



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЧАСТЬ II

СЕРГЕЕВ
ИГОРЬ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ОЦИФРОВКУ КОНСПЕКТА

СТУДЕНТА ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ

СИНЦОВА МИХАИЛА АРТУРОВИЧА



Содержание

Лекция 1	5
Зависимость решений от параметров	5
Лекция 2	8
Непрерывность	8
Дифференцируемость	10
Лекция 3	13
Уравнения, зависящие от параметра	14
Лекция 4	19
Устойчивость по Ляпунову	19
Постоянные системы	19
Лекция 5	26
Периодические системы	27
Остальные системы. Второй метод Ляпунова	27
Лекция 6	31
Первый метод Ляпунова	31
Лекция 7	34
Автономные системы	34
Выпрямление фазовых кривых	36
Лекция 8	38
Первый интеграл	38
Лекция 9	42
Система Лотки–Вольтерры	44
Уравнение Ньютона	46
Лекция 10	47
Особые точки Пуанкаре	47
Динамические системы	50
Лекция 11	52
Лекция 12	56
Цикл в фазовом пространстве	56
Плоский цикл	57
Лекция 13	60
Уравнения в частных производных первого порядка	60

Задача Коши для этого уравнения	61
---------------------------------------	----

Лекция 1

Зависимость решений от параметров

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & (t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{1+n} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Эту задачу Коши называем исходной (соответственно решение – исходным).

$$\begin{cases} \dot{y} = g(t, x) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ – возмущенная задача (решение)}$$

Все описанные решения – непродолжаемые.

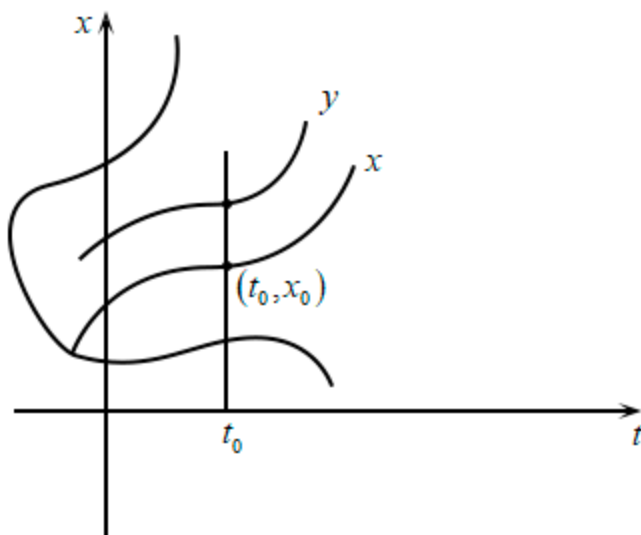


Рисунок 1

Зададимся вопросами:

$$1) D(y) \stackrel{?}{\supset} D(x),$$

т.е. будет ли похожа в каком-то смысле область определения y на область определения x ;

2) Если на первый пункт ответ положительный, то

$$y(t) \stackrel{?}{\supset} x(t),$$

т.е. будет ли решение y хоть где-нибудь близко к решению x .

Как ни странно, ответы на оба этих вопроса – положительные.

Теорема (о непрерывной зависимости решения задачи Коши от правых частей).

$$\begin{cases} f, f'_x \in C(G, M) \\ x \text{ – исходное решение} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall K \in D(x) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall g, g'_y \in C(G) \quad \begin{cases} |y_0 - x_0| < \delta \\ \|g - f\|_G < \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(y) \supset K \\ \|y - x\|_K < \varepsilon \end{cases}$$

Прежде, чем доказывать, вспомним некоторые факты из других разделов математики.

Пусть в метрических пространствах заданы множества $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^k$.

Определение. $\rho(X, Y) \equiv \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y) \geq 0$

Лемма. Если X – компакт, Y – замкнуто и $X \cap Y = \{\emptyset\}$, то $\rho(X, Y) > 0$

Определение. Множество $U_{K, \varepsilon}(x(\cdot)) = \{(t, y) \mid t \in K, |y - x(t)| < \varepsilon\}$, где K – отрезок, $\varepsilon > 0$, называется ε -трубкой.

Лемма. Если $X \in C(K)$, то ее граница состоит из боковой поверхности и торцов.

Доказательство теоремы:

$$I. K = [\alpha, \beta] \subset D(x)$$

$$0 < \varepsilon < \rho(\Gamma_{x|_K}, \square^{1+n} \setminus G)$$

$$L = \|f'_x\|_C, C = \bar{U}_{K, \varepsilon}(x) \subset G$$

$$II. \delta = \frac{\varepsilon}{2(1 + \beta - \alpha)e^{L(\beta - \alpha)}} < \varepsilon$$

$$\begin{cases} |y_0 - x_0| < \delta \\ \|g - f\|_C < \delta \end{cases} \Rightarrow z = y - x$$

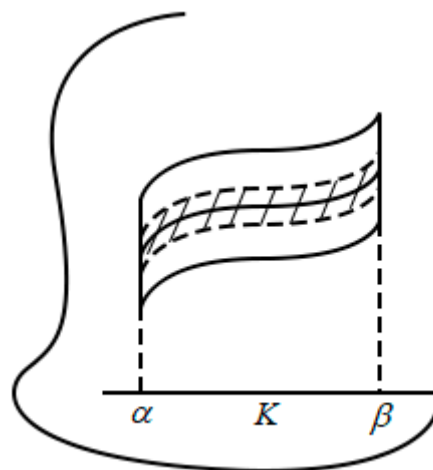


Рисунок 2

$$\begin{aligned} | \dot{z}(t) | &= | \dot{y}(t) - \dot{x}(t) | = | g(t, y(t)) - f(t, x(t)) | \leq | g(t, y(t)) - f(t, y(t)) | + \\ &+ | f(t, y(t)) - f(t, x(t)) | \leq \delta + L|y(t) - x(t)| = \delta + L|z(t)|, t \geq t_0 \end{aligned}$$

$$|z(t)| \leq (|z(t_0)| + \delta|t - t_0|)e^{L|t - t_0|} \leq \delta(1 + \beta - \alpha)e^{L|\beta - \alpha|} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$III. \Gamma_y \in U_{K, \frac{\varepsilon}{2}}(x) \Rightarrow |y - z| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$y(t)$ не принадлежит боковой поверхности трубки и, значит, $D(y) \supset K$

Теорема доказана.

Введем некоторые обозначения:

$$1) C^{0,1}(G) = \{f : G \rightarrow \square^n \mid f, f'_x \in C(G)\}$$

$$U_{\delta}(f) = \{g \in C^{0,1}(G) \mid \|g - f\|_G < \delta\}$$

2) $\square^n \supset G_{t_0}(x_0)$ – сечение области G гиперплоскостью $t = t_0$

$$\text{Например, } U_{\delta}(x_0) = \{y_0 \in G_{t_0} \mid |y_0 - x_0| < \delta\}$$

3) $S(G)$ – всякие непродолжаемые решения всяких задач Коши при $\begin{cases} g \in C^{0,1}(G) \\ y_0 \in G_{t_0} \end{cases}$

$U_{K,\varepsilon}(x) = \{y \in S(G) \mid \|y - x\|_K < \varepsilon\}$ – функциональная ε -трубка решений x на компакте K

Следствие 1.

Отображение $C^{0,1}(G) \times G_{t_0}(x_0) \rightarrow S(G)$, т.е. $(f, x_0) \mapsto x(\square)$ – непрерывно.

1.1) В пространстве $C^{0,1}$, как выяснилось, можно завести компактно-открытую топологию:

$$U_{C,\delta}(f) = \{g \in C^{0,1}(G) \mid \|g - f\|_C < \delta\}$$

Следствие 2.

Утверждение верно в смысле пункта 1.1.

Пусть дана функция $f(x, y)$, $x \in X \subset \square^m$, $y \in Y \subset \square^k$. Она может быть непрерывна:

- 1) по паре (x, y) ;
- 2) и по x , и по y ;
- 3) по x и по y равномерно по x ;
- 4) по x и по y равномерно на компактах $K \subset X$ по x .

Упражнение. Докажите импликации $1 \Rightarrow 2$, $3 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 4$

Лекция 2

Непрерывность

В прошлый раз мы рассматривали задачу Коши и доказывали, что решение этой задачи непрерывно зависит от правых частей самой задачи.

Рассмотрим применение этой теоремы.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu), & (t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{1+n}, \quad \mu \in M \subset \mathbb{R}^m \\ x(t_0) = x_0(\mu) \end{cases}$$

$x_0 : M \rightarrow G_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$, где G_{t_0} – сечение области G гиперплоскостью $t = t_0$.

Напомним, что мы рассматриваем только непродолжаемые решения.

$$M \rightarrow S_G$$

$$\mu \rightarrow x(\square, \mu)$$

В области M есть топология, индуцированная пространством \mathbb{R}^m . Эта топология не зависит от выбора нормы в \mathbb{R}^m , так как все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны.

S_G – пространство всяких решений, получаемых от всяких задач. В нем рассматривается компактно-открытая топология на любом компакте.

Запись второго уравнения системы несколько парадоксальна, ведь x зависит не только от t , но и от μ . Несмотря на это, она является общепринятой.

Теорема (о непрерывной зависимости решений от параметра).

$$\begin{cases} f, f'_x \in C(G, M) \\ x_0 \in C(M) \end{cases} \Rightarrow \forall \mu^* \in M, \quad \forall K \in D(x(\square, \mu^*))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |\mu - \mu^*| < \delta \Rightarrow \|x(\square, \mu) - x(\square, \mu^*)\|_K < \varepsilon$$

Доказательство: построим сквозное отображение.

$$M \rightarrow C^{0,1}(G) \times G_{t_0} \rightarrow S_G$$

Если мы докажем, что отображения в его составе непрерывны, то и все отображение будет непрерывным.

$$\mu \mapsto (f(\square, \square, \mu), x_0(\mu)) \mapsto x(\square, \mu)$$

Функция f , вообще говоря, не обязательно равномерно непрерывна по паре $(t, x) \in G$, но если положить, что $(t, x) \in C \subset G$, то по доказанной на прошлой лекции лемме она будет равномерно непрерывной по этой паре.

Из следствия леммы получим, что $C^{0,1}(G) \times G_{t_0} \rightarrow S_G$ – непрерывно.

Таким образом, мы показали непрерывность обоих отображений.

Рассмотрим решение как функцию двух переменных:

$$x(\square, \square): (t, \mu) \mapsto x(t, \mu) \text{ – решение семейства задач Коши.}$$

Теорема. В условиях предыдущей теоремы справедливо, что

$$1) D(x(\square, \square)) \text{ – область }^1 \text{ в } \square^{1+m}$$

$$2) x, \dot{x} \text{ – непрерывны по } (t, \mu)$$

Доказательство:

1) Рассмотрим рисунок. Каждому $\mu \in M$ и t_0 ставится в соответствие функция D .

Очевидно, что оно связно. Для некоторого отрезка K , содержащего t^* и целиком лежащего в области определения, точка (t^*, μ^*) будет содержать целый прямоугольник, т.е. это множество открыто.

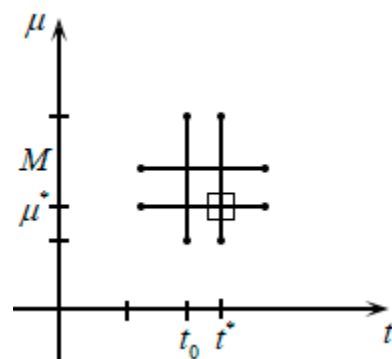


Рисунок 3

2) x непрерывна по μ равномерно по $t \in K$ и по лемме она непрерывна по паре (t, μ)

3) $\dot{x}(t, \mu) = f(t, x(t, \mu), \mu)$ – непрерывна по паре (t, μ)

Теорема (о непрерывности решений по начальному значению).

$$\begin{cases} f, f_x' \in C(G) \\ x_0 \in C(M) \end{cases} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x_0^* \in G_{t_0}, \forall K \in D(x(\square, x_0^*))$$

¹ Открытое связное множество.

$$\exists \delta > 0: |x_0 - x_0^*| < \delta \Rightarrow \|x(\cdot, x_0) - x(\cdot, x_0^*)\|_K < \varepsilon$$

Доказательство: это следствие доказанной в предшествующей лекции первой теоремы.

Теорема. В условиях предыдущей теоремы справедливо, что

1) $D(x(\cdot, \cdot))$ – область в \mathbb{R}^{1+n}

2) x, \dot{x} – непрерывны по (t, x_0)

Пример. Рассмотрим уравнение взрыва:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t - c$$

$$x(t, x_0) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

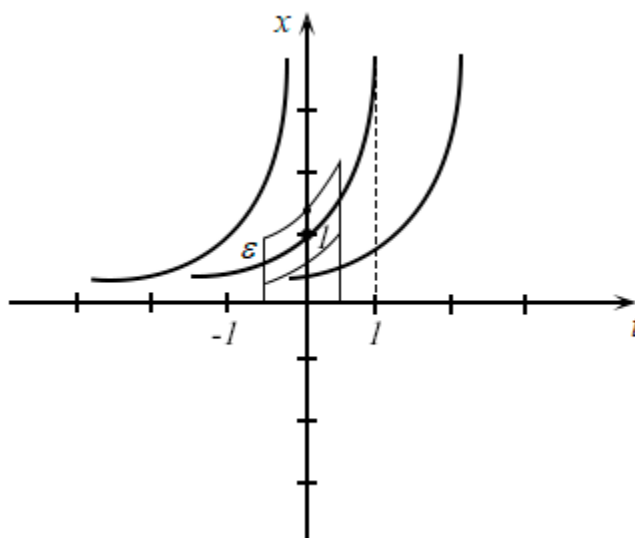


Рисунок 4

Фиксируем значение $x_0^* = 1$ и будем изучать решения на интервале $(-1, 1)$. Из теоремы следует, что в ε – трубке будут лежать все решения при достаточно близком к x_0^* значении x_0 .

Мы не можем гарантировать, что на этом интервале будет близость, даже если решение существует, и не можем гарантировать, что соседние решения на нем будут существовать. Пример показывает, что данная теорема по сути своей близка к критерию.

Дифференцируемость

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0(\mu) \end{cases}$$

Теорема* (о дифференцируемости решений по параметру).

Справедливо, что

$$\begin{cases} f, f'_x, f'_\mu \in C(G \times M) \\ x_0 \in C^1(M) \end{cases} \Rightarrow \exists x'_\mu(\square, \square), \exists (x'_\mu)^\bullet \equiv \left(\dot{x} \right)_\mu$$

и все три функции непрерывны по $(t, \mu) \in D(x(\square, \square))$.

x'_μ называется производной решения по параметру μ вдоль решения $x(\square, \mu)$

Доказывать теорему мы не будем из-за довольно сложных и объемных требуемых выкладок, отметим лишь основную идею:

$$\begin{array}{ccc} z(t, \nu, \mu) = \frac{x(t, \nu) - x(t, \mu)}{\nu - \mu} & \xrightarrow{\nu \rightarrow \mu} & x'_\mu(t, \mu) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \begin{cases} \dot{z}(t, \nu, \mu) = g(t, z, \nu, \mu) \\ z(t_0) = z_0(\nu, \mu) \end{cases} & \xrightarrow{\nu \rightarrow \mu} & \begin{cases} \dot{z}(t, \mu, \mu) = g(t, z, \mu, \mu) \\ z(t_0) = z_0(\mu, \mu) \end{cases} \end{array}$$

Как же найти производную f'_μ ?

Оказывается, механизм получения производной в доказательстве теоремы нам не нужен – достаточно лишь информации, содержащейся в формулировке.

Рассмотрим $z(\square) \equiv x'_\mu(\square, \mu)$ – матрицу размера $n \times m$. Алгоритм нахождения:

- 1) подставить $x \leftarrow x(\square, \mu)$;
- 2) продифференцировать по μ всё, что можно;
- 3) положить $\mu = \mu^*$.

Продемонстрируем:

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \mu) = f(t, x(t, \mu), \mu) \\ x(t_0, \mu) = x_0(\mu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\dot{x}'_\mu)^\bullet(t, \mu) = f'_x(t, x(t, \mu), \mu) \cdot x'_\mu(t, \mu) + f'_\mu(t, x(t, \mu), \mu) \\ x'_\mu(t_0, \mu) = x'_0(\mu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) + F(t), \\ z(t_0) = x'_0(\mu^*), \text{ где} \end{cases}$$

$$A(t) = f'_x(t, x(t, \mu^*), \mu^*),$$

$$F(t) = f'_\mu(t, x(t, \mu^*), \mu^*).$$

$\dot{z}(t)$ называется системой в вариациях по параметру вдоль решения $x(\square, \mu^*)$

Рассмотрим теперь такую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Нельзя ли продифференцировать ее прямо по x_0 ?

$$z(\square) = x'_{x_0}(\square, x_0^*)$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) - \text{система в вариациях по начальному значению} \\ z(t_0) = E \end{cases}$$

$$z(t) = Z(t, t_0, x_0^*) - \text{матрица Коши.}$$

Заметим, что система в вариациях по начальному значению одинакова для дифференцирования по любым координатам.

Рассмотрим частный случай:

$$\dot{x} = A(t)x + F(t)$$

$$\dot{z} = A(t)z - \text{не зависит от } x_0^*$$

Высказывание.

$$x(t, x_0 + h) = x(t, x_0) + x'_{x_0}(t, x_0) \cdot h + o(h)$$

Это равенство можно преобразовать:

$$x(t, x_0 + h) = x(t, x_0) + X(t, t_0)h, \text{ где } X - \text{оператор Коши.}$$

Лекция 3

На прошлой лекции мы рассматривали задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu), & (t, x) \in G, \mu \in M \\ x(t_0) = x_0(\mu) \end{cases}$$

При естественных предположениях гладкости от правых частей, мы полагали, что

$$x(t, \mu + \eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x(t, \mu)$$

$$x(t, \mu + \eta) = x(t, \mu) + \overbrace{\alpha(t, \eta)}^{o(1)}$$

$$\|\alpha(t, \eta)\|_K \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0 \quad \forall K \subset D(x(t, \mu))$$

Таким образом, мы разложили исходное решение в ряд с нулевым членом $x(t, \mu)$ и остатком $\alpha(t, \eta)$. Однако его можно разложить и подробнее.

Следствие. В условиях теоремы о дифференцируемости, справедливо разложение

$$x(t, \mu + \eta) = x(t, \mu) + x'_\mu(t, \mu) \cdot \eta + \underbrace{\overbrace{\alpha(t, \eta)}^{o(1)} \cdot |\eta|}_{o(\eta)}, \quad \eta \rightarrow 0$$

Доказательство: нам необходимо показать, что бесконечно малая функция равномерна по t .

$$1) \quad \forall K \subset D(x(t, \mu)) \quad \exists U(\mu) \quad \forall (\mu + \eta) \in \overline{U}(\mu) \quad D(x(t, \mu + \eta)) \supset K$$

Видно, что функция x определена на $K \times \overline{U}(\mu)$. Введем величину

$$L \equiv \sup_{K \times \overline{U}(\mu)} \|\dot{x}'_\mu(t, \mu + \eta)\| < \infty$$

Производная из тождества существует ввиду доказанной теоремы.

2) Осталось определить

$$\alpha(t, \eta) = \begin{cases} \frac{x(t, \mu + \eta) - x(t, \mu) - x'_\mu(t, \mu + \eta) \cdot \eta}{|\eta|}, & \eta \neq 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(t, \eta) = 0, & \eta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta \neq 0: \dot{\alpha}(t, \eta) = \frac{\dot{x}(t, \mu + \eta) - \dot{x}(t, \mu) - \dot{x}'_{\mu}(t, \mu + \eta) \cdot \eta}{|\eta|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t: \left| \dot{\alpha}(t, \eta) \right| \leq \frac{\left| \dot{x}(t, \mu + \eta) - \dot{x}(t, \mu) \right| + \left| \dot{x}'_{\mu}(t, \mu + \eta) \cdot \eta \right|}{|\eta|} \leq L + L = 2L$$

3) α – липшицева² по t и непрерывна по η и, значит, она непрерывна по паре (t, η) .
Отсюда следует, что α – непрерывна по η равномерно по $t \in K$.

Уравнения, зависящие от параметра

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = f \left(\overbrace{t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}}^{\in G}, \underbrace{\mu}_{\in M} \right) \\ y(t_0) = y_0(\mu) \\ \dot{y}(t_0) = y_1(\mu) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}(\mu) \end{array} \right.$$

$$x = \psi y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – каноническая замена.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \bar{f}(t, x, \mu), \quad (t, x) \in G, \quad \mu \in M \\ x(t_0) = \bar{y}_0(\mu) \end{array} \right.$$

² Отображение f метрического пространства (X, ρ_x) в метрическое пространство (Y, ρ_y) называется липшицевым, если $\exists L: \rho_y(f(x), f(y)) \leq L \cdot \rho_x(x, y)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(t, x, \mu) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(t, x, \mu) \end{pmatrix} \\ x(t_0) = \bar{y}_0(\mu) \end{cases}$$

Итак, задачу Коши для скалярной функции y мы превращаем в задачу для векторной функции x .

S_f – решения первого уравнения, $S_{\bar{f}}$ – решения второй системы, причем

$$S_f \xrightarrow{\psi} S_{\bar{f}} \text{ и } S_{\bar{f}} \xleftarrow{\psi^{-1}} S_f$$

Какая будет близость решений?

$$U_{k,\varepsilon}(y) = \left\{ z \in S_f \mid \sup_{0 \leq i < n} \|z^{(i)}(\square) - y^{(i)}(\square)\|_K < \varepsilon \right\}^3$$

Теорема. Пусть

$$\begin{cases} f, f'_{y^{(i)}} \in C(G, M) \\ y_i \in C(M) \end{cases}, \quad i = \overline{0, n-1},$$

т.е. \bar{f} имеет производную по x (все частные производные по y), непрерывна по совокупности аргументов и по x , а также вектор \bar{y} – непрерывен.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \mu \in M \quad \forall K \in D(y(\square, \mu)) \quad \exists \delta > 0: \quad |\nu - \mu| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y(\square, \nu) - y(\square, \mu)\|_K^{n-1} < \varepsilon$$

Доказательство: очевидно при построении сквозного отображения

$$M \longrightarrow S_{\bar{f}} \xrightarrow{\varphi^{-1}} S_f,$$

непрерывного, ввиду непрерывности и первого отображения (доказано ранее), и второго (по построению).

³ $\sup_{0 \leq i < n} \|z^{(i)}(\square) - y^{(i)}(\square)\|_K = \|z - k\|_K^{n-1}$ – норма в C^{n-1}

Пример. Уравнение колебания маятника:

$$\begin{cases} \ddot{y} + a^2 y = \cos \omega t, & a > 0, \quad \omega > 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{z} + a^2 z = e^{i\omega t}$$

Такой переход называется методом комплексных амплитуд.

$$z_0(t) = \begin{cases} Ae^{i\omega t}, & \omega \neq a \\ Ate^{i\omega t}, & \omega = a \end{cases}$$

Дифференцируем:

$$1) -\omega^2 Ae^{i\omega t} + a^2 Ae^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{1}{a^2 - \omega^2}$$

$$2) i \cdot 2a \cdot \omega \cdot e^{i\omega t} - \cancel{Ate^{i\omega t} \cdot \omega^2} + \cancel{a^2 t Ae^{i\omega t}} = e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{1}{2i\omega} y_0(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a^2 - \omega^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right) = \frac{1}{a^2 - \omega^2} \cos \omega t, & \omega \neq a \\ \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2i\omega} t (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right) = \frac{t}{2i\omega} \sin \omega t, & \omega = a \end{cases}$$

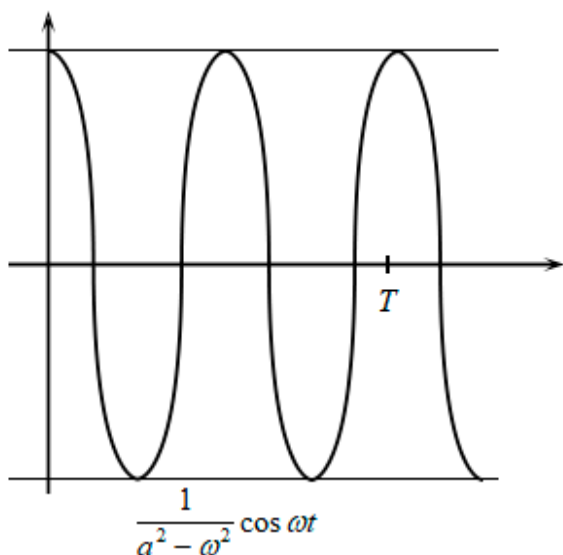


Рисунок 5

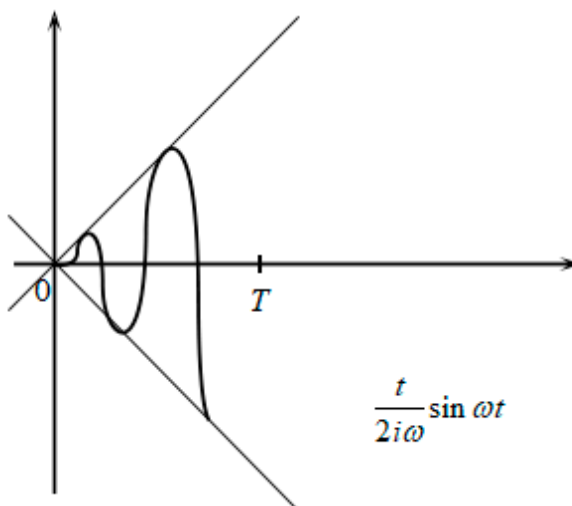


Рисунок 6

Поскольку первое уравнение не удовлетворяет условию $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, дополним его, вычтя частное решение:

$$y_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{a^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos at), & \omega \neq a \\ \frac{t}{2i\omega} \sin \omega t, & \omega = a \end{cases}$$

$$\cos \omega t - \cos at = 2 \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{a + \omega}{2}t\right)}^{\approx \sin at} \cdot \sin\left(\frac{a - \omega}{2}t\right) \quad (\text{см. рисунок})$$

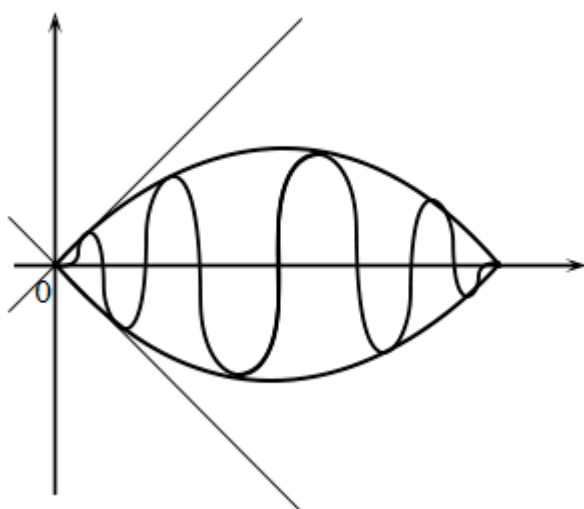


Рисунок 7

Рассмотрим теперь $y(t, \mu)$ – функцию двух переменных.

Следствие. В условиях предыдущей теоремы справедливо, что

- 1) $D(y(\square, \square))$ – область в \square^{1+m}
- 2) $y^{(i)}(\square, \square)$, $i = \overline{0, n}$ – непрерывны по паре (t, μ)

Следствие. Пусть

$$\begin{cases} f, f'_{y^{(i)}}, f'_\mu \in C(G \times M), & i = \overline{0, n-1} \\ y_i \in C^1(M) \end{cases}$$

Тогда $\exists \psi y'_\mu, \exists \left(\psi \overset{\circ}{y}'_\mu \right) = (\psi y'_\mu)^\circ$ – непрерывные в $D(y(\square, \square))$ или

$$\exists \left(y^{(i)} \right)'_{\mu} = \left(y'_{\mu} \right)^{(i)}, \quad i = \overline{0, n} - \text{непрерывные в } D(y(\square, \square))$$

Следствие. В стандартных условиях справедливо, что

$$y(t, \mu + \eta) = y(t, \mu) + y'_{\mu}(t, \mu) \cdot \eta + \overbrace{\alpha(\eta)}^{\rightarrow 0} \cdot |\eta|, \quad \eta \rightarrow 0$$

$$\|\alpha(\square, \eta)\|_K^{n-1} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

т.е. мала не только сама функция, но и ее производная.

Лекция 4

Устойчивость по Ляпунову

Постоянные системы

Понятие устойчивости было известно и ранее, но впервые строго математически описано именно Ляпуновым⁴.

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{1+n}$$

x_0 – исходное решение, $D(x_0) \subset \mathbb{R}^+ \equiv [t_0, \infty)$

$x: x \neq x_0$ будем считать возмущенным непродолжаемым решением

Определение. x_0 называется устойчивой по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in S_f \quad |x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

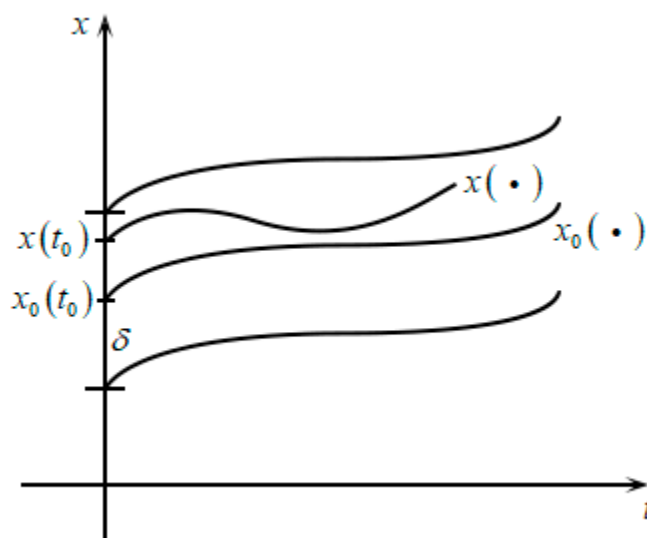


Рисунок 8

Устойчивость используется, например, при выводе спутника на орбиту. Понятно, что заставить тело двигаться по расчетной траектории проблематично, но можно гарантировать по крайней мере то, что оно не выйдет за пределы орбиты.

Определение. x_0 называется асимптотически⁵ устойчивой, если

⁴ Алексáндр Михáйлович Ляпунов (1857 – 1918) – русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук.

⁵ В некоторых учебниках с двумя «с».

1) она устойчива по Ляпунову;

2) ее решения асимптотически приближаются к исходному решению:

$$\exists \delta_0 > 0 \quad |x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$$

Определение. Функция x_0 называется неустойчивой по Ляпунову, если она не устойчива по Ляпунову.

С топологической точки зрения устойчивость по Ляпунову означает, что существует непрерывное отображение

$$G_{t_0} \rightarrow S_f,$$

т.е. отображение из множества начальных значений во множество всех решений.

$$x \rightarrow x(\square, x): x(t_0, x) = x$$

$$G_{t_0} \subset \square^n, \quad S_f \subset \bigcup_{\square^+, \varepsilon} (x_0) = \{x \in S_f \mid \|x - x_0\|_{\square^+} < \varepsilon\}$$

Таким образом, устойчивость – непрерывность функции $x(\square, x)$ в точке $x_0 = x_0(t_0)$ в топологии S_f , равномерной на \square^+ .

Отметим, что здесь нам не требуется вся топология – только окрестности с центром в x_0 . Такое множество называется фильтром. Более того, нас интересуют не всякие окрестности точки x_0 , а только конкретные, называемые базой фильтра.

Рассмотрим уравнение.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f \left(t, y, y, \dots, y^{(n-1)} \right) \\ y_0 - \text{исходное решение} \end{cases}$$

$\overbrace{\quad \quad \quad}^{\psi y=x}$

Можно ли говорить об устойчивости этого решения? Конечно. Стандартный способ состоит в том, чтобы свести это уравнение к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(t, x) \\ x_0 = \psi y_0 \end{cases}$$

$$x = \psi y = \begin{pmatrix} y \\ \circ \\ y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – каноническая замена.}$$

Тогда y_0 – устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда $x_0 = \psi y_0$ – устойчиво (соотв. асимптотически устойчиво, неустойчиво).

Определение. $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \equiv \bar{y} \mapsto Y(\square, \bar{y}), \bar{y} \in G_{t_0}, Y \in S_f$

y_0 – устойчиво по Ляпунову \Leftrightarrow отображение $G_{t_0} \rightarrow S_f$ непрерывно в точке

$$\bar{y}_0 = \psi y_0(t_0)$$

$$S_f : \bigcup_{\square^+, \varepsilon} (y_0) = \left\{ y \in S_f \mid \|y - y_0\|_{\square^+}^{n-1} < \varepsilon \right\}$$

Рассмотрим условия устойчивости.

Упрощения:

- 1) «забыть» про удаленные решения;
- 2) «забыть» про норму в \square^n ;
- 3) «забыть» про t_0 ;
- 4) свести задачу к неподвижной точке: $x_0(t) = \text{const}$.

Лемма. Устойчивость (асимптотическая устойчивость, неустойчивость) сохранится, если:

- 1) $|x(t_0) - x_0(t_0)| < r, \forall r > 0$ (очевидно, если взять $\delta < r$);
- 2) выбрать любую норму в \square^n (очевидно, т.к. топология та же самая и все нормы эквивалентны);
- 3) устойчивость для t_0 равносильна устойчивости для t'_0 , если выполнена непрерывная зависимость решений от начальных значений;
- 4) сдвинуть начало координат в \square^n в заданную точку $a(t)^6$ (даже $a(t) = x_0(t)$).

Доказательство:

⁶ Эта функция – гладкая.

4) Сделаем замену $y = x - a(t) \quad \forall t$

$$\dot{y} + \dot{a}(t) = f(t, y + a(t))$$

$$\dot{y} = f(t, y + a(t)) - \dot{a}(t) \equiv g(t, y)$$

$$a(t) = x_0(t) \Rightarrow x(t) - x_0(t) = y(t) - \overbrace{y_0(t)}^{\equiv 0},$$

т.е. исходное решение в новых терминах y будет равно нулю (соответственно разность – отклонение от нуля).

3) Пусть есть устойчивость для t_0 . По данному ε выберем δ , а по нему – δ' . Тогда

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta \Rightarrow \|x - x_0\|_{\square^+} < \varepsilon$$

$$|x(t'_0) - x_0(t'_0)| < \delta' \Rightarrow \|x - x_0\|_K < \delta, \quad K = [t_0, t'_0] \quad (\text{или } [t'_0, t_0])$$

Из этих двух известных нам импликаций следует, что

$$|x(t'_0) - x_0(t'_0)| < \delta' \Rightarrow \|x - x_0\|_{\square^+ \cup K} < \delta \leq \varepsilon,$$

а значит есть устойчивость для t'_0 .

Рассмотрим линейную систему (или, быть может, линейное уравнение, так как – мы выяснили – оно сводится канонической заменой к линейной системе).

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad t \in \square^+ \quad (\text{подумайте, почему } t \text{ именно такое})$$

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$$

$S_{A,F}$ – множество решений системы (S_A при $F = 0$, $S_{A,F}$ в комплексном случае)

$S_{a,f}$ – множество решений системы (S_a при $F = 0$, $S_{a,f}$ в комплексном случае)

Лемма.

1) решение $x_0 \in S_{A,F}$ – устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда $0 \in S_A$ – соответственно устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво).

Практически это позволяет при проверке на устойчивость произвольного решения исследовать вместо него нулевое.

Таким образом, все решения системы либо устойчивы, либо нет.

2) $0 \in S_A$ – устойчив (асимптотически устойчив) \Leftrightarrow любое решение $x \in S_A$ – ограничено (и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n$ – фундаментальная система решений, ограниченная (и стремящаяся к нулю при $t \rightarrow \infty$).

Получается, для устойчивости нуля необходимо и достаточно проверить ограниченность элементов некоторого базиса в пространстве решений.

3) $0 \in S_A$ – устойчив $\Leftrightarrow 0 \in S_A$ – устойчив.

Доказательство:

1) $x_0 \in S_{A,F}$ – устойчиво $\Leftrightarrow y_0 \in S_A$ – устойчиво (из 4-го пункта предыдущей леммы).

2)

• $0 \in S_A$ – асимптотически устойчив \Rightarrow любое решение $x \in S_A$ – ограничено.

Это очевидно, так как все решения, которые близко начинаются, ограничены:

$$|x(t_0)| < \delta \Rightarrow \|x(\cdot)\|_{\square_+} < \varepsilon,$$

а остальные решения, получаемые умножением близко начинающихся решений на некоторую константу k , ограничены числом $k\varepsilon$.

• Любое решение $x \in S_A$ – ограничено $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$ – ограниченная фундаментальная система решений. Очевидно.

• $\exists x_1, \dots, x_n$ – ограниченная фундаментальная система решений $\Rightarrow 0 \in S_A$ – асимптотически устойчив.

Пусть x_1, \dots, x_n – ограниченная фундаментальная система решений. Рассмотрим значения этих векторов в точке t_0 :

$$x_1(t_0), \dots, x_n(t_0) \in \square^n$$

Они образуют базис в \square^n . Примем его за основной. Свяжем норму с этим базисом (это

можно сделать ввиду пункта 1 прошлой леммы): $\|\square\| = \sum_{i=1}^n |c_i|$

$$\sum_{i=1}^n |c_i| = |c_1 x_1(t_0) + \dots + c_n x_n(t_0)| = |x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| = |c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)| \leq$$

$$\leq |c_1| \cdot \|x_1\| + \dots + |c_n| \cdot \|x_n\| \leq^7 (|c_1| + \dots + |c_n|) M \leq M \delta < \varepsilon$$

3) $S_A = S_A + i \cdot S_A$ (доказано на одной из прошлых лекций)

Из ограниченности и действительной, и мнимой части комплексного числа следует ограниченность всего числа. Поэтому третий пункт, очевидно, вытекает из второго.

Напомним формулу Лиувилля-Остроградского:

$$W_{x_1, \dots, x_n}(t) = W_{x_1, \dots, x_n}(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{tr}[A(\tau)] d\tau}$$

Следствие.

Система A – устойчива \Rightarrow {т.к. определитель Вронского ограничен} \Rightarrow

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{t_0}^t \text{tr}[A(\tau)] d\tau < \infty$$

Если же система A – асимптотически устойчива, то функции в столбцах определителя стремятся к нулю, значит, сам определитель стремится к нулю, значит, показатель экспоненты стремится к $-\infty$:

$$\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$$

Таким образом, мы получили необходимое условие устойчивости.

Следствие.

Линейное однородное уравнение a – устойчиво $\Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{t_0}^t (-a_1(\tau)) d\tau < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \inf_{t \in \mathbb{R}} \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau > -\infty$$

Линейное однородное уравнение a – асимптотически устойчиво \Rightarrow

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

⁷ x_1, \dots, x_n – ограничены, значит, их нормы ограничены. Подберем такое число M , которое больше каждой нормы $\|x_i\|$.

Пример. Уравнение колебания маятника:

$$\ddot{y} + a(t)y = 0 \quad (\text{трения нет, т.к. коэффициент при } \dot{y} \text{ равен нулю})$$

В этом примере интеграл равен нулю ввиду того, что $a_1 = 0$, и, следовательно, уравнение не асимптотически устойчиво.

Лекция 5

Рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами.

$$\dot{x} = Ax + F(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Напомним, что отображение $F(t)$ не влияет на устойчивость, поэтому будем считать, что его нет. Итак,

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Теорема.

Система A асимптотически устойчива \Leftrightarrow все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части.

$$\text{Система } A \text{ устойчива} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \operatorname{Re}[\lambda_i] \leq 0 \\ \operatorname{Re}[\lambda_{i_0}] = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ для } J_{\lambda, m} \end{cases}$$

Доказательство: будем рассматривать стандартный базис в пространстве решений S_A (она устойчива одновременно с S_A). Тогда

$$J_{\lambda, m} \rightarrow z_j(t) = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \left(h_j + t h_{j-1} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} h_1 \right), \quad j = \overline{1, m}$$

Заметим теперь, что $|e^{i\beta t}| = 1$ – не влияет на ограниченность.

Теперь если $\alpha < 0$, то, очевидно, функция будет экспоненциально убывать.

Если $\alpha > 0$, то функция возрастает и неограничена.

Если $\alpha = 0$, то $|e^{\alpha t}| = 1$ и при $m = 1$ степень многочлена – нулевая, поэтому многочлен ограничен, а значит и вся функция ограничена.

Пример. Уравнение колебания маятника:

$$\ddot{y} + b \dot{y} + a y = 0, \quad a > 0, \quad b \geq 0$$

$$L(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a$$

1) $a, b > 0$ ($\Leftrightarrow \forall \operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$) \Rightarrow асимптотически устойчив;

2) $b = 0 < a \Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda_{12}] = 0$ – есть устойчивость.

См. теорему Рауса⁸–Гурвица⁹, позволяющую определить по коэффициентам многочлена, в какой полуплоскости лежат его комплексные корни.

Периодические системы

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad T - \text{периодическая.}$$

Полагаем, что

1. $F = 0$;
2. $A \rightarrow A$;
3. $y = L(t)x \rightarrow \dot{y} = By$,

где $L(t)$ – T -периодичное разложение (сохраняет ограниченность и стремление к нулю), B – константа.

$X(T, 0) = e^{TB}$ – оператор монодромии (также оператор Коши).

$\mu = e^{T\lambda}$ – мультипликатор (собственное значение оператора монодромии).

Следствие. Для периодической системы верно:

- 1) $|\mu| < 1 \Leftrightarrow$ есть асимптотическая устойчивость ;
- 2) $\begin{cases} |\mu| \leq 1 \\ \exists |\mu| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ есть устойчивость, если $m = 1$.

Остальные системы. Второй метод Ляпунова

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f, f'_x \in C(G), \quad G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$$

$x \equiv 0$ – исходное решение при $t \geq t_0$ (мы можем это полагать без ограничения общности, т.к. начало координат можно пустить вдоль заданного решения и оно превратится в ноль), т.е.

$$f(\cdot, 0) = 0$$

Определение. Функцией Ляпунова называется

⁸ Эдвард Джон Раус (1831, Квебек – 1907, Кембридж) – английский механик и математик, член Лондонского королевского общества.

⁹ Адольф Гурвиц (1859, Хильдесхайм – 1919, Цюрих) – немецкий математик.

$V: U(0) \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C(U(0)) \cap C^1(\overset{\circ}{U}(0))$, при этом выполнены условия:

- 1) $V(0) = 0$;
- 2) условие на $V(x)$, $x \neq 0$;
- 3) условие на $\dot{V}(x)$, $x \neq 0$.

Определение. $\dot{V}_t(x)$ называется производной функции V в силу системы:

$$\dot{V}_t(x) \equiv V'(x) \cdot f(t, x) = V'_{x_1}(x) \cdot f_1(t, x) + \dots + V'_{x_n}(x) \cdot f_n(t, x)$$

$$\dot{V}_t(x(t)) = \left. \frac{dV(x(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=t} = V'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$$

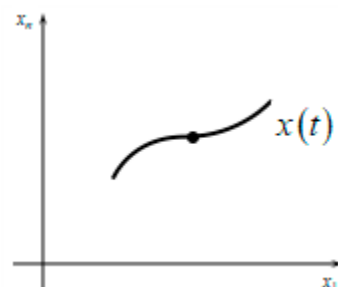


Рисунок 9

Лемма Ляпунова (об устойчивости).

Пусть существует V – функция Ляпунова и $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}(0)$ выполнено:

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ – устойчиво} \\ \dot{V}_t(x) \leq 0 \end{cases}$$

Проиллюстрируем эту лемму.

Во-первых, можно считать, что

$$G = \mathbb{R}^+ \times U(0).$$

Во-вторых, окрестность $U_\varepsilon(0)$ лежит внутри $U(0)$ (вместе с границей).

В окрестности $U_\varepsilon(0)$ положим

$\min_F V \equiv \alpha$. Теперь возьмем $U_\delta(0)$, в которой $V < \alpha$. Тогда некоторое решение x из этой окрестности не может выйти за пределы $U_\varepsilon(0)$, при этом $D(x) = \mathbb{R}^+$.

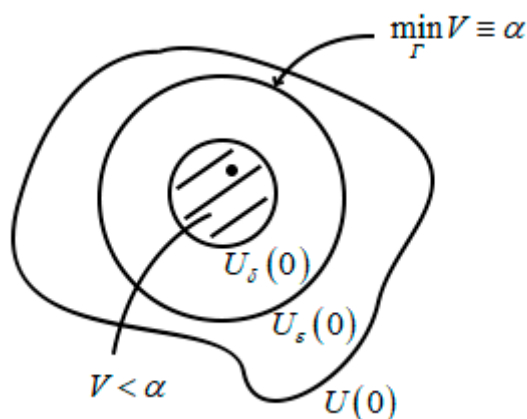


Рисунок 10

Доказательство: итак,

0) $\exists U_\varepsilon(0) \subset U(0)$ (вместе с замыканием)

1) $\min_{x \in \partial U_\varepsilon(0)} V(x) \equiv \alpha > 0$ (существует на компакте)

2) $\exists \delta: \sup_{x \in U_\delta(0)} V(x) < \alpha$ (непрерывность V в нуле)

3) $x(t_0) \in U_\delta(0) \Rightarrow x(t) \in U_\varepsilon(0) \quad \forall t \in D(x)$

Пусть это не так, тогда

$\exists x(t_1) \in \partial U_\varepsilon(0) \Rightarrow V(x(t_1)) \geq \alpha$, но

$\alpha > \sup_{x \in U_\delta(0)} V(x) > V(x(t_0)) > V(x(t_1)) \geq \alpha$

4) $D(x) = \square^+$ (по теореме о продолжаемости до границы любого компакта)

$\Gamma_{x(t_2)} \in \delta(U_\varepsilon(0) \cap [t_0, t_1]) \Rightarrow t_2 = t_1$

Следствие. Если $\dot{V}_t(x) = 0$, то устойчивость есть, но она не асимптотическая.

Доказательство:

\forall решения $x \neq 0 \Rightarrow x(t) \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, иначе:

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Rightarrow 0 < V(x(t_0)) \stackrel{V=const}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = V\left(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)\right) = V(0) = 0$

Пример. Уравнение колебаний маятника:

$$\ddot{y} + \sin y = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \end{cases}$$

$$V(x_1, x_2) = 1 - \cos x_1 + \frac{x_2^2}{2}$$

$$\dot{V} = \sin x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot (-\sin x_1) = 0$$

Таким образом, маятник без трения не приближается к своему положению равновесия.

Лемма Ляпунова (об асимптотической устойчивости).

Пусть существует V – функция Ляпунова и $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \overset{\circ}{U}(0)$ выполнено:

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \\ \dot{V}_t(x) \leq W(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ – асимптотически устойчиво}$$

Доказательство (нестрогое): из рисунка видно, что

$$V(x(t_1)) \geq \lim_{t_1 \geq t \rightarrow \infty} V(x(t)) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) > \gamma$$

$$V^\gamma = \{x \mid V(x) \geq \gamma\}$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq W \leq -\beta < 0 \Rightarrow V(x(t_2)) < 0,$$

что есть противоречие.

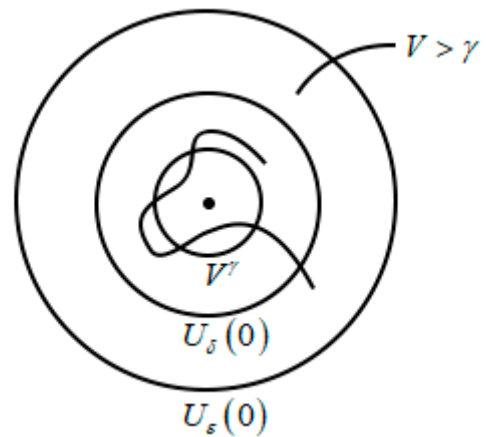


Рисунок 11

Лекция 6

Первый метод Ляпунова

$$\dot{x} = Ax + F(t, x), \quad A \in \text{End } \mathbb{R}^n \Rightarrow A = \left(Ax + F(t, x) \right)'_x \Big|_{x=0}$$

$$F, F'_x \in C(G), \quad G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$$

$$F(0, x) = o(x), \quad x \rightarrow 0$$

$$\|F(0, x)\|_{\mathbb{R}^n} = o(x)$$

Системы, информация с линейной части которых переносится на всю систему, стали называть правильными по Ляпунову.

Теорема (об устойчивости по первому приближению).

1) $\forall \text{Re } \lambda_i(A) < 0 \Rightarrow$ асимптотическая устойчивость ;

2) $\exists \text{Re } \lambda_0(A) > 0 \Rightarrow$ неустойчивость .

Доказательство:

1) введем обозначение $\max \text{Re } \lambda_j \equiv -2\alpha < 0$

$$\dot{z} = Az + F(t, z), \quad F(t, z) = F(t, \text{Re } z) = o(z)$$

$$2) A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \{0, 1\}$$

Для того, чтобы рассматривать $\alpha_i \in \{0, 1\}$, используем алгебраический факт:

$$h_j \rightarrow e_j = \alpha^j h_j,$$

т.е. можно подобрать такой базис, в котором элементы диагонали будут умножаться на α в соответствующей степени.¹⁰

$$A + A^* = \Lambda + \Delta,$$

¹⁰ Изобретатели называли это β - преобразованием.

$$\Lambda \sqsubset 2\operatorname{Re}\lambda_j, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_n \\ 0 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{pmatrix} \alpha_2 z_2 \\ \vdots \\ \alpha_n z_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 z_2 \\ \vdots \\ \alpha_n z_n \end{pmatrix} \Rightarrow |\Delta z| \leq \left| \begin{pmatrix} \alpha_2 z_2 \\ \vdots \\ \alpha_n z_n \\ 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 z_2 \\ \vdots \\ \alpha_n z_n \end{pmatrix} \right| \leq 2\alpha |z|$$

Таким образом, e_j – ортонормированный базис в \mathbb{C}^n .

3) Построим функцию Ляпунова.

$$V(z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z^* \cdot z \begin{cases} > 0, & z \neq 0 \\ = 0, & z = 0 \end{cases}$$

Очевидно, априорным свойством функции Ляпунова, эта функция обладает и, более того, выполнено первое свойство. Осталось проверить остальные два.

$$\begin{aligned} \dot{V}_t(z) &= (z^* \cdot z)_t = (z^*)_t \cdot z + z^* \cdot \dot{z}_t = z^* (Az + F(t, z)) + (z^* A^* + F^*(t, z))z = \\ &= z^* \Lambda z + z^* \Delta z + z^* F(t, z) + F^*(t, z)z = \sum_j \overbrace{2\operatorname{Re}\lambda_j}^{\leq -2\alpha} \cdot (z_j^* \cdot z_j) + z^* \Delta z + \overbrace{z^* \cdot o(z) + o(z) \cdot z}^{\leq \alpha |z|^2} \leq \\ &\leq -2 \cdot 2\alpha \cdot |z|^2 + 2\alpha \cdot |z|^2 + \overbrace{\alpha \cdot |z|^2}^{w(z)} \leq -\alpha \cdot |z|^2 < 0 \Rightarrow z = 0 \text{ – асимптотически устойчиво.} \end{aligned}$$

Отметим, наконец, что выполненное на большем пространстве будет выполнено и на меньшем, т.е. для сужения функции $V|_{U(0)}$ доказанный факт справедлив.

Вдумчивый читатель задастся вопросом: как же это мы оцениваем комплексные числа? Оказывается, слагаемые будут действительны ввиду того, что сумма $\sum_j 2\operatorname{Re}\lambda_j$ – действительна, и, значит, оставшаяся сумма тоже действительна.

Пример. Уравнение колебаний маятника:

$$\ddot{y} + b\dot{y} + a \sin y = 0$$

$$x'' + bx' + a \overset{=1}{\cos 0} \cdot x = 0$$

$$L(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a$$

1) $a, b > 0 \Rightarrow \forall \operatorname{Re}[\lambda_i] < 0 \Rightarrow$ асимптотически устойчив;

2) $a > 0 = b \Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda_{12}] = 0$ – есть устойчивость, но не асимптотическая.

Лекция 7

Автономные системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n$$

Здесь переменная x называется фазовой, а отсутствующая в правой части переменная – временем.

$x \in S_f$ – множество всех непродолжаемых решений.

Напомним, что такая система называется автономной (самостоятельной) оттого, что закон, связывающий переменные и их образы, одинаков в каждый момент времени.

Пусть x – решение. Область значений этой функции

$$E(x) = \{x(t) \mid t \in D(x)\}$$

называется фазовой кривой (траекторией).

$$\dot{x}(t) = \left. \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t} = f(x(t)) \text{ – вектор}$$

фазовой скорости в точке $x(t)$.

$$f \in C(G) : G \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ – векторное поле.}$$

$x \mapsto f(x) \in T_x$, T_x – касательная плоскость в точке x .

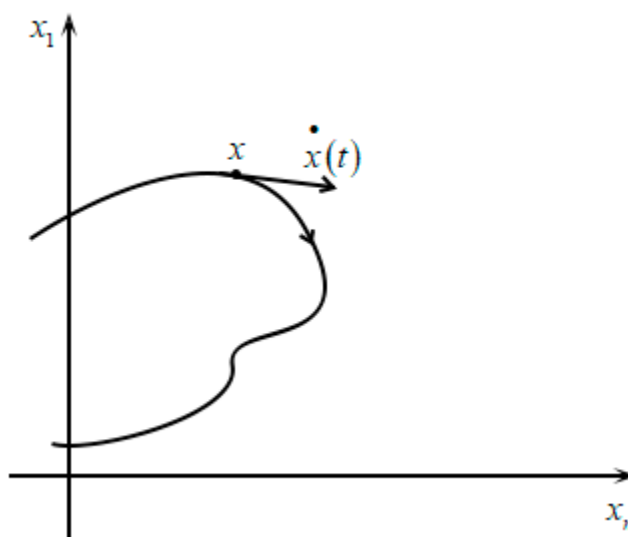


Рисунок 12

Лемма. Пусть $x \in S_f(G)$. Тогда $x_c \equiv x(\cdot + c)$ – сдвиг решения на время t – тоже из области $S_f(G)$.

Доказательство:
$$\dot{x}_c(t) = \frac{dx(t+c)}{dt} = \dot{x}(t+c) = f(x(t+c)) = f(x_c(t))$$

Лемма. Пусть $f \in C^1(G)$, $x, y \in S_f(G)$. Тогда

$$x(t_0) = y(s_0) \Rightarrow x(t+t_0) = y(t+s_0)$$

Доказательство: рассмотрим функции $x_{t_0}(\square)$ и $y_{s_0}(\square)$ – значения решений в нулевой момент времени. Тогда $x_{t_0}(0) = y_{s_0}(0) \Rightarrow x_{t_0} = y_{s_0}$ и по теореме о единственности они совпадут везде.

Определение. Фазовая кривая $E(x)^{11}$:

- 1) незамкнута, если $x(s) \neq x(t), s > t$
- 2) замкнута (циклична), если $\exists T$ (период цикла): $x(s) \begin{cases} = x(t), & s = t + T, \forall t \in \square \\ \neq x(t), & t < s < t + T, \forall t \in \square \end{cases}$
- 3) называется точкой покоя (неподвижной точкой), если $\exists x_0 \in G: x(t) = x_0, \forall t \in \square$

Теорема (о трёх типах фазовых кривых).

Пусть $f \in C^1(G)$. Тогда $\forall x \in S_f$ $E(x)$ – либо незамкнута, либо циклична, либо является неподвижной точкой.

Доказательство:

рассмотрим непустое множество $\mathfrak{Z} = \{T > 0 \mid \exists t \in D(x): x(t+T) = x(t)\}$.

- 1) T – период фазовой кривой $E(x)$, так как $x\left(\overbrace{\tau+t}^s + T\right) = x\left(\overbrace{\tau+t}^s\right) \Rightarrow D(x) = \square$
- 2) $\wp = \{T \in \square \mid T \text{ – период}\} \supset \mathfrak{Z}$
- 3) $\wp \supset \bigcup_{m \in \square} (m\mathfrak{Z})$
- 4) \wp – замкнуто на \square

Рассмотрим подпоследовательности $T_k: T_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T$. Тогда

$$x(t+T) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t+T_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(t)$$

Таким образом,

$$T = \inf \mathfrak{Z} \begin{cases} > 0 \Rightarrow x(\square) \text{ – } T\text{-периодично и имеет место цикл} \\ = 0 \Rightarrow \wp \text{ – всюду плотно в } \square \Rightarrow \overline{\wp} = \square \Rightarrow x \text{ – точка покоя} \end{cases}.$$

¹¹ Часто говорят просто «фазовая кривая x », подразумевая, что она соответствует решению x .

Рассмотрим положение равновесия:

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x(t) = x_0 - \text{решение}$$

Выпрямление фазовых кривых

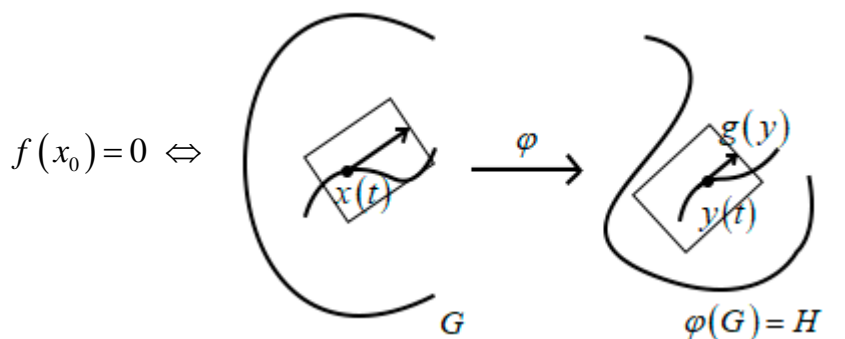


Рисунок 13

$y = \varphi x$, где φ – диффеоморфизм¹²

$$E(y) = \{y(t) \mid y(t) = \varphi(x(t)), t \in D(x)\}$$

$$g(\varphi(x)) \equiv g(y(t)) = \dot{y}(\tau) \Big|_{\tau=t} = \frac{d\varphi(x(\tau))}{d\tau} \Big|_{\tau=t} = \varphi'(x) \cdot f(x), \quad x \in G$$

$$g \circ \varphi = \varphi' \cdot f \Leftrightarrow g = \varphi' \cdot (f \circ \varphi^{-1})$$

Таким образом, отображение φ' переводит одну касательную плоскость в другую.

Определение. Диффеоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ называется выпрямляющим диффеоморфизмом поля f .

$$g \equiv e_n$$

Так мы задали простейший вид векторного поля, который только мыслится.

Выясним, в каких случаях можно выпрямить поле.

Назовем точку x_0 векторного поля особой, если

$$f(x_0) = 0$$

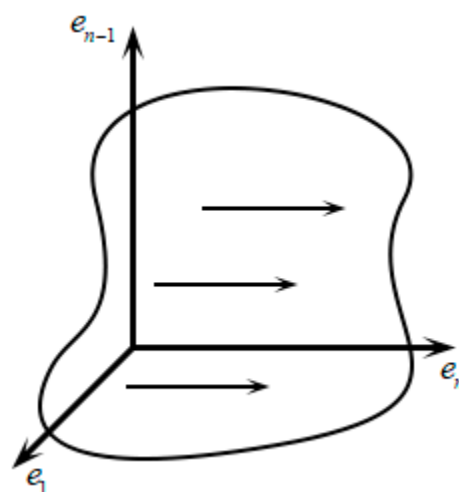


Рисунок 14

¹² Гладкое взаимно-однозначное отображение, для которого обратное отображение – тоже гладкое.

Теорема (о выпрямляющем диффеоморфизме или о локальном выпрямлении векторного поля).

Пусть $f \in C^1(G)$, $f(x_0) \neq 0$ (точка не особая). Тогда существует окрестность

$U(x_0) \subset G$ такая, что $U \xrightarrow{\varphi} V$, где φ – выпрямляющий диффеоморфизм. Отметим, что $f(x_0)$ называется трансверсальным (т.е. не касающимся) плоскости S).

Но на этом мы не остановимся!

Пусть $S = \{U(x_0) \mid x_n = (x_0)_n\}$ – гиперплощадка, $f_n(x_0) \neq 0$. Тогда $\varphi|_S = Id$.

Доказательство: пусть для начала $x_0 = 0$.

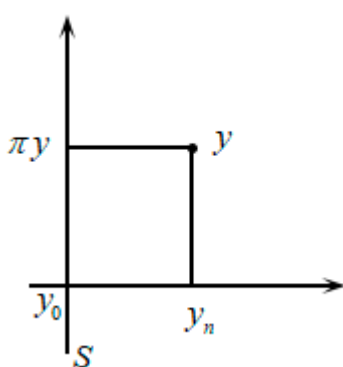


Рисунок 15

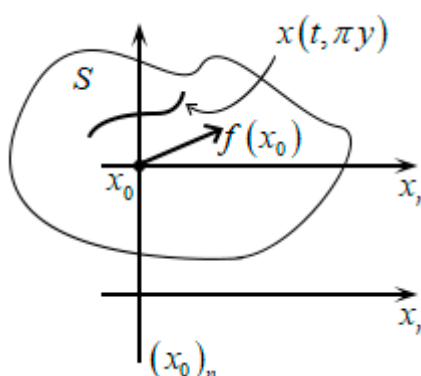


Рисунок 16

$$\varphi = \chi^{-1}$$

$$\chi(y) = x(y_n, \pi y)$$

$$\chi'_{y_i}(0) = \begin{cases} (x(0, y_i e_i))'_{y_i=0} = e_i, & i < n \\ (x(y_n, 0))'_{y_n=0} = f(0), & i = n \end{cases}$$

Наконец, заметим, что матрица χ' в координатах e_1, \dots, e_n – невырождена, а значит отображение χ в достаточно маленькой окрестности нуля будет диффеоморфизмом (в силу доказанной ранее теоремы), равно как и обратное к нему отображение.

Лекция 8

Первый интеграл

Определение. Первым¹³ интегралом называется функция $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(G)$, такая, что $\forall x \in S_f(G) \quad \varphi(x(t)) = \text{const}$

Лемма (дифференциальный признак).

$\varphi \in C^1(G)$ – первый интеграл $\Leftrightarrow \dot{\varphi}(x) \equiv \varphi'(x) \cdot f(x) = 0, \quad \forall x \in G$.

Доказательство: $0 = \frac{d}{dt} \varphi(x(t)) = \varphi'(x(t)) \cdot f(x(t))$.

Пример. Рассмотрим автономную Гамильтонову систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = H'_y(x, y), \\ \dot{y} = -H'_x(x, y), \end{cases}$$

$H \in C^2$ – гамильтониан, $x, y \in \mathbb{R}^n$

Покажем, что H – первый интеграл:

$$H'_x \cdot H'_y + H'_y \cdot (-H'_x) = 0$$

Иногда бывает удобно рассматривать первые интегралы в подобласти $G' \subset G$.

Пример.

$$\dot{x} = x, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

1) $G' = \mathbb{R}^2_*$ (без нуля)

φ – постоянна вдоль любого луча

2) G' – изгибается и на каждом интервале имеет свою константу

3) $\{0\} \in G \Rightarrow \varphi = \text{const}$

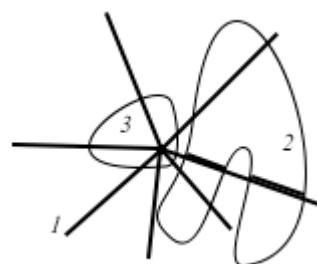


Рисунок 17

¹³ Слово «первый» здесь выступает в качестве прилагательного – первых интегралов может быть много.

Определение. Для скалярных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ справедливо:

1) $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ называются независимыми в точке $x_0 \in G$, если векторы $\varphi'_1(x_0), \dots, \varphi'_k(x_0)$ – линейно независимы;

2) ψ зависит от этих функций в G' , если

$$\exists F \in C^1: \psi(x) = F(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)), \quad x \in G',$$

т.е. φ выражается как достаточно гладкая функция от $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Лемма. Если ψ зависит от первых интегралов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ в G' , то ψ – тоже первый интеграл.

Доказательство: $\forall x \in S_f(G') \quad \psi(x(t)) = F\left(\overbrace{\varphi_1(x(t))}^{c_1}, \dots, \overbrace{\varphi_k(x(t))}^{c_k}\right) = const$

Теорема (об универсальной системе первых интегралов).

Пусть $F \in C^1(G)$, $x_0 \in G$, $f(x_0) \neq 0$. Тогда

$$\exists U(x_0) \subset G \quad \exists \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \text{ – первые интегралы в } U(x_0):$$

1) независимые в точке x_0 ;

2) любой другой первый интеграл ψ в $U(x_0)$ – зависит от них.

Доказательство:

0) покажем, что $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ – координаты выпрямляющего диффеоморфизма:

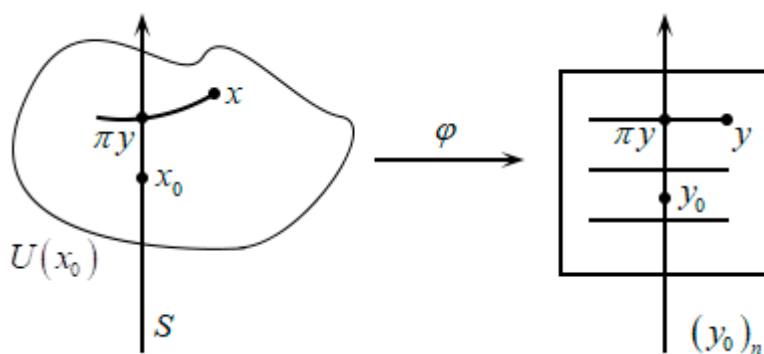


Рисунок 18

$$\dot{\varphi}_i(x) = \varphi'_i \cdot f(x) = (e_n(\varphi(x)))_i = 0$$

1) они линейно независимы в точке x_0 , поскольку $\varphi'_1(x_0), \dots, \varphi'_{n-1}(x_0)$ образуют первые $n-1$ строк матрицы Якоби J , которая невырождена;

2) предьявим функцию ψ :

$$\psi(x) = \psi(\overbrace{\pi y}^{\varphi(x)}) = \psi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), (y_0)_n) = F(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))$$

Вопрос поиска выпрямляющего диффеоморфизма поможет разрешить следующая

Теорема (о локальной системе независимых первых интегралов).

Пусть $F \in C^1(G)$, $x_0 \in G$, $f(x_0) \neq 0$ и пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ – первые интегралы в области G' , независимые в точке $x_0 \in G'$. Тогда для любого первого интеграла ψ

$\exists U(x_0)$: ψ – зависит от $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ уже в этой окрестности $U(x_0)$.

Доказательство: нам известно, что

$\varphi'_1(x_0), \dots, \varphi'_{n-1}(x_0)$ – линейно независимы

Тогда, если мы покажем, что

$\varphi'_1(x_0), \dots, \varphi'_{n-1}(x_0), \psi'(x_0)$ – линейно зависимы,

это будет означать, что функция ψ в достаточно малой окрестности линейно выражается через функции φ .

Положим матрицу Якоби $J = (\varphi'_1(x_0), \dots, \varphi'_{n-1}(x_0), \psi'(x_0))$. Если умножение этой матрицы на некоторый ненулевой вектор даст нулевой вектор, это будет означать её вырожденность. Этим вектором будет – внезапно! – $f(x_0)$:

$$J \cdot f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример. Уравнение малых колебаний маятника:

$$\ddot{x} + ax = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax \end{cases}$$

Эта автономная система, оказывается, и Гамильтонова, если взять

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + a \frac{x^2}{2} \quad - \text{ первый интеграл}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y = H'_y \\ \dot{y} = -ax = -H'_x \end{cases}$$

Так как $n = 2$, доказанная теорема гарантирует один независимый первый интеграл

$$\varphi_1 = H \quad \text{и тогда любой первый интеграл } \psi = F \circ H$$

Лекция 9

Рассмотрим фазовое пространство единичной размерности.

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C(G), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n$$

- 1) Фазовая кривая – интервал на прямой.
- 2) Нет циклов.
- 3) Если есть соседние неподвижные точки x_1, x_2 , то $\forall x \in (x_1, x_2) \quad f(x)$ – фиксированного знака.

Теорема.

Пусть $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}$, $I \subset G$. Тогда

- 1) если I не содержит неподвижных точек и $x \in S_f(I)$, то $I = E(x)$;
- 2) если a – единственная неподвижная точка на интервале I , то следующие высказывания эквивалентны:

- a – устойчива по Ляпунову
- a – асимптотически устойчива
- $f(x) \begin{cases} = 0, & x = a \\ > 0, & x < a \\ < 0, & x > a \end{cases}$

Доказательство:

2) очевидно, следует из пункта 1, т.к. если точка проходит весь интервал (см. рисунок), то она либо стремится к a , либо покинет любую её малую окрестность;

1) будем доказывать от противного. Пусть $x \in S_f(I)$ – некоторое непродолжаемое решение. Зафиксируем его начальное значение

$x(t_0) = x_0 \in I$. Для определенности положим, что движение происходит в сторону увеличения, то есть $f(x) > 0$. Пусть теперь есть недостижимая точка $x_1 > x_0$: $x(t) \neq x_1$.

- $D(x) \supset [t_0, \infty)$,

т.к. график функции x не обязательно выйдет за пределы компакта



Рисунок 19

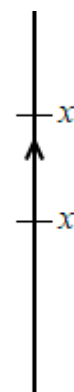


Рисунок 20

$[t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ в силу произвольности t_1 .

$$\bullet \inf_{t \geq t_0} \dot{x}(t) \geq \inf_{x \in [x_0, x_1]} f(x) = \beta > 0$$

$x(t) \geq x(t_0) + \beta(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, что есть противоречие.

Пример.

$$\dot{x} = x^2 + a, \quad x \in \mathbb{R}$$

1) $a > 0 \Rightarrow$ неподвижных точек нет;

2) $a = 0 \Rightarrow$ неподвижная точка $x_0 = 0$;

3) $a < 0 \Rightarrow$ неподвижных точек две: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$.

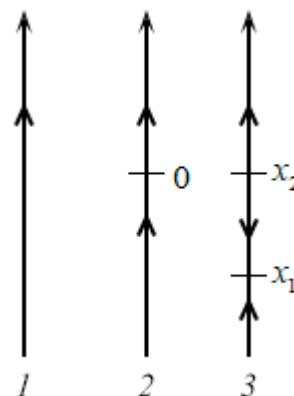


Рисунок 21

Заметим, что здесь имело место раздвоение или бифуркация¹⁴.

Рассмотрим теперь плоскость ($n = 2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

$$(x, y) \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad f, g \in C^1(G)$$

$$\dot{G} = \{(x, y) \in G \mid (f, g)(x, y) \neq (0, 0)\} - \text{открытое множество}$$

Запишем уравнение в дифференциалах:

$$g(x, y)dx = f(x, y)dy$$

Теорема.

Пусть $f, g \in C^1(G)$. Тогда любая фазовая кривая Γ – это интегральная кривая

$$\gamma: \quad g(x, y)dx = f(x, y)dy$$

и наоборот.

¹⁴ Резкая перестройка фазового портрета при плавном изменении коэффициентов.

Доказательство:

1) фазовая кривая Γ задает область значений решения $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Пусть для определенности $f(x_0, y_0) \neq 0$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Отсюда

$\dot{x}(t_0) \neq 0$ и задана функция $t = t(x)$. Введем функцию $Y(x) = y(t(x))$. Покажем, что

она является решением исходного уравнения.

$$Y'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{g(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} \Rightarrow \Gamma = \gamma,$$

т.е. мы показали, что фазовая кривая есть интегральная кривая.

2) Пусть γ – интегральная кривая, $(x_0, y_0) \in \gamma$. Эта кривая локально совпадает с фазовой кривой системы, поскольку фазовая кривая в точке (x_0, y_0) совпадает с единственной (по теореме) интегральной кривой.

Коль скоро это так, то можно сказать, что $\gamma \equiv \Gamma$. Это следует из теорем матанализа: покрываем γ интервалами, в которых она совпадает со своими интегральными кривыми. Выделяем конечное подпокрытие. Тогда у двух соседних пересекающихся интервалов – одна и та же фазовая кривая и из них можно составить Γ .

Система Лотки¹⁵–Вольтерры¹⁶

Пусть $x(t) > 0$ – число жертв в момент t , $y(t) > 0$ – число хищников.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Количество детей здесь пропорционально количеству семей, при этом есть опасность быть съеденным хищником, пропорциональная и числу жертв (чем их меньше, тем сложнее поймать), и числу хищников.

¹⁵ Альфред Джеймс Лотка (1880 – 1949) – американский математик, физикохимик, статистик, демограф.

¹⁶ Вито Вольтерра (1860, Анкона – 1940, Рим) – итальянский математик и физик. Член-корреспондент Физико-математического отделения Петербургской академии наук, почётный член АН СССР.

Число хищников убывает (скорость связана с их количеством) с некоторым коэффициентом, но также и возрастает от недостатка пищи, зависящего от числа встреч хищников с жертвами.

Считаем, что каннибализма нет.

Найдем неподвижную точку:

$$\begin{cases} \alpha x = \beta xy \\ \gamma y = \delta xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{\alpha}{\beta} \\ x_0 = \frac{\gamma}{\delta} \end{cases}$$

Уравнение в полных дифференциалах:

$$d\varphi(x, y) = \left(\delta - \frac{\gamma}{x} \right) dx + \left(\beta - \frac{\alpha}{y} \right) dy = 0$$

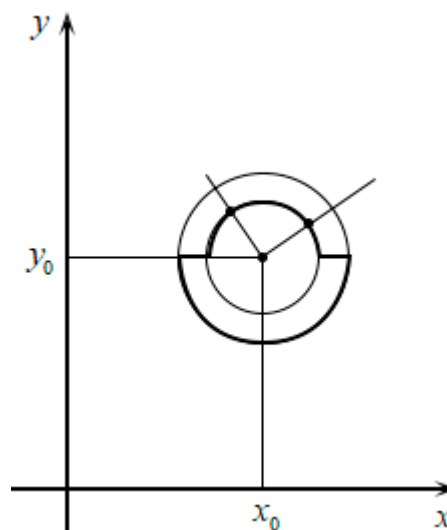


Рисунок 22

$$\text{Потенциал: } \varphi(x, y) = \overbrace{(\delta x - \gamma \ln x)}^{f(x)} + \overbrace{(\beta y - \alpha \ln y)}^{g(y)} \geq \varphi(x_0, y_0)$$

γ : $\varphi = c$ – линии уровня потенциала

Утверждается, что минимум функций $f(x)$ и $g(y)$ достигается в точках x_0 и y_0 соответственно.

Функция $\varphi(x, y)$ – возрастает и, значит, достигнет значения c единожды. Таким образом, фазовые кривые будут окружать точку (x_0, y_0) .

Если условных карасей в достатке, то щуки начинают размножаться и интенсивнее поедать карасей. В конце концов карасей становится критически мало и хищники начинают вымирать. Воспользовавшись этим, караси опять начинают размножаться до тех пор, пока их не станет достаточно для того, чтобы возобновить размножение щук. Этот процесс, как видно из рисунка, продолжается циклически.

Кстати, отсюда видно и то, что карасей и щук можно отлавливать без вреда для экологии. Просто произойдет на некоторое время переход к меньшей окружности (выделено на рисунке жирным).

Уравнение Ньютона

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases} \iff f(x)dx + ydy = 0$$

У этого уравнения есть потенциал $\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x \overbrace{f(\xi)}^{U(x)} d\xi + \frac{y^2}{2}$,

называемый интегралом энергии. Он представляет собой сумму потенциальной и кинетической энергии.

Следствие. Интеграл энергии – константа вдоль решения.

$$\dot{\varphi}(x, y) = \varphi'_x y + \varphi'_y (-f(x)) = 0 \text{ – производная в силу системы.}$$

Она равна нулю в силу того, что эта система – гамильтонова, т.к.

$$H(x, y) = \varphi(x, y) \text{ – гамильтониан.}$$

$$0 = \ddot{x} \cdot \dot{x} + f(x) \cdot \dot{x} = \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi \right) \dot{} = \left(\varphi(x, \dot{x}) \right) \dot{}$$

Механики, таким образом, умножают уравнение на \dot{x} и один раз интегрируют его, получая, что $\varphi(x, \dot{x}) = \text{const}$. Отсюда и происходит название «первый интеграл».

Лекция 10

Рассмотрим **пример** использования уравнения Ньютона.

$$\ddot{x} + a \sin x = 0$$

$$\varphi(x, \dot{x}) = a(1 - \cos x) + \frac{\dot{x}^2}{2} \geq 0, \quad \varphi(0, 0) = 0$$

$$\overbrace{a(1 - \cos x)}^{U(x)} + \frac{y^2}{2} = c \Rightarrow y = \pm \sqrt{2(c - U(x))}$$

В окрестности точки $-x_0$ функция
будет иметь вид

$$\alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 + \dots,$$

при этом $\alpha > 0$, поэтому имеют место
вертикальные касательные.

В точке же $-\pi$ коэффициент $\alpha = 0$,
 $\beta > 0$ и функция будет линейная.

Таким образом, маятник либо
неподвижен, либо качается, либо
проворачивается вокруг оси
(«солнышко»). Все это отображено на
рисунке.

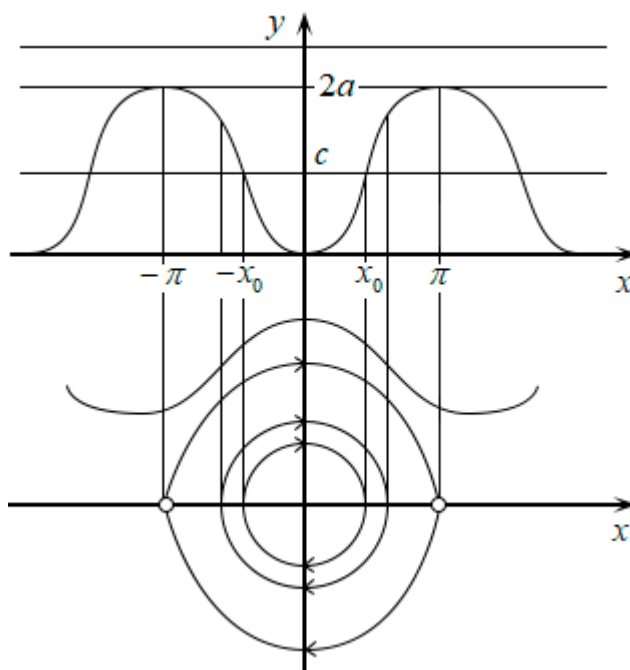


Рисунок 23

Особые точки Пуанкаре¹⁷

$\dot{z} = Az$, $z \in \mathbb{R}^2$, $z = 0$ – изолированная особая точка, поэтому A – невырождена.

I. Собственные значения $\lambda_{1,2}$ – действительные, A – диагональная.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$$

¹⁷ Жюль Анри Пуанкаре́ (1854, Нанси, Франция – 1912, Париж, Франция) – французский математик, механик, физик, астроном и философ.

$$\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \neq 0$$

1) $\mu < 0$ – седло

Устойчивости здесь, вообще говоря, нет.

$$y = c \cdot |x|^\mu$$

2) $\mu > 0$ – узел, при этом

$\mu > 1$ – обыкновенный,

$\mu = 1$ – дикритический,

$\mu < 1$ можно превратить в случай, когда $\mu > 1$, если поменять местами собственные значения.

II. Собственные значения $\lambda_{1,2}$ – действительные, A – недиагональная.

$$\lambda_{1,2} = \lambda$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda x + \lambda y \end{cases}$$

$\mu > 0$ – вырожденный узел

III. Собственные значения $\lambda_{1,2}$ – недействительные, A – диагональная.

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$z = e^{\lambda t} h$ – решение в комплексной плоскости,

$h = (h_1 + ih_2)$ – собственный вектор.

$$\operatorname{Re}[z] = \operatorname{Re}[e^{\lambda t}] \cdot h_1 + \operatorname{Im}[e^{\lambda t}] \cdot (-h_2) \text{ – одно действительное решение функции.}$$

Пусть h_1 символизирует действительную единицу, а h_2 – мнимую, $\zeta = \operatorname{Re}[z]$.

$$\zeta = \operatorname{Re}[e^{\lambda t}] \cdot 1 + \operatorname{Im}[e^{\lambda t}] \cdot i = e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

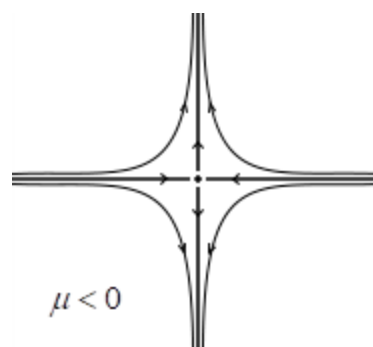


Рисунок 24

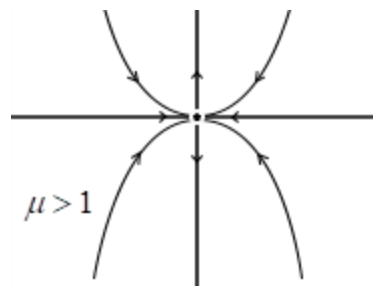


Рисунок 25

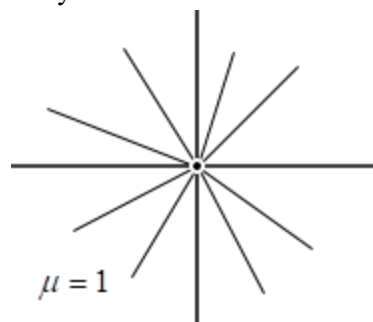


Рисунок 26

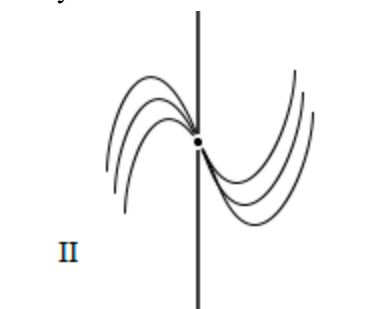


Рисунок 27

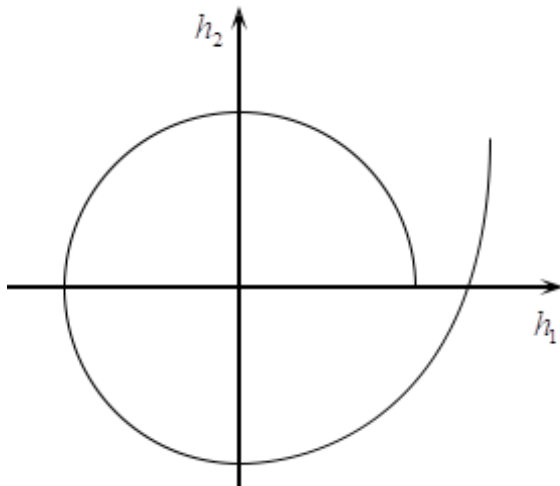


Рисунок 28

3) $\alpha = 0$ – центр (всегда неасимптотически устойчив)

4) $\alpha \neq 0$ – фокус

Тем самым мы разобрали все 4 случая в классификации Пуанкаре.

Пример. Уравнение маятника:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + a^2 \sin x = 0, \quad b \geq 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a^2 x - 2by \end{cases}$$

$\lambda^2 + 2b\lambda + a^2$ – характеристический многочлен

1. $b = 0$ – центр (корни характеристического многочлена – мнимые);
2. $0 < b < a$ – фокус;
3. $b = a$ – вырожденный узел;
4. $b > a$ – обыкновенный узел.

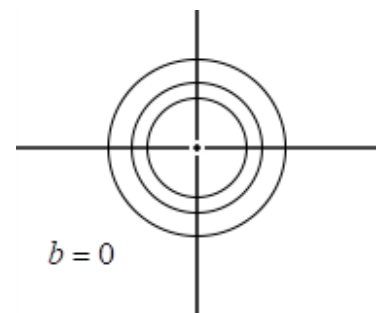


Рисунок 29

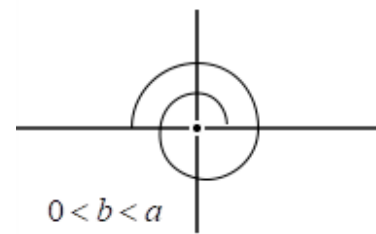


Рисунок 30

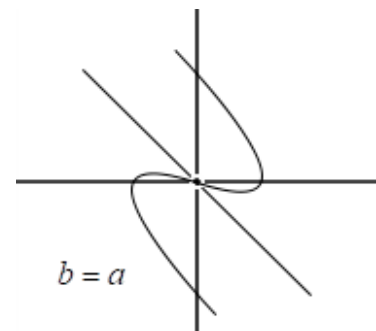


Рисунок 31

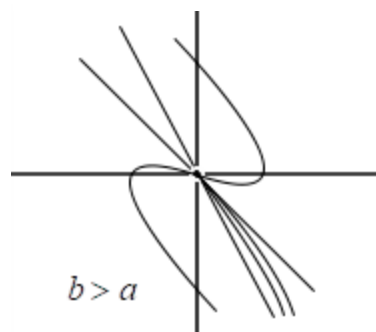


Рисунок 32

Динамические системы

Пусть $\dot{x} = f(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G)$, $x \in S_f(G)$, $D(x) = \mathbb{R}$.

$x(t, x)$ – решение, такое, что $x(0, x) = x$.

$x(t, \cdot): G \rightarrow G$ – сдвиг вдоль решения на время t .

Это отображение есть ни что иное, как отображение Коши. Опишем его свойства.

1. $x(0, \cdot) = I_G$ – тождественное отображение
2. $x(t, x(s, \cdot)) = x(t + s, \cdot)$
3. $x, x'_x, \dot{x}, \dot{x}'_x = (\dot{x}'_x) \in C(\mathbb{R}, G)$

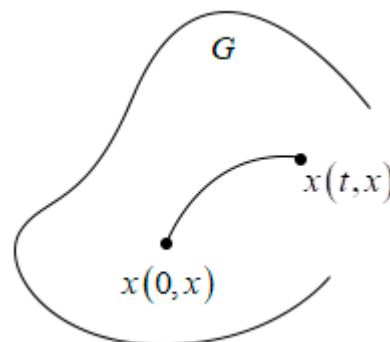


Рисунок 33

Определение. Динамической системой называется отображение

$F^t: G \rightarrow G$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что

1. $F^0 = I_G$
2. $F^t \circ F^s = F^{t+s}$
3. $F \in C(\mathbb{R}, G)$

Определение. Фазовым потоком называется динамическая система, в которой

4. $G \subset \mathbb{R}^n$ с евклидовой¹⁸ топологией
5. $F^t, \dot{F}^t \in C^1(G) \quad \forall t$

Утверждение. F^t – диффеоморфизм.

Доказательство:

- 1) обратимость следует из пункта 2 определения: $F^t \circ F^{-t} = F^{t-t} = F^0$;
- 2) $F^{-t} \in C^1(G)$ – очевидно из пункта 5.

Определение. Орбитой точки $x \in G$ называется

$$\{F^\tau x \mid \tau \in \mathbb{R}\} = F(x)$$

¹⁸ Со скалярным произведением.

Определение. Каскадом называется динамическая система (фазовый поток), в которой(ом) $t \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R}).

Свойство. $F^t(F^\tau(x)) = F^\tau(F^t(x))$ и при сдвиге орбита не меняется.

Определение. Векторное поле f называется генератором фазового потока $F^t(x)$, если $F^t = x(t, \cdot): G \rightarrow G$

Лемма. Любое векторное поле генерирует фазовый поток.

Доказательство: следует из выполнения аксиом фазового потока.

Лекция 11

Лемма. Для любого фазового потока F^t существует единственный генератор $f \in C^1(G)$.

Докажем единственность:

$$\left(F^\tau(x) \right)' \Big|_{\tau=0} = f(x), \quad x \in G$$

Существование:

$$\left(F^t(x) \right)' = \frac{dF^\tau(F^t(x))}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = f(F^t(x))$$

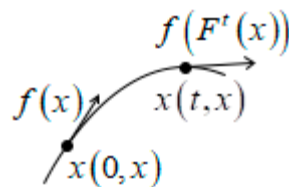


Рисунок 34

Помните, как раньше мы диффеоморфно отображали одну область в другую? Эх, хорошие были времена. Новая область g тогда задавалась уравнением

$$(g \circ \varphi)(x) = \varphi'(x) \circ f(x)$$

Ничего вам не напоминает? Действительно,

$$f(F^t(x)) = \left(F^t(x) \right)'_x \cdot f(x), \quad \text{где } \varphi = F^t,$$

то есть отображение фазового потока сохраняет векторное поле.

Пример. Пусть фазовый поток задан отображением

$$F^t(x) = e^{At}x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\left(e^{At}x \right)' \Big|_{t=0} = Ae^{At}x \Big|_{t=0} = Ax = f(x) \text{ — его генератор.}$$

Пример. Уравнение колебаний маятника:

$$\ddot{y} + a^2 y = 0, \quad a > 0$$

$$y = C_1 \cos at + C_2 \sin at = A \cdot \cos(at + \varphi_0), \quad A \neq 0$$

$$\psi y = A \cdot (\cos(at + \varphi_0), -a \cdot \sin(at + \varphi_0))$$

$$\text{Нормируем: } \frac{1}{A} \left(y, -\frac{1}{a} \dot{y} \right) = (\cos(at + \varphi_0), \sin(at + \varphi_0))$$

Этот вектор, понятно, лежит на единичной окружности S и тогда

$$\varphi = \varphi_0 + at$$

$$F^t(\varphi) \equiv \varphi + at: S \rightarrow S$$

Ввиду того, что угол неоднозначно определяется точкой окружности, будем считать, что это равенство – по модулю 2π .

Такой фазовый поток называется поворотом окружности,

$$\omega \equiv \frac{a}{2\pi} - \text{время, за которое точка сделает полный оборот.}$$

Если $\omega \in \mathbb{Q}$, то поворот называется рациональным, в противном случае – иррациональным.

Свяжем с поворотом окружности каскад $F^k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лемма. Орбита поворота окружности $F(\varphi)$ – замкнута $\Leftrightarrow \omega \in \mathbb{Q}$.

$$\text{Доказательство: } \varphi = F^k(\varphi) = \varphi + ka \Rightarrow ka = 2\pi m \Rightarrow \omega = \frac{a}{2\pi} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$$

Теорема (Вейля¹⁹).

$$\omega \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall \varphi \in S$$

1) $F(\varphi)$ – всюду плотна²⁰ в S ;

$$2) \overline{\chi_M}(\varphi) = \overline{\chi_M},$$

где M – конечная дуга из S ,

$$\chi_M(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in M, \\ 0, & \varphi \notin M, \end{cases}$$

$$\overline{\chi_M} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_M(\varphi) d\varphi - \text{относительная мера дуги на окружности (фазовое среднее),}$$

$$\overline{\chi_M}(\varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (\chi_M(F^1(\varphi)) + \dots + \chi_M(F^m(\varphi))) - \text{частота попадания в дугу (временное среднее).}$$

¹⁹ Гёрман Кла́ус Гуго Вейль (1885 – 1955) – немецкий математик и физик-теоретик. Лауреат премии Лобачевского.

²⁰ Хотя раз попадет в любую наперед заданную окрестность.

Такой предел, кстати говоря, называется пределом по Чезаро.

Пример. Пара маятников:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + a_1^2 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + a_2^2 y_2 = 0 \end{cases}$$

Фазовых переменных здесь 4 – $y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2$. Изобразить их на плоскости немислимо, поэтому возникает закономерный вопрос: как сократить число этих переменных? Один из способов – выразить производные через основные переменные. Если изображать эти переменные на плоскости, получатся так называемые фигуры Лиссажу.

Однако для более полной картины уместнее избавиться от амплитуд:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = a_1 \\ \dot{\varphi}_2 = a_2 \end{cases}$$

Каждая из этих функций «бегает» по окружности S , а пара по произведению $S \times S$, то есть тору (стоит заметить, что ни одного еврея здесь не задействовано):

$$\mathfrak{T} = S \times S$$

Изображать мы его будем на квадрате: когда точка выходит на границу, она как бы появляется с другой стороны. Такое представление называется обмоткой тора. Угловой коэффициент

$$\omega = \frac{a_2}{a_1}$$

может быть рациональным и иррациональным. Обмотка при этом называется соответственно.

$$F^t(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1 + a_1 t, \varphi_2 + a_2 t)$$

Свяжем с обмоткой каскад Пуанкаре.

$$S_0 = 0 \times S$$

$$\wp^k(\varphi) = \varphi + \frac{a_2 \cdot 2\pi}{a_1} \cdot k \text{ – поворот окружности.}$$

Он будет рациональным тогда и только тогда, когда отношение скоростей – рационально.

Лемма. Орбита $F(\varphi_1, \varphi_2)$ – замкнута $\Leftrightarrow \omega \in \mathbb{Q}$.

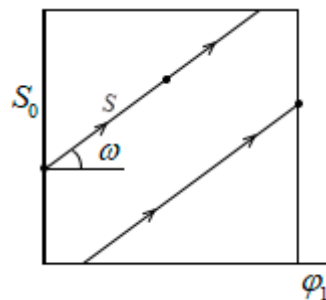


Рисунок 35

Доказательство:

$$F^T(\varphi_1, \varphi_2) = F^0(\varphi_1, \varphi_2)$$

Обозначим за S время, которое необходимо, чтобы добраться от нулевой окружности до точки тора и отнимем его от обеих частей.

$$F^{T-S}(\varphi_1, \varphi_2) = F^{0-S}(\varphi_1, \varphi_2) \in S_0 \Leftrightarrow \omega \in \square$$

Лемма. $\omega \notin \square \Rightarrow F^t(\varphi_1, \varphi_2)$ – всюду плотна в \mathfrak{Z} .

Доказательство:

возьмем точку $F^{0-S}(\varphi_1, \varphi_2) \in S_0$ и орбиту $F^{t-S}(\varphi_1, \varphi_2)$ от нее. Берем только те t , при которых она попадает на окружность. Осталось спроектировать какую-нибудь окрестность на нулевую окружность – на ней найдутся точки каскада Пуанкаре – и при сдвиге назад они будут и вблизи исходной точки.

Лекция 12

Цикл в фазовом пространстве

Рассмотрим цикл Γ с периодом $T > 0$.

$$\Gamma = F^T(x_0) \equiv x(t, x_0)$$

$$\dot{x} = f(x) - \text{генератор.}$$

Система в вариациях по начальному значению вдоль Γ :

$$z(t, x_0) = x'_x(t, x) = (F^t)'(x)$$

$$\dot{z} = A(t) \cdot z, \quad A(t) = f'_x(F^t(x_0))$$

$$Z(t, 0; x_0) = z(t) - \text{оператор Коши.}$$

Теорема.

Система в вариациях $\dot{z} = A(t) \cdot z$ – T-периодична, причем существует мультипликатор $\mu_n = 1$.

Доказательство:

$$1) A(t+T) = f'_x(F^{t+T}(x_0)) = f'_x(F^t(x_0)) = A(t)$$

$$2) (F^T)'(x_0) \cdot f(x_0) = f(F^T(x_0)) = 1 \cdot f(x_0) \Rightarrow \mu_n = 1$$

Определение. Остальные мультипликаторы μ_1, \dots, μ_{n-1} называются орбитальными или мультипликаторами цикла.

Теорема.

Если $x(\square, x_0)$ – задает цикл, то он не асимптотический.

Доказательство:

$$\forall U(x_0) \exists x(\square, x_1) - T\text{-периодичное решение:}$$

$$\rho(x(kT, x_1), x(kT, x_0)) = \rho(x(0, x_1), x(0, x_0)) = \rho(x_1, x_0) > 0, \quad k \rightarrow \infty$$

и, таким образом, расстояние между исходным и возмущенным решением есть положительная константа, что противоречит стремлению x_1 к x_0 .

Определение. Отображение Пуанкаре (отображение последования).

Зафиксируем некоторую гиперплощадку в пространстве. Если на ней взять точку x_0 и двигаться по орбите, то мы вернемся в эту точку через время T . Что будет, если двигаться по орбите из соседней точки x ? В этом случае мы не обязательно попадем на гиперплощадку, но если это случилось, результат попадания называется $\wp(x)$.

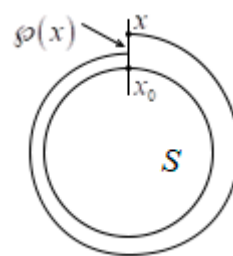


Рисунок 36

Теорема. Пусть $F^t : G \rightarrow G$ – фазовый поток, S – трансверсальна к $f(x_0)$, Γ – цикл $F^t(x_0)$. Тогда $\exists U(x_0) \exists S' = S \cap U(x_0) : (\wp : S' \rightarrow S) \in C^1$.

Следствие. Окрестность $U(x_0)$ можно уменьшить так, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \quad |T(x) - T| < \varepsilon$.

Следствие. Все орбитальные мультипликаторы суть собственные значения $\wp'(x_0)$.

Определение. Орбита $F^t(x)$ имеет $\omega(\alpha)$ -предельную точку x_0 тогда и только тогда, когда $\exists t_k \rightarrow \infty (-\infty) : \lim_{k \rightarrow \infty (-\infty)} F^{t_k}(x) = x_0$.

Множество таких предельных точек обозначается $\Omega = \{\omega\}$.

Примеры.

- 1) $F^t(x) = x \Rightarrow$ одна ω - предельная точка x ;
- 2) $F^t(x) = \Gamma \Rightarrow \omega$ - предельные точки есть все точки цикла;
- 3) если траектория имеет предел, то это и есть ω - предельная точка.

Теорема. Множество Ω обладает свойствами:

- 1) замкнуто и инвариантно относительно F^t ;
- 2) $\Omega = \emptyset \Leftrightarrow F^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \partial G$;
- 3) ограничено и связно \Leftarrow при $t \geq T \quad F^t(x) \in K \subset G$.

Плоский цикл

Пусть $\Gamma \subset G \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Плоский цикл называется:

- 1) изолированным, если $\exists U(\Gamma)$, в которой нет других циклов;

- 2) устойчивым снаружи (внутри), если существует наружная (внутренняя) траектория $F^t(x)$: $\Omega = \Gamma$;
- 3) неустойчивым снаружи (внутри), если он устойчив при $t \rightarrow -\infty$ (то есть если $A = \Gamma$, где $A = \{\alpha\}$ – альфа-предельное множество);
- 4) полуустойчивым, если он устойчив снаружи, но не устойчив внутри (или наоборот);
- 5) предельным, если $\exists F^t(x)$, для которой цикл либо омега-предельный, либо альфа-предельный.

Заведем на гиперплощадке отображение $\sigma: I \rightarrow S$ и применим теорему Пуанкаре:

$$p(s) = (\sigma \circ \sigma^{-1})(s),$$

то есть некоторому числу ставим в соответствие точку x , на нее действуем отображением Пуанкаре и определяем, какую координату будет иметь образ.

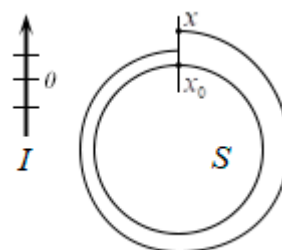


Рисунок 37

Определение. Отображение $p: I' \rightarrow I$ обладает следующими свойствами:

- 1) $p(0) = 0$;
- 2) $s > 0 \Rightarrow p(s) \overset{(<)}{>} 0$;
- 3) $p(s) = s \Leftrightarrow s = 0$;
- 4) $(p(s) - s)$ – фиксированного знака при $s > 0$ ($s < 0$).

Теорема.

Если цикл Γ – изолирован и $\exists s > 0: p(s) - s < 0 \Rightarrow$ он устойчив снаружи.²¹

Заштрихованная область называется мешком Бендиксона²².

Доказательство: пусть $p(s) < s$. Рассмотрим убывающую положительную последовательность

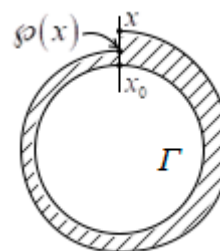


Рисунок 38

²¹ Аналогично формулируются утверждения для знаков «меньше нуля».

²² Ивар Отто Бендиксон (1861 – 1935) – шведский математик, наиболее известен благодаря теореме Пуанкаре — Бендиксона.

$$s_1 = s > 0$$

$$s_2 = \wp(s_1) > 0$$

$$s_3 = \wp(s_2) > 0$$

...

↓

0

Тогда $\exists \lim_{i \rightarrow \infty} s_i = s_0 \geq 0$. Покажем, что он равен нулю. Если перейти к пределу введенной последовательности, получим

$$p(s_0) = s_0,$$

что равносильно равенству $s_0 = 0$.

Таким образом, $x_0 \in \Omega \Rightarrow \Gamma \subset \Omega$.

Осталось показать, что предельных точек, кроме Γ , больше нет, т.е. что справедливо обратное включение: $\Gamma \supset \Omega$. Это следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных значений: близость начальных значений влечет близость траектории.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a(x^2 + y^2 - 1)x \\ \dot{y} = -x + a(x^2 + y^2 - 1)y \end{cases}$$

1) $a = 0$ – циклы все неизоллированные;

2) $a < 0$

$\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ – фазовая кривая.

Неустойчив и снаружи, и внутри.

3) $a > 0$

Устойчив и снаружи, и внутри.

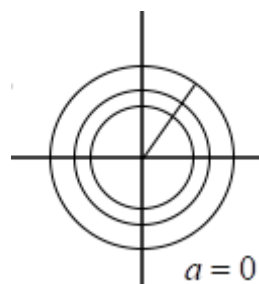


Рисунок 39

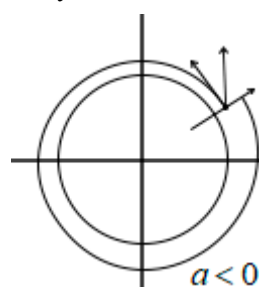


Рисунок 40

Лекция 13

Уравнения в частных производных первого порядка

(*) $f_1(x) \cdot u'_{x_1} + \dots + f_n(x) \cdot u'_{x_n} = 0$ – линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка, где $f(x) \neq 0$.

$u = u(x_1, \dots, x_n)$ – решение: $G' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$

Отметим, что это решение задает интегральную поверхность (см. рисунок).

$$u'_x(x) \cdot f(x) = 0, \quad x \in G' \subset G$$

(**) $\dot{x} = f(x)$, $x \in G$ – характеристическая система (для уравнения).

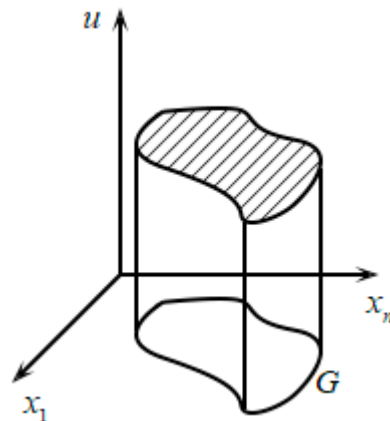


Рисунок 41

Фазовые кривые при этом будут называться характеристиками.

Теорема.

Пусть $f \in C^1(G)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- u – решение (*);
- $u = u(x)$ – интегральная поверхность;
- u – первый интеграл для (**);
- $u = \text{const}$ вдоль фазовых кривых (**).

Доказательство:

$1 \Leftrightarrow 2$ следует из определения интегральной поверхности;

$1 \Leftrightarrow 3$ следует из доказанной леммы – критерия того, что функция u есть первый интеграл;

$3 \Leftrightarrow 4$ следует из определения первого интеграла.

Как найти все решения уравнения (*)? Так же, как и найти все первые интегралы – брать независимые в точке $x_0 \in G$ первые интегралы $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, которые порождают все остальные:

$\forall \varphi$ – первого интеграла – $\varphi = F(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ в некоторой существующей окрестности $U(x_0)$.

Пример.

$H'_y(x, y) \cdot u'_x = H'_x(x, y) \cdot u'_y$ – уравнение первых интегралов гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = H'_y \\ \dot{y} = -H'_x \end{cases} \quad \text{– гамильтонова система}$$

$$u = F(H), \quad F \in C^1(D)$$

Задача Коши для этого уравнения

$u_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$ – начальная функция

$u|_S = u_0$ – начальная гиперповерхность в G

$U(x)$ – решение задачи Коши, если оно удовлетворяет уравнению (*) в $G' \subset G$ и

$$u(x)|_{x \in S'} = u_0(x), \quad S' = S \cap G'$$

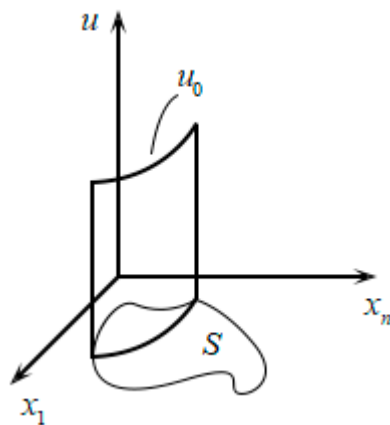


Рисунок 42

Возникает проблема: как определить гладкость функции u_0 ?

Заведем координаты на S .

Пусть некоторое отображение σ переводит область $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ в область $S \subset \mathbb{R}^n$.

Полагаем, что:

- 1) $\sigma \in C^1(D)$;
- 2) σ – биекция (т.е. она обратима);
- 3) $\sigma' = \sigma'(\sigma'_{y_1}, \dots, \sigma'_{y_{n-1}})$ – невырождена (набор векторов линейно независим).

Теперь мы можем сказать, что

$$u_0 \in C^1(S) \Leftrightarrow u_0 \circ \sigma \in C^1(D),$$

$$D \xrightarrow{\sigma} S \xrightarrow{u_0} \square$$

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Пусть $f \in C^1(G)$, $\sigma(y_0) = x_0$; $\sigma'_{y_1}(y_0), \dots, \sigma'_{y_{n-1}}(y_0), f(x_0)$ – линейно независимы.

Тогда $\exists U(x_0) \subset G$: $\exists! u: U(x_0) \rightarrow \square$ – решение задачи Коши.

Следствие.

Если в условиях теоремы u_1, u_2 – решения задачи Коши, то $u_1 = u_2$ ^{loc} вблизи x_0 или, что то же самое, $\exists U(x_0)$: $u_1(x) = u_2(x)$, $x \in U(x_0)$.

Доказательство следствия: пусть $U_1(x_0)$ – область определения первого решения, $U_2(x_0)$ – второго, причем обе они содержат точку x_0 . Гарантировать, что решения совпадают в пересечении окрестностей нельзя.

Однако можно выбрать меньшую окрестность $U(x_0)$, в которой они таки будут совпадать. Это справедливо, так как если мы положим G равным пересечению окрестностей, то

$$u_1|_{U(x_0)} \stackrel{!}{=} u = u_2|_{U(x_0)}$$

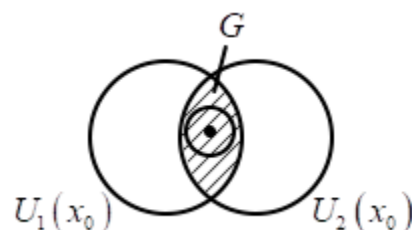


Рисунок 43

Приведем **пример**, который иллюстрирует, что решения не совпадают в области пересечения.

Рассмотрим область G' , в которой задано решение. Решения здесь трансверсальны по отношению к гиперповерхности S' , т.к. вектор трансверсален в точке x_0 и, в силу непрерывности, в её окрестности. Заданы ли (однозначно ли) функции – зависит от конкретной области. Например, функция будет не задана, если добавить к этой области «аппендикс» или исключить её часть (см. рисунки ниже).

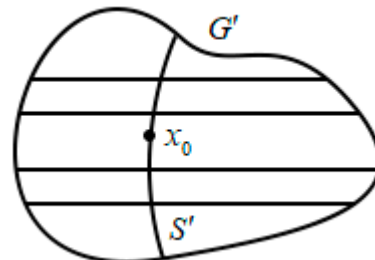


Рисунок 44

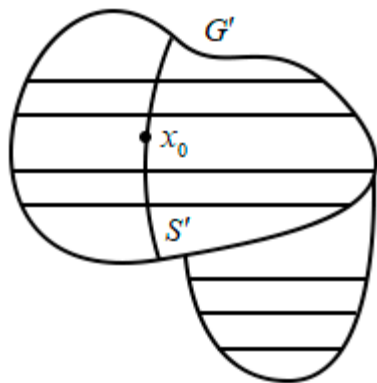


Рисунок 45

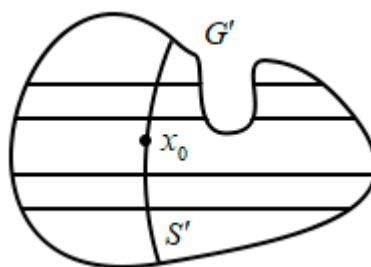


Рисунок 46

Существенна ли в теореме линейная независимость? Да. Рассмотрим **пример**.

$$(**) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$(*) \quad y \cdot u'_x - x \cdot u'_y = 0$$

$$S: x = 1$$

Будет ли выполнено в точке $(x_0, y_0) = (1, 0)$ условие трансверсальности? Нет, так как f здесь лежит в гиперплоскости. Выберем некоторую окрестность точки (x_0, y_0) .

Часть гиперплоскости, лежащей в этой окрестности обозначим S' .

$$S': u_0(y)$$

Рассмотрим характеристику, изображенную на рисунке. Она дважды пересекает гиперплоскость, и значения в точках пересечения одинаковы. Таким образом, эти точки симметричны относительно нуля, а значит функция – четная. Рассмотрим любую нечетную функцию:

$$u_0(y) = y$$

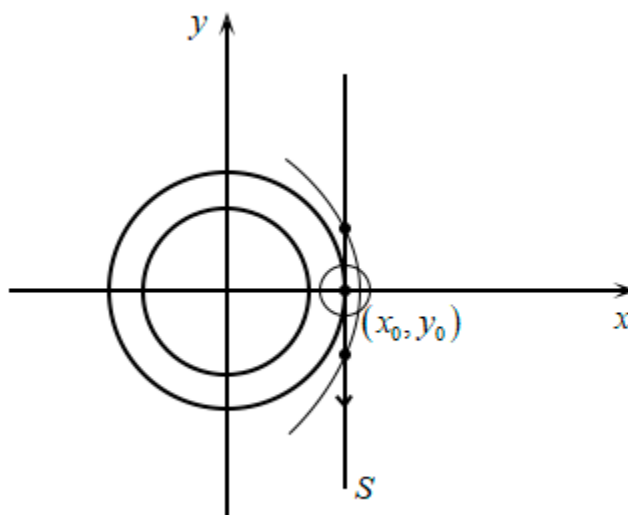


Рисунок 47

Понятно, что в этом случае наши значения будут разного знака, хотя должны быть одинаковыми.

Существование мы не гарантируем, так, быть может, гарантируется единственность? Приведем четную функцию:

$$0 \neq u(x, y) = \begin{cases} 0, & r \geq 1 \\ (1 - r^2), & x \leq 1 \end{cases}$$

Таким образом, даже если решение существует, то оно не единственно.

Доказательство теоремы (да-да, мы ее все еще не доказали): отображим одну поверхность в другую таким образом, чтобы вторая оказалась прямолинейной, а поле f – выпрямленным.

$$\psi: U(x_0) \rightarrow V$$

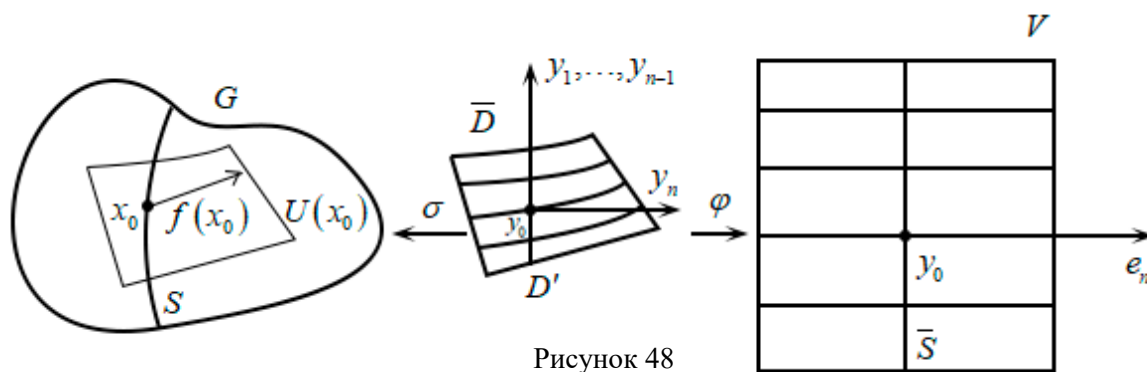


Рисунок 48

$$\psi = \varphi \circ \sigma^{-1}$$

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$$

$$D' = \bar{S} = (y_n = 0)$$

$$\bar{\sigma}(\bar{y}) = \sigma(y) + y_n \cdot f(x_0)$$

$$\sigma'(\bar{y})e_1 = f(x_0)$$

$$(\bar{\sigma}^{-1})'_{x_0}(f(x_0)) = e_n$$

$$(e_n)_n = 1 \neq 0$$



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ