифференцирование	27
Свойства внешнего дифференцирования	28
Интегрирование форм	29
Общий случай определения интеграла. Разбиение единицы	30
Свойства интеграла	31
Формула Стокса	32
Теорема о задании многообразия уравнениями и неравенством	32

ЛЕКЦИЯ 5..... 35

МНОГООБРАЗИЕ С КРАЕМ (ПОВТОРЕНИЕ)	35
ТЕОРЕМА СТОКСА	35
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ	38
ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА	39
ФОРМУЛА ГРИНА	39
ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА	40
ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ	40
ФОРМУЛА СТОКСА	43
ГРУППЫ КОГОМОЛОГИЙ	44

ЛЕКЦИЯ 6..... 46

КОГОМОЛОГИИ ДЕ РАМА	46
ФАКТОР-ГРУППЫ	46
ПРИМЕРЫ	48
ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ	49
КОГОМОЛОГИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ	50
СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ	50
ГОМОТОПИИ И ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ	51
ТЕОРЕМА О КОГОМОЛОГИИ И ОТОБРАЖЕНИЯХ	52

ЛЕКЦИЯ 7..... 54

ТЕОРЕМА О КОГОМОЛОГИИ И ОТОБРАЖЕНИЯХ	54
ЛЕММА ПУАНКАРЕ	54
СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	54
СВОЙСТВА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ	56
КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ	56
АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ	59
ОПЕРАЦИЯ ТЕНЗОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ	60

ЛЕКЦИЯ 8..... 62

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ	61
КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ	61
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВДОЛЬ КРИВОЙ	62
СВОЙСТВА КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ	63
ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ	64
ЛЕММЫ	64
РИМАНОВА СВЯЗНОСТЬ	66
ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РИМАНОВОЙ СВЯЗНОСТИ	67
СВОЙСТВА РИМАНОВОЙ СВЯЗНОСТИ	68

ЛЕКЦИЯ 9..... 70

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС В АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ	70
ПРИМЕРЫ	73
ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЯХ	74
НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ	80
КОГДА СУЩЕСТВУЮТ ЕВКЛИДОВЫ КООРДИНАТЫ ДЛЯ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ	84
ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ	84
 ЛЕКЦИЯ 10	 84
ЕВКЛИДОВЫ КООРДИНАТЫ	85
КОММУТАТОР ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ	86
СВОЙСТВА КОММУТАТОРА	87
ОПЕРАТОР КРИВИЗНЫ	88
СИММЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ	90
СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА	90
 ЛЕКЦИЯ 11	 91
СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА	91
НЕЗАВИСИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА РИМАНА	92
СВЁРТКА ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ	92
ПОТОК РИЧЧИ	95
СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА	95
СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ	97
ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПРО ЕВКЛИДОВЫ КООРДИНАТЫ	99
 ЛЕКЦИЯ 12	 100
СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ	100
ТЕОРЕМА О НЕЗАВИСИМОСТИ СТЕПЕНИ ОТОБРАЖЕНИЯ ОТ ВЫБОРА РЕГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ЕЕ ПОСТОЯНСТВЕ ПРИ ГОМОТОПИИ	101
ЛЕММЫ	102
ТЕОРЕМА О «ЕЖЕ»	106
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ	108
ГОМОТОПИЯ	110
 ЛЕКЦИЯ 13	 112
СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ	112
СТЕПЕНЬ И ИНТЕГРАЛ	112
ФОРМУЛА ГАУССА-БОННЕ	114
ГАУССОВО ОТОБРАЖЕНИЕ	115
ГАУССОВО ПРОСТРАНСТВО В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ	116
ИНДЕКСЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ	118
ТЕОРЕМА ОБ ИЗОЛИРОВАННОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК	120
ТЕОРЕМА БРАУЭРА	121

Лекция 1. Тензоры и тензорные поля.

Гладкая функция.

M – гладкое n -мерное многообразие, точка $P \in M$.

Гладкая функция. Если $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция на многообразии, то значение этой функции $f(P) \in \mathbb{R}$ не зависит от координат, хотя от координат зависит координатное представление этой функции.

Если $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты в окрестности точки P , то у функции есть **координатное представление** $f(x^1, \dots, x^n)$.

Если есть две системы координат $(x'^1, \dots, x'^n)$, то есть разные координатные представления $f(x'^1, \dots, x'^n)$.

Эти координатные представления отличаются на **функцию перехода**, т.е. на замену координат, но в то же время значение функции определено однозначно. В тензорном анализе такие объекты, значения которых не зависят от выбора координат, называются **скалярными**.

Касательный вектор.

Касательный вектор – соответствие, которое каждой системе координат в окрестности точки P сопоставляет набор чисел: $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Причем если есть разные системы координат, то эти наборы чисел разные, хотя соответствие одно и то же: $(y^1, \dots, y^n) \rightarrow (w^1, \dots, w^n) \in \mathbb{R}^n$.

Они связаны между собой по **закону преобразования компонент касательного вектора**, а именно отличаются на матрицу перехода:

$$w^i = \sum_{\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial x^{\alpha}} v^{\alpha}$$

Одно из определений касательного вектора: каждой системе координат сопоставляется набор чисел и эти самые числа связаны между собой таким преобразованием.

Следующий объект такого типа, который в разных системах координат выглядит по-разному - билинейная форма на M .

Билинейная форма.

Опр. Билинейная форма на M $b(P): T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Если какая-либо система координат фиксирована, то эта форма задается матрицей, т.е. набором чисел: $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (b_{ij})$, где $b_{ij} = b(\partial x^i, \partial x^j)$. В другой системе координат $(y^1, \dots, y^n)$, будет другая матрица $(\widetilde{b}_{pq})$:

$$\widetilde{b}_{pq} = b(\partial y^i, \partial y^j).$$

При замене координат матрица билинейной формы преобразуется по закону преобразования компонент билинейной формы:

$$\widetilde{b}_{pq} = \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q},$$

где $(\frac{\partial x^i}{\partial y^p})$ – матрица Якоби.

Можно определить много разных объектов такого типа.

Линейные функционалы на касательном пространстве $T_p M$.

Функционал $a(P): T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ – **линейное отображение**. $a(P)$ задается своими значениями на базисных векторах $(x^1, \dots, x^n)$. Чтобы задать линейное отображение, достаточно задать значение линейной функции на базисных векторах: $V \in T_p M, \vec{V} = \sum v^\alpha \vec{\partial} x^\alpha$,

$$a(V) = a(\sum_\alpha v^\alpha \partial x^\alpha) = \sum_\alpha v^\alpha a(\partial x^\alpha).$$

$a(\partial x^\alpha) = a_\alpha$ – аналог матрицы билинейной формы, представляющий собой строку $(a_1, \dots, a_n)$.

В другой системе координат $(y^1, \dots, y^n)$ можно рассмотреть числа $\widetilde{a}_\alpha = a(\partial y^\alpha)$, возникнет другая матрица того же линейного функционала $(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_n)$.

Связь этих матриц:

$$\partial y^i = \sum \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} \partial_k \beta, \quad \widetilde{a}_i = a(\partial y_i) = a(\sum \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} \partial_k \beta) = \sum \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} a_\beta$$

– **закон преобразования компонент линейного функционала.**

Линейные функционалы возникают в дифференциальной геометрии – это дифференциалы функций.

Пример линейного функционала: если $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция на многообразии, то в каждой точке $df(P): T_p M \times T_{f(P)} M \rightarrow \mathbb{R}' \equiv \mathbb{R}'$. Возникает линейная функция.

Если имеется система координат $(x^1, \dots, x^n)$, то компоненты этой линейной функции

(матрица дифференциала) – строка $df(P) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}|_P, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}|_P)$. В этом случае эта формула преобразования компонент линейного функционала превращается в **теорему о производной сложной функции**:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^i}.$$

Множество всех линейных функционалов образует линейное пространство.

Двойственное пространство.

Опр. Двойственное пространство $(T_p M)^*$ – линейное пространство множества всех линейных функций на касательном пространстве. $(T_p M)^* \equiv T_p^* M$. Поскольку все конечномерно, то это то же линейное пространство той же самой размерности, что и касательное пространство к многообразию, что и многообразие.

В двойственном пространстве можно выбирать двойственный базис к имеющемуся: если $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $e^1, \dots, e^n$ – базис в $\mathcal{L}^*$, то они называются **взаимно двойственными**. Базисы двойственны, если, по определению, $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Если в предыдущем примере $f = x^i$, то $dx^i = (0_1, \dots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_n)$ в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Компоненты базисного вектора $\partial x^j = (0_1, \dots, 0_{j-1}, 1_j, 0_{j+1}, \dots, 0_n)^T$. $\partial x^i(\partial x_j) = \delta_j^i$. Это два взаимно двойственных базиса.

Опр.1 (координатное определение тензора и тензорного поля): M – гладкое n -мерное многообразие $P \in M$, $T_p M$ – касательное пространство в точке P к многообразию M . Тензор T типа (p, q) в касательном пространстве $T_p M$, где p и q – целые неотрицательные числа, ранга $r = p + q$ – это соответствие, которое каждой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ сопоставляет набор чисел: T :

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},$$

количество чисел n^{p+q} и $1 \leq i_1 \dots i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$, причем если имеется 2 системы координат, то разным системам координат сопоставляются разные наборы чисел:

$$(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p},$$

причем эти наборы чисел связаны по **тензорному закону**.

Обозначения в тензорном анализе.

1. Системы координат $(x), (x'), (x''), \dots$

$$\text{Компоненты тензора } V = \begin{cases} (v) \text{ в } (x) \\ (v') \text{ в } (x') \\ (v'') \text{ в } (x'') \end{cases}, \text{ где ' относится и к индексу, и к}$$

переменной.

Когда индексов много, то ' пишется и у индекса, и у переменной.

2. $V: \begin{matrix} (x^1, \dots, x^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n) \\ (x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto (v^{1'}, \dots, v^{n'}) \end{matrix}$, тогда $v^{i'} = \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \equiv \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i$

Итак, **тензорный закон**:

$$T_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'} = \frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},$$

где $\frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{i_p}}$ — матрицы Якоби для верхних и нижних индексов соответственно

(знак суммирования $\sum_{1 \leq i_1 \dots i_p \leq n}$... пропущен).

Поскольку все матрицы Якоби не вырождены, то

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q'}}{\partial x^{j_q}} T_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'}$$

Говорят, что если задано такое равенство, то задан тензор типа (p, q) .

Примеры:

- Скаляр (0,0)
- Билинейная форма (0,2)
- Линейная форма (0,1)
- Касательный вектор (1,0)

Можно создать тензор произвольного типа

Тензорное поле.

Опр. Тензорное поле типа (p, q) на M : $P \mapsto T$ тензор типа (p, q) , гладко зависящий от точки. Гладко зависит от точки – в каждой системе координат тензор задается набором чисел, являющимся функцией координат. Эта зависимость должна быть гладкой.

Как задавать тензоры?

Лемма: пусть в окрестности $P \in M$ фиксирована система координат $(x^1, \dots, x^n)$, которой мы поставим в соответствие

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \text{набор из } n^{p+q} \text{ чисел.}$$

Любой другой системе координат поставим в соответствие следующий набор чисел:

$$(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} := \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

Тогда T – тензор типа (p, q) .

Доказательство: нужно доказать, что

$$(x^{1''}, \dots, x^{n''}) \mapsto T_{j''_1 \dots j''_q}^{i''_1 \dots i''_p} := \frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i''_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j''_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j''_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

$$(x^{1''}, \dots, x^{n''}) \mapsto T_{j''_1 \dots j''_q}^{i''_1 \dots i''_p} := \frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i''_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j''_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j''_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} =$$

[воспользовавшись тензорным законом, получим] =

$$\frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i''_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j''_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j''_q}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} \right) = \left| \frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} = \frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i'_1}} \right. \text{(по теореме о}$$

$$\text{сложной функции)} \left| = \frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i''_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}.$$

Опр.2 (инвариантное определение тензора) M – гладкое n -мерное многообразие, $P \in M$, $T_P M$ – касательное пространство в точке P к многообразию M . Тензор T типа (p, q) в пространстве $T_P M$, где p и q – целые неотрицательные числа, ранга $r = p + q$ – это полилинейное отображение $T: \underbrace{T_P^* M \times \dots \times T_P^* M}_p \times \underbrace{T_P M \times \dots \times T_P M}_q \rightarrow \mathbb{R}$.

(полилинейное – линейное по каждому аргументу: $T(\dots \lambda A + \mu B \dots) = \lambda T(\dots A \dots) + \mu T(\dots B \dots)$). В этом смысле билинейная форма – тензор типа $(0, 2)$, линейный функционал – тензор типа $(0, 1)$, вектор – тензор типа $(1, 0)$.

Эти определения эквиваленты.

Лемма: полилинейное отображение T однозначно задается своими значениями на наборах базисных векторов вида $(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}})$ (по умолчанию берем согласованные базисы в линейном пространстве и двойственном к нему).

Доказательство: если имеется набор линейных функционалов $\xi^1, \dots, \xi^p \in T_p^*M$ и набор касательных векторов $V_1, \dots, V_q \in T_pM$ и фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$ в $P \Rightarrow$

$$\xi^i = \xi_\alpha^i dx^\alpha \text{ и } V_j = V_j^\beta \partial_{x^\beta}$$

$$\begin{aligned} T(\xi^1, \dots, \xi^p, V_1, \dots, V_q) &= T(\xi_{\alpha_1}^1 dx^{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_p}^p dx^{\alpha_p}, V_1^{\beta_1} \partial_{x^{\beta_1}}, \dots, V_q^{\beta_q} \partial_{x^{\beta_q}}) = \\ &= \xi_{\alpha_1}^1 \dots \xi_{\alpha_p}^p V_1^{\beta_1} \dots V_q^{\beta_q} T(dx^{\alpha_1}, \dots, dx^{\alpha_p}, \partial_{x^{\beta_1}}, \dots, \partial_{x^{\beta_q}}) \end{aligned}$$

Теорема об эквивалентности координатного и инвариантного представлений.

Теорема: координатное и инвариантное определения тензора эквивалентны (то есть имея тензор, определенный с помощью одного определения, можем однозначно задать тензор с помощью другого определения, и наоборот).

Доказательство:

1). Пусть дан «координатный» тензор, то есть $T: (x^1, \dots, x^n) \mapsto T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Зададим полилинейное отображение: $\Phi_T: (T_p^*M)^p \times (T_pM)^q \rightarrow \mathbb{R}$. Положим $\Phi_T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Нужно проверить, что Φ_T не зависит от выбора координат.

$$\begin{aligned} \Phi_T(dx^{i'_1}, \dots, dx^{i'_p}, \partial_{x^{j'_1}}, \dots, \partial_{x^{j'_q}}) &= \\ \Phi_T\left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1}, \dots, \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} dx^{i_p}, \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \partial_{x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \partial_{x^{j_q}}\right) &= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \\ \Phi_T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}) &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned}$$

2). Пусть дано полилинейное отображение: $\Phi: (T_p^*M)^p \times (T_pM)^q \rightarrow \mathbb{R}$. Построим по такому отображению «координатный» тензор.

$T_\Phi: (x^1, \dots, x^n) \mapsto \Phi(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}})$. Возьмем значения этого отображения на наборе базисных векторов и ковекторов $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ - n^{p+q} чисел.

Нужно проверить, что эти наборы связаны между собой по тензорному закону:

$$\begin{aligned} (T_\Phi)_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} &= \Phi(dx^{i'_1}, \dots, dx^{i'_p}, \partial_{x^{j'_1}}, \dots, \partial_{x^{j'_q}}) = \\ &= \Phi\left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1}, \dots, \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} dx^{i_p}, \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \partial_{x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \partial_{x^{j_q}}\right) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \\ &= \Phi(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}) = (T_\Phi)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

– тензорный закон для соответствия T_Φ .

Тензоры типа $(0, 1)$ (линейные функционалы) – ковекторы (с нижними индексами), с верхними индексами – контрвариантные.

Обозначим $\mathbb{T}_q^p$ – множество всех тензоров типа (p, q) в фиксированной точке $P \in M^n$.

Теорема о линейном пространстве.

Теорема: $\mathbb{T}_q^p$ – линейное пространство размерности n^{p+q} , n – размерность многообразия (касательного пространства).

Доказательство: $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_q^p$, тогда $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ – тоже полилинейное отображение. Как устроен базис в этом линейном пространстве?

$\mathbb{T}_q^p \ni \Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ – полилинейные отображения такого типа однозначно определяются своими значениями на базисных векторах и ковекторах. Если система координат $(x^1, \dots, x^n)$, то на $(dx^{a_1}, \dots, dx^{a_p}, \partial_{x^{b_1}}, \dots, \partial_{x^{b_q}}) = \begin{cases} 1, & i_k = a_k, k = 1, \dots, p \\ j_l = b_l, l = 1, \dots, q \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Если $\mathbb{T}_q^p \ni T$ и $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}) \Rightarrow T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$, где по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Любой тензор T – линейная комбинация Δ .

Докажем, что $\{\Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$ линейно независимы. Если они линейно зависимы, то существует такая линейная комбинация, которая тождественно равно 0. Запишем ее.

Пусть $\lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \equiv 0$. Нужно доказать, что все компоненты равны 0, взяв произвольный набор базисных векторов и ковекторов и посчитав значение на нем, которое, с одной стороны, должно равняться 0, с другой, λ с соответствующими индексами $\Rightarrow \lambda_j^i = 0 \Rightarrow$ линейно независимы.

$\Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ – канонический базис в $\mathbb{T}_q^p$ с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. $\Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} =$
 $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$
 $\Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} : (x^1, \dots, x^n)$

Лекция 2. Алгебраические операции над тензорами и тензорными полями.

Тензоры и тензорные поля.

Тензоры типа (p, q) образуют линейное пространство размерности n^{p+q} и имеют канонический базис.

Мультииндексное обозначение:

$$i_1, \dots, i_p \equiv I_p$$

$$j_1, \dots, j_q \equiv J_q$$

$$\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \equiv \frac{\partial x^{I'_p}}{\partial x^{I_p}}$$

Тогда тензорный закон в мультииндексной записи примет следующий вид:

$$T^{I'_p}_{J'_q} = \frac{\partial x^{I'_p}}{\partial x^{I_p}} \frac{\partial x^{J_q}}{\partial x^{J'_q}} T^{I_p}_{J_q}$$

Алгебраические операции над тензорами и тензорными полями (для конструирования новых тензоров)

1. Линейная комбинация тензоров одного типа

$$T, S \in \mathbb{T}_q^p \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha T + \beta S \in \mathbb{T}_q^p$$

$$(\alpha T + \beta S) T^{I_p}_{J_q} = \alpha T^{I_p}_{J_q} + \beta S^{I_p}_{J_q} \quad \text{в } (x^1, \dots, x^n).$$

Для тензорных полей $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – гладкие функции на многообразии M .

2. Перестановка индексов одного типа (верхних или нижних)

$$T \in \mathbb{T}_q^p, \quad \sigma \in S_q \text{- группа перестановок.}$$

Можно определить новый тензор

$$\sigma T(\xi^1, \dots, \xi^p, V_1, \dots, V_q) = T(\xi^1, \dots, \xi^p, V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(q)}) \text{ – так же полилинейное отображение того же типа } \Rightarrow \sigma T \in \mathbb{T}_q^p$$

Лемма: если координаты $(x^1, \dots, x^n)$ фиксированы и $T_{j_1 \dots j_q}^{I_p} \Rightarrow (\sigma T)_{j_1 \dots j_q}^{I_p} = T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}^{I_p}$

Доказательство:

$$(\sigma T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sigma T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_q}) = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, dx^{j_{\sigma(1)}}, \dots, dx^{j_{\sigma(q)}}) = T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}^{i_1 \dots i_p}.$$

Перестановка действует не на значения индексов, а на их расположение.

Пример:

$$M^{10}, T \in \mathbb{T}_3^0, \sigma = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, (\sigma T)_{789} = T_{897}$$

Зам.1. Лемма: $T \in \mathbb{T}_q^p, \sigma, \tau \in S_q, \tau(\sigma T) = \tau \circ \sigma T$.

Доказательство: (прямым подсчетом).

Зам.2. $\pi \in S_p, \pi T(\xi^1, \dots, \xi^p, V_1, \dots, V_q) = T(\xi^{\pi(1)}, \dots, \xi^{\pi(p)}, V_1, \dots, V_q)$.

Зам.3. Индексы, расположенные на разных позициях, переставлять нельзя.

Опр. $T \in \mathbb{T}_q^0$ – **симметричный**, если ${}_{\sigma}T = T \forall \sigma \in S_q$.

$T \in \mathbb{T}_q^0$ – **кососимметричный**, если ${}_{\sigma}T = (-1)^{\sigma} T \forall \sigma \in S_q$.

3. Свертка.

Пример: линейный оператор $A(x^1, \dots, x^n) \rightarrow A_j^0$, у него определен след: $\text{Tr } A = A_i^i$ (сумма диагональных элементов). След линейного оператора не зависит от координат: $(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \rightarrow A_{j'}^0$

$$A_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} A_j^i \Rightarrow A_{i'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} A_j^i = \delta_j^i A_j^i = A_i^i \text{ – прямое следствие тензорного закона.}$$

В общем случае $T \in \mathbb{T}_q^p$, фиксируем $a, b \in \mathbb{N}$: $1 \leq a \leq p, 1 \leq b \leq q$.

Свертка T по верхнему a -му и нижнему b -му индексу $C_b^a(T)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} \in \mathbb{T}_{q-1}^{p-1}$:

$$C_b^a(T)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = T_{j_1 \dots j_{b-1} \alpha j_b \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{a-1} \alpha i_a \dots i_{p-1}}.$$

Лемма: $C_b^a(T)$ не зависит от координат.

Доказательство: проверить, что $(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto T_{j'_1 \dots j'_{b-1} \alpha' j'_b \dots j'_{q-1}}^{i'_1 \dots i'_{a-1} \alpha' i'_a \dots i'_{p-1}}$ - тот же тензор $T_{j_1 \dots j_{b-1} \alpha j_b \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{a-1} \alpha i_a \dots i_{p-1}}$.

Эта операция позволяет понизить ранг.

4. Тензорное произведение.

$T \in \mathbb{T}_q^p, S \in \mathbb{T}_s^r$ из них можно сконструировать тензор суммарного типа

$$T \otimes S \in \mathbb{T}_{q+s}^{p+r}.$$

$$T \otimes S (\xi^1, \dots, \xi^{p+r}, V_1, \dots, V_{q+s}) = T(\xi^1, \dots, \xi^p, V_1, \dots, V_q) S(\xi^{p+1}, \dots, \xi^{p+r}, V_{q+1}, \dots, V_{q+s})$$

Проверим, что получившееся выражение – полилинейной отображение.

Лемма: $T \otimes S$ – полилинейное отображение.

Доказательство: $T \otimes S(\dots \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \dots)$, где α_1, α_2 – числа, y_1, y_2 – векторы или ковекторы. Нужно показать, что $T \otimes S$ линейно.

$$\begin{aligned} T \otimes S(\dots \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \dots) &= T(\dots \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \dots) S(\dots) = (\alpha_1 T(\dots y_1 \dots) + \\ &\alpha_2 T(\dots y_2 \dots)) S(\dots) = \alpha_1 T(\dots y_1 \dots) S(\dots) + \alpha_2 T(\dots y_2 \dots) S(\dots) = \\ &\alpha_1 T \otimes S(\dots y_1 \dots) + \alpha_2 T \otimes S(\dots y_2 \dots). \\ \Rightarrow T \otimes S &\in \mathbb{T}_{q+s}^{p+r}. \end{aligned}$$

Лемма: если $(x^1, \dots, x^n) \mapsto T_{j_q}^{I_p}, S_{j_s}^{I_r} \Rightarrow (T \otimes S)_{j_1 \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{j_{q+1} \dots j_{q+r}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}.$

Лемма:

1). $T \otimes (S \otimes R) = (T \otimes S) \otimes R$ – ассоциативность

2). $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) \otimes S = \alpha_1 T_1 \otimes S + \alpha_2 T_2 \otimes S$

$$T \otimes (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) = \alpha_1 T \otimes S_1 + \alpha_2 T \otimes S_2$$

$$3). T \otimes S \neq S \otimes T$$

Зам.1. $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ – канонический базис в $\mathbb{T}_q^p$.

$$\Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (dx^{a_1}, \dots, dx^{a_p}, \partial_{x^{\beta_1}}, \dots, \partial_{x^{\beta_q}}) = \begin{cases} 1, & i_k = a_k, k = 1, \dots, p \\ & j_l = b_l, l = 1, \dots, q \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Лемма: $\Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$, где ∂_{x^i} и dx^j – канонический базис.

Доказательство: $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} (dx^{a_1}, \dots, dx^{a_p}, \partial_{x^{\beta_1}}, \dots, \partial_{x^{\beta_q}}) = \partial_{x^{i_1}}(dx^{a_1}) \partial_{x^{i_2}}(dx^{a_2}) \dots \partial_{x^{i_p}}(dx^{a_p}) dx^{j_1}(\partial_{x^{\beta_1}}) \dots dx^{j_q}(\partial_{x^{\beta_q}}) = \delta_{i_1}^{a_1} \dots \delta_{i_p}^{a_p} \delta_{j_1}^{\beta_1} \dots \delta_{j_q}^{\beta_q} = 0$.

Следствие: $\mathbb{T}_q^p = (T_p M)^{\otimes p} \otimes (T_p^* M)^{\otimes q}$.

$$\begin{aligned} & (\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}) \otimes (\partial_{x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}) = \\ & (\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes \partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}) \\ \Rightarrow & \partial_{x^i} \otimes dx^j = dx^j \otimes \partial_{x^i} \end{aligned}$$

Упр. $(x^1, \dots, x^n) T \in \mathbb{T}_q^0, T = dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}, \sigma \in S_q, \sigma T = ?$

5. Опускание и поднятие индексов.

Индексы разного типа можно переставлять, предварительно сделав их индексами одного уровня с помощью невырожденного тензора с рангом, равным 2.

$$A: (x^1, \dots, x^n) \rightarrow A_{ij}, A \in \mathbb{T}_2^0.$$

Опр. A – невырожденный, если $\det(A_{ij}) \neq 0$.

Лемма. $A: (x^1, \dots, x^n) \mapsto A_{ij}, A \in \mathbb{T}_2^0. A': (x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto A'_{ij}, A \in \mathbb{T}_2^0. \det(A_{ij}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A'_{ij}) \neq 0.$

Лемма. $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (A^{ij})$, где A^{ij} – компоненты $(A_{ij})^{-1}. A^{ij} A_{jk} = \delta_k^i$. Такое соответствие – тензор типа $(2, 0)$.

Доказательство: $(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto A^{i'j'}$, пересчитаны по тензорному закону.

Нужно проверить, что $A^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} A^{ij}$.

$$A^{i'j'} A_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} A^{ij} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} A_{\beta k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \delta_j^{\beta} A^{ij} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} A_{\beta k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} A^{ij} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} A_{jk} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \delta_k^i \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \delta_{k'}^{i'}.$$

Пусть фиксированы A типа $(0, 2)$, A^{-1} типа $(2, 0)$ в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ и есть произвольный тензор $T \in \mathbb{T}_q^p$.

Опускание первого индекса: $C_2^1(A \otimes T)$, в координатах $A_{i,\alpha} T_{j_1 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}$.

Поднятие первого индекса: $C_1^2(A^{-1} \otimes T)$, в координатах $A^{j\beta} T_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$.

Лемма: эти операции взаимно обратные.

Операция опускание-поднятие k -го индекса в литературе имеет разночтения с точностью до перестановки индексов. Обычно вместо «1» пишут k : $C_2^k(A \otimes T)$ и $C_k^2(A^{-1} \otimes T)$.

В линейной алгебре симметричные линейные операторы определяются с помощью операции опускания и поднятия индекса.

6. Симметрирование и альтернирование (по нижним индексам).

Пусть имеется тензор $T \in \mathbb{T}_q^p$.

$$S(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \sigma T, \quad A(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} \sigma T.$$

Свойства:

- 1). $T \in \mathbb{T}_q^p$, $S(T)$ – симметричный тензор, $A(T)$ – антисимметричный.
- 2). Если T – симметричный, то $S(T) = T$, $A(T) = 0$.
- 3). Если T – кососимметричный, то $S(T) = 0$, $A(T) = T$.
- 4). $S(S(T)) = S(T)$, $A(A(T)) = A(T)$, $S(A(T)) = A(S(T)) = 0$.

Докажем свойство 1). $\forall$ перестановка $\pi \in S_q$, $\pi^{S(T)} = ?$

$$\pi^{S(T)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \pi(\sigma T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \pi \circ \sigma T = \frac{1}{q!} \sum_{\alpha = \pi \circ \sigma} \alpha T = S(T).$$

Докажем свойство 3). Пусть T – кососимметрический.

$$S(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \sigma T = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} T = \frac{T}{q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} = 0.$$

$$A(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} \sigma T = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} (-1)^{\sigma} T = \frac{T}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} 1 = T.$$

7. Частичное альтернирование.

Пусть имеется тензор $T \in \mathbb{T}_q^p$, $U \subset S_q$. Тогда $A_U(T) = \frac{1}{|U|} \sum_{\sigma \in U} (-1)^{\sigma} \sigma T$ – частичное альтернирование по подмножеству.

Лемма: $T \in \mathbb{T}_q^p$, $U \subset S_q$ $A(A_U(T)) = A(T)$.

В механике сплошной среды фиксирована метрика (g_{ij}) – пример невырожденной билинейной формы, у которой есть обратная билинейная форма (g^{ij}) . Это позволяет фиксировать «канонический» изоморфизм между касательным пространством к многообразию и двойственным пространством: $T_p M \approx T_p^* M$.

Для вектора $V = (v^1, \dots, v^n)$ соответствующий ковектор $g_{i\alpha} v^\alpha = \xi_i$ и наоборот. В механике сплошной среды, говорят, что есть линейное пространство с ковариантными представлениями (с верхними и нижними индексами). Рассматривают полилинейное отображение по прямому произведению линейных пространств, каждое из которых может быть записано в виде векторного или ковекторного пространств. Поэтому каждое такое полилинейное отображение $T: \underbrace{\mathcal{L} \times \dots \times \mathcal{L}}_{p+q} \rightarrow \mathbb{R}$

$T_i^{j k}$ – тензор ранга 3 с первым нижним и вторым и третьим верхними.

$$T_{i\cdot\cdot}^{\cdot j k} = g^{j\alpha} T_{i\alpha\cdot}^{\cdot\cdot k}$$

Лекция 3. Алгебра внешних дифференциальных форм.

Кососимметрические тензоры.

Опр. $T \in \mathbb{T}_q^0$ – **кососимметричный**, если ${}_{\sigma}T = (-1)^{\sigma} T \forall \sigma \in S_q$.

Кососимметрические тензоры образуют линейное пространство $\Lambda^q(T_P^*M)$.

Примеры:

1). $\xi \in \mathbb{T}_1^0$ – кососимметрический тензор $\Lambda^1(T_P^*M)$.

2). Скаляр $\Lambda^0 \in \mathbb{R}$.

3). Фиксируем локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, полилинейное отображение

$$dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q}: (T_P M)^q \rightarrow \mathbb{R}. \quad dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q}(V_1, \dots, V_q) = \det \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_1^{i_q} \\ v_2^{i_1} & \dots & v_2^{i_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_q^{i_1} & \dots & v_q^{i_q} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q} \in \Lambda^q.$$

$$\text{Если среди индексов есть совпадающие, то } \det \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_1^{i_q} \\ v_2^{i_1} & \dots & v_2^{i_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_q^{i_1} & \dots & v_q^{i_q} \end{vmatrix} = 0, \text{ так как будут}$$

одинаковые строки.

Лемма: $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q} = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(q)}} = q! A(dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(q)}}).$
 $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$

$$\text{Доказательство: } \det \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_1^{i_q} \\ v_2^{i_1} & \dots & v_2^{i_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_q^{i_1} & \dots & v_q^{i_q} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_q^{i_{\sigma(q)}} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} dx^{i_{\sigma(1)}}(V_1) \dots dx^{i_{\sigma(q)}}(V_q) = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(q)}}(V_1, \dots, V_q).$$

$${}_{\sigma}(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}) = dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(q)}}.$$

$$\text{Сл.1. } dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} (\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}) = \begin{cases} (-1)^\sigma \{i_1 \dots i_q\} = \{\alpha_1 \dots \alpha_q\}, i_{\sigma(k)} = \alpha_k, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_q \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_q \end{pmatrix}.$$

$$\text{Сл.2. } x^{i_{\sigma(1)}} \dots dx^{i_{\sigma(q)}} = (-1)^\sigma dx^{i_1} \dots dx^{i_q}.$$

Утв.1. $\forall q \ 1 \leq q \leq n \ \{dx^{i_1} \dots dx^{i_q} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n\}$ - базис в Λ^q . $\dim \Lambda^q = C_n^q$.
При $q > n \ \dim \Lambda^q = 0$.

Доказательство: $T \in \Lambda^q$, $(x^1, \dots, x^n)$ - локальные координаты, $T = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \Rightarrow$ любой тензор может быть разложен по этому базису.

Проверим равенство: $\forall \partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}} \ T(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}) = T_{\alpha_1 \dots \alpha_q} =$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} (\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}) =$$

$$\begin{cases} 0, \text{ если есть совпадающие индексы} \\ T_{i_1 \dots i_q} (-1)^\sigma = T_{i_1 \dots i_q}, \quad \text{если } \{i_1 \dots i_q\} = \{\alpha_1 \dots \alpha_q\} \end{cases}$$

Докажем теперь линейную независимость: пусть $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = 0$.

Покажем, что все $\lambda_{i_1 \dots i_q} = 0$. Возьмем набор $(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}})$, где $\alpha_1 < \dots < \alpha_q$ и подставим в полилинейное отображение: $0 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_q} \partial_{x^{\alpha_1}} \dots \partial_{x^{\alpha_q}} = \lambda_{i_1 \dots i_q}$

$\Rightarrow$ коэффициенты = 0, что и доказывает линейную независимость.

Утв.2. Если есть набор индексов в количестве, большем n , то среди значений этих индексов обязательно есть совпадающие $\Rightarrow$ любая компонента кососимметрического тензора = 0. То есть, существует только один нулевой кососимметрический тензор с рангом, большим, чем размерность многообразия.

Из формулы размерности вытекает, что пространство тензоров самого большого ранга $q = n$ имеет самую маленькую размерность. Тогда в координатах $(x^1, \dots, x^n)$

$$T = T_{1 \dots n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

все остальные ненулевые компоненты отличаются от этой на знак соответствующей перестановки.

Опр. $T_{1\dots n}$ – существенная компонента кососимметрического тензора.

$$\begin{aligned} \text{В компонентах } (x^{1'}, \dots, x^{n'}) \quad T_{1'\dots n'} &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{i'_n}} T_{i_1 \dots i_n} = \sum_{\substack{i_1 \dots i_q \\ \text{есть повторяющиеся} \\ \text{индексы}}} 0 + \\ \sum_{\substack{i_1 \dots i_q \\ \text{все индексы} \\ \text{индексы различны} \\ \{i_1 \dots i_q\} = \{1 \dots n\}}} &= |\{i_1 \dots i_q\} = \{\sigma(1) \dots \sigma(n)\}| = 0 + \sum_{\sigma \in S_q} \frac{\partial x^{\sigma(1)}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma(n)}}{\partial x^{i'_n}} T_{\sigma(1) \dots \sigma(n)} = \\ \text{в силу косой симметрии } T_{\sigma(1) \dots \sigma(n)} &= (-1)^\sigma T_{1 \dots n} = T_{1 \dots n} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma \frac{\partial x^{\sigma(1)}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma(n)}}{\partial x^{i'_n}} = \\ \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) T_{1 \dots n}. \end{aligned}$$

Утв. Если $T \in \Lambda^q$, то $T_{1'\dots n'} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) T_{1 \dots n}$.

Дифференциальные (внешние дифференциальные или внешние) формы.

Опр. Дифференциальная форма степени q на M^n – гладкое кососимметрическое поле типа $(0, q)$.

Если ω^q – внешняя форма степени q и есть произвольные координаты, то

$$\omega^q = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \omega_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$$

- линейная комбинация элементарных кососимметрических тензоров.

Пример: если $f \in C^\infty(M)$, то $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ – 1-форма на многообразии M .

Эти формы образуют бесконечномерное пространство и обозначаются $\Omega^q(M)$ – линейное пространство внешних форм степени q на многообразии M .

В частности, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Поскольку при $q > n$ все кососимметрические тензоры $= 0$, то внешние формы рассматривают при $0 \leq q \leq n$.

Опр. $\bigcup_{q=0}^n \Omega^q(M) = \Omega^*(M)$ – **внешняя алгебра** (алгебра внешних дифференциальных форм).

Внешнее умножение.

Опр. Пусть $P \in \Omega^p, Q \in \Omega^q, \Lambda: \Omega^p \times \Omega^q \rightarrow \Omega^{p+q}. P \wedge Q = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(P \otimes Q)$.

Пусть $A(P \otimes Q)$ ассоциативно и $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$, где $\wedge$ – внешнее произведение.

Такая операция – **внешнее умножение**.

Свойства:

- 1). Линейно по каждому аргументу
- 2). Ассоциативно

Доказательство: Пусть $P \in \Omega^p, Q \in \Omega^q, R \in \Omega^r. P \wedge (Q \wedge R) = P \wedge \left(\frac{(r+q)!}{r!q!} A(Q \otimes R) \right) =$
 $\frac{(r+q)!}{r!q!} \frac{(p+r+q)!}{p!r!(q+r)!} A(P \otimes A(Q \otimes R)) = \frac{(p+r+q)!}{r!p!q!} A(P \otimes Q \otimes R)$

Следствие 1: $P_i \in \Omega^{p_i}, P_1 \wedge \dots \wedge P_k = \frac{(p_1 + \dots + p_k)!}{p_1! \dots p_k!} A(P_1 \otimes \dots \otimes P_k)$.

Следствие 2: $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \frac{(1 + \dots + 1)!}{1! \dots 1!} A(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}) =$
 $q! A(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q})$ – элемент канонического базиса из пространства Λ^q (лемма в начале лекции).

3). $\mathbb{T}_q^p$ – кососимметрично, $P \in \Omega^p, Q \in \Omega^q$, тогда $P \wedge Q = (-1)^{p+q} Q \wedge P$.

Доказательство: достаточно для мономов (для выражений вида $P = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ и $Q = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$)

$$P \wedge Q = fg (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}) = fg dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = (-1)^p fg dx^{j_1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = (-1)^{pq} fg dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = (-1)^{pq} Q \wedge P.$$

Вообще говоря, $P \wedge P \neq 0$.

Упр. 1. $T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q} = q! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$

Упр. 2. $P \in \Omega^p, Q \in \Omega^q, (P \wedge Q)_{i_1 \dots i_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma P_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} Q_{i_{\sigma(p+1)} \dots i_{\sigma(p+q)}}.$

На практике чаще пользуются свойством дистрибутивности:

$$(2dx + xdy) \wedge (zdz + dx) = 2zdx \wedge dz + xzdy \wedge dz + xdyd \wedge x.$$

Формы и отображения.

$F: M^m \rightarrow N^n$ – гладкое отображение гладких отображений.

$$\Omega^q(M) \leftarrow \Omega^q(N): F^*$$

Рассмотрим $\forall \omega \in \Omega^q(N), (F^* \omega)|_P(V_1, \dots, V_q) = \omega|_P(dF|_P(V_1), \dots, dF|_P(V_q))$

$$V_i \in T_P M$$

(воспользовались: $dF: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$).

Частный случай: подмногообразие $M \subset \mathcal{W}$, $\omega \in \Omega^p(\mathcal{W})$, определено ограничение ω на подмногообразии. Вложение $i: M \rightarrow \mathcal{W}$. Ограничение - $i^*(\omega)$. Другими словами, нужно рассматривать касательные векторы к многообразию как касательные векторы к объемлющему многообразию, тогда на них будет действовать внешняя форма. То, что получится, - ограничение ω на $M \subset \mathcal{W}$.

Свойства:

- 1). $F^*(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) = \alpha_1 F^*(\omega_1) + \alpha_2 F^*(\omega_2)$
- 2). $F^*(P \wedge Q) = F^*(P) \wedge F^*(Q)$

3). $(x^1, \dots, x^n)$ – локальные координаты на M в окрестности точки P , $(y^1, \dots, y^n)$ – локальные координаты на N в окрестности точки $F(P)$, $F: y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} dy^{i_1}, \dots, dy^{i_q}$, тогда

$$(F^*\omega)_{i_1 \dots i_q}(x) = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_q}} \omega_{j_1 \dots j_q}(y(x)).$$

Доказательство: первое утверждение очевидно по определению, второе достаточно проверить для мономов. Проверим третье:

$$\begin{aligned} (F^*\omega)_{i_1 \dots i_q} &= F^*\omega(\partial_{x^{i_1}}, \dots, \partial_{x^{i_q}}) = \omega(dF(\partial_{x^{i_1}}) \dots dF(\partial_{x^{i_q}})) = |dF(\partial_{x^{i_1}}) \dots dF(\partial_{x^{i_q}})| = \\ &= \left| \frac{\partial y^j}{\partial x^{i_1}} \partial_{y^j} \dots \frac{\partial y^j}{\partial x^{i_q}} \partial_{y^j} \right| = \omega\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \partial_{y^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_q}} \partial_{y^{j_q}}\right) = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_q}} \omega(\partial_{y^{j_1}} \dots \partial_{y^{j_q}}) = \\ &= \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_q}} \omega_{j_1 \dots j_q}(y(x)). \end{aligned}$$

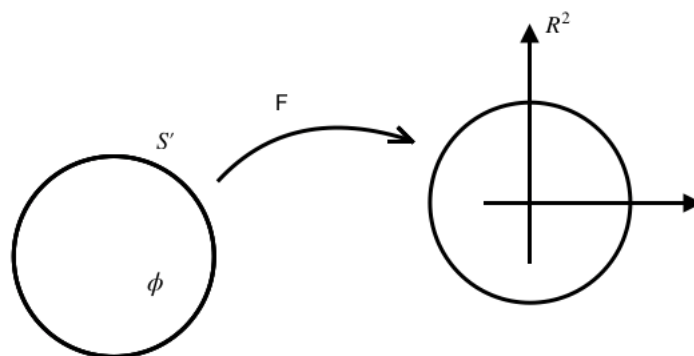


рис. 3.1. Пример.

Пример:

$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \sin \varphi$$

$$\omega_1 = x dy$$

$$\omega_2 = y dx$$

$$F^*\omega_1 = R \cos \varphi d(R \sin \varphi) = R^2(\cos \varphi)^2 d\varphi$$

$$\Omega^2(S') \ni F^*\omega_2 = 0$$

В общем случае $F^*\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_q}(y) dy^{i_1}, \dots, dy^{i_q}$, $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$.

Внешнее дифференцирование.

$$d: \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{q+1}(M)$$

$$\text{При } q = 0 \quad \Omega^0(M) = C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M) df$$

$$f \mapsto df$$

$$\begin{aligned} d \left(\sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i(x)_1 \dots i(x)_q} dy^{i_1}, \dots, dy^{i_q} \right) &= \omega \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} d \omega_{i_1 \dots i_q} \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_q} \in \Omega^{q+1}(M) \end{aligned}$$

Нужно доказать, что эта операция определена корректно. Доказав это, получим операцию, позволяющую каждой форме поставить в соответствие форму, большую на единицу. Возникнет следующая цепочка:

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n \xrightarrow{d} 0.$$

Далее докажем, что $d \circ d = 0$, тогда возникнет стандартная алгебраическая операция, и каждому такому цепному процессу можно в соответствие поставить некий набор групп, называемый группами гомологии.

Лекция 4. Интегрирование форм.

Дифференциальные (внешние дифференциальные или внешние) формы.

Лемма. Данное определение корректно (не зависит от выбора координат).

Доказательство:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \omega_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \frac{1}{q!} \omega_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \\ q! d\omega &= \left(d\omega_{i_1 \dots i_q} \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = d \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial x^{i'_q}} \omega_{i_1 \dots i_q} \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial x^{i'_q}} \omega_{i_1 \dots i_q} \right) dx^{\alpha'} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{i'_1} \partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial x^{i'_q}} \omega_{i_1 \dots i_q} dx^{\alpha'} \wedge \\ &\wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} + \dots + \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial x^{i'_q}} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_q}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} dx^{\alpha'} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_q}}{\partial x^{\alpha}} dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q} = \\ &= d\omega_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q}\end{aligned}$$

Зам. 1. $\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{i'_1} \partial x^{\alpha'}} dx^{\alpha'} \wedge dx^{i_1} = 0$, так как $\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{i'_1} \partial x^{\alpha'}}$ - симметрично по α' , $dx^{\alpha'} \wedge dx^{i_1}$ - кососимметрично по α' .

Свойства внешнего дифференцирования:

- 1). $d(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) = \alpha_1 d\omega_1 + \alpha_2 d\omega_2$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
- 2). $d(P \wedge Q) = d(P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge d(Q)$, где $P \in \Omega^p$, $Q \in \Omega^q$.
- 3). $d(dP) = 0$.
- 4). $d(F^* \omega) = F^*(d\omega)$.

Доказательство 2). пусть $P = f(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ и $Q = g(x^1, \dots, x^n) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$ — мономы.

$$P \wedge Q = fg dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

$$\begin{aligned} d(P \wedge Q) &= d(fg) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (fg) dx^\alpha dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \\ &dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} g + f \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} \right) dx^\alpha dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\ &\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} + (-1)^p f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge \\ &dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge Q + (-1)^p P \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\ &d(P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge d(Q). \end{aligned}$$

Доказательство 3). пусть $P = f(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ и $Q = g(x^1, \dots, x^n) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$ – мономы.

$$dP = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

$$d(dP) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = 0, \text{ так как } \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \text{симметрично, } dx^\alpha \wedge dx^\beta - \text{кососимметрично.}$$

Доказательство 4). $F: (x^1, \dots, x^m) \rightarrow (y^1, \dots, y^n)$, $\omega = g(y^1, \dots, y^n) dy^{i_1} \dots dy^{i_p}$, координатное представление F имеет вид $y^i(x^1, \dots, x^m)$.

$$F^* \omega = g(y(x)) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{\alpha_p}} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}.$$

$$\begin{aligned} d(F^* \omega) &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(g(y(x)) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \right) dx^\gamma \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} = \frac{\partial g}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{\alpha_p}} dx^\gamma \wedge \\ &dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} + p \text{ нулей} = F^* \left(\frac{\partial g}{\partial y^\beta} dy^{\beta_1} \wedge dy^{i_1} \dots dy^{i_p} \right) = F^*(d\omega). \end{aligned}$$

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{p-1}} \Omega^p \xrightarrow{d_p} \Omega^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n \xrightarrow{d_n} 0, \text{ где } d_p \circ d_{p+1} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Im } d_{p-1} \subset \text{Ker } d_p \Rightarrow \text{определено фактор-пространство ядра по образу } \frac{\text{Ker } d_p}{\text{Im } d_{p-1}} = H^p.$$

Интегрирование форм.

M^n – гладкое ориентированное многообразие (ориентация нужна для однозначного определения интеграла). $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ – ориентированный атлас.

$\omega \in \Omega^n(M)$. Предполагаем, что эта форма имеет компактный носитель (чтобы не возникали неопределенные интегралы).

Носитель $\text{supp } \omega$ – минимальное замкнутое подмножество в M , вне которого $\omega \equiv 0$.

Аналогичное определение: $\overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}}$.

Пусть $\text{supp } \omega$ – компактен.

Частный случай: пусть $\text{supp } \omega \subset U_\alpha$, $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты в U_α ,

$$\omega(x) = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \omega_{1 \dots n}(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Опр. $\int_M \omega = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n} \dots \int f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$.

Лемма: $\int_M \omega$ не зависит от выбора координат, согласованных с ориентацией.

Доказательство: пусть в других координатах $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ $\omega(x) =$

$$\omega_{1' \dots n'} dx^{1'} \dots dx^{n'} = \left| \omega_{1' \dots n'} = \omega_{1 \dots n} \det \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right| \Rightarrow$$

$$\int_M \omega = \int_{\varphi_{\alpha'}(U_{\alpha'})} \dots \int \omega_{1' \dots n'} dx^{1'} \dots dx^{n'} = \int_{\varphi_{\alpha'}(U_{\alpha'})} \dots \int \omega_{1 \dots n} \det \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{1'} \dots dx^{n'} =$$
$$\left| \det \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} > 0 \right| = \int_{\varphi_{\alpha'}(U_{\alpha'})} \dots \int \omega_{1 \dots n} \left| \det \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right| dx^{1'} \dots dx^{n'} = \quad \text{формула замены}$$

переменных в кратном интеграле $= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \dots \int \omega_{1 \dots n} dx^1 \dots dx^n$ – интеграл в координатах $(x^1, \dots, x^n)$.

Общий случай определения интеграла. Разбиение единицы.

Пусть $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие M .

Опр. Семейство гладких функций $\{f_\alpha\}$ – разбиение единицы, согласованное с $\{U_\alpha\}$, если выполнен следующий набор свойств:

1). $0 \leq f \leq 1$

$$2). \text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$$

$$3). \sum_\alpha f_\alpha(x) \equiv 1.$$

В топологии доказывают лемму (без доказательства): если $\{U_\alpha\}$ – локальное конечное покрытие M открытыми множествами ($\forall x \in M$ принадлежит конечному числу U_α), то существует разбиение единицы, согласованное с $\{U_\alpha\}$.

Пусть $\omega \in \Omega^n(M)$ и $\text{supp } \omega$ – компактен. Если есть $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ – ориентированный атлас, то можно рассмотреть $\{f_\alpha\}$ – соответствующее разбиение единицы.

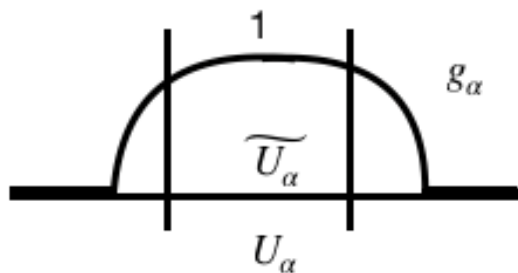


Рис. 4.1. К доказательству теоремы.

Опр. $\int_M \omega = \sum_i \int_M f_i \omega$. $\text{supp } f_i \omega \subset U_i$.

Лемма: $\int_M \omega$ не зависит ни от выбора координат атласа, ни от выбора единицы.

Доказательство: пусть имеется $A_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{f_\alpha\}$ и $A_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}, \{g_\beta\}$. Нужно показать, что интегралы, определенные с помощью этих элементов, одинаковы.

Построим общий атлас $A = \{(U_\alpha \cap V_\beta, \varphi_\alpha)\}, h_{\alpha\beta} = f_\alpha g_\beta$.

Покажем, что $h_{\alpha\beta}$ образуют единицу:
свойства 1-2) очевидны

$$3). \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} f_\alpha g_\beta = \sum_\alpha (f_\alpha \sum_\beta g_\beta) = 1$$

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & & A & & A_2 \\ \int_M \omega = \sum_i \int_M f_i \omega = \sum_i \int_M f_i (\sum_j g_j) \omega = \sum_{ij} \int_M f_i g_j \omega = \int_M \omega = \int_M \omega \end{array}$$

Свойства интеграла:

- 1). Линейность: $\int_M \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 = \alpha_1 \int_M \omega_1 + \alpha_2 \int_M \omega_2$
- 2). Многообразия M и $-M$ имеют противоположную ориентацию:

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega$$

Доказательство: оба свойства проверяются прямым подсчетом.

Формула Стокса.

$\int_{[ab]} dF = F(b) - F(a) = \int_{\{a,b\}} F$ – формула Ньютона-Лейбница.

Точку, в отличие от отрезка, можно рассматривать как 0-мерное многообразие, так как у отрезка нет окрестности, гомоморфной диску.

Многообразия с краем.

Опр.1. N^n – гладкое многообразие, $M \subset N$, $\bar{M}$ – замыкание открытого подмножества в N . $M = \{x \in N \mid 0 < f(x)\}$, $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, df – не вырожден на множестве $\partial M = \{x \mid f(x) = 0\}$. Множество M – многообразие с краем ∂M .

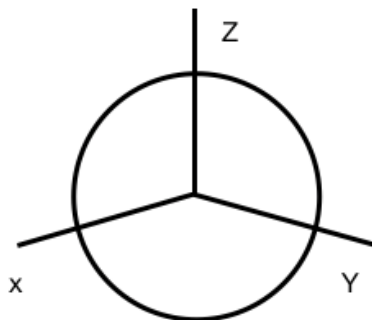


рис. 4.2. Пример 1.

Пример:

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$f(p) = z$$

M – верхняя полусфера

∂M – окружность $z = 0$, всегда гладкое $(n - 1)$ -мерное многообразие (из теоремы о неявной функции)

n – размерность многообразия с краем

Опр.2. Пусть $\varphi_\alpha, U_\alpha \rightrightarrows V_\alpha \in \mathbb{R}_+^n$. $\mathbb{R}_+^n = \{x^1 \geq 0\}$ – замкнутое полупространство.

$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ – открытое $U_\alpha \subset M$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightrightarrows V_\alpha \in \mathbb{R}_+^n$. Теперь здесь есть подмножества двух типов (гомеоморфные открытым дискам и гомеоморфные замкнутым полудискам).

Если есть фоусдорфово топологическое пространство, на котором существует атлас такого типа, то получившееся назовем топологическим многообразием с краем.

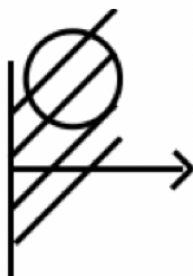


Рис. 4.3. К определению 2.

Как выделить край X ?

$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} : x \in X$ – внутренняя точка, если существует карта $x \in U$, которая гомеоморфна в области $\mathbb{R}^n$. Иначе x – точка края (краевая точка). Объединение всех краевых точек – край: $\partial X = \{x \mid x \text{ – краевая точка}\}$.

Атлас для края: $U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1}(x^1 = 0)$. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – $(n - 1)$ – мерный атлас для ∂X .

Теорема о задании многообразий уравнениями и неравенством:

$$f_i(x^1, \dots, x^n), : 1 \leq i \leq k \leq n,$$

$$\begin{cases} f_i(x) = c_i, i = 1 \dots k - 1, \\ f_k(x) \geq 0. \end{cases}$$

Потребуем, чтобы

$$1). \text{ Ранг матрицы Якоби } \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right|_{\substack{1 \leq i \leq k-1 \\ 1 \leq j \leq n}} = k - 1 : \forall x: f_i(x) = c_i, i = 1 \dots k - 1$$

$$2). \text{ Ранг расширенной матрицы Якоби } \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right|_{1 \leq i \leq k} = k \text{ и } \begin{cases} f_i(x) = c_i, i = 1 \dots k, \\ f_k(x) = 0. \end{cases}$$

Тогда множество решений системы – $(n - k + 1)$ - мерное многообразие с краем.

Доказательство: применяем теорему для обычных многообразий, забыв про функцию $f_k(x)$, тогда множество, заданное системой уравнений $f_i(x) = c_i, i = 1 \dots k - 1$, – $(n - k + 1)$ - мерное гладкое многообразие с краем, на котором задана функция $f_k(x) \Rightarrow df_k(x) \neq 0$, во всех точках, где функция обращается в 0. Поэтому неравенство удовлетворяет условиям из опр.1, значит, получаем многообразие с краем, который задается системой уравнений $\begin{cases} f_i(x) = c_i, i = 1 \dots k, \\ f_k(x) = 0. \end{cases}$



Рис. 4.4. К доказательству теоремы.

Теорема: если M — гладкое ориентированное многообразие с краем, то его край ∂M — тоже ориентированное многообразие.

Доказательство:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{\partial M} = \frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \dots \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^i} - \text{функция перехода на краю.}$$

Определитель этой матрицы неотрицателен

$\frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^1} \det(n-1) (n-1) > 0 \Rightarrow$ порождаемый таким образом атлас — ориентированный, то есть ориентация на многообразии порождает ориентацию на крае.

Каноническая ориентация края — ориентация, противоположная построенной в доказательстве.

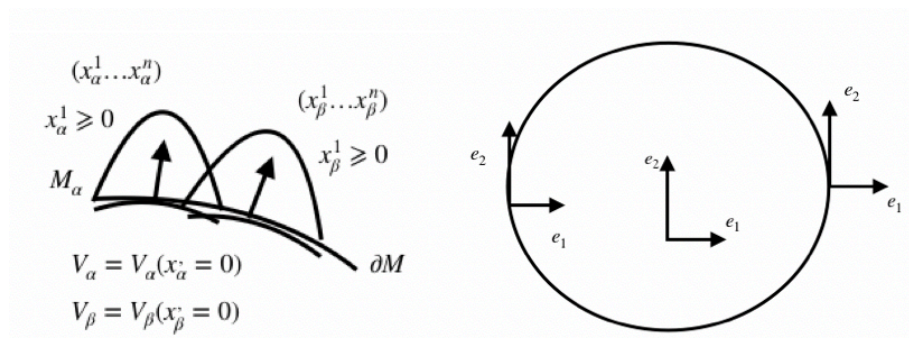


Рис. 4.5 и 4.6. К доказательству теоремы.

Лекция 5. Формула Стокса.

Теорема Стокса

Интеграл от формы по подмногообразию.

Если имеется k -мерное подмногообразие $M^k \subset W^n$ и задана форма $\omega \in \Omega^k(W)$, то можно рассмотреть ограничение (если задано подмногообразие, тогда задано вложение $i: M \rightarrow W$) $\rightarrow \omega|_M = i^*(\omega)$. Тогда $\int_M \omega := \int_M i^*(\omega)$.

Теорема Стокса: M — гладкое ориентированное n -мерное многообразие с краем ∂M , $\omega \in \Omega^{n-1}(W)$. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где ориентация края ∂M согласована с ориентацией многообразия M .

Зам. В некоторых источниках ориентацию задают как на рис. 5.2. тогда от заданного нами интеграл будет отличаться на (-1) в некоторой степени (зависит от размерности многообразия).

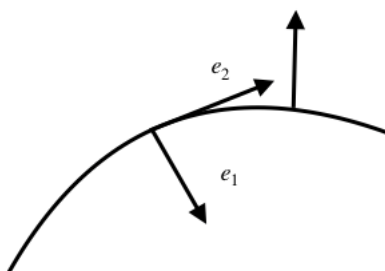


Рис. 5.1. К замечанию.

Доказательство: в силу определения и аддитивности интеграла по многообразию достаточно проверить теорему для формы ω , у которой, во-первых, носитель $\text{supp } \omega$ содержится в карте (т.к. по определению, интеграл — сумма таких форм), а во-вторых, в силу аддитивности достаточно считать, что эти формы — мономы в

некоторых координатах. То есть, если $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты, то форма ω имеет следующий вид:

$$\omega = f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^n \quad \omega \in \Omega^{n-1}.$$

$$d\omega = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

1). Пусть карта U – внутренняя карта, т.е. $U \cap \partial M = \emptyset$. Тогда $\int_{\partial M} \omega = 0$. Покажем, что $\int_U d\omega = 0$ (считаем, что карта U гомеоморфна $\mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} \int_U d\omega &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} (-1)^{k-1} dx^1 \dots dx^n \\ &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x^k} dx^k \right) (-1)^{k-1} dx^1 \dots dx^{k-1} dx^{k+1} \dots dx^n \\ &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f(\infty) - f(-\infty)) (-1)^{k-1} dx^1 \dots dx^{k-1} dx^{k+1} \dots dx^n = 0. \end{aligned}$$

2). Пусть карта U – краевая карта. $U \cong \mathbb{R}_+^n$

а). $k > 1$ (k – пропущенный номер в дифференциале)

$$\omega|_{\partial M: \{k=0\}} = f(x)dx^1 \wedge \dots = 0 \Rightarrow \int_{\partial M} \omega = 0.$$

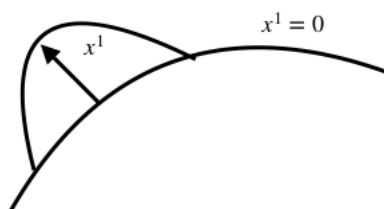


Рис. 5.2. к пункту 2). Доказательства теоремы.

$$\int_U d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} dx^1 \dots dx^n = 0.$$

б). $k = 1$

$$d\omega = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$\omega|_{\partial M} = f(0, x^2 \dots x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}(x^2 \dots x^n)} \dots \int f(0, x^2 \dots x^n) dx^1 \dots dx^n$$

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \dots \int \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} dx^1 \dots dx^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int_0^\infty \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x^k} dx^1 \right) dx^2 \dots dx^n \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int_0^\infty f(0, x^2 \dots x^n) dx^2 \dots dx^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial M} \omega = - \int_M d\omega = - \int_{-\partial M} \omega$$

Сл. 1. Если $\partial M = \emptyset$ и $\omega \in \Omega^{n-1}$, то $\int_M d\omega = 0$.

Компактное многообразие без края $\equiv$ замкнутое.

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M = \emptyset} \omega = 0.$$

M^n – риманова метрика, $*$ Ходжа – операция $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$, форма объема $\in \Omega^n$
 $\varepsilon_{1\dots n} = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{g}$

В локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ форма $\omega \in \Omega^k$ $(*\omega)_{i_{k+1}\dots i_n} = \frac{1}{k!} \varepsilon_{i_1\dots i_n} \omega^{i_1\dots i_k}$, где
 $\omega^{i_1\dots i_k} = g^{i_1\alpha_1} \dots g^{i_k\alpha_k} \omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}$

Упр.1. $1: M \rightarrow \mathbb{R}$, $1(x) = 1$, $*1$ = форма объема, $*(\text{форма объема}) = 1$.

Упр.2. $M^n = \mathbb{R}^n$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, тогда

$$*dx = dydz$$

$$*dy = dx dz$$

$$*dz = dy dx$$

$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \Omega^3 \xrightarrow{d} 0$. В трехмерном пространстве $*$ устанавливает соответствие между $\Omega^0(\mathbb{R}^3)$ и Ω^3 , Ω^1 и Ω^2 .

Интегрирование функций.

Опр. M – ориентированное риманово многообразие, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_M f = \int_M *f = \int_M f(*1) \text{ – интегралы первого рода.}$$

$$\int_M d\omega \text{ – интегралы 2 рода.}$$

Формулы векторного анализа.

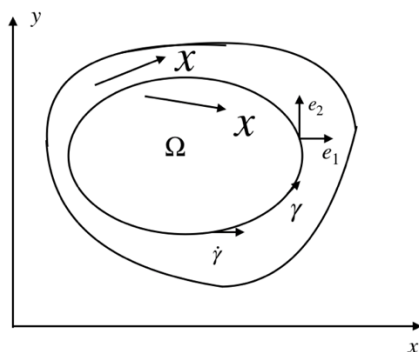


Рис.5.3. $\Omega \in \Omega'$, $\partial\Omega$ – гладкая кривая, в Ω' задано гладкое векторное поле $X = (P, Q)$.

Опр. Циркуляция векторного поля вдоль гладкой кривой γ –

$$\int_{\gamma} \langle x, \dot{\gamma} \rangle dt = \int_{\gamma} (P(x(t), y(t))\dot{x} + Q(x(t), y(t))\dot{y}) dt$$

Формула Грина:

$$\int_{\gamma} \langle x, \dot{\gamma} \rangle dt = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Покажем, что формула Грина – прямое следствие формулы Стокса:

$M^2 = \bar{\Omega}$, $\partial M = \gamma$, ориентация γ согласована с ее параметризацией. Нужно подобрать $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, чтобы $\omega|_{\gamma} = \langle x, \dot{\gamma} \rangle dt$ и $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

Возьмем $\omega = \text{Опуск}(X)$ – результат опускания индексов векторного поля X . В декартовых координатах $\omega = Pdx + Qdy$, $\omega|_{\gamma}$

$$= (P(x(t), y(t))\dot{x} + Q(x(t), y(t))\dot{y})dt \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \iint_M d\omega = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Формула Остроградского-Гаусса (обобщение двумерной формулы Грина на трехмерный случай):

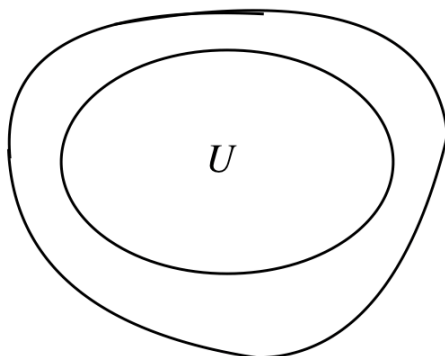


Рис. 5.4. К формуле Остроградского-Гаусса.

Опр. $\mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)U$ – область, границы которой – гладкое многообразие $\partial U = U^2$, $U \in U'$, в U' задано гладкое векторное поле $X = (X^1, X^2, X^3) \mapsto$ дивергенция

$$\operatorname{div} X := \sum_i \int_i^3 \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$$

Опр. Пусть $\langle x, N \rangle$ – гладкая функция на $M \subset \mathbb{R}^3$, тогда поток векторного поля X через поверхность M (аналог циркуляции). $:= \int_M \langle x, N \rangle (*1_M)$

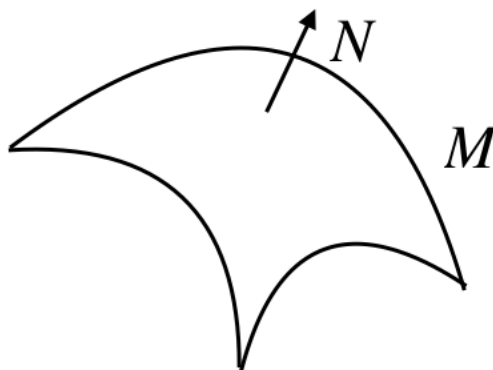


Рис. 5.5. К определению потока.

Теорема Остроградского-Гаусса: пусть U - область, ограниченная поверхностью M .

Тогда

$$\int_M \langle x, N \rangle (*1_M) = \int_U \operatorname{div} X * 1_{\mathbb{R}^3}$$

Доказательство: нужно подобрать такую форму $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, чтобы

1). $\omega|_M = \langle x, N \rangle (*1_M)$

2). $d\omega = \operatorname{div} X * 1_{\mathbb{R}^3}$

Найдем ω . $\omega = *$ Опуск (X) – нужная нам форма (Опуск (X) – результат опускания индексов векторного поля X). Это выражение никак не зависит от координат. Пусть (x^1, x^2, x^3) – декартовы координаты, а поле $X = (X^1, X^2, X^3)$, тогда

$$\text{Опуск}(X) = X^1 dx^1 + X^2 dx^2 + X^3 dx^3$$

$$\omega = X^1 dx^2 dx^3 + X^2 dx^3 dx^1 + X^3 dx^1 dx^2$$

Если $T = \text{Опуск}(X)$, то $T_i = g_{i\alpha} x^\alpha$, в общем случае $(*dx^i)_{i_2 i_3} = \frac{1}{1!} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} (dx^i)^{i_1}$

$$(*dx^1)_{i_2 i_3} = \varepsilon_{1 i_2 i_3}, (*dx^1)_{23} = \varepsilon_{123}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial X^2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial X^3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \operatorname{div} X dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

$$*1_{\mathbb{R}^3} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Пусть поверхность M^2 параметризована $r(u^1, u^2)$, где u^1, u^2 – локальные координаты, задана набором функций $x^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} dx^i dx^j|_M &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x^j}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^j}{\partial u^2} du^2 \right) \\ &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} \frac{\partial x^j}{\partial u^2} - \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \right) du^1 \wedge du^2 \end{aligned}$$

Обозначим $A^{ij} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} \frac{\partial x^j}{\partial u^2} - \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \right)$

$$\omega|_M = (X^1(u^1, u^2) A^{23} + X^2 A^{31} + X^3 A^{12}) du^1 \wedge du^2$$

$$N = \frac{[r_{u^1}, r_{u^2}]}{|[r_{u^1}, r_{u^2}]|}$$

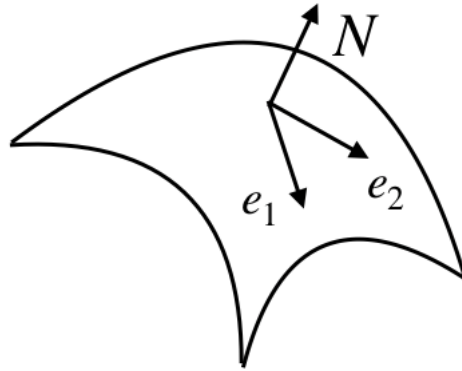


Рис. 5.6. К доказательству теоремы.

$$[r_{u^1}, r_{u^2}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} = (A^{23}, -A^{13} = A^{31}, A^{12})$$

$||[r_{u^1}, r_{u^2}]||$ – площадь параллелограмма, натянутого на вектора r_{u^1} и r_{u^2}

$||[r_{u^1}, r_{u^2}]|| = \sqrt{\det g_{ij}}$, где g_{ij} – матрица Грамма системы векторов r_{u^1} и r_{u^2}

$$\begin{aligned} \omega|_M &= (X^1 A^{23} + X^2 A^{31} + X^3 A^{12}) du^1 \wedge du^2 \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{\det g_{ij}}} = \left(X^1 \frac{A^{23}}{\sqrt{\det g_{ij}}} + X^2 \frac{A^{31}}{\sqrt{\det g_{ij}}} + \right. \\ &\left. X^3 \frac{A^{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}} \right) \sqrt{\det g_{ij}} du^1 \wedge du^2 = \left(X^1 \frac{A^{23}}{\sqrt{\det g_{ij}}} + X^2 \frac{A^{31}}{\sqrt{\det g_{ij}}} + X^3 \frac{A^{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}} \right) * 1_M = \langle x, N \rangle \\ &(* 1_M) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_M \langle x, N \rangle (* 1_M) = \int_U \operatorname{div} X * 1_{\mathbb{R}^3}$$

Упр. Записать дивергенцию в криволинейных координатах.

Формула Стокса для двумерной поверхности.

$M^2 \subset \mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$ – двумерное многообразие с краем, $\partial M = \cup \gamma_i$, $M^2 \subset U \subset \mathbb{R}^3$
задано гладкое векторное поле $X = (X^1, X^2, X^3)$ в U .

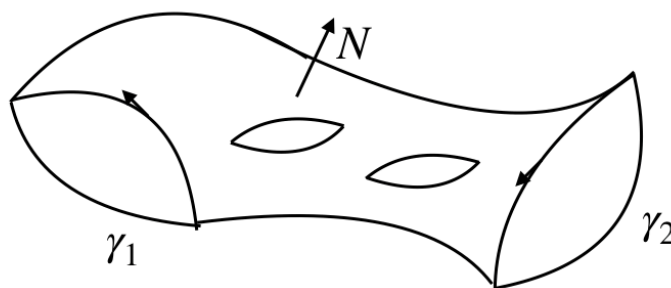


Рис. 5.7. к формуле Стокса.

$$\text{Опр. } \text{rot } X = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x^3}{\partial u^1} - \frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial x^1}{\partial u^1} - \frac{\partial x^3}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^1} - \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \right)$$

Формула Стокса:

$$\int_M \langle \text{rot } X, N \rangle (*1_M) = \sum_i \int_{\gamma_i} \langle x, \dot{\gamma}_i \rangle dt$$

Теорема: пусть: $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, ограничение которой $\omega|_M = \langle x, \dot{\gamma}_i \rangle dt$,

$$d\omega = \langle \text{rot } X, N \rangle * 1_M.$$

Тогда $\omega = \text{Опуск}(X)$.

Доказательство в качестве упражнений (выкладки выше).

Группы когомологий де Рама.

Пусть M^n — гладкое многообразие.

Нужно по этому гладкому многообразию построить несколько алгебраических объектов. В общем случае — группы, мы рассмотрим случай линейных пространств.

Общая идея алгебраической топологии — заменять сложные топологические объекты на более простые алгебраические, которые так или иначе наследуют их свойства.

Например, каждому многообразию можно поставить в соответствие его инвариант — размерность, что тоже в каком-то смысле алгебраический элемент — число. Размерность постоянна при диффеоморфизмах, поэтому если у нас два многообразия разных размерностей, то они точно не диффеоморфны. Однако бывают разные многообразия одинаковых размерностей, которые при этом не диффеоморфны, поэтому размерность — не инвариант.

Хочется расширить список инвариантов. Один из вариантов — сопоставление многообразию некоторого набора связанных с ним групп или линейных пространств. Они будут обладать тем же свойством: если многообразие диффеоморфно, то они совпадают. Поэтому если удастся выяснить, что они не совпадают, то диффеоморфизма нет — общая идея такого подхода. К сожалению, в общем случае когомологии не дают полного инварианта, хотя в некоторых маломерных случаях дают. Они не универсальны — никаких универсальных классифицирующих инвариантов для многообразий не существует.

Будем строить когомологии с помощью дифференциальных форм.

Алгебра внешних дифференциальных форм $\Omega^*(M) = \bigcup_{k=0}^n \Omega^k(M)$, дифференциальный оператор: $d_k: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$.

Свойства дифференциального оператора:

$$1). d \circ d = 0, d_{k+1} \circ d_k = 0$$

можем выстроить такую цепочку: $0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n \xrightarrow{d_n} 0$

$$\Rightarrow \text{Im } d_{k-1} \subset \text{Ker } d_k$$

$$2). H^k = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1} - k\text{-ая группа когомология на } M, k = 1, \dots, n.$$

Если есть $F: M \rightarrow N$, то есть $\Omega^k(M) \leftarrow \Omega^k(N): F^*$, тогда $F^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$, если F – диффеоморфизм, то соответствующее отображение – изоморфизм линейных пространств $\Rightarrow$ диффеоморфное многообразие имеет одинаковые группы когомологий, которые являются инвариантом относительно диффеоморфизмов.

Лекция 6. Когомологии.

Группы когомологий де Рама.

Пусть M^n — гладкое многообразие, на котором есть алгебра внешних дифференциальных форм $\Omega^*(M)$.

Опр. $\omega \in \Omega^k(M)$ — замкнутая форма, если $d\omega = 0$. Линейная комбинация замкнутых форм — также линейная комбинация.

Множество замкнутых k -форм образуют линейное пространство $Z^k(M)$

Опр. ω — точная форма, если существует такая δ , что $d\delta = \omega$, $\delta \in \Omega^{k-1}(M)$. $B^k(M) \subset \Omega^k$ — линейное пространство из точных k -форм.

Так как $d(d\omega) = 0 \Rightarrow B^k(M) \subset Z^k$, т.е. каждая точная форма является замкнутой.

Опр. $Z^k/B^k = H^k(M)$ — фактор-пространство — k -мерная группа когомология многообразия M .

Фактор-группа.

G — группа, $H \subset G$ — подгруппа.

Опр. Левые смежные классы $g \in G$ по H — множество $g \cdot H \equiv gH = \{gh | h \in H\}$.

$$G = \bigcup_g gH$$

Опр. Подгруппа называется нормальной, если $g \cdot H = H \cdot g \forall g \in G$.

Для нормальной подгруппы корректно определена операция $(g_1H) \odot (g_2H) = (g_1 \cdot g_2)H$

Опр. Соответствующая операция — фактор-группа, которая обозначается G/H .

Опр. Элементы g_1 и g_2 эквивалентны, если существует такой элемент $h \in H$, что $g_1 h = g_2$.

Если h — нормальная подгруппа, то это класс эквивалентности всегда, то есть $[g] = gH$.

Если группа g коммутативна, то любая подгруппа нормальна и по ней можно взять фактор-группу.

Опр. z_1 и z_2 эквивалентные векторы относительно B , если $(z_1 \text{ и } z_2) \in B$.

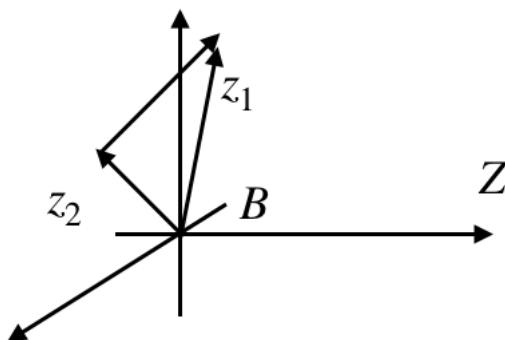


Рис. 6.1. К определению эквивалентных векторов.

Класс эквивалентности замкнутой k -мерной формы $[\omega]$ является элементом H^k .

k -мерная форма $[\omega]$ представима в виде $[\omega] = \omega + B^k$, где ω — замкнутая форма.

Опр. Замкнутые формы ω_1 и ω_2 называются когомологичными, если $(\omega_1 - \omega_2) \in B^k$.

Из прошлой лекции:

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n \xrightarrow{d_n} 0$$

$Z^k = \text{Ker } d_k$, $B^k = \text{Im } d_{k-1}$, $H^k = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1}$ — k -ая группа когомология на M , $k = 1, \dots, n$.

$$H^0(M) = \text{Ker } d_0 / \{0\} = \text{Ker } d_0$$

Примеры:

1). Пусть M - гладкое связное многообразие, $H^0(M) = \text{Ker } d_0$, $d_0: 0 \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \Omega^1$, $\Omega^0 \in C^\infty(M) \Rightarrow \text{Ker } d_0 = \{f \in C^\infty \mid df \equiv 0\}, f(x) = \text{const.}$

Упр. Пусть M — не связное, а $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$, $H^0(M)$ —?

2). $M = \mathbb{R}^1$, $H^0(\mathbb{R}^1) = \mathbb{R}^1$, $H^0(\mathbb{R}^1) = 0$ при $k \geq 2$, найдем $H^1(\mathbb{R}^1)$:

$\Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\mathbb{R}^1) \xrightarrow{d_1} 0$, $H^1(\mathbb{R}^1) = \text{Ker } d_1 / \text{Im } d_0 = \Omega^1(\mathbb{R}^1) / \text{Im } d_0$. Если $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^1)$, то $\omega = f(t)dt$.

Когда существует $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1): dg = f(t)dt$?

Возьмем $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$, тогда $dg(t) = f(t)dt$. Другими словами, $\text{Im } d_0 = \Omega^1$, $H^1(\mathbb{R}^1) = \{0\}$.

Как посчитать первую когомологию в общем случае?

Пусть $\omega \in \Omega^k(M)$, в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$, пусть ω замкнута: $\omega \in Z^1 \Leftrightarrow d\omega = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \wedge dx^\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x^\alpha} = 0 \forall \alpha, \beta$ — условие замкнутости.

Условие точности: $\exists g \in C^\infty(M): dg = \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \omega$.

Проверка точности — проверка разрешимости дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \omega_\alpha, \alpha = 1 \dots n. \right.$$

Необходимое условие разрешимости: если $\exists g: \frac{\partial^2 g}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$ и g — решение системы $\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \omega_\alpha$, где $\alpha = 1 \dots n$, то $\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x^\alpha}$.

Необходимое условие оказывается достаточным $\Leftrightarrow \omega$ точна.

Пример: $M = S^1$ – окружность. $H^0(S^1) = \mathbb{R}$, $H^k(S^1) = 0$ при $k \geq 2$, $H^1(S^1) = \Omega^1(S^1)/\text{Im } d_0$.

Пусть $\omega \in \Omega^1(S^1)$ и $\omega = dg$, тогда по формуле Стокса $\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} dy = \int_{\partial S^1 = \emptyset} g = 0$. Итак, если форма точна, то интеграл от нее по окружности равен 0.

$d\varphi$ – пример замкнутой, но не точной формы, так как $\int_{S^1} d\varphi = 2\pi$, где φ – угловая координата на окружности. Но φ – не является функцией на окружности, в точке 2π она не является непрерывной.

Лемма. $\omega \in \Omega^1(S^1)$ точна $\Leftrightarrow \int_{S^1} \omega = 0$.

Доказательство: пусть φ – координата S^1 , $\omega = f(\varphi)d\varphi$ – гладкая периодическая функция.

Построим на окружности функцию $g = \int_0^t f(\varphi)d\varphi$ – гладкая функция на прямой и $g(t + 2\pi) = g(t) \forall t$.

$$g(t + 2\pi) = \int_0^{t+2\pi} f(\varphi)d\varphi = \int_0^t + \int_t^{t+2\pi} = g(t) + \int_{S^1} \omega = g(t) + 0 = 0.$$

$$\text{Im } d_0 = \{\omega \mid \int_{S^1} \omega = 0\}$$

Теорема о гомоморфизме: G_1 и G_2 – группы, $f: G_1 \rightarrow G_2$ – гомоморфизм. $\text{Ker } f = \{x \in G_1 \mid f(x) = G_2\} \subset G_1$, $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in G_1\} \subset G_2$.

$$f(G_1) = \text{Im } f \cong G_1 / \text{Ker } f.$$

Рассмотрим гомоморфизм интегрирования: $i: \Omega^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $i(\omega) = \int_{S^1} \omega$, $\text{Ker } i = \text{Im } d_0$, $\text{Im } i = \mathbb{R} \cong \Omega^1 / \text{Ker } i = \text{Im } d_0 / \text{Im } d_0 = H^1$.

$$\text{УТВ. } H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, k = 0, 1 \\ 0, k \geq 2 \end{cases} \neq H^k(\mathbb{R}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, k = 0 \\ 0, k \geq 1 \end{cases}$$

Когомологии и отображения.

$F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий.

$$\Omega^k(M) \leftarrow \Omega^k(N): F^*, [\omega] \in H^k(N)$$

$$\text{Опр. } F^*([\omega]) = [F^*(\omega)], F^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$$

Лемма: F^* определено корректно.

Доказательство: нужно доказать:

- 1). $[F^*(\omega)]$ имеет смысл
- 2). $F^*(\omega)$ замкнута

Если $\omega \in Z^k \Rightarrow f(\omega) \in Z^k$, так как $d(F^*\omega) = F^*d\omega = F^*0 = 0$.

$$\omega_1, \omega_2 \in Z^k: [\omega_1] = [\omega_2], \text{ тогда проверим, что } [F^*(\omega_1)] = [F^*(\omega_2)]$$

$$\omega_1, \omega_2 \in Z^k: [\omega_1] = [\omega_2] \Rightarrow \omega_1 \sim \omega_2 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = d\delta$$

$$\Rightarrow F^*(\omega_1) - F^*(\omega_2) = F^*(\omega_1 - \omega_2) = F^*(d\delta) = dF^*\delta \Rightarrow [F^*(\omega_1)] = [F^*(\omega_2)]$$

Свойства F^*

- 1) F^* — линейное отображение
- 2) $1_M: M \rightarrow M$ тождественно $\rightarrow 1_M^*$ — тождественно линейное отображение.
- 3) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

Теорема: M диффеоморфно $N \Rightarrow H^k(M) = H^k(N) \forall k$.

Доказательство: $F: M \xrightarrow{\cong} N: F^{-1}, F \circ F^{-1} = 1_N, F^{-1} \circ F = 1_M$

$F^*: H^k(N) \xrightarrow{\cong} H^k(M): (F^{-1})^*, F^* \circ (F^{-1})^* \text{ и } (F^{-1})^* \circ F^* - \text{тождественные отображения}$
линейных пространств $\Rightarrow F^* \text{ и } (F^{-1})^* \text{ взаимно обратные, соответствующее}$
пространство изоморфно.

Группы когомологий сохраняются при диффеоморфизме и могут быть использованы как инвариант.

Если группы когомологий разные, то пространство недиффеоморфно. В обратную сторону неверно.

Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.

Пусть $f, g: X \rightarrow Y$ - непрерывные отображения топологических пространств.

Опр. $f \sim g$, если $\exists F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ и $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, 1) = g(x) \forall x$.

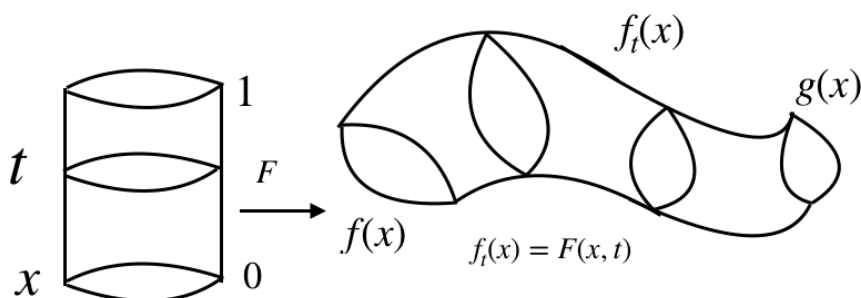


Рис. 6.2. $\{f_t\}$ — непрерывное семейство отображений.

Опр. Если X, Y, f, g — гладкие, то гомотопия F — гладкая, т.е. отображение F гладкое.

Упр. Доказать, что отношение на отображениях - отношение эквивалентности.

Опр. Пространство X гомотопически эквивалентно Y ($X \sim Y$) $\Leftrightarrow \exists f: X \rightarrow Y$ и $\exists g: Y \rightarrow X$ такие, что $g \circ f \sim 1_X, f \circ g \sim 1_Y$

Гомеоморфные пространства гомотопически эквивалентны.

Пример: одна точка $X = * = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^n$. покажем, что они гомотопически эквивалентны. $f: * \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\exists g: \mathbb{R}^n \rightarrow *$, $g(x) = *$, $f(*) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

$$g \circ f: * \rightarrow * = 1_*$$

$$f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f \circ g(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Рассмотрим гомотопию $F(x, t) = tx$, $F(x, 1) = x$, $f \circ g = F(x, 0) = 0$, $F(\bullet, 1) = 1_{\mathbb{R}^n}$

Гомотопически эквивалентные пространства имеют одинаковые группы когомологий.

Теорема: пусть $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ – гладкие отображения гладких многообразий. $f_0 \sim f_1$ – гладко гомотопны $\Rightarrow f_0^* = f_1^*$ по $H^k(Y) \forall k$.

Зам. Если вместо $H^k(Y)$ написать $\omega^k(Y)$, то, вообще говоря, будет неверно. Гомоморфизмы, порождающие гомотопные отображения на всех формах, равны только на когомологиях.

Доказательство:

1). Построим отображение (цепная гомотопия) $K: \Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^{k-1}(X)$ такое, что

$$(f_0^* - f_1^*)(\omega) = \pm (kd\omega - dK\omega)(\omega)$$

Покажем, что этого будет достаточно: $H^k \ni [\omega] \ni \omega (f_0^* - f_1^*)\omega = \pm (kd\omega - dK\omega) = \pm d(K\omega) - \text{это } 0 \text{ в } H^k(X)$

Пусть $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ – гладкая гомотопия, связывающая $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$, $F^*: \Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^k(X \times [0, 1])$

Координаты $X \times [0, 1]$ $(x^1, \dots, x^n, t)$, $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты на X , $t \in [0, 1]$, поэтому, взяв $\omega \in \Omega^k(X \times [0, 1])$ и записав в координатах $|\omega| = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$$\Omega(x, t) = \Omega'(x, t) (\text{слагаемые без } dt) + \Omega''(x, t) (\text{слагаемые с } dt)$$

Ω' и Ω'' – внешние формы по X , зависящие от параметра t

Построение K :

$$\omega: \Omega^k(Y), F^*(\omega) \in \Omega^k(X \times [0, 1]), F^*(\omega) = \Omega'(x, t) + \Omega''(x, t) \wedge dt$$

$$\text{Положим } K(\omega) = \int_0^1 \Omega'' dt \in \Omega^{k-1}(X)$$

Опр. Формы на $X \times [0, 1]$, не зависящие от dt , называются свободными от dt .

Лемма: $\Omega(x, t)$ — формы на $X \times [0, 1]$, свободные от dt .

$$d\Omega(x, t) = d_x \Omega(x, t) \pm \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, t) \wedge dt$$

Доказательство: посчитаем $Kd\omega$:

$F^*(d\omega) = dF^*\omega = d(\Omega' + \Omega'' \wedge dt)$, где Ω' и Ω'' — формы, свободные от dt , тогда

$$dF^*\omega = d_x \Omega' \pm \frac{\partial \Omega'}{\partial t} \wedge dt + d_x \Omega'' \wedge dt = d_x \Omega' + (d_x \Omega'' \pm \frac{\partial \Omega'}{\partial t}) \wedge dt$$

$$\Rightarrow K(\omega) = \int_0^1 d_x \Omega'' \pm \frac{\partial \Omega'}{\partial t} dt = d_x \int_0^1 \Omega'' dt = \pm(\Omega'|_{t=1} - \Omega'|_{t=0})$$

$$dK\omega = d_x \int_0^1 \Omega'' dt$$

$$Kd\omega - dK\omega = \pm(\Omega'|_{t=1} - \Omega'|_{t=0}) = |\Omega'|_{t=1} = F^*(\omega)|_{t=1} = f_1^*(\omega) \text{ и } \Omega'|_{t=0} = f_0^*(\omega) = f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega)$$

Лекция 7. Ковариантное дифференцирование.

Теорема: (из прошлой лекции) пусть $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ – гладкие отображения гладких многообразий. $f_0 \sim f_1$ – гладко гомотопны $\Rightarrow f_0^* = f_1^*$ по $H^k(Y) \forall k$.

Сл. $X \sim Y$ – гомотопически эквиваленты $\Rightarrow H^k(X) = H^k(Y) \forall k$.

Доказательство: $f: X \rightarrow Y$ и $\exists g: Y \rightarrow X$, такие, что $g \circ f \sim 1_X$, $f \circ g \sim 1_Y$
 $\Rightarrow (f \circ g)^* = (g \circ f)^* = 1^* \Rightarrow f^*$ и g^* – взаимно обратные гомоморфизмы, а значит, изоморфизмы.

Лемма Пуанкаре: $H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R}, k = 0 \\ 0, k \geq 1 \end{cases}$

Симплектическая геометрия.

Опр. Симплектическая структура на M – замкнутая невырожденная форма $\omega \in \Omega^2(M)$, т.е. $d\omega = 0$, в $(x^1, \dots, x^n)$ $\det(\omega_{ij}) \neq 0$.

Опр. Многообразие называется симплектическим, если (M, ω) .

Примеры:

1). В $\mathbb{R}^{2n}(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ $\omega = \sum_{i=1, \dots, n} dx^i \wedge dy^i$, $(\omega_{ij}) =$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \det(\omega_{ij}) \neq 0$$

2). Кокасательное расслоение произвольного многообразия T^*M .

Рассматриваем $\bigcup_{P \in M} T_P^*M$ и «задаем» стандартную структуру многообразия с помощью канонической проекции $\xi \in T_P^*M (\xi, P) \mapsto P$, координаты устроены так: $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$

Симплектическая структура на этом пространстве задается следующим образом:

v – касательный вектор точки (ξ, P) в пространстве T^*M , π – каноническая проекция, с помощью которой проецируем на многообразие M , $d\pi|_P(v) \in T_P M$. Определим линейный функционал $\alpha(v) = \xi(d\pi|_P(v))$, $\alpha \in \Omega^1(T^*M)$ – определили каноническую 1-форму по касательному расслоению.

Сделаем из этой 1-формы замкнутую 2-форму:

$\omega = d\alpha$ – замкнутая 2-форма на T^*M .

Запишем ее в координатах, тем самым проверив, что она невырожденная:

$\alpha = \sum_i p_i dx^i$, $\omega = d\alpha = \sum_i dp_i dx^i \Rightarrow \omega$ – симплектическая структура.

Симплектическая структура – невырожденный тензор типа $(0, 2)$, поэтому с его помощью можно опускать и поднимать индексы. Это полезно для построения по функциям векторных полей.

Если на гладком многообразии есть произвольная гладкая функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, то

$df \in \Omega^1$, $(grad f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ – риманов случай.

В случае симплектического многообразия индексы можно поднимать с помощью симплектической структуры. То, что получается из дифференциала, – косой градиент.

Опр. $(sgrad f)^i = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ – косой градиент.

$$(\omega^{ij}) = (\omega_{ij})^{-1}, \quad \omega^{ij} \omega_{ij} = \delta_k^i$$

Упр. Рассмотреть $\mathbb{R}^{2n}$, $\sum_{i=1, \dots, n} dx^i \wedge dy^i$, $f(x, y)$, $sgrad f = (\frac{\partial f}{\partial y^1} \dots \frac{\partial f}{\partial y^n} - \frac{\partial f}{\partial x^1} \dots \frac{\partial f}{\partial x^n})$

Канонические уравнения Гамильтона $(\dot{x}, \dot{y}) = sgrad H$, $H(x, y)$ – функция

Гамильтона, $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$.

Уравнения Гамильтона – уравнения на симплектическом многообразии, Лагранжева механика – на касательном расслоении (геометрический смысл лагранжиана – функция, зависящая от координат и скоростей материальной точки, а гамильтонова механика – механика на кокасательном расслоении). Функция Гамильтона – функция обобщенных координат и обобщенных импульсов.

Наличие симплектической структуры – гораздо более сильное условие, чем наличие римановой метрики. Симплектические многообразия обладают многими свойствами.

Свойства симплектических многообразий:

1). **Теорема:** (M, ω) – симплектическое многообразие $\Rightarrow \dim M = 2n$.
(из линейной алгебры: если есть невырожденная кососимметрическая матрица, то ее размер обязательно четный)

Доказательство: обозначим $\Omega = \omega_{ij}$, $0 \neq \det \Omega = \det \Omega^T = \det(-\Omega) = (-1)^{\dim M} \det \Omega \Rightarrow \dim M = 2n$

2). **Теорема:** (M, ω) – компактное симплектическое многообразие размерности $2n \Rightarrow H^2(M) \neq 0$

Идея доказательства: показать, что ω не является точной, тогда она замкнута и порождает нетривиальный класс $H^2(M)$.

Пусть ω точна: $\omega = d\alpha$. Рассмотрим такой пример: $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ раз}} \in \Omega^{2n}(M)$ – старшая

форма (в силу этого она заведомо замкнута) $= \beta$ и $d\beta = 0$ (точная): $d(\alpha \wedge \dots \wedge \omega) = \beta$.

Противоречие будет в следующем: если β точна, то $\int_M \beta = 0$, - так как β – точная (следствие из формулы Стокса), но это невозможно. Это можно показать, вычислив существенную компоненту β и показав, что она всюду положительна в силу невырожденности $\Rightarrow \int_M \beta > 0$ – противоречие.

Ковариантное дифференцирование.

Пусть имеется $T \in \mathbb{T}_q^p$ – гладкое тензорное поле на M . пусть имеются локальные координаты $(x^1, \dots, x^n) \mapsto T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$.

Будем рассматривать соответствие $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)}{\partial x^k}$, не являющееся тензором:

$$\frac{\partial T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \underbrace{\left(T^{I_p}_{J_p} \frac{\partial x^{J_q}}{\partial x^{J'_q}} \frac{\partial x^{I'_p}}{\partial x^{I'_p}} \right)}_{\substack{\text{тензорный} \\ \text{закон}}} \underbrace{\left(\frac{\partial x^{J_q}}{\partial x^{J'_q}} \frac{\partial x^{I'_p}}{\partial x^{I'_p}} \right)}_{\substack{2n \text{ слагаемых,} \\ \text{содержащих вторые производные} \\ \text{от замены координат}}}$$

Операцию частного дифференцирования можно подправить, определив ковариантное дифференцирование. Сделаем это в 2 этапа, рассмотрев 2 случая.

1. Частный случай.

Пусть $M = \mathbb{R}^n$, в качестве глобальных координат вводят евклидовы координаты – координаты, согласованные со скалярным произведением, $(z^1, \dots, z^n)$.

Определим операцию в этих координатах T – тензорное поле типа (p, q) . Определим

новое тензорное поле $\nabla T \in \mathbb{T}^p_{q+1}$, $\nabla T: (z^1, \dots, z^n) \mapsto \nabla T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \frac{\partial T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{\partial z^k}$

Опр. ∇T – ковариантная производная в евклидовой связности.

Выясним, как выглядит эта операция в произвольных координатах.

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ – произвольные координаты на $\mathbb{R}^n$, $T: (x^1, \dots, x^n) \mapsto T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}$,

$$\nabla T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = ?$$

Перейдем в координаты $(z^1, \dots, z^n)$, получится $\tilde{T}(z)$, в них $\tilde{\nabla} \tilde{T}(z) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z^\gamma}$, и вернемся обратно к $\nabla T(x)$.

$$\nabla T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \gamma = \frac{\partial}{\partial z^\gamma} \tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} + = \frac{\partial T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}}{\partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial z^\gamma} \frac{\partial z^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial z^{\beta_1}} \dots$$

$$+ \underbrace{T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{\partial^2 z^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial x^c}{\partial x^c} \frac{\partial z^{\alpha_2}}{\partial z^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots}_{p \text{ штук}} + \underbrace{T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{\partial z^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial^2 x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1}} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial z^{\gamma}} \frac{\partial x^{b_2}}{\partial x^{\beta_2}} \dots}_{q \text{ штук}} +$$

$$\nabla T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} k = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{\alpha_p}} \frac{\partial z^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial z^{\beta_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial x^k} \widetilde{\nabla} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \gamma = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial z^k} + T_{j_1 \dots j_q}^{a_1 \dots a_p} \frac{\partial^2 z^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{a_p}} + \dots + T_{b_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial^2 x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1}} \frac{\partial z^{\beta_1}}{\partial z^{\gamma}} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^k} + \dots$$

p штук q штук

Лемма: $\frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial z^{\alpha}} = - \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{\beta} \partial z^{\gamma}} \frac{\partial z^{\beta}}{\partial x^j} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial x^k}$

Доказательство: $\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^{\alpha}} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i$, $\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{\alpha} \partial z^{\beta}} \frac{\partial z^{\beta}}{\partial x^k} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial z^{\alpha}} \frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^k} = 0$.

Опр. Символ Кристоффеля евклидовой связности - $\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^{\alpha}} \frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^k}$

Тогда $\nabla T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} k = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} + T_{j_1 \dots j_q}^{a_1 \dots a_p} \Gamma_{ak}^{i_1} + \dots + T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1} a} \Gamma_{ak}^{i_p} - T_{b j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{j_1 k}^b - \dots - T_{j_1 \dots j_{q-1} b} \Gamma_{j_p k}^b$ - формула для ковариантной производной в произвольной системе координат.

Теперь у нас есть тензорная операция, которая произвольному тензорному полю $T \in \mathbb{T}_q^p$ ставит в соответствие тензорное поле другого типа $T \in \mathbb{T}_{q+1}^p$ и которое в выбранной системе координат совпадает с обычным частным дифференцированием.

Заметим, что символы Кристоффеля в каждой координатах разные: $(x^1, \dots, x^n) \mapsto$

$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^{\alpha}} \frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^k}$ - не тензор.

Лемма: $(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto \Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}, \Gamma_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$,

Упр. Самостоятельно провести доказательство.

Обозначения:

1). в некоторой литературе пишут Γ_{kj}^i вместо Γ_{jk}^i , у нас $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, пока что это не имеет значения, потому что Γ_{jk}^i симметрична по jk , но позже возникнет разница в знаках.

2). Иногда вместо $\nabla_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} k$ пишут $\nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, у физиков $\nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q ; k}^{i_1 \dots i_p}$

Как обобщить эту конструкцию на общий случай?

Аффинные связности.

Пусть M – гладкое многообразие.

Опр. На M задана гладкая аффинная связность Γ , если задано соответствие Γ :

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \Gamma_{jk}^i, (x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto \Gamma_{j'k'}^{i'}, \Gamma_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}.$$

Примеры:

1). $M = \mathbb{R}^n(z^1, \dots, z^n)$, $\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k}$ – евклидова связность.

2). Регулярная поверхность $M \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha} \right)$ – аффинная связность.

Операция тензорного дифференцирования.

Пусть (M, Γ) — гладкое многообразие с аффинной связностью.

Тогда $\nabla: T_q^p \rightarrow T_{q+1}^p$, в локальных координатах $\nabla T: (x^1, \dots, x^n) \mapsto \nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} =$

$$\frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} + T_{j_1 \dots j_q}^{a i_2 i_3 \dots i_p} \Gamma_{ak}^{i_1} + \dots + T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1} a} \Gamma_{ak}^{i_p} - T_{bj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{j_1 k}^b - \dots - T_{j_1 \dots j_{q-1} b}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{j_q k}^b$$

$\Rightarrow \nabla T$ — корректно определенное тензорное поле типа $(p, q+1)$

Существуют ли координаты $(z^1, \dots, z^n)$ для аффинной связности Γ : $\Gamma_{jk}^i(z) = 0$?

Для евклидовой свзности такие существуют (если такие координаты существуют, то их называют евклидовыми).

Тензор кручения аффинной связности: $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \Omega_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$

Упр. Проверить, что Ω_{jk}^i — тензор типа $(1, 2)$ (с помощью закона преобразования получить закон преобразования компонент Ω_{jk}^i)

Если тензор кручения $\Omega_{jk}^i \neq 0$, то евклидовых координат не существует.

Упр. Построить пример связности, в которой $\Omega_{jk}^i \neq 0$.

Упр. В фиксированных координатах $(x) \mapsto \Gamma_{jk}^i$, в остальных пересчитаем по закону преобразования. Проверить, что получится аффинная связность.

Лекция 8. Риманова связность.

Аффинные связности.

Опр. На M задана гладкая аффинная связность Γ , если задано соответствие Γ :

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \Gamma_{jk}^i, (x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto \Gamma_{j'k'}^{i'}, \Gamma_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}.$$

Если такая связность задана, то можно определить тензорную операцию, которую мы назвали ковариантным дифференцированием:

$$\nabla: \mathbb{T}_q^p \rightarrow \mathbb{T}_{q+1}^p$$

$$\nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} + T_{j_1 \dots j_q}^{a i_2 i_3 \dots i_p} \Gamma_{ak}^{i_1} + \dots + T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1} a} \Gamma_{ak}^{i_p} - T_{bj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{j_1 k}^b - \dots$$

Примеры:

- 1). Евклидова связность
- 2). Ковариантное дифференцирование, построенное на поверхностях

Ковариантное дифференцирование вдоль векторного поля или вдоль кривой.

Если у нас есть векторное поле X , то наряду с обычным ковариантным дифференцированием можно определить ковариантное дифференцирование вдоль векторного поля $\nabla_X: \mathbb{T}_q^p \rightarrow \mathbb{T}_q^p$, эта операция определяется как

$$C_{q+1}^1(X \otimes \nabla T) = \nabla_X T$$

$$\text{В координатах } X^\alpha \nabla_\alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \nabla_X T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

Если фиксированы координаты $(x^1, \dots, x^n)$, в этих координатах имеются координатные векторные поля ∂_{x^i} , тогда можно одно векторное поле можно продифференцировать вдоль другого векторного поля.

Лемма: $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ji}^\alpha \partial_{x^\alpha}$

Символ Кристоффеля: при дифференцировании векторного поля вдоль другого, получается векторное поле, которое раскладывается по базису, коэффициенты этого разложения – символы Кристоффеля.

Доказательство: проверка справедливости этой формулы в координатах:

$$(x^1, \dots, x^n), \quad \partial_{x^i} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

i

$$(\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j})^k = (\partial_{x^j})^\alpha \nabla_\alpha \partial_{x^j}^k = \nabla_i \partial_{x^j}^k = \frac{\partial}{\partial x^i} (\partial_{x^j}^k) + \partial_{x^j}^\alpha \Gamma_{\alpha i}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Дифференцирование вдоль кривой.

Опр. Если γ — гладкая кривая, то ковариантная производная вдоль кривой от тензорного поля – производная от этого поля, вычисленная вдоль вектора скорости этой кривой (определена только в точках кривой): $\nabla_{\dot{\gamma}} T = \dot{\gamma}^i \nabla_i T$

Лемма: $\nabla_{\dot{\gamma}} T$ зависит только от значения поля $T|_\gamma$.

Формально для написания этого определения нужно, чтобы поле T было определено хотя бы в какой-либо окрестности кривой, потому что в определение ковариантной производной входит частная производная, для подсчета которой нужно, чтобы функция была определена в некоторой окрестности. Из леммы вытекает, что это условие не нужно, чтобы подсчитать ковариантную производную, достаточно знать только ограничение поля на кривую.

Доказательство: если $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты, $x^i(t)$ — координатная функция на кривой γ . Тогда

$$\nabla_{\dot{\gamma}} T = \dot{x}^i \nabla_i T = \dot{x}^i \left(\frac{\partial T}{\partial x^i} + \dots \right) = \frac{\partial T}{\partial x^i} \dot{x}^i + \dot{x}^i (\dots) = \frac{dT}{dt} + \dot{x}^i (\dots)$$

Это позволяет определять $\nabla_{\dot{\gamma}} T$ для тензорных полей, которые заданы не на всем многообразии, а только вдоль кривой γ .

Пример: $\nabla_{\dot{\gamma}}$ — определено только в точках кривой

Свойства ковариантного дифференцирования.

Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью, X — векторное поле,
 $\nabla_x: \mathbb{T}_q^p \rightarrow \mathbb{T}_q^p$

$$1). \nabla : \mathbb{T}_q^p \rightarrow \mathbb{T}_{q+1}^p$$

2). Линейность

$$\nabla (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) = \alpha_1 \nabla T_1 + \alpha_2 \nabla T_2$$

$$\nabla_x (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) = \alpha_1 \nabla_x T_1 + \alpha_2 \nabla_x T_2$$

$$3). \nabla f = df, \nabla_x(f) = x(f)$$

$$4). \nabla_x(T \otimes S) = \nabla_x T \otimes S + T \otimes \nabla_x S$$

$$\nabla_k(T_j^I S_B^A) = (\nabla_k T_j^I) S_B^A + T_j^I \nabla_k S_B^A$$

$$5). \text{Коммутирует со сверткой: } \nabla C_b^a T = C_b^a \nabla T$$

Свойства 1, 2 и 3 вытекают из определения.

Доказательство 4 свойства: пусть (для простоты выкладок) $T, S \in \mathbb{T}_1^1, T \otimes S \in \mathbb{T}_2^2$,
 $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты.

$$\begin{aligned} \nabla_k(T \otimes S)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} &= \frac{\partial}{\partial x^k} (T \otimes S)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + (T \otimes S)_{j_1 j_2}^{a i_2} \Gamma_{ak}^{i_1} + (T \otimes S)_{j_1 j_2}^{i_1 a} \Gamma_{ak}^{i_2} - \\ & (T \otimes S)_{b j_2}^{i_1 i_2} \Gamma_{j_1 k}^b - (T \otimes S)_{j_1 b}^{i_1 i_2} \Gamma_{j_2 k}^b = \left| (T \otimes S)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = T_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^{i_2} \right| = \frac{\partial T_{j_1}^{i_1}}{\partial x^k} S_{j_2}^{i_2} + T_{j_1}^{i_1} \frac{\partial S_{j_2}^{i_2}}{\partial x^k} + \\ & T_{j_1}^a S_{j_2}^{i_2} \Gamma_{ak}^{i_1} + T_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^a \Gamma_{ak}^{i_2} - T_b^{i_1} S_{j_2}^{i_2} \Gamma_{j_1 k}^b - T_{j_1}^{i_1} S_b^{i_2} \Gamma_{j_2 k}^b = \left(\frac{\partial T_{j_1}^{i_1}}{\partial x^k} + T_{j_1}^a \Gamma_{ak}^{i_1} - \right. \\ & \left. T_b^{i_1} \Gamma_{j_1 k}^b \right) S_{j_2}^{i_2} + \left(\frac{\partial S_{j_2}^{i_2}}{\partial x^k} + S_{j_2}^a \Gamma_{ak}^{i_2} - S_b^{i_2} \Gamma_{j_2 k}^b \right) T_{j_1}^{i_1} = \nabla_x T_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^{i_2} + T_{j_1}^{i_1} \nabla_x S_{j_2}^{i_2} \end{aligned}$$

Доказательство 5 свойства: рассмотрим случай, когда $T \in \mathbb{T}_2^2$, и проверим, что

$$C_1^1(\nabla T) = \nabla C_1^1 T$$

$$\nabla_k T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \frac{\partial T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}}{\partial x^k} + T_{j_1 j_2}^a{}^{i_2} \Gamma_{ak}^{i_1} + T_{j_1 j_2}^{i_1 a} \Gamma_{ak}^{i_2} - T_{b j_2}^{i_1 i_2} \Gamma_{j_1 k}^b - T_{j_1 b}^{i_1 i_2} \Gamma_{j_2 k}^b$$

$$C_1^1(\nabla_k T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}) = \nabla_k T_{\alpha_1 j_2}^{\alpha i_2} = \frac{\partial T_{\alpha j_2}^{\alpha i_2}}{\partial x^k} + T_{\alpha j_2}^a{}^{i_2} \Gamma_{ak}^{\alpha} + T_{\alpha j_2}^a{}^a \Gamma_{ak}^{i_2} - T_{b j_2}^{\alpha i_2} \Gamma_{ak}^b - T_{j_1 b}^{\alpha i_2} \Gamma_{j_2 k}^b =$$

$$\nabla_k (C_1^1 T)_{j_2}^{i_2}, \text{ так как } C_1^1 T_j^i = T_{\alpha j}^{\alpha i}$$

Единственность ковариантного дифференцирования.

Теорема: пусть M — гладкое многообразие, на тензорных полях определили операцию ∇ со свойствами 1). - 5).

Тогда $\exists$ аффинная связность на M , ковариантное дифференцирование в которой совпадает с ∇ .

Доказательство: $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты, по которым нужно построить набор Γ_{jk}^i , возьмем координатное векторное поле $\partial_{x^i} \in \mathbb{T}_0^1$ и применим к нему операцию Набла $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^i} \in \mathbb{T}_1^1 \Rightarrow \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^i} = \Gamma_{ik}^j \partial_{x^i} \otimes dx^k$, где Γ_{ik}^j — коэффициенты разложения.

Поставим в соответствие $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \Gamma_{jk}^i$.

Лемма: Γ_{ik}^j задают аффинную связность на M .

Доказательство: нужно проверить, что при замене координат Γ_{ik}^j меняются по закону преобразования символов Кристоффеля.

Возьмем координаты $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, в них $\nabla_{\partial_{x^{i'}}} \partial_{x^{j'}} = \Gamma_{i'k'}^{j'} \partial_{x^{j'}} \otimes dx^{k'}$, покажем, что Γ_{ik}^j и $\Gamma_{i'k'}^{j'}$ связаны законом преобразования символов Кристоффеля.

$$\partial_{x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_{x^i}, \quad dx^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} dx^k$$

$$\nabla_{\partial_{x^{i'}}} \partial_{x^{j'}} = \nabla \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_{x^i} \right) = \nabla \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) \otimes \partial_{x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_{\partial_{x^{i'}}} \partial_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) dx^{k'} \otimes \partial_{x^i} +$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma_{ik}^j \partial_{x^i} \otimes dx^k &= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \right) + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma_{ik}^j \right) \partial_{x^j} \otimes dx^k = \Gamma_{i'k'}^{j'} \partial_{x^{j'}} \otimes dx^{k'} \\
 &= \Gamma_{i'k'}^{j'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \partial_{x^j} \otimes dx^k \\
 \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \right) + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma_{ik}^j &= \Gamma_{i'k'}^{j'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \\
 \Gamma_{i'k'}^{j'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma_{ik}^j + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^k} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \\
 \Gamma_{i'k'}^{j'} &= \Gamma_{ik}^j \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}
 \end{aligned}$$

Доказали, что оператор Набла определяет аффинную связность. Теперь нужно проверить, ковариантное дифференцирование в аффинной связности совпадает с операцией Набла.

Лемма: пусть X – произвольное векторное поле на M , тогда ∇X – результат ковариантного дифференцирования X относительно построенной аффинной связности.

Доказательство: возьмем координаты $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, $X = X^\alpha \partial_{x^\alpha}$

$$\begin{aligned}
 \nabla(X^\alpha \partial_{x^\alpha}) &= (\nabla X^\alpha) \partial_{x^\alpha} + X^\alpha \nabla \partial_{x^\alpha} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} dx^k \otimes \partial_{x^\alpha} + X^\alpha \Gamma_{\alpha k}^j \partial_{x^j} \otimes dx^k = \\
 |dx^i \otimes \partial_{x^j} = \partial_{x^j} \otimes dx^i| &= \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma_{\alpha k}^j X^\alpha \right) dx^k \otimes \partial_{x^\alpha} = \nabla_k X^j, \text{ где } \nabla_k - \text{ковариантное} \\
 &\text{дифференцирование в построенной аффинной связности.}
 \end{aligned}$$

Лемма: пусть ξ – ковекторное поле на M , тогда $\nabla \xi$ – результат ковариантного дифференцирования ξ относительно построенной аффинной связности.

Доказательство: $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ – координаты, $\xi = \xi_i dx^i$.

Возьмем ∂_{x^k} – координатное векторное поле, $C_1^1(\xi \otimes \partial_{x^k}) = \xi_k$.

$$\nabla C_1^1(\xi \otimes \partial_{x^k}) = \nabla \xi_k = \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} dx^i = C_1^1(\nabla(\xi \otimes \partial_{x^k})) = C_1^1(\nabla \xi \otimes \partial_{x^k} + \xi \nabla \otimes \partial_{x^k}) =$$

$$|\nabla \xi = \nabla \xi_{ab} dx^a \otimes \partial_{x^b}| = C_1^1(\nabla \xi_{ab} dx^a \otimes \partial_{x^b} \otimes \partial_{x^k} + \xi_i dx^i \otimes \Gamma_{kj}^i \partial_{x^i} \otimes \partial_{x^j}) = \nabla \xi_{kb} dx^b + \xi_i \Gamma_{kj}^i dx^j$$

$\nabla \xi_{ki} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} - \xi_a \Gamma_{ki}^a = \nabla_k \xi_i$ – ковариантная производная ξ , построенная в аффинной связности.

Лемма: если T – произвольное тензорное поле, то ∇T – результат ковариантного дифференцирования T в аффинной связности.

Доказательство:

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ – гладкая в карте функция, $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$ – соответствующие базисные векторы и ковекторы.

Применив оператор Набла, по формуле Лейбница получим $p + q$ слагаемых, докажем лемму и завершим доказательство теоремы.

Риманова связность.

Один из стандартных способов построения аффинных связностей – привлечение римановой метрики.

Пусть (M, g_{ij}) – риманово многообразие с римановой метрикой.

Опр. Говорят, что аффинная связность Γ согласована с метрикой g_{ij} , если метрика ковариантно постоянна: $\nabla g = 0$.

Опр. Симметричная, согласованная с метрикой связность, – риманова связность.

Теорема: на любом римановом многообразии M существует единственная риманова связность. Если в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ $g_{ij}(x)$ – компоненты римановой метрики, тогда

$$\Gamma_{ki}^a = \frac{1}{2} g^{ia} \left(\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ka}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^a} \right)$$

Γ_{ki}^a – симметричная связность (тензор кручения = 0).

Доказательство:

$$\nabla g = 0 = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{bj} \Gamma_{ik}^b - g_{ib} \Gamma_{jk}^b$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{bj} \Gamma_{ik}^b + g_{ib} \Gamma_{jk}^b \quad \forall ijk$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g_{bk} \Gamma_{ji}^b + g_{jb} \Gamma_{ki}^b$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = g_{bj} \Gamma_{ki}^b + g_{kb} \Gamma_{ij}^b$$

Воспользуемся симметричностью Γ и возьмем альтернированную сумму этих уравнений:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = 2 g_{ib} \Gamma_{jk}^b$$

Если посмотреть на $\Gamma_{jk}^1 \dots \Gamma_{jk}^n$ как на набор из n неизвестных $1 \leq i \leq n$, то получим линейную систему из n уравнений с матрицей $(2 g_{ij})$. Поскольку матрица невырожденная, то существует единственное решение, получаемое умножением левой части уравнения на обратную матрицу. Поэтому, умножив на $\frac{1}{2} g^{ij}$, получим искомое.

Таким образом доказывается единственность.

Докажем существование. В каждой карте $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ia} \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} + \dots \right)$. Мы не знаем, согласованы формулы $(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto \Gamma_{i'k'}^{j'} \frac{1}{2} g^{i'a'} \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} + \dots \right)$ или нет, поэтому мы не знаем, получилась связность или нет. Нужно проверить, что $g^{ia} \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} + \dots \right)$ и $g^{i'a'} \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} + \dots \right)$ связаны по закону преобразования символов Кристоффеля.

Зная, как преобразуются g_{ij} , можно использовать тензорный закон, три раза его продифференцировав, подставляем тензорный закон для обратной матрицы и получаем то, что нужно.

Можно пойти другим путем за счет единственности.

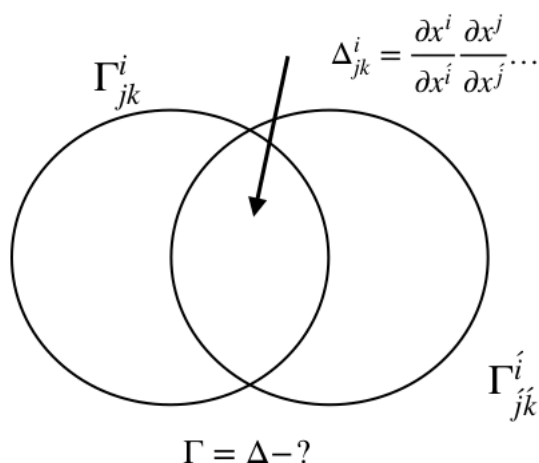


Рис. 8.1. к доказательству теоремы.

Γ – связность, согласованная с метрикой (это свойство тензорное), поэтому Δ тоже будет связностью, согласованной с метрикой, и также будет симметричной, поэтому (из единственности) Γ и Δ будут совпадать.

Следствие: на любом многообразии существует аффинная связность.

Доказательство: $M \subset \mathbb{R}^N$, тогда M – метрика.

Свойство римановой связности: X, Y, Z – векторные поля на M . Тогда

$$\nabla_x \langle f, Z \rangle = \langle \nabla_x f, Z \rangle + \langle f, \nabla_x Z \rangle$$

Упр. Доказать это свойство.

Евклидовы координаты для аффинной связности: $\Gamma_{jk}^i = 0$.

Евклидовы координаты для метрики – такие, в которых g_{ij} постоянны.

Утв. Если M — риманово многообразие, то координаты евклидовы для метрики $\Leftrightarrow$ евклидовы для римановой связности.

Доказательство: в одну сторону: евклидовы для метрики, то $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0 \Rightarrow \Gamma_{jk}^i = 0$.

В другую сторону: если евклидовы для связности, то $0 = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{bj} \Gamma_{ik}^b - g_{ib} \Gamma_{jk}^b \Rightarrow \Gamma_{jk}^i = 0 \Rightarrow \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0 \Rightarrow g_{ij} = \text{const}$, значит, координаты евклидовы для метрики.

Лекция 9. Приложения аффинных связностей.

Параллельный перенос в аффинной связности.

Пусть M – многообразие, $T \in \mathbb{T}_q^p$ – тензорное поле, значения поля в точках P и Q : $T(P)$ и $T(Q)$, Γ – аффинная связность, с помощью которой будем задавать ковариантное дифференцирование.

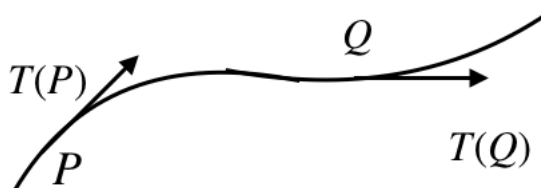


Рис. 9.1 значения поля в точках P и Q : $T(P)$ и $T(Q)$.

Как их можно сравнить? Полилинейные отображения действуют на разных линейных пространствах, и числа, вообще говоря, заданы в разных системах координат. Поэтому становится непонятным выражение «точка движется по многообразию с постоянной скоростью». «Постоянная скорость – постоянный вектор скорости», – говоря так, мы сравниваем значения в разных точках, а как сравнивать в разных точках – неясно.

В случае линейного пространства мысленно «сносим» все векторы в одну точку и сравниваем их в ней, совершая параллельный перенос.

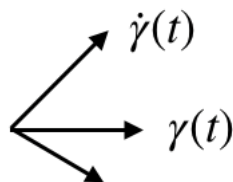


Рис. 9.2. Перенос векторов в одну точку.

Как обобщить понятие параллельного переноса на случай произвольного многообразия?

Обычно для этого используют дополнительную структуру, аффинную связность, исходя из того, что если есть параллельное векторное поле в $\mathbb{R}^n$, то одной из его характеристик можно считать то, что компоненты вдоль любой прямой постоянны.

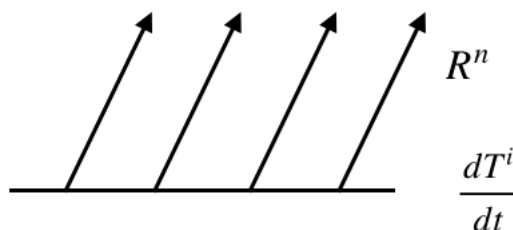


Рис. 9.3. Параллельное векторное поле.

Опр. Если имеется $\gamma(t)$ – гладкая кривая, то будем говорить, что поле T ковариантно постоянно или параллельно вдоль кривой γ , если $\nabla_{\dot{\gamma}} T = 0$. Это равенство может выполняться только в точках кривой.

Если T – векторное поле, $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты, то условие $\nabla_{\dot{\gamma}} T = 0$ примет вид

$$\dot{\gamma}^i \nabla_i T^j = 0$$

Если $x^i(t)$ – координатные функции γ , то

$$\dot{x}^i \left(\frac{\partial T^j}{\partial x^i} + \Gamma_{\alpha k}^j T^\alpha \right) = 0$$

$$\left\{ \frac{dT^j}{dx^i} + \Gamma_{\alpha k}^j T^\alpha \dot{x}^k = 0, j = 1, \dots, n \right.$$

- система уравнений параллельного переноса.

Это также система ОДУ на $T^1(t), \dots, T^n(t)$, причем порядок уравнений – первый, функции входят в нее линейно. То есть, это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Задача Коши для этой системы уравнений:

$$T^j(a), \quad t \in [a, b]$$

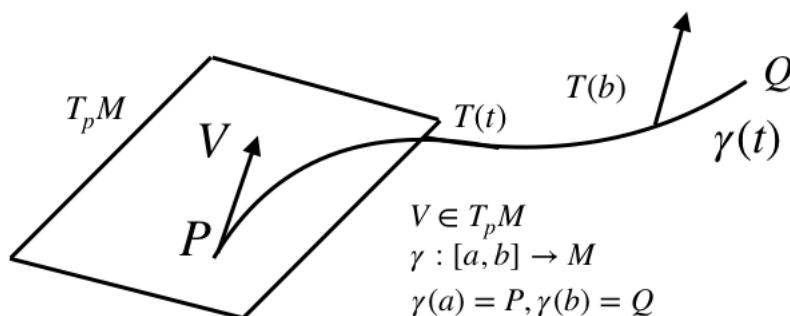


Рис. 9.4. Задание касательного вектора в начальной точке кривой.

Решим задачу Коши с начальными условиями:

$$T(a) = V$$

У этой задачи существует единственное решение $T(t)$, определенное на всем отрезке $[a, b]$, поскольку уравнение линейное и коэффициенты гладкие.

Опр. Отображение параллельного переноса вдоль кривой γ :

$$A_\gamma: T_P M \rightarrow T_Q M, \quad T(a) = V \mapsto T(b).$$

Упр. Как зависит A_γ от параметризации кривой?

M – риманово многообразие, Γ – риманова связность, перенос в римановой связности имеет некоторые свойства:

1). Если $v(t)$ и $\omega(t)$ – параллельные векторные поля вдоль γ , то $\langle v(t), \omega(t) \rangle = \text{const}$

Доказательство: рассмотрим $f = \langle v(t), \omega(t) \rangle$ и покажем, что она константа:

$$\frac{d}{dx^i} f(t) = \nabla_{\dot{\gamma}} \langle v(t), \omega(t) \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} v(t), \omega(t) \rangle + \langle v(t), \nabla_{\dot{\gamma}} \omega(t) \rangle = 0$$

2). Параллельный перенос сохраняется при изометрии:

если $F: M \rightarrow N$ — изометрия римановых многообразий, γ — гладкая кривая на M , то векторное поле v параллельно вдоль γ в римановой связности $\Leftrightarrow dF(V)$ параллелен вдоль $F(\gamma)$ (изометрия переводит параллельные поля в параллельные)

Доказательство: изометрия сохраняет метрику $\Rightarrow$ сохраняет символ Кристоффеля $\Rightarrow$ сохраняет уравнения переноса. Так можно выбрать координаты, что уравнения переноса будут иметь одинаковый вид.

Примеры:

1). Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, риманова метрика δ_{ij} , евклидовы координаты, $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$.

Уравнение параллельного переноса: $\frac{dT^i}{dt} = 0, T^i = \text{const.}$

2). Цилиндр

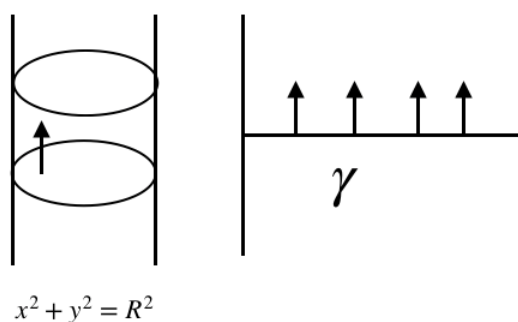


Рис. 9.5. Цилиндр.

3). Конус.

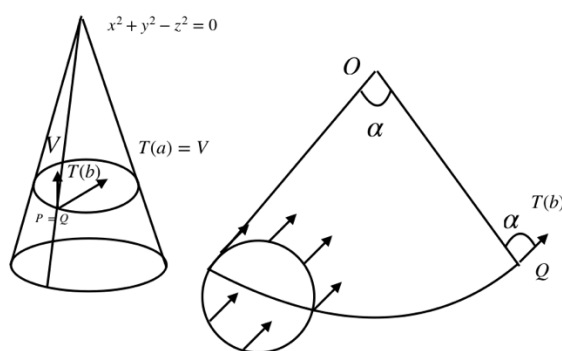


Рис. 9.6. Конус.

Зам. При написании уравнений переноса предполагали, что кривая находится в одной карте. Понятие уравнений переноса легко обобщить на случай, когда кривая кусочно-гладкая и находится в нескольких картах. Поскольку у нас кривая - образ отрезка, по определению, то можно считать, что количество карт конечно, то кривую можно разбить на куски и по частям перенести (рис. 9.7).

Разложение оператора A_γ в композицию: $A_\gamma = A_{\gamma^k} \circ \dots \circ A_{\gamma^2} \circ A_{\gamma^1}$

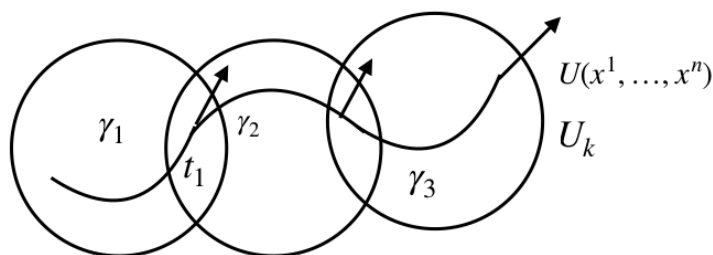


Рис. 9.7. Кусочно-гладкая кривая, находящаяся в нескольких картах.

Геодезические в аффинных связностях.

Прямое обобщение понятия геодезической на поверхностях.

Опр. Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью. Гладкая кривая $\gamma(s)$ называется геодезической в этой связности, если $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Если $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты, Γ_{jk}^i — символ Кристоффеля в этих координатах, то уравнение геодезической записывается так же, как и в случае поверхностей

$$\left\{ \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n \right.$$

- система уравнений геодезических.

Задача Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^i(0) = x_0^i \\ \dot{x}^i(0) = v^i \\ (x_0^1, \dots, x_0^n) = P \in M \\ (v^1, \dots, v^n) = v \in T_P M \end{array} \right.$$

Следствие (теорема существования геодезических): для $\forall P \in M \forall v \in T_P M$
 $\exists!$ геодезическая $\gamma(t): \gamma(0) = P, \dot{\gamma}(0) = v$.

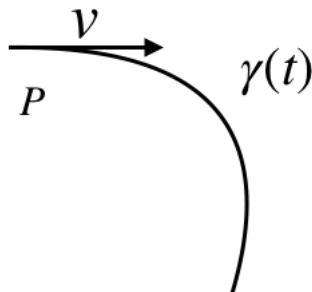


Рис. 9.8. Из любой точки в любом направлении можно выпустить геодезическую

Упр. Геодезическая $\gamma(t)$ останется геодезической при замене параметра: $\gamma(t(s))$ – также геодезическая при условии, что t – линейная функция.

Если многообразие (M, g_{ij}) – риманово, то рассматривают геодезические в римановой связности. Это и есть геодезические на поверхностях.

Пример – геодезическая на регулярной поверхности (дифференцирование римановой связности на этих поверхностях – ковариантное дифференцирование).

Свойства геодезических в римановой связности:

- 1). Если $\gamma(s)$ – геодезическая, то $||\dot{\gamma}|| = \text{const}$.
- 2). Геодезические сохраняются при изометриях.
- 3). Если γ – геодезическая, а $v(t)$ – векторное поле, параллельное вдоль γ , то угол между $\dot{\gamma}$ и $v(t)$ постоянен.

Первое свойство следует из того, что при параллельном переносе скалярное произведение сохраняется, а квадрат модуля вектора скорости – скалярное произведение самого на себя.

Сохранение геодезических при изометриях вытекает из того, что метрика сохраняется, а значит, сохраняется и символ Кристоффеля.

Доказательство свойства 3:

$$\langle \dot{\gamma}, v(t) \rangle = -const$$

$$\langle v, v \rangle = -const$$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = -const$$

$$\Rightarrow \cos(\dot{\gamma}, v) = \frac{\langle \dot{\gamma}, v(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}\| \|v\|}$$

Частный случай: если имеется M^2 — риманово многообразие.

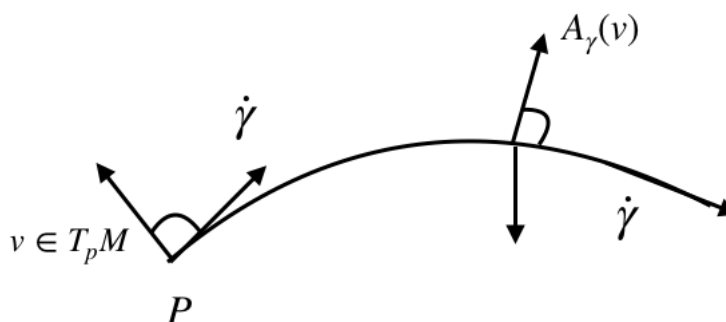


Рис. 9.9. к частному случаю.

$$\|A_\gamma(v)\| = \|v\|$$

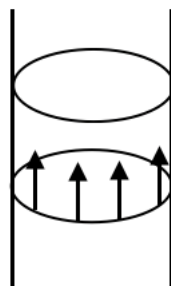


Рис. 9.10. параллельный перенос вдоль оси цилиндра не меняет вектор.

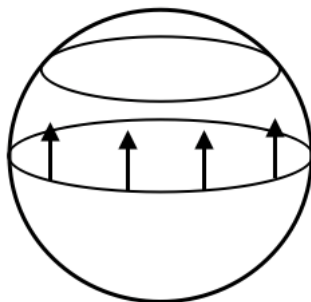


Рис. 9.11. параллельный перенос вдоль большого круга не меняет вектор (так как большой круг – геодезическая) в отличие от параллели, которая геодезической не является.

Утв. $F: M \rightarrow M$ – изометрия многообразия в себя, множество неподвижных точек F – кривая $\gamma(t)$, то есть каждая точка кривой неподвижна, а других неподвижных точек кривой нет.

Тогда $\gamma(t)$ – геодезическая с точностью до кривой параметризации.

Доказательство: $F(\gamma(t)) = \gamma(t) \forall t, F(P) = P, dF(v) = v$.

Пусть $\tilde{\gamma}(s)$ – геодезическая, $\tilde{\gamma}(0) = P, \tilde{\gamma}^k(0) = v$.

$F(\tilde{\gamma})$ – геодезическая с теми же условиями, что и $\tilde{\gamma}$ (во теореме существования и единственности) $\Rightarrow F(\tilde{\gamma}(s)) = \tilde{\gamma}(s) \forall s \Rightarrow \tilde{\gamma} \subset \gamma$

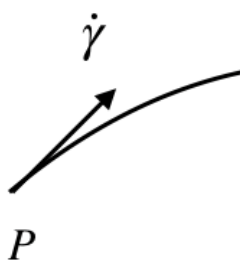


Рис. 9.12. к доказательству утверждения.

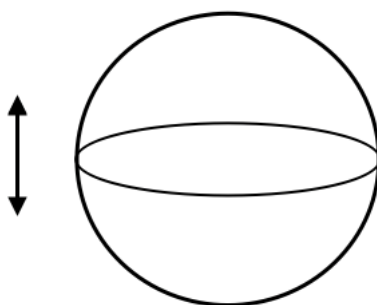


Рис. 9.13. Так же можно доказать, что экватор – геодезическая в силу симметрии, при которой экватор остается на месте

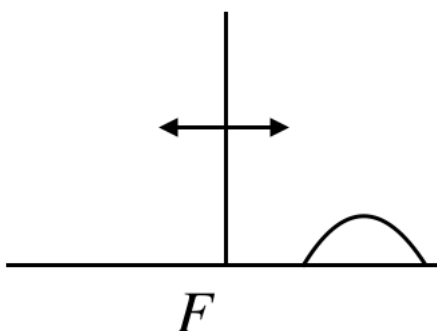


Рис. 9.14. На плоскости Лобачевского вертикальная прямая – геодезическая (отражение относительно этой прямой – изометрия).
Все круги также являются изометрическими, потому что кривую можно в них перевести с помощью изометрии.

Пример: плоскость Лобачевского в модели верхней полуплоскости со стандартной метрикой.

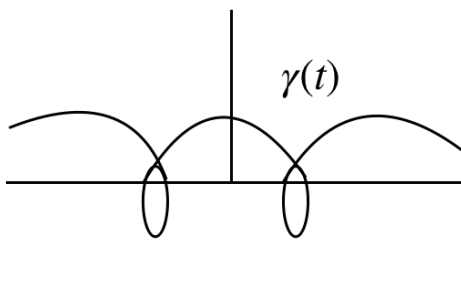


Рис. 9.15. плоскость Лобачевского в модели верхней полуплоскости со стандартной метрикой.

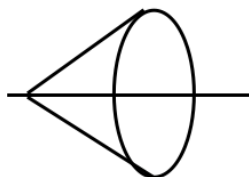


Рис. 9.16. при большой размерности и фиксированном угле возникает конус возможных направлений. Вектор при движении вдоль геодезической будет вращаться по конусу.

Пример: регулярная поверхность в евклидовом пространстве $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ковариантное дифференцирование в римановой связности

$$\nabla_k X = \left(\frac{\partial X}{\partial x^i} \right)^T$$

Что из этого вытекает? Пусть кривая $\gamma \in M_1 \cap M_2$ и в каждой точке $T_{\gamma(t)}M_1 = T_{\gamma(t)}M_2$, есть векторное поле X вдоль этой кривой γ , тогда

$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \left(\frac{dX}{dt} \right)^T$ - одна и та же для M_1 и M_2 .

Это позволяет подменять поверхности. Если две поверхности пересекаются по прямой, то уравнения переноса и уравнение геодезической можно писать на той поверхности, на которой удобнее.

Пример: если хотите устраивать параллельный перенос на сфере вдоль параллели – это случай, когда уравнения переноса записываются и явно решаются. Но если нужно записать уравнения быстро, то можно нарисовать касающийся сферы вдоль параллели конус и заменить параллельный перенос по сфере на параллельный перенос по конусу. Такие соображения работают для любой поверхности вращения.

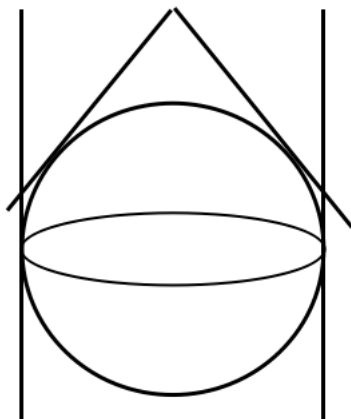


Рис. 9.17. к примеру.

Большой круг на сфере геодезический, а параллель уже нет, потому что большой круг можно коснуться цилиндром, окружности которого геодезические, поэтому и у сферы окружности будут геодезические.

Эту технологию можно перенести и на подмногообразия римановых многообразий. Например, если есть риманово многообразие $M \subset W$, то

$$\nabla_k X = (\widetilde{\nabla}_k X)^T$$

На M На W

Если есть риманова связность в объемлющем многообразии, то с помощью проекции можно получить риманову связность на любом подмногообразии в предположении, что на подмногообразии индуцированная метрика, то есть порождается метрикой объемлющего пространства.

Нормальные координаты.

Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью. Рассмотрим $\forall P \in M, T_P M \ni v$. Тогда $\exists!$ геодезическая γ_v , выходящая из P со скоростью v : $\gamma_v(0) = P, \gamma'_v(0) = v$.

Опр. Экспоненциальное отображение в P — отображение, которое можно создать с помощью геодезических: $\exp_P: u \subset T_P M \rightarrow M$, u — открытая окрестность $\vec{0} \in T_P M$.

Отображение построено следующим образом: $v \mapsto \gamma_v(1)$.

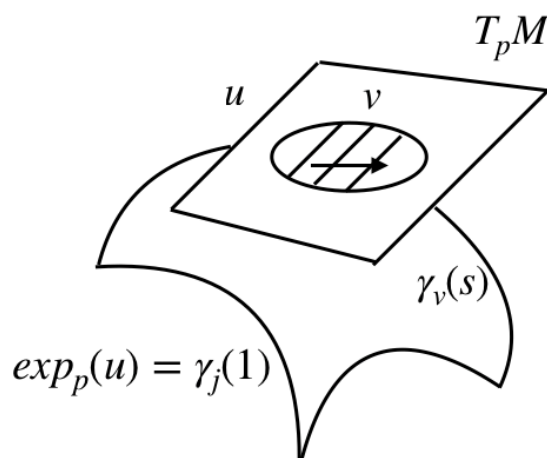


Рис. 9.18. к определению экспоненциального отображения.

Утв. $\exists$ окрестность u в $T_p M$: гладкое и регулярное $\exp_p: u \rightrightarrows \exp_p(u)$, что и означает, что отображение задает координаты.

Доказательство: гладкость обусловлена решением задачи Коши, гладко зависящим от начальных условий. Докажем взаимнооднозначность и регулярность в некоторой окрестности. Для этого достаточно проверить (по теореме о неявной функции), что $d|_{s=0} \exp_p$ не вырожден, значит, не вырожден и в некоторой окрестности, то применима теорема о неявной функции, утверждающей, что отображение с невырожденным дифференциалом локально, регулярно и взаимно однозначно.

Лемма: $\gamma_v(ts) = \gamma_{vt}(s)$, $\forall$ фиксированного t .

Доказательство: $\gamma_v(s)$ — геодезическая $\Rightarrow \gamma_v(ts)$ — геодезическая, удовлетворяющая начальным условиям:

$$\gamma_v(s=0) = P, \quad \frac{d\gamma_v(st)}{ds} \Big|_{s=0} = \dot{\gamma}_v(0)t = vt.$$

Проверим, что $d|_{s=0} \exp_p \neq 0$.

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты, в которых $\gamma_v(s) = x^i(s, v^1, \dots, v^n)$.

Из леммы следует, что $\forall t \ x^i(ts, v^1, \dots, v^n) = x^i(s, tv^1, \dots, tv^n)$. продифференцируем это выражение по t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} : \underbrace{\frac{\partial x^i(0, v^1, \dots, v^n) s}{\partial s}}_{\dot{\gamma}_v^i(0) = v^i} = \frac{\partial x^i(s, 0)}{\partial v^\alpha} v^\alpha$$

$$v^i s = \frac{\partial x^i(s, 0)}{\partial v^\alpha} v^\alpha$$

При $s = 1$ $x^i(1, v^1, \dots, v^n)$ – координатные функции $\exp_P$, тогда

$$v^i = \frac{\partial x^i(1, 0)}{\partial v^\alpha} v^\alpha, \quad \forall v$$

$\Rightarrow \frac{\partial x^i(1, 0)}{\partial v^\alpha}$ – единичная матрица E – дифференциал $d|_{v=0} \exp_P$.

Получили еще более сильный результат, чем хотели доказать, - дифференциал $\exp_P$ – единичная матрица. Значит, отображение в 0 регулярно и в его окрестности задает некоторую систему координат.

Обычно фиксируют базис в касательном пространстве $T_P M$, задающий линейные координаты на $u \subset T_P M$, $\exp_P: u \xrightarrow{\cong} W \subset M$, в окрестности точки P возникают координаты, называемые нормальными, а $\gamma_v(s)$ – радиальные геодезические. u и W – нормальные окрестности (окрестности, в которых нормальные координаты являются координатами).

Например, если многообразие – плоскость, то радиальные геодезические – радиально расходящиеся лучи из фиксированной точки, возникает взаимно-однозначное отображение на всю плоскость. Например, на сфере радиальная геодезическая будет проходить через противоположную точку на сфере (рис. 9.19).

Существует наука, оценивающая размер максимально возможных нормальных окрестностей в зависимости от характеристик многообразия. На сфере, например, максимально возможная нормальная окрестность – сфера без точки.

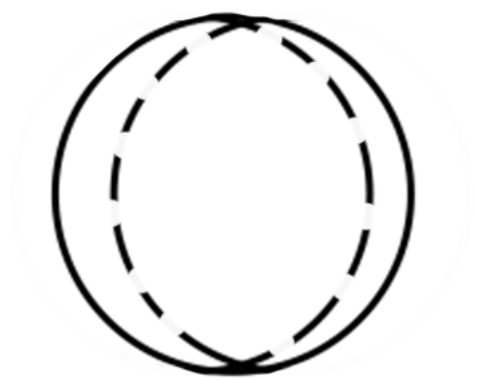


Рис. 9.19. Радиально-геодезические на сфере.

Упр. 1. Записать радиально-геодезическую в нормальных координатах.

Упр. 2. Если связность согласована с метрикой, вычислить длину радиальной геодезической от P до $\gamma_v(1)$

Упр. 3. С помощью упр.1 показать, что $\Gamma_{jk}^i(P) = 0$ (верно в одной точке, в целой окрестности этого добиться нельзя).

Следствие: из того, что отображение взаимно-однозначно, следует, что $\forall$ две достаточно близкие на римановом многообразии M точки можно соединить геодезической (более формальная формулировка, $\forall P \exists$ окрестность $W \ni D: \forall Q \in W \exists$ геодезическая γ , соединяющая P и $Q, \gamma \subset W$).

Доказательство: W — регулярная окрестность P , тогда, если есть нормальная окрестность, то существует радиальная геодезическая γ_v , приходящая в точку $Q = \gamma_v(1)$ (рис. 9.20). Это локальный случай теорема Хопфа-Ринова, утверждающей, что на достаточно хорошем многообразии любые две точки соединяются геодезической.

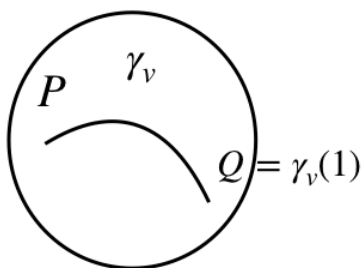


рис. 9.20. К доказательству следствия.

Когда существуют евклидовы координаты для аффинной связности?

Евклидовы координаты существуют не всегда, в качестве примера препятствия выступает тензор кручения аффинной связности $\Omega_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$. Если $\Omega_{jk}^i \neq 0$, нельзя.

Это не единственное препятствие: бывают такие связности, что они симметричные и даже римановы, но символ Кристоффеля обнулить не получается. Пример такой связности – гауссова, которая отлична от 0, никакими сохраняющими метрику преобразованиями от этого не избавиться. Это означает, что, например, на сфере нельзя ввести такие координаты, чтобы символ Кристоффеля обращался в 0, что означало бы, что там метрика постоянна (если метрика будет постоянна, то ее можно сделать евклидовой, тогда кривизна будет равна 0, что невозможно, поэтому кривизна является препятствием).

Обобщение понятия кривизны – тензор кривизны.

Тензор кривизны аффинной связности.

Если есть многообразие с ковариантным дифференцированием M , ∇ – аффинная связность, можно взять произвольное тензорное поле (для простоты возьмем векторное) T .

Если связность евклидова, то $\nabla_p \nabla_q T = \nabla_q \nabla_p T$, то $\nabla_p \nabla_q T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^p \partial x^q}$ и $\nabla_p \nabla_q T - \nabla_q \nabla_p T = 0$ для $\forall T$.

$\nabla_p \nabla_q T - \nabla_q \nabla_p T = 0$ – характеристика возможности введения на многообразии евклидовых координат.

Эту характеристику можно записать в тензорном виде через тензор кручения и тензор кривизны $R_{j\ p q}^i \in \mathbb{T}_4^1$.

Лекция 10. Коммутатор векторных полей.

Евклидовы координаты.

Опр. $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты на (M, Γ) .

$$\begin{aligned} \nabla_p \nabla_q T^i &= \nabla_p \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^q} + \Gamma_{\alpha q}^i T^\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^q} + \Gamma_{\alpha q}^i T^\alpha \right) + \Gamma_{\beta p}^i \left(\frac{\partial T^\beta}{\partial x^q} + \Gamma_{\alpha q}^\beta T^\alpha \right) - \\ &\Gamma_{qp}^\beta \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha \beta}^i T^\alpha \right) = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^p \partial x^q} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha q}^i}{\partial x^p} T^\alpha + \Gamma_{\alpha q}^i \frac{\partial T^\alpha}{\partial x^p} + \Gamma_{\beta p}^i \frac{\partial T^\beta}{\partial x^q} + \Gamma_{\beta p}^i \Gamma_{\alpha q}^\beta T^\alpha - \Gamma_{qp}^\beta \frac{\partial T^i}{\partial x^\beta} - \\ &\Gamma_{qp}^\beta \Gamma_{\alpha \beta}^i T^\alpha \end{aligned}$$

Хотим привести к такому виду: $\nabla_p \nabla_q T^i - \nabla_q \nabla_p T^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha q}^i}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha p}^i}{\partial x^q} + \Gamma_{\beta p}^i \Gamma_{\alpha q}^\beta - \Gamma_{qp}^\beta \Gamma_{\alpha \beta}^i \right) T^\alpha + \left(\Gamma_{pq}^\beta - \Gamma_{qp}^\beta \right) \nabla_\beta T^i$

$$\underbrace{\nabla_p \nabla_q T^i - \nabla_q \nabla_p T^i}_{\text{тензор}} = \underbrace{R_{\alpha pq}^i T^\alpha}_{\text{тензор типа (1, 2) для } \forall \text{ векторного поля } T} + \underbrace{\Omega_{pq}^\beta \nabla_\beta T^i}_{\text{тензор}}$$

$\Rightarrow R_{\alpha pq}^i$ – тензорное поле типа $(1, 3)$

Опр. $R_{\alpha pq}^i$ – тензорное поле типа $(1, 3)$ – тензор кривизны аффинной связности Γ .

Утв. Если в некоторой окрестности u $\exists$ евклидовы координаты для аффинной связности Γ , то ее тензор кривизны $\equiv 0$ в u (в любых других координатах он также будет равен 0 – одно из основных свойств тензора), как и тензор кручения.

Утв. $R_{\alpha pq}^i = -R_{\alpha qp}^i$

Коммутатор векторных полей.

X – векторное поле на M , $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $f \mapsto X(f) = df(X)$

Пусть есть 2 векторных поля X и Y , тогда можно рассмотреть коммутатор этих полей:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Утв. для произвольных векторных полей X и Y на M $\exists!$ векторное поле A на M : $A(f) = (X, Y)(f) \quad \forall f \in C^\infty(M)$, т.е. $[X, Y]$ – тоже векторное поле.

В локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ $[X, Y]^i = X^\alpha \frac{\partial Y^i}{\partial x^\alpha} - Y^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha}$

2 способа доказательства образования векторного поля

- 1). Проверить, что компоненты меняются по тензорному закону.
- 2). Можно доказать, что операция $[X, Y]$ линейная и удовлетворяет формуле Лейбница.

Доказательство: покажем, что операция $[X, Y]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ линейна и удовлетворяет правилу Лейбница.

Докажем линейность:

$$\begin{aligned} [X, Y](\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= XY(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - YX(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \\ &= X(\alpha_1 Y(f_1) + \alpha_2 Y(f_2)) - Y(\alpha_1 X(f_1) + \alpha_2 X(f_2)) \\ &= \alpha_1 XY(f_1) + \alpha_2 XY(f_2) - \alpha_1 YX(f_1) - \alpha_2 YX(f_2) \\ &= \alpha_1 [X, Y](f_1) + \alpha_2 [X, Y](f_2) \end{aligned}$$

Докажем формулу Лейбница:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= XY(fg) - YX(fg) = X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) \\ &= XY(f)g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) - fXY(g) - YX(f)g - X(f)Y(g) \\ &\quad - Y(f)X(g) - fYX(g) = [X, Y](f)g + f[X, Y](g) \end{aligned}$$

Найдем компоненты векторного поля $[X, Y]$: есть координаты $(x^1, \dots, x^n)$

$$\begin{aligned} [X, Y](h) &= XY(h) - YX(h) = X(Y^\alpha \frac{\partial h}{\partial x^\alpha}) - Y(X^\alpha \frac{\partial h}{\partial x^\alpha}) \\ &= X^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (Y^\alpha \frac{\partial h}{\partial x^\alpha}) - Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (X^\alpha \frac{\partial h}{\partial x^\alpha}) = (X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} - Y^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}) \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} \\ &= [X, Y]^i \frac{\partial h}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Свойства коммутатора:

- 1). $[X, Y] = -[Y, X]$
 - 2). $[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2], \alpha_i \in \mathbb{R}$
 - 3). Аналог формулы Лейбница: $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$ или $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$
 - 4). Тождество Якоби: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \equiv 0$.
- Коммутаторы, удовлетворяющие свойствам 1 и 4, образуют алгебру Ли.
- 5). Если $(x^1, \dots, x^n)$ – произвольные координаты, то $[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0$, т.е. частная производная не зависит от порядка взятия.
 - 6). Если $X_1, \dots, X_n$ – векторные линейно независимые в каждой точке на H^n поля и $[X_i, X_j] \equiv 0$ в u , то $\exists$ координаты в $u' \subset u$: X_i – координатные векторные поля.
 - 7). Если Γ – симметричная связность, то $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

Доказательство свойства 3: $[X, fY]h = X(fY(h)) - fYX(h) = X(f)Y(h) + fX(Y(h)) - fY(X(h)) = f[X, Y](h) + X(f)Y(h)$

Доказательство свойства 4: $[X, [Y, Z]](h) = X([YZ](h)) - [Y, Z](X(h)) = X(YZ(h)) - ZY(h) - YZ(h) + ZYX(h) = (XYZ - XZY - YZX + ZYX)(h)$ - первое слагаемое

$(YZX - YXZ - ZXY + XZY)(h)$ – второе слагаемое.

$(ZXY - ZYX - XYZ + YXZ)$ – третье слагаемое.

$$\Rightarrow [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \equiv 0$$

Доказательство свойства 6: пусть $X_1, \dots, X_n$ – векторные поля, $(y^1, \dots, y^n)$ – координаты. $X_i = X_\alpha^i \partial_{y^\alpha}$, ∂_{y^α} – координатное векторное поле. Нужно найти замену координат $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$: $\partial_{x^i} = X_i$.

$X_i = X_\alpha^i \partial_{y^\alpha} = \partial_{x^i} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \partial_{y^\alpha}$, отсюда получаем систему уравнений:

$$\left\{ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} = X_\alpha^i \right. \text{ – система уравнений на неизвестные функции } (y^1, \dots, y^n$$

Это система уравнений в частных производных, есть необходимое условие ее разрешимости, являющееся достаточным в областях, гомеоморфных диску.

Необходимое условие: $\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i}$

$$\frac{\partial X_i^\alpha}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial X_j^\alpha}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial x^j} = \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial y^\beta} X_j^\beta$$

Необходимое условие можно переписать в виде: $[X_i, X_j]^\alpha = \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial x^\beta} X_j^\beta - \frac{\partial X_j^\alpha}{\partial x^\beta} X_i^\beta = 0$

Если $u \approx D^n$, то, по лемме Пуанкаре, это условие является достаточным.

Доказательство свойства 7: $\nabla_x Y^i = X^\alpha \nabla_\alpha Y^i = X^\alpha \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^i Y^\beta \right)$

$$\nabla_x Y^i - \nabla_y X^i = X^\alpha \frac{\partial Y^i}{\partial x^\alpha} - Y^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^i X^\alpha Y^\beta - \Gamma_{\beta\alpha}^i Y^\alpha X^\beta = [X, Y]^i$$

Оператор кривизны.

$$R: (\mathbb{T}_0^1(M))^3 \rightarrow \mathbb{T}_0^1(M), R(X, Y, Z) \equiv R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Утв. Оператор R линеен относительно умножения на функции, поэтому задает тензорное поле типа $(1, 3)$, совпадающее с тензором кривизны.

Доказательство: нужно доказать, что если любое из полей X, Y, Z умножим на гладкую функцию, то в результате функция вынесется за скобку.

Проверим, что $R(X, Y)(fZ) - fR(X, Y)Z$:

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} (fZ) \\ &= \nabla_X (\nabla_Y (f)Z + f \nabla_Y Z) - \nabla_Y (X(f)Z + f \nabla_X Z) - [X, Y](f)Z - f \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= |\nabla_Y (f) = Y(f)| \\ &= X(Y(f)Z + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_X Z + f \nabla_X \nabla_Y Z - Y(X(f))Z - X(f)Y(Z) \\ &\quad - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - [X, Y](f)Z - f \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) + (XY(f) - YX(f) - [X, Y](f))Z \\ &= fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX, Y]} Z = | \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y | \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{[fX, Y] - Y(f)X} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + Y(f) \nabla_X Z = f R(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$$

Оператор R задает тензор типа $(1, 3)$

Если фиксируем произвольные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, и в них запишем

$$R(X, Y)Z = X^p Y^q Z^\alpha R(\partial_{x^p}, \partial_{x^q}) \partial_{x^\alpha} = X^p Y^q Z^\alpha \widetilde{R_{\alpha pq}^i} \partial_{x^i}, \text{ где } \widetilde{R_{\alpha pq}^i} \partial_{x^i} = R(\partial_{x^p}, \partial_{x^q}) \partial_{x^\alpha}$$

Величины $\widetilde{R_{\alpha pq}^i}$ образуют тензорное поле типа $(1, 3)$.

$$R(\partial_{x^p}, \partial_{x^q}) \partial_{x^\alpha} = \nabla_{x^p} \nabla_{x^q} \partial_{x^\alpha} - \nabla_{x^q} \nabla_{x^p} \partial_{x^\alpha} = 0$$

Можно показать, что $\widetilde{R_{\alpha pq}^i} = R_{\alpha pq}^i$ – тензор кривизны

$$\begin{aligned} R_{\alpha pq}^i &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha q}^i}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha p}^i}{\partial x^q} + \Gamma_{\beta p}^i \Gamma_{\alpha q}^\beta - \Gamma_{\beta q}^i \Gamma_{\alpha p}^\beta \\ R_{\alpha pq}^i &= -R_{\alpha qp}^i \end{aligned}$$

Симметрические связности.

Утв. Если Γ – симметричная связность, то тензор кривизны удовлетворяет тождеству Якоби:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

В координатах: $R_{\alpha pq}^i + R_{pq\alpha}^i + R_{q\alpha p}^i = 0$

Поскольку равенство тензорное, его достаточно проверить для координатных векторных полей (достаточно, что $[X, Y] = 0$):

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Z \nabla_X Y - \\ &\nabla_X \nabla_Z Y = \nabla_X (\nabla_Z Z - \nabla_Z Y) + \dots = 0 \end{aligned}$$

Симметрия тензора Римана.

(M, g_{ij}) – риманово многообразие, на котором Γ – риманова связность, для нее удобно рассматривать следующий тензор:

Пусть $R_{\alpha pq}^i$ – тензор кривизны римановой связности, тогда $g_{i\beta} R_{\alpha pq}^{\beta} = R_{i\alpha pq} \in \mathbb{T}_4^0$ – тензор Римана.

$$R_{ijpq} = -R_{jipq} \text{ и } R_{ijpq} = R_{pqij}$$

Часто эти симметрии пишут без координат, пользуясь тем, что $\langle R(X, Y)Z, \omega \rangle = |R(X, Y)Z = X^p Y^q Z^\alpha R(\partial_{x^p}, \partial_{x^q})\partial_{x^\alpha}| = g_{ij} R_{\alpha pq}^i X^p Y^q Z^\alpha \omega^j$

Если посмотреть на $F(X, Y, Z, \omega) = \langle R(X, Y)Z, \omega \rangle$, это будет полилинейное отображение по каждому элементу и $F_{pqij} = R_{ijpq}$

Лекция 11. Тензор Римана.

Симметрия тензора Римана.

(M, g_{ij}) – риманово многообразие, на котором Γ – риманова связность, для нее задан тензор кривизны:

$$R_{i\alpha p q} = g_{i\beta} R^{\beta}_{\alpha p q}$$

Некоторые его симметрии:

- 1). $R_{ijpq} = -R_{jipq}$
- 2). Риманова связность симметричная, поэтому имеет место тождество Якоби (симметрия по последним трем индексам):
 $R_{ijpq} + R_{ipqj} + R_{iqjp} = 0$

УТВ. Пусть (M, g_{ij}) – риманово многообразие, $R_{i\alpha p q}$ – тензор Римана, тогда

- 1). $R_{ijpq} = -R_{jipq}$, без координат $\langle R(X, Y)Z, \omega \rangle = \langle R(X, Y)\omega, Z \rangle$,
- 2). $R_{ijpq} = R_{pqij}$, без координат $\langle R(X, Y)Z, \omega \rangle = \langle R(Z, \omega)X, Y \rangle$

Доказательство пункта 1: рассмотрим дифференциальный оператор

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

$$R(X, Y)(f) = |\nabla_X(f) = X(f)| = \nabla_X \nabla_Y(f) - \nabla_Y \nabla_X(f) - \nabla_{[X, Y]}(f) = 0$$

$$R(X, Y)(\langle Z, \omega \rangle) = 0$$

$$R(X, Y)(\langle Z, \omega \rangle) = \nabla_X(\nabla_Y \langle Z, \omega \rangle) - \nabla_Y(\nabla_X \langle Z, \omega \rangle) - \nabla_{[X, Y]} \langle Z, \omega \rangle =$$

$$= |\nabla_A \langle B, C \rangle = \langle \nabla_A B, C \rangle + \langle B, \nabla_A C \rangle| =$$

$$= \nabla_X(\langle \nabla_Y Z, \omega \rangle + \langle Z, \nabla_Y \omega \rangle) - \nabla_Y(\langle \nabla_X Z, \omega \rangle + \langle Z, \nabla_X \omega \rangle) - \nabla_{[X, Y]} \langle Z, \omega \rangle =$$

$$= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, \omega \rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X \omega \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y \omega \rangle + \langle Z, \nabla_X \nabla_Y \omega \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, \omega \rangle -$$

$$- \langle \nabla_X Z, \nabla_Y \omega \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X \omega \rangle - \langle Z, \nabla_X \nabla_Y \omega \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, \omega \rangle - \langle Z, \nabla_{[X, Y]} \omega \rangle =$$

$$= \langle R(X, Y)Z, \omega \rangle + \langle Z, R(X, Y)\omega \rangle$$

Доказательство пункта 2: получается из тождества Якоби:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \text{ умножим скалярно на } \omega$$

$$\langle R(X, Y)Z, \omega \rangle + \langle R(Y, Z)X, \omega \rangle + \langle R(Z, X)Y, \omega \rangle = 0$$

Переставим циклически эти 4 векторные поля, получим 4 аналогичных равенства

$$\underbrace{\langle R(\omega, X)Y, Z \rangle}_1 + \underbrace{\langle R(X, Y)\omega, Z \rangle}_2 + \langle R(Y, \omega)X, Z \rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle R(X, Y)Z, \omega \rangle}_2 + \underbrace{\langle R(Y, Z)X, \omega \rangle}_3 + \langle R(Z, X)Y, \omega \rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle R(Y, Z)\omega, X \rangle}_3 + \underbrace{\langle R(Z, \omega)Y, X \rangle}_4 + \langle R(\omega, Y)Z, X \rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle R(Z, \omega)X, Y \rangle}_4 + \underbrace{\langle R(\omega, X)Z, Y \rangle}_1 + \langle R(X, Z)\omega, Y \rangle = 0$$

Сложив эти 4 равенства, получим:

$$2 \langle R(Y, \omega)X, Z \rangle + 2 \langle R(Z, X)Y, \omega \rangle = 0$$

$$\langle R(Y, \omega)X, Z \rangle = - \langle R(Z, X)Y, \omega \rangle = \langle R(X, Z)Y, \omega \rangle$$

Независимые компоненты тензора Римана.

Если бы был тензор 4-го ранга общего вида, то количество независимых компонент было бы n^4 . Наличие симметрии приводит к тому, что количество независимых компонент уменьшается.

Например, при $n = 1 \Rightarrow R_{ijpq} = 0$

при $n = 1 \Rightarrow i \neq j, p \neq q \{i, j\} = \{p, q\} = \{1, 2\}$ и за счет симметрии и симметрии по парам получается, что существует только одна компонента R_{1212} , остальные либо 0, либо получаются из нее заменой знака: $R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}$

В общем случае (поскольку существует косая симметрия $R_{ijpq} = -R_{jipq}$), то достаточно, чтобы, например, рассматривать компоненты $1 \leq p \leq q \leq n$, всего таких

комбинаций $\frac{n(n-1)}{2}$. Аналогично с i и j : $1 \leq i \leq j \leq n$, количество возможных комбинаций $\frac{n(n-1)}{2}$.

Кроме того, имеется симметрия по парам индексов $\{i, j\}$ и $\{p, q\}$. Можно представлять, что есть мультииндексы $I = \{i, j\}$ и $P = \{p, q\}$, тогда имеем симметрию $R_{IP} = R_{PI}$ – симметричная матрица с мультииндексом, где $\frac{n(n-1)}{2} = m$ – количество значений.

Для симметричной матрицы нужно задать $\frac{m(m+1)}{2}$ значений (добавляется диагональ).

Без учета тождества Якоби количество компонент тензора Римана не превышает

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$$

Тождество Якоби: $R_{ijpq} + R_{ipqj} + R_{iqjp} = 0$.

Вопрос: сколько здесь независимых условий? Вообще говоря, $ijpq$ произвольные, тем не менее они не все независимы от других симметрий и друг от друга.

Лемма: 1). Если среди $ijpq$ есть совпадающие, то тождество Якоби следует из других симметрий.

2). Если $\{ijpq\}$ попарно различны и набор как множество $\{i'j'p'q'\} = \{ijpq\}$, то тождества Якоби равносильны.

Следствие: тождество Якоби дает C_n^4 новых линейных уравнений на компоненты R_{ijpq} .

Доказательство леммы:

1). пусть $i = j$, тогда

$$\begin{aligned} R_{iipq} + R_{ipqi} + R_{ipiq} &= R_{ipqi} + R_{ipiq} = -R_{ipiq} + R_{ipiq} = 0 \\ \Rightarrow R_{ipiq} &= R_{iqip} \end{aligned}$$

Остальные варианты проверяются аналогично.

2). Нужно проверить, что попарная перестановка индексов приводит к эквивалентному тождеству. Перестановок много, но, как известно из алгебры, группа порождается транспозицией (каждая перестановка – транспозиция транспозиции), поэтому достаточно проверить это утверждение для транспозиции.

Рассмотрим транспозицию $\{i, j\}$, тогда тождество Якоби переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{jipq} + R_{jpqi} + R_{jpqi} &= 0 \\ -R_{ijpq} + R_{qijp} + R_{ipjq} &= 0 \\ -R_{ijpq} - R_{iqjp} - R_{ipqj} &= 0 \end{aligned}$$

Эти уравнения равносильны. Остается проверить остальные композиции и убедиться, что за счет манипуляций прийти к этому же результату.

$$\begin{aligned} \text{Итак, количество независимых компонент} &\leq \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \\ &= \left| C_n^4 = \frac{n!}{(n-1)!4!} \right| = \frac{n(n-1)}{8} \left(n^2 - n + 2 - \frac{n^2 - 5n + 6}{3} \right) = \\ &= \frac{n(n-1)}{8} \frac{(2n^2 + 2n)}{3} = \frac{n(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n^2(n^2-1)}{3} = \end{aligned}$$

$$1, \quad n = 2$$

$$6, \quad n = 3$$

$$20, \quad n = 4$$

Свертки тензора кривизны.

Тензор можно сворачивать по паре индексов, один из которых может быть верхним, а второй – нижним.

Опр. $R_{\alpha j}^{\alpha} = \widetilde{R}_{ij}$ – тензор Риччи.

Для риманова случая $g^{\beta\alpha} R_{\alpha\beta j} = \widetilde{R}_{ij}$.

Опр. Для тензора Римана тензор Риччи – симметричный индекс: $\widetilde{R}_{ij} = \widetilde{R}_{ji} = g^{\alpha\beta} R_{\beta i \alpha j}$

У этого тензора $\frac{n(n+1)}{2}$ компонент. В случае $n = 3$ количество компонент = 6, поэтому в случае трехмерных многообразий тензор Риччи будет «знать» все о тензоре кривизны. Можно показать, что существенные компоненты для тензора кривизны трехмерных многообразий восстанавливаются через компоненты тензора Риччи.

Поток Риччи.

Опр. Поток Риччи – решение дифференциального уравнения на однопараметрическое семейство метрик, которые выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = -2 \widetilde{R}_{ij}(t)$$

Скалярная кривизна.

Опр. Скалярная кривизна – полная свертка для тензора Римана

$$g^{\alpha\beta} \widetilde{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{ij} R_{i\alpha j\beta} = R.$$

Упр. Что будет, если выбрать другие пары индексов?

Скалярная кривизна – функция на многообразии, порождая тензором кривизны. В случае двумерных поверхностей определяется гауссовой кривизной соответствующей поверхности.

Пусть (M, g_{ij}) – риманово многообразие, $R_{i\alpha p q}$ - тензор Римана.

Получим выражение для тензора Римана $R_{i\alpha p q}$ через метрику g_{ij} .

$$R_{i\alpha p q} = \langle R(\partial_p, \partial_q) \partial_j, \partial_i \rangle = |\partial_i = \partial_{x^i}| = \langle \nabla_{\partial_p} \nabla_{\partial_q} \partial_j, \partial_i \rangle - \langle \nabla_{\partial_q} \nabla_{\partial_p} \partial_j, \partial_i \rangle$$

$$\langle \nabla_{\partial_p} \nabla_{\partial_q} \partial_j, \partial_i \rangle = \nabla_{\partial_p} \langle \nabla_{\partial_q} \partial_j, \partial_i \rangle - \langle \nabla_{\partial_q} \partial_j, \nabla_{\partial_p} \partial_i \rangle, \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ji}^\alpha \partial_\alpha$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_p} \langle \nabla_{\partial_q} \partial_j, \partial_i \rangle - \langle \nabla_{\partial_q} \partial_j, \nabla_{\partial_p} \partial_i \rangle &= \nabla_{\partial_p} \langle \Gamma_{ji}^\alpha \partial_\alpha, \partial_i \rangle - \langle \Gamma_{ji}^\alpha \partial_\alpha, \Gamma_{ip}^\beta \partial_\beta \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^p} (\Gamma_{jq}^\alpha g_{\alpha i}) - \Gamma_{jq}^\alpha \Gamma_{ip}^\beta g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{jq}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{j\beta}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{q\beta}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{qj}}{\partial x^\beta} \right), \quad g_{\alpha i} \Gamma_{jq}^\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{iq}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^i} \right)$$

$$\begin{aligned} R_{ijpq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^p \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{iq}}{\partial x^p \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial x^i \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^p \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^q \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{pj}}{\partial x^i \partial x^q} \right) + \\ &\quad + g_{\alpha\beta} (\Gamma_{jp}^\alpha \Gamma_{iq}^\beta - \Gamma_{jq}^\alpha \Gamma_{ip}^\beta) \end{aligned}$$

На римановом многообразии

$$\begin{aligned} R_{ijpq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{iq}}{\partial x^p \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{pj}}{\partial x^i \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{qj}}{\partial x^p \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^q \partial x^j} \right) + \\ &\quad + g_{\alpha\beta} (\Gamma_{jp}^\alpha \Gamma_{iq}^\beta - \Gamma_{jq}^\alpha \Gamma_{ip}^\beta) \end{aligned}$$

Например, в нормальных координатах $\Gamma_{jp}^\alpha = 0$, поэтому

$$R_{ijpq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{iq}}{\partial x^p \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{pj}}{\partial x^i \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{qj}}{\partial x^p \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^q \partial x^j} \right)$$

Скалярная кривизна двумерной поверхности.

$M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — регулярная поверхность.

Утв. Пусть R — скалярная кривизна, K — гауссова кривизна, тогда $R = 2K$

Следствие (теорема Гаусса): K сохраняется при изометрии.

Доказательство: R полностью определяется метрикой, значит, при изометрии не меняется, значит, не меняется и K .

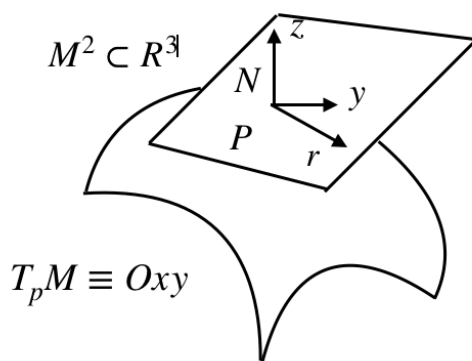


Рис. 11.1. График $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0, \quad f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$$

Посчитаем гауссову кривизну:

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$r_x = (1, 0, f_x), \quad r_y = (0, 1, f_y),$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_y f_x & 1 + f_y^2 \end{pmatrix} = G, \quad G(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(P) = 0$$

$$(f_x f_y)_x = f_{yx} f_y + f_y f_{xx}|_P = 0 \Rightarrow \Gamma_{jk}^i(P) = 0.$$

$$N = (0, 0, 1), \quad r_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad r_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad r_{yy} = (0, 0, f_{yy}),$$

$$Q = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$K = \det Q / \det G$$

Посчитаем скалярную кривизну:

$R = g^{\alpha\beta} g^{ij} R_{\alpha\beta ij}$, тензор имеет только одну существенную компоненту R_{1212}

$$R(P) = g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{22} g^{11} R_{2121} = 2R_{1212}$$

$$R_{1212} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial x} = (f_x f_y)_x = f_{xx} f_y + f_x f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} = f_{xxy} f_y + f_{xx} f_{yy} + f_{xy} f_{yx} + f_x f_{yxy}$$

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} |_P = 2f_{xx} f_{yy} + 2f_{yx}^2$$

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial y} = 2f_x f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} |_P = 2f_{yx}^2, \quad \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} |_P = 2f_{yx}^2$$

$$R_{1212} = \frac{1}{2} (2f_{xx} f_{yy} + 2f_{yx}^2 - 2f_{yx}^2 - 2f_{yx}^2) = f_{xx} f_{yy} - f_{yx}^2 = K$$

Поскольку равенство $R(P) = g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{22} g^{11} R_{2121}$ тензорное, то, если оно выполнено в одних координатах, то выполнено и в других.

Обратная теорема про евклидовы координаты: если на M $\exists$ евклидовы координаты, то $\Rightarrow R_{ijpq} = 0$ (верно и обратное: если $R_{ijpq} = 0$, то $\exists$ евклидовы координаты)

Нужно найти замену координат $x^i(y^1, \dots, y^n)$: $g_{ij} = \text{const}$, g_{ij} меняются с помощью матрицы Якоби, поэтому, выбрав правильным образом вид первых производных

$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$, можем добиться того, что $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$.

Следующий шаг – добиться того, что $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \big|_P = 0$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k}$

Сейчас $\frac{n(n+1)}{2}$ столько компонент метрики и параметров и n производных, $\frac{n^2(n+1)}{2}$ условий, поэтому можно добиться того, чтобы $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \big|_P = 0$.

Далее нужно, чтобы $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^p \partial x^q} = 0$. Здесь написано $(\frac{n(n+1)}{2})^2$ условий, а параметров $\frac{\partial^3 x^i}{\partial y^p \partial y^q \partial y^r} n C_{n+2}^3$ (таких выражений $1 \leq p \leq q \leq r \leq n C_{n+2}^3$) - меньше, чем количество условий, которые нужно удовлетворить.

$$(\frac{n(n+1)}{2})^2 - n C_{n+2}^3 = \frac{n^2(n^2+1)}{12}$$

Как нужно доказывать теорему: написать уравнение замены координат, уравнения в частных производных и искать необходимые и достаточные условия разрешимости.

Лекция 12. Степень отображения.

Степень отображения.

Будем рассматривать гладкие отображения $f: M \rightarrow N$, M и N — гладкие компактные без края (замкнутые), связные, ориентированные, одинаковой размерности ($\dim M = \dim N = n$). Возьмем $\forall y \in \mathbb{R}$ — регулярные значения f .

Опр. Регулярные значения - $\forall x \in f^{-1}(y)$ $df(x)$ имеет максимальный ранг.

В данном случае размерности одинаковые, поэтому матрица $df(x)$ будет квадратной и невырожденной (определитель не равен 0).

Опр. Назовем степенью отображения $\deg f(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det } df(x)$.

Определитель матрицы дифференциала зависит от выбора координат, но, поскольку мы считаем, что многообразия ориентированы и ориентации фиксированы, тогда знак определителя не изменится, потому что при замене координат матрица дифференциала умножается на матрицу замены координат, а если ориентация сохраняется, то эти матрицы будут положительными.

Из компактности будет вытекать, что сумма $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det } df(x)$ конечна.

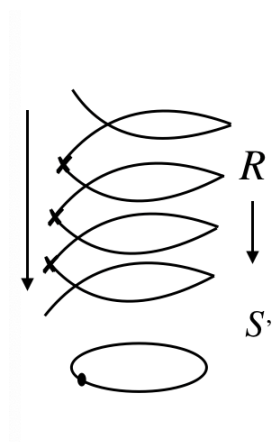


Рис. 12.1. Отображение прямой в окружность.

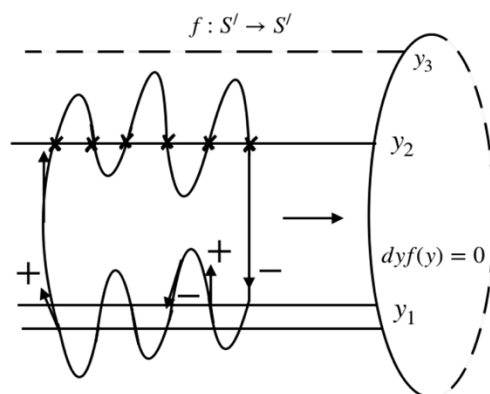


Рис. 12.2. Отображение окружности в окружность.

Если прообраз пуст, то такая точка, по определению, считается регулярной: $f^{-1}(y) = \emptyset \Rightarrow dyf(y) = 0$. От деформации отображения и выбора регулярного значения ничего не зависит.

Теорема: степень отображения не зависит от выбора регулярного значения (т. е. степень отображения может быть определена для отображения) и не меняется при гладкой гомотопии (если имеется $f_t(x) = F(t, x), t \in [0, 1]$, то $\deg f_{t_1} = \deg f_{t_2}$).

Схема доказательства:

1. Из гомотопической инвариантности следует независимость от точки.

Лемма: если имеется гладкое связное ориентированное многообразие M , содержащее точки $y, y' \in M$, тогда существует однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию и гладко зависящих от t $\{\varphi_t\}$ $\varphi_t: M \rightarrow M$ такое, что $t \in [0, 1]$, $\varphi_0 = 1_M$, $\varphi_1(y) = y'$. Отображение $1_M(y) = y \forall y \in M$.

Доказательство: существует регулярная гладкая кривая γ , соединяющая на многообразии y и y' . Рассмотрим окрестность U этой кривой, выбрав ее такой, чтобы она была гомеоморфна диску. Тогда в окрестности U существуют координаты $(x^1, \dots, x^n)$ такие, в которых точки y и y' будут лежать на одной координатной оси, соответствующей кривой γ .

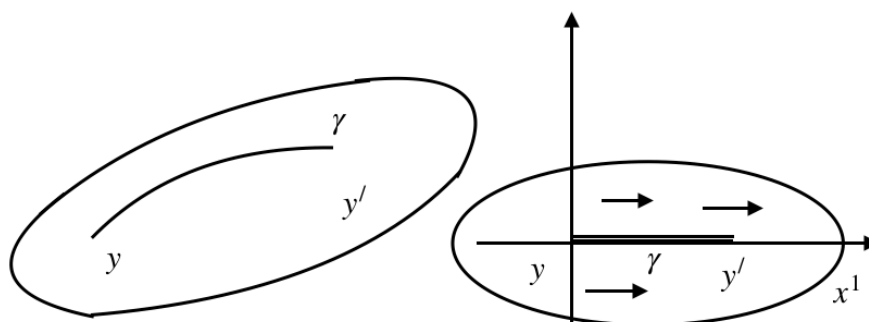


Рис. 12.3. Координаты $(x^1, \dots, x^n)$, в которых точки y и y' лежат на одной координатной оси.

Рассмотрим векторное поле ∂_{x^1} и умножим его на функцию, носитель которой $\psi(x)$ $\text{supp } \psi \subset u(y, y')$ (вне окрестности $\psi = 0$).

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, соответствующих этому векторному полю φ_t : $\dot{\varphi}_t|_{t=0} = \psi \partial_{x^1}$

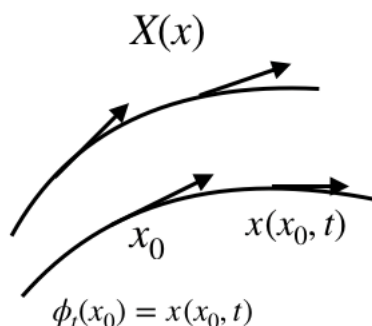


Рис. 12.4. Векторное поле X .

Векторное поле можно проинтегрировать и получить решение $x(x_0, t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(x_0, 0) = x_0$. Т.е. из каждой точки x_0 можно «выпустить» решение дифференциального уравнения. Тогда соответствующий диффеоморфизм $\varphi_t(x_0) = x(x_0, t)$. То, что это диффеоморфизм вытекает из теоремы дифференциальных уравнений о гладкой зависимости решения от начального условия.

Независимость от гомотопии влечет независимость от начальной точки.

Пусть y и y' – независимые значения f .

Рассмотрим $\varphi_t: N \rightarrow N$ такое, что $\varphi_0 = 1_N$, $\varphi_1(y) = y'$. Тогда наряду с отображением $f: M \rightarrow N$ можно рассмотреть его гладкую гомотопию $\varphi_t \circ f$, $\deg \varphi_0 \circ f = \deg \varphi_t \circ f = \deg f$ в любой регулярной точке.

$$\deg f(y') = \deg(\varphi_0 \circ f)(y')$$

$$(\varphi_0 \circ f)^{-1}(y'), \quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\varphi_1} N, \quad f^{-1}(y) \leftarrow y \leftarrow y'$$

$$(\varphi_0 \circ f)^{-1}(y') = f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow \deg f(y') = \deg(\varphi_1 \circ f)(y') = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det } d(\varphi_1 \circ f)(x)$$

$$d(\varphi_1 \circ f)(x) = d\varphi_1(x)df(x), \quad \det d\varphi_1(x) > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det } d(\varphi_1 \circ f)(x) = \sum_x \text{sign } df(x) = \deg f(y)$$

Пусть $f, g: M \rightarrow N$, $f \sim g$, т.е. $\exists F: M \times [0, 1] \rightarrow N$, $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$

Множество регулярных значений всюду плотно. Если y – регулярное значение f , тогда

$\exists u(y) \subset N: \forall \tilde{y} \in u$ – регулярное значение f .

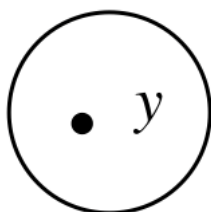


Рис. 12.5. Значение u и окрестность, в которой все значения регулярные.

Множество регулярных значений всюду плотно, поэтому $\exists \tilde{y} \in u$ – регулярное значение для g , $\exists y \in N$ – регулярные для f и g .

Рассуждая аналогичным образом, для выбранного y , регулярного для f и g , можно считать, что в некоторой окрестности все y тоже регулярны для f и g , тогда найдется $\tilde{y}$, который будет регулярен для гладкого отображения F . Значит, не ограничивая

общности, можно считать, что существует $y \in N$, регулярный для всех трех отображений f, g и F .



Рис. 12. 6. $y \in N$, регулярный для всех трех отображений f, g и F .

Рассмотрим $F^{-1}(y)$, y — регулярное значение для F , его полный прообраз — гладкое многообразие с размерностью, равной разнице размерностей $= 1$. Гладкое одномерное многообразие представляет собой конечное объединение окружности и отрезка.

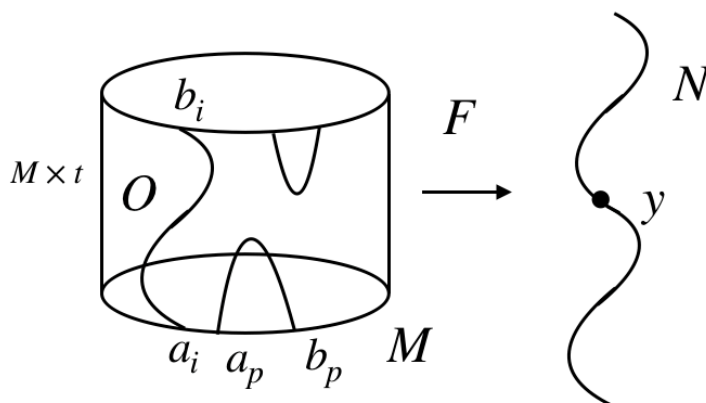


Рис. 12.7. Прообраз $F^{-1}(y)$ — объединение отрезков и окружностей и гомотопия F .

$\partial F^{-1}(y) \subset \partial (M \times [0,1])$, каждый отрезок представляет собой гладкую регулярную кривую γ_i .

$$a_i, b_i \in f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)$$

Лемма: если концы γ_i лежат в одной компоненте границы, то их общий вклад в степень соответствующего отображения f или g равен 0.

Если лежат в разных компонентах границы, то и вклад одинаков.

Доказательство: 1 случай. Нужно показать, что $df(a_i)$ и $df(b_i)$ имеют противоположные знаки.

Многообразие ориентировано и его ориентация совпадает с ориентацией цилиндра $M \times [0,1]$.

рассмотрим базис, составленный на цилиндре из векторов, касательных к краю и вектора скорости $\dot{\gamma}$. аналогичный базис можно построить в каждой точке кривой, продолжив соответствующие векторные поля так, чтобы они образовывали базис.

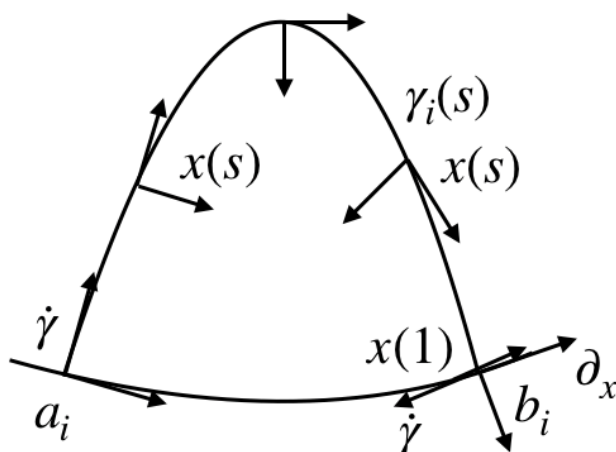


Рис. 12. 8. К доказательству первого пункта леммы.

Базисы ∂_x и $X(1)$ противоположно ориентированы.

Отображение F регулярно, поэтому dF отображает базисы в касательном пространстве в базисы в касательном пространстве $T_y N$, где они также не зависят от точки и ориентация их образов не меняется, поэтому $df(\partial_x|_a)$ имеет ту же ориентацию, что и $df(X(1)|_b)$, а значит, противоположную к ориентации $df(\partial_x|_b)$ (рис. 12.8).

Доказали, что общий вклад будет равен 0.

2 случай. Такого переворота, как в первом случае не происходит, ориентация базиса в двух точках будет одинаковая, значит, вклад будет одинаковым.

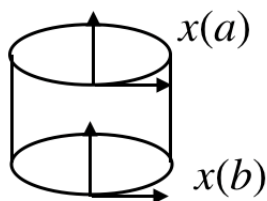


Рис. 12. 9. К доказательству первого пункта леммы.

Из этой леммы вытекает общее утверждение теоремы: степень отображения не меняется при гомотопии.

Теореме о «еже» (векторные поля на S^n).

Опр. Если X – векторное поле на M , то точка $P \in M$ называется особой для X , если $X(P) = 0$.

Теорема: на S^{2k} не существует векторных полей без особых точек.

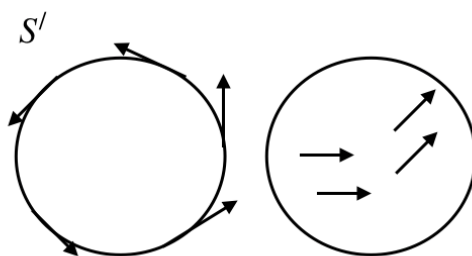


Рис. 12.10. К доказательству теоремы.

Доказательство: пусть X – касательное векторное поле без особых точек на S^n .

Считаем, что $S^n \subset \mathbb{R}^n$ со стандартное метрикой.

Рассмотрим другое векторное поле $Y(P) = \frac{X(P)}{\|X(P)\|}$ – гладкое векторное поле единичных векторов.

Π – двумерная плоскость на $Y(P)$ и $n(P)$, на которой можно рассмотреть непрерывное семейство с единичной длиной $Y(t, P)$, начинающееся на $n(P)$ и заканчивающееся на $-n(P)$.

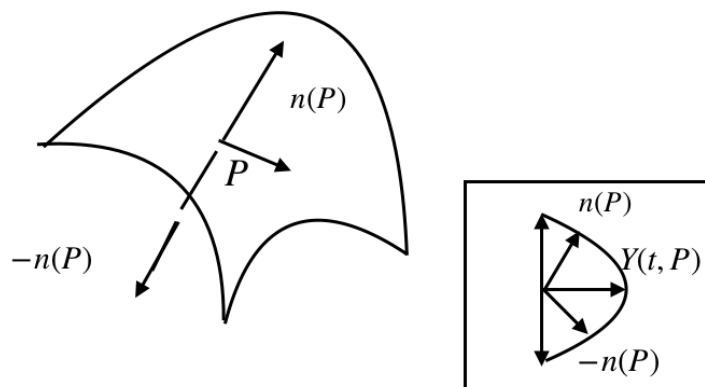


Рис. 12.11. К доказательству теоремы.

$$Y(t, P) = Y(P) \cos t + n(P) \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad ||Y(t, P)|| = 1$$

Получилось семейство отображений, $Y(t, x): S^n \rightarrow S^n$.

Если $t = \frac{\pi}{2}$, то $Y\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = n(x) = x$ – тождественное отображение S^n .

Если $t = -\frac{\pi}{2}$, то $Y\left(-\frac{\pi}{2}, x\right) = -n(x) = -x$ – антимодальное отображение S^n .

$\Rightarrow \deg Y(t, x) = 1$, не зависит от t .

Лемма: $a: S^n \rightarrow S^n$, $a(x) = -x$, $\deg a = (-1)^{n+1}$

Доказательство: для четного n $\deg a = -1$, получаем противоречие.

Рассмотрим $\partial B^{n+1} = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и отображение $A: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $A(x) = -x$, $\det A = (-1)^{n+1}$

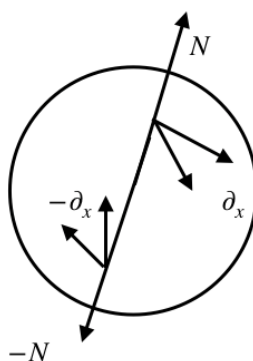


Рис. 12.12. К доказательству теоремы.

А сохраняется ориентацию $\mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow a$ сохраняет ориентацию сферы, то есть $\deg a = (-1)^{n+1}$.

Тем самым, на четномерных сферах нельзя нарисовать касательное векторное поле без особых точек.

Это не свойство размерностей, контрпример – тор.

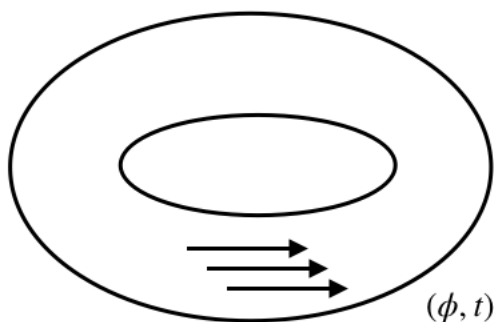


Рис. 12.13. Тор.

Основная теорема алгебры.

Теорема: каждый комплексный многочлен $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ имеет хотя бы один корень.

Доказательство: рассмотрим гладкую гомотопию $P_n(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0) \sim z^n$, у z^n и $P_n(z, t)$ одинаковые ненулевые степени, поэтому уравнение $z^n = 1$ имеет n корней

$\Rightarrow$ степень отображений z^n и $P_n(z, t)$ $n \Rightarrow n$ корней

Другое доказательство: другая гомотопия $t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z) + a_0 \sim a_0$, у константы нет корней $\Rightarrow$ произвольный многочлен n не имеет корней.

Разберемся, что не так с этими доказательствами.

Рассмотрим $\mathbb{C} \cup \infty = \bar{\mathbb{C}} = S^2 = \mathbb{CP}^1$ – одномерное комплексное проективное пространство – комплексный аналог проективной плоскости, определяется парой проективных координат $\mathbb{CP}^1(z_0: z_1) \sim (\lambda z_0: \lambda z_1)$, $\lambda \neq 0$.

Задаются координаты $\mathbb{CP}^1(z_0: z_1) \rightarrow \begin{cases} z = \frac{z_1}{z_0}, z_0 \neq 0 - \text{отображение в } \mathbb{C}(z) \\ z = \frac{z_0}{z_1}, z_1 \neq 0 - \text{отображение в } \mathbb{C}(z') \end{cases}$

2 комплексные плоскости с такими координатами «склеиваются» в сферу.

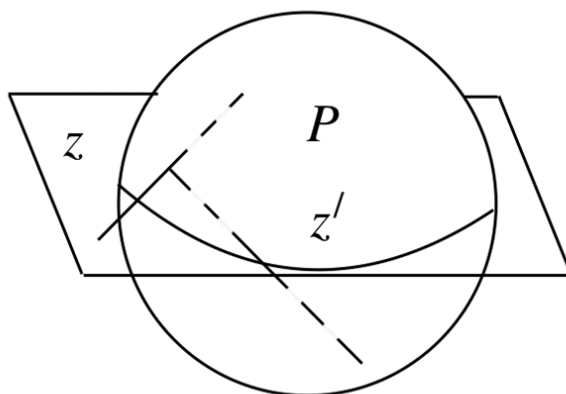


Рис. 12.14. Стереографическая проекция.

$$f_P: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

$$(z_0: z_1) (\omega_0: \omega_1)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \omega(z) = P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = \left| \frac{z_1}{z_0} \right|$$

$$= \frac{z^n + a_{n-1}z^{n-1} z_0 + \dots + a_1z z_0^{n-1} + a_0 z_0^n}{z_0^n}$$

$$\text{Тогда } \omega_1(z_0: z_1) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} z_0 + \dots + a_1z z_0^{n-1} + a_0 z_0^n, \quad \omega_0(z_0: z_1) = z_0^n$$

Проверим, что оно гладкое в каждой точке карты:

В карте $z = \frac{z_1}{z_0}$ и $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ – многочлен.

В карте $z' = \frac{z_0}{z_1}$ и $\omega' = \frac{\omega_1}{\omega_0}$

$$\begin{aligned}\omega' = \frac{\omega_1}{\omega_0} &= \omega' = \frac{z_0^n}{z^n + a_{n-1}z^{n-1}z_0 + \dots + a_1z z_0^{n-1} + a_0 z_0^n} = \\ &= \frac{(z')^n}{1 + a_{n-1}z' + \dots + a_0 (z')^n}\end{aligned}$$

Это отображение интересно в окрестности, где $z' = 0$, функция $\omega'(z')$ гладкая и аналитическая.

Тем самым показали, что f_P — аналитическое отображение комплексных многообразий.

Гомотопия.

$$\begin{aligned}F: \quad \omega_1(z_0: z_1) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1}z_0 + \dots + a_1z z_0^{n-1} + a_0 z_0^n \\ \omega_0(z_0: z_1) &= z_0^n\end{aligned}$$

Лемма: гомотопия F гладкая.

Доказательство: записать F в двух картах и убедиться, что она гладкая.

В карте $z = \frac{z_1}{z_0}$ и $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ очевидно.

Упр. Доказать лемму для другой карты.

Семейство отображений $f_P(x, t) \quad f_P \sim f_{P=z^n} \cdot dz^n = ?$

Лемма: если f – комплексно-аналитическое отображение многообразий, то $\det df = |f'(z)|^2 \geq 0$

Доказательство: записать это комплексное отображение в вещественном виде и воспользоваться условием комплексной аналитичности.

Если $z = x + iy$, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$|df| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right| = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Пусть $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Функция $f(z, \bar{z})$ аналитическая $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + iv) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

Условие аналитичности – условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$|df| = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$$

Лекция 13. Следствия из теоремы о степени отображения.

Степень отображения.

$f: M \rightarrow N$, M и N – гладкие, компактные без края (замкнутые), связные, ориентированные и $\dim M = \dim N = n$.

$\forall y \in N$ – регулярное значение f .

Опр. $y \in N$ – регулярное значение f , если $\forall x \in f^{-1}(y)$ $df(x)$ имеет максимальный ранг.

Матрица $df(x)$ будет квадратной, невырожденной.

Опр. $\deg f(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det}(df(x))$ – степень отображения f в y .

$\det(df(x))$ зависит от выбора координат, но, поскольку мы считаем, что многообразия ориентированы, то есть ориентации фиксированы (меняем координаты с сохранением ориентации), то знак определителя будет постоянен (при замене координат матрица дифференциала умножается на матрицу замены координат, а если ориентация сохраняется, то определитель положителен).

Теорема: степень отображения не зависит от выбора регулярного значения (т. е. степень отображения может быть определена для отображения) и не меняется при гладкой гомотопии (если имеется $f_t(x) = F(t, x), t \in [0, 1]$, то $\deg f_{t_1} = \deg f_{t_2}$).

Степень и интеграл.

$f: M \rightarrow N$. рассмотрим форму $\omega \in \Omega^n(N)$

Теорема: $\int_M f^* \omega = \deg f(y) \int_N \omega$.

Доказательство: интеграл – аддитивная функция, определяющаяся через разбиение единицы, достаточно доказать в карте, которую можно разбить, следовательно, все можно доказать в маленькой карте.

Пусть y – регулярное значение отображения f . Тогда $\exists$ окрестность $u \ni y, u \subset N$ состоит из регулярных значений.

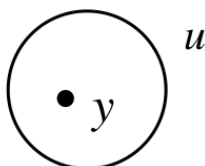


Рис. 13.1. К доказательству теоремы.

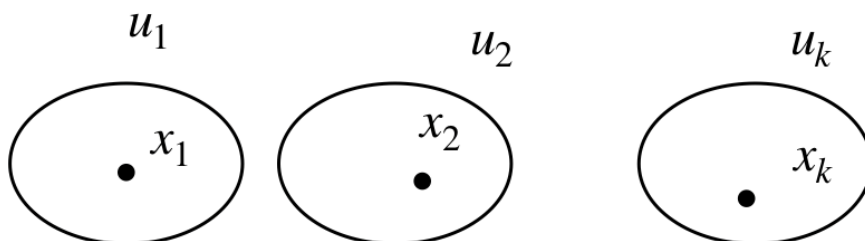


Рис. 13.2. К доказательству теоремы.

Полный прообраз $f^{-1}(y) = \{x_i\}_{i=1}^k, \exists u \ f^{-1}(u) = u_1 \cup \dots \cup u_n$

В каждой окрестности можно ввести свои координаты.

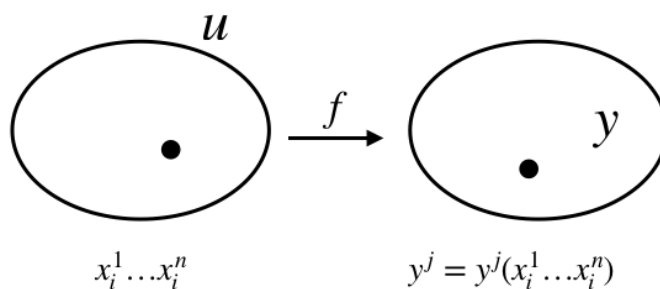


Рис. 13.2. К доказательству теоремы. Диффеоморфизм окрестности.

$$\omega = \varphi(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

В окрестности u_i $f^* \omega = \varphi(y(x_i)) \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n$

$$\begin{aligned} \int_u \omega &= \int_u \varphi(y) dy^1 \dots dy^n = \int_{u_i} \varphi(y(x_i)) \left| \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \right| dx^1 \dots dx^n = \\ &= \text{sign} \det \int_{u_i} \varphi \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} dx^1 \dots dx^n \\ \int_{f^{-1}(y)} f^* \omega &= \sum_i \int_{u_i} f^* \omega = \sum_i \int_{u_i} \varphi(y(x_i)) \det \frac{\partial y}{\partial x_i} dx^1 \dots dx^n = \\ &= \sum_i \left(\text{sign} \det \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \int_u \omega = \left(\int_u \omega \right) \sum_i \left(\text{sign} \det \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = \int_u \omega \deg f \end{aligned}$$

Если y – сингулярная точка, то множество сингулярных значений S_f , по теореме Сарда, имеет меру 0, поэтому $\int_N = \int_{N \setminus S_f}$.

$(f^* \omega)|_{f^{-1}(y)} = 0$, так как в сингулярных точках определитель якобиана = 0, значит $\int_{f^{-1}(y)} f^* \omega = 0$.

Доказали, что $\int_M f^* \omega = \deg f \int_N \omega$

Формула Гаусса – Бонне.

$\int_{M^2} k d\sigma = 4\pi\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ или $\frac{1}{4\pi} \int_{M^2} k d\sigma \in \mathbb{Z}$ - простейшая формулировка (более сильные дают представления о λ)

Теорема Гаусса-Бонне: пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – гиперповерхность.

Тогда $\frac{1}{\text{Vol } S^{n-1}} \int_{M^{n-1}} k * 1_M \in \mathbb{Z}$

Гауссово отображение.

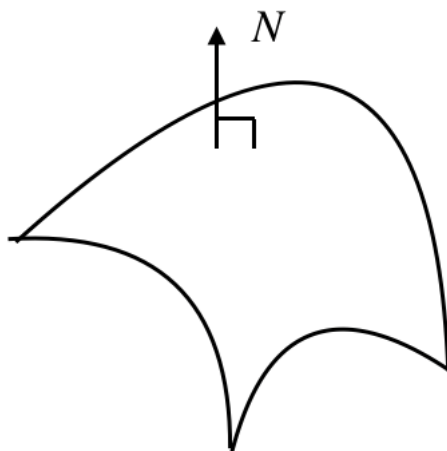


Рис. 13.2. Гиперповерхность и поле нормалей.

Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — ориентированная гиперповерхность, $N(\bullet, P)$ — гладкое поле нормалей. $\Omega = * 1_{S^{n-1}}$ — форма объема.

Опр. $g: M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $g(P) = N(P)$ — гауссово отображение.

Теорема: $\int_M g^*(\Omega) = (\deg g) \int_{S^{n-1}} \Omega = \text{Vol } S^{n-1}$, $\frac{1}{\text{Vol } S^{n-1}} \int_M g^*(\Omega) \in \mathbb{Z}$

Лемма: $g^*(\Omega) = k * 1_M$

Доказательство: M — график гладкой функции, $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

$\frac{\partial f}{\partial x^i} \big|_P \equiv f_{x^i}(P) = 0$, параметризация $r(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-1}, f)$.

$$r_{x^i} = (0, \dots, 1, \dots, 0, f_{x^i})$$

i

$$\langle r_{x^i}, r_{x^i} \rangle = 1 + f_{x^i}^2, \quad \langle r_{x^i}, r_{x^j} \rangle = f_{x^i} f_{x^j}$$

$$(g_{ij})(P) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad N = (0, \dots, 0, 1) \parallel Ox^n$$

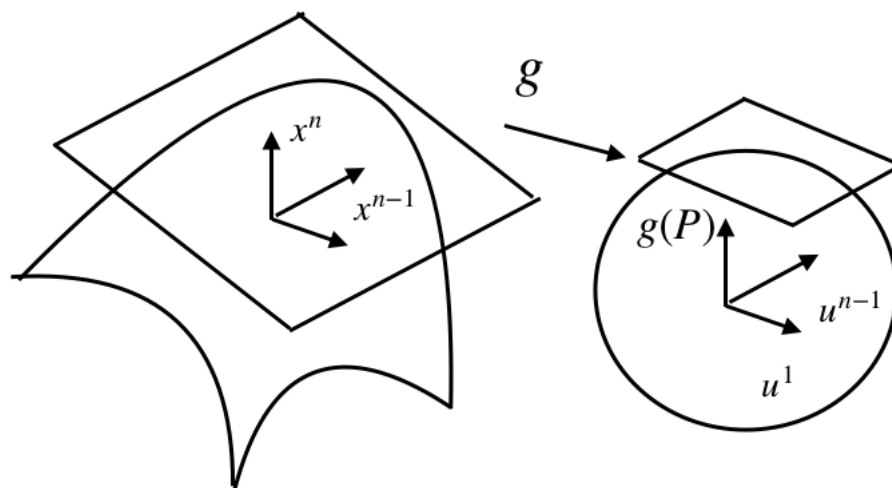


Рис. 13.3. К доказательству леммы.

$$r_{x^i x^j} = (0, \dots, 0, f_{x^i x^j}), \quad (q_{ij}) = \langle r_{x^i x^j}, N \rangle = f_{x^i x^j}$$

$$\text{Гауссова кривизна } K(P) = \frac{\det Q}{\det G} = \det(f_{x^i x^j}(P))$$

$$* 1_M = \sqrt{\det g_{ij}} \partial_{x^1} \wedge \dots \wedge \partial_{x^{n-1}} = \partial_{x^1} \wedge \dots \wedge \partial_{x^{n-1}}$$

$$K(P) * 1_M = \det(f_{x^i x^j}) \partial_{x^1} \wedge \dots \wedge \partial_{x^{n-1}}$$

$$N(P) = g(P) = (0, \dots, 0, 1)$$

$$\Omega(g(P)) = du^1 \wedge \dots \wedge du^n$$

$$r_{x^i} = (0, \dots, 1, \dots, 0, f_{x^i}), \quad g(x) = \frac{(-f_{x^1}, \dots, -f_{x^{n-1}}, 1)}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \dots + f_{x^{n-1}}^2}} \in \mathbb{R}^n$$

$$g(P) = g(0) = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{В координатах } (u^1, \dots, u^n), \quad g(x) = \frac{(-f_{x^1}, \dots, -f_{x^{n-1}}, 1)}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \dots + f_{x^{n-1}}^2}}$$

$$g^*(\Omega) = \det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \Big|_P = -f_{x^i x^j}(P) = (-1)^{n-1} \det f_{x^i x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$\text{Итак, } \frac{1}{\text{Vol } S^{n-1}} \int_{M^{n-1}} k * 1_M \in \mathbb{Z}$$

Гауссово отображение в двумерном случае.

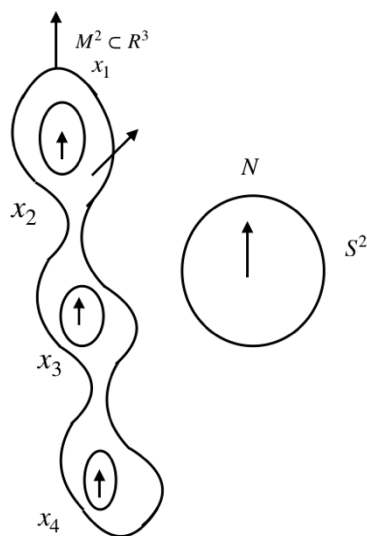


Рис. 13.4. Сфера с тремя ручками. К определению гауссова отображения.

$y(x)$ — гауссово отображение.

$$\text{sign det } \frac{\partial y}{\partial x} |_{x_i} - ?$$

$$\text{det } \frac{\partial y}{\partial x} = K$$

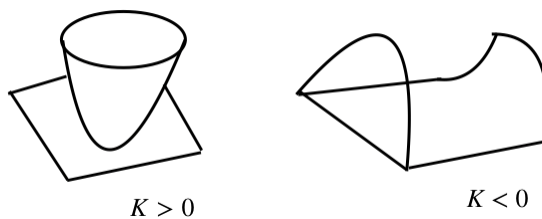


Рис. 13.5. Геометрический смысл гауссовой кривизны.

$$\deg g = \text{количество ручек} + 1$$

$$\chi(M) = 2 - 2g - \text{эйлерова характеристика.}$$

Степень гауссова отображение $\deg g = \frac{\chi(M)}{2}$ не зависит от вложения.

Если вложения отличаются на гладкую деформацию, то можно использовать теорему о том, что степень отображения не меняется при гладких гомотопиях.

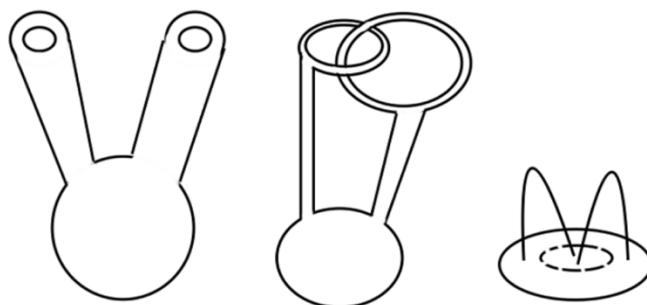


Рис. 13.5. Вложения сферы с ручками.

Индексы векторных полей.

Опр. Говорят, что на многообразии задано векторное поле, если $X(P) \in T_P M \forall P$

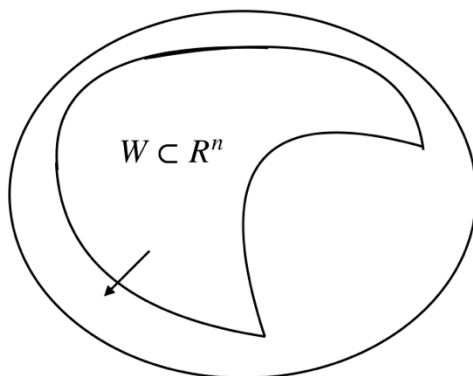


Рис. 13.5. Векторное поле в некоторой области W в $\mathbb{R}^n$.

Векторное поле задано в некоторой области $\mathbb{R}^n$, ее границы ∂W — гладкое компактное многообразие, задано гладкое векторное поле X в u , $W \subset u \subset \mathbb{R}^n$.

Опр. Если X — векторное поле на M , то точка $P \in M$ называется особой для X , если $X(P) = 0$.

Пусть X не имеет особых точек на краю области $\partial W = M^{n-1}$. M^{n-1} ориентировано внешней нормалью.

Если $X(P) \neq 0$, то определено единичное векторное поле $\frac{X(P)}{\|X(P)\|} \in S^{n-1}$

Отображение $g_x: M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $g_x(P) = \frac{X(P)}{\|X(P)\|}$

Опр. $\deg g_x = \text{ind}_w X$ – индекс поля X в W .

Опр. Пусть $X(P) = 0$, $\exists$ окрестность $u(P) \subset \mathbb{R}^n: X$ не обращается в 0 в $u(P) \setminus \{P\}$, тогда P – изолированная особая точка.

Опр. Если P – изолированная особая точка, то на $\partial B^n = S^{n-1}$ поле не обращается в 0 и определен $\text{ind}_{B^n} X = \deg g_x$, $g_x: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, то $\text{ind}_{B^n} X = \text{ind}_P X$ – индекс поля X в точке P .

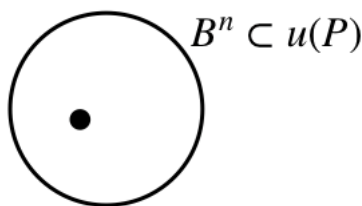


Рис. 13.6. К определению изолированной точки.

Лемма: индекс не зависит от выбора шара $B^n(P) \subset u$.

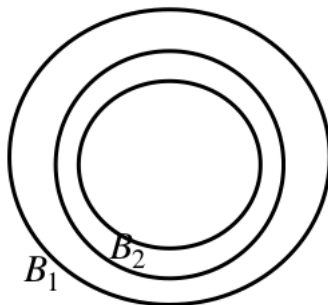


Рис. 13.6. К доказательству леммы.

Доказательство: рассмотрим однопараметрическое семейство шаров $B_t(P)$, t – радиус.

Возникнет семейство отображений $g_{xt}: S^{n-1}(t) \rightarrow S^{n-1}$ – гладкая гомотопия. Ни при каком t нет особых точек (иначе отображение g_{xt} было бы не определено), через особую точку гомотопия не проходит, поэтому на каждой сфере можно поделить на x , и отображение будет определено. Поэтому индекс поля определен в точке.

Теорема об изолированности особых точек.

Теорема: X – гладкое векторное поле в области W , не имеющее особых точек на границе ∂W , все особые точки X внутри W изолированы. W такая, что ее замыкание компактно, ∂W – гладкое многообразие. Тогда $\text{ind}_W X = \sum_{P_i \in W} \text{ind}_{P_i} X$, P_i – особые точки.

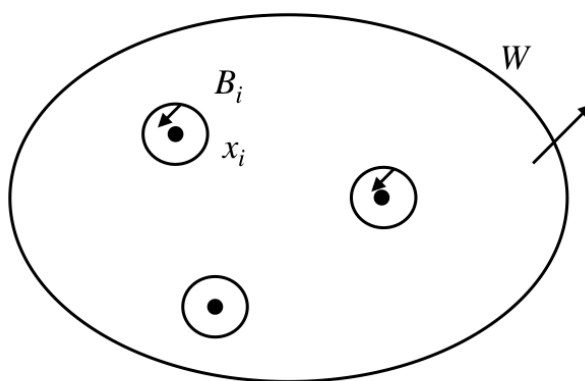


Рис. 13.7. К теореме об изолированности особых точек.

Доказательство: рассмотрим многообразие $W \setminus \cup B_i = L$, $\partial L = M \cup S_i^{n-1}$.

$g_x: L \rightarrow S^{n-1}$, форма объема Ω , $g_x^*(\Omega)$

$$0 = \int_L g_x^*(d\Omega) = \int_L d g_x^*(\Omega)$$

По формуле Стокса $\int_L d g_x^*(\Omega) = \int_{\partial L} g_x^*(\Omega) = \int_M g_x^*(\Omega) + \sum \int_{S_i^{n-1}} g_x^*(\Omega)$.

$$\int_M g_x^*(\Omega) = \deg g_x \int_{S_i^{n-1}} \Omega$$

$$\int_{S_i^{n-1}} g_x^*(\Omega) = \deg g \int_{S_i^{n-1}} \Omega$$

$$\deg g_x = \text{ind}_w X, \deg g = -\text{ind}_{P_i} X$$

$$\text{Итак, } \text{ind}_w X = \sum_{P_i \in W} \text{ind}_{P_i} X$$

Отсюда вытекает, что если индексы у поля ненулевые в какой-либо области, то внутри этой области обязательно есть особая точка.



Рис. 13.8. Пояснение к доказательству теоремы.

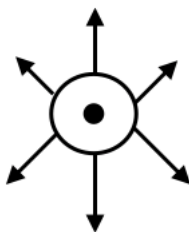


Рис. 13.9. Пример векторного поля, которое нельзя продолжить внутрь без особой точки.

Теорема Брауэра.

Пусть $F: D^n \rightarrow D^n$, D^n — n -мерный замкнутый шар. Тогда F имеет неподвижную точку.
 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$

Доказательство:

Зам. 1. Если диск открытый, то утверждение неверно.

Зам. 2. можно брать непрерывное отображение диска в себя, не обязательно гладкое.

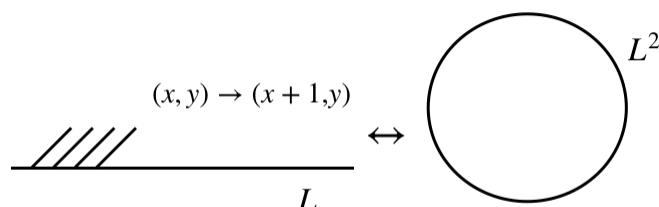


Рис. 13.10. Движение на плоскости Лобачевского.

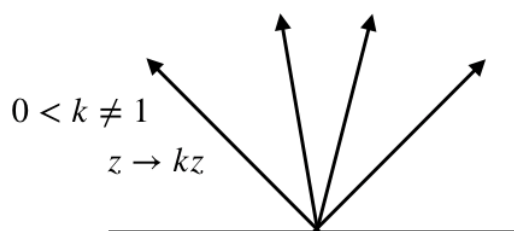


Рис. 13.11. Пример отображения из комплексной плоскости в открытый диск.

Пусть $F: D^n \rightarrow D^n$ такое, что $F(x) \neq x \forall x$, тогда на диске можно задать векторное поле $X(x) = F(x) - x$ – гладкое векторное поле без особых точек. С другой стороны, если мы рассмотрим это поле в любой граничной точке x , то поймем, что эта точка переходит в точку внутри диска $F(x)$ (рис). Значит, вектор, соединяющий эти точки, будет иметь ненулевую составляющую.

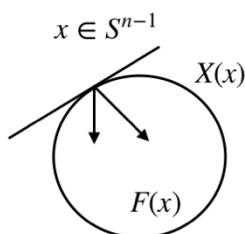


Рис. 13.12. К доказательству теоремы.

$X(x)$ проецируется на внутреннюю нормаль не в 0. Это означает, что поле можно прогомотиопировать в поле внутренних нормалей $X(x)|_{S^{n-1}}$.

$\text{ind}_{D^n} X \neq 0$ – степень антиподального отображения – отображение, которое каждую точку сферы переводит в противоположную. Значит, внутри есть особая точка.

Получаем противоречие.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У