



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. СЕМИНАРЫ

ИВАНОВ
АЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Содержание

Семинар 1	5
Теория кривых	5
Циклоида	7
Вычисление кривизны кривой и её репера Френе	8
Примеры вычисления кривизны	10
Вычисление кривизны кривой, заданной неявно	12
Геометрический смысл кривизны и соприкасающиеся окружности	13
Эквидистанта и эволюта	14
Семинар 2	16
Бинормаль и кручение	16
Вычисление кривизны и кручения произвольно параметризованной кривой	16
Вычисление репера Френе произвольно параметризованной кривой	17
Описание плоских бирегулярных кривых в трёхмерном пространстве	19
Кривые на двумерной сфере в трёхмерном пространстве	20
Семинар 3	23
Понятие поверхности. Касательный вектор и касательное пространство	23
Вычисление длины кривой и углов между кривыми. Первая фундамен- тальная форма	24
Стандартные задачи	26
Вычисление компонент первой фундаментальной формы поверхно- сти, заданной как график	26
Вычисление компонент первой фундаментальной формы на цилиндре	26
Вычисление компонент первой фундаментальной формы на сфере	27
Углы и длины сторон криволинейного треугольника	29
Поверхность, заданная неявно. Поверхность вращения	31
Семинар 4	33
Вторая фундаментальная форма	33
Главные кривизны. Векторы главных направлений	34
Формула Эйлера	35
Вычисление второй фундаментальной формы, главных кривизн и векторов главных направлений	35
Задача, комбинирующая теорию кривых и теорию поверхностей	38
Задачи с легко угадываемым ответом	40
Геометрический смысл гауссовой и средней кривизны	41
Семинар 5	42
Гауссова и средняя кривизна графика	42
Теорема Менье	43
Деривационные формулы Вейнгартена-Гаусса	44

Семинар 6	48
Геодезическая	48
Примеры и задачи	49
Геодезические на поверхностях вращения	55
Семинар 7	57
Геодезические на поверхностях вращения (продолжение)	57
Метрики в области $\mathbb{R}^n$. Классические метрики	60
Стереографические координаты на сфере	61
Задачи о стереографической проекции	62
Семинар 8	64
Задачи о стереографической проекции (продолжение)	64
Геометрия сферы	65
Псевдоевклидово пространство. Псевдосфера	66
Геометрия Лобачевского	68
Семинар 9	74
Дробно линейные преобразования	74
Задачи	76
Расстояние между двумя точками	76
Окружность на плоскости Лобачевского	78
Теоремы синусов и косинусов для геометрии Лобачевского	80
Семинар 10	82
Элементы общей топологии	82
Индукцированная и перенесённая топология. Фактортопология	86
Аксиомы отделимости. Пространство Хаусдорфа	90
Семинар 11	91
Свойства топологических пространств	91
Компактные топологические пространства	94
Многообразия	95
Семинар 12	99
Гладкость функций на сфере	99
Проективное пространство	100
Задание многообразий уравнениями	101
Семинар 13	105
Касательные векторы к многообразиям	105
Дифференциал гладкого отображения	107
Семинар 14	112
Ориентируемые, ориентированные и неориентируемые многообразия	112

Семинар 1

Теория кривых

Определение 1.1. Кривой в n -мерном евклидовом пространстве называется его подмножество $\gamma \subset \mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$, заданное одним из трёх локально эквивалентных способов:

- как образ отображения $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Иначе говоря, задаются координатные функции $x^i = x^i(t)$, которые являются гладкими, то есть бесконечно дифференцируемыми. Величина t называется параметром.
- как график вектор-значной функции.

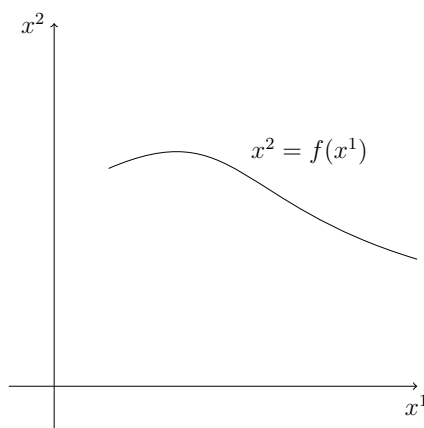


Рис. 1.1. Пример задания кривой с помощью графика в двумерном случае.

- как множество решений уравнения $F(x^1, x^2) = 0$, причём это уравнение является невырожденным, то есть $dF|_{\gamma} \neq 0$.

Определение 1.2. Если кривая задана параметрическим образом, то всегда определён **вектор скорости**

$$\dot{r}(t) = \frac{dr(t)}{dt}. \quad (1.1)$$

Определение 1.3. Кривая называется **регулярной**, если $\forall t \dot{r}(t) \neq 0$.

Определение 1.4. Длина гладкой кривой $r(t)$, где $t \in [a; b]$, определяется как

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{r}(t)\| dt. \quad (1.2)$$

Здесь $\|\dot{r}(t)\|$ – норма вектора скорости $\dot{r}(t)$.

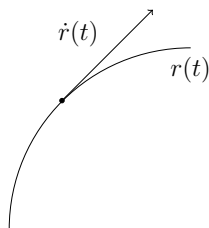


Рис. 1.2. Вектор скорости $\dot{r}(t)$.

Определение 1.5. Параметр s называется **натуральным**, если

$$s_2 - s_1 = l(\gamma), \quad (1.3)$$

где $l(\gamma)$ – длина кривой, параметрически заданной на отрезке $[s_1; s_2]$.

Замечание 1.1. Можно показать, что это равносильно тому, что $\|\dot{r}(t)\| = 1$.

Утверждение 1.1. Если параметр s – натуральный, то

$$\langle \dot{r}(s), \ddot{r}(s) \rangle = 0. \quad (1.4)$$

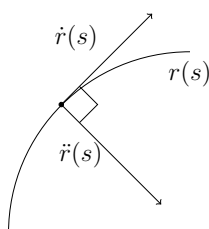


Рис. 1.3. Скорость $\dot{r}(s)$ и ускорение $\ddot{r}(s)$ для натуральной параметризации.

Доказательство. Норма вектора скорости при натуральной параметризации равна единице:

$$\|\dot{r}(s)\|^2 = \langle \dot{r}(s), \dot{r}(s) \rangle = 1.$$

Продифференцируем это выражение по параметру:

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \dot{r}(s), \dot{r}(s) \rangle = \left\langle \frac{d\dot{r}(s)}{ds}, \dot{r}(s) \right\rangle + \left\langle \dot{r}(s), \frac{d\dot{r}(s)}{ds} \right\rangle = 2\langle \dot{r}(s), \ddot{r}(s) \rangle.$$

□

Определение 1.6. Кривизна кривой $r(s)$, где s – натуральный параметр, определяется как

$$k(s) = \|\ddot{r}(s)\|. \quad (1.5)$$

Определение 1.7. Если кривизна кривой $k(s) \neq 0$ (т.е. $\ddot{r}(s) \neq 0$), то **главной нормалью** называется вектор

$$n(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|}. \quad (1.6)$$

Определение 1.8. Кривые, для которых $\ddot{r}(s) \neq 0$, называются **бирегулярными**.

Таким образом, в пространстве произвольной размерности n у натурально параметризованной кривой, обладающей ненулевой кривизной, в каждой точке определена пара ортогональных единичных векторов $\dot{r}(s) \equiv v(s)$ и $n(s)$. В каждой точке

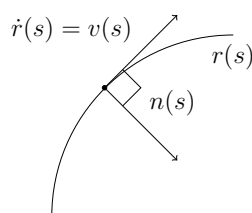


Рис. 1.4. Скорость $v(s)$ и главная нормаль $n(s)$ бирегулярной натурально параметризованной кривой.

кривой можно построить целую нормальную плоскость размерности $n-1$, в которой будет существовать одно выделенное направление, которое и называется главной нормалью.

Определение 1.9. В случае, когда $\dim \mathbb{R}^n = 2$, пара векторов $(v(s), n(s))$ образуют базис, который называется **репéром Френе в точке $r(s)$** .

Циклоида

Рассмотрим семейство циклоид (Рис. 1.5). Это траектории различных точек окруж-

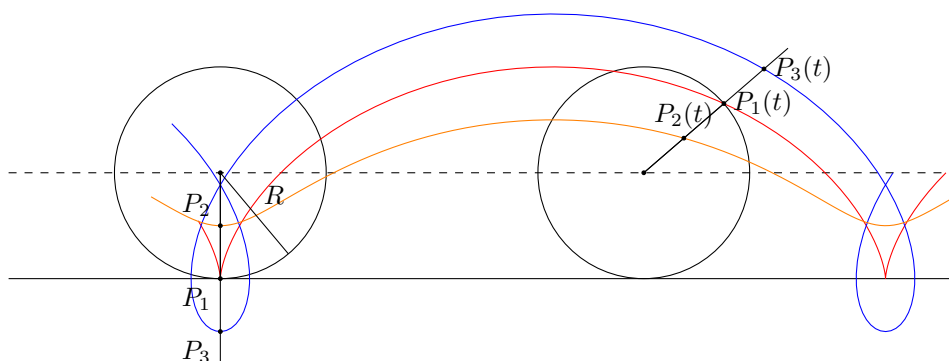


Рис. 1.5. Семейство циклоид.

ности радиуса R , возникающие при её качении по горизонтальной поверхности без

проскальзывания. Траектория точки P_1 , находящейся на ободке, называется **классической циклоидой**; точки P_2 – **гипоциклоидой**; точки P_3 – **гиперциклоидой**.

Рассмотрим задачу о нахождении циклоиды для точки P_1 в параметрическом виде. Для этого введём на плоскости координаты x и y и найдём их зависимость от t . Возьмём в качестве параметра t угол, на который поворачивается точка P_1 вокруг центра окружности (Рис. 1.6). Условие качения без проскальзывания означает, что

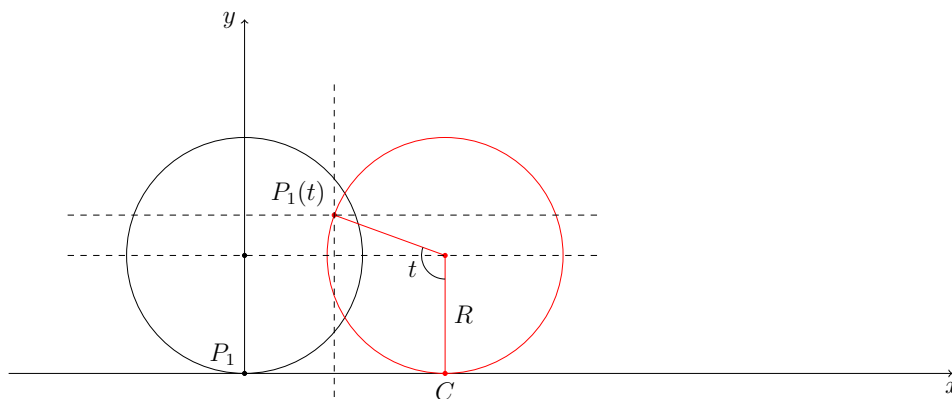


Рис. 1.6. К задаче о циклоиде.

расстояние, на которое смещается точка касания при повороте, равно длине дуги окружности, пройденной точкой P_1 , то есть $|P_1C| = |CP_1(t)| = tR$. Параметризация циклоиды имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = tR - R \sin(t), \\ y(t) = R - R \cos(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

В случае, когда точка не лежит на окружности, формулы принимают вид

$$\begin{cases} x(t) = tR - R_1 \sin(t), \\ y(t) = R - R_1 \cos(t), \end{cases} \quad (1.8)$$

где R_1 – расстояние от этой точки до центра катящейся окружности. При $R_1 < R$ получаем циклоиду для точки P_2 , а при $R_1 > R$ – для точки P_3 .

Вычисление кривизны кривой и её репера Френе

Определённая сложность этой задачи состоит в том, что все необходимые формулы написаны для натуральной параметризации, а формулы перехода к натуральному параметру требуют интегрирования нормы вектора скорости

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{r}(\tau)\| d\tau, \quad (1.9)$$

что может быть довольно трудной задачей.

Утверждение 1.2. Пусть $r(t)$ – регулярная кривая, а t – произвольный параметр, тогда кривизна этой кривой определяется формулой:

$$k(t) = \frac{|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)|}{\|\dot{r}(t)\|^3}. \quad (1.10)$$

Замечание 1.2. Формула (1.10) записана для пространства произвольной размерности. Числитель следует понимать как площадь параллелограмма, натянутого на пару линейно независимых векторов $\dot{r}(t)$ и $\ddot{r}(t)$, которые определяют двумерную плоскость. Если эти вектора линейно зависимы, то выражение в числителе обращается в нуль. В случае, когда $\dim \mathbb{R}^n = 2$ и кривая задаётся как $(x(t); y(t))$, тогда кривизна определяется формулой

$$k(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (1.11)$$

Доказательство. Доказательство формулы строится в два этапа: сперва проверяем, что формула верна для натурального параметра, затем показываем, что она инвариантна относительно замены параметра.

Пусть параметр является натуральным, тогда

$$\|\dot{r}(s)\| = 1, \quad \langle \dot{r}(s), \ddot{r}(s) \rangle = 0,$$

тогда наш параллелограмм оказывается прямоугольником, и

$$k(s) = \frac{\|\dot{r}(s)\| \cdot \|\ddot{r}(s)\|}{\|\dot{r}(s)\|^3} = \|\ddot{r}(s)\|,$$

что в точности совпадает с определением кривизны натурально параметризованной кривой.

Теперь выполним замену параметра. Посмотрим, как преобразуются производные:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2r}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}. \end{aligned}$$

Подставим это в выражения для числителя и знаменателя:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right| &= \left| \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \times \left(\frac{d^2r}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \right) \right| = \left| \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \times \frac{d^2r}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right| + 0 = \\ &= \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \cdot \left| \frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2} \right|, \\ \left\| \frac{dr}{dt} \right\|^3 &= \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \cdot \left\| \frac{dr}{ds} \right\|^3. \end{aligned}$$

Поделив одно на другое, мы видим, что множитель $\left| \frac{ds}{dt} \right|^3$ в числителе и знаменателе сокращается, и получается изначальное выражение для кривизны. $\square$

Замечание 1.3. Из доказательства этого утверждения следует, что вектор ускорения лежит в плоскости, образованной векторами скорости и ускорения в натуральной параметризации:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = a \cdot \frac{d^2 r}{ds^2} + b \cdot \frac{dr}{ds}.$$

Ту же самую плоскость задают вектора $\dot{r}(t)$ и $\ddot{r}(t)$, если только они не являются

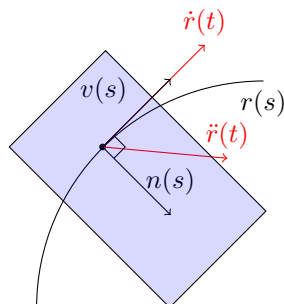


Рис. 1.7. Векторы скорости и ускорения в произвольной параметризации.

линейно зависимыми. Поэтому одним из способов найти главную нормаль – найти плоскость $(\ddot{r}(t), \dot{r}(t))$ и в этой плоскости построить единичный вектор, ортогональный скорости.

Примеры вычисления кривизны

Прямая линия. Параметрически прямая задаётся как набор функций

$$x^i(t) = v^i t + p^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Она является регулярной кривой, поскольку $\dot{r}(t) = v \neq 0$, но не является би-

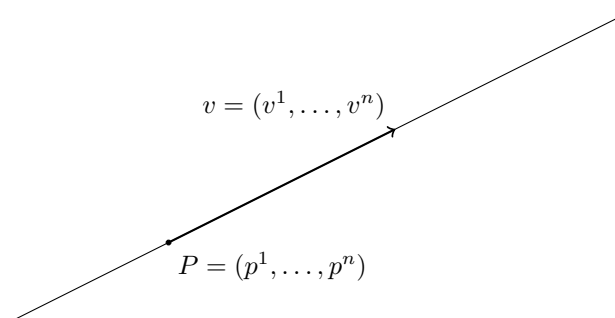


Рис. 1.8. Прямая линия с направляющим вектором v .

регулярной, так как $\ddot{r}(t) = 0$. Следовательно, главная нормаль прямой линии не определена. Однако её кривизна определена и равна $k(t) \equiv 0$, что следует из формулы (1.10).

Окружность. Уравнения для окружности имеют вид

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(t), \\ y(t) = R \sin(t). \end{cases}$$

Координаты её векторов скорости и ускорения равны

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -R \sin(t), & \ddot{x}(t) = -R \cos(t), \\ \dot{y}(t) = R \cos(t). & \ddot{y}(t) = -R \sin(t). \end{cases}$$

Отсюда видно, что $\|\dot{r}(t)\| = R$, и такая параметризация не является натуральной. Чтобы посчитать кривизну, можно поступить двумя способами.

С одной стороны, можно воспользоваться формулой для кривизны в случае произвольной параметризации:

$$k(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\|\dot{r}(t)\|^3} = \frac{|(-R \sin(t))(-R \sin(t)) - (R \cos(t))(-R \cos(t))|}{R^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

С другой стороны, мы можем сделать замену параметра $t = s/R$, тогда

$$\begin{cases} x(s) = R \cos(s/R), & \dot{x}(s) = -\sin(s/R), & \ddot{x}(s) = -\frac{1}{R} \cos(s/R), \\ y(s) = R \sin(s/R). & \dot{y}(s) = \cos(s/R). & \ddot{y}(s) = -\frac{1}{R} \sin(s/R). \end{cases}$$

Откуда

$$k(s) = \|\ddot{r}(s)\| = \frac{1}{R}, \quad n(s) = (-\cos(s/R); -\sin(s/R)).$$

Таким образом, для окружности может быть построен репер Френе.

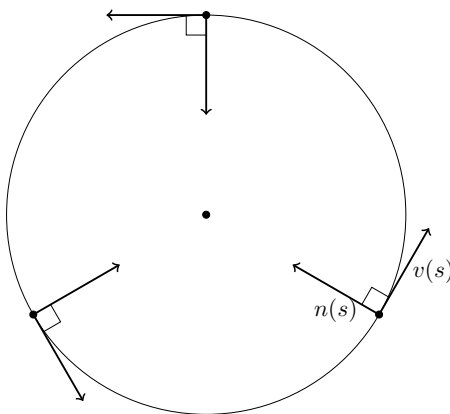


Рис. 1.9. Репер Френе окружности.

Эллипс. Для эллипса с полуосями a и b имеем

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t), \\ y(t) = b \sin(t). \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -a \sin(t), \\ \dot{y}(t) = b \cos(t). \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = -a \cos(t), \\ \ddot{y}(t) = -b \sin(t). \end{cases}$$

Откуда легко получить, что

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}.$$

Вычисление кривизны кривой, заданной неявно

Напомним, что кривая γ называется заданной неявно, если

$$\gamma = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \neq \emptyset, \quad dF|_{\gamma} \neq 0.$$

Задача состоит в том, чтобы посчитать кривизну $k(x_0, y_0)$ такой кривой в некоторой точке $(x_0; y_0) \in \gamma$. Для этого воспользуемся формулой

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Поскольку дифференциал функции F на всей кривой не обращается в нуль, то

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

Это означает, что одна из частных производных отлична от нуля. Для простоты будем считать, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x_0; y_0)} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0)$ существует решение уравнения $F(x, y) = 0$ в виде $y = y(x)$. Тогда параметрическое задание кривой имеет вид $(x, y(x))$, откуда

$$k = \frac{|\ddot{y}|}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (1.12)$$

Вычислим необходимые производные. Для этого продифференцируем уравнение $F(x, y(x)) \equiv 0$:

$$F_x + F_y \cdot \dot{y}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

Дифференцируя ещё раз, мы получаем

$$F_{xx} + F_{xy}\dot{y}(x) + (F_{yx} + F_{yy}\dot{y}(x))\dot{y}(x) + F_y\ddot{y}(x) = 0,$$

откуда

$$\ddot{y}(x) = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}\dot{y}(x) + F_{yy}\dot{y}^2(x)}{F_y}.$$

Заменив $\dot{y}$ на соответствующее отношение производных функции F и подставив выражения для $\dot{y}$ и $\ddot{y}$ в (1.12), получим искомое выражение.

Геометрический смысл кривизны и соприкасающиеся окружности

Пусть задана кривая $r(t)$ и на ней есть точка $P = r(0)$. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через точку P . Они имеют вид $P + t \cdot v$, где v – направляющий

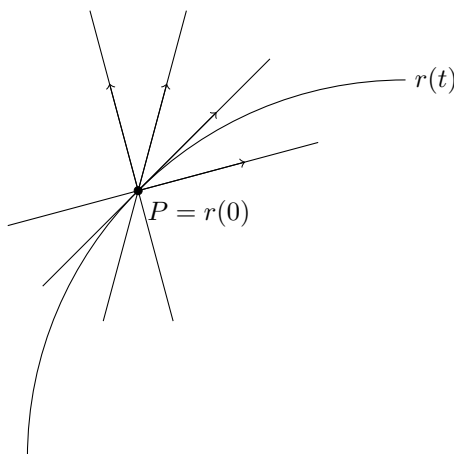


Рис. 1.10. Приближение кривой прямыми.

вектор прямой, t – параметр. Зададимся вопросом, какая из этих прямых лучше всего приближает нашу кривую в точке P .

Определение 1.10. Прямая $P + t \cdot v$ называется **касательной к кривой в точке P** , если

$$\|r(t) - P - t \cdot v\| = \bar{o}(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Раскладывая кривую в ряд, получим

$$r(t) = r(0) + \dot{r}(0)t + \bar{o}(t) = P + \dot{r}(0)t + \bar{o}(t).$$

Откуда заключаем, что прямая является касательной к кривой в точке P , если и только если $v = \dot{r}(0)$.

С точностью до второго порядка кривую можно приблизить окружностью.

Определение 1.11. Окружность $c(t)$, такая, что

$$\|r(t) - c(t)\| = \bar{o}(t^2), \quad t \rightarrow 0 \quad (1.14)$$

называется **соприкасающейся** с кривой $r(t)$.

Радиус такой окружности равен $R = 1/k$, а центр находится как $O = P + n/k$, где K и n – кривизна и главная нормаль кривой в точке P . Как и ранее $P = r(0) = c(0)$. Чтобы проверить это, выполним натуральную параметризацию:

$$r(s) = P + v \cdot s + \ddot{r}(0) \cdot \frac{s^2}{2} + \dots = P + v \cdot s + \frac{kn}{2} \cdot s^2 + \dots$$

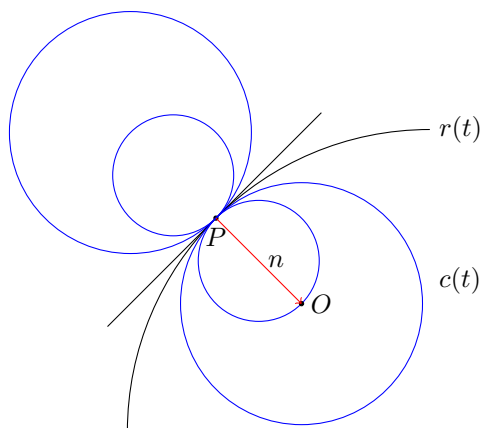


Рис. 1.11. Приближение кривой окружностями.

Уравнение окружности записывается как

$$c(s) = O + R \left(\cos(s/R); \pm \sin(s/R) \right).$$

В окрестности точки P :

$$c(s) = c(0) + \dot{c}(0)s + \ddot{c}(0) \cdot \frac{s^2}{2} + \dots = P + vs + \frac{n \cdot s^2}{2R} + \dots$$

Таким образом, необходимая малость $\|r(s) - c(s)\|$ достигается при $k = 1/R$. Точка O называется **центром кривизны**, а $R = 1/k$ – **радиусом кривизны**.

Эквидистанта и эволюта

Определение 1.12. ε -эквидистантой называется кривая, задаваемая как

$$\rho_\varepsilon(t) = r(t) + \varepsilon n(t). \quad (1.15)$$

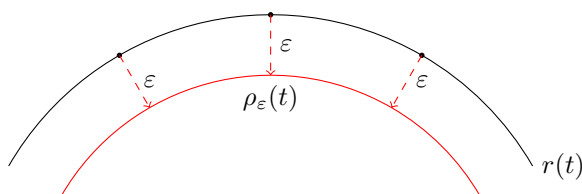


Рис. 1.12. ε -эквидистанта.

Если ε мало, то эквидистанта регулярной кривой будет регулярной кривой. Но при больших значениях могут возникать вырождения. Например, при построении эквидистанта окружности в направлении центра происходит вырождение в точку.

Определение 1.13. Кривая, составленная из точек, где вектор скорости эквидистанта обращается в нуль, называется **эволютой**, или **каустикой**.

Пусть s – натуральный параметр, уравнение эквидистанты имеет вид

$$\rho_\varepsilon(s) = r(s) + \varepsilon n(s).$$

Продифференцируем по параметру:

$$\dot{\rho}_\varepsilon(s) = \dot{r}(s) + \varepsilon \dot{n}(s) = v(s) - \varepsilon k(s)v(s) = v(s)(1 - \varepsilon k(s)).$$

Здесь мы воспользовались одной из формул Френе:

$$\begin{cases} \dot{n}(s) = -k(s)v(s), \\ \dot{v}(s) = k(s)n(s). \end{cases} \quad (1.16)$$

Таким образом, вектор скорости эквидистанты обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\varepsilon = 1/k(s)$. Отсюда уравнение каустики бирегулярной кривой имеет вид

$$\rho_\varepsilon(s) = r(s) + \frac{n(s)}{k(s)} = O(s). \quad (1.17)$$

То есть каустика совпадает со множеством центров кривизны кривой $r(s)$.

Задача 1.1. Проверить, что каустики циклоиды также являются циклоидами.

Семинар 2

Бинормаль и кручение

Ранее было сказано, что в случае, когда $\dim \mathbb{R}^N = 2$, для бирегулярной кривой может быть построен репер Френе, состоящий из пары векторов $(v(s), n(s))$. Такой же базис может быть построен при $N = 3$.

Определение 2.1. Вектором бинормали бирегулярной кривой в трёхмерном пространстве называется вектор

$$b = [v, n]. \quad (2.1)$$

Определение 2.2. Репером Френе кривой в трёхмерном пространстве называется тройка векторов (v, n, b) .

Определение 2.3. Кручением кривой $\varkappa(s)$ называется коэффициент пропорциональности между производной вектора бинормали по натуральному параметру и вектором главной нормали:

$$\dot{b}(s) = -\varkappa(s)n(s). \quad (2.2)$$

Формулы Френе в трёхмерном случае имеют вид

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = k(s)n(s), \\ \dot{n}(s) = -k(s)v(s) + \varkappa(s)b(s), \\ \dot{b}(s) = -\varkappa(s)n(s). \end{cases} \quad (2.3)$$

Эта система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Теорема 2.1. Пусть заданы гладкие функции $f(s) > 0$ и $g(s)$. Тогда существует единственная (с точностью до сохраняющего ориентацию движения трёхмерного пространства) пространственная бирегулярная натурально параметризованная кривая $r(s)$, такая, что её кривизна $k(s) = f(s)$, а её кручение $\varkappa(s) = g(s)$.

Вычисление кривизны и кручения произвольно параметризованной кривой

Также, как и в двумерном случае, эту задачу можно решать с использованием натуральной параметризации, где существует трудность вычисления интеграла длины, а можно написать необходимые формулы в общем случае.

Напомним, что для произвольной параметризации формула кривизны имеет вид

$$k(t) = \frac{|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)|}{\|\dot{r}(t)\|^3}.$$

Утверждение 2.1. Для произвольной параметризации кручение находится как

$$\varkappa(t) = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2}, \quad (2.5)$$

где в числителе стоит смешанное произведение векторов.

Доказательство. Проверим, что эта формула верна для натуральной параметризации:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v(s), \\ \ddot{r} &= \dot{v} = k(s)n(s), \\ \ddot{\ddot{r}} &= \dot{k}n + k\dot{n} = \dot{k}n + k(-kv + \varkappa b) = \\ &= -k^2(s)v(s) + \dot{k}(s)n(s) + k(s)\varkappa(s)b(s). \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} (\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}}) &= (v, kn, -k^2v + \dot{k}n + k\varkappa b) = (v, kn, k\varkappa b) = k^2\varkappa(v, n, b) = \\ &= k^2(s)\varkappa(s), \\ |\dot{r} \times \ddot{r}|^2 &= |v \times kn|^2 = k^2|b|^2 = k^2(s). \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2} = \frac{k^2(s)\varkappa(s)}{k^2(s)} = \varkappa(s).$$

Задача 2.1. Доказать, что формула инвариантна относительно замены параметра. □

Вычисление репера Френе произвольно параметризованной кривой

Вектор v вычисляется проще всего:

$$v(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|}. \quad (2.6)$$

Следующим удобно вычислить вектор бинормали. Ранее мы выяснили, что вектор ускорения лежит в плоскости, образованной векторами v и n . Следовательно, вектор бинормали может быть посчитан как

$$b(t) = \frac{[\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)]}{\|[\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)]\|}. \quad (2.7)$$

Наконец, вектор главной нормали вычисляется как

$$n(t) = [b(t) \times v(t)]. \quad (2.8)$$

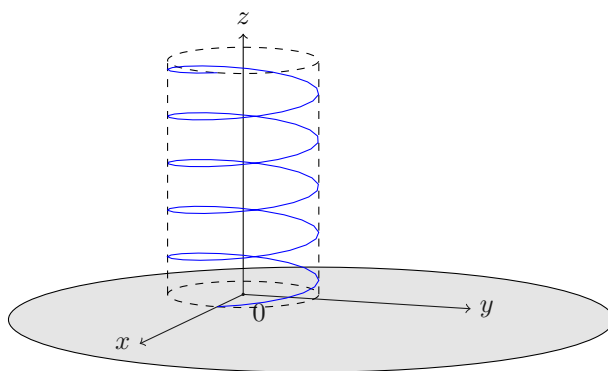


Рис. 2.1. Винтовая линия.

В качестве примера рассмотрим задачу о нахождении кривизны, кручения и репера Френе винтовой линии. Винтовая линия задаётся уравнениями:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t), \\ y(t) = a \sin(t), \\ z(t) = bt, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $a > 0$, $b \neq 0$.

Вычислим производные:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a \sin(t), \\ \dot{y}(t) = a \cos(t), \\ \dot{z}(t) = b. \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = -a \cos(t), \\ \ddot{y}(t) = -a \sin(t), \\ \ddot{z}(t) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\ddot{x}}(t) = a \sin(t), \\ \ddot{\ddot{y}}(t) = -a \cos(t), \\ \ddot{\ddot{z}}(t) = 0. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\|\dot{r}(t)\|^2 = a^2 + b^2.$$

Теперь вычислим векторное произведение векторов скорости и ускорения:

$$[\dot{r} \times \ddot{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin(t) & a \cos(t) & b \\ -a \cos(t) & -a \sin(t) & 0 \end{vmatrix} = (ab \sin(t); -ab \cos(t); a^2).$$

$$|\dot{r} \times \ddot{r}|^2 = (ab \sin(t))^2 + (-ab \cos(t))^2 + (a^2)^2 = a^2(a^2 + b^2).$$

Откуда можем найти кривизну:

$$k(t) = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \quad (2.10)$$

Для расчёта кручения необходимо вычислить смешанное произведение:

$$(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}}) = \begin{vmatrix} -a \sin(t) & a \cos(t) & b \\ -a \cos(t) & -a \sin(t) & 0 \\ a \sin(t) & -a \cos(t) & 0 \end{vmatrix} = a^2 b,$$

и тогда

$$\kappa(t) = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (2.11)$$

Замечание 2.1. Интересно отметить, что если мы поставим задачу описать все бигулярные кривые постоянной кривизны и кручения, то окажется, что это винтовые линии. Показать это можно, либо решая уравнения Френе с постоянными коэффициентами, либо сославшись на теорему существования и единственности. То есть, если мы покажем, что для любых $k > 0$ и κ найдутся числа a, b , такие, что

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \kappa = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

то тогда мы можем предъявить винтовую линию как кривую с заданными кручением и кривизной, а затем сослаться на теорему существования и единственности, согласно которой, с точностью до движения других кривых просто не существует.

Перейдём к вычислению репера Френе винтовой линии.

$$v(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|} = \frac{(-a \sin(t); a \cos(t); b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.12)$$

$$b(t) = \frac{[\dot{r}(t), \ddot{r}(t)]}{\|[\dot{r}(t), \ddot{r}(t)]\|} = \frac{(b \sin(t); -b \cos(t); a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.13)$$

$$n(t) = [b(t), v(t)] = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ b \sin(t) & -b \cos(t) & a \\ -a \sin(t) & a \cos(t) & b \end{vmatrix} = (-\cos(t); -\sin(t); 0). \quad (2.14)$$

Описание плоских бигулярных кривых в трёхмерном пространстве

Утверждение 2.2. Кривая является плоской тогда и только тогда, когда её кручение равно нулю.

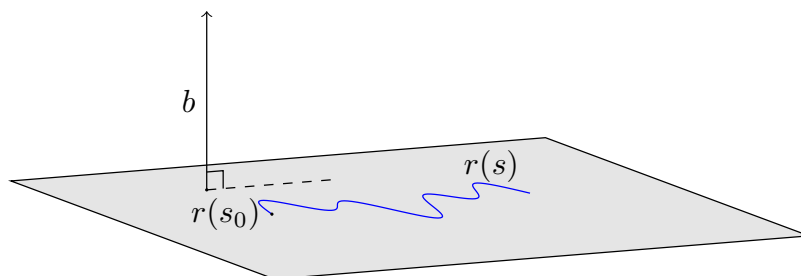


Рис. 2.2. Плоская кривая.

Доказательство. Пусть $\varkappa = 0$, тогда в натуральной параметризации

$$\dot{b}(s) = -\varkappa(s)n(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad b(s) = \text{const.}$$

Рассмотрим функцию натурального параметра

$$f(s) = \langle r(s) - r(s_0), b \rangle$$

и её производную по параметру

$$\dot{f}(s) = \langle \dot{r}(s), b \rangle = \langle v(s), b(s) \rangle = 0.$$

Откуда можем заключить, что $f(s) = \text{const.}$ Эту константу легко вычислить:

$$f(s) = f(s_0) = \langle r(s_0) - r(s_0), b \rangle = 0.$$

Но выражение

$$\langle r(s) - r(s_0), b \rangle = 0$$

есть уравнение плоскости, в которой лежит любая точка $r(s)$. Таким образом, $r(s)$ – плоская кривая.

В обратную сторону. Пусть кривая $r(s)$ лежит в плоскости, которая задаётся уравнением

$$\langle r(s) - r(s_0), a \rangle = 0 \quad \forall s,$$

где a – постоянный вектор нормали к плоскости. Дважды продифференцируем это уравнение по параметру

$$\begin{aligned} \langle \dot{r}(s), a \rangle &= \langle v(s), a \rangle = 0 \quad \forall s, \\ \langle \dot{v}(s), a \rangle &= \langle k(s)n(s), a \rangle = 0 \quad \forall s, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что $v(s) \perp a$ и $n(s) \perp a$ для любого s . Следовательно, $[v, n] \parallel a$ и $\|[v, n]\| = 1$, что означает, что $[v, n] = \text{const.}$ Но это векторное произведение совпадает с определением вектора бинормали кривой, а раз он является постоянным, то из определения кручения следует, что $\varkappa = 0$. $\square$

Кривые на двумерной сфере в трёхмерном пространстве

Утверждение 2.3. Бирегулярная кривая $r(s)$ в $\mathbb{R}^3$ с кручением $\varkappa \neq 0$ лежит на сфере $S^2(R)$ тогда и только тогда, когда

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2} \right). \quad (2.15)$$

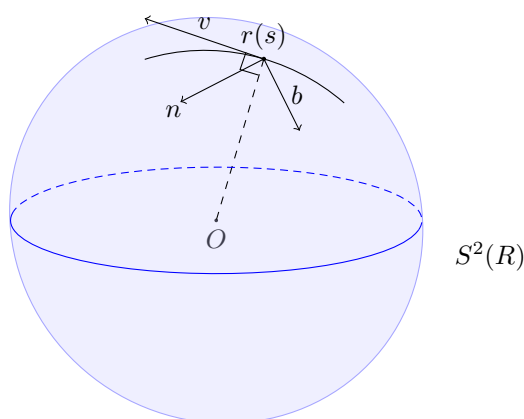


Рис. 2.3. Кривая на сфере.

Доказательство. Поскольку радиус сферы должен быть ортогонален вектору скорости, то вектор $O(s) - r(s)$ может быть разложен по векторам (n, b) :

$$O(s) = r(s) + A(s) \cdot n(s) + B(s) \cdot b(s),$$

где A, B – коэффициенты разложения, зависящие от параметра. Условиями того, что кривая лежит на сфере, являются неподвижность её центра и то, что все точки кривой равноудалены от этого центра:

$$\dot{O}(s) = 0, \quad |r(s) - O(s)|^2 = R^2.$$

Подставляя во второе условие выражение для $O(s)$ и учитывая то, что норма векторов n и b равна единице, получим:

$$\dot{O}(s) = 0, \quad A^2(s) + B^2(s) = R^2.$$

Итак, предположим, что кривая $r(s)$ лежит на сфере, тогда из условия неподвижности центра следует, что

$$0 = \dot{O}(s) = \dot{r}(s) + \dot{A}n + A\dot{n} + \dot{B}b + B\dot{b}.$$

Используя формулы Френе получаем, что

$$v(s) + \dot{A}n + A(-kv(s) + \kappa b(s)) + \dot{B}b + B(-\kappa n) = 0,$$

$$(1 - Ak)v(s) + (\dot{A} - \kappa B)n(s) + (\dot{B} + \kappa A)b(s) = 0.$$

Поскольку векторы (v, n, b) образуют базис, то

$$\begin{cases} 1 - Ak = 0, \\ \dot{A} - \kappa B = 0, \\ \dot{B} + \kappa A = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$A = \frac{1}{k}, \quad B = -\frac{\dot{k}}{k^2 \varkappa}.$$

Тогда

$$R^2 = A^2 + B^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{\dot{k}^2}{\varkappa^2 k^4} = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2} \right).$$

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть верно соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2} \right).$$

Покажем, что $O(s) = \text{const}$ и $|O(s) - r(s)|^2 = R^2$. Для этого в разложении $O(s)$ положим

$$A = \frac{1}{k}, \quad B = -\frac{\dot{k}}{k^2 \varkappa}.$$

Тогда, повторяя уже сделанную выкладку, имеем

$$\begin{aligned} \dot{O}(s) &= (1 - Ak) \dot{v}(s) + (\dot{A} - \varkappa B) \dot{n}(s) + (\dot{B} + \varkappa A) \dot{v}(s) = 0 + 0 + (\dot{B} + \varkappa A) \dot{v}(s) = \\ &= (\dot{B} + \varkappa A) \dot{v}(s). \end{aligned}$$

Чтобы увидеть, что это равно нулю, продифференцируем соотношение

$$R^2 = A^2 + B^2,$$

$$0 = 2(A\dot{A} + B\dot{B}) = 2 \left(-\frac{\dot{k}}{k^2} A - \frac{\dot{k}}{k^2 \varkappa} \dot{B} \right) \Rightarrow A + \frac{\dot{B}}{\varkappa} = 0.$$

Таким образом, $\dot{O}(s) = 0$, а выбором A и B мы обеспечили выполнение условия $|O(s) - r(s)|^2 = R^2$. $\square$

Семинар 3

Понятие поверхности.

Касательный вектор и касательное пространство

Определение 3.1. k -мерной поверхностью в n -мерном пространстве называется его подмножество $M^k \subset \mathbb{R}^n$, заданное одним из трёх локально эквивалентных способов:

- как образ регулярной параметрической поверхности

$$r : \Omega \subset \mathbb{R}^k(u^1, \dots, u^k) \rightarrow \mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n), \quad x^i = x^i(u^1, \dots, u^k), \quad k \leq n, \quad (3.1)$$

причём

$$\text{rk} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right) = k. \quad (3.2)$$

То есть $M^k = r(\Omega)$.

- как поверхность-график. Для простоты будем считать, что $k = n - 1$, тогда

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \mid x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \right\}. \quad (3.3)$$

- как неявно заданная поверхность:

$$M^k = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \mid F_i(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - k \right\} \neq \emptyset, \quad (3.4)$$

причём

$$\text{rk} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j} \right) = n - k. \quad (3.5)$$

Определение 3.2. Пусть на поверхности M^k задана кривая $\gamma : I \rightarrow M$. То есть в Ω заданы функции $u^i(t)$, где $i = 1, \dots, k$, а в $\mathbb{R}^n$ заданы $x^j(t) = x^j(u^1(t), \dots, u^k(t))$. Пусть на этой поверхности задана точка $P = \gamma(t_0) \in M^k$. Тогда **касательным вектором к кривой γ в точке P** называется вектор

$$\dot{\gamma}(t_0) = (\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0)) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Определение 3.3. Касательным пространством к поверхности M в точке P называется множество касательных векторов всех кривых, проходящих через точку P

$$T_P M = \left\{ \dot{\gamma}(P) \mid \gamma \ni P \right\}. \quad (3.7)$$

Касательное пространство $T_P M$ имеет структуру линейного пространства размерности k . В качестве базиса такого пространства выбираются вектора

$$\partial_{u^i} \equiv \partial_i = \frac{\partial r}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i} \Big|_P, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i} \Big|_P \right)^T. \quad (3.8)$$

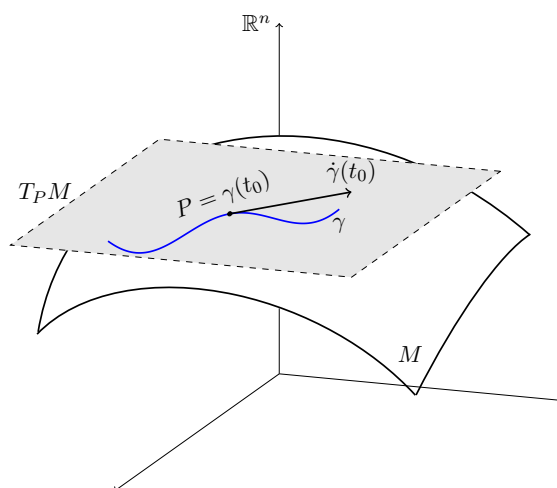


Рис. 3.1. Касательный вектор и касательное пространство в точке P .

Тогда касательный вектор записывается в виде линейной комбинации

$$\dot{\gamma} = \sum_{i=1}^k \dot{u}^i(t_0) \partial_{u^i}. \quad (3.9)$$

Пусть на поверхности есть две системы координат $(v^1, \dots, v^k)$ и $(u^1, \dots, u^k)$ и между ними существует связь $u^i(v^1, \dots, v^k)$ и $v^j(u^1, \dots, u^k)$, причём эти функции предполагаются гладкими и регулярными (бесконечно дифференцируемые и матрица Якоби невырождена в каждой точке). Тогда на поверхности существуют два базиса $\{\partial_{u^i}\}$ и $\{\partial_{v^j}\}$, которые связаны матрицей Якоби

$$\partial_{u^i} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \partial_{v^j}. \quad (3.10)$$

Вычисление длины кривой и углов между кривыми. Первая фундаментальная форма

Напомним, что длина кривой ищется как

$$l(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}\| dt, \quad (3.11)$$

а косинус угла между кривыми γ_1 и γ_2 в точке P рассчитывается как

$$\cos(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle}{\|\dot{\gamma}_1\| \cdot \|\dot{\gamma}_2\|}. \quad (3.12)$$

Вычисление этих величин может быть выполнено с использованием параметризующего отображения $x^j(t)$, но это не всегда удобно и не всегда просто. Более того, чаще всего кривые на поверхностях оказываются заданы из естественных соображений, то есть они заданы в координатах на поверхности $u^i(t)$.

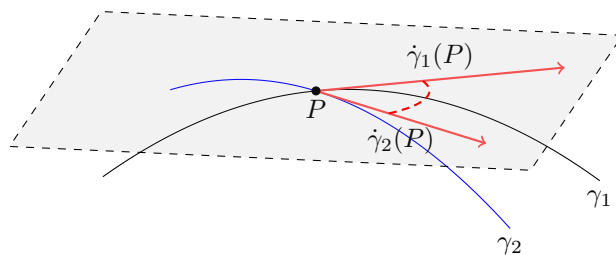


Рис. 3.2. Угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке P .

Определение 3.4. Пусть вектора $a, b \in T_P M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда определено их скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ как в евклидовом пространстве со всеми сопутствующими свойствами. **Первой фундаментальной формой поверхности**, или **индуцированной метрикой поверхности**, называется билинейная форма $g(P)(a, b)$ на $T_P M$, такая, что

$$\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} = g(P)(a, b). \quad (3.13)$$

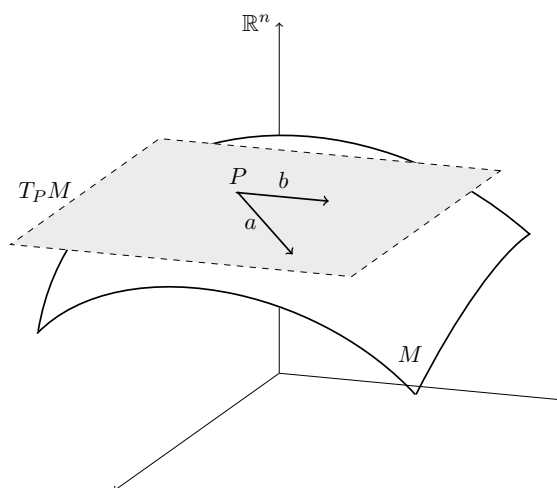


Рис. 3.3. Вектора a и b в касательном пространстве.

Определение 3.5. Если вектора a и b разложены по векторам канонического базиса

$$a = \sum a^i \partial_{u^i}, \quad b = \sum b^j \partial_{u^j},$$

тогда их скалярное произведение в евклидовом пространстве расписывается как

$$\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i,j} a^i b^j \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle \equiv \sum_{i,j} a^i b^j g_{ij},$$

а матрица $(g_{ij}) = G(P)$ называется **матрицей первой фундаментальной формы** (матрицей Грама базиса $(\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k})$).

Таким образом, если матрица $G(P)$ известна, то значение первой фундаментальной формы на паре векторов может быть вычисленно как

$$g(P)(a, b) = \sum a^i b^j g_{ij}. \quad (3.14)$$

Если на одной и той же поверхности заданы разные координаты $(v^1, \dots, v^k)$ и $(u^1, \dots, u^k)$, и первому базису отвечает матрица первой формы (h_{pq}) , а второму – (g_{ij}) , то можно найти связь между ними:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle = \left\langle \sum_p \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \partial_{v^p}, \sum_q \frac{\partial v^q}{\partial u^j} \partial_{v^q} \right\rangle = \sum_{pq} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial v^q}{\partial u^j} \langle \partial_{v^p}, \partial_{v^q} \rangle = \\ &= \sum_{pq} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial v^q}{\partial u^j} h_{pq}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для удобства будем записывать билинейную форму $g(P)$ в дифференциалах

$$ds^2 = \sum g_{ij} du^i du^j. \quad (3.16)$$

Стандартные задачи

Вычисление компонент первой фундаментальной формы поверхности, заданной как график

Перейдём к рассмотрению конкретных задач. Вычислим компоненты первой фундаментальной формы поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданной как график $z = f(x, y)$. Сперва зададим параметрическое отображение $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$, которое действует из области $\Omega \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ в $\mathbb{R}^3$. Вычислим элементы матрицы фундаментальной формы, для этого посчитаем производные

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Тогда

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Вычисление компонент первой фундаментальной формы на цилиндре

Пусть параметрически задан цилиндр

$$\begin{cases} x = R \cos(\varphi), \\ y = R \sin(\varphi), \\ z = z. \end{cases}$$

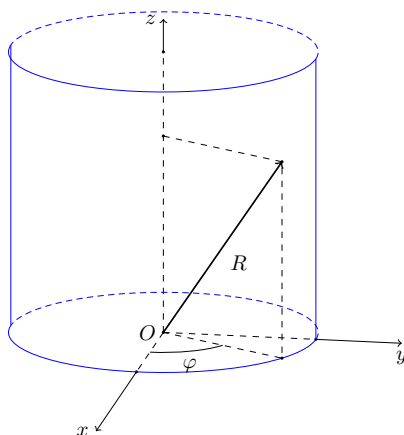


Рис. 3.4. Параметризация цилиндра.

Вектора канонического базиса имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_\varphi &= (-R \sin(\varphi); R \cos(\varphi); 0), \\ \partial_z &= (0; 0; 1).\end{aligned}$$

Тогда первая фундаментальная форма и её матрица имеют вид

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление компонент первой фундаментальной формы на сфере

Параметрически сфера задаётся как

$$\begin{cases} x = R \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y = R \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = R \cos(\theta). \end{cases}$$

При этом $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Интервалы взяты открытыми, чтобы параметризация была регулярной. Вектора канонического базиса имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_\theta &= (R \cos(\theta) \cos(\varphi); R \cos(\theta) \sin(\varphi); -R \sin(\theta)), \\ \partial_\varphi &= (-R \sin(\theta) \sin(\varphi); R \sin(\theta) \cos(\varphi); 0).\end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что эти вектора ортогональны. Тогда первая фундаментальная форма и её матрица имеют вид

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

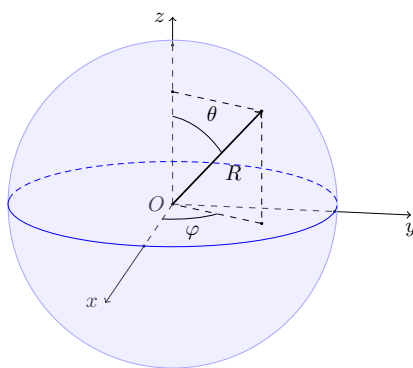


Рис. 3.5. Параметризация сферы.

С помощью полученного результата можно вычислить длину параллели. Это, конечно, можно сделать, исходя из более простых соображений: заметить, что параллель является окружностью радиуса $\rho = R \sin(\theta_0)$, и тогда её длина равна $2\pi R \sin(\theta_0)$.

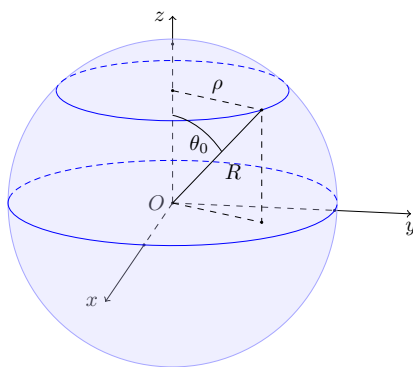


Рис. 3.6. Вычисление длины параллели.

Параллель на сфере задаётся как

$$\gamma(t) = (\theta_0, t).$$

Её вектор скорости равен

$$\dot{\gamma} = (0, 1).$$

Квадрат его нормы вычислим через первую фундаментальную форму сферы:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= g(P)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = R^2 d\theta^2(\dot{\gamma}) + R^2 \sin^2(\theta_0) d\varphi^2(\dot{\gamma}) = R^2 \cdot 0 + R^2 \sin^2(\theta_0) \cdot 1 = \\ &= R^2 \sin^2(\theta_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\dot{\gamma}\| = R \sin(\theta_0)$. Тогда длина параллели равна

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} R \sin(\theta_0) dt = 2\pi R \sin(\theta_0).$$

Углы и длины сторон криволинейного треугольника

Пусть задана поверхность, первая фундаментальная форма которой имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

На этой поверхности задан криволинейный треугольник, ограниченный кривыми

$$v = 1, \quad u = \pm \frac{1}{2}av^2, \quad a > 0.$$

Задача заключается в нахождении величин его углов и длин его сторон.

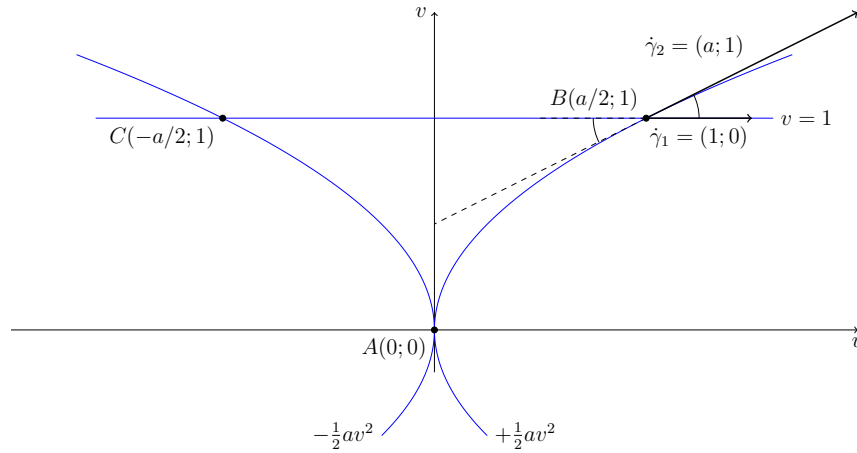


Рис. 3.7. Криволинейный треугольник.

Координаты вершин этого треугольника находим из условия пересечения его сторон: $A(0; 0)$, $B(a/2; 0)$, $C(-a/2; 0)$. Заметим, что метрика не зависит от знака u , откуда следует, что $|AB| = |AC|$ и $\angle B = \angle C$.

Вычислим $|CB|$. Эта сторона параметризуется на поверхности как

$$\gamma_1(t) = (t, 1), \quad t \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right].$$

Её вектор скорости равен $\dot{\gamma}_1(t) = (1, 0)$, а его норма

$$\|\dot{\gamma}_1\|^2 = ds^2(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1) = \sum_{i,j} g_{ij}(u(t), v(t)) \dot{u}^i \dot{v}^j = (1; 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 + a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\|\dot{\gamma}_1\| = 1.$$

Таким образом,

$$|CB| = \int_{-a/2}^{a/2} 1 \cdot dt = a.$$

Перейдём к вычислению $|AB|$. Параметризация этой стороны имеет вид

$$\gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2}at^2; t\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}_2(t) = (at; 1), \quad t \in [0; 1].$$

Квадрат длины вектора скорости равен

$$\|\dot{\gamma}_2(t)\|^2 = ds^2(\dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_2) = (at)^2 + \left(\frac{a^2t^4}{4} + a^2\right) = \frac{a^2}{4}(t^4 + 4t^2 + 4) = \frac{a^2}{4}(t^2 + 2)^2.$$

$$\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \frac{a}{2}(t^2 + 2).$$

Наконец, вычислим длину стороны AB

$$|AB| = \frac{a}{2} \int_0^1 (t^2 + 2) dt = \frac{a}{2} \left(\frac{t^3}{3} + 2t \right) \Big|_0^1 = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{7}{6}a.$$

Теперь займёмся вычислением углов в треугольнике. Начнём с угла $\angle B$. В этой точке вектора скоростей кривых γ_1 и γ_2 имеют вид

$$\dot{\gamma}_1 = (1; 0), \quad \dot{\gamma}_2 = (a; 1).$$

Также в этой точке можно посчитать метрику

$$ds^2 \Big|_B = du^2 + \left(\frac{a^2}{4} + a^2 \right) dv^2.$$

Скалярное произведение векторов скорости кривых равно

$$\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = a + 0 = a.$$

Тогда

$$\cos(B) = \frac{\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle}{\|\dot{\gamma}_1\| \cdot \|\dot{\gamma}_2\|} = \frac{a}{1 \cdot \frac{3}{2}a} = \frac{2}{3}.$$

Для вычисления угла A нужно параметризовать сторону AC :

$$\gamma_3(t) = \left(-\frac{a}{2}t^2; t\right), \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}_3(t) = (-at, 1), \quad t \in [0; 1].$$

Вектора $\dot{\gamma}_2$ и $\dot{\gamma}_3$ в точке A имеют вид

$$\dot{\gamma}_2 = (0; 1), \quad \dot{\gamma}_3 = (0; 1).$$

Угол между такими векторами, конечно, равен нулю $\angle A = 0$.

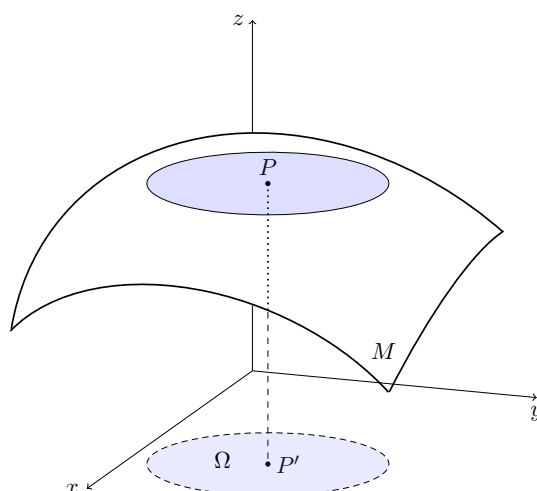


Рис. 3.8. Поверхность, заданная неявно.

Поверхность, заданная неявно. Поверхность вращения

Пусть двумерная поверхность $M^2(\mathbb{R}^3)$ задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

Запишем её первую фундаментальную форму. Считаем, что данное уравнение является гладким и регулярным, то есть его дифференциал на множестве решений не обращается в нуль. Предположим, что в точке $P \in M^2$ в нуль не обращается частная производная $F_z|_P \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции, в окрестности точки P уравнение разрешимо. То есть в плоскости xy , в окрестности Ω проекции P' точки P на эту плоскость определена гладкая функция $z(x, y)$, такая, что

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Тогда мы имеем дело с поверхностью-графиком $(x, y, z(x, y))$. Матрица первой фундаментальной формы имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая

$$F_x + F_z \cdot z_x = 0, \quad F_y + F_z \cdot z_y = 0,$$

получаем, что

$$(g_{ij}) = \frac{1}{F_z^2} \begin{pmatrix} F_x^2 + F_z^2 & F_x F_y \\ F_x F_y & F_y^2 + F_z^2 \end{pmatrix}.$$

Теперь прокомментируем случай, когда задана кривая, например, график какой-то функции $f(z) > 0$, вращающаяся вокруг вертикальной оси z . Образованная таким образом поверхность называется **поверхностью вращения**. Её параметриче-

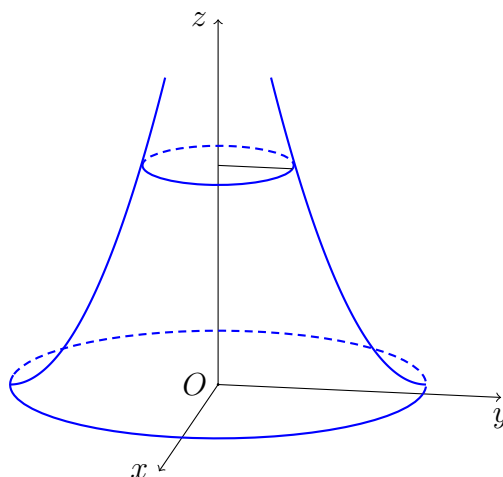


Рис. 3.9. Поверхность вращения.

ское задание имеет вид

$$\begin{cases} x = f(z) \cos(\varphi), \\ y = f(z) \sin(\varphi), \\ z = z. \end{cases}$$

Поиск первой фундаментальной формы такой поверхности – очень полезная задача.

Семинар 4

Вторая фундаментальная форма

Первой фундаментальной формы недостаточно для определения поверхности. Например, подходящим выбором координат можно сделать так, чтобы матрицы первых фундаментальных форм плоскости и прямого кругового цилиндра были равны друг другу. За форму поверхности отвечает вторая фундаментальная форма.

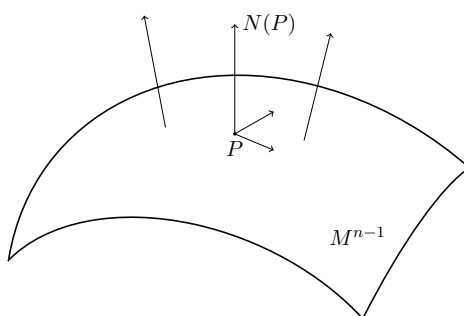


Рис. 4.1. Поле нормалей.

Определение 4.1. Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – гиперповерхность, а $T_P M$ – её касательное пространство в точке $P \in M^{n-1}$. Построим в этой точке вектор нормали $N(P)$ к $T_P M$ единичной длины. Тогда **второй фундаментальной формой поверхности**, или **формой вложения**, называют квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$(q_{ij}) = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle. \quad (4.1)$$

Замечание 4.1. Вообще говоря, в точке P могут быть построены несколько нормалей, например, в случае гиперповерхности их будет две. Тогда говорят о выборе ориентации на поверхности. В фиксированной параметризации $(u^1, \dots, u^{n-1})$ строится базис касательного пространства $T_P M$ и дополняется до базиса $\mathbb{R}^n$ таким вектором нормали, чтобы набор $\{\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^{n-1}}, N\}$ был положительно определённым базисом. В локальной теории этот вопрос можно обойти стороной.

Теорема 4.1. (Теорема об отношении пары форм)

Пусть задана некоторая поверхность M . На этой поверхности задана кривая $\gamma \subset M$, на которой лежит точка $P \in \gamma$. Пусть $v = \dot{\gamma}$ – вектор скорости кривой γ в точке P . Тогда

$$\frac{q(v, v)}{g(v, v)} = k \cdot \cos(\theta), \quad (4.2)$$

где k – кривизна кривой γ , а θ – угол между нормалью к поверхности N и главной нормалью кривой n в точке P .

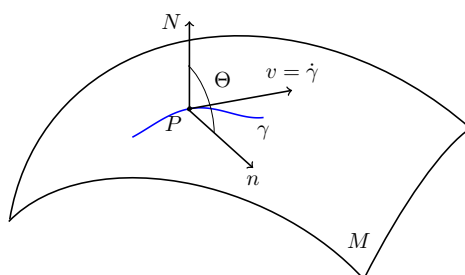


Рис. 4.2. К теореме об отношении пары форм.

Главные кривизны. Векторы главных направлений

В каждом касательном пространстве $T_P M$ можно выбрать такой базис из единичных векторов $(e_1, \dots, e_{n-1})$, в котором матрицы первой и второй фундаментальных форм имеют вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (q_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ называются **главными кривизнами** поверхности в соответствующей точке, и могут быть найдены как корни характеристического уравнения

$$\det(Q - \lambda G) = 0, \quad (4.4)$$

где G и Q – первая и вторая фундаментальная форма. Векторы $v_i \neq 0$, такие, что

$$(Q - \lambda_i G)v_i = 0, \quad (4.5)$$

называются **векторами главных направлений**.

Геометрический смысл главных кривизн и направлений заключается в следующем. Пусть к поверхности M в точке P построено касательное пространство $T_P M$. Выберем в этом пространстве вектор главного направления v_i и вектор нормали к поверхности $N(P)$. Пара этих векторов задаёт плоскость $\Pi(v_i, N)$, которая пересекает поверхность M . Кривая $\gamma_i = \Pi(v_i, N) \cap M$ называется **главным нормальным сечением**, и её кривизна $k(\gamma_i) = \pm \lambda_i$. Выбор знака обусловлен ориентацией вектора нормали. Если N сонаправлен с вектором главной нормали n_i главного нормального сечения, то выбирается знак “плюс”, иначе – “минус”.

Также обычно определяют **среднюю кривизну поверхности**

$$H = \sum_i \lambda_i \quad (4.6)$$

и **гауссову кривизну**

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}. \quad (4.7)$$

Эти величины могут быть вычислены как

$$K = \frac{\det Q}{\det G}, \quad H = \text{Tr}(QG^{-1}). \quad (4.8)$$

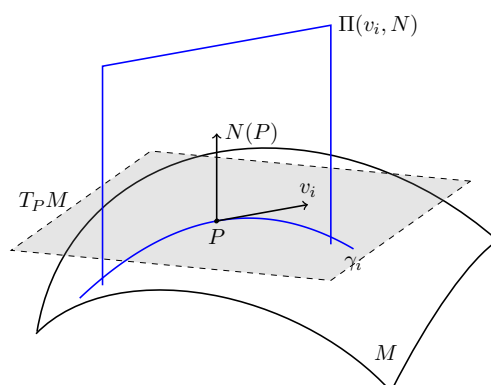


Рис. 4.3. Главное нормальное сечение.

Формула Эйлера

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ – некоторая поверхность, к которой в точке P построены касательное пространство $T_P M$, нормаль к поверхности $N(P)$ и выбран некоторый вектор $v \in T_P M$. Также, как и раньше, эта пара векторов определяет плоскость $\Pi(v, N)$ с той лишь разницей, что v – произвольный касательный вектор. Пусть $\gamma = \Pi \cap M$ – нормальное сечение. Тогда кривизна этого сечения

$$\pm k(\gamma) = \lambda_1 \cos^2(\varphi) + \lambda_2 \sin^2(\varphi), \quad (4.9)$$

где λ_1, λ_2 – главные кривизны, отвечающие векторам главных направлений e_1, e_2 , а угол φ – угол между векторами v и e_1 . Знак в формуле Эйлера выбирается так же, как и для кривизны главного нормального сечения. $k(\gamma)$ ещё называют ориентированной кривизной нормального сечения. Она является гладкой функцией угла $\varphi \in (0; 2\pi)$ и имеет минимумы и максимумы, равные λ_1 и λ_2 , соответствующие главным направлениям.

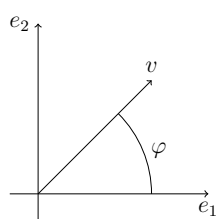


Рис. 4.4. Базис главных направлений.

Вычисление второй фундаментальной формы, главных кривизн и векторов главных направлений

Цилиндр. Выполним параметризацию цилиндра и вычислим производные

$$r(\varphi, z) = (R \cos(\varphi); R \sin(\varphi); z),$$

$$r_\varphi(\varphi, z) = (-R \sin(\varphi); R \cos(\varphi); 0), \quad r_z(\varphi, z) = (0; 0; 1).$$

Тогда матрица первой формы равна

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сосчитаем нормаль к поверхности. Для этого рассмотрим

$$[r_\varphi, r_z] = (R \cos(\varphi); R \sin(\varphi); 0), \quad \|[r_\varphi, r_z]\| = R,$$

и тогда

$$N = (\cos(\varphi); \sin(\varphi); 0).$$

Теперь вычислим вторые производные

$$r_{\varphi\varphi} = (-R \cos(\varphi); -R \sin(\varphi); 0), \quad r_{\varphi z} = (0; 0; 0),$$

$$r_{z\varphi} = (0; 0; 0), \quad r_{zz} = (0; 0; 0).$$

Таким образом, матрица второй формы примет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \langle r_{\varphi\varphi}, N \rangle & \langle r_{\varphi z}, N \rangle \\ \langle r_{z\varphi}, N \rangle & \langle r_{zz}, N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Займёмся поиском главных кривизн. Для этого составим матрицу

$$Q - \lambda G = \begin{pmatrix} -R - \lambda R^2 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

найдем её определитель и приравняем его нулю

$$\det(Q - \lambda G) = \lambda R(1 + \lambda R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{R}.$$

Теперь посмотрим как выглядят главные кривизны. Подставим λ в соответствующее линейное уравнение:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = (0; 1).$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{R}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = (1; 0).$$

Главными нормальными сечениями являются ось цилиндра и окружность. Дополнительно вычислим среднюю и гауссову кривизну цилиндра. Они равны

$$H = 0 - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R}, \quad K = 0 \cdot \left(-\frac{1}{R}\right) = 0.$$

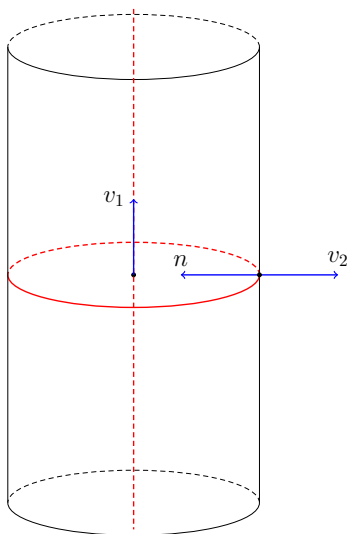


Рис. 4.5. Главные нормальные сечения цилиндра.

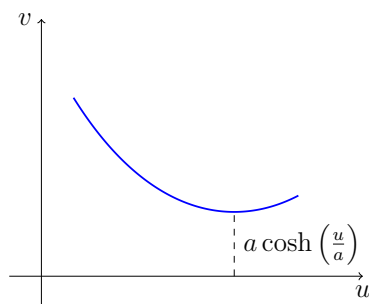


Рис. 4.6. Цепная линия.

Катеноид. Это поверхность вращения цепной линии. Параметрически она может быть определена как

$$r(u, v) = (a \cosh(u/a) \cos(v); a \cosh(u/a) \sin(v); u).$$

Найдём первую фундаментальную форму, вычислив первые производные:

$$\begin{aligned} r_u &= (\sinh(u/a) \cos(v); \sinh(u/a) \sin(v); 1), \\ r_v &= (-a \cosh(u/a) \sin(v); a \cosh(u/a) \cos(v); 0). \end{aligned}$$

$$G = \begin{pmatrix} \sinh^2(u/a) + 1 & 0 \\ 0 & a^2 \cosh^2(u/a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2(u/a) & 0 \\ 0 & a^2 \cosh^2(u/a) \end{pmatrix}.$$

Вычислим нормаль к поверхности

$$[r_u, r_v] = (-a \cosh(u/a) \cos(v); -a \cosh(u/a) \sin(v); a \sinh(u/a) \cosh(u/a)),$$

$$\begin{aligned} \| [r_u, r_v] \|^2 &= a^2 \cosh^2(u/a) \cos^2(v) + a^2 \cosh^2(u/a) \sin^2(v) + a^2 \sinh^2(u/a) \cosh^2(u/a) = \\ &= a^2 \cosh^2(u/a) (1 + \sinh^2(u/a)) = (a \cosh^2(u/a))^2, \end{aligned}$$

$$N(u, v) = \left(-\frac{\cos(v)}{\cosh(u/a)}; -\frac{\sin(v)}{\cosh(u/a)}; \frac{\sinh(u/a)}{\cosh(u/a)} \right).$$

Для поиска матрицы второй фундаментальной формы вычислим вторые производные

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \left(\frac{1}{a} \cosh(u/a) \cos(v); \frac{1}{a} \cosh(u/a) \sin(v); 0 \right), \\ r_{uv} &= (-\sinh(u/a) \sin(v); \sinh(u/a) \cos(v); 0), \\ r_{vv} &= (-a \cosh(u/a) \cos(v); -a \cosh(u/a) \sin(v); 0). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$Q = \begin{pmatrix} -1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу $Q - \lambda G$, найдём её определитель и приравняем его нулю:

$$Q - \lambda G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} - \lambda \cosh^2(u/a) & 0 \\ 0 & a - \lambda a^2 \cosh^2(u/a) \end{pmatrix},$$

$$\det(Q - \lambda G) = -\left(\frac{1}{a} + \lambda \cosh^2(u/a) \right) (a - \lambda a^2 \cosh^2(u/a)) = 0,$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{a \cosh^2(u/a)}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{a \cosh^2(u/a)}.$$

Поскольку матрица $Q - \lambda G$ диагональна, то вектора главных направлений могут быть выбраны как

$$v_1 = (0; 1), \quad v_2 = (1; 0).$$

Средняя и гауссова кривизна оказываются равны

$$H = \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{(a \cosh^2(u/a))^2}.$$

Задача, комбинирующая теорию кривых и теорию поверхностей

Пусть задана бигулярная натурально параметризованная кривая $\rho(s) \subset \mathbb{R}^3$, кручение которой κ отлично от нуля. Рассмотрим поверхность

$$r(s, u) = \rho(s) + u \cdot v(s), \quad u > 0.$$

Задача: найти первую и вторую фундаментальные формы такой поверхности, её главные кривизны, вектора главных направлений, среднюю и гауссову кривизну.

Вычислим первые производные

$$r_s = \dot{\rho}(s) + u \dot{v}(s) = v(s) + u \cdot k(s)n(s), \quad r_u = v(s).$$

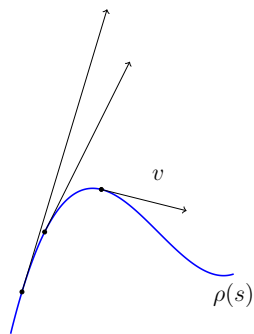


Рис. 4.7. Поверхность $r(s)$.

Построим матрицу первой фундаментальной формы:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + u^2 k^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем нормаль к поверхности:

$$N = \frac{[r_s, r_u]}{\|[r_s, r_u]\|} = \frac{[v + uk \cdot n, v]}{\|[v + uk \cdot n, v]\|} = -\frac{uk \cdot b}{\|uk \cdot b\|} = -b(s).$$

Вычислим вторые производные для матрицы второй формы:

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \dot{v} + u \cdot (\dot{k}n + k\dot{n}) = kn + u(\dot{k}n - k^2v + k\kappa b) = \\ &= -uk^2v(s) + (k + u\dot{k})n(s) + uk\kappa b(s), \\ r_{su} &= k \cdot n(s), \\ r_{uu} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица второй фундаментальной формы имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -uk\kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим характеристическое уравнение

$$Q - \lambda G = \begin{pmatrix} -uk\kappa - \lambda(1 + u^2 k^2) & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(Q - \lambda G) = \lambda(uk\kappa + \lambda(1 + u^2 k^2)) - \lambda^2 = \lambda(u^2 k^2 \lambda + uk\kappa) = 0.$$

Откуда находим, что главные кривизны равны:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\kappa}{uk}.$$

Найдём векторы главных направлений:

$$\lambda_1 = 0 : \begin{pmatrix} -uk\kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (0; 1).$$

$$\lambda_2 = -\frac{\kappa}{uk} : \begin{pmatrix} \kappa/uk & \kappa/uk \\ \kappa/uk & \kappa/uk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (1; -1).$$

Наконец, вычислим гауссову и среднюю кривизну:

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0, \quad H = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{\kappa}{uk}.$$

Задачи с легко угадываемым ответом

С помощью формулы Эйлера

$$k = \lambda_1 \cos^2(\varphi) + \lambda_2 \sin^2(\varphi)$$

можно довольно быстро получать искомые значения.

Сфера. Все нормальные сечения сферы $S^2(R)$ одинаковы и являются окружностями. Функция кривизны является постоянной, только если $\lambda_1 = \lambda_2$. В нашем случае $k = 1/R$. Когда все главные кривизны в точке одинаковы, то такая точка называется омбилической. У сферы все точки омбилические.

Тор вращения. Это поверхность, получаемая вращением окружности радиуса r вокруг некоторой оси. При этом расстояние от оси вращения до центра этой окружности равно $R > r$.

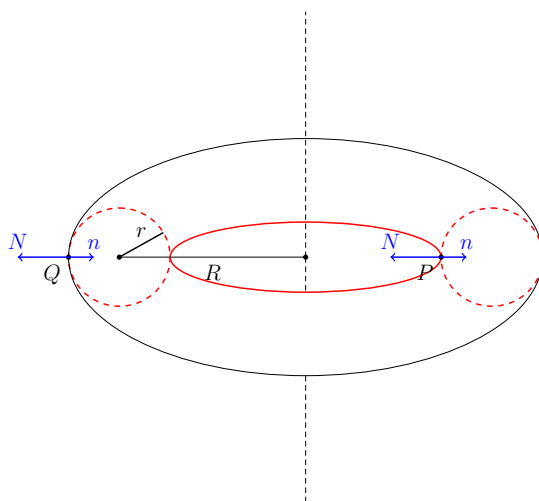


Рис. 4.8. Тор вращения.

Посчитаем среднюю кривизну в каких-нибудь точках. Например, в точке P , являющейся ближайшей к оси вращения, главными нормальными сечениями являются

окружность радиуса $R - r$ с центром, лежащим на оси вращения, и окружность радиуса r . С учётом взаимного расположения нормалей получаем

$$H(P) = \frac{1}{R - r} - \frac{1}{r}.$$

Рассмотрим точку Q , являющуюся максимально удалённой от оси вращения. Главные нормальные сечения – та же окружность радиуса r и окружность с центром на оси вращения радиуса $R + r$. В этом случае средняя кривизна равна

$$H(Q) = - \left(\frac{1}{R + r} + \frac{1}{r} \right).$$

Геометрический смысл гауссовой и средней кривизны

Пусть задана поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Её гауссова кривизна равна $K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. По её знаку можно судить о том, как себя ведёт поверхность в окрестности некоторой точки. Если $K(P) > 0$, то окрестность точки P лежит по одну сторону от касательной плоскости, и тогда точка P называется сферической. В этом случае главные кривизны имеют одинаковый знак, а значит главные нормали соответствующих сечений находятся в одном полупространстве. Отсюда следует, по формуле Эйлера, что главные нормали всех нормальных сечений находятся в одном полупространстве.

Если же, наоборот, $K(P) < 0$, то окрестность этой точки ведёт себя как гиперболический параболоид, то есть окрестность находится по обе стороны касательной плоскости. Такие точки называются гиперболическими. В этом случае главные кривизны имеют разные знаки, и, следовательно, главные нормали находятся в разных полупространствах. Поэтому одно главное нормальное сечение сворачивает в одну сторону от касательной плоскости, а второе – в противоположную.

Зная это, нетрудно решить следующую задачу. Пусть задана сфера, и мы знаем, что в каждой точке её гауссова кривизна равна $K = 1/R^2 > 0$. Если эту сферу деформировать, то возникают точки, в которых $K < 0$. Можно ли вложить сферу в $\mathbb{R}^3$ таким образом, чтобы гауссова кривизна $K(P) < 0$ в любой точке P ? Ответ: нет. Идея решения следующая. Поскольку сфера компактна, то после деформации она остаётся компактной, а это значит, что её можно вписать в некоторый шар конечного радиуса. Возьмём двумерную плоскость и будем двигать её из бесконечности в сторону деформированной сферы. В силу гладкости, найдётся точка, в которой плоскость коснётся сферы первый раз. Тогда такая плоскость будет касательной плоскостью к сфере, а вся сфера будет лежать по одну сторону от неё. Следовательно, в такой точке гауссова кривизна положительна.

Обсудим геометрический смысл средней кривизны. Пусть задана гиперповерхность $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, и в точке P построено касательное пространство $T_P M$ с ортогональным базисом $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$. Тогда для каждого вектора f_i можно построить нормальное сечение $\gamma_i = \Pi_i(f_i, N) \cap M$. У этого сечения есть ориентированная кривизна k_i . Оказывается, что

$$\sum_i k_i = H.$$

Семинар 5

Гауссова и средняя кривизна графика

Пусть поверхность задана графиком $z = f(x, y)$. Вычислим её характеристики. Для этого выполним параметризацию

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y));$$

Дифференцируем

$$r_x = (1; 0; f_x), \quad r_y = (0; 1; f_y).$$

Матрица первой фундаментальной формы поверхности:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Заметим, что если найдётся точка P , в которой $f_x(P) = f_y(P) = 0$, то матрица первой формы примет вид

$$G(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделать это можно следующим образом. В точке P построить касательную плоскость, оси x и y расположить в этой плоскости, а ось z направить по нормали. Тогда локально поверхность – график функции $z = f(x, y)$, и у этой функции в точке P первые производные обращаются в нуль.

Вычислим нормаль к поверхности

$$N = \frac{(-f_x; -f_y; 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

Считаем вторые производные:

$$r_{xx} = (0; 0; f_{xx}), \quad r_{xy} = (0; 0; f_{xy}), \quad r_{yy} = (0; 0; f_{yy})$$

и строим матрицу второй формы

$$Q = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Гауссову кривизну определим как

$$\begin{aligned} K &= \frac{\det Q}{\det G} = \frac{1}{f_x^2 + f_y^2 + 1} \cdot \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2} = \frac{1}{f_x^2 + f_y^2 + 1} \cdot \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2} = \\ &= \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Среднюю кривизну посчитаем как след матрицы QG^{-1} . Для этого построим G^{-1}

$$G^{-1} = \frac{1}{f_x^2 + f_y^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}.$$

Далее

$$QG^{-1} = \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2 + 1)^{3/2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим диагональные элементы этой матрицы и построим её след

$$\text{Tr}(QG^{-1}) = \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2 + 1)^{3/2}} (f_{xx}(1 + f_y^2) - f_{xy}f_x f_y + f_{yy}(1 + f_x^2) - f_{xy}f_x f_y).$$

Таким образом,

$$H = \frac{f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}(1 + f_x^2)}{(f_x^2 + f_y^2 + 1)^{3/2}}. \quad (5.4)$$

Задача 5.1. Вычислить значения средней и гауссовой кривизны для поверхности, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$.

Теорема Менье

Теорема 5.1. Пусть задана поверхность M , и в её некоторой точке построено касательное пространство $T_P M$ и вектор нормали $N(P)$. Вектор $v \in T_P M$ и вектор $N(P)$ задают плоскость Π_N . Пусть $\gamma_N = \Pi_N \cap M$ – нормальное сечение поверхности M плоскостью Π_N . Построим плоскость Π , один из образующих векторов которой совпадает с вектором v , а второй не совпадает с вектором нормали $N(P)$. Сечение поверхности этой плоскостью обозначим $\gamma = \Pi \cap M$. При этом, очевидно, что $\gamma_N \cap \gamma = P$. Тогда кривизны этих сечений связаны соотношением

$$k_N = k \cos(\alpha), \quad (5.5)$$

где α – угол между главными нормальными кривых γ и γ_N .

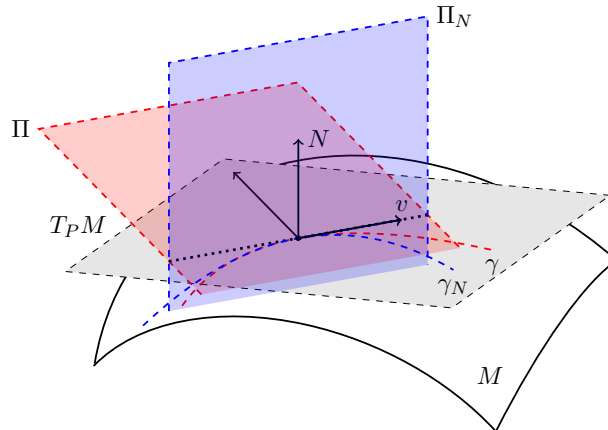


Рис. 5.1. Теорема Менье.

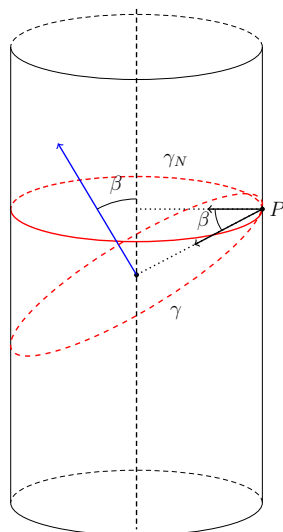


Рис. 5.2. Пример применения теоремы Менье.

Рассмотрим пример применения этой теоремы. Пусть задан цилиндр, на котором отмечена точка P . Через неё проведены нормальное сечение – окружность, и наклонное – эллипс. Угол между наклонным сечением и осью вращения задан и равен β . Задача: вычислить кривизну эллипса в точке P . Проведём главные нормали сечений в точке P и заметим, что угол между ними равен β . Тогда по теореме Менье, получаем

$$k = \frac{k_N}{\cos(\beta)} = \frac{1}{R \cos(\beta)}.$$

Деривационные формулы Вейнгартена-Гаусса

Пусть задана некоторая гиперповерхность, в каждой точке которой есть канонический базис $(\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^{n-1}})$ и нормаль N . Это некий аналог репера Френе, но векторы канонического базиса не ортонормированы. Формулы Вейнгартена-Гаусса показывают, как дифференцировать векторы из набора $(\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^{n-1}}, N)$ по u^k :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u^k} \partial_{u^i} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Gamma_{ik}^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}} + q_{ik} N, \\ \frac{\partial}{\partial u^k} N = \sum_{\alpha=1}^{n-1} b_k^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}} + c_k N. \end{cases} \quad (5.6)$$

Коэффициенты разложения Γ , q , b , c выражаются через компоненты первой и второй фундаментальной формы.

Задачей, где естественно возникают эти формулы, является задача об эквидистантной поверхности. Эта поверхность – аналог эквидистанты для кривой. Пусть для простоты задана поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, тогда эквидистантная поверхность для

неё строится так: от каждой точки поверхности M^2 отступаем в направлении нормали N на расстояние ε . Будем считать, что поверхность M^2 задана параметрически как $r(u, v)$, тогда при фиксированном ε эквидистантная поверхность задаётся как

$$\rho(u, v) \equiv \rho_\varepsilon(u, v) = r(u, v) + \varepsilon N(u, v). \quad (5.7)$$

Вычислим первую фундаментальную форму такой поверхности. Для этого посчитаем первые производные:

$$\rho_u = r_u + \varepsilon N_u, \quad \rho_v = r_v + \varepsilon N_v.$$

Заметим, что так как $\langle N, N \rangle = 1$, то

$$2\langle N_u, N \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad N_u \perp N, \quad N_v \perp N.$$

Следовательно, $N_u, N_v \in T_P M$, а значит

$$\begin{aligned} N_u &= a\partial_u + b\partial_v, \\ N_v &= c\partial_u + d\partial_v. \end{aligned}$$

Чтобы найти коэффициенты разложения можем рассмотреть скалярные произведения

$$\begin{aligned} \langle N_u, \partial_u \rangle &= ag_{11} + bg_{12}, \\ \langle N_u, \partial_v \rangle &= ag_{12} + bg_{22}, \end{aligned}$$

где

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle \partial_u, \partial_u \rangle & \langle \partial_u, \partial_v \rangle \\ \langle \partial_v, \partial_u \rangle & \langle \partial_v, \partial_v \rangle \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, мы знаем, что

$$\begin{aligned} \langle N, \partial_u \rangle = 0 & \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \partial_u \rangle = \langle N_u, \partial_u \rangle + \langle N, \partial_{uu} \rangle = \langle N_u, \partial_u \rangle + q_{11}, \\ \langle N, \partial_v \rangle = 0 & \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \partial_v \rangle = \langle N_u, \partial_v \rangle + \langle N, \partial_{vu} \rangle = \langle N_u, \partial_v \rangle + q_{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты a и b удовлетворяют системе

$$\begin{pmatrix} -q_{11} \\ -q_{12} \end{pmatrix} = (g_{ij}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Аналогично для пары коэффициентов c и d :

$$\begin{pmatrix} -q_{21} \\ -q_{22} \end{pmatrix} = (g_{ij}) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Умножая эти уравнения на матрицу, обратную к (g_{ij}) , получим искомые коэффициенты. В теории двумерных поверхностей приняты следующие обозначения:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}; \quad (q_{ij}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Запишем в этих обозначениях матрицу, обратную к метрике:

$$(g_{ij})^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L \\ -M \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} FM - GL \\ FL - EM \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M \\ -N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} FN - GM \\ FM - EN \end{pmatrix}.$$

Для эквидистантной поверхности имеем:

$$\begin{aligned} \rho_u &= r_u + \varepsilon(a\partial_u + b\partial_v) = (1 + \varepsilon a)\partial_u + b\varepsilon\partial_v, \\ \rho_v &= r_v + \varepsilon(c\partial_u + d\partial_v) = c\varepsilon\partial_u + (1 + \varepsilon d)\partial_v. \end{aligned}$$

Запишем элементы матрицы первой фундаментальной формы:

$$\begin{aligned} (I_{\Phi\Phi})_{11} &= (1 + \varepsilon a)^2 E + 2\varepsilon b(1 + \varepsilon a)F + \varepsilon^2 b^2 G, \\ (I_{\Phi\Phi})_{12} &= (1 + \varepsilon a)c\varepsilon E + [1 + \varepsilon(a + d) + \varepsilon^2(ad + bc)]F + (1 + \varepsilon d)b\varepsilon G, \\ (I_{\Phi\Phi})_{22} &= \varepsilon^2 c^2 E + 2(1 + \varepsilon d)c\varepsilon F + (1 + \varepsilon d)^2 G. \end{aligned}$$

Представим матрицу первой фундаментальной формы в виде

$$I_{\Phi\Phi} = A_0 + \varepsilon A_1 + \bar{o}(\varepsilon).$$

$$I_{\Phi\Phi} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 2aE + 2bF & cE + (a + d)F + bG \\ cE + (a + d)F + bG & 2dG + 2cF \end{pmatrix}.$$

Попробуем понять, какой вид имеет матрица A_1 . Во-первых, вспомним, что

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} -L \\ -M \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} -M \\ -N \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -G^{-1}Q.$$

Во-вторых, вычислим

$$G \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ea + Fb & Ec + Fd \\ Fa + Gb & Fc + Gd \end{pmatrix} = -GG^{-1}Q = -Q$$

и заметим, что тогда

$$\begin{aligned} I_{\Phi\Phi} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} Ea + Fb & Ec + Fd \\ Fa + Gb & Fc + Gd \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} Ea + Fb & Fa + Gb \\ Ec + Gd & Fc + Gd \end{pmatrix} = \\ &= G - \varepsilon(Q + Q^T) = G - 2\varepsilon Q. \end{aligned}$$

Задача 5.2. Преобразовать слагаемое с ε^2 :

$$\varepsilon^2 \begin{pmatrix} a^2E + 2abF + b^2G & acE + (ad + bc)F + bdG \\ acE + (ad + bc)F + bdG & c^2E + 2cdF + d^2G \end{pmatrix}.$$

Обсудим вторую фундаментальную форму эквидистантной поверхности. Вспомним выражения для первых производных ρ :

$$\begin{aligned} \rho_u &= r_u + \varepsilon(a\partial_u + b\partial_v) = (1 + \varepsilon a)\partial_u + b\varepsilon\partial_v, \\ \rho_v &= r_v + \varepsilon(c\partial_u + d\partial_v) = c\varepsilon\partial_u + (1 + \varepsilon d)\partial_v. \end{aligned}$$

Исходя из построения поверхности ρ , можно положить её нормаль равной исходной. Далее необходимо посчитать вторые производные:

$$\begin{aligned} \rho_{uu} &= \varepsilon a_u \partial_u + (1 + \varepsilon a) \partial_{uu} + \varepsilon b_u \partial_v + \varepsilon b \partial_{vu} \Rightarrow \langle \rho_{uu}, N \rangle = (1 + \varepsilon a)L + \varepsilon bM, \\ \rho_{uv} &= \varepsilon a_v \partial_u + (1 + \varepsilon a) \partial_{uv} + \varepsilon b_v \partial_v + \varepsilon b \partial_{vv} \Rightarrow \langle \rho_{uv}, N \rangle = (1 + \varepsilon a)M + \varepsilon bN, \\ \rho_{vu} &= \varepsilon c_u \partial_u + \varepsilon c \partial_{uu} + \varepsilon d_u \partial_v + (1 + \varepsilon d) \partial_{vu} \Rightarrow \langle \rho_{vu}, N \rangle = \varepsilon cL + (1 + \varepsilon d)M, \\ \rho_{vv} &= \varepsilon c_v \partial_u + \varepsilon c \partial_{uv} + \varepsilon d_v \partial_v + (1 + \varepsilon d) \partial_{vv} \Rightarrow \langle \rho_{vv}, N \rangle = \varepsilon cM + (1 + \varepsilon d)N. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что

$$\begin{aligned} II_{\Phi\Phi} &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} aL + bM & aM + bN \\ cL + dM & cM + dN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \\ &= Q - \varepsilon Q G^{-1} Q. \end{aligned}$$

Семинар 6

Геодезическая

Определение 6.1. Пусть задана гиперповерхность $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и кривая $\gamma \subset M^{n-1}$, которая задаётся как $\gamma = (x^1(t), \dots, x^n(t))$. Для этой кривой можно посчитать скорость $\dot{\gamma} = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$ и ускорение $\ddot{\gamma} = (\ddot{x}^1(t), \dots, \ddot{x}^n(t))$. Кривые, для которых $\ddot{\gamma} \parallel N$ в каждой точке, называются **геодезическими**.

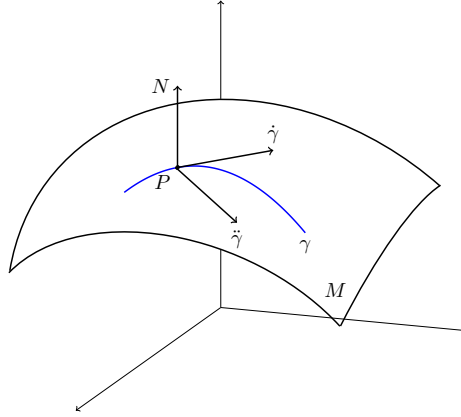


Рис. 6.1. Векторы скорости и ускорения кривой.

Если на поверхности заданы координаты $u^1(t), \dots, u^n(t)$, то касательная составляющая ускорения имеет вид

$$\ddot{u}(t) + \sum_{pq} \Gamma_{pq}^i \dot{u}^p \dot{u}^q, \quad (6.1)$$

где Γ_{pq}^i – символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} g^{\alpha i} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{\alpha}} \right) \quad (6.2)$$

Здесь $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Условие $\ddot{\gamma} \parallel N$ означает, что касательная составляющая $\ddot{\gamma}$ равняется нулю, то есть

$$\ddot{u}^i(t) + \sum_{p,q=1}^{n-1} \Gamma_{pq}^i \dot{u}^p \dot{u}^q = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1. \quad (6.3)$$

Эта система соотношений называется **уравнением геодезических**.

Сформулируем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \sum_{p,q=1}^{n-1} \Gamma_{pq}^i \dot{u}^p \dot{u}^q = 0, \\ u^i(t_0) = u_0^i, \\ \dot{u}^i(t_0) = v_0^i. \end{cases} \quad (6.4)$$

Решение такой задачи, как мы знаем, существует и единственно.

Теорема 6.1. (Теорема существования и единственности геодезической)

Для любой точки P и вектора скорости v

$$P = (u_0^1, \dots, u_0^{n-1}) \in M, \quad v = (v_0^1, \dots, v_0^{n-1}) \in T_P M$$

существует единственная геодезическая, такая, что $u(t_0) = P$ и $\dot{u}(t_0) = v$.

Утверждение 6.1. Если $\gamma(t)$ – геодезическая, то $\|\dot{\gamma}\| = \text{const}$.

Утверждение 6.2. Условие того, что кривая является геодезической равносильно тому, что вектор ковариантного ускорения равен нулю:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0. \quad (6.5)$$

Доказательство. $\nabla_x y$ – ковариантная производная поля y вдоль поля x :

$$\nabla_x y = \sum_k x^k \nabla_k y, \quad \nabla_k y^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^k} + \sum_p \Gamma_{pk}^i y^p.$$

С другой стороны, в случае функций ковариантная производная вдоль $\dot{\gamma}$ – это то же самое, что и ковариантная производная вдоль кривой:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} f = \frac{df}{dt}.$$

Отсюда можно получить, что

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle.$$

Видно, что если ковариантное ускорение равно нулю, то норма вектора скорости является постоянной. $\square$

Примеры и задачи

Евклидово пространство. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ как n -мерную поверхность в себе. Его метрика постоянна и равна

$$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \quad \forall i, j, k.$$

Тогда уравнение геодезических имеет вид

$$\ddot{u}^i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u^i(t) = u_0^i + v_0^i t. \quad (6.6)$$

Такие уравнения параметризуют прямую линию в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что если взять в качестве вектора скорости $w = v/2$, то мы получим формально другую геодезическую, несмотря на то, что движение будет происходить по той же прямой.

Теорема 6.2. Пусть заданы две поверхности M и N , и существует изометрическое отображение

$$F : M^{n-1} \rightarrow N^{n-1},$$

тогда F переводит геодезические в геодезические.

Цилиндр. Опишем геодезические на прямом круговом цилиндре радиуса R . Воспользуемся тем, что цилиндр локально изометричен плоскости: разрежем его по образующей и развернём на плоскую полосу ширины $2\pi R$. Геодезические на полосе – это прямые линии. В силу написанной ранее теоремы, при обратном преобразовании геодезические полосы переходят в геодезические цилиндра: горизонтальная прямая переходит в окружность, вертикальная – в образующую прямую, а наклонная – в винтовую линию.

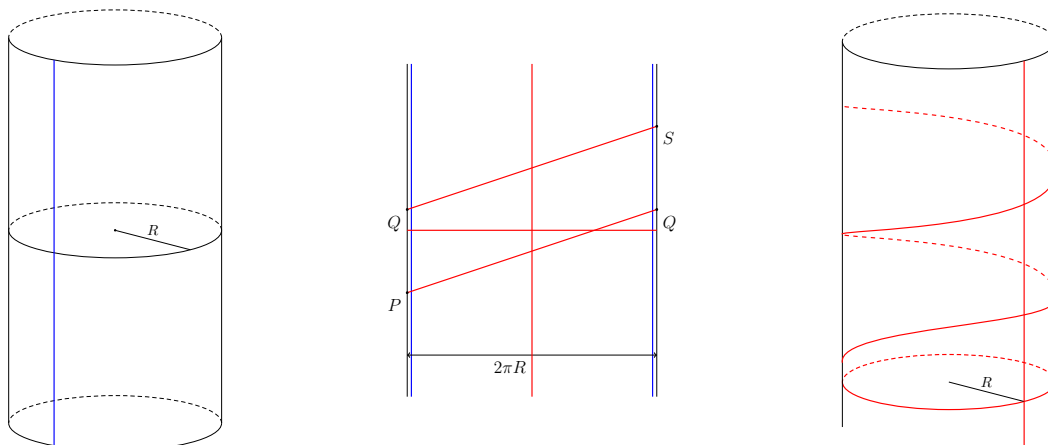


Рис. 6.2. Геодезические на цилиндре.

Это можно представить и по-другому. Покроем плоскость целиком полосами ширины $2\pi R$. С формальной точки зрения, на плоскости $\mathbb{R}^2$ действует группа $\mathbb{Z}$, которая представлена сдвигами

$$\{n \cdot \vec{e} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Таким образом, возникает орбита точки Q

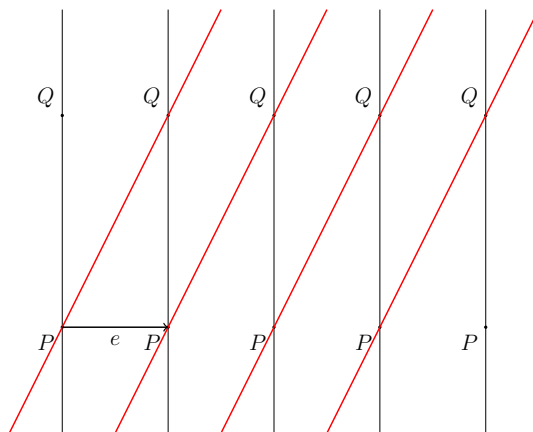


Рис. 6.3. Действие группы $\mathbb{Z}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{Z}(Q) = \{Q + n \cdot \vec{e} \mid n \in \mathbb{Z}, \}.$$

и точки, попавшие в одну орбиту отождествляются. При таком отождествлении то, что получится, называется факторпространством $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ плоскости под действием группы $\mathbb{Z}$, а это и есть цилиндр. Пользуясь таким отождествлением, можно находить геодезические на плоскости, а затем “сворачивать” её в цилиндр.

Пользуясь таким подходом, легко ответить на вопрос, сколько геодезических цилиндра проходит через две фиксированные точки. Ответ: бесконечно много. Если отобразить цилиндр на плоскость, покрытую полосами, то в каждой полосе будут находиться точки A_i и B_i . Через две точки A_i и B_j из разных полос мы можем провести прямую, являющуюся геодезической на плоскости. Для всех таких пар точек прямых будет бесконечно много. При обратном отображении получится бесконечно много винтовых линий.

Конус. Это ещё одна поверхность, которую можно развернуть на плоскость. Развёрткой конуса будет являться угол на плоскости. Направляющая конуса переходит в дугу на плоскости и, следовательно, не является геодезической. Рассмотрим, что происходит с прямой при отображении на поверхность конуса. Когда прямая попадает в точку P на границе угла, эта точка переходит в точку на другой его стороне. При этом мы должны учесть, что угол β_1 между прямой и образующей должен сохраняться. Из точки P с другой стороны угла под углом β_1 к образующей продолжаем движение до следующего пересечения и так далее.

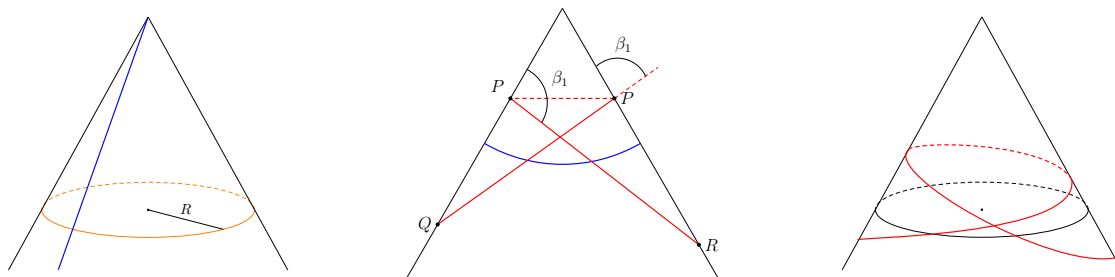


Рис. 6.4. Геодезические на конусе.

С другой стороны, можно разворачивать полученный угол в плоскости и отмечать точки пересечения прямой со сторонами экземпляров угла, а затем проводить отождествление точек, находящихся на противоположных сторонах одного экземпляра, получая таким образом геодезическую конуса.

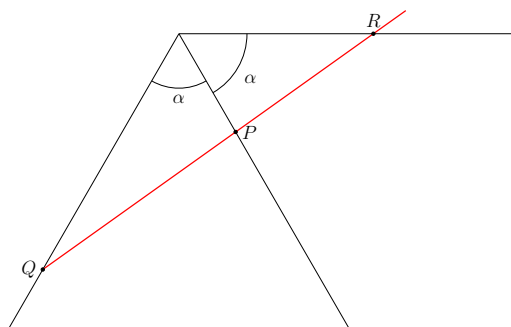


Рис. 6.5. Развёртка конуса.

Теорема 6.3. Пусть заданы две поверхности M_1 и M_2 , которые пересекаются по кривой $\gamma = M_1 \cap M_2$. Дополнительно предположим, что в каждой точке $P \in \gamma$ касательные плоскости совпадают $T_P M_1 = T_P M_2$. Говорят, что поверхности M_1 и M_2 касаются по кривой γ . Тогда γ – геодезическая M_1 тогда и только тогда, когда γ – геодезическая M_2 .

Это следует из того, что ковариантное ускорение в натуральной параметризации пропорционально проекции ускорения на касательную плоскость. Поскольку касательные ускорения будут совпадать, то будут совпадать и ковариантные ускорения. Если касательная проекция ускорения будет равна нулю, то нулю будут равны оба ковариантных ускорения.

Сфера. Найти геодезические сферы можно, используя написанную выше теорему. Возьмём сферу и конус и совместим их так, чтобы сфера оказалась внутри кону-



Рис. 6.6. Геодезические на сфере – большие круги.

са. Тогда они будут касаться по некоторой параллели сферы. Поскольку данная окружность не является геодезической конуса, то и для сферы она геодезической не будет. Это будет верно для любой параллели, кроме большого круга. Рассмотрим сферу, которую поместили внутрь цилиндра такого же радиуса. Кривая, по которой касаются поверхности – большой круг сферы. Так как для цилиндра эта

кривая геодезическая, то и для сферы она геодезическая. Из теоремы существования и единственности следует, что других геодезических не существует. Для любой точки сферы P и вектора скорости v можно построить плоскость, проходящую через центр сферы O , притом единственную. Сечение такой плоскостью – это большой круг, который является геодезической.

Запишем уравнения геодезической на сфере. Для этого выполним параметризацию сферы:

$$\begin{cases} x = R \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y = R \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = R \cos(\theta). \end{cases}$$

Вычислим метрику:

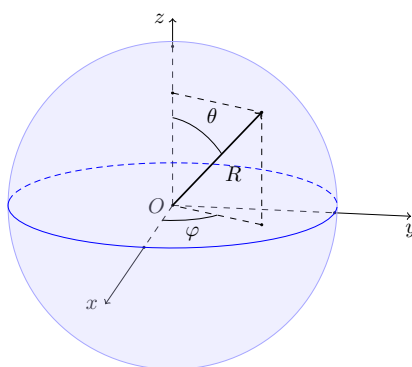


Рис. 6.7. Параметризация сферы.

$$\begin{aligned} r_\theta &= (R \cos(\theta) \cos(\varphi); R \cos(\theta) \sin(\varphi); -R \sin(\theta)), \\ r_\varphi &= (-R \sin(\theta) \sin(\varphi); R \sin(\theta) \cos(\varphi); 0). \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что эти вектора ортогональны. Тогда первая фундаментальная форма и её матрица имеют вид

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная к (g_{ij}) :

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{R^4 \sin^2(\theta)} \begin{pmatrix} R^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Для написания уравнения геодезических нужно вычислить символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 g^{\alpha i} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^\alpha} \right). \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 0 = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot (-2R^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) = \\ &= -\sin(\theta) \cos(\theta). \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \cdot (2R^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) = \\ &= \operatorname{ctg}(\theta), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Теперь запишем уравнения геодезических:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi}^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2 \operatorname{ctg}(\theta) \cdot \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Попробуем извлечь отсюда какую-нибудь информацию о геодезических. Мы знаем, что параллель задаётся уравнениями

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi(t).$$

Подставляя такие функции в уравнения геодезических, получим:

$$\begin{cases} \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) \dot{\varphi}^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Отсюда можно найти, что $\varphi(t)$ – линейная функция. Тогда либо $\dot{\varphi} = 0$, и мы получаем точку на сфере (θ_0, φ_0) ; либо $\dot{\varphi} \neq 0$, и, следовательно, в нуль обращается синус или косинус. Так как $0 < \theta < \pi$, то $\cos(\theta_0) = 0$, и $\theta_0 = \pi/2$. То есть среди параллелей имеется только одна геодезическая – экватор.

Аналогичные рассуждения можно провести для меридиана, который задаётся параметрически как

$$\theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi_0.$$

Подставляя такую кривую в систему уравнений, увидим, что второе уравнение выполнено автоматически, а первое запишется как $\ddot{\theta} = 0$. Его решение – линейная функция. Следовательно, любой линейно параметризованный меридиан – геодезическая.

Прямая на поверхности. Пусть задана гиперповерхность $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, а в ней расположена прямая γ . Нужно доказать, что γ в натуральной параметризации является геодезической M .

Действительно, пусть $\gamma(t) = u_0 + vt$, тогда $\ddot{\gamma} = 0$, а значит касательная проекция ускорения равна нулю. Следовательно, прямая в такой параметризации – геодезическая.

Геодезические на поверхностях вращения

Пусть в плоскости xz параметрически задана регулярная кривая $(x(t); z(t))$. С помощью вращения этой кривой вокруг оси z получим некоторую поверхность вращения. Для уравнения геодезических поверхности вращения можно выписать первый интеграл.

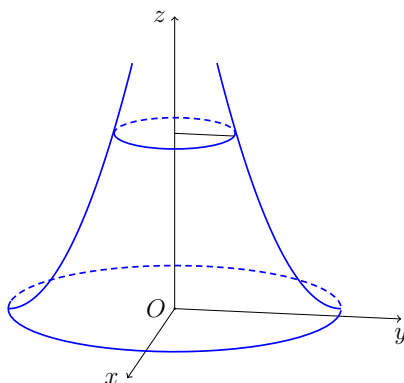


Рис. 6.8. Поверхность вращения.

Теорема 6.4. (Теорема Клеро)

Пусть $\gamma(t)$ – геодезическая поверхности вращения, а $\rho(t)$ – расстояние от оси вращения до этой кривой. Кроме того, через любую точку поверхности вращения можно провести меридиан. Пусть $\alpha(t)$ – угол между меридианом и геодезической. Тогда функция

$$\rho(t) \sin(\alpha(t)) = c(t) \quad (6.8)$$

постоянна вдоль геодезических. Функция $c(t)$ называется **интегралом Клеро**.

Доказательство. Выполним параметризацию поверхности вращения $r(t, \varphi)$:

$$\begin{cases} x(t, \varphi) = x(t) \cos(\varphi), \\ y(t, \varphi) = x(t) \sin(\varphi), \\ z(t, \varphi) = z(t). \end{cases} \quad x(t) > 0$$

Тогда

$$r_t = (\dot{x} \cos(\varphi); \dot{x} \sin(\varphi); \dot{z}), \quad r_\varphi = (-x \sin(\varphi); x \cos(\varphi); 0).$$

Метрика будет иметь вид

$$ds^2 = (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)dt^2 + x^2 d\varphi^2.$$

Будем считать, что t – натуральный параметр кривой, тогда $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1$, и

$$ds^2 = dt^2 + x^2 d\varphi^2 = x^2(t) \left(\left(\frac{dt}{x} \right)^2 + d\varphi^2 \right).$$

Сделаем замену параметра $t = t(\tau)$, такую, чтобы

$$d\tau = \frac{dt}{x(t)}.$$

Тогда вводя $\rho(\tau) = x(t(\tau))$, получаем метрику в виде

$$ds^2 = \rho^2(\tau)(d\tau^2 + d\varphi^2).$$

Геометрический смысл ρ такой же, как у x – это перепараметризованное расстояние от кривой до оси вращения. □

Семинар 7

Геодезические на поверхностях вращения (продолжение)

Доказательство. (Теорема Клеро. Продолжение)

Теперь нужно записать уравнение геодезических на поверхности вращения в координатах ($u^1 = \tau$; $u^2 = \varphi$). В общем виде оно имеет вид:

$$\ddot{u}^i(t) + \sum_{p,q} \Gamma_{pq}^i \dot{u}^p \dot{u}^q = 0,$$

где

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} g^{\alpha i} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{\alpha}} \right), \quad (7.1)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\rho = \rho(\tau)$, то все производные по $u^2 = \varphi$ равны нулю. Вычислим символы Кристоффеля, вводя обозначение $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\rho\rho' = \frac{\rho'}{\rho}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\rho\rho' = -\frac{\rho'}{\rho}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\rho\rho' = \frac{\rho'}{\rho}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Напишем уравнение геодезических:

$$\begin{cases} \ddot{\tau} + \frac{\rho'}{\rho} (\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2) = 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2\rho'}{\rho} \dot{\tau}\dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим параллели на поверхности вращения:

$$\tau = \tau_0, \quad \varphi = \varphi(t).$$

Тогда второе уравнение даёт нам $\varphi(t) = at + b$. Случай $a = 0$ нам не интересен, а случай $a \neq 0$ приводит нас к тому, что из первого уравнения мы получим $\rho'(\tau_0) = 0$.

То есть геодезическими являются только параллели наибольшего или наименьшего радиуса.

Теперь посмотрим на меридиан $m(t)$:

$$\tau = \tau(t), \quad \varphi = \varphi_0.$$

Подставляя такую кривую в уравнение, мы получим, что второе уравнение выполнено автоматически, а первое имеет вид

$$\ddot{\tau} + \frac{\rho'}{\rho} \dot{\tau}^2 = 0.$$

Понизим порядок, вводя $f = \dot{\tau}$, тогда получим

$$\dot{f} + \frac{\rho'}{\rho} f^2 = 0.$$

Это уравнение интегрируется, а значит, меридиан при подходящей параметризации является геодезической.

Пусть меридиан параметризован как

$$m(t) = (t; \varphi_0),$$

тогда его вектор скорости имеет вид

$$\dot{m} = (1; 0).$$

Вектор скорости геодезической равен

$$\dot{\gamma} = (\dot{\tau}; \dot{\varphi}).$$

Вычислим косинус угла между этими векторами:

$$\cos(\dot{m}, \dot{\gamma}) = \frac{\langle \dot{m}, \dot{\gamma} \rangle}{\|\dot{m}\| \cdot \|\dot{\gamma}\|} = \frac{\rho^2 \dot{\tau}}{\sqrt{\rho^2 \cdot \rho^2 (\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2)}} = \frac{\dot{\tau}}{\sqrt{\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2}}.$$

Откуда

$$\sin^2(\dot{m}, \dot{\gamma}) = 1 - \cos^2(\dot{m}, \dot{\gamma}) = 1 - \frac{\dot{\tau}^2}{\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2} = \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2}.$$

Таким образом,

$$c(t) = \frac{\rho(\tau(t)) \cdot \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2}}.$$

Докажем, что эта величина равняется константе. Для этого рассмотрим

$$\frac{d}{dt} c^2(t) = \frac{d}{dt} \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2} = \frac{(2\rho\rho' \dot{\tau} \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \cdot \rho^2)(\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2) - \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cdot 2(\dot{\tau}\ddot{\tau} + \dot{\varphi}\ddot{\varphi})}{(\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2)^2}.$$

Рассмотрим числитель этой дроби:

$$\begin{aligned} & (2\rho\rho'\dot{\tau} \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \cdot \rho^2)(\dot{\tau}^2 + \dot{\varphi}^2) - \rho^2\dot{\varphi}^2 \cdot 2(\dot{\tau}\ddot{\tau} + \dot{\varphi}\ddot{\varphi}) = \\ & = 2\rho\rho'\dot{\tau}^3\dot{\varphi}^2 + 2\rho\rho'\dot{\tau}\dot{\varphi}^4 + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \cdot \rho^2\dot{\tau}^2 + 2\dot{\varphi}^3\ddot{\varphi} \cdot \rho^2 - 2\rho^2\dot{\varphi}^2\dot{\tau}\ddot{\tau} - 2\rho^2\dot{\varphi}^3\ddot{\varphi} = \\ & = 2\rho\rho'\dot{\tau}^3\dot{\varphi}^2 + 2\rho\rho'\dot{\tau}\dot{\varphi}^4 + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \cdot \rho^2\dot{\tau}^2 - 2\rho^2\dot{\varphi}^2\dot{\tau}\ddot{\tau} = \\ & = 2\rho^2\dot{\tau}\dot{\varphi} \left(\frac{\rho'}{\rho}\dot{\tau}^2\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\dot{\tau} + \frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}^3 - \ddot{\tau}\dot{\varphi} \right) = \dots \end{aligned}$$

Поскольку мы имеем дело с геодезической, то можем воспользоваться уравнениями:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\rho'}{\rho}\dot{\varphi}\dot{\tau}, \quad \ddot{\tau} = -\frac{\rho'}{\rho}(\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2).$$

Тогда, продолжая вычисления:

$$\begin{aligned} \dots & = 2\rho^2\dot{\tau}\dot{\varphi} \left(\frac{\rho'}{\rho}\dot{\tau}^2\dot{\varphi} + \left(-\frac{2\rho'}{\rho}\dot{\varphi}\dot{\tau} \right) \dot{\tau} + \frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}^3 - \left(-\frac{\rho'}{\rho}(\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2) \right) \dot{\varphi} \right) = \\ & = 2\rho^2\dot{\tau}\dot{\varphi} \left(\frac{\rho'}{\rho}\dot{\tau}^2\dot{\varphi} - \frac{2\rho'}{\rho}\dot{\varphi}\dot{\tau}^2 + \frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}^3 + \frac{\rho'}{\rho}\dot{\tau}^2\dot{\varphi} - \frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}^3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}c^2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2(t) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad c(t) = \text{const}.$$

□

Постоянство функции $\rho \cdot \sin(\alpha)$ вдоль геодезической означает, что при уменьшении расстояния до оси вращения угол между геодезической и меридианом должен расти, а при увеличении этого расстояния – убывать. Следовательно, чем ближе геодезическая подходит к оси вращения, тем больше она похожа на параллель, и, наоборот, чем дальше от оси, тем больше она похожа на меридиан.

Следствие 7.1. У поверхности, образованной вращением монотонной функции, не может быть замкнутых геодезических.

Доказательство. Пусть поверхность образована вращением монотонно возрастающей функции $f(x)$ вокруг оси x . Тогда у такой поверхности нет геодезических в виде параллелей, так как они бы соответствовали экстремумам функции $f(x)$.

Пусть у поверхности всё-таки есть замкнутая геодезическая. Такая кривая является образом окружности, поэтому она является ограниченной. То есть найдутся сечения поверхности, между которыми оказывается зажата кривая. Тогда мы можем найти пару таких параллелей, которые касаются геодезической. Обозначим точки касания за P и Q . Но в этих точках угол между геодезической и меридианом равен

$$\alpha(P) = \alpha(Q) = \frac{\pi}{2}.$$

Так как интеграл Карно в этих точках имеет одинаковое значение, отсюда следует, что

$$\rho(P) = \rho(Q),$$

Но, согласно нашему предположению о монотонности функции f , это невозможно

□

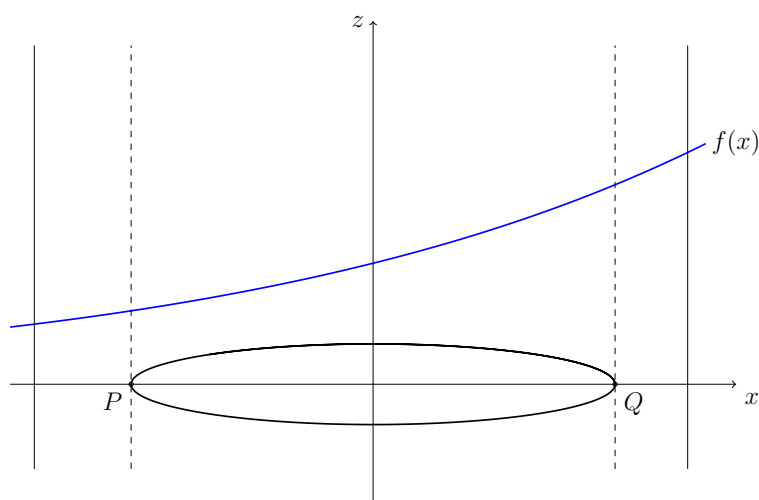


Рис. 7.1. Следствие из теоремы Клеро.

Метрики в области $\mathbb{R}^n$. Классические метрики

Параметрически поверхность задаётся как образ отображения

$$r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^k, \quad k \leq n.$$

Всё, что обсуждалось до этого, работает и при $k = n$. В этом случае область Ω рассматривается как n -мерную поверхность, вложенную в $\mathbb{R}^n$ тождественным отображением. Тогда в каждой точке области определены касательные пространства и т.д. Вообще говоря, отображение r не обязано быть тождественным. Тогда мы получаем другую параметризацию, которая называется **регулярными криволинейными координатами в области $r(\Omega)$** . В этих координатах можно записывать касательные векторы и евклидову метрику, то есть первую фундаментальную форму поверхности.

Для примера рассмотрим евклидову метрику сферы. Сферические координаты имеют вид

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = r \cos(\theta). \end{cases}$$

На них можно смотреть как на отображение области

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi); \mid r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

во множество

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{x \geq 0, y = 0\}.$$

Чтобы определить стандартное скалярное произведение, запишем базисные векторы:

$$\begin{aligned} \partial_r &= (\sin(\theta) \cos(\varphi); \sin(\theta) \sin(\varphi); \cos(\theta)), \\ \partial_\theta &= (r \cos(\theta) \cos(\varphi); r \cos(\theta) \sin(\varphi); -r \sin(\theta)), \\ \partial_\varphi &= (-r \sin(\theta) \sin(\varphi); r \sin(\theta) \cos(\varphi); 0). \end{aligned}$$

Тогда евклидова метрика в сферических координатах имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2.$$

Из евклидовой метрики можно получить метрику сферы $S^2(R)$ в сферических координатах. Для этого заметим, что уравнение сферы в сферических координатах – это $r = R$. Тогда

$$ds^2|_{S^2(R)} = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2.$$

Стереографические координаты на сфере

Определение 7.1. Пусть задана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. На этой сфере отметим точку $N = (0, 0, R)$, которая называется северным полюсом. Построим проекцию сферы на плоскость:

$$\sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \Pi^2(z = 0).$$

Пусть $P \in S^2(R)$. Проведём луч NP . Для любой P найдётся точка

$$\sigma(P) = NP \cap \Pi^2(z = 0),$$

которая называется **стереографической проекцией точки P** .

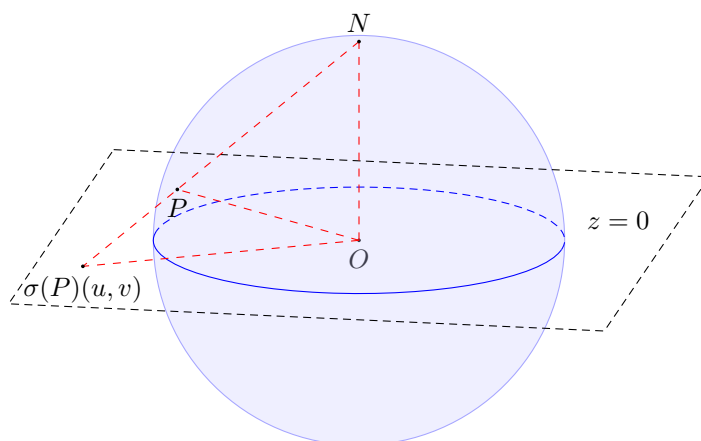


Рис. 7.2. Стереографическая проекция.

Отображение σ обладает рядом свойств. Во-первых, оно является взаимнооднозначным и регулярным.

Во-вторых, можно написать связь между координатами точки на сфере и её стереографической проекцией. Пусть $\sigma(P) = (u, v)$. Причём оси этих координат сонаправлены с осями x и y . Рассмотрим сечение сферы плоскостью NOP . В этом сечении треугольники PNP' и $\sigma(P)NO$ подобны. Тогда мы можем написать, что

$$\frac{x}{u} = \frac{R - z}{R}, \quad \frac{y}{v} = \frac{R - z}{R}.$$

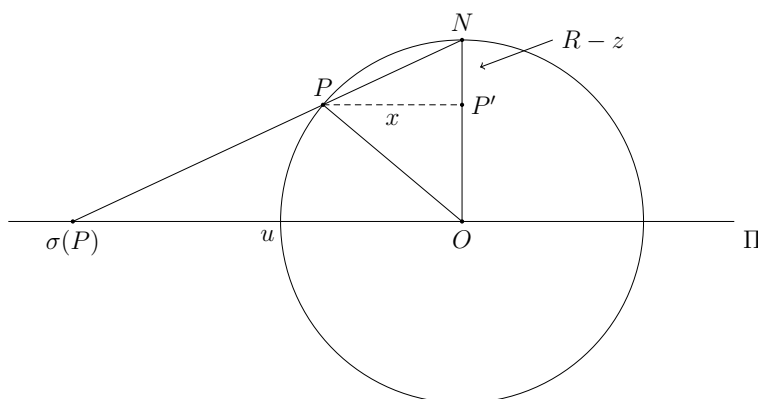


Рис. 7.3. Сечение сферы плоскостью NOR .

Откуда

$$x = \frac{u(R-z)}{R}, \quad y = \frac{v(R-z)}{R}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения сферы, получим уравнение для z . Окончательный результат выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2R^2u}{u^2 + v^2 + R^2}, \\y &= \frac{2R^2v}{u^2 + v^2 + R^2}, \\z &= R\frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2}.\end{aligned}$$

Задачи о стереографической проекции

Метрика сферы в стереографических координатах. Стандартная метрика в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Чтобы посчитать её в стереографических координатах, надо записать дифференциалы. Здесь и далее $\Sigma^2 = u^2 + v^2 + R^2$.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{2R^2 \cdot \Sigma^2 - 2u \cdot 2R^2 u}{\Sigma^4} du - \frac{2v \cdot 2R^2 u}{\Sigma^4} dv = \\ &= \frac{2R^2}{\Sigma^4} [(-u^2 + v^2 + R^2) du - 2uv dv] , \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = -\frac{2u \cdot 2R^2 v}{\Sigma^4} du + \frac{2R^2 \cdot \Sigma^2 - 2v \cdot 2R^2 v}{\Sigma^4} dv = \\ &= \frac{2R^2}{\Sigma^4} [-2uv du + (u^2 - v^2 + R^2) dv] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \\
 &= \frac{R}{\Sigma^4} [(2u \cdot \Sigma^2 - 2u(u^2 + v^2 - R^2)) du + (2v \cdot \Sigma^2 - 2v(u^2 + v^2 - R^2)) dv] = \\
 &= \frac{R}{\Sigma^4} [4uR^2 du + 4vR^2 dv] = \frac{4R^3}{\Sigma^4} (udu + vdv).
 \end{aligned}$$

Подставим полученные результаты в метрику:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\
 &= \frac{4R^4}{\Sigma^8} [(-u^2 + v^2 + R^2) du - 2uv dv]^2 + \frac{4R^4}{\Sigma^8} [-2uv du + (u^2 - v^2 + R^2) dv]^2 + \\
 &\quad + \frac{16R^6}{\Sigma^8} (udu + vdv)^2 = \\
 &= \frac{4R^4}{\Sigma^8} \left[((-u^2 + v^2 + R^2)^2 + 4u^2v^2 + 4R^2u^2) du + \right. \\
 &\quad + (-4uv(-u^2 + v^2 + R^2) - 4uv(u^2 - v^2 + R^2) + 8R^2uv) dudv + \\
 &\quad \left. + (4u^2v^2 + (u^2 - v^2 + R^2)^2 + 4R^2v^2) dv^2 \right] = \\
 &= \frac{4R^4}{\Sigma^8} (\Sigma^4 du^2 + \Sigma^4 dv^2) = \frac{4R^4}{(u^2 + v^2 + R^2)^2} (du^2 + dv^2).
 \end{aligned}$$

Таким образом метрика имеет вид

$$ds^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Соответствующая матрица является скалярной. Метрики такого типа называются конформно-евклидовыми.

Семинар 8

Задачи о стереографической проекции (продолжение)

Сохранение углов при стереографической проекции. Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задана конформно-евклидова метрика

$$ds^2 = \lambda^2(u)(du^1{}^2 + \dots + du^n{}^2).$$

Рассмотрим пару кривых $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Omega$. Вычислим угол α между ними двумя способами: в конформно-евклидовой метрике α_c и в евклидовой метрике α_e . Задача: показать, что $\alpha_c = \alpha_e$.

Вычислим косинус угла

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle}{\|\dot{\gamma}_1\| \cdot \|\dot{\gamma}_2\|}.$$

Заметим, что скалярные произведения и нормы в конформной и евклидовой метриках связаны соотношениями

$$\langle \cdot \cdot \rangle_c = \lambda^2 \langle \cdot \cdot \rangle_e, \quad \|\cdot\|_c = |\lambda| \cdot \|\cdot\|_e.$$

Откуда получаем, что

$$\cos(\alpha_c) = \frac{\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle_c}{\|\dot{\gamma}_1\|_c \cdot \|\dot{\gamma}_2\|_c} = \frac{\lambda^2 \langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle_e}{|\lambda| \cdot \|\dot{\gamma}_1\|_e \cdot |\lambda| \cdot \|\dot{\gamma}_2\|_e} = \frac{\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle_e}{\|\dot{\gamma}_1\|_e \cdot \|\dot{\gamma}_2\|_e} = \cos(\alpha_e).$$

Стереографическая проекция окружностей. Пусть задана сфера $S^2(R) \subset \mathbb{R}^3$. Окружность S_1 , лежащую на этой сфере, можно представить как сечение сферы некоторой плоскостью Π : $S_1 = \Pi \cap S^2$. Задача: найти $\sigma(S_1)$.

Запишем уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

и рассмотрим его пересечение со сферой. Для этого воспользуемся стереографическими координатами:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, \\ y &= \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, \\ z &= R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2}. \end{aligned}$$

Подставим их в уравнение плоскости

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot 2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2} + \frac{b \cdot 2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2} + cR \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2} + d &= 0, \\ a \cdot 2R^2 u + b \cdot 2R^2 v + cR(u^2 + v^2 - R^2) + d(u^2 + v^2 + R^2) &= 0, \\ (u^2 + v^2)(cR + d) + 2R^2 au + 2R^2 bv - cR^3 + dR^2 &= 0. \end{aligned}$$

Если $cR + d \neq 0$, то результат стереографической проекции – окружность или пустое множество, а если $cR + d = 0$, то результат – прямая линия.

Геометрия сферы

Треугольник на сфере. Пусть на сфере с центром в точке O и радиусом R задан треугольник ABC , образованный большими кругами на сфере. Длины сторон этого треугольника связаны с углами соответствующих дуг как

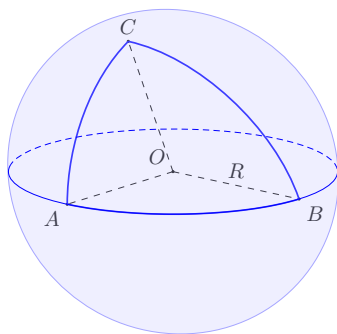


Рис. 8.1. Треугольник на сфере.

$$\frac{AB}{R} = \angle AOB.$$

Получим соотношения между длинами сторон треугольника на сфере и его углами. Вспомним, во-первых, что движениями сферы являются вращения трёхмерного пространства, а во-вторых, что если при движении три линейно независимые точки остаются неподвижными, то движение тривиально.

Пусть имеется сфера радиуса R , задающаяся уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

С помощью движений добьёмся того, чтобы вершина треугольника A имела координаты $(0, 0, R)$, а вершина B лежала в плоскости $x = 0$. Запишем последовательность движений, которая переведёт треугольник ABC в себя следующим образом:

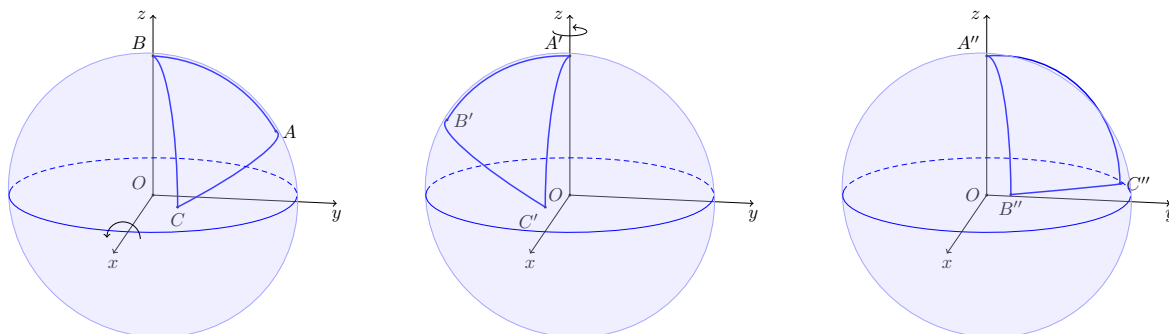


Рис. 8.2. Перемещение вершин треугольника по сфере.

- 1) Сперва переведем B в A вращением вокруг оси x .
- 2) Затем переведем C в плоскость $x = 0$ вращением вокруг оси z .
- 3) Повторим последние две операции дважды. То есть точку, которая лежит в плоскости $x = 0$ будем перемещать в северный полюс сферы, а затем третью точку будем перемещать в плоскость $x = 0$.

После таких преобразований треугольник ABC перейдет в себя. Для таких преобразований нам потребуются матрицы поворота

$$X(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad Z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения: α, β, γ – углы при вершинах A, B, C , и a, b, c – длины сторон, лежащих напротив этих углов. Запишем цепочку преобразований:

$$Z(\pi - \alpha) X\left(\frac{b}{R}\right) Z(\pi - \gamma) X\left(\frac{a}{R}\right) Z(\pi - \beta) X\left(\frac{c}{R}\right) = E.$$

Умножим это уравнение на матрицы обратные к трём правым:

$$X\left(\frac{a}{R}\right) Z(\pi - \beta) X\left(\frac{c}{R}\right) = Z(\gamma - \pi) X\left(-\frac{b}{R}\right) Z(\alpha - \pi).$$

Это уравнение после перемножения матриц даст 9 соотношений, связывающих углы и стороны треугольника на сфере.

Задача 8.1. Получить эти соотношения.

Псевдоевклидово пространство. Псевдосфера

Определение 8.1. Пространством Минковского $\mathbb{R}_s^n$ индекса s называют линейное пространство $\mathbb{R}^n$, в котором фиксирована билинейная форма, называемая **псевдоскалярным произведением индекса s** , которая в выделенных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ записывается как

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^s (dx^i)^2 + \sum_{i=s+1}^n (dx^i)^2. \quad (8.1)$$

Её матрица является постоянной и диагональной и имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Знаменитый пример псевдоевклидова пространства – пространство Минковского $\mathbb{R}_1^4$, с которым в физике отождествляют пространство-время:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (8.3)$$

Определение 8.2. Множество векторов

$$S_s^{n-1}(R) = \left\{ x \in \mathbb{R}_s^n \mid \langle x, x \rangle_s = R^2, \right\} \quad (8.4)$$

называется **псевдосферой**.

Для псевдосферы имеет смысл рассматривать радиусы нулевые и чисто мнимые.

Пример. Рассмотрим плоскость Минковского $\mathbb{R}_1^2$ с псевдоскалярным произведением

$$ds^2 = -dx^2 + dy^2.$$

Псевдосфера

$$S_1^1(1) = \{ -x^2 + y^2 = 1 \}$$

является гиперболой. В свою очередь, псевдосфера $S_1^1(0)$ – это пара пересекающихся прямых, а $S_1^1(i)$ – тоже гипербола, но повернутая на $\pi/2$. Таким образом, всё

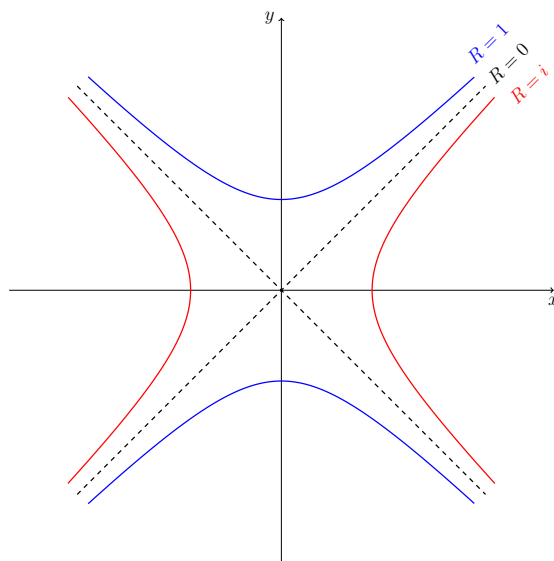


Рис. 8.3. Псевдосферы $S_1^1(1)$, $S_1^1(0)$ и $S_1^1(i)$.

пространство разбивается на векторы трёх типов: векторы с положительным скалярным квадратом называются **пространственноподобными**, с отрицательным – **времениподобными**, с нулевым – **светоподобными**.

Согласно специальной теории относительности (СТО) мировые линии (траектории, которые описывают события при изменении в пространстве-времени) не могут быть произвольными кривыми. У них должны быть ограничения, накладываемые

на вектор скорости. Один из постулатов СТО говорит о том, что скорость материальной точки в пространстве не может быть больше скорости света. Пусть мировая линия описывается как

$$m(t) = (x^i(t), t),$$

а её пространственная часть имеет вид

$$\gamma = (x^1(t); x^2(t); x^3(t)).$$

Тогда условие ограниченности скорости состоит в том, что

$$\langle \dot{m}, \dot{m} \rangle_1 = -1 + \|\dot{\gamma}\|^2 \leq 0.$$

То есть $\|\dot{\gamma}\| \leq 1$.

Геометрия Лобачевского

Пятый постулат евклидовой геометрии говорит о том, что если задана прямая l и точка $P \notin l$, то через эту точку проходит единственная прямая, параллельная l . Геометрия Лобачевского строится на утверждении о том, что таких прямых можно провести бесконечно много.

Такая геометрия может быть построена в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^3$ со скалярным произведением

$$ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Рассмотрим в таком пространстве псевдосферу $S_1^2(iR)$, удовлетворяющую уравнению

$$-x^2 + y^2 + z^2 = -R^2.$$

Из аналитической геометрии мы знаем, что это уравнение двуполостного гиперболоида.

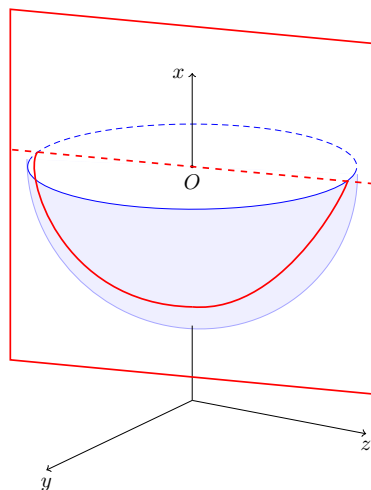


Рис. 8.4. Псевдосфера $S_1^2(iR)$ – двуполостный гиперболоид.

лоида, расположенного вдоль оси x . Обозначим часть псевдосферы, соответствующую $x \geq 0$, как

$$L^2(R) = S_1^2(iR) \cap \{x \geq 0\}.$$

Точками модели геометрии являются точки псевдосферы, а прямыми – центральные сечения. Расстояния между точками вычисляются с помощью псевдометрики, ограниченной на сферу $\langle \cdot \rangle_1|_{S_1^2(iR)}$. Оказывается, что такое индуцированное псевдоскалярное произведение является обычным скалярным произведением, задающим метрику на $L^2(R)$.

Увидим, что в такой геометрии выполняется пятый постулат геометрии Лобачевского. Рассмотрим псевдосферу $L^2(R)$, на ней проведём прямую, являющуюся сечением некоторой плоскостью Π

$$l = L^2(R) \cap \Pi.$$

и отметим точку $P \in L^2(R)$, такую, что $P \notin l$. Введём конус – псевдосферу $S_1^2(0)$. Он пересекает плоскость Π по паре прямых. Выберем в плоскости Π пространственно-

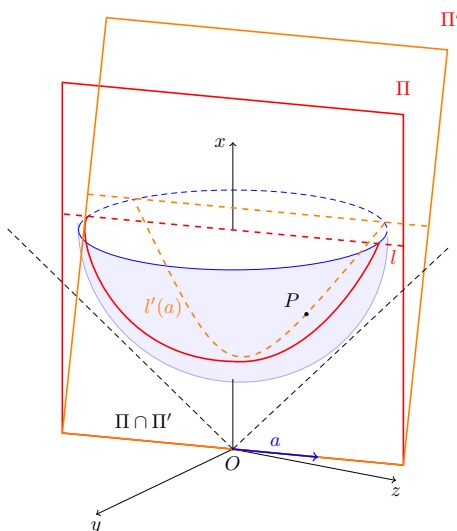


Рис. 8.5. Пятый постулат геометрии Лобачевского в $\mathbb{R}_1^3$.

подобный вектор a , то есть такой, что он лежит за пределами конуса. Рассмотрим плоскость $\Pi'(OP, a)$, натянутую на вектора OP и a . Поскольку она содержит точку P , то она пересекает гиперboloид по прямой $l'(a) = \Pi' \cap L^2(R)$. Причём $l \cap l'(a) = \emptyset$. Действительно,

$$(l \cap l'(a)) \subset (\Pi \cap \Pi'),$$

но пересечение плоскостей – это прямая, проходящая через a , которая не пересекает гиперboloид. Таким образом, мы построили прямую $l'(a)$, проходящую через P и не пересекающую l . Но таких прямых можно построить бесконечно много, выбирая другие вектора a .

Ещё одна модель геометрии Лобачевского – модель Пуанкаре (модель стереографической проекции).

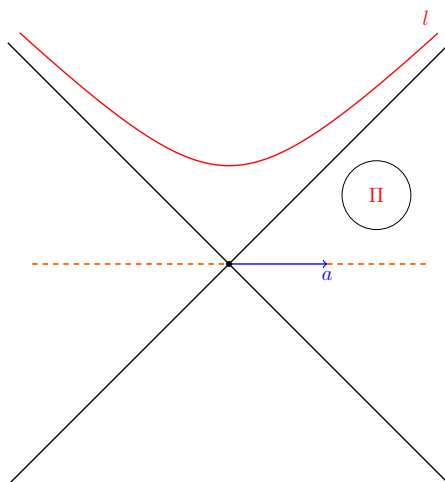


Рис. 8.6. Сечение конуса (псевдосферы $S_1^2(0)$) плоскостью Π .

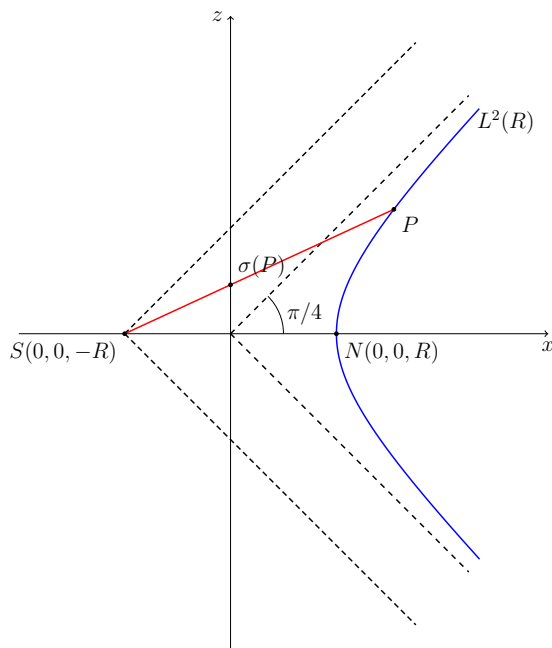


Рис. 8.7. Модель Пуанкаре. Стереографическая проекция.

Определение 8.3. Пусть задана псевдосфера $L^2(R)$ – гиперboloид. Отметим на второй части гиперboloида точку $S = (0, 0, -R)$, которая называется южным полюсом. Рассмотрим точку $P \in L^2(R)$ и для неё построим

$$\sigma(P) = SP \cap \{x = 0\}. \quad (8.5)$$

Другими словами, задано отображение

$$\sigma : L^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(x = 0). \quad (8.6)$$

Оно называется **стереографической проекцией**.

Поскольку гиперboloид содержится внутри конуса $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$, то его образом будет не вся плоскость, а открытый круг

$$\sigma(L^2) = D^2(R), \quad (8.7)$$

который ещё называют кругом Пуанкаре.

Запишем эту стереографическую проекцию в координатах. Чтобы формулы приняли вид, похожий на стереографические координаты сферы, направим гиперboloид вдоль оси z . Пусть P' проекция P на ось z . Тогда треугольники $S\sigma(P)O$ и SPP'

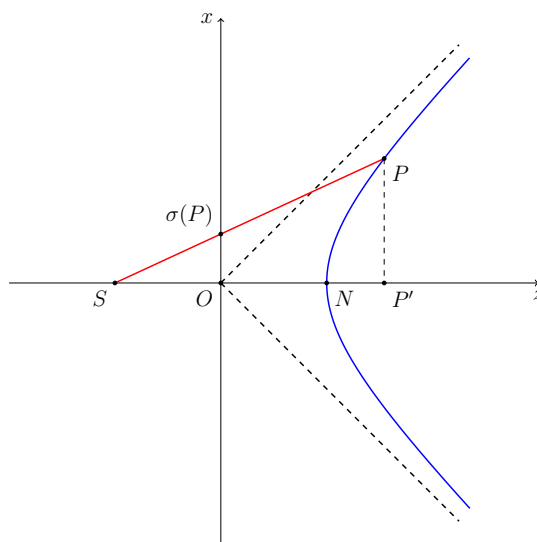


Рис. 8.8. Стереографические координаты.

подобны, откуда

$$\frac{x}{u} = \frac{z + R}{R}, \quad \frac{y}{v} = \frac{z + R}{R}.$$

Выражая из этих соотношений x и y и подставляя их в уравнение псевдосферы $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$, получаем уравнение на z , откуда находим u и v :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2} \\ y &= \frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2} \\ z &= R \frac{R^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

С помощью этих формул можно вычислить индуцированное скалярное произведение на $L^2(R)$:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} (du^2 + dv^2). \quad (8.9)$$

Задача 8.2. Проверить последнее выражение.

Мы видим, что это риманова метрика, то есть положительно определённая форма. Значит, L^2 – настоящая пространственноподобная поверхность. Более того, это конформно-евклидова метрика. В частности, это означает, что углы на плоскости Лобачевского в этой модели устроены так же, как евклидовы углы.

Теперь мы можем представлять плоскость Лобачевского в нашей модели как круг радиуса R . Посмотрим, куда переходят центральные сечения гиперболоида при сте-

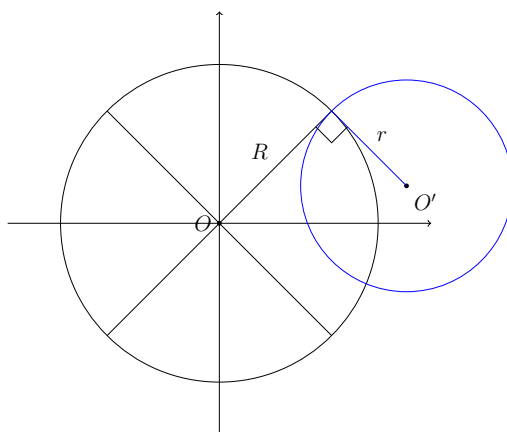


Рис. 8.9. Плоскость Лобачевского в стереографической модели.

реографической проекции. Для этого рассмотрим уравнение плоскости, проходящей через начало координат

$$ax + by + cz = 0$$

и подставим в него стереографические координаты:

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot 2R^2u}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{b \cdot 2R^2v}{R^2 - u^2 - v^2} + cR \frac{R^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2} &= 0, \\ 2R^2au + 2R^2bv + cR(u^2 + v^2 + R^2) &= 0, \\ cR(u^2 + v^2) + 2R^2au + 2R^2bv + cR^3 &= 0. \end{aligned}$$

При $c = 0$ центральные сечения гиперболоида при стереографической проекции переходят в прямые – диаметры круга. Если же, наоборот, $c \neq 0$, то полученное уравнение переписывается как

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + R^2 + 2\frac{a}{c}Ru + 2\frac{b}{c}Rv &= 0, \\ \left(u + \frac{a}{c}R\right)^2 + \left(v + \frac{b}{c}R\right)^2 &= \frac{a^2R^2 + b^2R^2 - c^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Откуда заключаем, что это окружность с центром в точке $O_1(\frac{a}{c}R, \frac{b}{c}R)$. Проведём окружность, перпендикулярную к границе круга Пуанкаре (абсолюту). Тогда должна работать теорема Пифагора:

$$|OO_1|^2 = \frac{(a^2 + b^2)R^2}{c^2} = R^2 + r^2,$$

что совпадает с правой частью уравнения окружности. Следовательно, при $c \neq 0$ образ центрального сечения гиперboloида – окружность, перпендикулярная абсолюту.

Ещё одна модель геометрии Лобачевского – модель Клейна. В ней стереографическая проекция точки $P \in L^2(R)$ строится как

$$K(P) = OP \cap \{z = R\}. \quad (8.10)$$

В этом случае образом конуса, внутри которого находится гиперboloид, является

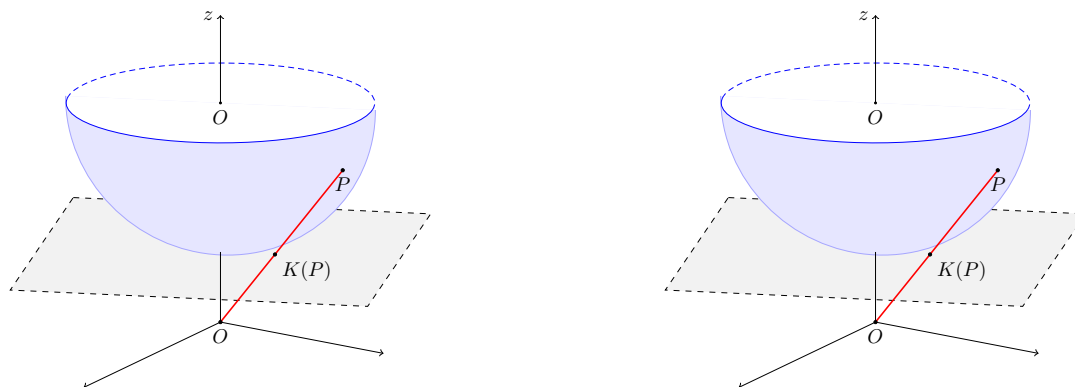


Рис. 8.10. Модель Клейна.

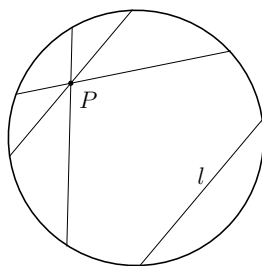


Рис. 8.11. Круг Клейна.

круг (круг Клейна). Однако образами центральных сечений гиперboloида являются хорды круга Клейна.

Задача 8.3. Записать метрику в модели Клейна.

Семинар 9

Дробно-линейные преобразования

В геометрии Лобачевского важную роль играют дробно-линейные преобразования – преобразования комплексной плоскости, которые имеют вид

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0. \quad (9.1)$$

Условие отличия определителя матрицы коэффициентов от нуля – это требование нетривиальности дробно-линейного преобразования. Оказывается, что множество

$$\left\{ w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} : ac - bd \neq 0 \right\}$$

образуют группу, обладающее важным свойством, что преобразование

$$\left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является гомоморфизмом групп.

Определение 9.1. Отображение

$$f : (G_1, *) \rightarrow (G_2, \circ) \quad (9.2)$$

называется **гомоморфизмом**, если

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2). \quad (9.3)$$

Проверим, что это так. Пусть

$$\Phi_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$$

и f сопоставляет невырожденным матрицам дробно-линейные преобразования. В качестве групповых операций возьмём композицию дробно-линейных преобразований и операцию умножения матриц. Рассмотрим

$$\Phi_1 \circ \Phi(z) = \Phi_1 \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{a_1 \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) + d_1} = \frac{(a_1 a + c b_1)z + a_1 b + d b_1}{(c_1 a + c d_1)z + c_1 b + d d_1}.$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a + b_1 c & a_1 b + b_1 d \\ c_1 a + d_1 c & c_1 b + d_1 d \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \right) \circ f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) (z) = f \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) (z).$$

Из теоремы о гомоморфизме следует, что группа дробно-линейных преобразований изоморфна $GL_2(\mathbb{C})/\text{Ker } f$ – фактор-группе невырожденных матриц по ядру гомоморфизма f , где

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) (z) = z \ \forall z \right\}.$$

Найдём такие матрицы:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Rightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0 \Rightarrow c = b = 0, a = d.$$

То есть $\text{Ker } f$ – множество скалярных матриц. Следовательно,

$$GL_2(\mathbb{C})/\text{Ker } f = GL_2(\mathbb{C})/C^*.$$

Для нас более важным фактом является то, что композицию дробно-линейных преобразований и обратные операции можно считать через невырожденные матрицы.

Пусть

$$\Phi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Построим обратное преобразование. Для этого рассмотрим

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi^{-1} : w \mapsto \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Движения плоскости Лобачевского удобно рассматривать не в круге, а на верхней полуплоскости. Для этого сделаем преобразование

$$w = -iR \frac{z + iR}{z - iR},$$

которое отображает круг на верхнюю полуплоскость. Тогда метрика на полуплоскости запишется как

$$ds^2 = -\frac{4R^2 dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2}.$$

Обозначая $w = x + iy$, получим

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

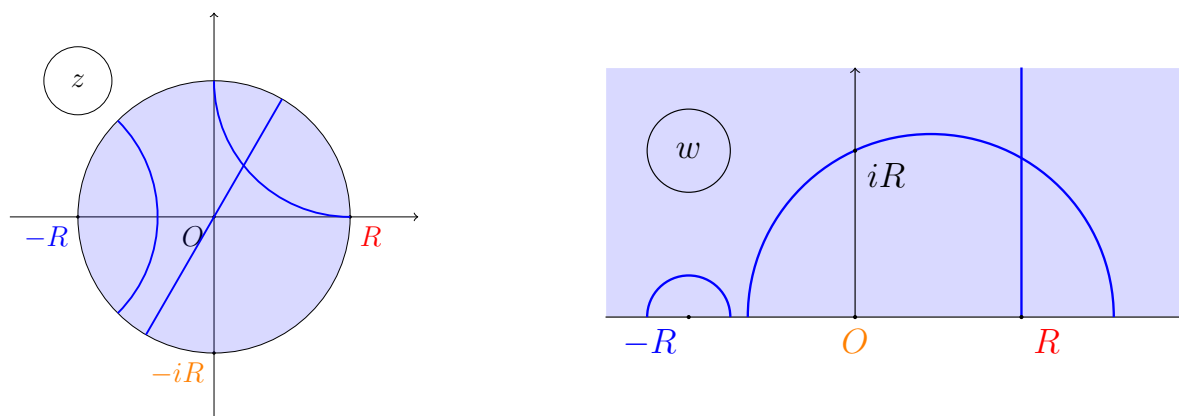


Рис. 9.1. Преобразование прямых и окружностей при отображении круга Пуанкаре в верхнюю полуплоскость.

При этом прямые и окружности переходят в прямые и окружности. Увидеть свойства дробно-линейных преобразований можно, если вспомнить, что такие преобразования – это композиция следующих операций: сдвига на вектор b

$$z \mapsto z + b,$$

который соответствует комплексному числу b , комплексного умножения на число a

$$z \mapsto a \cdot z,$$

являющегося композицией растяжения и поворота, а также операции комплексного деления

$$z = \rho e^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi},$$

которая в свою очередь является композицией инверсии относительно единичной окружности и отражения относительно горизонтальной оси.

Задачи

Расстояние между двумя точками

Пусть на полуплоскости заданы две точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$. Вычислим длину отрезка $|AB|_L$. Для этого на плоскости построим серединный перпендикуляр к отрезку AB , тогда его пересечение с осью x даст нам центр окружности O_{AB} , проходящей через A и B и имеющей радиус $OA = OB$.

В самом простом случае точки лежат на одной вертикальной прямой ($x_A = x_B = x$). Тогда кривая $\gamma(t)$, соединяющая эти точки, задаётся как

$$\gamma(t) = (x; t), \quad y_A \leq t \leq y_B.$$

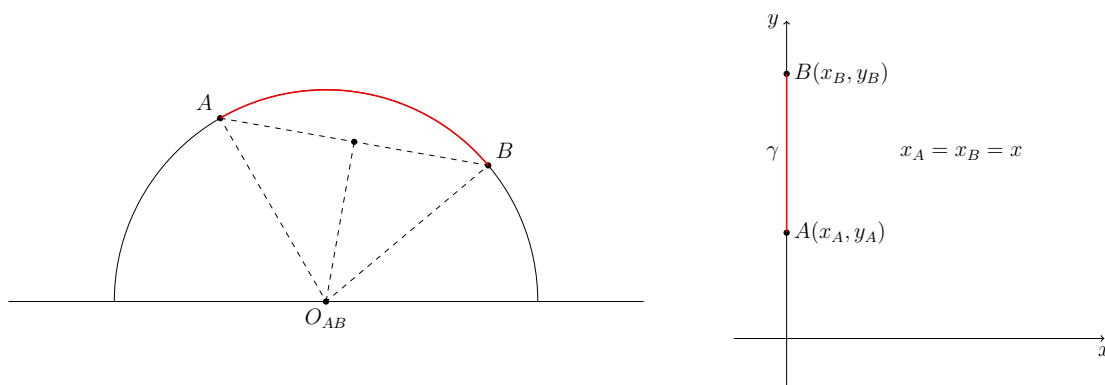


Рис. 9.2. Расстояние между точками на плоскости Лобачевского.

Тогда вектор скорости равен

$$\dot{\gamma} = (0; 1), \quad \Rightarrow \quad \|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{R^2}{t^2}.$$

Тогда

$$|AB|_L = \int_{y_A}^{y_B} dt \, R \cdot \frac{dt}{t} = R \ln \frac{y_B}{y_A}.$$

В общем случае считать расстояние сложно. Но можно воспользоваться движениями плоскости Лобачевского, чтобы свести задачу к предыдущей. Группа движений плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости содержит в качестве подгруппы группу дробно-линейных преобразований, переводящих верхнюю полуплоскость в себя. В такой подгруппе коэффициенты $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. Надо найти такое преобразование Φ , которое переводит окружность в вертикальную прямую. Тогда получим, что

$$|AB|_L = R \ln \frac{\Phi(A)}{\Phi(B)}.$$

Для начала рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть задана прямая на полуплоскости, которая пересекает горизонтальную ось в точках x_1 и x_2 , причём $x_1 > x_2$. Найдём преобразование, которое переводит её в какую-нибудь вертикальную прямую, исходящую из нуля. Для этого нам нужно, чтобы

$$x_1 \mapsto 0, \quad x_2 \mapsto \infty.$$

Это преобразование есть

$$w(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2}. \quad (9.4)$$

Сосчитаем определитель матрицы для такого преобразования:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 1 & -x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 > 0.$$

Следовательно, такое преобразование является движением плоскости Лобачевского.

Нам осталось найти координаты точек, в которых прямая, проходящая через A и B , пересекает горизонтальную ось. На языке комплексной переменной середина отрезка AB – это точка $(A + B)/2$. Произвольная точка прямой, проходящей через середину AB перпендикулярно ему, задаётся как

$$\frac{A + B}{2} + t \cdot i(B - A).$$

Надо найти число $t \in \mathbb{R}$, такое, при котором точка прямой лежит на горизонтальной оси, то есть

$$\operatorname{Im} \left(\frac{A + B}{2} + t \cdot i(B - A) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{Im}(A + B)}{\operatorname{Re}(B - A)},$$

$$O_{AB} = \frac{A + B}{2} + t_0 \cdot i(B - A).$$

Радиус вычисляется как

$$r = |OA| = |O - A| = \left| (B - A) \cdot \left(\frac{1}{2} + it_0 \right) \right| = |B - A| \cdot \left| \frac{1}{2} + it_0 \right|.$$

Тогда

$$x_{1,2} = O \pm |O - A|.$$

Зная эти точки, можно составить общую формулу для нахождения расстояния.

Окружность на плоскости Лобачевского

Рассмотрим модель круга Пуанкаре и поймём, как устроены окружности в такой модели. Хороший кандидат на центр окружности – начало координат. Заметим, что метрика

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} (du^2 + dv^2)$$

инвариантна относительно поворотов вокруг центра. Действительно, если положить

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi),$$

то

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$$

не зависит от углов. Это значит, что расстояние от начала координат до точки A , лежащей на радиусе, не зависит от угла. Отрезок OA в полярных координатах параметризуется как $\gamma(t) = (t; \varphi_0)$, где $0 < t \leq s$, а s – евклидово расстояние от начала координат до точки A . Тогда

$$\dot{\gamma} = (1; 0) \quad \Rightarrow \quad \|\dot{\gamma}\| = \frac{2R^2}{R^2 - t^2}.$$

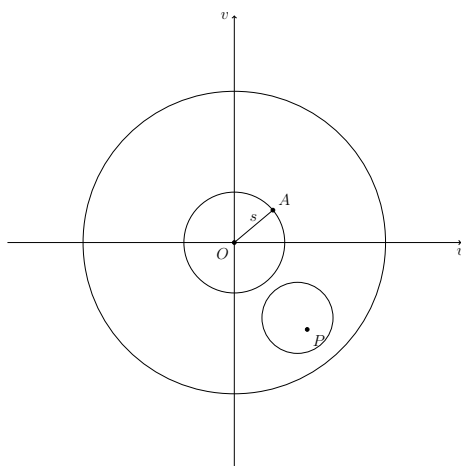


Рис. 9.3. Окружность на плоскости Лобачевского.

Следовательно,

$$|OA|_L = \int_0^s \frac{2R^2}{R^2 - t^2} dt = \int_0^s R \left(\frac{1}{R+t} + \frac{1}{R-t} \right) dt = R \ln \frac{R+s}{R-s}.$$

Таким образом, любая окружность на плоскости Лобачевского имеет вид обычной евклидовой окружности, но с другим центром. Чтобы построить окружность с центром в точке $P \neq O$, нужно сделать дробно-линейное преобразование, переводящее P в O , там нарисовать окружность нужного радиуса, а затем выполнить обратное преобразование. Но при таком преобразовании центр окружности не переходит в центр (в евклидовом смысле), она окажется смещённой.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в верхней полуплоскости задана евклидова окружность с центром в точке $(0; 4)$ единичного радиуса:

$$x^2 + (y - 4)^2 = 1.$$

Радиус псевдосферы $R = 1$. Найдти радиус и центр евклидовой окружности в смысле геометрии Лобачевского.

Из соображений симметрии следует, что центр должен лежать на прямой $x = 0$. Точки пересечения окружности с этой прямой – это точки $A(0; 3)$ и $B(0; 5)$. Отрезок AB – диаметр окружности. Поэтому

$$2r = |AB|_L = \ln \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}.$$

Найдём центр окружности $O(0; y)$ из условия $|AO|_L = |OB|_L = r$. Получаем

$$|AO|_L = \ln \frac{y}{3} = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{15}.$$

Таким образом, центр $O = (0; \sqrt{15})$, радиус $r = \ln \sqrt{\frac{5}{3}}$.

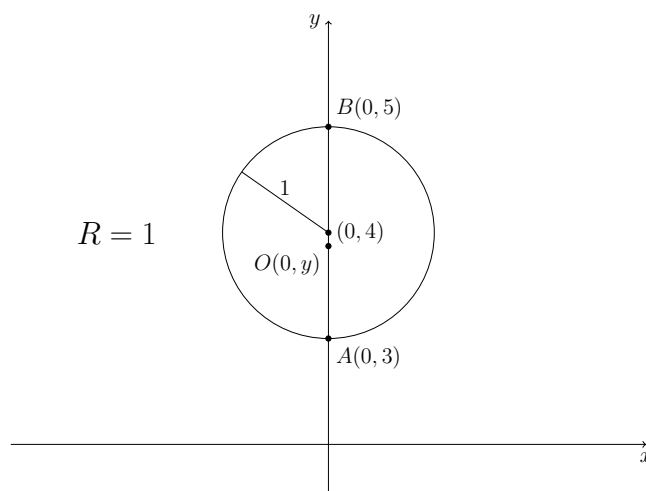


Рис. 9.4. Поиск центра и радиуса евклидовой окружности на плоскости Лобачевского.

Теоремы синусов и косинусов для геометрии Лобачевского

В случае геометрии Лобачевского работают все те же рассуждения, что и для сферической геометрии. Воспользуемся геометрией объемлющего пространства $\mathbb{R}_1^3$. Пусть треугольник ABC расположен следующим образом: точка $A = N$ – лежит в северном полюсе, и сторона AB лежит в плоскости $y = 0$. Как и для сферы,

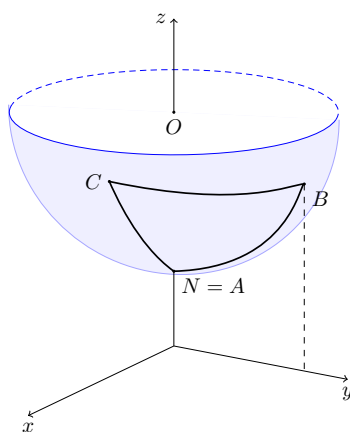


Рис. 9.5. Треугольник ABC на гиперboloиде.

рассмотрим композицию шести преобразований, которая переводит треугольник в себя. Смещение точки в плоскость $y = 0$ осуществляется за счёт сферического поворота вокруг оси z , а перемещение точки из этой плоскости в северный полюс –

засчёт гиперболического поворота вокруг оси x , матрица которого имеет вид

$$H_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) \\ 0 & \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$O_z(\pi - \alpha) H_x\left(\frac{b}{R}\right) O_z(\pi - \gamma) H_x\left(\frac{a}{R}\right) O_z(\pi - \beta) H_x\left(\frac{c}{R}\right) = E,$$

$$H_x\left(\frac{a}{R}\right) O_z(\pi - \beta) H_x\left(\frac{c}{R}\right) = O_z(\gamma - \pi) H_x\left(-\frac{b}{R}\right) O_z(\alpha - \pi).$$

Аналогично случаю со сферой, после перемножения получим соотношения на углы и стороны треугольника.

Задача 9.1. Пусть на плоскости Лобачевского задан шестиугольник с углами по $\pi/2$. Стороны этого шестиугольника по очереди обозначим как $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$. Доказать, что стороны α, β и γ полностью определяются сторонами a, b и c .

Указание к решению: построить тождественное преобразование шестиугольника в себя.

Семинар 10

Элементы общей топологии

Определение 10.1. Топологией на множестве X называется семейство τ подмножеств множества X , обладающее следующими свойствами:

- 1) $\emptyset, X \in \tau$;
- 2) если есть семейство $\{U_\alpha\}_\alpha$ элементов $U_\alpha \in \tau$, то объединение этих элементов $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$;
- 3) если есть конечное семейство $\{U_i\}_{i=1}^k$ элементов $U_1, U_2, \dots, U_k \in \tau$, то их пересечение $\bigcap_{i=1}^k U_i \in \tau$.

Множество (X, τ) называется **топологическим пространством**.

Определение 10.2. Множества $U \in \tau$ называются **открытыми множествами**, а дополнения до них $X \setminus U, U \in \tau$ называются **замкнутыми**.

Определение 10.3. Если на множестве X определена функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

- 1) $\rho(x_1, x_2) \geq 0$;
- 2) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$;
- 3) $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) \geq \rho(x_1, x_3)$;
- 4) $\rho(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;

то такая функция называется **метрикой**, а пространство (X, ρ) – **метрическим пространством**.

Определение 10.4. Множество

$$B_\rho(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leq \rho\} \quad (10.1)$$

называется **шаром радиуса ρ с центром в точке x_0** .

Определение 10.5. Множество

$$U_\rho(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < \rho\} \quad (10.2)$$

называется **открытым шаром радиуса ρ с центром в точке x_0** .

Определение 10.6. Множество $A \subset X$ называется **открытым в метрическом пространстве X** , если для любой точки $a \in A$ существует открытый шар $U_\varepsilon(a)$, такой, что $U_\varepsilon(a) \subset A$.

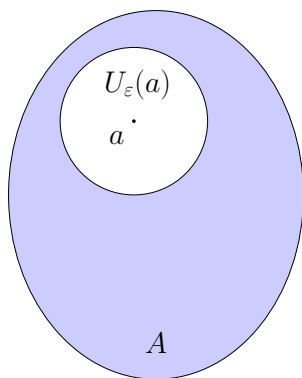


Рис. 10.1. Открытое множество.

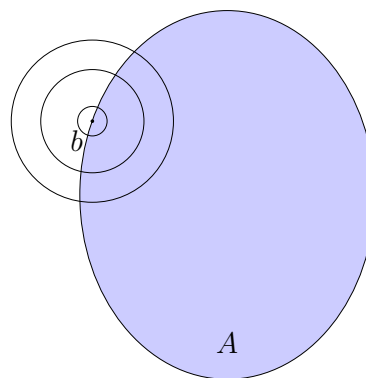


Рис. 10.2. Точка прикосновения.

Определение 10.7. Точка b называется **точкой прикосновения** для множества A в метрическом пространстве X , если для любого $\varepsilon > 0$ пересечение $U_\varepsilon(b) \cap A \neq \emptyset$. Множество всех точек прикосновения обозначается как $\bar{A}$.

Определение 10.8. Множество A называется замкнутым, если $\bar{A} = A$.

Утверждение 10.1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Рассмотрим множество

$$\tau_\rho = \{U \subset X \mid U - \text{открытые множества в метрическом пространстве } X\}. \quad (10.3)$$

Тогда τ_ρ – топология.

Доказательство. Первое условие топологии выполняется мгновенно: пустое множество содержится в τ_ρ , а X является открытым, и поэтому тоже содержится в τ_ρ .

Рассмотрим произвольную точку $x \in \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. Тогда найдётся такое α_0 , что $x \in U_{\alpha_0}$. Так как это открытое множество, то найдётся $\varepsilon > 0$, такое, что шар

$$U_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha.$$

Таким образом, $\bigcup_{\alpha} U_\alpha$ – открытое, а значит $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \tau_\rho$.

Пусть $V_1, \dots, V_k \in \tau_\rho$, и есть точка $x \in \bigcap_{i=1}^k V_i$. Поскольку V_i – открытые, то для любого $i = 1, \dots, k$ существует $\varepsilon_i > 0$, такое, что $U_{\varepsilon_i}(x) \subset V_i$. Выберем $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$. Далее воспользуемся леммой.

Лемма 10.1. Если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $U_{\varepsilon_1}(x) \subset U_{\varepsilon_2}(x)$.

Задача 10.1. Доказать лемму.

Из леммы следует, что

$$U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_i}(x) \subset V_i, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Следовательно, $U_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^k V_i$, и $\bigcap_{i=1}^k V_i \in \tau_\rho$. □

Определение 10.9. Топология τ_ρ называется **метрической топологией**.

Утверждение 10.2. Если B – подмножество метрического пространства X , то B – замкнуто в метрическом пространстве тогда и только тогда, когда $X \setminus B$ – открыто в метрическом пространстве.

Доказательство. Пусть B замкнуто в метрическом пространстве X , то есть $B = \overline{B}$. Рассмотрим точку $x \in X \setminus B$. Она не является точкой прикосновения: $x \notin \overline{B}$. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что $U_\varepsilon(b) \cap B = \emptyset$. Откуда следует, что $U_\varepsilon(b) \subset X \setminus B$. То есть $X \setminus B$ открыто в метрическом пространстве.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $X \setminus B$ открыто в метрическом пространстве. Тогда для любой точки $x \in X \setminus B$ найдётся $\varepsilon > 0$, такой, что шар $U_\varepsilon(x) \subset X \setminus B$. Это означает, что пересечение $U_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$, а следовательно $x \notin \overline{B}$. Откуда следует, что $\overline{B} \subset B$. Из определения точек прикосновения следует, что $B \subset \overline{B}$. Откуда $B = \overline{B}$. □

Рассмотрим свойства замкнутых множеств.

Утверждение 10.3. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, тогда

- 1) $\emptyset, X$ – замкнуты;
- 2) если есть семейство $\{F_\alpha\}_\alpha$ замкнутых подмножеств X , то пересечение этих элементов $\bigcap_\alpha F_\alpha$ – замкнуто;
- 3) если есть конечное семейство $\{F_i\}_{i=1}^k$ элементов $F_1, F_2, \dots, F_k$, то их объединение $\bigcup_{i=1}^k F_i$ – замкнуто.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что

$$\emptyset = X \setminus X, \quad X = X \setminus \emptyset.$$

Докажем второе утверждение. F_α замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение $X \setminus F_\alpha$ открыто. Рассмотрим объединение таких дополнений:

$$\tau \ni \bigcup_\alpha (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \bigcap_\alpha F_\alpha.$$

Откуда следует, что $\bigcap_\alpha F_\alpha$ – замкнуто.

Аналогично докажем третье утверждение. F_i замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение $X \setminus F_i$ открыто. Рассмотрим пересечение таких дополнений:

$$\tau \ni \bigcap_{i=1}^k (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^k F_i.$$

Откуда следует, что $\bigcup_{i=1}^k F_i$ – замкнуто. □

Альтернативный способ определения топологии – через замкнутые множества.

Определение 10.10. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, и $x_0 \in X$. **Окрестностью точки x_0** называется любое открытое множество $U \subset X$, содержащее x_0 .

Определение 10.11. Пусть (X, τ_x) и (Y, τ_y) – два топологических пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ **называется непрерывным в точке $x_0 \in X$** ($f \in C(x_0)$), если для любой окрестности U точки $f(x_0) \in U \in \tau_y$, существует окрестность V точки $x_0 \in V \in \tau_x$, такая, что $f(V) \subset U$.

Определение 10.12. Функция f **непрерывна на всём пространстве X** , если она непрерывна в любой его точке.

Теорема 10.1. (Критерий непрерывности)

Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого подмножества $U \in \tau_y$ его полный прообраз $f^{-1}(U) \in \tau_x$.

Примеры. Приведём несколько примеров топологических пространств.

- 1) Топологические пространства, порождённые метрикой.
- 2) Множество X с топологией $\tau = 2^X$ (2^X – множество всех подмножеств множества X). Такая топология называется **дискретной**. В ней любое подмножество открыто и замкнуто одновременно.
- 3) Множество X с топологией $\tau = \{\emptyset, X\}$. Такая топология называется **анти-дискретной**, или **тривиальной**.

Утверждение 10.4. Пусть (X, τ_x) и (Y, τ_y) – топологические пространства, причём на X топология дискретна. Тогда отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое подмножество $U \in \tau_y$. Его прообраз $f^{-1}(U) \subset X$. Так как на X задана дискретная топология, то $f^{-1}(U)$ является открытым, и $f^{-1}(U) \in \tau_x$. Согласно критерию непрерывности, f непрерывно. $\square$

Утверждение 10.5. Пусть (X, τ_x) и (Y, τ_y) – топологические пространства, причём на Y топология тривиальна. Тогда отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно.

Доказательство. Действительно, так как

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X,$$

оба эти прообраза в X являются открытыми, а значит, принадлежат τ_x . По критерию непрерывности получаем, что f является непрерывным. $\square$

Индукцированная и перенесённая топология. Фактортопология

Определение 10.13. Пусть задано топологическое пространство (X, τ_x) и $A \subset X$. Множество

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau_x\} \quad (10.4)$$

называется **индуцированной топологией**, а пространство (A, τ_A) – **подпространством топологического пространства** (X, τ_x) .

Утверждение 10.6. τ_A действительно является топологией.

Доказательство. Рассмотрим

$$\emptyset = \emptyset \cap A, \quad A = X \cap A.$$

Так как $\emptyset, X \in \tau_x$, то $\emptyset, A \in \tau_A$.

Пусть теперь у нас есть семейство $\{U_\alpha\} \in \tau_A$. Рассмотрим их объединение

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (W_{\alpha} \cap A), \quad W_{\alpha} \in \tau_x \Rightarrow \bigcup_{\alpha} W_{\alpha} \in \tau_x.$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (W_{\alpha} \cap A) = A \cap \left(\bigcup_{\alpha} W_{\alpha} \right).$$

Так как $\bigcup_{\alpha} W_{\alpha} \in \tau_x$, то $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \tau_A$.

Теперь рассмотрим конечное семейство $U_1, \dots, U_k \in \tau_A$ и их пересечение

$$\bigcap_{i=1}^k U_i = \bigcap_{i=1}^k (W_i \cap A) = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^k W_i \right).$$

Так как

$$W_i \in \tau_x \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k W_i \in \tau_x,$$

то $\bigcap_{i=1}^k U_i \in \tau_A$. □

Пример. Рассмотрим двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ с топологией, представленной открытыми кругами. Пусть задана кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$. На этой кривой можно построить индуцированную топологию. В качестве её элементов надо рассмотреть участки этой кривой, являющиеся пересечениями γ с открытыми кругами.

Рассмотрим перенесение топологии на множество.

Определение 10.14. Пусть (X, τ_x) – топологическое пространство, M – некоторое множество и $A \subset M$. Будем говорить, что $A \in \tau_f$, если и только если $f^{-1}(A) \in \tau_x$.

Утверждение 10.7. Множество τ_f является топологией.

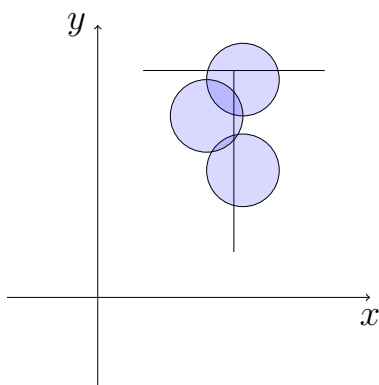


Рис. 10.3. Пример индуцированной топологии.

Доказательство. Рассмотрим пустое множество и множество M :

$$\emptyset \subset M, \quad M \subset M,$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_x, \quad f^{-1}(M) = X \in \tau_x.$$

Следовательно, $\emptyset, M \in \tau_f$.

Пусть у нас есть семейство подмножеств $\{A_\alpha\}$, $A_\alpha \in \tau_f$, для которых верно

$$f^{-1}(A_\alpha) \in \tau_x \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha) \in \tau_x.$$

Рассмотрим прообраз объединения этого семейства:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha) \in \tau_x.$$

Отсюда следует, что $\bigcup_{\alpha} A_\alpha \in \tau_f$.

Здесь мы воспользовались тем, что

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha).$$

Действительно, рассмотрим $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)$, тогда

$$f(x) \in \bigcup_{\alpha} A_\alpha.$$

Значит, существует α_0 , такой, что

$$f(x) \in A_{\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad x \in f^{-1}(A_{\alpha_0}) \subset \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) \subset \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_{\alpha}).$$

Докажем обратное включение. Рассмотрим

$$x \in \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_{\alpha})$$

тогда найдётся такой α_0 , что

$$x \in f^{-1}(A_{\alpha_0}) \Rightarrow f(x) \in A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right).$$

Таким образом, объединение прообразов и прообраз объединения совпадают.

Наконец, рассмотрим пересечение конечного числа открытых подмножеств A_i :

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \bigcap_{i=1}^k f^{-1}(A_i) \in \tau_x \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k A_i \in \tau_f.$$

Равенство с пересечениями доказывается аналогично равенству с объединениями. Таким образом, τ_f – топология. $\square$

Определение 10.15. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, и на X задано отношение эквивалентности R (рефлексивная, симметричная, транзитивная бинарная операция). Тем самым X разбивается на **классы эквивалентности** $[x]$ своих элементов:

$$[x] = \{y \in X \mid yRx\} \quad (10.5)$$

Фактормножеством X/R называется

$$X/R = \bigcup_{x \in X} \{[x]\}. \quad (10.6)$$

Пусть также задано отображение

$$\pi : X \rightarrow X/R, \quad (10.7)$$

называемое **проекцией**, действующее по правилу

$$\pi(x) = [x]. \quad (10.8)$$

Множество, τ_{π} , порождённое проекцией называется **фактортопологией на фактормножестве**.

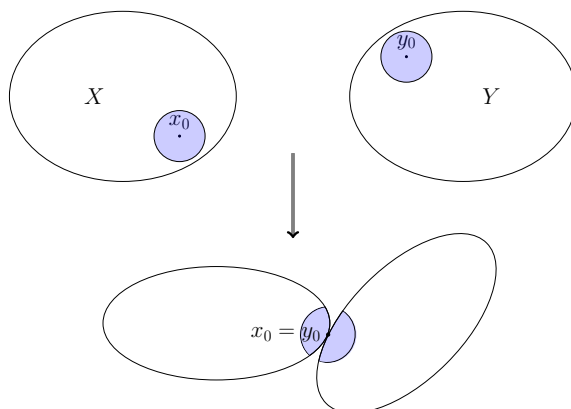


Рис. 10.4. Объединение топологических пространств.

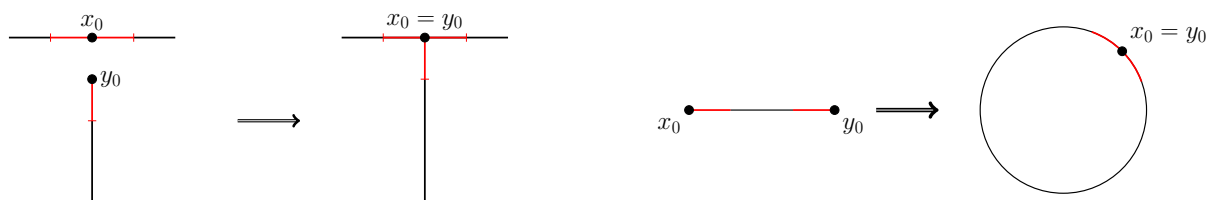


Рис. 10.5. Примеры объединения топологических пространств.

Примеры. Пусть заданы топологические пространства (X, τ_x) и (Y, τ_y) , и $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Рассмотрим их объединение

$$(X \cup Y, \tau_x \cup \tau_y),$$

и на нём определим отношение эквивалентности по правилам

$$1) \forall a \in X \cup Y \quad aRa, \quad 2) x_0Ry_0, y_0Rx_0.$$

Если точка $a \neq x_0, y_0$, то тогда её окрестность при проекции сохраняется. А вот окрестность общей точки должна в качестве прообраза иметь объединение окрестностей точек x_0 и y_0 .

Отношения эквивалентности часто порождаются действиями групп на множествах. Например, на $\mathbb{R}$ действует группа сдвигов на целое число $n \in \mathbb{Z}$: $n(x) = x + n$. Тогда у каждой точки возникает орбита

$$\mathbb{Z}(x) = \langle n(x) \mid n \in \mathbb{Z} \rangle = \langle x + n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Зададим отношение эквивалентности: xRy , если и только если существует n , такой, что $n(x) = y$. То есть $\mathbb{Z}(x) \ni y$ или $\mathbb{Z}(y) \ni x$. Тогда на фактормножестве $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (пространстве орбит) можно построить фактортопологию. В качестве фактор множества возьмём отрезок $[0, 1]$, у которого концы являются эквивалентными, то есть $[0, 1]/0 \sim 1 = S^1$.

Аксиомы отделимости. Пространство Хаусдорфа

Определение 10.16. Топологическое пространство (X, τ) называется **хаусдорфовым**, если и только если для любых точек $x, y \in X$, $x \neq y$ существуют открытые окрестности $U(x), U(y) \in \tau$, такие, что $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Утверждение 10.8. Любое метрическое пространство (X, τ_ρ) является хаусдорфовым.

Доказательство. Действительно, если $x \neq y$, то $\rho(x, y) > 0$. Рассмотрим открытые шары $U_\varepsilon(x)$, $U_\varepsilon(y)$, где $\varepsilon = \rho(x, y)/3$. Эти шары не пересекаются, так как если предположить обратное, то найдётся точка z , лежащая в обоих шарах, но тогда

$$\rho(x, z) < \varepsilon, \quad \rho(y, z) < \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < 2\varepsilon = \frac{2}{3}\rho(x, y).$$

Таким образом, пришли к противоречию. □

Построим пример нехаусдорфовой топологии. Такая топология автоматически не будет метрической. Самый простой пример – тривиальная топология, так как в ней существует всего одна открытая окрестность – всё множество X .

Попробуем перечислить все топологии, состоящие из двух точек. Итак, пусть $X = \{a, b\}$. Всего в таком множестве 4 подмножества: одно пустое, два одноэлементных и одно двухэлементное. Тогда семейств подмножеств всего 16, но топологии образуют только 4 из них, так как заведомо каждая топология содержит пустое множество и всё множество X . Добавляя один элемент к этому множеству получаем, что $\{\emptyset, X, \{a\}\}$ – топология. Следовательно, возможные топологии это

$$\{\emptyset, X\}, \quad 2^X, \quad \{\emptyset, X, \{a\}\}, \quad \{\emptyset, X, \{b\}\}.$$

Среди них хаусдорфовой является только 2^X .

Семинар 11

Свойства топологических пространств

Определение 11.1. Топологическое пространство (X, τ) называется **связным**, если его нельзя представить в виде

$$X = A \cup B, \quad A, B \in \tau: \quad A, B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset. \quad (11.1)$$

Если же такое представление возможно, то топологическое пространство называется **несвязным**.

Если (X, τ) является несвязным, и $X = A \cup B$, то $X \setminus A = B$ и $X \setminus B = A$. Так как множества $A, B \in \tau$, то дополнения до них должны быть замкнуты. Следовательно, A, B являются открыто-замкнутыми подмножествами.

Утверждение 11.1. (X, τ) является связным, если его открыто-замкнутые подмножества – это только X и $\emptyset$.

Определение 11.2. Максимальное по включению связное подмножество пространства X называется **связной компонентой**, или **компонентой связности**.

Утверждение 11.2. Любое топологическое пространство можно представить в виде объединения его компонент связности

$$X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}. \quad (11.2)$$

Утверждение 11.3. Компоненты связности не пересекаются.

Доказательство. Пусть X_{α} и X_{β} – компоненты связности X . Предположим, что $X_{\alpha} \cap X_{\beta} \neq \emptyset$. Покажем, что тогда их объединение $X_{\alpha} \cup X_{\beta}$ является связным.

Пусть это не так, и

$$X_{\alpha} \cup X_{\beta} = A \cup B,$$

где A, B – непересекающиеся и непустые. Рассмотрим

$$X_{\alpha} = (X_{\alpha} \cap A) \cup (X_{\alpha} \cap B).$$

Так как A, B – открытые, то $X_{\alpha} \cap A, X_{\alpha} \cap B$ – открытые в X_{α} и не пересекающиеся. Так как X_{α} связно, то тогда либо $X_{\alpha} \cap A = \emptyset$, либо $X_{\alpha} \cap B = \emptyset$. То есть либо $X_{\alpha} \subset B$, либо $X_{\alpha} \subset A$. Для X_{β} получим то же самое. Но тогда возможны два случая. Первый: X_{α} и X_{β} лежат оба либо в A , либо в B , но тогда второе из них должно быть пустым. Второй: они лежат в разных множествах, но тогда $X_{\alpha} \cap X_{\beta} = \emptyset$. В обоих случаях приходим к противоречию. Следовательно, $X_{\alpha} \cup X_{\beta}$ является связным, что противоречит тому, что компоненты связности максимальны по включению. $\square$

Компоненты X_{α} являются замкнутыми в X , но открытыми они быть не обязаны. Приведём пример. Рассмотрим

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}.$$

Тогда максимальными по включению связными подмножествами будут сами точки, и

$$X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k, \quad X_0 = \{0\}, \quad X_k = \left\{ \frac{1}{k} \right\}.$$

Но у индуцированной топологии точка $\{0\}$ не является открытым подмножеством, так как в каждой его окрестности лежат точки последовательности.

Определение 11.3. Два топологических пространства $X \sim Y$ называются **гомеоморфными**, если существует непрерывное взаимнооднозначное отображение

$$f : X \xrightarrow{\sim} Y, \quad (11.3)$$

обратное к которому также является непрерывным. Само отображение называется **гомеоморфизмом**.

Утверждение 11.4. Если X связно, а $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f(X)$ тоже связно.

Из этого утверждения следует, что гомеоморфизмы устанавливают биекцию между компонентами связности.

Пример. Рассмотрим как подмножества плоскости два отрезка, пересекающихся в виде буквы T , и отрезок I . Являются ли они гомеоморфными? Ответ: нет. Предположим, что существует гомеоморфизм $f : T \xrightarrow{\sim} I$. Выберем точку x_0 , лежащую на “крестовине”, и удалим её из T . Рассмотрим ограничение $f|_{T \setminus \{x_0\}}$. Это будет гомеоморфизм с образом такого пространства. Но тогда не сохраняется число компонент связности этого множества. Поэтому построение биекции невозможно, и пространства T и I не являются гомеоморфными. Аналогично можно показать,

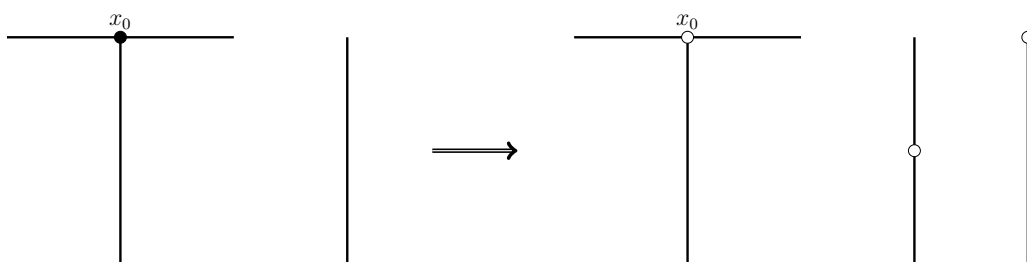


Рис. 11.1. Пример несохранения числа компонент связности.

что $\mathbb{R}^n \not\sim \mathbb{R}$.

Определение 11.4. Пространство X называется **линейно связным**, или **связным по путям**, если для любой пары точек $x, y \in X$ существует непрерывная кривая $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, соединяющая эти точки

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y. \quad (11.4)$$

Утверждение 11.5. Если X линейно связно, то оно связно.

Доказательство. Отрезок $[0, 1]$ является связным. Его образ при непрерывном отображении $\gamma([0, 1])$ также связан.

Предположим, что X несвязно. Тогда $X = A \cup B$, где A, B – непересекающиеся и непустые. Возьмём точки $a \in A, b \in B$ и рассмотрим кривую γ , такую что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Но тогда $a \in \gamma([0, 1]) \cap A$ и $b \in \gamma([0, 1]) \cap B$, откуда следует, что образ $\gamma([0, 1])$ не является связным. Пришли к противоречию. $\square$

Покажем, что из связности не следует линейная связность. Рассмотрим на плос-

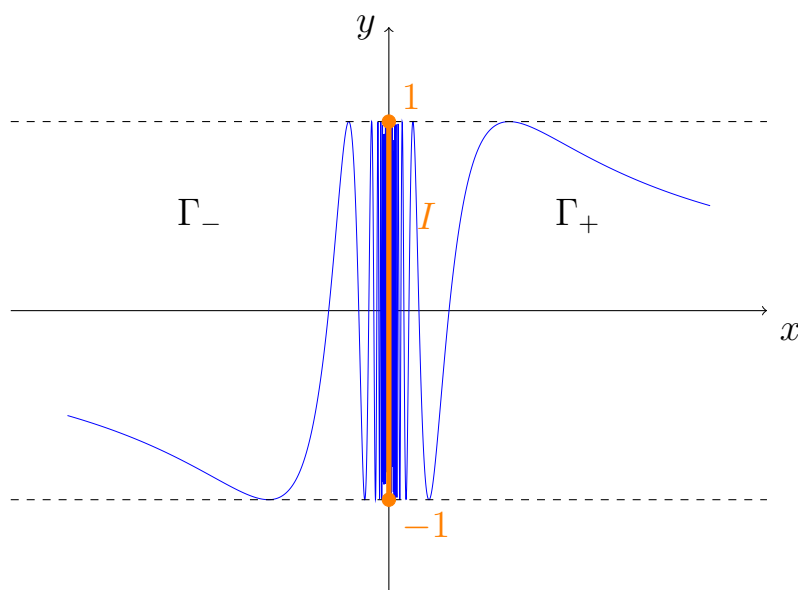


Рис. 11.2. Пример отсутствия линейной связности у связного пространства.

кости график функции $\sin(1/x)$, где $x \neq 0$. Его правую часть обозначим за Γ_+ , а левую – за Γ_- . Также обозначим отрезок, соединяющий точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$, за I . Пусть $X = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup I$. Выберем $x \in \Gamma_+$ и $y \in \Gamma_-$. Так вот, эти две точки нельзя соединить непрерывной кривой, она будет разрывна в нуле. Следовательно, X не является линейно связным. Однако оно является связным. Заметим, что Γ_+, Γ_-, I – это кривые, которые являются линейно связными, а значит и просто связными. Докажем связность X от противного. Пусть $X = A \cup B$, где A, B – непустые и непересекающиеся. Пусть $\Gamma_+ \subset A$. Поймём, где содержится I . Поскольку на X рассматривается индуцированная топология, то существует окрестность отрезка $U \supset I$, пересекающаяся с Γ_+ и Γ_- . Тогда если $I \subset A$, а A – замкнутое, то все предельные точки множества I также содержатся в A . Но это означает, что $A \cap \Gamma_+ \neq \emptyset$, откуда $\Gamma_+ \subset A$. Аналогично показывается, что $\Gamma_- \subset A$. Откуда следует, что $B = \emptyset$. Противоречие.

Компактные топологические пространства

Определение 11.5. Пусть X – топологическое пространство. Семейство его открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ называется **покрытием** X , если

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = X. \quad (11.5)$$

Определение 11.6. Пусть $K \subset X$ – подмножество топологического пространства. Семейство его открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ называется **покрытием** K , если

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \supset K. \quad (11.6)$$

Определение 11.7. Топологическое пространство (X, τ) (или его подмножество K) называется **компактным**, или **компактом**, если из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Замечание 11.1. Определение для K в точности совпадает с тем, что K является компактом в индуцированной топологии.

Утверждение 11.6. Пусть X – компактное топологическое пространство, а $F \subset X$ – его замкнутое подмножество. Тогда F компактно.

Утверждение 11.7. Пусть $K \subset Y$ – подмножество хаусдорфова пространства Y . Тогда K замкнуто.

Утверждение 11.8. Пусть X и Y – два топологических пространства, причём X – компакт. Тогда если отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f(X)$ – компакт.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{U_\alpha\} \subset \tau_Y$ множества $f(X)$. Пусть $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$. В силу непрерывности отображения $V_\alpha \in \tau_X$. Тогда $\{V_\alpha\}$ – открытое покрытие X . Так как X – компакт, то из этого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$. Образы этих множеств $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ также образуют конечное подпокрытие $f(X)$. Следовательно, $f(X)$ – компакт. $\square$

Теорема 11.1. (Теорема Бореля)

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Замечание 11.2. В общем случае эта теорема неверна. Рассмотрим пример. Возьмём пространство последовательностей

$$b = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \max |x_k| < \infty \right\}.$$

На нём определим норму последовательности как $\|\{x_k\}\| = \max |x_k|$. Тогда такое пространство становится нормированным, и, следовательно, метрическим. Обозначается это пространство как $\mathbb{R}_{\infty}^{\infty}$. В нём выберем шар $B(0)_1$, который является замкнутым и ограниченным подмножеством. Но оно не является компактным, так как

в нём можно построить бесконечную последовательность, не имеющую предельной точки. Например,

$$X_k = \{0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots\}.$$

При $k \neq l$ $\|X_k - X_l\|_\infty = 1$.

Утверждение 11.9. Пусть X – компактное, а Y – хаусдорфово топологическое пространство. Отображение $f : X \rightarrow Y$ является непрерывным и взаимнооднозначным. Тогда f является гомеоморфизмом. Другими словами, обратное отображение к f – также непрерывно.

Доказательство. Критерий непрерывности отображения в альтернативной формулировке говорит о том, что отображение непрерывно, если и только если прообраз любого замкнутого множества является замкнутым.

Рассмотрим произвольное замкнутое подмножество $F \subset X$ и его прообраз под действием обратного отображения $(f^{-1})^{-1}(F)$, который совпадает в силу взаимнооднозначности с $f(F)$. Так как $F \subset X$ – замкнутое подмножество компакта, то F – компакт. Из непрерывности отображения f следует, что $f(F)$ – тоже компакт. Но так как Y хаусдорфово, то $f(F)$ замкнут. Следовательно, f – гомеоморфизм. $\square$

Многообразия

Определение 11.8. Пусть X – топологическое пространство. n -мерным атласом называется множество пар

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \quad (11.7)$$

где $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие X , а

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \quad (11.8)$$

– гомеоморфизм в открытые связные множества $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Пары $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ называются **картами**.

Определение 11.9. Хаусдорфово топологическое пространство называется n -мерным топологическим многообразием, если на нём существует не более чем счётный n -мерный атлас.

Определение 11.10. Координаты точки $\varphi_\alpha(P) \in \mathbb{R}^n$, где $P \in U_\alpha$, называются **координатами точки P в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$** .

Определение 11.11. Если точка $P \in (U_\alpha \cap U_\beta)$, то ей соответствует два набора координат $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ и $(y_0^1, \dots, y_0^n)$. Отображение $\Psi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, связывающее два этих набора, называется **функцией склейки карт**.

Определение 11.12. Пусть задана функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где X – топологическое многообразие. Для любой точки P существует карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $P \in U_\alpha$. Отображение

$$f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R} \quad (11.9)$$

называется **координатным представлением функции f** .

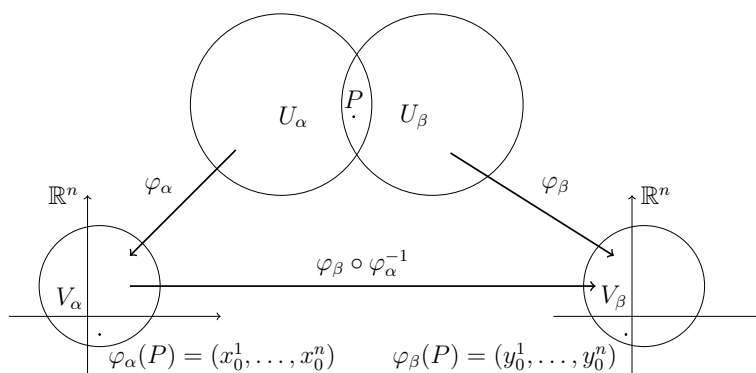


Рис. 11.3. Склейка карт.

Определение 11.13. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется **гладкой**, если её координатные представления в каждой точке $P \in X$ являются гладкими (в смысле математического анализа).

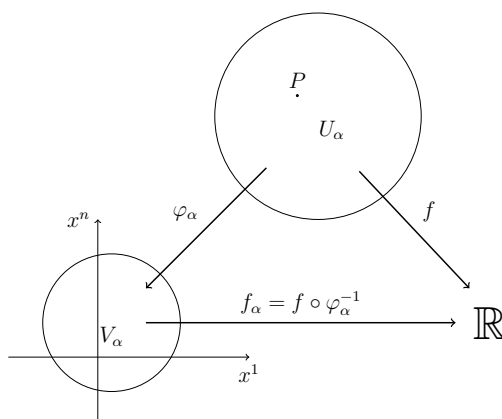


Рис. 11.4. Координатное представление функции.

Проблема в том, что одна и та же точка может принадлежать нескольким картам. Следовательно, одна и та же функция может иметь несколько координатных представлений, которые отличаются на гомеоморфизм. Пусть $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ и $f_\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1}$ – два координатных представления функции f . Тогда

$$f_\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = f_\alpha \circ \Psi_{\alpha\beta}.$$

Функция перехода $\Psi_{\alpha\beta}$, вообще говоря, является гомеоморфизмом, который не обязан сохранять гладкость. В связи с этим выделяют более сильные объекты.

Определение 11.14. n -мерное топологическое многообразие X с атласом $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ называется **гладким**, если все функции перехода $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ являются гладкими.

Утверждение 11.10. Если координатное представление функции f – гладкое в одной из карт гладкого многообразия, то оно гладкое в любой его карте, отличающейся на функцию перехода.

Пример топологического не гладкого многообразия. Рассмотрим $X = \mathbb{R}^1(t)$ с атласом

$$\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}, \quad U_1 = U_2 = \mathbb{R}^1.$$

В качестве φ_1 и φ_2 возьмём

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^1(t) \rightarrow \mathbb{R}^1(x), \quad x = \varphi_1(t) = t;$$

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^1(t) \rightarrow \mathbb{R}^1(y), \quad y = \varphi_2(t) = t^3.$$

Посмотрим на функции перехода:

$$y(x) = x^3, \quad x(y) = \sqrt[3]{y}.$$

Но функция $x(y) = \sqrt[3]{y}$ не является гладкой. Поэтому такое многообразие не является гладким.

Определение 11.15. Два многообразия M_1 и M_2 называются **диффеоморфными** (обозначается $M_1 \simeq M_2$), если существует взаимнооднозначное отображение $f : M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$, такое, что f и f^{-1} являются гладкими. Само отображение называется **диффеоморфизмом**.

Задача 11.1. Пусть даны два многообразия

$$M_1 = (\mathbb{R}^1, \mathcal{A}_1 = \{(U_1, \varphi_1)\}), \quad M_2 = (\mathbb{R}^1, \mathcal{A}_2 = \{(U_2, \varphi_2)\}),$$

где карты $\{(U_i, \varphi_i)\}$ – те же, что и раньше. Показать, что $M_1 \simeq M_2$.

Рассмотрим задачу о построении атласа и проверки его гладкости. Самый простой нетривиальный пример – это окружность:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Покроем окружность четырьмя картами, открытыми подмножествами в которых являются дуги:

$$U_1 = S^1 \cap \{y > 0\}, \quad \varphi_1(x, y) = x;$$

$$U_2 = S^1 \cap \{y < 0\}, \quad \varphi_2(x, y) = x;$$

$$U_3 = S^1 \cap \{x < 0\}, \quad \varphi_3(x, y) = y;$$

$$U_4 = S^1 \cap \{x > 0\}, \quad \varphi_4(x, y) = y.$$

Проверим, является ли атлас

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^4$$

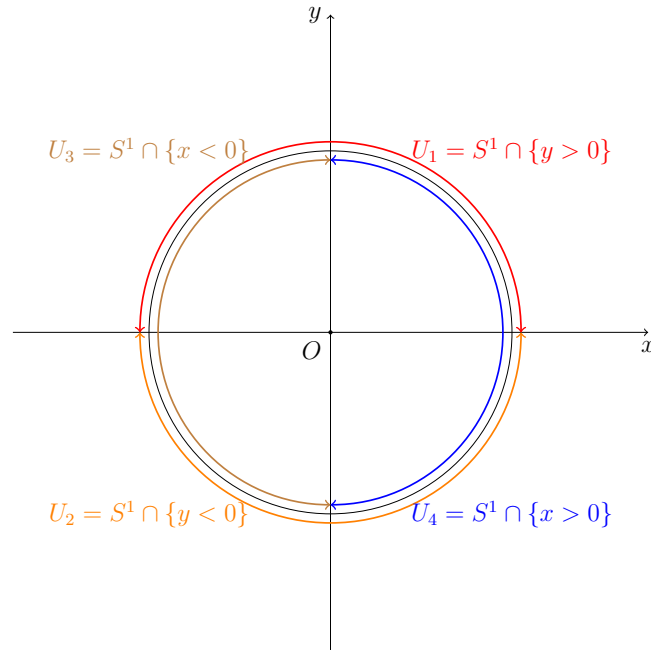


Рис. 11.5. Атлас $\mathcal{A}$ окружности.

гладким. Для этого надо рассмотреть всевозможные функции склейки карт. Для пары карт U_1 и U_4 рассмотрим функцию перехода $\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}$ из U_4 в U_1 , действующую из отрезка $(0, R) \subset OY$ в отрезок $(0, R) \subset OX$.

$$\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}(y) = \varphi_1 \left(+\sqrt{R^2 - y^2}, y \right) = \sqrt{R^2 - y^2} = x(y).$$

Теперь посмотрим на пару карт U_1 и U_3 :

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(y) = \varphi_1 \left(-\sqrt{R^2 - y^2}, y \right) = -\sqrt{R^2 - y^2}.$$

Все функции перехода будут иметь вид $\pm\sqrt{R^2 - x^2}$, $\pm\sqrt{R^2 - y^2}$. Так как $|x|, |y| < R$, то эти функции будут гладкими.

Полученный результат можно обобщить на сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Атлас такого многообразия – это

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(U_k^\pm, \varphi_k^\pm)\}, \\ U_k^\pm &= S^n \cap \{\pm x^k > 0\}, \quad \varphi_k^\pm(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^n), \\ (\varphi_k^\pm)^{-1} &= \left(x^1, \dots, x^{k-1}, \pm \sqrt{R^2 - \sum_{i \neq k} (x^i)^2}, x^{k+1}, \dots, x^n \right). \end{aligned}$$

Семинар 12

Гладкость функций на сфере

Рассмотрим сферу S^2 единичного радиуса. И рассмотрим для каждой точки $P \in S^2$ функцию $f(P) = \sin(\theta)$. Поймём, является ли эта функция гладкой.

Формально нам необходимо рассмотреть шесть карт $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$, и в каждой из них рассмотреть координатную функцию $f \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}$ и проверить её на гладкость. Если хотя бы одна из них гладкой не является, то и функция f не гладкая. Для начала рассмотрим карту (U_3^+, φ_3^+) . Имеем

$$\varphi_3^+(x, y, z) \rightarrow (x, y), \quad (\varphi_3^+)^{-1}(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

тогда

$$f \circ (\varphi_3^+)^{-1} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Область определения координатного гомеоморфизма $x^2 + y^2 < 1$. Координатное представление $f \circ (\varphi_3^+)^{-1}$ является гладким везде в этой области, за исключением точки $x = y = 0$.

Рассмотрим ещё один вариант атласа, получаемый с помощью стереографической проекции. Для простоты начнём с окружности. Выпишем карты такого атласа:

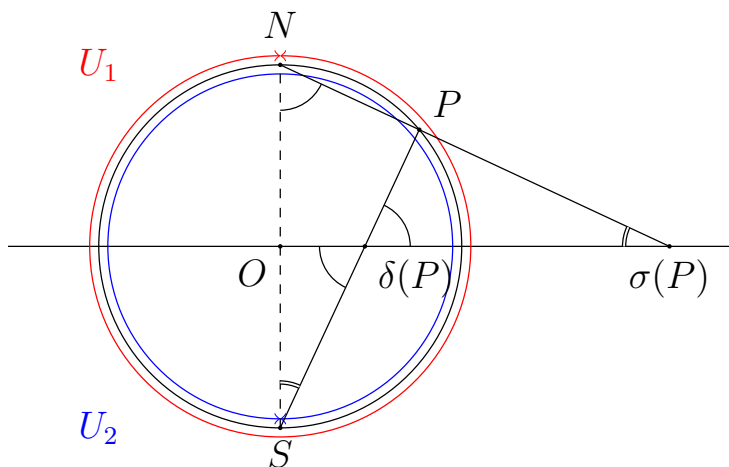


Рис. 12.1. Атлас $\mathcal{A}_S$ окружности.

$$\mathcal{A}_S = \left\{ (U_1 = S^1 \setminus \{N\}, \varphi_1 = \sigma), \quad (U_2 = S^1 \setminus \{S\}, \varphi_2 = \delta) \right\}.$$

Здесь $\delta(P)$ – стереографическая проекция точки, построенная относительно южного полюса S . Отображения

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^1$$

являются гомеоморфизмами. Теперь надо построить функции склейки. Их можно построить, рассмотрев подобные треугольники $\triangle ON\sigma(P)$ и $\triangle O\delta(P)S$. Из подобия

следует, что

$$\frac{1}{\delta(P)} = \frac{\sigma(P)}{1} \Rightarrow \delta(P)\sigma(P) = 1 \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} &= \frac{1}{\delta(P)} \\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} &= \frac{1}{\sigma(P)} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$U_1 \cap U_2 = S^1 \setminus \{N, S\}.$$

На этом множестве $\delta(P) \neq 0$ и $\sigma(P) \neq 0$, поэтому функции перехода являются гладкими, и, следовательно, атлас $\mathcal{A}_S$ – тоже гладкий.

Напомним, что ранее нами был рассмотрен ещё один атлас окружности $\mathcal{A}$, карты которого имеют вид

$$\begin{aligned} U_1 &= S^1 \cap \{y > 0\}, & \varphi_1(x, y) &= x; \\ U_2 &= S^1 \cap \{y < 0\}, & \varphi_2(x, y) &= x; \\ U_3 &= S^1 \cap \{x < 0\}, & \varphi_3(x, y) &= y; \\ U_4 &= S^1 \cap \{x > 0\}, & \varphi_4(x, y) &= y. \end{aligned}$$

Хорошей задачей является проверка гладкости атласа $\mathcal{A}_S \cup \mathcal{A}$.

Проективное пространство

Приведём ещё один пример многообразия.

Определение 12.1. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ – это пространство прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Если в $\mathbb{R}^{n+1}$ заданы координаты $(x^1, \dots, x^{n+1})$, то каждая прямая задаётся своим направляющим вектором v с точностью до постоянного множителя $\lambda \neq 0$. Поэтому точки проективного пространства задаются в **однородных координатах** $(x^1 : x^2 : \dots : x^{n+1})$. Это набор координат направляющих векторов, которые рассматриваются с точностью до эквивалентности

$$(x^1 : x^2 : \dots : x^{n+1}) \sim (\lambda x^1 : \lambda x^2 : \dots : \lambda x^{n+1}).$$

При этом предполагается, что $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 \neq 0$. В таком пространстве можно построить карты, где множества U_i – это прямые, для которых i -ая координата не обращается в нуль:

$$U_i = \{x^i \neq 0\},$$

а функции φ_i задаются как отображение

$$\varphi_i(x^1 : x^2 : \dots : x^{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x^1}{x^i} : \frac{x^2}{x^i} : \dots : \frac{x^{i-1}}{x^i} : \frac{x^{i+1}}{x^i} : \dots : \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Обратное к нему, действует как

$$(y^1 : y^2 : \dots : y^{i-1} : 1 : y^{i+1} : \dots : y^n) \xleftarrow{\varphi_i^{-1}} (y^1 : \dots : y^n).$$

Рассмотрим функции перехода $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$:

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y^1 : \dots : y^n) = \left(\frac{y^1}{y^j} : \dots : \frac{1}{y^j} : \dots : \frac{y^n}{y^j} \right),$$

где у точки образа пропущена i -ая компонента. Такое отображение, так как $y^j \neq 0$, является гладким. А значит, из n -мерного проективного пространства мы получили n -мерное гладкое многообразие.

Рассмотрим пример проективного пространства $\mathbb{R}P^1$. Для этого построим плоскость $\mathbb{R}^2$, на которой каждая прямая задаётся с точностью до множителя направляющим вектором $(x^1 : x^2)$. Зададим карты

$$(x^1 : x^2) \xrightarrow{x^1 \neq 0} \left(\frac{x^2}{x^1} = t \right), \quad (x^1 : x^2) \xrightarrow{x^2 \neq 0} \left(\frac{x^1}{x^2} = s \right)$$

и построим функции перехода

$$s(t) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(t) = \frac{1}{t}, \quad t(s) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(s) = \frac{1}{s}.$$

Заметим, что $\varphi_1(U_1) = \mathbb{R}^1$ и $\varphi_2(U_2) = \mathbb{R}^1$. А это значит, что мы можем построить отображения U_i в $U_i \in \mathcal{A}_S$, причём функции перехода в обоих атласах совпадают. Следовательно, $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1$. Отметим так же, что используя те же соображения, можно показать, что $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$, где $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$.

Задание многообразий уравнениями

Теорема 12.1. (Теорема о задании многообразия уравнениями)

Пусть задана система уравнений $f_k(x^1, \dots, x^n) = 0$, где $1 \leq k \leq n$, функции f_k являются гладкими и

$$\operatorname{rk} \frac{\partial f_k}{\partial x^i} \Big|_M = k,$$

где

$$M = \{x \mid f_k(x^1, \dots, x^n) = 0\}. \quad (12.1)$$

Если $M \neq \emptyset$, то M может быть преобразовано в $(n - k)$ -мерное гладкое многообразие. Более того, в качестве координат точек этого многообразия можно взять координаты $(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-k}})$ объемлющего пространства.

Рассмотрим сферу

$$S^{n-1}(R) : (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = R^2$$

Проверим, что она является гладким многообразием. Для этого рассмотрим дифференциал функции

$$f = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - R^2.$$

в точках сферы:

$$df \Big|_{S^{n-1}} = (2x^1, \dots, 2x^n).$$

Дифференциал обращается в нуль в точке $x^1 = \dots = x^n = 0$, которая не лежит на сфере. Следовательно, такая сфера – $(n-1)$ -мерное гладкое многообразие.

Рассмотрим теперь специальную линейную группу вещественных матриц

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \mid \det A = 1\} \subset \mathbb{R}^{n^2}.$$

Покажем, что группа таких матриц является гладким многообразием в $\mathbb{R}^{n^2}$. Для этого покажем, что уравнение $\det A = 1$ является невырожденным. В пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ в качестве координат выступают элементы матрицы. Докажем, что для любой матрицы $A \in SL_n$ существуют такие i, j , что

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} \Big|_A \neq 0.$$

Для этого воспользуемся формулой разложения

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A^{ik},$$

где A^{ik} – алгебраическое дополнение со знаком, которое является определителем матрицы размера $(n-1) \times (n-1)$. Откуда имеем

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = A^{ij}.$$

Но все A^{ij} не могут одновременно обращаться в нуль, потому что иначе нарушалось бы условие $\det A = 1$. Таким образом, дифференциал является невырожденным, система уравнений – регулярной, а группа матриц $SL_n(\mathbb{R})$ – гладким (n^2-1) -мерным многообразием в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Определим функцию $f : SL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$f(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$$

и проверим её гладкость. Возьмём точку $A \in SL_n(\mathbb{R})$, для неё по теореме существует n^2-1 координат, проекция на которые – это карта. Пусть это все координаты, кроме a_{nn} . Тогда координатное представление

$$f(A) = (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{n-1n}) + a_{nn}, \quad a_{nn} = a_{nn}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n-1n}).$$

Сумма координат является гладкой функцией, и a_{nn} по теореме о неявной функции – также гладкая функция своих аргументов. Следовательно, координатные представления функции f являются гладкими, и сама f – тоже гладкая.

Можно сформулировать следующее следствие из теоремы:

Следствие 12.1. Если задана произвольная гладкая функция $F(x^1, \dots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$, то ограничение этой функции на M – гладкая функция.

Ещё один пример – группа ортогональных матриц

$$O_n(\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \mid A \cdot A^T = E \right\} \subset \mathbb{R}^{n^2}.$$

Условие $A \cdot A^T = E$ задаёт нам n^2 уравнений. Однако эти уравнения являются симметричными, и, значит, что независимых уравнений $n(n+1)/2$. Если мы покажем, что система этих уравнений является регулярной, то O_n будет гладким $n(n-1)/2$ -мерным многообразием в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Пусть $i \leq j$. Каждое уравнение – это произведение i -ой строки на j -ый столбец транспонированной матрицы. Каждый столбец транспонированной матрицы – это строка из исходной матрицы. Рассмотрим два случая. Пусть $i = j$, тогда

$$f_i = \sum_{k=1}^n (a_{ik})^2 = 1.$$

Сосчитаем частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_{ik}} = 2a_{ik}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Если же $i \neq j$, то тогда

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = 0.$$

Считаем частные производные

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial a_{ik}} = a_{jk}, \quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial a_{jk}} = a_{ik}.$$

Теперь мы можем построить матрицу Якоби:

	a_{11}	...	a_{1n}	a_{21}	...	a_{2n}	a_{31}	...	a_{3n}	...	a_{n1}	...	a_{nn}
f_1	$2a_{11}$	...	$2a_{1n}$	0	...	0	0	...	0	...	0	...	0
h_{12}	a_{21}	...	a_{1n}	a_{11}	...	a_{1n}	0	...	0	...	0	...	0
h_{13}	a_{31}	...	a_{3n}	0	...	0	a_{11}	...	a_{1n}	...	0	...	0
$\vdots$		...			...			...		...		...	
h_{1n}	a_{n1}	...	a_{nn}	0	...	0	0	...	0	...	a_{11}	...	a_{1n}
f_2	0	...	0	$2a_{21}$	...	$2a_{2n}$	0	...	0	...	0	...	0
h_{23}	0	...	0	a_{31}	...	a_{3n}	a_{21}	...	a_{2n}	...	0	...	0
h_{24}	0	...	0	0	...	0	0	...	0	...	0	...	0
$\vdots$		...			...			...		...		...	
h_{2n}	0	...	0	a_{n1}	...	a_{nn}	0	...	0	...	a_{21}	...	a_{2n}
$\vdots$		...			...			...		...		...	
f_n	0	...	0	0	...	0	0	...	0	...	$2a_{n1}$	...	$2a_{nn}$

Покажем, что она невырождена. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию строк этой матрицы и приравняем её нулю. Выделим первые n координат этой матрицы:

$$2\lambda_1(1\text{-ая строка } A) + \lambda_2(2\text{-ая строка } A) + \dots + \lambda_n(n\text{-ая строка } A) = 0.$$

Но строки ортогональной матрицы линейно независимы, значит, первые n коэффициентов $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Повторяя эту процедуру поблочно, мы получим, что все коэффициенты $\lambda_i = 0$. Следовательно, строки матрицы Якоби линейно независимы и она невырождена. Таким образом, группа $O_n(\mathbb{R})$ является гладким $n(n-1)/2$ -мерным многообразием.

Является ли O_n связным? Ответ: нет. Среди множества ортогональных матриц можно выделить те, у которых $\det A = 1$, и оставшиеся с $\det B = -1$. Если наше многообразие связно, то должна существовать непрерывная кривая $\gamma(t)$, соединяющая две такие матрицы. Рассмотрим функцию $\det \gamma(t)$, такую, что

$$\det \gamma(0) = \det A = 1, \quad \det \gamma(1) = \det B = -1.$$

Тогда в силу непрерывности γ существует точка, в которой $\det \gamma = 0$. Значит, непрерывную кривую построить нельзя, и O_n не является связным.

Тем не менее оно является компактом, так как является замкнутым и ограниченным. Оно замкнуто, так как можно посмотреть на уравнения как на отображение

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2},$$

ставящее в соответствие каждой матрице A уравнения:

$$F(A) = A \cdot A^T.$$

Тогда $O_n = F^{-1}(E)$, а E – замкнутое множество в $\mathbb{R}^{n^2}$, поэтому её прообраз при непрерывном отображении тоже замкнут. Ограниченность можно увидеть, если рассмотреть норму матрицы

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right) = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Следовательно, $O_n \subset S^{n^2-1}(\sqrt{n})$.

Задача 12.1. При $n = 2$ $O_2(\mathbb{R})$ – это одномерное компактное многообразие. Доказать, что это две окружности, лежащие в $\mathbb{R}^4$, и понять, как они расположены друг относительно друга (зацеплены они друг за друга или нет).

Семинар 13

Касательные векторы к многообразиям

Определение 13.1. Пусть P – точка гладкого n -мерного многообразия M^n . **Касательным вектором V в точке P** называют сопоставление каждой системе координат набора чисел:

$$V : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n. \quad (13.1)$$

Если в окрестности одной и той же точки заданы разные системы координат, то

$$V : (y^1, \dots, y^n) \mapsto (w^1, \dots, w^n) \in \mathbb{R}^n, \quad (13.2)$$

и наборы чисел для разных систем связаны соотношением

$$w^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \Big|_P v^k, \quad v^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \Big|_P w^k. \quad (13.3)$$

Или

$$w = J \cdot v, \quad v = J^{-1} \cdot w. \quad (13.4)$$

Определение 13.2. Пусть P – точка гладкого n -мерного многообразия M^n . **Касательным вектором в точке P** называют класс эквивалентности гладких кривых $[\gamma]$, проходящих через P . Будем говорить, что $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если, во-первых,

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = P, \quad (13.5)$$

а во-вторых, в некоторой системе координат

$$\dot{\gamma}_1(t_1) = \dot{\gamma}_2(t_2). \quad (13.6)$$

Определение 13.3. Пусть P – точка гладкого n -мерного многообразия M^n . **Касательным вектором в точке P , или дифференцированием в точке P** называется отображение

$$D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (13.7)$$

обладающее свойствами

$$D(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 D(f_1) + \alpha_2 D(f_2), \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, f_i \in C^\infty(M), \quad (13.8)$$

$$D(f_1 \cdot f_2) = D(f_1) \cdot f_2(P) + f_1(P) \cdot D(f_2), \quad \forall f_i \in C^\infty(M). \quad (13.9)$$

Такие отображения образуют линейное пространство, которое называется **касательным пространством**.

Можно показать, а иногда это полагается по определению, что в фиксированной системе координат

$$D(f)(P) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(P). \quad (13.10)$$

Эти три определения являются эквивалентными. Отметим, что множество всех касательных векторов $T_P M$ образуют линейное пространство, изоморфное $\mathbb{R}^n$.

Определение 13.4. Пусть задана фиксированная система координат $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки $P \in M^n$. Тогда в пространстве $T_P M$ задан **канонический базис** $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$, где

$$\partial_{x^i} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0). \quad (13.11)$$

Пусть задана ещё одна система координат

$$\partial_{y^i} : (y^1, \dots, y^n) \mapsto (w^1, \dots, w^n).$$

Тогда

$$w^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^k} (\partial_{x^i})^k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \delta_i^k = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}. \quad (13.12)$$

Найдём кривую γ , такую, что $\partial_{x^i} = [\gamma]$. Надо взять i -ую координатную линию системы координат $(x^1, \dots, x^n)$. Пусть $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. i -ая координатная линия – это кривая, которая проходит через точку P , и у неё меняется только i -ая компонента. То есть

$$\gamma_i : \quad x^j(t) = x_0^j, \quad j \neq i; \quad x^i(t) = t, \quad t \in (x_0^i - \varepsilon, x_0^i + \varepsilon).$$

Рассмотрим вектор скорости $\dot{\gamma}_i$:

$$\dot{\gamma}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0).$$

Это ровно то, что сопоставляет координатам $(x^1, \dots, x^n)$ вектор ∂_{x^i} . Поэтому $\partial_{x^i} = [\gamma_i]$. С точки зрения дифференцирований,

$$\partial_{x^i}(h) = \frac{\partial h}{\partial x^i}.$$

Пусть задано многообразие $M = \mathbb{R}^2(x, y)$. На этом многообразии задана точка $P = (3, 2)$ и отображение $V : (x, y) \mapsto (5, 6)$. Задача: найти кривую γ , такую, что $V = [\gamma]$, рассмотреть $V(h)$, где $h = 2x^2 + y^2$, и найти, куда отображает V полярные координаты (r, φ) .

В качестве кривой γ можно выбрать

$$\gamma(t) = (3 + 5t, 2 + 6t).$$

Тогда можно вычислить $V(h)$ как

$$h|_{\gamma} = 2(3+5t)^2 + (2+6t)^2, \quad V(h) = \frac{dh}{dt} \Big|_{t=0} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (3+5t) + 2 \cdot 6 \cdot (2+6t) \Big|_{t=0} = 60 + 24 = 84.$$

Или можно разложить вектор V по каноническому базису и подействовать им на h :

$$V = 5\partial_x + 6\partial_y, \quad V(h) = (5\partial_x + 6\partial_y)(2x^2 + y^2) \Big|_{(3,2)} = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = 60 + 24 = 84.$$

Теперь рассмотрим третью часть задачи. Пусть $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, тогда

$$v^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \Big|_P w^k.$$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}.$$

В точке P имеем

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, \quad \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -3 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -3 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2\sqrt{13} & 3\sqrt{13} \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28\sqrt{13} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Дифференциал гладкого отображения

Определение 13.5. Пусть между двумя гладкими многообразиями M^m и N^n задано гладкое отображение

$$F : M^m \rightarrow N^n \quad (13.13)$$

и произвольная точка $P \in M$, то тогда определено отображение

$$dF \Big|_P : T_P M^m \rightarrow T_{F(P)} N^n. \quad (13.14)$$

Пусть также касательный вектор определён как $V = [\gamma]$. При этом $\gamma(t_0) = P$, $F \circ \gamma(t_0) = F(P)$. Тогда **значение дифференциала на касательном векторе, соответствующем $[\gamma]$** , равно

$$dF_P([\gamma]) = [F \circ \gamma]. \quad (13.15)$$

Если в M фиксированы координаты $(x^1, \dots, x^m)$, а в N – координаты $(y^1, \dots, y^n)$, то в соответствующих касательных пространствах фиксированы канонические базисы $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}\}$ и $\{\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n}\}$. Тогда матрица дифференциала $(dF_P)_{ik}$ – это прямоугольная матрица частных производных $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right)_P$. И если в координатах $(x^1, \dots, x^m)$ вектор $v = (v^1, \dots, v^m)$, то его образ в координатах $(y^1, \dots, y^n)$ имеет вид

$$dF \Big|_P(v) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right)_P \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

Пусть задана функция $h : N \rightarrow \mathbb{R}$, тогда чему будет равен $dF|_P(v)(h)$? Так как под действием F точки из M переходят в N , а затем под действием h – в $\mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} dF|_P(v)(h) &= v(h \circ F) = \sum_k v^k \frac{\partial}{\partial x^k} (h(F(x))) = \sum_k v^k \sum_j \frac{\partial h}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \\ &= \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} v^k \right) \frac{\partial h}{\partial y^j} = \sum_j w^j \frac{\partial h}{\partial y^j} = w(h). \end{aligned}$$

Пусть в окрестности точки $P \in M^m$ задана система координат $(x^1, \dots, x^m)$. В этой точке можно построить касательное пространство $T_P M$, в котором определяется канонический базис $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}\}$. Кроме того, можно построить двойственное пространство $(T_P M)^*$ – пространство линейных функций на $T_P M$, в котором есть двойственный базис $\{f^1, \dots, f^m\}$, функции которого действуют как $f^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$. Функции двойственного базиса можно представлять как $f^i = dx^i|_P$. Действительно, функции x^i отображают окрестность некоторой точки $U(p)$ на вещественную прямую $\mathbb{R}$, а дифференциалы dx^i – элементы касательного пространства $T_P M$ на вещественную прямую $\mathbb{R} = T_{x^i(P)} \mathbb{R}$. То есть dx^i представляют собой линейные отображения в числа, то есть линейные функционалы – элементы двойственного пространства. Рассмотрим действие dx^i на вектор канонического базиса ∂_{x^j} через матрицу Якоби:

$$dx^i(\partial_{x^j}) = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \delta_j^i.$$

Другой вариант проверки соотношения $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$ заключается в том, чтобы рассмотреть кривую γ_j , соответствующую вектору канонического базиса ∂_{x^j} . Посмотрим на ограничение функции

$$x^i|_{\gamma_j} = \begin{cases} x_0^i, & i \neq j \\ t, & i = j \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} x^i|_{\gamma_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_j^i.$$

Рассмотрим многообразие $O_3(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^9$ – множество всех вещественных ортогональных матриц размерности 3. Пусть задано отображение

$$F : O_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F : (a_{ij}) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

Задача: проверить гладкость отображения F , убедиться, что матрица

$$\mathbb{R}^9 \supset V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_E O_3(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^3 \supset E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и найти $dF|_E(V)$.

Гладкость отображения следует из теоремы о неявной функции. Поскольку система уравнений, задающая O_3 является гладкой и регулярной, и её матрица Якоби невырождена, то O_3 – гладкое трёхмерное многообразие. В окрестности каждой точки этого многообразия в качестве системы координат можно выбрать три элемента матрицы, а остальные гладким образом выразить через них. Тогда в образе отображения F стоят либо те самые три элемента, либо элементы, которые выражаются как гладкие функции локальных координат. Следовательно, F – гладкое.

Чтобы проверить второй пункт, можно подобрать кривую $\gamma(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} \gamma(t) \subset O_3(\mathbb{R}), \\ \gamma(0) = E, \\ \dot{\gamma}(0) = V. \end{cases}$$

В качестве такой кривой можно рассмотреть

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что это ортогональная матрица, и подставляя в неё и в её производную $t = 0$, убеждаемся, что она удовлетворяет всем соотношениям. Условие $\dot{\gamma}(0) = V$ означает, что V – касательный вектор к кривой $\gamma(t)$, то есть $V \in T_E O_3$. Наконец, вычислим образ дифференциала

$$dF|_E(V) = \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На самом деле, мы почти показали, что касательное пространство к O_3 в точке E состоит из кососимметрических матриц. Действительно, рассмотрим матрицы поворота вокруг осей и их производные при $t = 0$:

$$\gamma_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad V_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_y(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad V_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $V_x, V_y, V_z \in T_E O_3(\mathbb{R})$, значит, $T_E O_3(\mathbb{R}) \supset \{X \mid X^T = -X\}$. Касательное пространство к O_3 является трёхмерным, а так как V_x, V_y, V_z – линейно независимые, то пространство кососимметрических матриц также трёхмерно, и тогда имеет место не включение, а равенство $T_E O_3(\mathbb{R}) = \{X \mid X^T = -X\}$.

Мы выяснили, как устроено касательное пространство $T_E O_3$. Поймём, как строить касательные пространства этой группы матриц в других точках. Для этого введём следующую операцию.

Определение 13.6. Отображение $L_A : O_3 \rightarrow O_3$, такое, что

$$L_A(X) = A \cdot X, \quad \forall X \in O_3, A \in O_3, \quad (13.16)$$

называется **левым сдвигом на матрицу A** .

Так как матрица A невырождена, то существует обратное отображение $L_{A^{-1}}(X) = A^{-1} \cdot X$. Поскольку элементы матрицы $A \cdot X$ являются линейными функциями матричных элементов множителей, то как прямое, так и обратное отображение являются гладкими. Следовательно, левый сдвиг – это диффеоморфизм O_3 в себя. При этом $L_A(E) = A$. Кроме того, $dL_A(T_E O_3) = T_A O_3$. Чтобы применить дифференциал к вектору из касательного пространства надо выбрать базис, например, состоящий из V_x, V_y, V_z . Затем сопоставить этим векторам кривые $\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)$ и рассмотреть производные

$$\left. \frac{d}{dt} L_A(\gamma_x(t)) \right|_{t=0}, \quad \left. \frac{d}{dt} L_A(\gamma_y(t)) \right|_{t=0}, \quad \left. \frac{d}{dt} L_A(\gamma_z(t)) \right|_{t=0}.$$

Поскольку L_A – диффеоморфизм, то dL_A – изоморфизм линейных пространств.

Рассмотрим в качестве примера единичную окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, состоящую из комплексных чисел $e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, 2\pi]$. Мы знаем, как устроено её касатель-

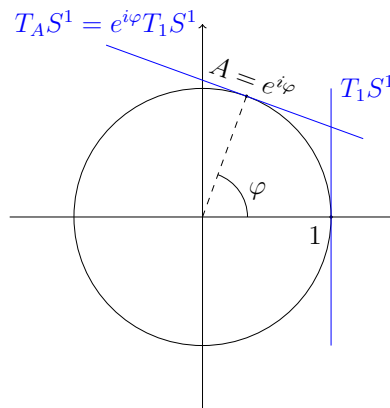


Рис. 13.1. Касательные пространства S^1 .

ное пространство T_1S^1 . Получим касательное пространство T_AS^1 , где $A = e^{i\varphi}$. Для этого воспользуемся операцией левого сдвига $L_{e^{i\varphi}}$, которая является поворотом в плоскости на угол φ . Тогда $T_AS^1 = e^{i\varphi}T_1S^1$.

Вычисление дифференциалов необходимо для выяснения их вырожденности или невырожденности. Невырожденность означает, что при отображении $F : M \rightarrow N$ ранг матрицы Якоби такого отображения является максимальным. Если размерность M меньше размерности N , то такое невырожденное отображение называется **погружением**, или **иммерсией**. Если наоборот, то **субмерсией**. Знание того, является ли дифференциал отображения вырожденным или нет, позволяет извлекать различные свойства многообразий.

Рассмотрим пример применения такого подхода. У группы унитарных матриц $U_n(\mathbb{R})$ есть подмножество специальных унитарных матриц $SU_n(\mathbb{R})$, выделенных тем, что для матрицы $A \in SU_n$ её определитель $\det A = 1$. Можно показать, что $SU_n(\mathbb{R})$ само по себе является многообразием. Для этого рассмотрим функцию определителя $\det : U_n \rightarrow \mathbb{R}$. Надо проверить, является ли дифференциал такой функции невырожденным, и, если это так, то по теореме о неявной функции $SU_n = \det^{-1}(1)$ будет многообразием размерности на 1 меньше, чем U_n .

Семинар 14

Ориентируемые, ориентированные и неориентируемые многообразия

Для начала вспомним, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ могут быть выбраны несколько базисов, например, $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$ и так далее. Два базисных набора связаны между собой матрицей перехода, определитель которой отличен от нуля. Говорят, что два базисных набора эквивалентны, если определитель матрицы перехода от одного к другому больше нуля. Следовательно, все базисные наборы делятся на два класса. Для того, чтобы выбрать ориентацию пространства, нужно выбрать один из классов и объявить его положительно ориентированным. То есть ориентацию пространства можно выбрать двумя способами.

На многообразии такую процедуру провести сложнее, поскольку в каждой точке многообразия есть своё линейное пространство, и ориентацию нужно выбирать во всех точках согласованно. Ориентация должна непрерывно зависеть от выбранной точки. Приведём три эквивалентных определения ориентируемости многообразия.

Определение 14.1. Пусть (U, φ) – произвольная карта гладкого атласа $\mathcal{A}$. Пусть также $P, Q \in U$. В касательных пространствах в этих точках заданы канонические базисы $\{\partial_{x^i}(P)\}$ и $\{\partial_{x^i}(Q)\}$. Говорят, что **ориентация касательных пространств непрерывно зависит от точки**, если для любой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ и любых двух точек $P, Q \in U$ ориентации $T_P M$ и $T_Q M$ одновременно согласованы (или несогласованы) с ориентациями, которые задают $\{\partial_{x^i}(P)\}$ и $\{\partial_{x^i}(Q)\}$.

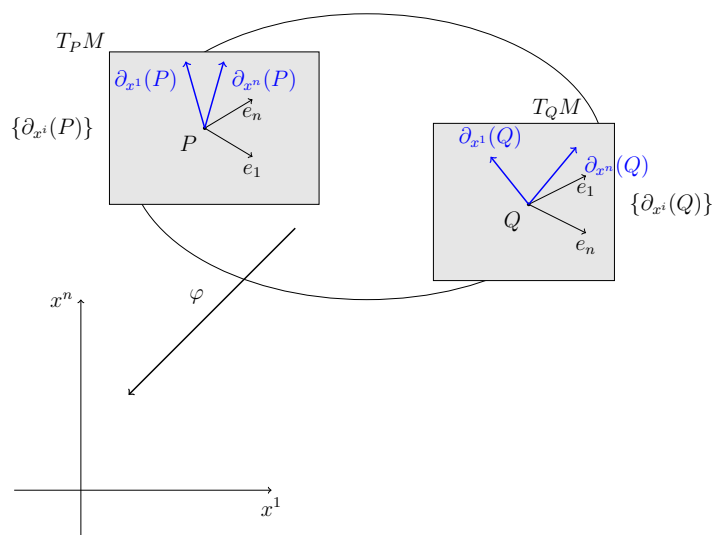


Рис. 14.1. Непрерывность ориентации многообразия.

Определение 14.2. Многообразия, на которых можно добиться такого согласования, называются **ориентируемыми**. Если согласования добиться нельзя, то – **неориентируемыми**.

Пусть задана регулярная гладкая кривая $\gamma(t)$. В каждой её точке касательное пространство одномерно, и задан ненулевой вектор скорости $\dot{\gamma}(t)$. Если рассматривать такую кривую как многообразие, то в каждой её карте (для регулярной кривой это может быть только одна карта) единственный базисный вектор касательного пространства совпадает с вектором скорости. Поэтому такая кривая будет ориентируемой.

Определение 14.3. Атлас $\mathcal{A}$ называется **ориентированным**, если знаки якобианов всех определённых функций перехода положительны.

Определение 14.4. Многообразие называется **ориентируемым**, если на нём существует ориентированный атлас, и **ориентированным**, если этот атлас выбран.

Определение 14.5. Если знак якобиана перехода между двумя картами U_α, U_β оказался отрицательным, то мы можем сделать замену координат, изменив, например, знак у одной из координат в карте U_α . Тогда якобиан функции перехода сменит знак. Такая операция называется **заменой ориентации в картах**.

Утверждение 14.1. Если многообразие ориентируемо, то любой атлас можно превратить в ориентированный с помощью замены ориентации в картах.

Определение 14.6. Пусть задано линейно связное многообразие M , и точки $P, Q \in M$ соединены гладкой кривой $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$. В касательном пространстве $T_P M$ фиксирован базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, задающий ориентацию этого касательного пространства. Выделим непрерывное семейство векторов $\{e_i(t)\} \subset T_{\gamma(t)} M$. От этих векторов мы потребуем, чтобы они непрерывно зависели от t и в $T_{\gamma(t)} M$ образовывали базис. Тогда в конечной точке Q также существует базис $\{e_1(1), \dots, e_n(1)\}$. Будем говорить, что базис $\{e_1(1), \dots, e_n(1)\}$ задаёт в Q ориентацию, полученную переносом вдоль γ из P ориентации базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$.

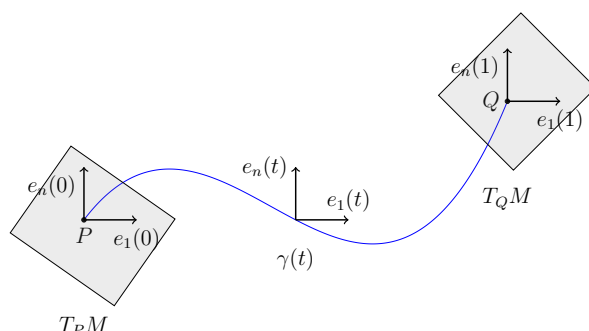


Рис. 14.2. Перенос ориентации вдоль кривой.

Замечание 14.1. Непрерывная зависимость векторов $\{e_i(t)\} \subset T_{\gamma(t)} M$ от параметра $t \in [0, 1]$ означает следующее. Кривая γ покрывается конечным числом карт. Если карта фиксирована, то фиксирован и координатный гомеоморфизм в область

с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Тогда в каждой точке имеется канонический базис $\{\partial_{x^i}(t)\}$, и тогда

$$e_i(t) = \sum_{k=1}^n v_{ik}(t) \partial_{x^k}(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Непрерывная зависимость $e_i(t)$ означает непрерывную зависимость $v_{ik}(t)$ от параметра t .

Утверждение 14.2. Пусть заданы базисы $\Sigma(t) = \{e_i(t)\}$ и $\tilde{\Sigma}(t) = \{\tilde{e}_i(t)\}$, непрерывно зависящие от t и такие, что $\Sigma(0) = \tilde{\Sigma}(0)$. Тогда $\Sigma(1)$ и $\tilde{\Sigma}(1)$ задают одну и ту же ориентацию. Другими словами, матрица перехода от одного базиса к другому – положительна.

Доказательство. Действительно, рассмотрим функцию $f(t)$, которая является определителем матрицы перехода от базиса $\tilde{\Sigma}(t)$ к базису $\Sigma(t)$. Эта функция $f(t)$ является гладкой на $t \in [0, 1]$. Кроме того, мы знаем, что $f(0) = 1$ и $f(t) \neq 0$. Откуда следует, что $f(t) > 0$. $\square$

Определение 14.7. Многообразие M называется **ориентируемым**, если для любых точек $P, Q \in M$ перенос ориентации из P в Q не зависит от выбора кривой, вдоль которой осуществляется перенос.

Рассмотрим лист Мёбиуса, который получается из обычного прямоугольника склейкой его противоположных сторон с переворотом. В результате получается односторонняя поверхность. Краем такого многообразия является окружность. Рас-

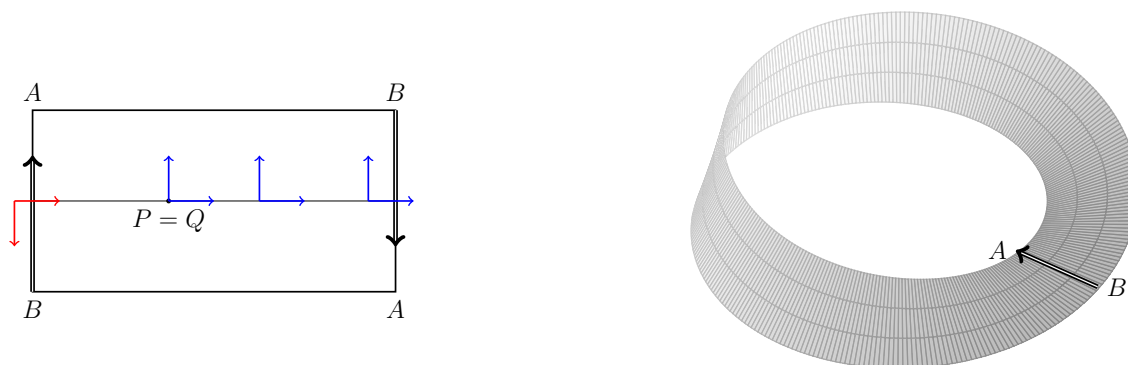


Рис. 14.3. Лист Мёбиуса.

смотрим точки $P = Q$, лежащие на средней линии прямоугольника (на отрезке, соединяющем середины склеиваемых сторон), и непрерывное движение базиса $\{e_1, e_2\}$ вдоль этой линии из точки P в точку Q . После прохождения линии склейки базис перевернется, то есть сменит ориентацию. С другой стороны, если рассмотреть

замкнутую кривую, не выходящую за линию склейки, то ориентация базиса при переносе не изменится. Так как ориентация зависит от кривой, то по третьему определению лист Мёбиуса является неориентируемым многообразием.

Лист Мёбиуса позволяет построить целую серию неориентируемых многообразий. Рассмотрим двумерные поверхности N_μ^2 из второй серии теоремы о классификации, которые получаются из сферы S^2 выбрасыванием из неё μ открытых дисков и заменой их листами Мёбиуса. Любая такая поверхность будет неориентируемым многообразием.

Утверждение 14.3. Если атлас многообразия состоит из одной карты, то многообразие ориентируемо.

Утверждение 14.4. Если атлас многообразия состоит из двух карт, и их пересечение связно, то многообразие ориентируемо.

Вспомним построение атласа окружности, состоящего из четырёх карт. Рассмотрим функцию перехода между U_x^+ и U_y^- :

$$y(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0.$$

Таким образом пара этих карт согласована. Теперь рассмотрим пару U_x^+ и U_y^+ . Функция перехода

$$y(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 0.$$

Следовательно, эта пара карт не является согласованной, и такой атлас не является ориентированным. Но его можно ориентировать, если сделать замену знаков в двух картах:

$$\mathcal{A} = \{U_x^-, -U_x^+, U_y^+, -U_y^-\}.$$

Утверждение 14.5. Если есть система уравнений

$$\mathbb{R}^n \supset M^{n-k} : \{F_i(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad 1 \leq i \leq k \leq n,$$

функции F_i — гладкие, и ранг матрицы Якоби $\text{rk} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j} \right) = k$, то тогда M^{n-k} — $(n-k)$ -мерное гладкое *ориентируемое* многообразие.

Доказательство. В каждой точке многообразия существует касательная плоскость, в которой нужно непрерывным образом выбрать ориентацию базиса $\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$. Будем это делать следующим образом. Построим данный базис до базиса объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$ векторами $\{\text{grad } F_1, \dots, \text{grad } F_k\}$. Эти вектора ортогональны векторам базиса касательного пространства. Действительно, если

$$(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \gamma(t) \subset M,$$

то тогда

$$F_i(x^1(t), \dots, x^n(t)) = 0 \quad \forall t.$$

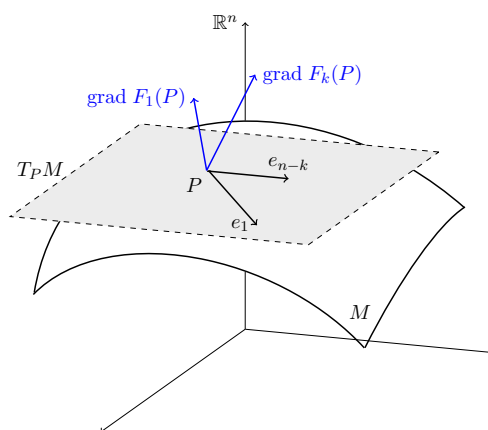


Рис. 14.4. Ориентированность многообразия в теореме о неявной функции.

Дифференцируя по t , получим выражение

$$\sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \dot{x}^j(t) = 0,$$

в левой части которого стоит скалярное произведение $\text{grad } F_i$ с касательным вектором. Кроме того, зависимость градиентов от точки является не просто непрерывной, а гладкой. Тогда выберем базис касательной плоскости таким образом, чтобы полный базис $\{e_1, \dots, e_{n-k}, \text{grad } F_1, \dots, \text{grad } F_k\}$ был бы положительно ориентирован в $\mathbb{R}^n$.

В результате получится ориентация, непрерывно зависящая от точки. Если мы рассмотрим в каждой карте базис $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^{n-k}}, \text{grad } F_1, \dots, \text{grad } F_k\}$, то можно утверждать, что базисы $\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$ и $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^{n-k}}\}$ согласованы тогда и только тогда, когда согласованы полные базисы, написанные ранее. Чтобы это увидеть достаточно взглянуть на матрицу перехода между полными базисами. Поскольку согласованность полных базисов непрерывно зависит от точки, то согласованность касательных базисов также имеет место во всех точках одновременно в одной карте. $\square$

Следствие 14.1. Все матричные группы, которые были рассмотрены в качестве примеров, являются ориентированными многообразиями.

Следствие 14.2. Если взять заведомо неориентируемое многообразие, например, сферу $\mathbb{R}P^2$, то можно утверждать, что не существует регулярной системы уравнений, множество решений которой M оказалось бы гомеоморфно $\mathbb{R}P^2$.

Следствие 14.3. Если задано многообразие M с краем ∂M , то ориентация многообразия задаёт ориентацию на краю.

Отметим также тот факт, что любое двумерное комплексно-аналитическое многообразие M^2 является ориентируемым. Это следует из теоремы Коши-Римана.

Ещё одна полезная серия примеров – проективные пространства $\mathbb{R}P^n$. Ранее мы

получали, что $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$, поэтому $\mathbb{R}P^1$ – ориентируемо. Также мы сказали, что $\mathbb{R}P^2$ – неориентируемо. Посмотрим, что происходит с $\mathbb{R}P^3$. Вспомним, что $\mathbb{R}P^n$ – это множество прямых, проходящих через начало координат. С одной стороны, мы строили на нём атлас, а с другой, можно себе представить это топологически следующим образом. Рассмотрим сферу S^n с центром в начале координат, тогда каждая прямая пересекает эту сферу по паре точек. С этой точки зрения, $\mathbb{R}P^n = S^n / \{\pm x\}$. Отрежем от этой сферы половину, тогда противоположные точки остались только у точек на экваторе. Это можно представить себе как диск D^n , у которого диаметрально противоположные точки на границе отождествлены. Поймём, является ли

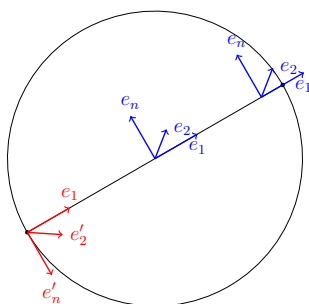


Рис. 14.5. Изменение ориентации базиса при переходе через границу диска.

он ориентированным или нет. Посмотрим, что происходит при переносе ориентации вдоль путей. Для путей, лежащих внутри и не достигающих до границы диска, ориентация не изменится. При параллельном переносе вдоль пути, который вышел на границу диска наблюдается смена ориентации базиса. Это можно рассматривать как преобразование объемлющего пространства, матрица которого равна $-E$. Поэтому ориентация объемлющего пространства сохраняется тогда, когда его размерность чётна. Из этих соображений можно сделать вывод о том, что $\mathbb{R}P^3$ – ориентируемо, так как его объемлющее пространство – это $\mathbb{R}^4$.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У