



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ДЫННИКОВ
ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
АСПИРАНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАСЛАКОВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Введение. Кривые в евклидовом пространстве	5
Напоминание	5
Кривые в евклидовом пространстве	6
Понятие кривой. Параметризация	6
Задание кривых системами уравнений	7
Касательная прямая к кривой	7
Лекция 2. Касательные к кривой. Соприкосновение. Натуральный параметр	8
Кривые в евклидовом пространстве	8
Касательная прямая к кривой	8
Соприкосновение m -ого порядка	9
Соприкасающаяся окружность	11
Натуральная параметризация	13
Лекция 3. Формулы Френе	14
Кривые в евклидовом пространстве	14
Натуральная параметризация	14
Формулы Френе плоской кривой	15
Формулы Френе в $\mathbb{R}^3$	16
Базис Френе в $\mathbb{R}^n$	18
Лекция 4. Общие формулы Френе. Проекция регулярной кривой на трехгранник Френе. Эволюта и эвольвента	19
Кривые в евклидовом пространстве	19
Добавление про кручение	19
Базис Френе в $\mathbb{R}^n$	19
Проекция кривой в $\mathbb{R}^3$ на трехгранник Френе	22
Эволюта и эвольвента	23
Лекция 5. Интеграл кривизны. Поверхности. Касательная плоскость	25
Кривые в евклидовом пространстве	25
Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру	25
Поверхности в трехмерном пространстве	26
Определение поверхности. Локальные координаты. Способы задания	26
Касательная плоскость к поверхности	29
Лекция 6. Первая и вторая квадратичные формы. Главные кривизны	30
Поверхности в трехмерном пространстве	30
Квадратичные формы	30
Первая фундаментальная форма	30
Вторая фундаментальная форма	32
Главные кривизны сечения	33



Лекция 7. Деривационные формулы Вайнгартена. Линейчатые и изометричные плоскости поверхности	34
Поверхности в трехмерном пространстве	34
Главные кривизны сечения	34
Деривационные формулы Вайнгартена	35
Развертывающиеся поверхности	36
Лекция 8. Минимальные поверхности	38
Поверхности в трехмерном пространстве	38
Развертывающиеся поверхности	38
Линии кривизны и омбилические точки	39
Минимальные поверхности	40
Лекция 9. Деривационные формулы Гаусса. Поверхности вращения.	
Теорема Менье	41
Теорема Менье	41
Поверхности вращения	42
Деривационные формулы Гаусса	43
Тождества Кристоффеля	44
Задачи	45
Лекция 10. Совместность ОДУ, коммутатор векторных полей, теорема Бонне	46
Совместность обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	46
Коммутатор векторных полей	48
Восстановление по первой и второй квадратичным формам	49
Теорема Бонне	51
Лекция 11. Теорема Бонне. Уравнения Гаусса, Гаусса-Кодацци, Петерсона-Майнарди-Кодацци. Поверхности постоянной отрицательной кривизны	52
Доказательство теоремы Бонне (продолжение)	52
Уравнение Гаусса – Кодацци	54
Уравнение Гаусса, теорема Гаусса	54
Уравнения Петерсона – Майнарди – Кодацци	55
Поверхности с гауссовой кривизной $K = \text{const} < 0$	55
Лекция 12. Поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Геодезические. Теорема Клеро	59
Вид первой и второй квадратичной формы на поверхностях отрицательной гауссовой кривизны	59
Поверхности с $K = -1$, соответствующие решению Гордон-уравнения	60
Геодезическая кривизна	61
Теорема Клеро	62
Уравнения геодезических	63
Продолжение решения уравнения геодезической	64

Лекция 13. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Экспоненциальное отображение	66
Уравнения Эйлера – Лагранжа	66
Лагранжиан для геодезических	67
Экспоненциальное отображение	68
Обобщенная полярная система координат	70
Полугеодезическая система координат	71
Лекция 14. Сфера и плоскость Лобачевского. Параллельный перенос	73
Вид полугеодезической системы координат у поверхности с $K = \text{const}$. . .	73
Сфера	74
Плоскость Лобачевского	76
Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование	79
Лекция 15. Угловой дефект. Теорема Гаусса-Бонне	82
Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование (продолжение)	82
Угловой дефект	83
Теорема Гаусса – Бонне	86
Лекция 16. Консультация	89
Теорема Клеро	89
Задача о кручении на поверхностях отрицательной кривизны	89
Поверхностный интеграл, обсуждение площади	90
Задачи о линиях кривизны	91

Лекция 1. Введение. Кривые в евклидовом пространстве

Напоминание

Определение 1.1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется дифференцируемым в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует матрица A размера $k \times n$, для которой выполнено

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0. \quad (1.1)$$

$$A_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \quad (1.2)$$

Дифференциал

$$df \Big|_{x_0} = dg \Big|_{x_0} \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = g(x) - g(x_0) + o(|x - x_0|) \quad (1.3)$$

$$df \leftrightarrow \left(\frac{df^i}{dx^j} \right)$$

Дифференциалы образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$:

$$df \Big|_{x_0} + dg \Big|_{x_0} = d(f + g) \Big|_{x_0} \quad (1.4)$$

$$\lambda df = d(\lambda f). \quad (1.5)$$

Теорема 1.1 (о производной сложной функции). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$d(g \circ f)|_{x_0} = dg|_{f(x_0)} \cdot df|_{x_0}$$

Определение 1.2. Касательным вектором к пространству $\mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется дифференциал некоторого дифференцируемого отображения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f(0) = x_0.$$

$T_{x_0} \mathbb{R}^n$ -пространство всех касательных векторов в точке x_0 .

Базис в T_{x_0} :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ - это $d\gamma_i$,

$$\gamma_i(t) = x_0 + (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$df \Big|_{x_0} : T_{x_0} \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(x_0)} \mathbb{R}^k$$

$$v \in T_{x_0} \mathbb{R}^n$$

$$v = dg \Big|_0, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad 0 \mapsto x_0$$

$$df(v) = d(f \cdot g) \Big|_0$$

Проверить:

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Теорема 1.2 (об обратном отображении). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - гладкое отображение $\det df \Big|_{x_0} \neq 0 \Rightarrow f$ - обратимо в некоторой окрестности $f(x_0)$, причем f^{-1} также гладкое.

Если не оговаривается противное, предполагаем, что все отображения гладкие.
 $\hat{f}$ - ряд Тейлора для f . $g = f^{-1}$:

$$f \circ g = id \Big|_{\text{окр. } f(x_0)}.$$

$$\hat{f}(\hat{g}(y)) = \text{ряд по } (y - f(x_0)) = y.$$

Теорема 1.3 (о неявном отображении). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — гладкое отображение, $\text{rk}(df|_{x_0}) = k \Rightarrow$ в некоторой окрестности точки x_0 множество решений системы $f(x) = f(x_0)$ - график гладкого отображения, выражающего некоторые k координат через остальные.

Теорема о неявном отображении $\Leftrightarrow$ теорема об обратном отображении.

Кривые в евклидовом пространстве

Понятие кривой. Параметризация.

Определение 1.3. Простая дуга в $\mathbb{R}^n$ называется подмножеством.

Определение 1.4. Параметризованная кривая - непрерывное отображение $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\forall t \exists [a, b] \ni t, [a, b] \subset I, \gamma \Big|_{[a, b]}$ - гомеоморфизм на простую дугу.

Определение 1.5. Точка параметризованной кривой - пара вида $(t, \gamma(t))$, где $t \in I$.

Определение 1.6. Кривая — это класс эквивалентности параметризованных кривых. $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если существует гомеоморфная замена параметра $s = s(t)$:

$$\gamma_1(s(t)) = \gamma_2(t).$$

Определение 1.7. Гладкая параметризованная кривая $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется регулярной, если

$$\text{rk } d\gamma \Big|_t = 1 \quad \forall t.$$

Определение 1.8. Кривая называется *гладкой*, если допускает гладкую регулярную параметризацию.

Теорема 1.4. Пусть $r_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $r_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ - регулярные параметризации одной гладкой кривой. Тогда r_1 и r_2 связаны гладкой заменой параметра

$$s = s(t) : r_1(s(t)) = r_2(t).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть малую окрестность $t_0 \in I_2$. r_1 - регулярная, следовательно

$$\exists i \left. \frac{dr_1^i}{dt} \right|_{s_0} \neq 0, \quad s_0 = s(t_0)$$

по теореме об обратном отображении $r_1^i(s)$ обращается в окрестности $r_2^i(s_0)$,

$$s = s(r_1^i) = s(r_1^i(t)).$$

□

Определение 1.9. *Кусочно гладкая кривая* - состоит из простых дуг.

Задание кривых системами уравнений

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\text{rk}(df|_{x_0}) = n - 1$$

Система уравнений $f(x) = f(x_0)$ задает гладкую кривую в окрестности точки x_0 по теореме о неявном отображении.

Без ограничения общности

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) \neq 0$$

Тогда по теореме о неявном отображении система $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 = g^2(x^1) \\ \dots \\ x^n = g^n(x^1) \end{cases}$$

получаем параметризацию

$$t \mapsto (t, g^2(t), \dots, g^n(t))$$

и это регулярная параметризация.

Касательная прямая к кривой

Пусть γ - гладкая кривая, $x_0 \in \gamma$.

Определение 1.10. *Касательной прямой* в точке x_0 - предел прямых x_0x_1 , $x_1 \rightarrow x_0$, $x_1 \in \gamma$.

Лекция 2. Касательные к кривой. Соприкосновение. Натуральный параметр

Кривые в евклидовом пространстве

Касательная прямая к кривой

Предложение 2.1. γ - гладкая простая дуга. Тогда

1) $\forall x_0 \in \gamma$ существует касательная в точке x_0 .

2) l - касательная в точке x_0 следовательно

$$\rho(x, l) = o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0, \quad x \in \gamma \quad (*)$$

3) l со свойством $(*)$ единственная.

Доказательство.

1) Существует регулярная параметризация $r(t)$ ($|\dot{r}(t)| \neq 0 \quad \forall t$). Направляющий вектор l :

$$\frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \dot{r}(t).$$

2)

$$\gamma : r(t) = r(t_0) + \dot{r} \Big|_{t_0} (t - t_0) + o(t - t_0)$$

$$l : r(t_0) + \dot{r} \Big|_{t_0} (t - t_0)$$

Расстояние между ними равно $o(t - t_0)$.

3) Пусть l' - другая прямая.

$$\rho(r(t), l') \neq o(t - t_0)$$

$$\rho(r(t), l') = O(t - t_0)$$

l' не является касательной.

□

Предложение 2.2. Пусть γ локально задана системой уравнений

$$\begin{cases} f^1(x) = 0 \\ \dots \\ f^n = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$f \in C^\infty$, $\text{rk } df|_{x_0} = n - 1$, $f(x_0) = 0$. Тогда касательная в точке x_0 задается

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{x_0} (x - x_0) = 0.$$

Доказательство. По теореме о неявном отображении.

□

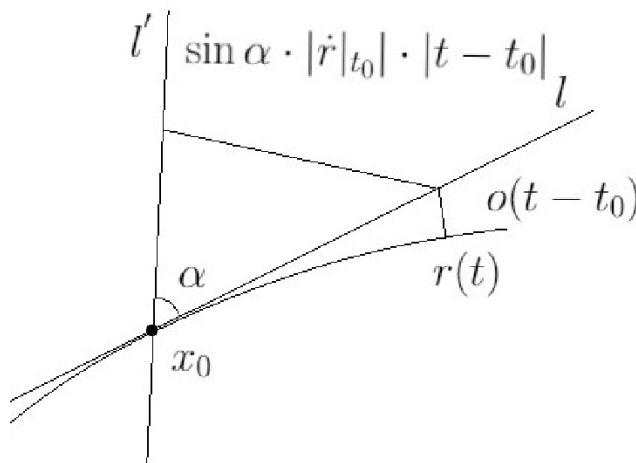


Рис. 2.1.

Соприкосновение m - ого порядка

Пусть даны две гладкие кривые γ_1, γ_2 , проходящие через точку x_0 .

Определение 2.1. γ_1 и γ_2 имеют в точке x_0 *соприкосновение порядка m* ($m \in \mathbb{N}$), если существуют регулярные параметризации $r_1(t), r_2(t)$ этих кривых такие, что

$$r_1(t_0) = r_2(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$|r_1(t) - r_2(t)| = o((t - t_0)^m), \quad t \rightarrow t_0 \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Пусть γ_1, γ_2 — простые дуги, проходящие через x_0 . Они имеют в x_0 *соприкосновение порядка m* $\Leftrightarrow$

$$\rho(x, \gamma_2) = o(|x - x_0|^m), \quad x \in \gamma_1, \quad x \rightarrow x_0. \quad (2.3)$$

Доказательство. $r_1(t)$ - регулярная параметризация γ_1 .

$$|r_1(t) - r_1(t_0)| = O(t - t_0)$$

$$t - t_0 = O(|r_1(t) - r_1(t_0)|)$$

$\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть r_2 - параметризация γ_2 такая, что

$$\dot{r}_2 \Big|_{t_0} = \dot{r}_1 \Big|_{t_0}$$

$$x = r_1(t), \quad x_1 = r_2(t), \quad x_2 = r_2(\phi(t)),$$

где ϕ - неизвестная функция. Без ограничения общности $\dot{r}_2 \Big|_{t_0} = e_1$ - первый

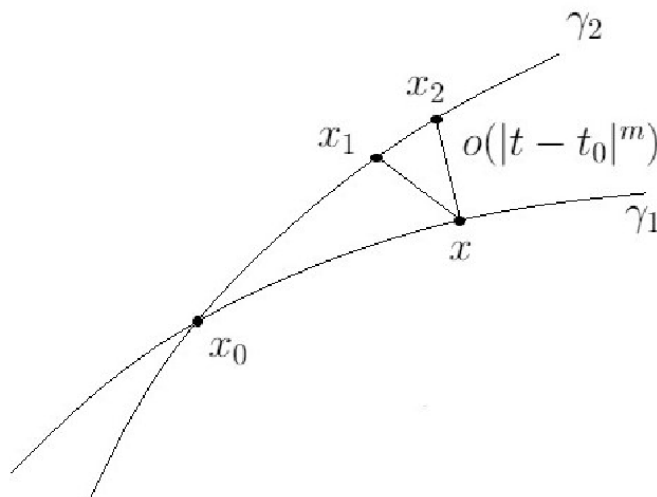


Рис. 2.2.

базисный вектор в $\mathbb{R}^n$.

$$r'_1(t) = t$$

$$r'_2(t) = t$$

Рассмотрим $\Delta x x_1 x_2$

$$x - x_1 \perp e_1$$

$$\angle(x_1 - x_2)e_1 = o(t - t_0)$$

$$|x - x_2| = o((t - t_0)^m) \Rightarrow$$

$$|x - x_1| = o((t - t_0)^m).$$

□

Определение 2.2. Точка спрямления $x_0 : \gamma$ имеет со своей касательной прямой в точке x_0 соприкосновение порядка два.

Предложение 2.3. x_0 - точка спрямления, если для некоторого (любого) регулярного параметра $r(t)$ такого, что $r(t_0) = x_0$ выполняется $\ddot{r} \Big|_{t_0}$ коллинеарен $\dot{r} \Big|_{t_0}$.

Доказательство. Пусть

$$\ddot{r} \Big|_{t_0} = \lambda \dot{r} \Big|_{t_0}$$

$$l : \tilde{r}(t) = r(t_0) + \dot{r} \Big|_{t_0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{r} \Big|_{t_0} \cdot (t - t_0)^2 \text{ (в окрестности } x_0)$$

$$\gamma : r(t) = r(t_0) + \dot{r} \Big|_{t_0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{r} \Big|_{t_0} \cdot (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2)$$

Пусть γ и l соприкасаются с порядком соприкосновения 2

$$\tilde{r}(t) = r(t_0) + \dot{r} \Big|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \lambda \dot{r}(t - t_0)^2$$

$$\ddot{r} = \lambda \dot{r} + u, \quad u \perp \dot{r}$$

$$r(t) - \tilde{r}(t) = \frac{1}{2} u(t - t_0)^2.$$

□

Теорема 2.2. Если все точки гладкой кривой γ являются точками спрямления $\Rightarrow \gamma$ - прямая.

Доказательство. Пусть $r(t)$ — регулярная параметризация данной кривой.

$$\ddot{r}(t) = \lambda(t) \dot{r}(t). \quad (2.4)$$

$\lambda(t)$ - гладкая функция.

$$r(t_0) = x_0$$

$$\dot{r}(t_0) = v_0$$

Утверждается, что $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = x_0 + \phi(t) \cdot v_0 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} \cdot v_0 = \lambda \dot{\phi} \\ \phi(t_0) = 0 \\ \dot{\phi}(t_0) = 1 \end{cases}$$

Решение существует, следовательно существует решение уравнения (2.4) в виде (2.5). □

Соприкасающаяся окружность

Пусть γ - гладкая кривая $x_0 \in \gamma$ не имеющая точек спрямления.

Теорема 2.3.

- 1) Существует единственная окружность C , имеющая с γ соприкосновение в точке x_0 порядка 2.
- 2) C - предельное положение окружности, проходящей через $x_1, x_2, x_3 \in \gamma, x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_0$ при $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_0$. C - называется соприкасающейся окружностью к γ в точке x_0 .

Доказательство. Пусть $t_0 = 0$

$$r(t) = x_0 + v \cdot t + \frac{a}{2}t^2 + o(t^2) - \text{регулярная параметризация } (v \neq 0)$$

Можно отбросить $o(t^2)$. O - центр окружности C . Хотим

$$|r(t) - O| = o(t^2)$$

$$u = \overrightarrow{Ox_0}$$

$$\begin{aligned} \left| u + vt + \frac{at^2}{2} \right| &= R + o(t^2) \Leftrightarrow \\ \left(u + vt + \frac{at^2}{2}, u + vt + \frac{at^2}{2} \right) &= R + o(t^2) \\ 1 : |u|^2 &= R^2 \\ t : (u, v) &= 1 \\ t^2 : (v, v) + (u, a) &= 0 \\ u &= \lambda v + \mu a \\ \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & 0 \\ (v, v) & (v, a) & \\ (v, a) & (a, a) & -(v, v) \end{array} \right) & \\ u = (v, v) \frac{(v, a)v - (v, v)a}{(v, v)(a, a) - (v, a)^2} & \end{aligned} \quad (2.6)$$

□

O - центр кривизны.

$R = |Ox_0|$ - радиус кривизны.

$k = \frac{1}{R}$ - кривизна.

$n = \frac{x_0 \vec{O}}{R}$ - вектор главной нормали.

$\vec{x_0 O} = k \cdot n = \frac{x_0 \vec{O}}{R^2}$ - вектор кривизны.

Из (2.6)

$$v = \dot{r}$$

$$a = \ddot{r}$$

В знаменателе (2.6)

$$(S(\dot{r}, \ddot{r}))^2$$

В числителе (2.6)

$$-h = \frac{(v, a)v}{(v, v)} - a - \text{вектор высоты параллелограмма натянутого на } v \text{ и } a.$$

$$u = \frac{(v, v)^2 \vec{h}}{S(v, a)^2}$$



$$\begin{aligned} R &= \frac{|\dot{r}|^3}{S(\dot{r}, \ddot{r})} \\ k &= \frac{S(\dot{r}, \ddot{r})}{|\dot{r}|^3} \\ \vec{k} &= k^2(\dot{r}, \dot{r}) \frac{(\dot{r}, \dot{r})\ddot{r} - (\dot{r}, \ddot{r})\dot{r}}{S(\dot{r}, \ddot{r})^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Натуральная параметризация

Определение 2.3. Параметризация гладкой кривой называется *натуральной*, если длина вектора скорости в ней постоянна и равна единице.

Для натурального параметра как правило используют обозначение s , а для производных по натуральному параметру — штрихи, а не точки: $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$

Замечание 2.1. Иногда натуральной называют также параметризацию, для которой длина вектора скорости постоянна, но не обязательно равна единице.

Теорема 2.4. На гладкой кривой существует параметризация $r(s)$:

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = 1 \text{ всюду (натуральный параметр).}$$

$s, \hat{s}$ - две такие параметризации, то верно одно из двух

$$1) \quad s = \hat{s} + \text{const},$$

$$2) \quad s = -\hat{s} + \text{const}.$$

Доказательство. Параметризация $r(t)$, $s = \phi(t)$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \bigg/ \frac{ds}{dt}$$

Надо решить уравнение

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \left| \frac{dr}{dt} \right|$$

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dr}{dt} \right|$$

$$\frac{ds}{dt} = - \left| \frac{dr}{dt} \right|$$

□

Лекция 3. Формулы Френе

Кривые в евклидовом пространстве

Натуральная параметризация

γ - гладкая кривая, $s = \pm \tilde{s} + const$, s - натуральный параметр, $r(s)$ - параметризация γ

$$x_1 = r(s_1)$$

$$x_2 = r(s_2)$$

$|s_1 - s_2|$ не зависит от выбора натурального параметра - длина дуги кривой γ между x_1 и x_2 .

$\tilde{r}(t)$ - любая регулярная параметризация.

$$|s_1 - s_2| = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}| dt. \quad (3.1)$$

Предложение 3.1. s - натуральный параметр

$$k(s) = |r''(s)|. \quad (3.2)$$

Доказательство. Сначала докажем лемму, которой будем пользоваться и в дальнейшем.

Лемма 3.1. $u(t)$ - вектор.

$$|u(t)| = const \Leftrightarrow (u, \dot{u}) = 0$$

Доказательство.

$$|u| = \sqrt{(u, u)}$$

$$\frac{d}{dt}(u, u) = (\dot{u}, u) + (u, \dot{u}) = 2(u, \dot{u}).$$

□

$$k(t) = \frac{S(\dot{r}, \ddot{r})}{|\dot{r}|^3}$$

$t \rightarrow s$

$$k(s) = \frac{|r'| \cdot |r''|}{|r'|^3} = |r''|$$

□

Формулы Френе плоской кривой

Определение 3.1. Гладкая кривая *коориентирована*, если в каждой точке выбран единичный вектор нормали n такой, что ориентация базиса $\dot{r}, n$ постоянна.

Определение 3.2. Кривизна коориентированной кривой: k такая, что

$$\vec{k} = k \cdot n \quad (3.3)$$

Теорема 3.1 (Формулы Френе плоской кривой). В натуральной параметризации $r(s)$ коориентированной кривой в

$$\begin{aligned} v' &= k \cdot n, \\ n' &= -k \cdot v, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $v = r'$.

Доказательство.

$$v' = r'' = \vec{k}$$

Лемма 3.2. $u_1(t), u_2(t)$ - векторы.

$$(u_1, u_2) = \text{const} \Leftrightarrow (\dot{u}_1, u_2) + (u_1, \dot{u}_2) = 0.$$

$$n' = \lambda \cdot v$$

$$(n', v) = \lambda = -(n, v') = -k$$

□

v, n - базис Френе.

Теорема 3.2.

- 1) Гладкая коориентированная кривая однозначно с точностью до движения восстанавливается по функции $k(s)$.
- 2) $k(s)$ может быть произвольной гладкой функцией.

Доказательство. $r(0), v(0), n(0)$ - ортонормированный репер, его можно перевести в другой ортонормированный репер.

$$\begin{cases} r'(s) = v(s) \\ v'(s) = k(s) \cdot n \\ n'(s) = -k(s) \cdot v \end{cases} \quad (*)$$

По теореме о единственности решения ОДУ решение восстанавливается.

Решим (*).

$$(v', v) = k(v, n)$$

$$(n', n) = -k(v, n)$$

$$(v', n) + (v, n') = k((n, n) - (v, v))$$

$$(v, v)' = 2k(v, n)$$

$$(n, n)' = 2k(v, n)$$

$$(v, n)' = k((n, n) - (v, v))$$

В силу (*), если в начальный момент времени это ортонормированный базис, то при всех значениях параметра это будет ортонормированный базис.

$(v, v) = 1, (n, n) = 1, (v, n) = 0$ - решение.

$$|v| = |n| = 1 \forall s$$

$$(v, n) = 0$$

□

Формулы Френе в $\mathbb{R}^3$

γ - гладкая кривая без точек спрямления.

s - натуральный параметр.

$r(s)$ - параметризация.

$$v = r'_s$$

$$n = \frac{r''_s}{|r''_s|}$$

$b = [v, n]$ - бинормаль.

v, n, b - базис Френе.

Теорема 3.3 (Формулы Френе пространственной кривой).

$$\begin{aligned} v' &= k \cdot n \\ n' &= -k \cdot v + \kappa \cdot b \\ b' &= -\kappa \cdot n \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\kappa = \kappa(s)$ — некоторая гладкая функция, κ называется *кручением*.

Доказательство. v, n, b - ортонормированный по определению.

Для любого вектора u

$$u = (u, v) \cdot v + (u, n) \cdot n + (u, b) \cdot b$$

$$n' = (n', v) \cdot v + (n', n) \cdot n + (n', b) \cdot b = -(n, v') \cdot v + (n', b) \cdot b = -k \cdot v + (n', b) \cdot b$$

Положим

$$\kappa := (n', b)$$

$$b' = (b', v) \cdot v + (b', n) \cdot n + (b', b) \cdot b = -(b, n') \cdot b = -\kappa \cdot b$$

□

Формулы Френе в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} v & n & b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v & n & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = v, e_2 = n, e_3 = b$$

$$e_i' = [\kappa \cdot v + k \cdot b, e_i]$$

$\kappa \cdot v + k \cdot b$ - вектор Дарбу.

Следствие. $\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow$ кривая плоская (предполагаем $k > 0$).

Доказательство.

$\Leftarrow$ уже знаем.

$\Rightarrow$

$$\kappa \equiv 0 \Rightarrow b' = 0 \Rightarrow b = const$$

□

Теорема 3.4.

- 1) Гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$ без точек спрямления однозначно с точностью до движения восстанавливается по $k(s)$ и $\kappa(s)$.
- 2) $k(s)$ и $\kappa(s)$ могут быть произвольными гладкими (с ограничением $k > 0$).

Доказательство.

$$\begin{cases} r' = v \\ v' = k \cdot n \\ n' = -k \cdot v + \kappa \cdot b \\ b' = -\kappa \cdot n \end{cases}$$

Лемма 3.3. $X(t)$ — матрица размера $n \times n$ гладко зависит от параметра, $X(0) \in O(n)$. Тогда следующие два утверждения равносильны:

- 1) $X(t) \in O(n)$;
- 2) $X(t)^{-1} \dot{X}(t)$ - кососимметрична для любого t .

Доказательство.

$$1) \Rightarrow 2) \quad X(t) \in O(n)$$

$$X^T X = E$$

$$(X^T, X) \cdot = 0$$

$$(X^T, X) \cdot = \dot{X}^T X + X^T \dot{X} = 0$$

$$\dot{X}^T X = (X^T \dot{X})^T$$



2) $\Rightarrow$ 1) Положим

$$\begin{aligned} A(t) &= X^T(t)X(t) \\ B(t) &= X(t)^{-1}\dot{X}(t) \\ \dot{A} &= \dot{X}^T X + X^T \dot{X} = B^T X^T X + X^T X B = B^T A + AB \\ \begin{cases} \dot{A} &= -BA + AB \\ A(0) &= E \end{cases} \end{aligned}$$

$A \equiv E$ - решение, а решение единственно.

□

v, n, b - ортонормированный базис при $s = 0$

$$\begin{aligned} X' &= (v \ n \ b)' \\ X &= (v \ n \ b) \\ X' &= X \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} X' &= X \cdot B, \ B = -B^T \\ X(0) &\in O(3) \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно $X(s) \in O(3) \forall s$. В силу формул Френе $|v| \equiv 1$.

Так как X всегда ортонормированна, то она остается внутри компактного множества, а если мы остаемся внутри компакта, то можно продолжать решение сколь угодно.

□

Базис Френе в $\mathbb{R}^n$

γ - гладкая кривая с регулярной параметризацией $r(t)$ такой, что $\dot{r}, \ddot{r}, \dots, r^{(n)}$ - линейно независимы.

Базис Френе $e_1, \dots, e_n$ - результат ортогонализации Грамма - Шмидта, примененной к $\dot{r}, \ddot{r}, \dots, r^{(n)}$.

Лекция 4. Общие формулы Френе. Проекция регулярной кривой на трехгранник Френе. Эволюта и эвольвента

Кривые в евклидовом пространстве

Добавление про кручение

$$\begin{aligned}\kappa &= -(b', n) \\ n &= \frac{(\dot{r}, \dot{r})\ddot{r} - (\dot{r}, \ddot{r})\dot{r}}{|\dot{r}|S(\dot{r}, \ddot{r})} \\ v &= \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} \\ b &= [v, n] = \frac{1}{S(\dot{r}, \ddot{r})}[\dot{r}, \ddot{r}] \\ \dot{b} &= (\dots)[\dot{r}, \ddot{r}] + (\dots)[\ddot{r}, \dot{r}] + (\dots)[\dot{r}, \ddot{r}] \\ \kappa &= -\frac{1}{|\dot{r}|}(\dot{b}, n) = -\frac{1}{|\dot{r}|S(\dot{r}, \ddot{r})}(\dot{r}, \ddot{r}, n) = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{S(\dot{r}, \ddot{r})^2}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Базис Френе в $\mathbb{R}^n$

$v_1, \dots, v_k$ - линейно независимые векторы в евклидовом пространстве. Ортогонализация Грамма - Шмидта:

$$\begin{aligned}u_1 &= v_1 \\ e_1 &= \frac{u_1}{|u_1|} \\ u_2 &= v_2 - (e_1, v_2)e_1 \\ e_2 &= \frac{u_2}{|u_2|} \\ &\dots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} (e_j, v_k)e_j \\ e_k &= \frac{u_k}{|u_k|} \\ \langle v_1, \dots, v_k \rangle &= \langle e_1, \dots, e_k \rangle\end{aligned}$$

$e_1, \dots, e_k$ - единственный ортонормированный базис такой, что

$$(v_1 \dots v_k) = (e_1 \dots e_k)R$$

R - верхнетреугольная матрица с положительными числами диагонали.

Пусть

$$(\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_k) = (v_1 \dots v_k)R'.$$

Тогда ортогонализация Грамма - Шмидта для $v_1, \dots, v_k$ и $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$ дает один и тот же результат.

Рассмотрим ориентированную гладкую кривую, возьмем два разных регулярных параметра t и τ .

$$\frac{dt}{d\tau} > 0$$

$\frac{d}{dt}$ обозначаем точкой, $\frac{d}{d\tau}$ - штрихом.

$$\begin{pmatrix} \dot{r} & \ddot{r} & \dots & \frac{d^k r}{dt^k} \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} r' & r'' & \dots & \frac{d^k r}{d\tau^k} \end{pmatrix}$$

$$r' = \dot{r} \frac{dt}{d\tau}$$

$$r'' = \ddot{r} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dot{r} \frac{d^2 t}{d\tau^2}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{dt}{d\tau} & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^k \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Для $\dot{r}, \ddot{r}, \dots, \frac{d^k r}{dt^k}$ и $r', r'', \dots, \frac{d^k r}{d\tau^k}$ после ортогонализации Грамма - Шмидта получим одно и то же $e_1, \dots, e_n$.

Кривая должна быть n - регулярной (пока что), $e_1, \dots, e_n$ - базис Френе.

$$\begin{pmatrix} \dot{r} & \ddot{r} & \dots & \frac{d^n r}{dt^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{V_1}{V_0} & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \frac{V_2}{V_1} & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{V_n}{V_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\parallel$
 R

$$V_j = V \left(\dot{r}, \ddot{r}, \dots, \frac{d^j r}{dt^j} \right)$$

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = |\dot{r}|$$

Формулы Френе: пусть у нас гладкая n - регулярная ориентированная кривая, s - натуральный параметр, $\frac{d}{ds}$ обозначаем штрихом.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= k_1 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= k_2 \mathbf{e}_3 - k_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}'_3 &= k_3 \mathbf{e}_4 - k_2 \mathbf{e}_2, \\ &\dots \\ \mathbf{e}'_{n-1} &= k_{n-1} \mathbf{e}_n - k_{n-2} \mathbf{e}_{n-2}, \\ \mathbf{e}'_n &= -k_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$k_1, \dots, k_{n-1}$ - некоторые гладкие функции, обобщенные кривизны.

В произвольной регулярной параметризации

$$k_j = \frac{V_{j+1} V_{j-1}}{V_j^2 V_1}, \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt}(\ast) = \begin{pmatrix} \ddot{r} & \ddot{r} & \dots & \frac{d^{n+1}r}{dt^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 & \dots & \dot{e}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \dot{R}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} & \ddot{r} & \dots & \frac{d^{n+1}r}{dt^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} & \dots & \frac{d^n r}{dt^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \ast \\ 1 & \ddot{\cdot} & & \vdots & \ast \\ 0 & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & \vdots & \ast \\ \vdots & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & 0 & \ast \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \ast \end{pmatrix}$$

$\parallel$
 A

$$B = (RA - R)R^{-1} = \begin{pmatrix} \ast & \dots & \dots & \ast & \ast \\ \lambda_1 & \ddot{\cdot} & & \vdots & \ast \\ 0 & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & \ast & \ast \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & \ast \end{pmatrix}$$

$$\lambda_j = \frac{V_j V_{j-1}}{V_j^2}$$

$$B = -B^T$$

Таким образом

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 & \dots & \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & \vdots \\ 0 & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & 0 \\ \vdots & \ddot{\cdot} & \ddot{\cdot} & 0 & -\lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Определение 4.1 (окончательное). Мы берем $n - 1$ - регулярную кривую и будем ортогонализировать $n - 1$ производную, а последний вектор добавим из соображений ориентации, чтобы $e_1, \dots, e_n$ - положительно ориентированный, ортонормированный.

Проекция кривой в $\mathbb{R}^3$ на трехгранник Френе

Пусть γ - 3-регулярная кривая в $\mathbb{R}^3$, $e_1 = v$, $e_2 = n$, $e_3 = b$.

x, y, z - система координат с началом в точке p и базисом e_1, e_2, e_3 .

$p = r(0)$, s - натуральный параметр.

$$r' = e_1$$

$$r'' = e_1' = ke_2$$

$$r''' = k'e_2 + ke_2' = k'e_2 - k^2e_1 + k\kappa e_3$$

$$r(s) = \left(s - \frac{k^2}{6}s^3, \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3, \frac{k\kappa}{6}s^3 \right) + O(s^4)$$

$x = 0$ - нормальная плоскость к γ в точке p .

$$z = \pm \frac{\sqrt{2\kappa}}{3\sqrt{k}} y^{\frac{3}{2}} + O(y^2) \quad (4.6)$$

$(0, 0)$ - точка возврата, проекция на плоскость $x = 0$ изображена на рис. 4.1.

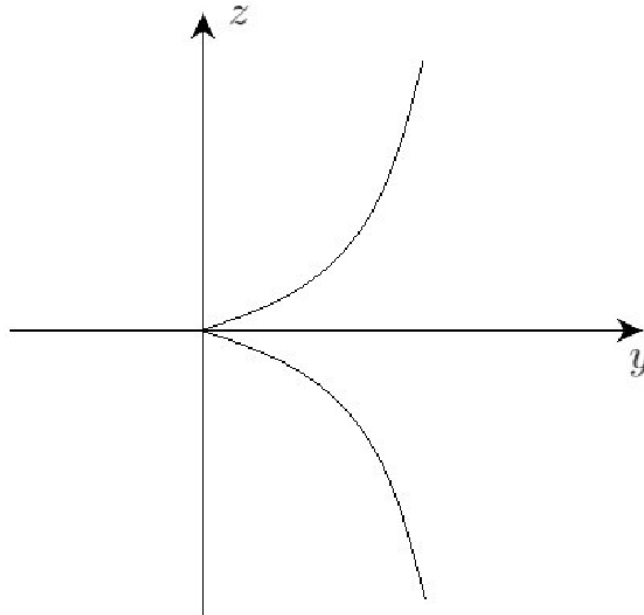


Рис. 4.1.

Предложение 4.1. *Нормальная плоскость - единственная проходящая через точку p , ортогональная проекция на которую имеет в точке p особенность.*

Доказательство. Любая другая проекция переводит r' не в 0. □

$y = 0$ - спрямляющая плоскость. Проекция имеет вид (рис. 4.2.)

$$z = \frac{k\kappa}{6} x^3 + o(x^3) \quad (4.7)$$

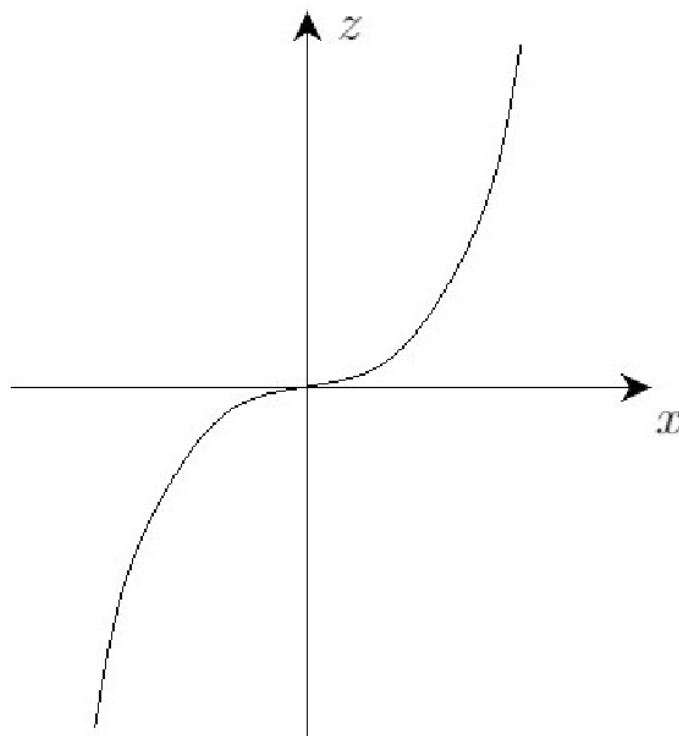


Рис. 4.2.

Предложение 4.2. *Спрямяющая плоскость - единственная, содержащая касательную в точке p , проекция на которую имеет в точке p точку спрямления.*

Доказательство. Проекция r'' на плоскость Π перпендикулярна r' . Она равна нулю тогда и только тогда, когда проекция вдоль r'' . $\square$

$z = 0$ - соприкасающаяся плоскость. Она характеризуется тем, что

$$\begin{aligned}\rho(q, \Pi) &= o(|p - q|^2) \\ y &= \frac{k}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}\tag{4.8}$$

Эволюта и эвольвента

Пусть $n = 2$, γ - 2 - регулярная кривая на $\mathbb{R}^2$.

Определение 4.2. *Эволюта γ - кривая, описываемая центром кривизны γ .*

Теорема 4.1. *Эволюта является огибающей семейства нормалей к γ (она касается всех прямых семейства).*

Доказательство. Центр кривизны:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= r + \frac{n}{k} \\ \tilde{r}' &= r' + \frac{n'}{k} - \frac{k'n}{k^2} = v - \frac{kv}{k} - \frac{k'}{k^2}n = -\frac{k'}{k^2}n\end{aligned}$$

$\square$

Определение 4.3. Эвольвента γ - кривая, описываемая неподвижной точкой прямой, катящейся по γ без проскальзывания.

Теорема 4.2. Следующие условия равносильны

- 1) γ' пересекает касательные к γ под прямым углом.
- 2) γ' - эвольвента γ .
- 3) γ - эволюта γ' .

Доказательство.

$$\begin{aligned}\tilde{r}(s) &= r(s) - r'(s)(s - s_0) \\ \tilde{r}' &= r' - r''(s - s_0) - r' = -r''(s - s_0) \\ r'' &\perp r'\end{aligned}$$

□



Лекция 5. Интеграл кривизны. Поверхности. Касательная плоскость

Кривые в евклидовом пространстве

Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру

Замкнутая кривая $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(a) = r(b), \dot{r}(a) = \dot{r}(b), \ddot{r}(a) = \ddot{r}(b)$$

Утверждение 5.1. γ - гладкая замкнутая координтированная кривая на плоскости, s - натуральный параметр, то

$$\int_{\gamma} k(s) ds = 2\pi m, \text{ где } m \in \mathbb{Z} \quad (5.1)$$

m называется числом вращения кривой γ .

Доказательство.

$$v = r' = (\cos \phi, \sin \phi)$$

$\phi(s)$ - гладкая функция.

$$v' = k \cdot n = \phi' \cdot (-\sin \phi, \cos \phi)$$

$$\phi' = k$$

$$2\pi\mathbb{Z} \ni \phi_{\text{конеч}} - \phi_{\text{нач}} = \int_{\gamma} k ds$$

□

Утверждение 5.2. Число вращения не изменяется при регулярной гомотопии.

Регулярная гомотопия:

$$r(t) \rightsquigarrow \tilde{r}(t)$$

$$F(t, \tau), \tau \in [0, 1]$$

$$F(t, 0) = r(t), F(t, 1) = \tilde{r}(t)$$

Если отображение непрерывно, то это гомотопия. Регулярная гомотопия, если F - гладкая и

$$\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$$
$$k = \frac{S_{or}(\dot{r}, \ddot{r})}{|\dot{r}|^3} \quad (5.2)$$

Пусть γ - замкнутая кусочно гладкая коориентированная кривая на плоскости без точек возврата

$$v_- = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} v$$



$$v_+ = \lim_{t \rightarrow t_0+0} v$$

Точка возврата:

$$\angle v_- v_+ = \pi$$

Внешний угол: $\angle v_- v_+$, если v_- и v_+ имеют ту же ориентацию, что и v , n в регулярной точке, $-\angle v_- v_+$ в противном случае (Рис. 5.1).

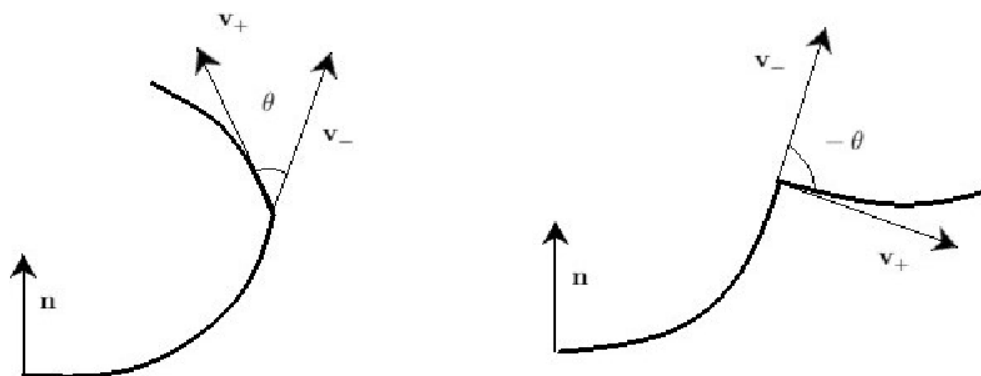


Рис. 5.1.

Утверждение 5.3. Пусть γ кусочно гладкая коориентированная кривая на плоскости, s - натуральный параметр, то

$$\int_{\gamma} k(s) ds + \sum_i \theta_i = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (5.3)$$

θ_i - внешние углы.

Доказательство. Рис. 5.2

$$\theta = \int k ds$$

□

γ - простая (не самопересекающаяся) кусочно гладкая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, коориентированная: n внутрь области

$$\int_{\gamma} k ds = \sum \theta_i - 2\pi \quad (5.4)$$

Поверхности в трехмерном пространстве

Определение поверхности. Локальные координаты. Способы задания

Определение 5.1. Простой кусок поверхности в $\mathbb{R}^3$ - подмножество в $\mathbb{R}^3$, гомеоморфное кругу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

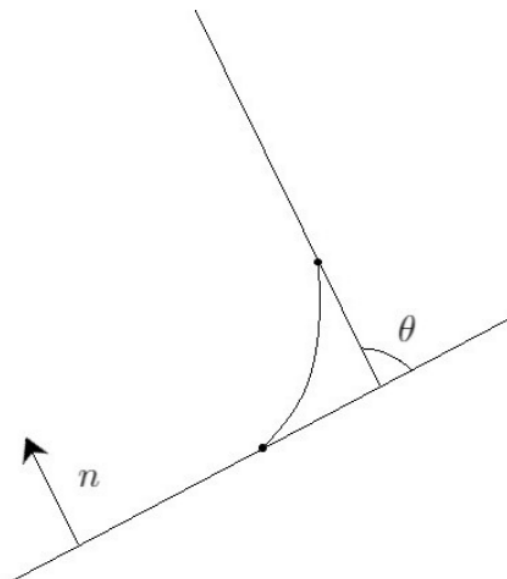


Рис. 5.2.

Определение 5.2. *Параметризация куска поверхности M - гомеоморфизм $r : \Omega \rightarrow M$, где $\Omega \in \mathbb{R}^2$, Ω - многоугольник.*

Определение 5.3. *Параметризация r регулярная, если она гладкая и dr имеет ранг 2 всюду в Ω .*

Определение 5.4. *Гладкая поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ - подмножество в $\mathbb{R}^3$ такое, что $\forall p \in \mathbb{R}^3 \exists \varepsilon > 0 : M \cap \overline{B_\varepsilon(p)}$ либо пусто, либо гладкий кусок поверхности (гладкий значит допускает регулярную параметризацию).*

Определение 5.5. *Точка $p \in M$ называется внутренней, если существует параметризация $r : \Omega \rightarrow N$ некоторого куска $N \subset M$ такая, что $N \ni p$ и $r^{-1}(p)$ - внутренняя точка Ω .*

∂M - множество точек M не являющихся внутренними и называется оно *край поверхности*.

Обозначения: $r(u^1, u^2)$ - параметризация поверхности

$$\frac{\partial r}{\partial u^i} \rightsquigarrow r_{u^i}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} \rightsquigarrow r_{u^i u^j}$$

Из теоремы о неявной функции следует

Утверждение 5.4. *Гладкую поверхность в окрестности любой внутренней точки можно задать уравнением $z = f(x, y)$, где x, y, z - переставленные x^1, x^2, x^3 (координаты в $\mathbb{R}^3$).*

Доказательство.

$$r(u^1, u^2) = (r^1(u^1, u^2), r^2(u^1, u^2), r^3(u^1, u^2))$$

Матрица частных производных имеет ранг 2. Пусть dr^1 и dr^2 линейно независимые. Локально $(u^1, u^2) \rightarrow (r^1(u^1, u^2), r^2(u^1, u^2))$ можно обратить.

$$u^1 = \psi^1(r^1, r^2)$$

$$u^2 = \psi^2(r^1, r^2)$$

$$(x^1, x^2) \mapsto r(\psi^1(x^1, x^2), \psi^2(x^1, x^2)) = (x^1, x^2, r(\psi^1(x^1, x^2), \psi^2(x^1, x^2)))$$

$$x = x^1$$

$$y = x^2$$

$$z(x, y) = r(\psi^1(x^1, x^2), \psi^2(x^1, x^2))$$

□

Следствие. Пусть u^1, u^2 и $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ - регулярные параметризации в окрестности $p \in M$, тогда $u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, $u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ - гладкие функции.

Пусть M - гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Определение 5.6. f называется дифференцируемым (гладким) в точке $p \in M$, если существует регулярная параметризация $r : \Omega \rightarrow M$ такая, что $r(\Omega) \ni p$ и $f \circ r$ дифференцируема (гладкая) в точке $r^{-1}(p)$ не зависимо от выбора параметризации.

Утверждение 5.5. Пусть $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ - некоторая гладкая функция:

$$F(p) = 0, \left. dF \right|_p \neq 0.$$

Тогда уравнение $F = 0$ задает кусок поверхности в некоторой окрестности точки p .

Любая поверхность локально задается таким образом.

Доказательство.

$$z = f(x, y) \rightsquigarrow f(x, y) - z = 0$$

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

$$dF = (f_x, f_y, -1) \neq 0$$

Без ограничения общности $\frac{\partial F}{\partial x^3} \neq 0$ следовательно по теореме о неявной функции локально

$$F = 0 \Leftrightarrow x^3 = f(x^1, x^2),$$

где f - некоторая гладкая функция.

□

Касательная плоскость к поверхности

Определение 5.7. Касательный вектор к поверхности M в точке x_0 - вектор скорости некоторой гладко параметризованной кривой в точке x_0 .

Пусть $r(u^1, u^2)$ - регулярная параметризация.

$$\frac{d}{dt}r(u^1(t), u^2(t)) = \dot{u}^1 r_{u^1} + \dot{u}^2 r_{u^2} \quad (5.5)$$

Множество касательных векторов - $\langle r_{u^1}, r_{u^2} \rangle$. Обозначается $T_{x_0}M$.

Аффинная касательная плоскость:

$$x_0 + \langle r_{u^1}, r_{u^2} \rangle \Big|_{x_0}$$

Утверждение 5.6. Аффинная касательная плоскость - единственная аффинная плоскость Π со свойством

$$\rho(x, \Pi) = o(|x - x_0|), \quad x \in M, \quad x \rightarrow x_0 \quad (5.6)$$

Можно выбрать систему координат x, y, z такую, что касательная плоскость задается уравнением $z = 0$, $x_0 = (0, 0, 0)$.

$$M : z = f(x, y)$$

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$r_x = (1, 0, f_x)$$

$$r_y = (0, 1, f_y)$$

следовательно

$$f_x \Big|_{x_0} = f_y \Big|_{x_0} = 0$$

$$f(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Из этого можно доказать утверждение.

$M : F(x^1, x^2, x^3) = 0$. Аффинная касательная плоскость в точке x_0 ($dF \Big|_{x_0} \neq 0$).

$$F_{x^1}(x^1 - x_0^1) + F_{x^2}(x^2 - x_0^2) + F_{x^3}(x^3 - x_0^3) = 0$$

"Внешняя точка зрения" на касательный вектор

$$\dot{u}^1 r_{u^1} + \dot{u}^2 r_{u^2}$$

"Внутренняя точка зрения"

$$r_{u^1} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial u^1}$$

$$r_{u^2} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial u^2}$$

$$\dot{u}^1 r_{u^1} + \dot{u}^2 r_{u^2} \rightsquigarrow (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$$

Лекция 6. Первая и вторая квадратичные формы. Главные кривизны

Поверхности в трехмерном пространстве

Квадратичные формы

Определение 6.1. Квадратичная форма (функция) на векторном пространстве V : функция вида $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$Q(v) = B(v, v), \quad (6.1)$$

где B - симметричная билинейная функция.

Если симметричная B существует, то она единственна

$$B(v, w) = \frac{Q(v + w) - Q(v) - Q(w)}{2} \quad (6.2)$$

$e_1, \dots, e_n$ - базис в V

$B \rightsquigarrow$ матрица $b_{ij} = B(e_i, e_j)$

Первая фундаментальная форма

$M \subset \mathbb{R}^3, V \in T_x M$

$$I(V) = (V, V) \quad (6.3)$$

u^1, u^2 - локальная система координат

$$u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$$

$$V^1 = \dot{u}^1, V^2 = \dot{u}^2$$

Базисные векторы: $\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}$ или r_{u^1}, r_{u^2} .

$$V = V^i r_{u^i}$$

$$(V, V) = (V^i r_{u^i}, V^j r_{u^j}) = g_{ij} V^i V^j = I(V), \quad (6.4)$$

где $g_{ij} = (r_{u^i}, r_{u^j})$.

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} (r_{u^1}, r_{u^1}) & (r_{u^1}, r_{u^2}) \\ (r_{u^2}, r_{u^1}) & (r_{u^2}, r_{u^2}) \end{pmatrix} -$$

матрица Грамма, матрица первой квадратичной формы.

$g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2)$ - риманова метрика на поверхности.

$$V \neq 0 \Rightarrow I(V) > 0$$

$$u^1, u^2 \rightsquigarrow \tilde{u}^1, \tilde{u}^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \cdot J_{u\tilde{u}}$$

$$\begin{aligned}(J_{u\tilde{u}})^i_j &= \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \\ J_{\tilde{u}u} &= J_{u\tilde{u}}^{-1} \\ G &\rightsquigarrow \tilde{G} \\ \tilde{G} &= J_{u\tilde{u}}^T G J_{u\tilde{u}} \\ \tilde{g}_{ij} &= g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \cdot \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}\end{aligned}$$

Длина кривой:

$$\begin{aligned}u^1 &= u^1(t), \quad u^2 = u^2(t) \\ r(t) &= r(u^1(t), u^2(t)) \\ L(\gamma) &= \int |\dot{r}| dt = \int |\dot{u}^1 r_{u^1} + \dot{u}^2 r_{u^2}| dt = \int \sqrt{g_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \dot{u}^1 \dot{u}^2} dt \quad (6.5)\end{aligned}$$

Площадь поверхности:

Неправильно: Приближим M кусочно-линейной поверхностью M_ε из треугольников.

$$\begin{aligned}\psi : M_\varepsilon &\rightarrow M \\ |\psi(x) - x| &< \varepsilon\end{aligned}$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и предела площади поверхности не существует.

Правильно:

- Требуем, чтобы угол между плоскостью грани, содержащей x и $T_{\psi(x)}M$ был мал.
- Угол между соседними гранями тупой

Тогда существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(M_\varepsilon)$ - площадь поверхности M .

Заменяем каждый криволинейный треугольник на аффинный, разделим квадрат на треугольники (Рис. 6.1), площадь параллелограмма, состоящего из двух треугольников:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 S(r_{u^1}, r_{u^2}) + o(\varepsilon^2) \\ g = \sqrt{\det G} = S(r_{u^1}, r_{u^2})\end{aligned}$$

Площадь поверхности:

$$S(M) = \int \sqrt{g} du^1 du^2 \quad (6.6)$$

Замечание 6.1.

$$I = g_{ij} du^i du^j$$

g_{ij} - функции от u^1, u^2

$$\begin{aligned}du^i(V) &= V^i \\ I(V) &= g_{ij} V^i V^j\end{aligned}$$

В некоторой литературе:

$$\begin{aligned}g_{11} &= E \\ g_{12} &= F \\ g_{22} &= G\end{aligned}$$

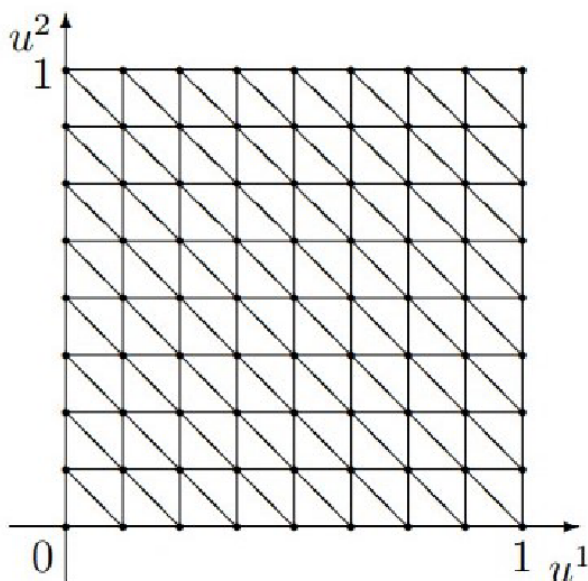


Рис. 6.1.

Вторая фундаментальная форма

u^1, u^2 - параметры.

$$n = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{|r_{u^1} \times r_{u^2}|} \quad (6.7)$$

Предположим, что мы выбрали вектор нормали, V - касательный вектор к кривой, содержащейся в поверхности

$$V = V^i r_{u^i}$$

$r(u^1, u^2)$ - параметризация поверхности.

$$\frac{d^2}{dt^2} r(u^1(t), u^2(t)) = r_{u^i u^j} V^i V^j + r_{u^i} \ddot{u}^i$$

$$V^i = \dot{u}^i$$

$$\left(\frac{d^2 r(u^1(t), u^2(t))}{dt^2}, n \right) = b_{ij} V^i V^j = II(V), \quad (6.8)$$

где $b_{ij} = (r_{u^i u^j}, n)$. Поверхность:

$$z = f(x, y)$$

$$f_x, f_y \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$n \Big|_{(0,0)} = (0, 0, 1)$$

$$r_{xx} = (0, 0, f_{xx})$$

$$r_{xy} = (0, 0, f_{xy})$$

$$r_{yy} = (0, 0, f_{yy})$$

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$2z = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Π_V - плоскость $x + \langle V, n \rangle$

Задача 6.1. $\Pi_V \cap M$ - гладкая кривая (по теореме о неявном отображении).

n - главная нормаль к γ_V в точке x .

k_V - кривизна γ_V в точке x , кривизна нормального сечения:

$$k_V = \frac{(\ddot{r}, n)}{|\dot{r}|^2} = \frac{II(V)}{I(V)} \quad (6.9)$$

Главные кривизны сечения

Существует базис такой, что

$$I \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$II \rightsquigarrow \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(II - \lambda I) = 0$$

Корни этой системы уравнений это k_1, k_2 . Если $k_1 \neq k_2$, то базис единственный с точностью до знаков. В $T_x M$ существует базис e_1, e_2 такой, что

$$I_x(V^i e_i) = (V^1)^2 + (V^2)^2$$

$$II_x(V^i e_i) = k_1(V^1)^2 + k_2(V^2)^2$$

k_1, k_2 - главные кривизны в точке x .

Векторы соответствующего базиса называются главными направлениями, в этом базисе наша поверхность записывается

$$2z = k_1 x^2 + k_2 y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Если $k_1, k_2 > 0$, то локально поверхность по одну сторону от касательной плоскости.

Если $k_1 \cdot k_2 < 0$, то касательная плоскость пересекает поверхность по паре дуг.

Лекция 7. Деривационные формулы Вайнгартена. Линейчатые и изометричные плоскости поверхности

Поверхности в трехмерном пространстве

Главные кривизны сечения

Утверждение 7.1 (формула Эйлера).

$$k_V = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi, \quad (7.1)$$

где $\phi = \angle V e_1$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} V &= V^1 e_1 + V^2 e_2 \\ I(V) &= (V^1)^2 + (V^2)^2 \\ II(V) &= k_1 (V^1)^2 + k_2 (V^2)^2 \\ \frac{II(V)}{I(V)} &= k_1 \left(\frac{V^1}{\sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2}} \right)^2 + k_2 \left(\frac{V^2}{\sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

□

W - конечномерное векторное пространство, две системы координат

	1-ая система координат	2-ая система координат
базис	$e_1, \dots, e_n$	$(\tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_n) = (e_1 \dots e_n) J$
вектор	X	$\tilde{X} = J^{-1} X$
билинейная форма	B	$\tilde{B} = J^T B J$
оператор	A	$\tilde{A} = J^{-1} A J$

G - билинейная форма, $\det G \neq 0$

$$C = G^{-1} B$$

$$\tilde{C} = \tilde{G}^{-1} \tilde{B} = (J^T G J)^{-1} J^T B J = J^{-1} G^{-1} B J = J^{-1} C J$$

следовательно C - оператор.

Пусть G , B симметричные, тогда C - симметричный (самосопряженный).

$$(G^{-1} B - \lambda E) = 0$$

Деривационные формулы Вайнгартена

Формулы Френе на $\mathbb{R}^2$, s - натуральный параметр, t - произвольная параметризация.

$$v' = kn$$

$$n' = -kv$$

$$\dot{n} = n' \cdot \dot{s} = -kv\dot{s} = -k\dot{s}r' = -k\dot{r}$$

$r(u^1, u^2)$ - параметризация поверхности

$$n = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{|r_{u^1} \times r_{u^2}|}$$

Утверждение 7.2.

$$n_{u^i} = -g^{jk}b_{ki}r_{u^j} \quad (7.2)$$

(b_{ij}) - матрица II , $(g^{ij}) = G^{-1}$, G - матрица I .

Доказательство.

$$\begin{aligned} n_{u^i} &= c_i^j r_{u^j} = c_i^1 r_{u^1} + c_i^2 r_{u^2} \\ (n_{u^i}, r_{u^j}) &= -(n, r_{u^j u^i}) = -b_{ij} \\ (n_{u^i}, r_{u^j}) &= (c_i^k r_{u^k}, r_{u^j}) = c_i^k g_{kj} \\ -B &= GC \\ C &= -G^{-1}B \\ c_j^i &= -g^{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

□

Следствие. $II \equiv 0$ следовательно поверхность является плоскостью.

$C = -G^{-1}B$ - оператор Вайнгартена.

Определение 7.1. Сферическое отображение $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, $x \mapsto n_x$ - нормаль в точке x .

$T_x M \parallel T_{\nu(x)} \mathbb{S}^2$, $d\nu$ - оператор Вайнгартена.

Инварианты C :

- Средняя кривизна

$$H = \text{tr } C = k_1 + k_2 \quad (7.3)$$

- Гауссова кривизна

$$K = \det C = k_1 k_2 \quad (7.4)$$

$N \subset M$ - круг, после отображения ν переходит в эллипс на сфере, полуоси которого пропорциональны $|k_1|$, $|k_2|$.

$$\frac{S(\nu(N))}{S(N)} = |K| + o(S(N))$$

Развертывающиеся поверхности

Определение 7.2. *Линейчатая поверхность*: существует параметр такой, что

$$r(u^1, u^2) = q(u^1) + w(u^1)u^2 \quad (7.5)$$

Определение 7.3. M и M' *изометричны*, если существует гладкая биекция $\phi : M \rightarrow M'$, сохраняющая длины всех кривых.

Равносильно:

$$d\phi_x : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} M' \text{ — изометрия.} \quad (7.6)$$

Равносильно: ϕ сохраняет I

$$\begin{aligned} M &: r(u^1, u^2) \\ M' &: \phi(r(u^1, u^2)) \\ M &: g_{ij}(u^1, u^2) du^i du^j \end{aligned}$$

Определение 7.4. *Развертывающаяся поверхность*:

- 1) Линейчатая поверхности
- 2) Локально изометрична куску плоскости

Теорема 7.1. $K \equiv 0$ тогда и только тогда, когда поверхность развертывающаяся.

Доказательство. Пусть $k_1 = k_2 = 0$ в некоторой окрестности точки x . Тогда в окрестности $II \equiv 0$ следовательно это кусок плоскости.

Пусть $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ в некоторой окрестности точки x_0 , e_1, e_2 - единичные векторы главных направлений, гладко зависит от точки.

$$\begin{aligned} r(u^1, u^2) \\ e_i = E_i^j r_{u^j} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \phi^i(0) = u_0^i \\ (\phi^i)' = E_1^i(\phi^1(s), \phi^2(s)) \end{cases} \rightsquigarrow \phi^1(s), \phi^2(s)$$

Смысл: параметризация кривой, у которой в каждой точке вектор скорости был e_1 .

$\psi^{1,2}(s, t)$ - решения.

$$\begin{cases} \psi^i(s, 0) = \phi^i(s) \\ \frac{d}{dt} \psi^i(s, t) = E_2^i(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \psi^1}{\partial s} & \frac{\partial \psi^1}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial s} & \frac{\partial \psi^2}{\partial t} \end{array} \right)_{s,t=0} = \left(\begin{array}{cc} E_1^1 & E_2^1 \\ E_1^2 & E_2^2 \end{array} \right)$$

невырождена в окрестности x_0 .

В окрестности x_0 :

$$\begin{aligned} u^1 &= \psi^1(s, t) \\ u^2 &= \psi^2(s, t) \end{aligned}$$

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s} \text{ при } t = 0$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial t} \text{ всюду}$$

$$s, t \rightarrow u^1, u^2$$

$$d\nu : e_2 \rightarrow 0 \quad e_1 \rightarrow k_1 e_1$$

$$n_{u^2} = k_2 r_{u^2} = 0$$

n не зависит от u^2

$$n_{u^1} = \lambda e_1$$

$$0 = (n_{u^2})_{u^1} = (n_{u^1})_{u^2} = \lambda_{u^2} e_1 + \lambda (e_1)_{u^2}$$

$$(e_1)_{u^2} \perp e_1 \Rightarrow (e_1)_{u^2} = 0 \Rightarrow$$

e_1 не зависит от u^2 .

$$e_2 = \pm e_1 \times n \Rightarrow e_2 \text{ не зависит от } u^2 \Rightarrow$$

$$r(u^1, u^2) = q(u^1) + u^2 e_2(u^1),$$

то есть наша поверхность линейчатая.



Лекция 8. Минимальные поверхности

Поверхности в трехмерном пространстве

Развертывающиеся поверхности

Продолжение доказательства.

$$r_{u^2 u^2} \equiv 0 \Rightarrow b_{22} \equiv 0$$

$$B = \begin{pmatrix} * & b_{12} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = 0 \Rightarrow \det B = 0 \Rightarrow b_{12} = 0$$

$$b_{12} = (r_{u^1 u^2}, n) = e_2'$$

$e_2' \perp e_2$, так как $|e_2| = 1, e_2' \perp n$

$$e_2' = \mu e_1, \mu = \mu(u^1), q' = e_1$$

$$r(u^1, u^2) = q(u^1) + u^2 e_2(u^1)$$

$$r_{u^1} = e_1 + u^2 \mu e_1 = (1 + u^2 \mu) e_1$$

$$r_{u^2} = e_2$$

$$I = (1 + u^2 \mu)^2 (du^1)^2 + (du^2)^2$$

Возьмем на плоскости кривую $\tilde{q}(s)$ с кривизной

$$k(s) = -\mu(s)$$

$$\tilde{e}_1 = \tilde{q}'$$

$\tilde{e}_2$ - нормаль к $\tilde{e}_1$

$$\tilde{e}_2' = -k \tilde{e}_1 = \mu \tilde{e}_1$$

Получили параметризацию плоскости с той же I . □

Случаи:

1) $\mu = 0$ - цилиндрическая поверхность

$$e_1(u^1)' = 0$$

2) $\mu' = 0, \mu \neq 0$ - коническая поверхность

$$\left(q - \frac{1}{\mu} e_2 \right)' = 0$$

3) $\mu' \neq 0, \mu \neq 0$

Линии кривизны и омбилические точки

Определение 8.1. Омбилическая точка: $k_1 = k_2$

$$\begin{aligned} |B - \lambda G| &= 0 \\ \begin{cases} (B - k_1 G)e_1 = 0 \\ |e_1| = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} (B - k_2 G)e_2 = 0 \\ |e_2| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $k_1 \neq k_2$ в некотором куске плоскости. Можем определить кривые, которые в каждой точке касаются либо e_1 , либо e_2 - эти линии называются *линии кривизны*.

$$\dot{q} = e_i \quad i = 1 \text{ при } 2$$

Утверждение 8.1. Кривая γ на поверхности является линией кривизны тогда и только тогда, когда нормали к γ заматают поверхность с $K \equiv 0$.

Доказательство. $q(s)$ - натуральная параметризация γ . Нормаль заматает поверхность

$$r(u^1, u^2) = q(u^1) + u^2 e(u^1)$$

$e(s) = n(q(s))$ - нормаль к исходной поверхности.

Условие $K = 0 \Leftrightarrow e' - \text{коллиниарен } q' \Leftrightarrow q' - \text{собственный вектор оператора Вайнгартена, то есть вектор главного направления.} \quad \square$

Теорема 8.1. Все точки омбилические тогда и только тогда, когда поверхность содержится либо в $\mathbb{S}^2$ либо $\mathbb{R}^2$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} II &= \lambda I, \quad \lambda = \lambda(u^1, u^2) \\ n_{u^i} &= (d\nu)(r_{u^i}) = -\lambda r_{u^i} \\ (n_{u^1})_{u^2} &= -(\lambda r_{u^1})_{u^2} = -\lambda_{u^2} r_{u^1} - \lambda r_{u^1 u^2} \\ (n_{u^1})_{u^2} &= (n_{u^2})_{u^1} = -\lambda_{u^1} r_{u^2} - \lambda r_{u^2 u^1} \\ \lambda_{u^2} r_{u^1} &= \lambda_{u^1} r_{u^2} \Rightarrow \\ \lambda_{u^1} &= \lambda_{u^2} = 0 \Rightarrow \\ \lambda &= \text{const} \\ \left(r + \frac{1}{\lambda} n\right)_{u^1} &= r_{u^1} + \frac{1}{\lambda} (-\lambda r_{u^1}) = 0 \\ r &= r_0 - \frac{1}{\lambda} n(u^1, u^2) \\ \lambda &= \text{const}, \quad |n| = 1 \end{aligned}$$

$\square$

Минимальные поверхности

$$2H = k_1 + k_2$$

$$k_\nu = k_1 \cos^2 \angle ve_1 + k_2 \sin^2 \angle ve_1$$

Среднее значение по $\angle ve_1 \in [0, \pi]$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi = \frac{1}{2}$$

Среднее значение

$$k_\nu = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Определение 8.2. Поверхность называется *минимальной*, если $\forall x \in M \exists U$ - окрестность точки x в M такая, что любая достаточно малая вариация M в U увеличивает площадь.

Теорема 8.2. Поверхность минимальная тогда и только тогда, когда $H \equiv 0$.

Доказательство.

$$r_\tau(u^1, u^2) = r(u^1, u^2) + \tau \phi(u^1, u^2) \cdot n(u^1, u^2)$$

$\phi \equiv 0$ вне U и на ∂U

$$(g_\tau)_{ij} = ((r_\tau)_{u^i}, (r_\tau)_{u^j})$$

$$g_\tau = \det((g_\tau)_{ij})$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} \int_U \sqrt{g_\tau} du^1 du^2 \right|_{\tau=0}$$

$$(r_\tau)_{u^i} = r_{u^i} + \tau(\phi_{u^i} \cdot n + \phi \cdot n_{u^i})$$

$$((r_\tau)_{u^1}, (r_\tau)_{u^2}) = (r_{u^1}, r_{u^2})(E + \tau\phi C) + o(\tau)$$

$$G_\tau = (E + \tau\phi C)^T G (E + \tau\phi C)$$

$$\det(E + \varepsilon C) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} C + o(\varepsilon)$$

$$\sqrt{g_\tau} = \sqrt{g}(1 + \tau\phi \operatorname{tr} C) + o(\tau) = \sqrt{g}(1 + 2\tau\phi H) + o(\tau)$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} \int_U \sqrt{g_\tau} du^1 du^2 \right|_\tau = 2 \int_U \sqrt{g} \phi H du^1 du^2 = 0$$

не зависит от ϕ тогда и только тогда, когда $H \equiv 0$. □

Лекция 9. Деривационные формулы Гаусса. Поверхности вращения. Теорема Менье

Теорема Менье

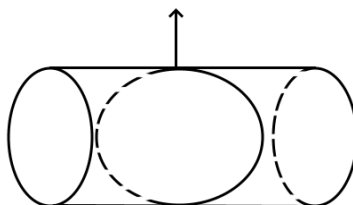


Рис. 9.1. Цилиндрическая поверхность с сечением, проведенным под углом

Пусть дана цилиндрическая поверхность с сечением, проведенным под углом (рис. 9.1). Заметим, что в сечении получается эллипс. Кривизна сечения в той точке, где сечение было перпендикулярно поверхности, определяется по теореме Эйлера:

$$k = k_1 \sin^2 \varphi + k_2 \cos^2 \varphi.$$

Здесь, напомним, k_1, k_2 — направления главных кривизн, а φ — угол с первым направлением.

Хотим вычислить кривизны в остальных точках.

Теорема 9.1. (Теорема Менье) Пусть γ — гладкая кривая на поверхности M . Тогда ее кривизна k в произвольной точке $x \in \gamma$ связана с нормальной кривизной k_v поверхности M по направлению вектора скорости v кривой γ в той же точке следующей формулой:

$$k \cos \theta = k_v,$$

где θ — угол между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой в точке x .

Доказательство. Пусть $q(s)$ — натуральная параметризация. Пусть m — нормаль к кривой γ , а n — нормаль к поверхности. Тогда

$$v = \dot{q},$$

$$mk = \ddot{q}.$$

Далее,

$$k_v \vec{n} = \left(\ddot{q}, \vec{n} \right) \vec{n} = \Pi \left(\vec{v} \right) \vec{n} = \left(k, \vec{m}, \vec{n} \right) \vec{n} = k \left(\vec{m}, \vec{n} \right) \vec{n} = k \cos \theta \vec{n}.$$

□

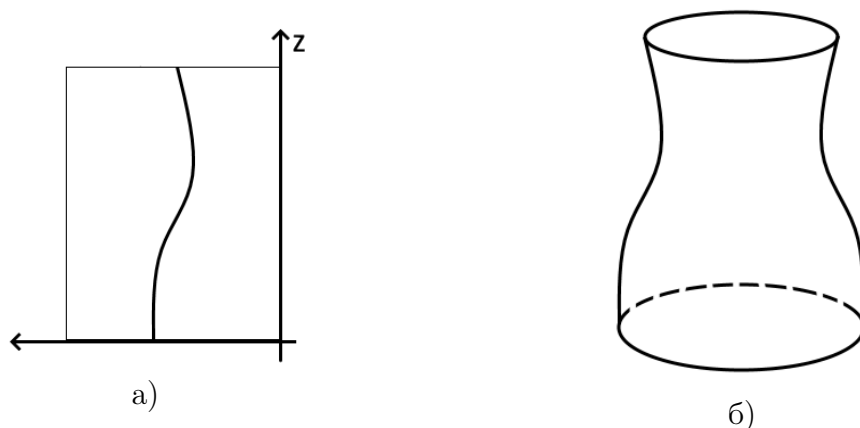


Рис. 9.2. Плоскость вращения

Поверхности вращения

Пусть дана плоская кривая (рис. 9.2, а) с координатами

$$X(\tau), Z(\tau).$$

Начнем вращение кривой вдоль оси z ($x = 0$) в пространстве. Получаем поверхность вращения

$$\begin{cases} x(\tau, \varphi) = X(\tau) \cos \varphi \\ y(\tau, \varphi) = X(\tau) \sin \varphi \\ z(\tau, \varphi) = Z(\tau) \end{cases}$$

(рис. 9.2, б).

Замечание 9.1. Если

$$f(X, Z) = 0,$$

то поверхность вращения задается как

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Отметим, что иногда также используется обозначения

$$\tau \rightarrow u^1, \quad \varphi \rightarrow u^2.$$

У поверхностей вращения есть *параллели*

$$u^1 = \text{const}$$

(рис. 9.3, а) и *меридианы*

$$u^2 = \text{const}.$$

Заметим, что для двух точек, лежащих на одной параллели, отрезок параллели, как правило, не будет кратчайшим путем, соединяющим их. Если же две точки лежат на меридиане, то кратчайший путь между ними лежит на нем же.

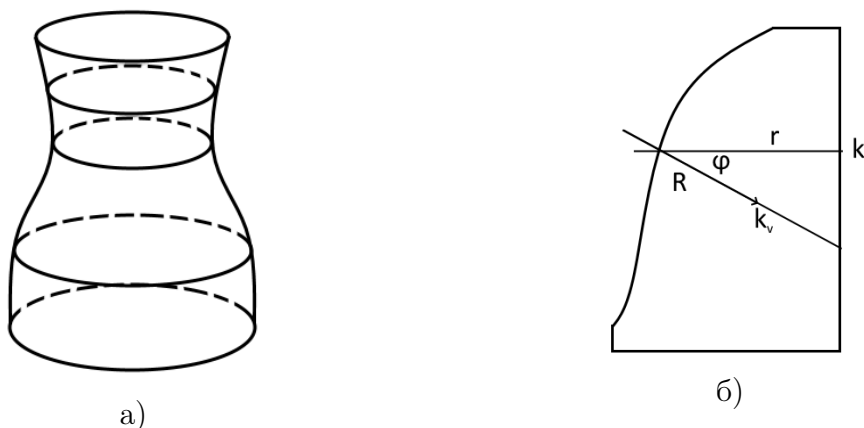


Рис. 9.3. Параллели и движение вдоль них

Утверждение 9.1. Кривизна вдоль меридиана является кривизной плоской кривой.

Рассмотрим теперь направление движения вдоль параллели (рис. 9.3, б). Воспользуемся теоремой Менье. Пусть k – кривизна сечения через нормаль, а k_v – кривизна сечения через касательный вектор к параллели. Тогда

$$k_v = k \cos \varphi,$$

$$r = R \cos \varphi,$$

$$k = \frac{1}{R}.$$

Деривационные формулы Гаусса

Пусть задана поверхность в трехмерном пространстве

$$\vec{r}(u^1, u^2).$$

Пусть задан базис

$$\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}, \vec{n}.$$

Тогда производные базисных векторов будут являться линейными комбинациями базисных векторов:

$$\frac{\partial \vec{r}_{u_1}}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_{u_2} + b_{11} \vec{n},$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{u_2}}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_{u_2} + b_{21} \vec{n},$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{u_1}}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_{u_2} + b_{12} \vec{n},$$

$$\frac{\partial \vec{r}_{u_2}}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_{u_1} + b_{22} \vec{n}.$$

Отметим, что

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

– II квадратичная форма.

Символы

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(u^1, u^2)$$

называются *символами Кристоффеля*.

Первое свойство символов Кристоффеля состоит в следующем:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Это свойство следует из того, что

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f.$$

Отсюда получаем, что символов Кристоффеля не 8, как может показаться, а ровно 6.

Тождества Кристоффеля

Ранее уже обсуждалось, что есть внешняя и внутренняя геометрия поверхности. Оказывается, что символы Кристоффеля определены в терминах внутренней геометрии.

Теорема 9.2. (Тождества Кристоффеля) Имеет место следующая формула

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (1)$$

Напомним, в (1) действует следующее правило, чтобы не писать $\sum_{l=1}^2$. Если в формуле есть индекс, встречающийся сверху и снизу, то (если специально не оговорено другое) по этому индексу подразумевается, но не пишется суммирование, предел которого равен размерности пространства.

Замечание 9.2. В (1), если

$$G = (g_{ij}),$$

то

$$G^{-1} = (g^{ij}).$$

Замечание 9.3. Γ_{ij}^k не являются тензорами.

Доказательство. (Теорема 9.2) Пусть

$$g_{ij} = (\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^j}).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial u^l} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^l} (\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^j}) = (\vec{r}_{u^i u^l}, \vec{r}_{u^j}) + (\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^j u^l}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\Gamma_{ik}^1 \vec{r}_{u^1} - \Gamma_{ik}^2 \vec{r}_{u^2} + b_{ik} \vec{n}, \vec{r}_{u^j} \vec{r}_{u^1} \right) + \left(\vec{r}_{u^i}, \Gamma_{jk}^1 \vec{r}_{u^1} + \Gamma_{jk}^2 \vec{r}_{u^2} + b_{jk} \vec{n} \right) = \\
 &= \Gamma_{ik}^1 \left(\vec{r}_{u^1}, \vec{r}_{u^j} \right) + \Gamma_{ik}^2 \left(\vec{r}_{u^2}, \vec{r}_{u^j} \right) + \Gamma_{jk}^1 \left(\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^1} \right) + \Gamma_{jk}^2 \left(\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^2} \right) = \\
 &= \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il},
 \end{aligned}$$

так как по определению

$$g_{ij} = \left(\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^j} \right).$$

Итак, получили следующую формулу:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il} = \Gamma_{ikl} + \Gamma_{jkl}.$$

Заметим, что переобозначение в правой части формулы выше используется чуть реже.

Воспользуемся теперь симметричностью символов Кристоффеля. Рассмотрим

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{jli} + \Gamma_{ijl} + \Gamma_{lij} - \Gamma_{lji} - \Gamma_{ilj} = 2\Gamma_{ijl}.$$

Умножим теперь обе части формулы выше на обратную матрицу. Получим

$$g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) = 2\Gamma_{ijl} g^{kl} = 2\Gamma_{ij}^k.$$

□

Задачи

Задача 9.1.

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = -g^{kj} \Gamma_{sk}^i - g^{is} \Gamma_{sk}^j.$$

Задача 9.2. Показать, что имеет место закон преобразования координат

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{pq}^r \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^r} \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^p} \frac{\partial^2 u^p}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j}.$$

Лекция 10. Совместность ОДУ, коммутатор векторных полей, теорема Бонне

Совместность обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Хотим классифицировать поверхности в пространстве так же, как мы классифицировали кривые – с помощью кривизны. Одной из проблем является невозможность выбрать нечто, что являлось бы аналогом натуральной параметризации. Еще одна проблема, которую мы обсудим, относится к области обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть задана область в пространстве $\mathbb{R}^{n+2}$ и определены функции

$$f_1, f_2 : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

то есть

$$\begin{aligned} f_1 &= (f_1^1, \dots, f_1^n), \\ f_2 &= (f_2^1, \dots, f_2^n). \end{aligned}$$

Будем рассматривать $\mathbb{R}^{n+2}$ как декартово произведение

$$\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2,$$

координаты в $\mathbb{R}^n$ обозначим как $x^1, \dots, x^n$, а координаты в $\mathbb{R}^2$ – u^1 и u^2 .

Пусть в рассматриваемой области в $\mathbb{R}^{n+2}$ выбрана точка (x_0, u_0) . Хотим искать n -мерную функцию $x(u^1, u^2)$, которая (для произвольного начального условия) удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} x(\underbrace{u_0^1, u_0^2}_{u_0}) &= x_0 \\ \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u^1} = f_1(x, u) \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} = f_2(x, u) \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) называется *совместной*, если она локально разрешима $\forall$ начальных данных.

Теорема 10.1. Система (2) совместна $\iff$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial f_1}{\partial u^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x^i} f_1^i + \frac{\partial f_2}{\partial u^1}. \quad (3)$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Заметим, что (3) представляет собой условие

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2 \partial u^1}.$$

Распишем

$$\frac{\partial}{\partial u^1} (f_2(x, u)) = \frac{\partial f_2}{\partial u^1} + \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^1}}_{=f_2}$$

– получили правую часть (3).

Левая часть (3) получается аналогично.

$\Leftarrow$ Пусть условие (3) выполнено. Решим систему (2). Для простоты считаем, что $u_0 = (0, 0)$.

1. Решим первое из уравнений (2) вдоль оси абсцисс:

$$\begin{cases} x(0, 0) = x_0 \\ \frac{\partial x(u^1, 0)}{\partial u^1} = f_1(x(u^1, 0), u^1, 0) \end{cases}$$

2. Для каждого u^1 решим

$$\begin{cases} x(u^1, 0) - \text{решение системы из п. 1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2}(u^1, u^2) = f_2(x(u^1, u^2), u^1, u^2) \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u^1} &= f_1(x, u) \text{ при } u^2 = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} &= f_2(x, u) \text{ всюду} \end{aligned}$$

Хотим, чтобы

$$\frac{\partial x}{\partial u^1} = f_1(x, u) \text{ при всех } u^2. \quad (4)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u^1} - f_1(x, u) \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^1} f_2(x, u) - \frac{\partial f_2}{\partial u^1} + \frac{\partial f_1}{\partial x^i} f_2^i - \frac{\partial f_2}{\partial x^i} f_1^i - \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} - \frac{\partial f_2}{\partial x^i} f_1^i = \frac{\partial f_2}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} - f_1^i \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что функция

$$g(u) = \frac{\partial x^i}{\partial u^1} - f_1^i$$

удовлетворяет

$$\begin{cases} g(0, u^2) \equiv 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u^2} = A_j^i g^j. \end{cases}$$

Отсюда

$$g \equiv 0.$$

Получаем, что (4) выполнено. □

Коммутатор векторных полей

Пусть теперь заданы гладкие функции

$$f_1^i(x, u) = V^i(x), f_2^i(x, y) = W^i(x)$$

(функции f_j^i не зависят от u^1 и u^2). Хотим решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u^1} = V(x) \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} = W(x) \end{cases} \quad (5)$$

Выведем¹ совместности для системы (5). Для этого возьмем $\partial/\partial u^2$ у первого уравнения системы и $\partial/\partial u^1$ у второго. Получим

$$\frac{\partial W}{\partial x^i} V^i - \frac{\partial V}{\partial x^i} W^i = 0. \quad (6)$$

Заметим, что левая часть (6) – векторное поле.

Определение 10.1. Векторным полем на поверхности M называется отображение, сопоставляющее

$$p \in M \mapsto V(p) \in T_p M$$

гладким образом.

В курсе дифференциальной геометрии рассматриваются гладкие векторные поля, то есть координаты векторов из векторного поля должны быть гладкими функциями от параметров поверхности u^1, u^2 .

Параметризация u^1, u^2 задает два векторных поля:

$$r_{u^1} \text{ и } r_{u^2}.$$

Иногда их записывают как

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \text{ и } \frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Векторное поле V при заданной параметризации – пара функций V^1 и V^2 ,

$$V = V^1 r_{u^1} + V^2 r_{u^2}.$$

Аналогично

$$W = W^i r_{u^i}.$$

Итак, векторное поле отображает

$$M \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Вычислим

$$dW(V) = \frac{\partial W^i}{\partial u^j} V^j r_{u^i} + W^i r_{u^i u^j} V^j. \quad (7)$$

¹Напомним, ранее условие совместности было выведено в общем виде. Нам будет проще в некоторых частных случаях выводить условие совместности отдельно, чтобы не держать в голове громоздкую формулу для общего вида.

Первое слагаемое в (7) является касательным вектором. Второе слагаемое сократится, если взять разность

$$dW(V) + dV(W) = \left(\frac{\partial W^i}{\partial u^j} V^j - \frac{\partial V^i}{\partial u^j} W^j \right) r_{u^i}.$$

Получаем формулу в левой части (6).

Определение 10.2. Пусть

$$V = V^i r_{u^i}, \quad W = W^j r_{u^j}$$

– векторные поля на поверхности M . *Коммутатором* $[V, W]$ называется векторное поле

$$[V, W] = \left(\frac{\partial W^i}{\partial u^j} V^j - \frac{\partial V^i}{\partial u^j} W^j \right) r_{u^i},$$

или, по-другому, можно записать

$$[V, W]^i = \frac{\partial W^i}{\partial u^j} V^j - \frac{\partial V^i}{\partial u^j} W^j.$$

Пусть даны векторные поля V и W на поверхности. Возникает **вопрос**: существует ли (можно ли подобрать) локальную систему координат u^1, u^2 такую, что

$$r_{u^1} = V, \quad r_{u^2} = W.$$

Ответ: такая локальная система координат $\exists$ тогда и только тогда, когда

1. V и W линейно независимы по каждой координате;
2. $[V, W] = 0$.

Восстановление по первой и второй квадратичным формам

Рассмотрим задачу восстановления поверхности по I и II квадратичным формам.

Напомним, кривую на плоскости (в пространстве) мы восстанавливали, если нам была известна зависимость кривизны (кручения) от натурального параметра.

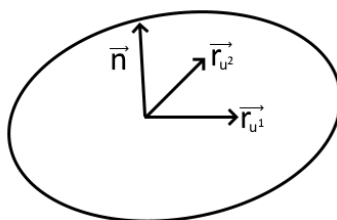


Рис. 10.1. Базис Френе

Восстановление поверхности естественным образом обобщает задачу восстановления кривой. Вспомним, как выглядит анализ базиса Френе (рис. 10.1). В каждой

точке поверхности у нас есть базис пространства, состоящий из двух касательных векторов r_{u^2} , r_{u^1} и одного нормального вектора n . Мы рассматривали производные этих векторов по обоим координатам:

$$(r_{u^1}, r_{u^2}, n)_{u^1} = (r_{u^1}, r_{u^2}, n) A_1,$$

$$(r_{u^1}, r_{u^2}, n)_{u^2} = (r_{u^1}, r_{u^2}, n) A_2.$$

Напомним,

$$r_{u^1 u^1} = \Gamma_{11}^1 r_{u^1} + \Gamma_{11}^2 r_{u^2} + b_{11} n,$$

$r_{u^2 u^1}$ аналогично,

$$r_{u^1} = -g^{1i} b_{i1} r_{u^1} - g^{2i} b_{i1} r_{u^2}.$$

Поэтому

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{21}^1 & -g^{1i} b_{i1} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{21}^2 & -g^{2i} b_{i1} \\ b_{11} & b_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Аналогично,

$$A_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -g^{1i} b_{i2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -g^{2i} b_{i2} \\ b_{11=2} & b_{21=2} & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Напомним,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s} \right). \quad (10)$$

Перейдем теперь к вопросу восстановления поверхности по заданным квадратичным формам. Обозначим

$$X = (r_{u^1}, r_{u^2}, n)$$

– матрица 3×3 . Нам нужно уметь решать систему

$$\begin{cases} X_{u^1} = X A_1 \\ X_{u^2} = X A_2 \end{cases} \quad (11)$$

Здесь

$$A_i = A_i(u^1, u^2).$$

Выведем *условие совместности*, взяв $\partial/\partial u^2$ от первого уравнения (11) и $\partial/\partial u^1$ – от второго. Тогда

$$X A_2 A_1 + X \frac{\partial A_1}{\partial u^2} = X A_1 A_2 + X \frac{\partial A_2}{\partial u^1}.$$

Сокращая, получаем условие совместности

$$\frac{\partial A_2}{\partial u^1} - \frac{\partial A_1}{\partial u^2} + A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0. \quad (12)$$

Теорема Бонне

Вернемся к вопросу восстановления поверхности по квадратичным формам. Отметим, что следующая теорема в данной формулировке² не отсекает случай, когда поверхность сама с собой пересекается.

Теорема 10.2. (Бонне) Пусть

$$G = (g_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

– набор гладких функций от $u^1, u^2, i, j = 1, 2$,

$$g_{12} = g_{21}, \quad b_{12} = b_{21},$$

$G > 0$ (необходимо и достаточно потребовать, чтобы $g_{11} > 0$ и $\det G > 0$). Пусть точка $(u^1, u^2) \in \Omega$, где Ω – некоторая область, гомеоморфная кругу.

Тогда

1. Регулярная параметризованная поверхность $r(u^1, u^2)$ такая, что

$$I = g_{ij} du^i du^j, \quad II = b_{ij} du^i du^j,$$

существует $\iff g_{ij}, b_{ij}$ удовлетворяют (12) для A_1 (8), A_2 (??) и Γ_{ij}^k (10).

2. Если такая поверхность $\exists$, то она единственна с точностью до движения.

Доказательство. $\Rightarrow$ Напомним, мы выяснили, что

$$X = (r_{u^1}, r_{u^2}, n)$$

удовлетворяет системе уравнений (11). Заметим, что эта система линейна, поэтому, если X – решение системы (11), то $C \cdot X$ также будет удовлетворять этой системе.

Доказательство будет продолжено на следующей лекции. $\square$

²Во избежание этого случая формулировку пришлось бы усложнить.

Лекция 11. Теорема Бонне. Уравнения Гаусса, Гаусса-Кодацци, Петерсона-Майнарди-Кодацци. Поверхности постоянной отрицательной кривизны

Доказательство теоремы Бонне (продолжение)

Напомним основные равенства, на которые мы будем ссылаться далее. Во-первых,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} g_{ip} \Gamma_{jk}^p + g_{pj} \Gamma_{ik}^p, \quad (13)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i,$$

которые равносильны тому, что

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ip} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^p} \right).$$

Во-вторых,

$$(r_{u^1}, r_{u^2}, n)_{u^i} = (r_{u^1}, r_{u^2}, n) A_i,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_{1i}^1 & \Gamma_{2i}^1 & -\gamma^{1p} b_{pi} \\ \Gamma_{1i}^2 & \Gamma_{2i}^2 & -\gamma^{2p} b_{pi} \\ b_{1i} & b_{2i} & 0 \end{pmatrix}$$

Наконец, напомним условие совместности:

$$\frac{\partial A_2}{\partial u^1} - \frac{\partial A_1}{\partial u^2} + A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0. \quad (14)$$

Будем считать, что область Ω из формулировки теоремы (10.2) – это квадрат, содержащий начало координат. Напомним, в прошлый раз необходимость пункта 1.

Доказательство. (Теорема 10.2)

⇐ Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} r_{u^1} = v_1 \\ r_{u^2} = v_2 \\ (v_1, v_2, n)_{u^i} = (v_1, v_2, n) A_i \end{cases} \quad (15)$$

Кроме того, заданы начальные условия (для простоты считаем начальной точкой начало координат)

$$r(0, 0), \quad v_1(0, 0), \quad v_2(0, 0), \quad n(0, 0) \quad (16)$$

такие, что при $(u^1, u^2) = (0, 0)$ выполнено

$$(v_i, v_j) = g_{ij}, \quad v_i \perp n, \quad i = 1, 2.$$

С такими ограничениями свобода выбора начальных условий – только движения $\mathbb{R}^3$. Отсюда $\exists!$ решение, если уравнения совместны.

Сначала решим систему

$$(v_1, v_2, n)_{u^i} = (v_1, v_2, n) A_i.$$

Эта система совместна в силу условия совместности (14).

У нас остается два уравнения:

$$\begin{cases} r_{u^1} = v_1 \\ r_{u^2} = v_2 \end{cases} \quad (17)$$

Заметим, что

$$(v_i)_{u^j} = \Gamma_{ij}^k v_k + b_{ij} n.$$

Формула в правой части симметрична по перестановке $i \leftrightarrow j$. Но

$$(v_1)_{u^2} = (v_2)_{u^1}$$

– условие совместности для уравнений (17).

Итак, исходная система (15) с начальными условиями (16) имеет решение, причем решение распространяется на всю область Ω .

Проверим, верно ли, что

$$(r_{u^i}, r_{u^j}) = g_{ij}, \quad (18)$$

$$(r_{u^i u^j}, n) = b_{ij}. \quad (19)$$

Рассмотрим $\tilde{G}$ – матрицу Грама r_{u^1} , r_{u^2} и n :

$$\tilde{G} = (v_1, v_2, n)^T (v_1, v_2, n).$$

Эта матрица Грама удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{u^i} &= (v_1, v_2, n)_{u^1}^T (v_1, v_2, n) + (v_1, v_2, n)^T (v_1, v_2, n) u^1 = \\ &= A_i^T \tilde{G} + \tilde{G} A_i. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Тогда

$$A_i^T \hat{G} + \hat{G} A_i = \hat{G}_{u^i} \quad (21)$$

– это (13).

Получаем, что $\hat{G}$ и $\tilde{G}$ удовлетворяет одному и тому же уравнению (21). Кроме того, при $u^1 = u^2 = 0$

$$\hat{G} = \tilde{G}. \quad (22)$$

Отсюда получаем, что (22) выполняется всюду.

Итак, получили, что (18) верно. Кроме того,

$$r_{u^i u^j} = (v_i)_{u^j} = \Gamma_{ij}^k v_k + b_{ij} n,$$

откуда получаем (19). □

Уравнение Гаусса – Кодацци

Для $\hat{G}$ – матрицы (20) – верно

$$\hat{G}_{u^i} = A_i^T \hat{G} + \hat{G} A_i$$

в силу тождеств Кристоффеля.

Лемма 11.1. Матрица

$$S = \hat{G} \left(\frac{\partial A_2}{\partial u^1} - \frac{\partial A_1}{\partial u^2} + A_1 A_2 - A_2 A_1 \right)$$

кососимметрична.

Доказательство. Распишем

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial (\hat{G} A_2)}{\partial u^1} - \hat{G}_{u^1} A_2 - \frac{\partial (\hat{G} A_1)}{\partial u^2} + \hat{G} A_1 A_2 - \hat{G} A_2 A_1 = \\ &= \frac{\partial (\hat{G} A_2)}{\partial u^1} - \frac{\partial (\hat{G} A_1)}{\partial u^2} - A_1^T \hat{G} A_2 - \hat{G} A_1 A_2 + A_2^T \hat{G} A_1 + \hat{G} A_2 A_1 + \hat{G} A_1 A_2 - \hat{G} A_2 A_1 = \\ &= \frac{\partial (\hat{G} A_2)}{\partial u^1} - \frac{\partial (\hat{G} A_1)}{\partial u^2} - A_1^T \hat{G} A_2 - A_2^T \hat{G} A_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$S + S^T = \frac{\partial (\hat{G} A_2 + A_2^T \hat{G})}{\partial u^1} - \frac{\partial (\hat{G} A_1 + A_1^T \hat{G})}{\partial u^2} = (\hat{G}_{u^2})_{u^1} - (\hat{G}_{u^1})_{u^2} = 0.$$

□

Итак, из 9 уравнений системы нам надо смотреть только 3. Рассмотрим их отдельно.

Уравнение Гаусса, теорема Гаусса

Рассмотрим уравнение

$$S_{12} = 0.$$

Отсюда

$$g_{1p} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^p}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^p}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^p \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^p \Gamma_{21}^s \right) - b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21} = 0.$$

Заметим, что

$$g_{1p} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^p}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^p}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^p \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^p \Gamma_{21}^s \right)$$

зависит только от g_{ij} . Получаем, что определитель II квадратичной формы можно выразить через I.

Тогда гауссова кривизна равна

$$K = \frac{\det B}{\det G} = \frac{1}{g} g_{1p} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^p}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^p}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^p \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^p \Gamma_{21}^s \right).$$

Это утверждение называется *теоремой Гаусса*.

Отсюда можно сделать вывод, что гауссова кривизна сохраняется при изометриях поверхностей.

Уравнения Петерсона – Майнарди – Кодацци

Рассмотрим уравнения

$$S_{31} = 0 \text{ и } S_{32} = 0.$$

Получаем уравнения *Петерсона – Майнарди – Кодацци*

$$\begin{aligned} \partial b_{12}/\partial u^1 - \partial b_{11}/\partial u^2 + b_{p1} \Gamma_{12}^p - b_{p2} \Gamma_{11}^p &= 0 \\ \partial b_{22}/\partial u^1 - \partial b_{21}/\partial u^2 + b_{p1} \Gamma_{22}^p - b_{p2} \Gamma_{21}^p &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Поверхности с гауссовой кривизной $K = \text{const} < 0$

Рассмотрим важный частный случай, в котором уравнения (23) имеют более простой вид.

При гомотетии плоскости

$$\begin{aligned} r &\mapsto \lambda r, \\ k &\mapsto \frac{k}{\lambda}, \\ K &\mapsto \frac{k}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Поэтому мы можем рассматривать только случай $K = -1$.

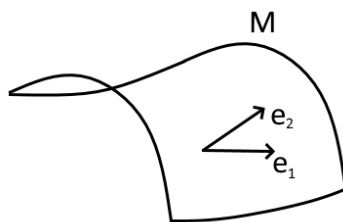


Рис. 11.1. Поверхность с $K < 0$

Так как гауссова кривизна отрицательна, рассматриваемая поверхность M будет иметь вид (рис. 11.1). Для $\forall p \in M \exists e_1, e_2$ такие, что

$$\Pi(e_1) = \Pi(e_2) = 0.$$

Напомним, такие вектора называются *асимптотическими направлениями*. $\exists$ гладкие векторные поля (локально) такие, что

$$\Pi(e_1) = \Pi(e_2) = 0,$$

$$I(e_1) = I(e_2) = 1.$$

Здесь e_1, e_2 линейной независимы. А priori

$$[e_1, e_2] \neq 0.$$

Определение 11.1. Асимптотической называется линия γ на поверхности уровня $K < 0$, у которой в каждой точке вектор скорости является асимптотическим.

Можно добиться, чтобы

$$\begin{aligned} r_{u^1} &= e_1 \text{ при } u^2 = 0, \\ r_{u^2} &= e_2 \quad \forall u^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

При $u^2 = 0$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm & 0 \end{pmatrix}$$

Отметим, что можно ограничиться знаком «+» для элементов B при $u^2 = 0$ (если это не так, мы можем поменять координаты).

Воспользуемся тем, что $K = -1$. Тогда

$$b_{12} = \sqrt{g},$$

где

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g_{11} - g_{12}^2.$$

Тогда

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \sqrt{g} \\ \sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}$$

Перейдем к уравнениям (23). Пусть g_{12} – известная функция. Перепишем уравнения для нашего частного случая:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + b_{11}\Gamma_{12}^1 - b_{12}\Gamma_{11}^1 + b_{12}\Gamma_{12}^2 &= 0, \\ -\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^2} + b_{11}\Gamma_{22}^1 + b_{12}\Gamma_{22}^2 - b_{12}\Gamma_{21}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Найдем в уравнениях выше все производные

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \text{ и } \frac{\partial b_{11}}{\partial u^1}.$$

Во-первых, первое слагаемое в (24) раскрывается как

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}.$$

Далее,

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}g^{1p} \left(\frac{\partial g_{1p}}{\partial u^2} + \frac{\partial p_{2p}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^p} \right)$$

– в этой формуле нет производных от b_{11} . Аналогично в последнем слагаемом (24) таких производных нет. Далее,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{1p} \left(\frac{\partial g_{1p}}{\partial u^1} + \frac{\partial p_{1p}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^p} \right).$$

Итак, все искомые производные из (24) запишутся как

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = 0,$$

так как g^{11} – элемент обратной к G матрицы,

$$g^{11} = \frac{1}{g}.$$

Итак, уравнения Петерсона – Майнарди – Кодацци на g_{11} и b_{11} – ОДУ вида

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \dots, \quad \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} = \dots,$$

так как все производные от g_{11} и b_{11} по u^2 сокращаются. Получение точного вида уравнений оставляется в качестве упражнений.

Проверим, не являются ли функции

$$g_{11} \equiv 1 \text{ и } b_{11} \equiv 0$$

решением (и, следовательно, единственным решением). Оказывается, что это действительно так.

Итак, у нас g_{12} – произвольная функция,

$$g_{11} = g_{22} = 1,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ \sqrt{g} & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = 1 - g_{12}^2.$$

Утверждается, что это и есть решение уравнений Петерсона – Майнарди – Кодацци. Напомним тождества Кристоффеля:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ip} \left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^p} \right).$$

Кроме того, напомним, что

$$g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{g_{12}}{g}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0.\end{aligned}$$

Проверим, что наше решение удовлетворяет первому из уравнений, то есть (24):

$$-\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \sqrt{g} \frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0.$$

Аналогично для второго из уравнений.

Отсюда получаем, что на некотором кусочке поверхности наши формы имеют почти стандартный вид:

$$I = du^1 du^1 + du^2 du^2 + \underbrace{2g_{12} du^1 du^2}_{\text{пока что произвольная ф-я}},$$

$$II = 2\sqrt{g} du^1 du^2.$$

Лекция 12. Поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Геодезические. Теорема Клеро

Вид первой и второй квадратичной формы на поверхностях отрицательной гауссовой кривизны



Рис. 12.1. Чебышевская и прямоугольная координатные сетки

Напомним, на прошлой лекции рассматривали поверхности с $K < 0$ (для простоты положили $K = -1$). В окрестности любой достаточно малой точки мы можем подобрать систему координат так, что координатная сетка будет состоять из асимптотических линий. При этом II квадратичная форма будет иметь вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

I квадратную форму

$$G = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

можно сделать такой, что базисные векторы будут единичной длины. Здесь

$$b_{12} = \sqrt{g}.$$

Заметим, что

$$g = 1 - g_{12}^2 = b_{12}^2.$$

Тогда

$$g_{12}^2 + b_{12}^2 = 1.$$

Тогда можем обозначить

$$g_{12} = \cos \varphi, \quad b_{12} = \sin \varphi,$$

где φ – угол между координатными линиями (рис. 12.1, а). Координатные линии прямоугольной сетки (рис. 12.1, б) можно изометрично отобразить в координатные линии рассматриваемой сетки. Для такой «изогнутой» сетки I квадратичная форма будет иметь вид (25). Такие (рис. 12.1, а) координатные сетки называются *чебышевскими сетями*.

Теорема 12.1. Если $K \equiv -1$, в окрестности $\forall$ точки $\exists$ система координат u^1, u^2 , в которой

$$I = du^1 du^1 + du^2 du^2 + 2 \cos \varphi du^1 du^2,$$

$$II = 2 \sin \varphi du^1 du^2,$$

где φ – некоторая гладкая функция.

Поверхности с $K = -1$, соответствующие решению Гордон-уравнения

Напомним символы Кристоффеля, которые мы выписали в прошлый раз:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{g_{12}}{g},$$

остальные символы Кристоффеля равны 0. Воспользуемся тем, что

$$g_{12} = \cos \varphi, \quad g = \sin^2 \varphi.$$

Получим

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \varphi_{u^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = \operatorname{ctg} \varphi \varphi_{u^2}.$$

Вычислим гауссову кривизну, воспользовавшись формулой

$$K = \frac{g_{1p}}{g} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^p}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^p}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^p \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^p \Gamma_{21}^s \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 \right) + \frac{g_{12}}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right) = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \left(-\frac{\varphi_{u^2}}{\sin \varphi} \right) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial u^1} (\operatorname{ctg} \varphi \cdot \varphi_{u^2}) \right) = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\varphi_{u^1 u^2} \left(-\frac{1}{\sin^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \right) + \varphi_{u^2} \varphi_{u^1} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \right). \end{aligned}$$

Итак, получаем, что

$$K = -\frac{\varphi_{u^1 u^2}}{\sin \varphi}.$$

Получаем, что поверхности с $K \equiv 1 \iff$ решения уравнения sin-Гордона³

$$\varphi_{u^1 u^2} = \sin \varphi. \quad (26)$$

Обсудим, насколько однозначно это соответствие. Система координат u^1, u^2 выбиралась относительно некоторой точки. Который из двух векторов был u^1 , а какой – u^2 , выбиралось произвольно (то есть можем их менять местами). Кроме того, можем обращать знак и сдвигать сетку:

$$u^1, u^2 \mapsto \pm u^1 + \operatorname{const}, \pm u^2 + \operatorname{const}.$$

Пример 12.1. Функция

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} e^{u^1 + u^2}$$

– сфера Бельтрами (рис. 12.2) – удовлетворяет уравнению (26).

³Как правило, переменные берутся другими:

$$t = u^1 + u^2, \quad s = u^1 - u^2.$$

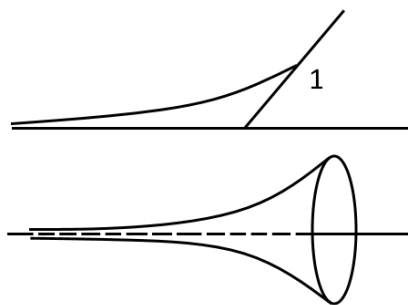


Рис. 12.2. Сфера Бельтрами

Геометрическая кривизна

Напомним следующий факт. Пусть дана кривая γ на поверхности M с параметризацией

$$r(u^1, u^2).$$

Пусть

$$u^1(t), u^2(t)$$

– натуральная параметризация γ . Рассмотрим в произвольной точке x этой кривой вектор ускорения. Его нормальная составляющая зависит от скорости и от поверхности.

Рассмотрим тангенциальную составляющую вектора скорости.

Определение 12.1. Вектор геодезической кривизны в точке $x \in \gamma$ – проекция главной нормали к γ в точке x на $T_x M$. Обозначение: K_g .

Абсолютная величина $|K_g|$ называется геодезической кривизной.

По теореме Пифагора,

$$k_g^2 + k_v^2 = k^2,$$

где k_v – кривизна нормального сечения вдоль вектора скорости.

Определение 12.2. Кривая γ называется геодезической, если

$$k_g = 0$$

во всех точках.

Утверждение 12.1. γ – геодезическая $\iff$ вектор главной нормали к γ в каждой точке $x \in \gamma$ совпадает с нормалью к M в точке x (с точностью до знака).

Пример 12.2. 1. Прямая на любой поверхности (например, однополостный гиперболоид, рис. 12.3, а).

2. Меридианы на поверхности вращения (рис. 12.3, б).

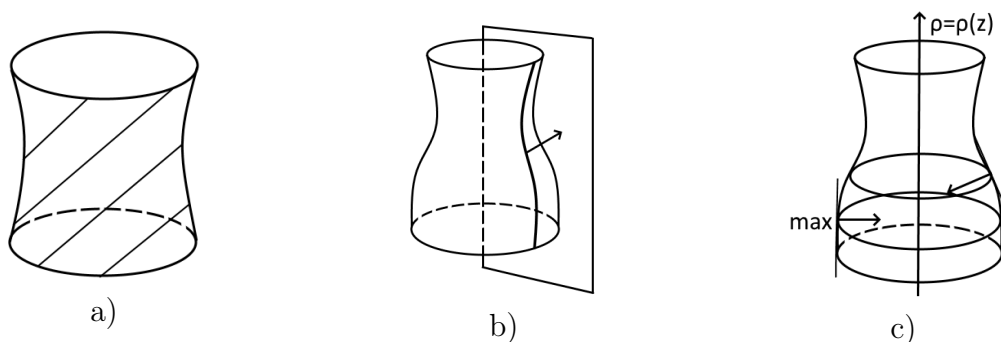


Рис. 12.3. Примеры геодезических: а) прямая; б) меридиан; в) параллели (с $\rho' = 0$)

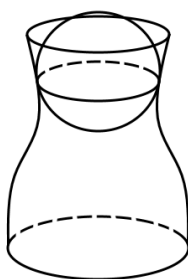


Рис. 12.4. Касание шара и поверхности вращения

3. Зададим параллели поверхности вращения как $\rho = \rho(z)$, где z – ось (рис. 12.3, в). В общем случае параллели не являются геодезическими, кроме случаев $\max \rho$ и $\min \rho$, то есть параллели с

$$\rho'(z) = 0.$$

Заметим следующее обстоятельство, следующее из определения. Пусть на поверхности M задана геодезическая γ . Рассмотрим другую поверхность M' , которая касается первой вдоль геодезической. Тогда γ – геодезическая на $M \iff \gamma$ – геодезическая на M' . Более общее утверждение:

$$\vec{k}_g(\text{отн. } M) = \vec{k}_g(\text{отн. } M').$$

Этот факт удобно применять, например, в следующем случае. Пусть дана поверхность вращения и надо выяснить геодезическую кривизну какой-то ее параллели. Эту кривизну можно поместить на сферу, которая коснется поверхности вращения (рис. 12.4). В дальнейшем мы еще воспользуемся этим приемом.

Теорема Клеро

Рассмотрим поверхность вращения в сферических координатах z, ρ, φ . Угол между геодезической на поверхности вращения и параллели обозначим α .

Теорема 12.2. (Клеро)

$$\rho \cos \alpha = \text{const}$$

вдоль $\forall$ геодезической.

Доказательство. Пусть $q(s)$ – натуральная параметризация кривой,

$$q = q_1 + q_2,$$

где q_1 – параллельная оси z составляющая, а $q_2 \perp$ оси z .

Направляющий вектор параллели – это $[q_1, q_2]$. Так как параметризация натуральна,

$$|q'| = 1,$$

откуда

$$q' \perp q''.$$

Из условия геодезической

$$q'' \perp [q_1, q_2].$$

Далее,

$$\rho \cos \alpha = |q_2| (q', [q_1, q_2]) / [q_1, q_2] = \frac{(q', q_1, q_2)}{|q_1|} = \left(q', \frac{q_1}{|q_1|}, q_2 \right),$$

$$(\rho \cos \alpha)' = \left(q'', \frac{q_1}{|q_1|}, q_2 \right) + \left(q', \left(\frac{q_1}{|q_1|} \right)', q_2 \right) + \left(q', \frac{q_1}{|q_1|}, q_2' \right) + \left(q', \frac{q_1}{|q_1|}, q_2' \right) = 0,$$

так как все четыре слагаемых равны 0. $\square$

Уравнения геодезических

Пусть $r(u^1, u^2)$ – параметризация поверхности и

$$u^1(t), \quad u^2(t)$$

– кривая на ней. Предположим, что t – натуральный параметр. Будем рассматривать

$$\frac{d^2}{dt^2} r(u^1(t), u^2(t)) = \dot{u}^i \dot{u}^j r_{u^i u^j} + \ddot{u}^i r_{u^i}. \quad (27)$$

Здесь и в дальнейшем будем опускать в записи зависимость r от u^i и u^i от t , иначе формулы будут получаться слишком громоздкими. Отметим, что первая сумма в правой части (27) содержит четыре слагаемых, так как $i, j = 1, 2$. Воспользовавшись производными формулами, запишем далее

$$(27) = \left(\dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k + \ddot{u}^k \right) r_{u^k} + b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j n.$$

Утверждение 12.2. Вектор геодезической кривизны равен

$$\vec{k}_g = \left(\dot{u}^i \dot{u}^j \ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \right) r_{u^k}. \quad (28)$$

Отсюда геодезическая кривизна равна

$$k_g^2 = \left(\ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \right) \left(\ddot{u}^l + \Gamma_{ps}^l \dot{u}^p \dot{u}^s \right) g_{kl}.$$



Заметим, что в коэффициентах разложения в (28) не используется II квадратичная форма. Они полностью выражены через кривую, записанную в локальных координатах, и символы Кристоффеля, которые выражаются через I квадратичную форму. Это значит, что для определения (28) совершенно неважно, как поверхность расположена в пространстве.

Следствие. Геодезические кривизны сохраняются при изометриях поверхностей.

Утверждение 12.3. (A) $(u^1(t), u^2(t))$ – геодезическая и t – параметр, пропорциональный натуральному, $\iff$

$$(B) \quad \ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0.$$

Уравнение (B) называется *уравнением геодезической в натуральной параметризации*.

Напомним, что в формуле (B) $\ddot{u}^k$ зависит от t , а Γ_{ij}^k – от $u^1(t)$ и $u^2(t)$.

Доказательство. (Утверждение 12.3)

(A) $\Rightarrow$ (B) Из (A) следует, что

$$\vec{k}_g = 0,$$

откуда следует (B) по утверждению 12.2, так как параметризация t – натуральная.

(A) $\Leftarrow$ (B) Пусть выполнено (B). Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2} r(u^1(t), u^2(t)) \sim n.$$

Отсюда

$$\left| \frac{dr(u^1(t), u^2(t))}{dt} \right| = \text{const},$$

и, значит, выполнено (A).

□

Продолжение решения уравнения геодезической

Обсудим уравнение геодезической с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} \ddot{u}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \\ u^1(0) = u_0^1 \\ u^2(0) = u_0^2 \\ \dot{u}^1(0) = v_0^1 \\ \dot{u}^2(0) = v_0^2 \end{cases} \quad (29)$$



Рис. 12.5. Движение траектории решения внутри области

Для малых t , как известно, $\exists!$ решение. Хотим понять, как далеко продолжается решение.

Вспомним, что может мешать продолжить решение ОДУ до бесконечности. Пусть задана область (горизонтальная полоса, рис. 12.5) и уравнение

$$\dot{x} = F(x).$$

Как показано на рис. 12.5, а), траектория решения может упереться в границу.

Лемма 12.1. В силу уравнения геодезической (29)

$$g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = \text{const.}$$

Доказательство. Вычислим

$$\frac{d}{dt} (g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^k \dot{u}^i \dot{u}^j + 2g_{ij} (-\Gamma_{kl}^i \dot{u}^k \dot{u}^l \dot{u}^j) = 0$$

в силу тождеств Кристоффеля. □

Отметим, что пространство $x \in \mathbb{R}^n$ (рис. 12.5) на самом деле четырехмерно:

$$u^1(t), u^2(t), \dot{u}^1(t), \dot{u}^2(t).$$

Вдоль решения уравнения геодезической выполнено

$$\dot{u}^i \dot{u}^j g_{ij} \leq R = \text{const.}$$

Так как g_{ij} зависят от точки, граница не является прямой, и решение может упереться только в границу по $u^1(t), u^2(t)$ (рис. 12.5, b).

Теорема 12.3. $\forall x \in M, v \in T_x M, v \neq 0 \exists!$ геодезическая γ , выходящая из точки x в направлении v . Она продолжается либо до $t = \infty$, где t – натуральный параметр, либо до выхода на край⁴ ∂M .

⁴В этом случае геодезическая может продолжаться дальше, если она только коснулась края.

Лекция 13. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Экспоненциальное отображение

Уравнения Эйлера – Лагранжа

Уравнения геодезических являются частным случаем *уравнений Эйлера – Лагранжа*.

Пусть дана некоторая область $\subset \mathbb{R}^{2n}$. Координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ обозначим как

$$x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n.$$

Здесь рассматриваем $\dot{x}$ как новую букву (пока что). В этой выбранной области определена функция $L(x, \dot{x}, t)$ – *Лагранжиан*.

Зафиксируем в пространстве $\mathbb{R}^n$ две точки: x_1 и x_2 . Хотим соединить их гладким путем, то есть построить гладкую функцию $x(t)$ такую, что

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2,$$

чтобы

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt \rightarrow \min. \quad (30)$$

В формуле (30) $\dot{x}$ – это уже производные от x по t .

В теории оптимального управления рассматриваются обобщение задачи выше. В механике целый класс систем описывается таким образом.

Будем искать не $\min$ функционала (30), а его экстремум.

Обсудим, что такое *экстремаль* функционала. Будем рассматривать вариации пути $x(t)$:

$$x(t, \tau) = x(t) \text{ при } \tau = 0.$$

Обозначим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} x = v$$

– векторное, показывающее в первом приближении, как отклоняется $x(t, \tau)$ от исходного пути (рис. 13.1).



Рис. 13.1. Отклонение $x(t, \tau)$ от исходного пути

Упростим исходную задачу. Хотим, чтобы

$$\frac{d}{d\tau} \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt = 0 \quad (31)$$

для $\forall v$ такой, что

$$v(t_1) = v(t_2) = 0.$$

Вычислим производную (31):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\underbrace{v^i \frac{\partial L}{\partial x^i}}_{=v^i(x(t,\tau))} \dot{v}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} v^i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right)' \right) dt + \underbrace{v^i \frac{\partial L}{\partial x^i} \Big|_{t=t_1}}_{=0}^{t=t_2} \forall v. \end{aligned}$$

Получаем уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right)' = 0. \quad (32)$$

Лагранжиан для геодезических

Отметим, что для автономной системы лагранжиан не будет зависеть от t . Для геодезических

$$L(x, \dot{x}) = |\dot{x}|^2. \quad (33)$$

Поясним формулу (33). В пространстве $\mathbb{R}^n$ есть риманова метрика $g_{ij}(x)$ – симметричная положительно определенная⁵ матрица размера $n \times n$. Распишем более формально

$$L(x, \dot{x}) = g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (34)$$

Утверждение 13.1. Уравнение Эйлера – Лагранжа (32) для (34) – уравнение геодезических.

Доказательство. Обозначим импульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 2g_{ij} \dot{x}^j,$$

силу

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^l = (\Gamma_{ki}^p g_{pl} + \Gamma_{li}^p g_{kp}) \dot{x}^k \dot{x}^l.$$

Тогда

$$\dot{p}_i = 2g_{ij} \ddot{x}^j + 2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j = 2g_{ij} \ddot{x}^j + 2(\Gamma_{ik}^p g_{pj} + \Gamma_{jk}^p g_{ip}) \dot{x}^k \dot{x}^j.$$

Приравняем выражения для $\dot{p}_i$ и f_i :

$$2g_{ij} \ddot{x}^j + 2(\Gamma_{ik}^p g_{pj} + \Gamma_{jk}^p g_{ip}) \dot{x}^k \dot{x}^j = (\Gamma_{ki}^p g_{pl} + \Gamma_{li}^p g_{kp}) \dot{x}^k \dot{x}^l.$$

⁵И, конечно, гладко зависящая от x . Напомним, по умолчанию все функции в курсе считаются гладкими.

Сокращая, получаем

$$g_{ij} \left(\ddot{x}^j + \Gamma_{pk}^j \dot{x}^p \dot{x}^k \right) = 0,$$

откуда, так как g_{ij} – невырожденная матрица, получаем уравнение геодезических

$$\ddot{x}^j + \Gamma_{pk}^j \dot{x}^p \dot{x}^k = 0.$$

□

Экспоненциальное отображение

Продолжим обсуждение вопросов, связанных с геодезическими.

Пусть дана поверхность M . Возьмем $x_0 \in M$ и рассмотрим касательную плоскость $T_{x_0}M$. Отобразим

$$T_{x_0}M \rightarrow M$$

следующим образом. Пусть $V \in T_{x_0}M$, $q(t)$ – геодезическая такая, что

$$q(0) = x_0, \quad \dot{q}(0) = V.$$

Тогда *экспоненциальное отображение* определяется следующим образом:

$$\exp(V) = q(1).$$

Обозначим координаты через u^i . Запишем уравнение геодезической:

$$\ddot{u}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = 0.$$

Его решения инвариантны относительно растяжения по времени

$$u(t) \rightarrow u(\lambda t).$$

Определим $\exp$ по-другому. Пусть есть другое решение:

$$\tilde{q}(0) = x_0, \quad \dot{\tilde{q}}(0) = \frac{V}{|V|},$$

тогда

$$\tilde{q}(|V|) = q(1). \quad (35)$$

Теорема 13.1. $\forall x_0 \in M \setminus \partial M \exists \varepsilon > 0$ такое, что

$$\exp : T_{x_0}M \rightarrow M$$

ограниченное, на ε -окрестности точки $0 \in T_{x_0}M$, есть гладкий регулярный гомеоморфизм на образ.

Доказательство. Выберем ε так, что

$$\rho(x_0, \partial M) < \varepsilon.$$

Тогда $\exp$ определено и гладкое.

Пусть на плоскости M координаты u^1, u^2 . Тогда на $T_{x_0}M$ задан базис $\partial/\partial u^1$ и $\partial/\partial u^2$ (для простоты будем считать, что x_0 – это точка $(0, 0)$). Обозначим через U^1, U^2 координаты в $T_{x_0}M$, которые соответствуют этому базису.

Сопоставим

$$(U^1, U^2) \mapsto (u^1(U^1, U^2), u^2(U^1, U^2))$$

следующим образом: в качестве u^1, u^2 возьмем решение

$$\begin{cases} (u^1, u^2) \Big|_{t=0} = 0 \\ (\dot{u}^1, \dot{u}^2) \Big|_{t=0} = (U^1, U^2) \\ \ddot{u}^i = -\Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k \end{cases}$$

Тогда нам надо будет рассмотреть $u^1(1), u^2(1)$.

Воспользуемся вместо этого подходом (35). Пусть длина вектора равна ε :

$$U^i U^j g_{ij} = \varepsilon.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (u^1, u^2) \Big|_{t=0} = 0 \\ (\dot{u}^1, \dot{u}^2) \Big|_{t=0} = (U^1, U^2) / \varepsilon \\ \ddot{u}^i = -\Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k \end{cases}$$

и вектор $u^1(\varepsilon), u^2(\varepsilon)$:

$$(u^1(\varepsilon), u^2(\varepsilon)) = (U^1, U^2) + o(\varepsilon).$$

Тогда матрица Якоби $\exp$ в 0 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $\exp$ регулярно. По теореме об обратном отображении $\exp$ – гомеоморфизм на образ. $\square$

Пример 13.1. Рассмотрим единичную сферу и касательную плоскость на ней. Лучи, проведенные в касательной плоскости через точку касания, будут переходить в меридианы (рис. 13.2). Отображение перестанет быть взаимно однозначным, когда они сойдутся в одной точке. Поэтому для круга диаметра $< \pi$ в касательной плоскости отображение взаимно однозначно, в противном случае – нет.

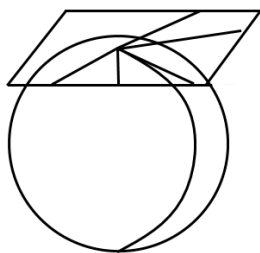


Рис. 13.2. Иллюстрация к примеру 13.1

Обобщенная полярная система координат

Обсудим систему координат, которую дает экспоненциальное отображение.

Возьмем в касательной плоскости $T_{x_0}M$ полярную систему координат ρ, φ . С помощью exp получим *обобщенную полярную систему координат в проколотой окрестности x_0 на M* . Здесь ρ переходит в u^1 , φ – в u^2 .

По построению кривая

$$(u^1(t), u^2(t)) = (t, \text{const})$$

– натурально параметризованная геодезическая.

Лемма 13.1. Если

$$(u^1(t), u^2(t)) = (t, \text{const})$$

– натурально параметризованная геодезическая, то

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \equiv 0.$$

Доказательство. Подставим в уравнение геодезической

$$\ddot{u}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$$

заданную кривую: $u^1 = t, u^2 = \text{const}$. Получим

$$\Gamma_{11}^i = 0.$$

Отсюда

$$0 = \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1p} \frac{\partial g_{1p}}{\partial u^1} = \frac{1}{2} g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = -\frac{1}{4g} \frac{\partial (g_{12})^2}{\partial u^1}.$$

□

Утверждение 13.2. В обобщенной полярной системе координат

$$I = d\rho d\rho + g_{22}(\rho, \varphi) d\varphi d\varphi. \quad (36)$$

Доказательство. Утверждается, что $g_{12} = 0$ (это видно по (36)). Заметим, что

$$g_{12} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

Отсюда

$$g_{12} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Отсюда и из утверждения леммы 13.1 следует, что $g_{12} \equiv 0$. □

Теорема 13.2. $\forall x_0 \in M \setminus \partial M \exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in M$ такого, что

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

следует, что $\exists!$ геодезическая, расположенная внутри ε -окрестности точки x_0 , соединяющая x_0 с x . Кроме того, эта геодезическая является кратчайшей кривой из x_0 в x .

Доказательство. Метрика имеет вид

$$(d\rho)^2 + g_{22}(d\varphi)^2.$$

Тогда для кривой $u(t)$

$$|\dot{u}| = \sqrt{(\dot{u}^1)^2 + \underbrace{\dots}_{>0} (\dot{u}^2)^2} \geq |d\rho|.$$

Достаточно взять ε такое, чтобы $\exp$ было определено. □

Полугеодезическая система координат

Обсудим обобщение предыдущей системы координат (обобщенной полярной).

Определение 13.1. Система координат называется *полугеодезической*, если

$$I = du^1 du^1 + g_{22} du^2 du^2.$$

Теорема 13.3. В окрестности $\forall$ точки $\exists$ полугеодезическая система координат.

Доказательство. Возьмем произвольную регулярно параметризованную кривую $q(t)$ и $x_0 \in q(t)$. Выберем в каждой точке согласованным образом вектор нормали $\vec{n}$ и через векторы нормали пустим геодезические.

Возьмем в точке $q(u^2)$ геодезическую, по которой пройдем еще u^1 времени:

$$r(u^1, u^2) = \exp_{q(u^2)}(u^1 n(u^2)).$$

По построению, $r(t, \text{const})$ – натурально параметризованные геодезические. Тогда по лемме 13.1

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0.$$

Заметим, что

$$g_{12} = 0 \text{ при } u^1 = 0.$$

Отсюда

$$g_{12} \equiv 0.$$

□

Системы координат, которые мы вводим (со специальным видом I), хороши тем, что в них упрощаются многие вычисления.

Утверждение 13.3. В полугеодезической системе координат

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^2}.$$

Доказательство. Напомним,

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ip} \left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^p} \right).$$

Пусть

$$g_{22} = \Phi^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = -\Phi \Phi_{u^1}, \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \Phi_{u^1}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{g} g_{1p} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^p}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^p \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^p \Gamma_{21}^s \right) = \\ &= \frac{1}{\Phi^2} \left(-(\Phi \Phi_{u^1})_{u^1} + (\Phi_{u^1})^2 \right) = -\frac{\Phi_{u^1 u^1}}{\Phi}. \end{aligned}$$

□

Лекция 14. Сфера и плоскость Лобачевского. Параллельный перенос

Вид полугеодезической системы координат у поверхности с $K = \text{const}$

Напомним, в конце прошлой лекции доказали следующее. Если u^1, u^2 – полугеодезическая система координат, то

$$I = (du^1)^2 + \Phi^2 (du^2)^2,$$

$$K = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^1 \partial u^1}.$$

Теорема 14.1. Если $K = \text{const}$, то в окрестности любой точки $\exists$ полугеодезическая система координат, в которой

$$\begin{cases} \Phi = 0, & \text{если } K = 0 \\ \Phi = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos u^1, & \text{если } K > 0 \\ \Phi = \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ch } u^1, & \text{если } K < 0 \end{cases}$$

Доказательство. Вернемся к доказательству теоремы 13.3. Выберем теперь кривую (обозначим ее γ) не произвольным образом, а геодезической. Пусть u^2 – натуральный параметр. Тогда при $u^1 = 0$

$$g_{22} \equiv 1, \quad \Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

При $u^1 = 0$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0.$$

Обозначим, как и раньше,

$$g_{22} = \Phi^2.$$

Тогда

$$\begin{cases} \Phi = 1, & u^1 = 0 \\ \Phi_{u^1} = 0, & u^1 = 0 \\ \Phi_{u^1 u^1} = -K\Phi \end{cases}$$

Мы имеем дело с ОДУ второго порядка с зафиксированными начальными условиями. Его решение

$$\Phi = \begin{cases} 0, & K = 0 \\ \cos \sqrt{K} u^1, & K > 0 \\ \text{ch } \sqrt{-K} u^1, & K < 0 \end{cases}$$

Осталось сделать замену

$$u^1, u^2 \mapsto \frac{u^1}{\sqrt{|K|}}, \frac{u^2}{\sqrt{|K|}}, \quad K \neq 0.$$

□

Следствие. Все поверхности постоянной фиксированной K локально изометричны.

Рассмотрим отдельно случаи $K = 1$ и $K = -1$.

Сфера

Напомним, если $K = \text{const} > 0$, то такая поверхность локально изометрична сфере. Если у поверхности нет края (полная поверхность), то она является сферой.

Пусть $K = 1$. Напомним,

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}.$$

Утверждение 14.1. Линии постоянной k_g на S^2 – плоские сечения, то есть окружности.

Доказательство. Рассмотрим сечение сферы плоскостью (рис. 14.1). Обозначим нормаль плоскости m . Тогда уравнение сечения имеет вид

$$(m, x) = a, \quad a \in [0, 1).$$

Тогда

$$k_g = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Геометрические – $a = 0$.

□

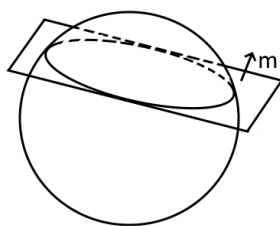


Рис. 14.1. Сечение сферы плоскостью

Обсудим, какие системы координат наиболее часто используются на сфере.

Рассмотрим **сферическую систему координат**. Здесь θ – широта, φ – долгота,

$$\varphi \text{ рассматривается по } \bmod 2\pi\mathbb{Z}, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Параметризация имеет вид

$$\begin{cases} x = \cos \theta \cos \varphi \\ y = \cos \theta \sin \varphi \\ z = \sin \theta \end{cases}$$

Здесь

$$I = (d\theta)^2 + \cos^2 \theta (d\varphi)^2.$$

Перейдем к **обобщенной полярной системе координат** (ρ, φ) . Здесь φ то же, а $\rho = \frac{\pi}{2} - \theta$,

$$I = (d\rho)^2 + \sin^2 \rho (d\varphi)^2.$$

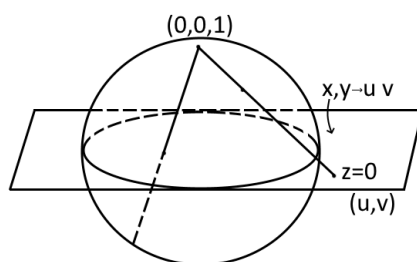


Рис. 14.2. Стереографическая проекция

Еще одна важная система координат – это **стереографическая проекция**. Выколем северный полюс сферы. Всю оставшуюся сферу можно уложить на плоскость $z = 0$ следующим образом (рис. 14.2). В плоскости координаты x, y переобозначим как u, v . Получаем параметризацию

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \end{cases} \quad (37)$$

Здесь

$$I = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} ((du)^2 + (dv)^2).$$

Такие метрики называются *конформно плоскими метриками* и сохраняют углы.

Утверждение 14.2. Линии постоянно k_g в этой системе координат – окружности и кривые.

Доказательство. Подставим (37) в уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Получим уравнение вида

$$a(u^2 + v^2) + bu + cv + d = 0.$$

В зависимости от того, $a = 0$ или нет, будем получать окружность или прямую. $\square$

Плоскость Лобачевского

Перейдем к случаю $K = -1$. Напомним, ранее в курсе уже обсуждали поверхность Бельтрами. Оказывается, что все (достаточно гладких) поверхности с $K = \text{const} < 0$ имеют следующую проблему: в какой-то момент они упрутся в линию, дальше которой ее продолжить нельзя.

Хотим найти поверхность, которая бы выступала аналогом сферы для $K = \text{const} < 0$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ *псевдоевклидово скалярное произведение*:

$$\langle \rangle: \langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' - zz'.$$

Рассмотрим

$$\mathbb{L}: x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, \quad z > 0$$

(рис. 14.3). Заметим, что для вектора нормали n

$$(n, n) < 0,$$

а для $v \in T_x \mathbb{L}$

$$(v, v) > 0.$$

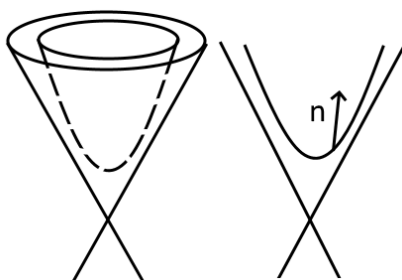


Рис. 14.3. Плоскость Лобачевского

Если γ – кривая с

$$\langle \gamma, \gamma \rangle > 0,$$

то хорошо определен вектор кривизны

$$\vec{k} = r'',$$

где $r(s)$ – натуральная параметризация.

Если $\gamma \in \mathbb{L}$, то определены

$$\vec{r}_v + \vec{k}_g = \vec{k},$$

где $\vec{r}_v$ – вектор нормальной кривизны, а $\vec{r}_g$ – вектор геодезической,

$$\langle \vec{r}_v, \vec{r}_g \rangle = -1,$$

$$\underbrace{\langle \vec{r}_g, \vec{r}_g \rangle}_{>0} = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle + 1$$

Линии постоянной $\vec{k}_g$ на $\mathbb{L}$ – плоские сечения

$$\langle m, x \rangle = a,$$

где m – фиксированный вектор. Возможны три случая:

1. Пусть m – радиус-вектор некоторой точки $x_0 \in \mathbb{L}$:

$$m = \vec{Ox}_0.$$

$$\langle m, m \rangle = -1,$$

положим $a < -1$. Тогда сечение непусто (и является эллипсом, рис. 14.4) и

$$k_g = -\frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} > 1.$$

2. Случай, когда

$$\langle m, m \rangle = 1, \quad a \geq 0.$$

Здесь

$$k_g = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} < 1,$$

сечение является гиперболой (рис. 14.4).

3. Случай

$$\langle m, m \rangle = 0.$$

Тогда $a = 1$, сечения являются параболой (рис. 14.4),

$$k_g = 1.$$

Такие сечения называются *орициклами*.

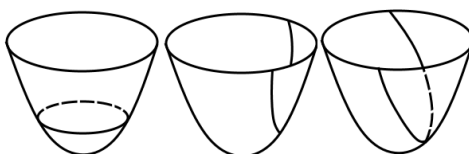


Рис. 14.4. Сечения: параллель, гипербола и парабола

Обсудим, как правило определять гауссову кривизну. Когда мы определяли Π , мы фиксировали вектор нормали единичной длины. В данном случае это невозможно, так как

$$\langle n, n \rangle < 0.$$

Разрешим выбирать вектор с условием

$$\langle n, n \rangle = \text{const}.$$

Тогда II квадратичная форма определяется так, что

$$b_{ij} = \langle r_{u^i u^j}, n \rangle.$$

Деривационные формулы Вайнгартена сохраняются в прежнем виде. Деривационные формулы Гаусса

$$r_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k r_{u^k} + b_{ij} \frac{n}{\langle n, n \rangle}.$$

«Подправим» и формулу гауссовой кривизны:

$$K = \frac{1}{\langle n, n \rangle} \frac{\det B}{\det G} = -1 \text{ для } \mathbb{L}.$$

Перечислим системы координат на $\mathbb{L}$, координатная сетка в которых ортогональна, а координатные линии являются линиями постоянной геодезической кривизны.

1. Система координат Лобачевского η, ζ ,

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} \eta \\ y = \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \zeta \\ z = \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} \zeta \end{cases}$$

Здесь

$$I = (d\eta)^2 + \operatorname{ch}^2 \eta (d\zeta)^2.$$

2. Обобщенная полярная система координат ρ, φ ,

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} \rho \cos \varphi \\ y = \operatorname{sh} \rho \sin \varphi \\ z = \operatorname{ch} \rho \end{cases}$$

Здесь

$$I = (d\rho)^2 + \operatorname{sh}^2 \rho (d\varphi)^2.$$

3. Стереографическая проекция с центром $(0, 0, -1)$,

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1-u^2-v^2} \\ y = \frac{2v}{1-u^2-v^2} \\ z = \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2} \end{cases}$$

Здесь

$$I = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2} ((du)^2 + (dv)^2), \quad v^2 + u^1 < 1.$$

$k_g = \text{const} \iff$ окружности, прямые и их дуги (модель Пуанкаре, рис. 14.5).

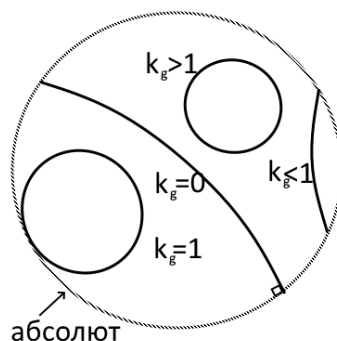


Рис. 14.5. Модель Пуанкаре, стереографическая проекция

4. Орициклическая система координат s, t ,

$$\begin{cases} x = \frac{s^2 + t^2 - 1}{2t} \\ y = \frac{s}{t} \\ z = \frac{s^2 + t^2 + 1}{2t} \end{cases}$$

Здесь

$$I = \frac{(ds)^2 + (dt)^2}{t^2}.$$

$k_g = \text{const} \iff$ окружности, прямые и их части (модель Пуанкаре, рис. 14.6).

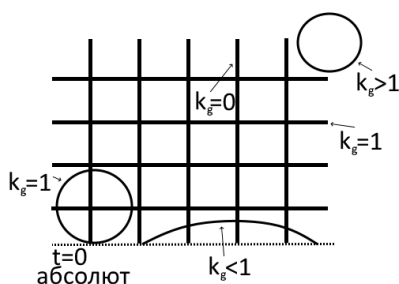


Рис. 14.6. Модель Пуанкаре, ортоциклическая система координат

Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование

Пусть дана поверхность M с параметризацией

$$r(u^1, u^2).$$

Возьмем на M путь (параметризованную кривую)

$$q(t) = \begin{cases} u^1 = u^1(t) \\ u^2 = u^2(t) \end{cases}$$

Выберем в каждой точке пути вектор $W(t) \in T_{q(t)}M$,

$$W^i : W = W^1 r_{u^1} + W^2 r_{u^2}.$$

W – векторное поле вдоль q . Тогда

$$\dot{W} = \left(\dot{W}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{u}^k W^j \right) r_{u^i} + b_{jk} W^j \dot{u}^k n.$$

Обозначим через P_x ортогональное проектирование на касательную плоскость $T_x M$.

Определение 14.1. Определим ковариантную производную поля W

$$\frac{DW}{dt} := P_x \left(\dot{W} \right) = \left(\dot{W}^i + \Gamma_{jk}^i W^j \dot{u}^k \right) r_{u^i}.$$

Ковариантная производная поля W является линейной операцией относительно сложения:

$$\frac{D(W_1 + W_2)}{dt} = \frac{DW_1}{dt} + \frac{DW_2}{dt},$$

для $\lambda = \text{const}$

$$\frac{D(\lambda W)}{dt} = \lambda \frac{DW}{dt}.$$

Отметим, что для $f(t)$ – функции

$$\frac{D(fW)}{dt} = f \frac{DW}{dt} + \dot{f} W.$$

Пусть теперь дана гладкая кривая на поверхности, $q(s)$ – натуральная параметризация. В каждой точке согласованным образом выберем нормаль геодезической $n_q, n_g \in T_{q(t)}M$ (через n будем обозначать нормаль к поверхности). Пусть v – вектор скорости:

$$v = q'.$$

Утверждение 14.3. (Аналог формул Френе)

$$\frac{Dv}{ds} = k_g n_g, \quad \frac{Dn_g}{dt} = -k_g v. \quad (38)$$

Доказательство.

$$\vec{k}_g = P_{q(t)} \underbrace{\dot{k}}_{=\frac{dv}{ds}}.$$

Отсюда получаем первую из формул (38). Вторая формула следует из кососимметричности:

$$\frac{d}{ds} (v, n_g, n) = (v, n_g, n) A,$$

A – кососимметричная. □

Теорема 14.2. (О восстановлении кривой) Гладкая кривая однозначно восстанавливается по $q(0)$, $q'(0)$ и $k_g = k_g(s)$.

Определение 14.2. Векторное поле $W(t)$ вдоль пути $q = q(t)$ *ковариантно постоянно* вдоль q , если

$$\frac{DW}{dt} = 0.$$

Утверждение 14.4. $q(t)$ – геодезическая, t пропорционально натуральному параметру $\iff$

$$\frac{D\dot{q}}{dt} = 0,$$

то есть вектор скорости $\dot{q}$ ковариантно постоянен.

Замечание 14.1. Пусть даны 2 поверхности, касающиеся вдоль прямой. Тогда ковариантное постоянство по отношению к одной из поверхностей эквивалентно ковариантному постоянству по отношению ко второй.

Теорема 14.3. Пусть $q(t)$ – путь в M , $W_0 \in T_{q(t_0)}M$. Тогда $\exists!$ векторное поле $W(t)$ вдоль q такое, что

$$\frac{DW}{dt} = 0.$$

Доказательство. Построить $W \iff$ решить

$$\dot{W}^i + \Gamma_{jk}^i W^j \underbrace{\dot{u}^k}_{\text{путь } q} = 0$$

линейное ОДУ 1-го порядка. Решение $\exists$, единственно и продолжаемо вдоль всего пути. $\square$

Говорят, что $W(t)$ из теоремы 14.3 получено *параллельным переносом* из W_0 вдоль q .

Лекция 15. Угловой дефект. Теорема Гаусса-Бонне

Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование (продолжение)

Напомним, на прошлой лекции определили параллельный перенос. На поверхности мы рассматривали путь из x_0 в x_1 (параметризовали его как $q(t)$). Для любого касательного вектора в x_0 $W(t_0)$ мы рассматривали ковариантно постоянное вдоль этого пути поле $W(t)$. В момент времени t_1 , соответствующего точке x_1 , получаем $W(t_1)$ – результат параллельного переноса.

Обсудим **свойства** параллельного переноса.

1. Выражается в локальных координатах через I квадратичную форму.
2. Линейность переноса:

$$T_{x_0} \rightarrow T_{x_0} \quad (39)$$

– линейное отображение.

3. Сохраняет скалярное произведение. Таким образом, оператор (39) является изометрией.

Другими словами, метрика ковариантно постоянна.

4. Не зависит от параметризации пути. Действительно, пусть

$$q = r(u^1(t), u^2(t)).$$

По заданному $W(t_0)$ искали $W(t)$, то есть решали ОДУ

$$\dot{W}^i = -\Gamma_{jk}^i W^j \dot{u}^k. \quad (40)$$

Здесь, напомним,

$$W = W^i r_{u^i}.$$

Заменим теперь t на $t(\tau)$. В обеих частях уравнения (40) производная по t встречается один раз. Поэтому в (40) при замене параметризации с обеих сторон появится множитель $dt/d\tau$, и уравнение сохранится.

Пусть теперь W – векторное поле на M (всей или некоторой окрестности),

$$W^i = W^i(u^1, u^2).$$

Предположим, что в точке x_0 зафиксирован касательный вектор V и проведена кривая $q(t)$ вдоль этого вектора:

$$q(t_0) = x_0, \quad \dot{q}(t_0) = V.$$

Ограничим поле W на кривую:

$$W^i(t) = W^i(u^1(t), u^2(t)).$$

Оказывается, что

$$\left. \frac{DW}{dt} \right|_{t=t_0} = \left(\left(\frac{\partial W^i}{\partial u^j} + \Gamma_{kj}^i V^j W^k \right) V^j \right) r_{u^i}.$$

– зависит только от x_0 , V и W .

Определение 15.1. Ковариантная производная поля W вдоль $V \in T_{x_0}M$ определяется как

$$\nabla_V W = P_{x_0}(dW(V)).$$

В локальных координатах

$$(\nabla_V W)^i = \left(\frac{\partial W^i}{\partial u^j} + \Gamma_{kj}^i W^k \right) V^j.$$

Отметим, что в некоторых источниках уравнение геодезической $\gamma(t)$ записывается как

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Во избежание путаницы так лучше не писать, так как такая запись подразумевает, что $\dot{\gamma}$ определено в некоторой окрестности прямой, и, следовательно, его надо как-то на эту окрестность продолжить.

Перейдем к **свойствам** $\nabla_V W$.

1. Линейность по V .
2. $\nabla_V(W_1 + W_2) = \nabla_V W_1 + \nabla_V W_2$.
3. $\nabla_V(f \cdot W) = \nabla_V f \cdot W + f \cdot \nabla_V W$.
4. Наконец, производная от скалярного произведения

$$\nabla_V(W_1, W_2) = (\nabla_V W_1, W_2) + (W_1, \nabla_V W_2).$$

Угловой дефект

Пусть на плоскости дана область Ω (с ориентацией такой, чтобы вектор нормали был направлен внутрь области), тогда

$$\int_{\partial\Omega} k ds = 2\pi.$$

Отметим, что граница области необязательно должна быть гладкой. Она может содержать углы θ_i (значение внешнего угла, может быть отрицательным, если поворот осуществляется на угол более чем π). В таком случае формула выше записывается как

$$\int_{\partial\Omega} k ds \sum \theta_i = 2\pi.$$

Пусть M – простой кусок поверхности. Ориентируем его границу, направив вектор геодезической нормали $n_g T_x M$ «внутри» M . Отметим, что край M может содержать некоторое количество точек, в которых он негладкий. Будем считать в этих точках внешние углы θ_i :

$$\theta_i = \pi - \text{внутренний угол}.$$

Будем считать, что запись

$$\int_{\partial M} k_g ds$$

включает в себя $\sum \theta_i$; k_g – геодезическая кривизная со знаком, определенным n_g .

Определение 15.2. Угловым дефектом простого куска называется

$$\Lambda(M) = 2\pi - \int_{\partial M} k_g ds.$$

Вспомним, что такое кривизна на плоскости. Пусть дана $r(s)$, s – натуральная параметризация. Тогда k – скорость вращения r' :

$$r' = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2,$$

$$\alpha' = k.$$

Обобщим это на случай произвольной поверхности с кривой. Вместо e_1, e_2 возьмем ортонормированный базис W_1, W_2 , и параллельно перенесем его вдоль данной кривой:

$$W_1(s), \quad W_2(s)$$

ковариантно постоянный ортонормированный репер.

Тогда

$$r' = \cos \alpha W_1 + \sin \alpha W_2,$$

$$\frac{Dr'}{ds} = \underbrace{\alpha'}_{\pm k_g} \underbrace{(-\sin \alpha W_1 + \cos \alpha W_2)}_{n_g \text{ или } -n_g}.$$

Пронесем ковариантно постоянный репер параллельным переносом вдоль границы области. фиксируем направление обхода против часовой стрелки. r' повернется на $\int_{\partial M} k_g ds$ относительно ковариантно постоянного репера.

Теорема 15.1. Пусть M – компактная поверхность, разрезанная на простые куски:

$$M = \bigcup_i M_i,$$

$$M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$\sum \Lambda(M_i) + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi \chi(M).$$

Напомним,

$$\chi(M) = n_0 - n_1 + n_2,$$

где n_0 – число вершин, n_1 – число ребер, а n_2 – число граней.

Следующую лемму примем без доказательства.

Лемма 15.1. Разные разрезания получаются друг из друга последовательностью следующих операций:

1. Кусок разрезается на 2.
2. Два куска, образующих вместе простой кусок, объединяются в один.

Замечание 15.1. Отметим, как меняются n_0 , n_1 и n_2 . Для операции разрезания куска отметим точки, которые соединяем отрезком, как вершины. Тогда

n_2	$+1$
n_1	$+k$
n_0	$+(k-1)$

Определим *угловой дефект компактной поверхности* как

$$\Lambda(M) = \sum \Lambda(M_i) = 2\pi\chi(M) \int_{\partial M} k_g ds. \quad (41)$$

Докажем правое равенство в (41).

Доказательство. (Теорема 15.1) Рассмотрим

$$\sum \Lambda(M_i) + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi n_2 - \underbrace{\sum \int_{\partial M_i} k_g ds + \int_{\partial M} k_g ds}_Z.$$

Z состоит из двух частей: $\int k_g ds$ по ребрам и $\sum$ внешних углов.

Рассмотрим ребро, к которому примыкает два куска: M_i и M_j . Вклады двух этих кусков в интеграл геодезической кривизны по краям куска мы считаем с разными знаками, поэтому они сокращаются. Если же ребро куска – часть края поверхности ∂M , то оно сокращается с $\int_{\partial M} k_g ds$. Поэтому составляющая Z с $\int k_g ds = 0$.

Рассмотрим, что будет с суммой внешних углов. Пусть дана вершина, к ней примыкают простые куски. Пусть j – валентность вершины. Тогда

$$\sum_{i=1}^j (\pi - \theta_i) = 2\pi.$$

Отсюда

$$-\sum \theta_i = (2 - j)\pi.$$

Обозначим через n_{0j} число вершин валентности j .

Проверить, что для вершины, расположенной на крае, получается та же формула, остается в качестве упражнения.

Тогда вклад $\sum$ внешних углов в Z равен

$$\sum_j n_{0j}(2-j)\pi = \left(\sum_j 2n_{0j} - \sum_j jn_{0j} \right) \pi = 2\pi(n_0 - n_1).$$

□

Теорема Гаусса – Бонне

Теорема 15.2. (Гаусса – Бонне) Пусть M – компактная поверхность. Тогда

$$\underbrace{\int_M K dS}_{=\Lambda(M)} + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M).$$

Доказательство. (Идея доказательства) Начнем с того, почему K является концентрацией углового эффекта.

Рассмотрим сферу. Гауссова кривизна у сферы везде одинакова. Угловой эффект же – аддитивная величина:

$$\Lambda(M_1 \cup M_2) = \Lambda(M_1) + \Lambda(M_2).$$

Таким образом, каждой области Ω сферы сопоставлена аддитивная величина. При вращениях сферы она сохраняется. Следовательно, на сфере угловой дефект

$$\Lambda(\Omega) = \text{const} S(\Omega).$$

Рассмотрим маленький кусочек произвольной поверхности M . Сферическое отображение Гаусса его переведет в маленький кусочек сферы S^2 . В точках x и $\mu(x)$ касательные плоскости параллельны:

$$T_x M \parallel T_{\mu(x)} S^2.$$

Это значит, что если векторы-результат параллельного переноса на кусочке M отложить на соответствующем кусочке S^2 , получим также параллельный перенос. Здесь

$$S(\mu(\Omega)) = K S(\Omega).$$

Это было рассуждение для гауссовой кривизны положительного знака. Для отрицательного знака гауссовой кривизны надо объяснить, почему угловой дефект надо брать с другим знаком.

Дефект такого рассуждения состоит в следующем. Мы рассматриваем только поверхности, для которых определена I квадратичная форма ограничением метрики евклидова пространства. Вообще говоря, теорема Гаусса – Бонне будет выполнена, если в качестве I первой квадратичной формы взять *любую* риманову метрику.

Поэтому рассуждение выше показывает, почему теорема верна, но в общем случае доказательством не является.

В общем случае необходимо сделать следующие вычисления. Достаточно доказать теорему Гаусса – Бонне для четырехугольного простого куска поверхности M ,

$$r : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

– регулярная параметризация. Нам потребуется формула Стокса

$$\int_0^1 \int_0^1 ((F_2)_{u^1} - (F_1)_{u^2}) du^1 du^2 = \int_{\partial M} (F_1 du^1 + F_2 du^2).$$

Здесь важно оговорить, что интегрирование происходит против часовой стрелки.

Итак, KdS нам нужно представить в виде суммы (или разности) производных двух функций.

Отступим немного назад и вспомним про условие совместности. Поймем, существует ли векторное поле W такое, что

$$\nabla_V W = 0$$

для $\forall V$.

Для этого достаточно проверить производную вдоль базисных векторов:

$$\begin{cases} \nabla_{e_1} W = 0 \\ \nabla_{e_2} W = 0 \end{cases}$$

Эти уравнения запишутся как

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial u^1} + \Gamma_1 W = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial u^2} + \Gamma_2 W = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{1i}^1 & \Gamma_{2i}^1 \\ \Gamma_{1i}^2 & \Gamma_{2i}^2 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}$$

Эта система имеет решение $\iff$ выполнено условие совместности

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u^2} + \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 \Gamma_1 = 0.$$

Заметим, что

$$G \cdot \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u^2} + \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 \Gamma_1 \right) = \begin{pmatrix} 0 & gK \\ -gK & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, препятствием к построению векторного поля W может быть гауссова кривизна K . Если $K = 0$, поле можно построить всюду.

Возьмем в каждой точке ортонормированный репер W_1, W_2 . Ковариантно постоянное векторное поле Z будем искать как

$$Z = \cos \alpha W_1 + \sin \alpha W_2.$$

Запишем

$$\begin{cases} \nabla_{e_1} Z = 0 \\ \nabla_{e_2} Z = 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \alpha_{u^1} = F_1 \\ \alpha_{u^2} = F_2 \end{cases} \quad (42)$$

Условие совместности имеет вид

$$\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial u^1} - \frac{\partial F_1}{\partial u^2}}_{\sqrt{g}K} = 0.$$

Лемма 15.2.

$$K\sqrt{g} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \Gamma_{22}^1 \right) - \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \Gamma_{21}^1 \right). \quad (43)$$

Отметим следующую сложность в (43). Производных вида $\partial g_{ij}/\partial u^k$ 6 штук, Γ_{jk}^i – тоже 6. Далее, вторых производных

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^i}$$

– 9 штук, а производных

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^1}$$

– 12 штук. Поэтому K можно выразить через символы Кристоффеля несколькими разными способами. (43) – один из таких способов.

Итак, в качестве ортонормированного репера возьмем следующее. Ортогонализацией Грама – Шмидта из исходного базиса e_1, e_2 получим базис W_2, W_1 . Для этого базиса функции (42) будут

$$F_2 = \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \Gamma_{21}^1 \text{ и } F_1 = \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \Gamma_{22}^1.$$

Оставшиеся вычисления предоставляются в качестве упражнения. □

Лекция 16. Консультация

Теорема Клеро

Напомним доказательство теоремы Клеро.

Рассмотрим поверхность вращения в сферических координатах z, ρ, φ . Угол между геодезической на поверхности вращения и параллели обозначим α .

Теорема 16.1. (Клеро)

$$\rho \cos \alpha = \text{const}$$

вдоль $\forall$ геодезической⁶.

Доказательство. Напомним, через $q(s)$ обозначали радиус-вектор,

$$q = q_1 + q_2,$$

$$q_1 = \lambda e_3, \quad q_2 \perp q_1.$$

Условие движения вдоль геодезической было

$$q'' \in \langle q_1, q_2 \rangle.$$

Здесь

$$\rho = |q + 2|, \quad \cos \varphi = \langle q', [q_1, q_2] \rangle.$$

Из этих равенств и получается утверждение теоремы:

$$|q_2| \frac{(q', q_1, q_2)}{|q_1||q_2|} = \left(q', \underbrace{\frac{q_1}{|q_1|}}_{e_3}, q_2 \right) = A.$$

Далее,

$$A' = \underbrace{(q'', e_3, q_2)}_{=0} + (q', e_3, q_2') = \underbrace{(q', e_3, q_2')}_{=0} + \underbrace{(q_2', e_3, q_2')}_{=0}.$$

□

Задача о кручении на поверхностях отрицательной кривизны

Задача 16.1. Докажите, что на любой поверхности отрицательной кривизны (не обязательно постоянной) кручение асимптотической линии в точке, где ее кривизна не обращается в нуль, связано с гауссовой кривизной поверхности в той же точке следующим образом:

$$\kappa = -\sqrt{K}.$$

⁶Отметим, что $\rho \cos \alpha$ является моментом импульса.

Доказательство. Обозначим поверхность через M . Рассмотрим точку x на кривой. Вектор ускорения $n \in T_x M$. Вектор скорости v и вектор n – ортонормированный базис в $T_x M$. Вектор бинормали $b \perp T_x M$,

$$b' = -\kappa n = d\mu(v)$$

– результат применения оператора Вайгартена к v .

Рассмотрим, как в базисе v, n выглядят I и II квадратичные формы:

$$I : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & * \end{pmatrix}$$

Получаем, что

$$K = -\kappa^2.$$

□

Поверхностный интеграл, обсуждение площади

Обсудим еще схематично интегралы по поверхности. Часто для этого используется разбиение единицы.

Пусть дана компактная⁷ поверхность. В окрестности каждой точки можно задать локальные координаты в объемлющем пространстве так, что это будет плоскость. Такими окрестностями покрываем всю, выбираем конечное подпокрытие. В это покрытие вписывается разбиение единицы – представление функции $\equiv 1$ в виде суммы гладких функций

$$1 = \sum f_i,$$

на которую накладываются некоторые условия (в частности, вне каждой области, входящей в конечное подпокрытие, соответствующая $f_i = 0$).

Итак, в каждой окрестности (элементе покрытия) берется локальная система координат и параметризуется. Интегрируемая функция (например, $K\sqrt{g}$) записывается в рассматриваемой системе координат, умножается на f_i и берется интеграл Римана. Затем берется сумма по всем элементам покрытия.

Отдельно доказывается, что результат не зависит от разбиения единицы и покрытия.

Скажем пару слов о вычислении площади – интеграле

$$\int \sqrt{g} du^1 du^2.$$

Здесь g – элементы матрицы, которая строится по первым производным данной параметризации.

Итак, выражение выше включает в себя данную параметризацию и ее производные. Поэтому, если параметризация и ее производные меняются мало, меняется мало и результат (площадь).

⁷В общем случае требование компактности может быть ослаблено.

Задачи о линиях кривизны

Задача 16.2. Докажите, что геодезическая без точек спрямления является линией кривизны тогда и только тогда, когда она плоская.

Доказательство. $\Rightarrow$ Так как кривая является линией кривизны, то ее касательный вектор v является собственным для оператора Вайгартена. Обозначим через t вектор нормали к поверхности. Тогда

$$t' = \lambda v,$$

$$v' = kn = km,$$

$$n' = -kv + \kappa b,$$

откуда $\kappa = 0$. □

Задача 16.3. Докажите, что асимптотическая линия является геодезической тогда и только тогда, когда она является прямой.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть линия является асимптотической и геодезической. Пусть $n = t$, как и в прошлом доказательстве. Тогда

$$n' = \lambda b = -kv + \kappa b$$

где b – вектор бинормали. Отсюда кривизна равна 0, а значит, линия является прямой. □



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У