



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. СЕМИНАРЫ

КОНЯЕВА. Ю. ВЕДЮШКИНА В. В.
ОШЕМКОВА. А. А.

МЕХМАТ МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
VK.COM/TEACHINMSU.



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Семинар 1	4
Условие регулярности	4
Пример задачи на параметризацию	4
Пример более сложной параметризации кривой	6
Вектор скорости	7
Параметризация спирали	8
Параметризация логарифмической спирали	9
Семинар 2	11
Краткое повторение материала	11
Кривизна параметризации	11
Кривизна эллипса	12
Кривизна прямой	13
Репер Френе	14
Геометрический смысл кривизны	15
Задача о четырех вершинах	16
Кривые в трехмерном пространстве	17
Семинар 3	19
Примеры в трехмерном пространстве	19
Задача на доказательство формы кривой	20
Поверхности	22
Параметризация поверхности	23
Задание поверхности в 4-мерном пространстве	24
Первая квадратичная форма	25
Семинар 4	28
Первая квадратичная форма в случае неявной параметризации	28
Проверка регулярности поверхности	28
Вторая квадратичная форма	29
Вычисление второй квадратичной формы	30
Семинар 5	36
Маятник Гюйгенса	36
Соприкасающаяся окружность. Эволюта	38
Вычисление эволюты циклоиды	39
Астроида	40
Эвольвента	41
Семинар 6	43
Риманова метрика	43
Изометрия	50
Семинар 7	53
Неевклидовы геометрии	53

Геометрия без параллельных прямых	53
Геометрия с двумя параллельными прямыми	54
Модель Пуанкаре	56
Семинар 8	59
Модель Пуанкаре (повторение)	59
Модель верхней полуплоскости	60
Движение геометрии Лобачевского	61
Расстояние между точками	63
Аналог теоремы Пифагора	65
Аналог теоремы синусов	66
Площадь треугольника	67
Семинар 9	68
Определение гладкого многообразия	68
Примеры	69
Гладкие отображения на гладких многообразиях	71
Примеры гладких отображений	72
Ориентируемость	74
Семинар 10	78
Примеры гладких ориентируемых многообразий	78
Матричные многообразия	80
Ориентированность матричных групп	84
Понятия погружения и вложения	84
Задачи	86

Семинар 1

Условие регулярности

Важным элементом дифференциальной геометрии является параметризация кривых. На плоскости \mathbb{R}^2 кривая представляет собой две функции от параметра t :

$$x(t), \quad y(t).$$

Требования *непрерывности* таких кривых будет недостаточно. Потребуем, чтобы выполнялось *условие регулярности*, то есть x, y должны быть дифференцируемы и¹

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$$

Начнем с тривиальной вещи. График функции задается на плоскости множеством точек $x, f(x)$. Введя тривиальную параметризацию

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases}$$

получим, что $\dot{x} = 1, \dot{y} = f'$, и условие

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 + (f')^2 \neq 0$$

всегда выполняется. Таким образом, график любой функции является гладкой кривой.

Рассмотрим простейший пример, когда кривая задается неявным образом – окружность радиуса² 1, задаваемая, как мы помним, уравнением

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Параметризация кривой имеет вид

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Легко убедиться, что

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1 \neq 0.$$

Пример задачи на параметризацию

Типичная задача на параметризацию выглядит так: имеется некоторое правило, по которому движется точка. Требуется ввести параметризацию, которая бы описывала это движение.

¹Под \dot{x} подразумевается дифференцирование по параметру t .

²Здесь и далее, где это возможно, будем обходиться минимальным количеством параметров, чтобы не усложнять запись.

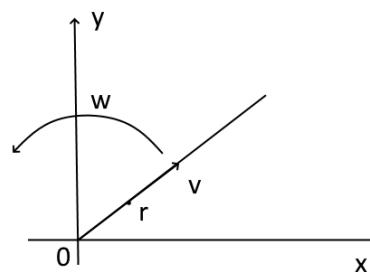


Рис. 1.1. Движение точки с поворотом

Пусть луч вращается со скоростью ω , а по нему движется точка со скоростью v (рис. 1.1).

Часто используется следующий прием. Бывает удобно параметризовать не заданных (в данном случае евклидовых) координатах, а в каких-то других.

Очевидно, в нашей задаче траектории будут разными, если точка стартует из разного положения, ее текущее положение на луче

$$r = vt + r_0, \quad r_0 \geq 0.$$

Помимо этого, сам луч движется по окружности, которую можно параметризовать с помощью $\cos \omega t + \omega_0$, $\sin \omega t + \omega_0$. Будем считать, что начальный угол поворота ω_0 равен 0, то есть луч расположен горизонтально. Итак, получаем параметризацию кривой

$$\begin{cases} (vt + r_0) \cos \omega t = x(t), \\ (vt + r_0) \sin \omega t = y(t). \end{cases}$$

Итак, траектория движения точки – *спираль Архимеда* (рис. 1.2, красным показано равное расстояние между витками).

Обсудим следующий момент. С точки зрения описания траекторий задача была сделана правильно – учтены скорости поворота и движения по лучу, начальное положение точки. Задача параметризации кривой чуть проще, так как можно опустить или положить равными 1 часть условий. Введем новый параметр $\tau = \omega t$. Тогда уравнения для координат имеют вид

$$\begin{cases} (\tau v / \omega + r_0) \cos \tau = x(\tau), \\ (\tau v / \omega + r_0) \sin \tau = y(\tau). \end{cases}$$

Проверим теперь, как изменение параметров кривой отражается на ее регулярности. Обозначим $v/\omega = a$. Получим

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cos \tau - (a\tau + r_0) \sin \tau, \\ \dot{y} = a \sin \tau + (a\tau + r_0) \cos \tau. \end{cases}$$

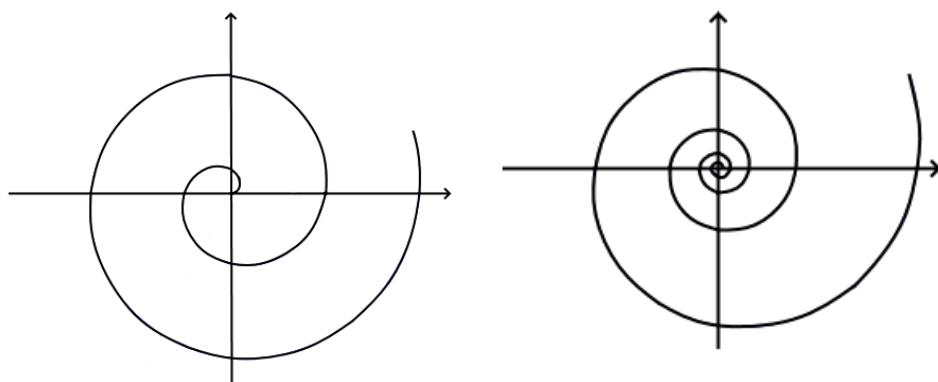


Рис. 1.2. Спираль Архимеда

Рис. 1.3. Логарифмическая спираль

Тогда квадрат скорости

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= a^2 \cos^2 \tau + (a\tau + r_0)^2 \sin^2 \tau + \\ &+ a^2 \sin^2 \tau + (a\tau + r_0)^2 \cos^2 \tau - 2a \cos \tau \sin \tau (a\tau + r_0) + \\ &+ 2a \cos \tau \sin \tau (a\tau + r_0) = a^2 + (a\tau + r_0)^2. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, при всех значениях параметрах кривая остается регулярной.

Решим теперь эту же задачу заново, используя полярную систему координат. В полярной системе координаты имеют вид

$$\begin{cases} r = vt + r_0, & v_0 \geq 0, \\ \varphi = \omega t, \end{cases}$$

откуда сразу получаем ответ, использовав для перехода

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Пример более сложной параметризации кривой

Будем описывать траекторию точки на катящейся окружности радиуса 1. Сразу можем представить, как будет выглядеть траектория точки (рис. 1.4). Такая траектория называется *циклоидой*.

В отличие от предыдущей задачи, замены системы координат здесь будет недостаточно. Будем рассматривать отдельно, как меняются x и y . Кроме этого, будем пользоваться теми же соображениями, что и в прошлой задаче.

Независимо от того, как движется окружность, множество точек движения, то есть траектория, будет оставаться той же. Выберем поэтому самый простой случай, равномерное движение без проскальзывания, скорость окружности положим равной 1.

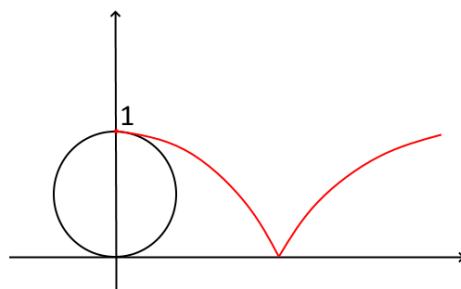


Рис. 1.4. Циклоида

За время t координаты центра приняли значение

$$\begin{cases} x_{\text{ц}} = t, \\ x_{\text{ц}} = 1. \end{cases}$$

Если за время t центр проехал расстояние t , то угол, на который повернулся круг, принимает значение t . Логично предположить, что

$$x_{\text{вр}} = \sin t, \quad y_{\text{вр}} = \cos t.$$

Пользуясь такими же соображениями, как в предыдущей задаче, получим³

$$\begin{cases} x(t) = t + \sin t, \\ y(t) = 1 + \cos t. \end{cases}$$

Перейдем к условию регулярности.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + \cos t, \\ \dot{y} = -\sin t, \end{cases}$$

откуда получим, что

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t = 2 + 2 \cos t = 0$$

при $\cos t = -1$, то есть в точках, где y равен 0.⁴

Вектор скорости

Итак, ранее разобрали несколько примеров параметризации кривых γ , задаваемых координатами $x(t), y(t)$ в пространстве \mathbb{R} . Поговорим теперь о векторе скорости $(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{\gamma}$. Длина вектора скорости $\dot{\gamma}$ задается формулой

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

³Полезно проверить некоторые базовые вещи. Например, при $t = 0$ получаем те значения x и y , которые имели место вначале.

⁴Заметим, что циклоида нерегулярна всего в счетном числе точек.

Так, например, у окружности $|\dot{\gamma}| = 1$, а если циклоиды

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{2 + 2 \cos t}.$$

Параметр, при котором

$$|\dot{\gamma}| = \text{const},$$

называется *натуральным параметром*.

Ранее уже работали с заменой параметра $t(\tau)$: $\gamma(t) \rightarrow \gamma(\tau)$. Достаточным условием однозначности является $|\frac{dt}{d\tau}| \neq 0$. Обозначим

$$\gamma' = \dot{\gamma} \frac{dt}{d\tau},$$

то есть дифференциал⁵ по τ от $\gamma(t(\tau))$. Будем искать параметризацию такую, чтобы длина вектора скорости стала постоянной, то есть

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{dt}{d\tau}.$$

Сделаем обратное. Найдем

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

откуда найдем

$$\tau = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

то есть зависимость $\tau(t)$.

Так как требуется найти зависимость $t(\tau)$, могут возникнуть проблемы, так как не всегда берется интеграл и не всегда обратные зависимости могут быть выражены в элементарных функциях.

Параметризация спирали

Запишем уравнения спирали в упрощенном виде:

$$\begin{cases} x(t) = at \cos t, \\ y(t) = at \sin t. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cos t - at \sin t, \\ \dot{y} = a \sin t + at \cos t, \end{cases}$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 + a^2 t^2}.$$

Тогда

$$\frac{d\tau}{dt} = a\sqrt{1 + t^2},$$

⁵Здесь это векторное выражение.

$$\tau = a \int \sqrt{1 + t^2} dt.$$

Сделаем замену $t = \operatorname{sh} p$. Получим

$$\begin{aligned} \tau &= a \int \sqrt{1 + t^2} dt = a \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p} \operatorname{ch} p dp = \int \operatorname{ch}^2 p dp = \\ &= \frac{e^{-2p} + e^{2p} + 2}{4} dp = -\frac{1}{8}e^{-2p} + \frac{1}{8}e^{2p} + \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Сделаем теперь обратную замену. Так как

$$t = \frac{e^p - e^{-p}}{2},$$

получим, что

$$e^{2p} - 2te^p - 1 = 0,$$

$$D = 4t^2 + 4,$$

откуда положительный корень

$$e^p = t + \sqrt{t^2 + 1}.$$

Таким образом,

$$p = \ln t + \sqrt{t^2 + 1}.$$

Далее можем подставить получившееся выражение в (1). Так как взять обратную функцию затруднительно, получаем уже в таком простейшем примере трудности выражения t через τ .

Параметризация логарифмической спирали

Рассмотрим логарифмическую спираль (рис. 1.3), задаваемую системой

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t, \\ y(t) = e^t \sin t. \end{cases} \quad (2)$$

Найдем производные

$$\begin{cases} \dot{x} = e^t \cos t - e^t \sin t, \\ \dot{y} = e^t \sin t + e^t \cos t. \end{cases}$$

Оказывается, что длина вектора скорости имеет гораздо более удобный вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= (e^{2t} \cos^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t + \\ &+ e^{2t} \sin^2 t + 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t)^{1/2} = \sqrt{2}e^t. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\tau(t) = \sqrt{2}e^t,$$

$$t(\tau) = \ln \left(\tau / \sqrt{2} \right).$$

Подставляя получившееся выражение в (2), получим

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \cos \ln(\tau/\sqrt{2}), \\ y(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \sin \ln(\tau/\sqrt{2}). \end{cases}$$

Убедимся, что при такой параметризации длина вектора скорости действительно равна 1. Вычислим

$$\begin{cases} x'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \ln(\tau/\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \ln(\tau/\sqrt{2}), \\ y'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \ln(\tau/\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \ln(\tau/\sqrt{2}). \end{cases}$$

Отсюда, действительно,

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{1/2 + 1/2} = 1.$$

Семинар 2

Краткое повторение материала

В прошлый раз речь шла о кривых на плоскости

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3)$$

У кривой есть натуральный параметр, для которого

$$(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1.$$

Отображения (3) эквивалентны, если кривые, которые они образуют, совпадают. Таким образом, все отображения разбиваются на классы эквивалентности, в каждом из которых можно выбрать так называемого канонического представителя класса. Обсудим свойства такой кривой. Во-первых,

$$(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

Кривизна параметризации

Для натурального параметра можем определить *кривизну*

$$(\ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = k.$$

Рассмотрим, например, окружность

$$\begin{cases} x = R \cos t/R, \\ y = R \sin t/R. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin t/R, \\ \dot{y} = R \cos t/R, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{1}{R} \cos t/R, \\ \ddot{y} = -\frac{1}{R} \sin t/R, \end{cases}$$

откуда

$$\sqrt{(\ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})} = \frac{1}{R}.$$

Для прямой, очевидно, кривизна равна 0.

Итак, для вычисления кривизны требуется знать натуральный параметр. В прошлый раз обсуждали, что его нахождение может быть сопряжено с различными трудностями. Обсудим, как можно обойти это требование. Итак, хотим, чтобы

- Кривизна в натуральной параметризации была равна $\sqrt{(\ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}$.
- При замене параметризации кривизна не менялась.

Для двумерного пространства такая формула имеет вид

$$\frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = k. \quad (4)$$

Проверим требования, представленные выше. Предположим, работаем в натуральной параметризации. Тогда $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. В числителе (4) стоит определитель

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} & \dot{y} \\ \dot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Из линейной алгебры известно, что это площадь параллелограмма, «натянутого» на вектор скорости и вектор ускорения. Для натуральной параметризации эти два вектора ортогональны, т.е. параллелограмм является прямоугольником. Его площадь равна $|\dot{\gamma}||\ddot{\gamma}|$, причем $|\dot{\gamma}| = 1$.

Проверим теперь, что при замене координат значение (4) не меняется. Сделаем замену $t(\tau)$, то есть перейдем

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (x(t(\tau)), y(t(\tau))).$$

Тогда

$$\begin{cases} x' = \dot{x} \frac{dt}{d\tau}, \\ y' = \dot{y} \frac{dt}{d\tau}, \end{cases} \quad (6)$$
$$\begin{cases} x'' = \ddot{x} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dot{x} \frac{d^2t}{d\tau^2}, \\ y'' = \ddot{y} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dot{y} \frac{d^2t}{d\tau^2}. \end{cases}$$

Вычислим

$$x''y' - x'y'' = \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dot{x} \frac{d^2t}{d\tau^2} & \ddot{y} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dot{y} \frac{d^2t}{d\tau^2} \\ \dot{x} \frac{dt}{d\tau} & \dot{y} \frac{dt}{d\tau} \end{vmatrix}.$$

Легко заметить, что такая матрица получается из матрицы (5) умножением на число и добавлением к первой строке линейной комбинации второй. Определитель матрицы при этом не меняется. Получим, что

$$\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^3 \begin{vmatrix} \ddot{x} & \dot{y} \\ \dot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}.$$

Отсюда с учетом (6) получим, что

$$\frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{x''y' - x'y''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Кривизна эллипса

Уравнение эллипса, как известно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Система для эллипса имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad a \neq b, \quad a > b > 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \sin t, \\ \dot{y} = b \cos t, \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -a \cos t, \\ \ddot{y} = -b \sin t. \end{cases}$$
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t,$$
$$\begin{vmatrix} -a \cos t & -b \sin t \\ -a \sin t & b \cos t \end{vmatrix} = -ab \cos^2 t - ab \sin^2 t = -ab.$$

Кривизна эллипса равна

$$K(t) = -\frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = -\frac{ab}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t}.$$

Все значения $K(t)$ расположены в промежутке $[-a/b, -b/a]$. На эллипсе точки экстремума⁶ кривизны $K(t)$ расположены в самых крайних точках сверху/снизу и справа/слева.

Кривизна прямой

Ранее говорили, что у прямой кривизна равна 0. Покажем теперь, что, если

$$k \equiv 0,$$

кривая является прямой. Отметим, что, если $k = 0$, то

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

а значит, вектора скорости и ускорения сонаправлены.

Без ограничения общности будем считать, что имеем дело с натуральной параметризацией. Тогда

$$(\ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0,$$

откуда $\ddot{\gamma} = 0$, то есть

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \begin{cases} x(t) = a_1 t + b_1, \\ y(t) = a_2 t + b_2, \end{cases}$$

причем $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

⁶Такие точки называются *вершинами*.

Репер Френе

Будем работать с натуральной параметризацией. Обозначим вектор скорости

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Введем также вектор нормали

$$n = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}.$$

Так, имеем условия

$$(v, v) = 1, \quad (v, n) = 0, \quad (n, n) = 1. \quad (7)$$

Получается, с каждой точкой кривой связан ортонормированный базис (рис. 2.1).

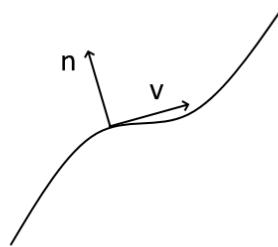


Рис. 2.1. Ортонормированный базис, связанный с кривой

Из условий легко получить *формулы Френе*

$$\begin{aligned} \dot{v} &= kn, \\ \dot{n} &= -kv. \end{aligned} \quad (8)$$

Выведем второе. Заметим, что

$$(dot{n}, n) = 0.$$

Продифференцировав второе из (7), получим

$$(\dot{v}, n) + (v, \dot{n}) = 0,$$

откуда

$$(v, \dot{n}) = -k.$$

Формальную систему (8) можно записать развернуто⁷

$$\begin{pmatrix} \dot{v}^1 \\ \dot{v}^2 \\ \dot{n}^1 \\ \dot{n}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ n^1 \\ n^2 \end{pmatrix}.$$

⁷Такой вид системы справедлив только для натуральной параметризации.

Как и в случае с кривизной кривой, в определении используется нормальный параметр, но найти вектора v, n мы можем для любой системы координат. Например, для параболы

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = 2t \end{cases}$$

и вектор скорости имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{pmatrix}.$$

Так как работаем в \mathbb{R}^2 , а v и n ортогональны,

$$n = \begin{pmatrix} -\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл кривизны

Кривая в точке раскладывается в ряд

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \dot{\gamma}t + \ddot{\gamma}(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$

Из аналитической геометрии известно, что предел положения секущей является касательной.

Равенство

$$\gamma(t) - at - b = o(t^2),$$

будет справедливо, если $at + b$ является касательной прямой. Такое определение касательной является инвариантным относительно перехода к другой системе координат.

Применим теперь такие же рассуждения к кривизне. Обозначим окружность в натуральной параметризации, проходящую через начало координат, как

$$\beta(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos t/R - R, \\ y(t) = t \sin t/R. \end{cases}$$

Рассмотрим кривую, проходящую через начало координат (то есть $\gamma(0) = 0$),

$$(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 1.$$

Тогда разложение

$$\gamma(t) - \beta(t) = (\dot{\gamma}(0) - \dot{\beta}(0))t + (\ddot{\gamma}(0) - \ddot{\beta}(0))\frac{t^2}{2} + \dots = O(t^3),$$

где

$$\dot{\beta}(0) = (0, 1)^T, \quad \ddot{\beta}(0) = (-1/R, 0)^T,$$

справедливо, если $\ddot{\gamma}(0) = (k, 0)^T$, $k = -1/R$. Получили, что кривизна является величиной обратной радиусу окружности, касающейся кривой.

Вспомним задачу с эллипсоидом. Касательные окружности с минимальным радиусом, действительно, приходятся на точки максимума кривизны, и наоборот, в точке с наименьшей кривизной касательная окружность максимальна.

Задача о четырех вершинах

Рассмотрим произвольную замкнутую кривую без самопересечений

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(a) = \gamma(b).$$

Так как кривизна зависит от t и принимает в точках a, b одинаковые значения, можем считать ее периодической функцией. Тогда на отрезке $[a, b]$ кривизна имеет хотя бы два экстремума: минимум и максимум.

Теорема 2.1. (*О четырех вершинах*) *Пусть задана замкнутая выпуклая кривая без самопересечений. Тогда экстремумов кривизны как минимум четыре.*

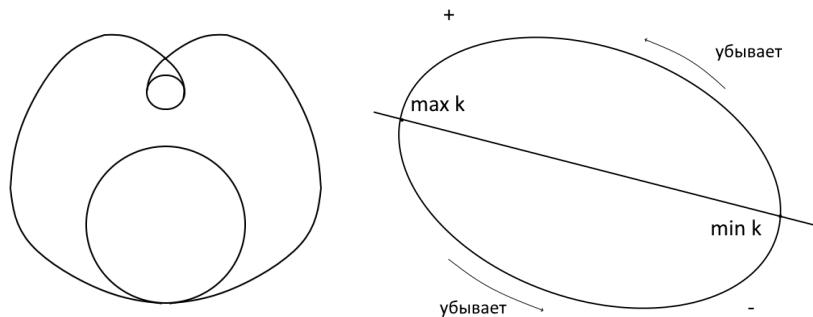


Рис. 2.2. Пример к теореме о 4 вершинах

Рис. 2.3. К доказательству теоремы о 4 вершинах

Прежде, чем перейти к доказательству, рассмотрим контрпример (рис. 2.2). Из графика видно, что данная кривая имеет всего одну точку максимума и одну точку минимума кривизны (так как в одной точке касательная окружность будет иметь минимальный и максимальный радиус соответственно).

Доказательство Будем пользоваться упрощенным понятием выпуклости. Предположим, что прямая, проведенная через две точки на кривой, пересекает эту кривую только в этих точках.

Кроме того, будем считать, что кривая натурально параметризована. Предположим (от противного), что точек экстремума всего две (рис. 2.3).

Будем считать, что выше прямой (то есть в области $Ax + By + C > 0$ кривизна растет, то есть $\dot{k} > 0$, а ниже – убывает, то есть $\dot{k} < 0$. Отсюда

$$\dot{k}(Ax + By + C) \geq 0,$$

причем равенство 0 достигается в двух точках: \max и \min кривизны.

Проинтегрируем выражение

$$\int_0^b \dot{k} x = kx \Big|_a^b - \int_a^b k \dot{x} = - \int_a^n k v^1 = \int_a^b \dot{n}^1 = n^1 \Big|_a^b = 0.$$

Здесь воспользовались первой из формул Френе (8).

Аналогично получим, что

$$\int_a^b ky = 0, \quad C \int_a^b k = Ck \Big|_a^b = 0,$$

откуда следует, что

$$\int_a^b k(Ax + By + C) = 0.$$

Так как подынтегральное выражение положительно на всем отрезке за исключением двух точек (по предположению), получаем противоречие.

Доказательство того, что вершин не может быть три, предлагается в качестве упражнения.

Кривые в трехмерном пространстве

Обсудим особенности отображений

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Очевидно, что соображения, данные для натурального параметра, остаются справедливыми и в трехмерном случае. Обсудим кривизну. По аналогии с двумерным случаем,⁸

$$k = \frac{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}.$$

Заметим, что этой формулы недостаточно, чтобы характеризовать все кривые, как это делали в двумерном случае.

Воспользуемся соображениями, сходными с теми, которыми пользовались при задании формул Френе. В трехмерном случае у нас есть $\dot{\gamma}$ – вектор скорости, $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle$ – плоскость, натянутая на вектора скорости и ускорения. При замене параметризации вектора меняются следующим образом:

$$\gamma' = \dot{\gamma} \frac{dt}{d\tau}, \quad \gamma'' = \ddot{\gamma} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dot{\gamma} \left(\frac{d^2t}{d\tau^2} \right),$$

поэтому плоскость, натянутая на эти вектора, совпадет⁹ с $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle$. Определим также в произвольной параметризации вектор бинормали

$$b = [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] \frac{1}{\|\dot{\gamma}\| \|\ddot{\gamma}\|}.$$

В нормальной параметризации

$$(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1, \quad (n, n) = 1, \quad (\dot{\gamma}, n) = 0, \quad b = [\dot{\gamma}, n].$$

⁸ В двумерном случае в числителях дроби стояла площадь параллелограмма, образованного векторами скорости и ускорения. Для того, чтобычислить такую площадь в общем виде, нужно вычислять определитель матрицы Грама. В трехмерном случае, как известно, площадь может быть вычислена как модуль векторного произведения.

⁹ Такая плоскость называется *соприкасающейся*.

Как и в двумерном случае,

$$\dot{v} = -kn.$$

Найдем, чему равен \dot{n} . Знаем, что

$$(\dot{n}, n) = 0.$$

Тогда

$$\dot{n} = Av + Bb.$$

При этом, продифференцировав $(\dot{\gamma}, n) = 0$, получим

$$(\dot{v}, n) + (v, \dot{n}) = 0,$$

откуда

$$k + (v, \dot{n}) = 0,$$

то есть $A = -k$. Обозначим коэффициент B через κ , то есть

$$\dot{n} = -kv + \kappa b.$$

Кроме того, можно найти выражение для \dot{b} . Всего получим три формулы Френе в натуральном параметре:

$$\dot{v} = kn,$$

$$\dot{n} = -kv + \kappa b,$$

$$\dot{b} = -\kappa n.$$

Параметр κ называется *кручением* и вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}.$$

Семинар 3

Примеры в трехмерном пространстве

В прошлый раз говорили о характеристиках кривой в трехмерном пространстве. Так, кривизна вычисляется по формуле

$$k = \frac{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}{\|\dot{\gamma}\|^3},$$

где¹⁰

$$\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\| = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{z} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{array} \right|^2}.$$

Кроме этого, ввели параметр *кручения*, вычисляемый по формуле

$$\kappa = \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma} \rangle}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}.$$

Попробуем, используя приведенные выше формулы, вычислить характеристики некоторой кривой

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t, \\ y(t) = e^t \cos t, \\ z(t) = e^t. \end{cases}$$

Вектор скорости будет иметь вид

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} e^t \sin t + e^t \cos t \\ e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix},$$

а его длина

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{e^{2t} - 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} - 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t}} = \sqrt{3}e^t. \quad (9)$$

Вектор ускорения

$$\ddot{\gamma} = \begin{pmatrix} e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \cos t \\ -2e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Третья производная имеет вид

$$\dddot{\gamma} = \begin{pmatrix} 2e^t \cos t - 2e^t \sin t \\ -2e^t \sin t - 2e^t \cos t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

¹⁰Заметим, что в общем случае, когда $n > 3$, площадь между $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$ вычисляется по формуле

$$\sqrt{(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(\ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) - (\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})^2}.$$

Вычислим векторное произведение. Для этого воспользуемся записью

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ e^t \sin t + e^t \cos t & e^t \cos t - e^t \sin t & e^t \\ 2e^t \cos t & -2e^t \sin t & e^t \end{pmatrix}.$$

Отсюда вычислим координаты

$$\begin{aligned} e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t + 2e^{2t} \sin t &= e^{2t} \cos t + e^{2t} \sin t, \\ -e^{2t} \sin t - e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \cos t &= e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t, \\ -2e^{2t} \sin^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t - 2e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \cos t \sin t &= -2e^{2t}. \end{aligned}$$

Получим, что

$$|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]| = \sqrt{e^{4t} + 2e^{4t} \cos t \sin t + e^{4t} - e^{4t} \cos t \sin t + 4e^{4t}} = \sqrt{6}e^{2t}. \quad (10)$$

Воспользовавшись (9) и (10), получим

$$k = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \frac{2}{3} \frac{1}{e^t}.$$

Теперь,

$$\begin{aligned} (2e^t \cos t - 2e^t \sin t)(e^{2t} \cos t + e^{2t} \sin t) + (2e^t \cos t + 2e^t \sin t)(e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t) - 2e^{3t} &= \\ = 2e^{3t} \cos^2 t - 2e^{3t} \sin t \cos t + 2e^{3t} \sin t \cos t - 2e^{3t} \sin^2 t - 2e^{3t}(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2e^{3t} &= \\ = 2e^{3t}(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2e^{3t}(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2e^{3t} &= -2e^{3t}. \end{aligned}$$

Отсюда кручение

$$\kappa = \frac{-2e^{3t}}{6e^{4t}} = -\frac{1}{3} \frac{1}{e^t}.$$

Задача на доказательство формы кривой

Покажем теперь, что если

$$\kappa \equiv 0,$$

то кривая плоская. В таком случае

$$\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma} \rangle = 0,$$

а значит,

$$\ddot{\gamma} = A\dot{\gamma} + B\ddot{\gamma},$$

где A, B – некоторые функции. Следовательно, четвертая производная будет выражаться как

$$\dddot{\gamma} = A'\dot{\gamma} + A\ddot{\gamma} + \dot{B}\ddot{\gamma} + B\dddot{\gamma} = \tilde{A}\dot{\gamma} + \tilde{B}\ddot{\gamma}.$$

Наша гипотеза состоит в том, что плоскость, в которой лежит кривая – плоскость, натянутая на ее вектора скорости $\dot{\gamma}$ и ускорения $\ddot{\gamma}$.

Рассмотрим натуральную параметризацию. Для нее

$$|\dot{\gamma}| = 1, \quad |\ddot{\gamma}| = k, \quad (\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0,$$

$$\frac{1}{k}[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] = b, \quad (b, b) = 1.$$

Отсюда

$$\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = k(b, \ddot{\gamma}) \equiv 0$$

по условию. Посмотрим, как устроена третья производная γ . Известно, что

$$\ddot{\gamma} = kn,$$

откуда

$$\ddot{\gamma} = \dot{k}n + k\dot{n}.$$

Умножим теперь это выражение на бинормаль

$$b = [\dot{\gamma}, n].$$

Так как b ортогонален n ,

$$(\ddot{\gamma}, b) = k(\dot{n}, b) = 0.$$

Про \dot{n} знаем, что

$$(\dot{n}, n) = 0,$$

так как $(n, n) = 1$. Рассмотрим b .

$$\dot{b} = [\ddot{\gamma}, n] + [\dot{\gamma}, \dot{n}] = \underbrace{[kn, n]}_{=0} + [\dot{\gamma}, \dot{n}] = \kappa[v, b] = 0$$

так как в натуральной параметризации по формуле Френе

$$\dot{n} = -kv + \kappa b,$$

а $\kappa \equiv 0$ по доказанному выше. Значит, вектор b постоянен:

$$b = (A, B, C).$$

Из

$$(b, v) = 0 = A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z}$$

следует, что

$$Ax + By + Cz = D = \text{const.}$$

Поверхности

Поверхность – это отображение

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

то есть три функции от двух переменных

$$x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v).$$

Как и в случае с кривыми, будем изучать характеристики поверхностей. Рассмотрим кривую $u(t), v(t)$:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Сквозное отображение имеет вид

$$x(u(t), v(t)), \quad y(u(t), v(t)), \quad z(u(t), v(t)).$$

Вектор скорости обозначается

$$r_u \dot{u} + r_v \dot{v},$$

где

$$r_u = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ x'_u \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ x'_v \end{pmatrix}.$$

Примеры 1. График функции

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Здесь

$$r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}.$$

Видно, что ранг матрицы производных всегда 2. График функции задает «хорошую» непрерывную поверхность.

2. Поверхность вращения. Пусть задана плоская кривая

$$x(u), \quad y = 0, \quad z(u).$$

Поверхность вращения получается путем вращения этой кривой вокруг оси z . Матрица вращения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итого параметризация поверхности имеет вид

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u) \cos v \\ x(v) \sin v \\ z(u) \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$r_u = \begin{pmatrix} x' \cos v \\ x' \sin v \\ z' \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} -x \sin v \\ x \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вспомним, что векторное произведение имеет длину 0 тогда и только тогда, когда вектора линейно зависимы. Вычислим, используя

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x' \cos v & x' \sin v & z' \\ -x \sin v & x \cos v & 0 \end{vmatrix},$$

$$[r_u, r_v] = (xz' \cos v, -xz' \sin v, xx').$$

Так как первые две компоненты одновременно не обращаются в 0, при $xz' \neq 0$ поверхность регулярна.

В случае, когда $xz' = 0$, вектора r_v и r_u линейно зависимы, если $x = 0$ или $z' = 0$, $x' = 0$.

Параметризация поверхности

Поговорим теперь о неявно заданных поверхностях

$$F(x, y, z) = 0. \quad (11)$$

Такие поверхности можно параметризовать, если

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \neq 0.$$

Рассмотрим в качестве примера сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Вектор

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z) = 0$$

при

$$x = y = z = 0.$$

Точка с такими координатами не принадлежит заданной поверхности (не удовлетворяет ее уравнению). Поверхность регулярна в окрестности каждой точки.

По теореме о неявно функции, координату в (11) можно выразить через две другие, только если частная производная по этой координате не обращается в 0. В случае сферы получаем, что параметризация

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

возможна, если

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z'_x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z'_y = 0 \end{cases}$$

Производные из выражений выше выражаются, только если $\frac{\partial F}{\partial z}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ не обращаются в 0. На сфере же есть целая окружность, где каждая из этих производных равна 0.

Задание поверхности в 4-мерном пространстве

В пространстве \mathbb{R}^4 рассмотрим поверхность

$$(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v).$$

Найдем вектора

$$r_u = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix}.$$

Так как r_v и r_u линейно независимы, такая поверхность регулярна.

Рассмотрим еще один способ задания поверхности в \mathbb{R}^4 . Положим

$$\mathbb{R}^4 (x, y, a, b) = \mathbb{C}^2 (z, w),$$

где

$$z = x + iy, \quad w = a + ib.$$

Рассмотрим многочлен

$$w^2 - P(z) = 0, \tag{12}$$

где у $P(z)$ нет кратных корней. Рассмотрим, когда

$$(-P'(z), 2w) = 0. \tag{13}$$

Это выполняется, если $w = 0$ и $P'(z) = 0$. В таком случае и $P(z)$ должен = 0. Можно проверить, что если (13) не обращается в 0, то и (12) не обращается в 0. Подставив представления для w в (12), получим вещественную систему

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - \Re P = 0, \\ 2ab - \Im P = 0. \end{cases}$$

Из (13) следует, что все производные такой системы тоже должны обращаться в 0.

Первая квадратичная форма

Рассматриваем, как и раньше, поверхность $r(u, v)$,

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Найдем, чем равен вектор скорости кривой $u(t), v(t)$, которая располагается на поверхности:

$$(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = (r_u, r_u)\dot{u}^2 + 2(r_u, r_v)\dot{u}\dot{v} + (r_v, r_v)\dot{v}^2.$$

Перед нами квадратичная форма от вектора скорости. Можем записать ее в виде матрицы Грама

$$I = \begin{pmatrix} (r_u, r_u) & (r_u, r_v) \\ (r_u, r_v) & (r_v, r_v) \end{pmatrix}.$$

Пример Рассмотрим график функции

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Тогда

$$r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}.$$

Матрицы Грама имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 + (f'_u)^2 & f'_u f'_v \\ f'_u f'_v & 1 + (f'_v)^2 \end{pmatrix}.$$

Пример Рассмотрим теперь поверхность вращения

$$(x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)).$$

$$r_u = \begin{pmatrix} x' \cos v \\ x' \sin v \\ z' \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} -x \sin v \\ x \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама

$$I = \begin{pmatrix} (x')^2 + (z')^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим частный случай, поверхность вращения, где $x = \cos u$, $z = \sin u$. Квадратичная форма имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Отметим, что кажется, что при $u \rightarrow \pi/2$ определитель матрицы $I \rightarrow 0$. Однако скалярное произведение в смысле касательного пространства по-прежнему положительно определено. Такое вырождение возникает из-за особенности параметризации на сфере.

Рассмотрим еще один частный случай. Если

$$z = u, \quad x = a \operatorname{ch} u/a,$$

$$I = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 u/a & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 u/a \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь поверхность вращения является тором (рис. 3.1),

$$x = R + r \cos u, \quad z = r \sin u,$$

и матрица Грама в таком случае

$$I = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos u)^2 \end{pmatrix}.$$

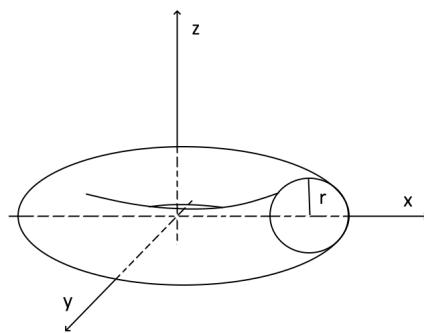


Рис. 3.1. График тора

В качестве последнего примера возьмем вращение гиперболоида. Здесь

$$x = \operatorname{ch} u, \quad z = \operatorname{sh} u.$$

Тогда

$$I = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 u \end{pmatrix}.$$

Пример Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Параметризация имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v, \\ y = b \cos u \sin v, \\ z = c \sin u. \end{cases}$$

Вычислим

$$r_u = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v \\ -b \sin u \sin v \\ c \cos u \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} -a \cos u \sin v \\ b \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$I = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u & (a^2 - b^2) \cos u \cos v \sin u \sin v \\ (a^2 - b^2) \cos u \cos v \sin u \sin v & a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \cos^2 v \end{pmatrix}.$$

Семинар 4

Первая квадратичная форма в случае неявной параметризации

Пусть поверхность задана неявно:

$$F(x, y, z) = 0,$$

и пусть $\partial F / \partial z \neq 0$, а значит, можем выразить $z(x, y)$. Тогда в окрестности точки решения можно выразить

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

Квадратичная форма имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix}.$$

С учетом уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z_x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z_y = 0 \end{cases}$$

можем записать квадратичную форму в виде

$$I = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 / \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 & \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} / \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} / \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 & 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 / \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Например, обсудим случай сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Как обсуждалось ранее, в этом случае

$$\begin{aligned} df &= (2x, 2y, 2z), \\ I &= \begin{pmatrix} 1 + x^2/z^2 & xy/z^2 \\ xy/z^2 & 1 + y^2/z^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проверка регулярности поверхности

Пусть матрица $X \in gl(n)$, где $gl(n)$ линейное пространство размерности n^2 , и пусть задано уравнение¹¹

$$F = \det X = 1. \tag{14}$$

Покажем, что это регулярная поверхность. Для этого должно выполняться условие

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1^1}, \frac{\partial F}{\partial x_2^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n^1} \right) \neq 0, \tag{15}$$

¹¹Такие матрицы образуют группу, обозначаемую $SL(n)$.

где x_j^i – элементы заданной матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Запишем условие (14) в виде

$$F = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_1^{\sigma(1)} \dots x_n^{\sigma(n)} = x_1^1 \sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^\sigma x_2^{\sigma(2)} \dots x_n^{\sigma(n)} + F_0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j^i} = M_{ij},$$

где M_{ji} – соответствующий минор. Отсюда получается, что (15) обращается в 0, когда все миноры = 0, то есть определитель X равен 0. Получили противоречие.

Итак, поверхность (14) регулярная, ее размерность $n^2 - 1$.

Вторая квадратичная форма

Пусть дана поверхность $r(u, v)$, $u(t)$ и $v(t)$. Находим вектор скорости

$$\dot{\gamma} = r_u \dot{u} + r_v \dot{v}$$

и ускорения

$$\ddot{\gamma} = r_{uu} u^2 + 2r_{uv} \dot{u} \dot{v} + r_{vv} v^2 + r_u \ddot{u} + r_v \ddot{v}.$$

Заметим, что в формулу для ускорения входят и первые, и вторые производные.

Напомним, что вектор нормали к поверхности определяется формулой

$$\vec{n} = \frac{[r_u, r_v]}{\|[r_u, r_v]\|}.$$

Умножая вектор ускорения на нормаль, получим

$$(\ddot{\gamma}, n) = (r_{uu}, n)u^2 + 2(r_{uv}, n)\dot{u}\dot{v} + (r_{vv}, n)v^2$$

– билинейную форму.

Вторая квадратичная форма определяется как

$$II = \begin{pmatrix} (r_{uu}, n) & (r_{uv}, n) \\ (r_{uv}, n) & (r_{vv}, n) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Поговорим о геометрическом смысле второй квадратичной формы.

1. $II = 0 \iff$ регулярная поверхность – это плоскость.

Остановимся на этом свойстве подробнее. Вторая квадратичная форма = 0, если

$$(r_{uu}, n) = 0, \quad (r_{uv}, n) = 0, \quad (r_{vv}, n) = 0.$$

Вспомним, что вектор нормали

$$(n, n) = 1.$$

Продифференцировав по u , получим, что

$$(n, n_u) = 0.$$

Аналогично,

$$(n, n_v) = 0.$$

Из условия

$$(r_u, n) = 0$$

получим, что

$$(r_{uu}, n) + (r_u, n_u) = 0,$$

откуда получим, что

$$(r_u, n_u) = 0,$$

то есть n_u ортогонален r_u и (см. выше) n . Тогда $n_u \equiv 0$, Проведя аналогичные рассуждения, получим, что и $n_v \equiv 0$. Значит, n – постоянный вектор, то есть

$$n = (A, B, C).$$

Аналогично задаче из предыдущего семинара, можно получить, что тогда

$$Ax + By + Cz = D.$$

Вычисление второй квадратичной формы

1. Дан график функции

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Напомним, что

$$I = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь II . Производные имеют вид

$$r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}.$$

Тогда вторые производные

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{uu} \end{pmatrix}, \quad r_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{uv} \end{pmatrix}, \quad r_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{vv} \end{pmatrix}.$$

Вычислим n .

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1),$$

тогда

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}(-f_u, -f_v, 1).$$

Тогда, по формуле (16),

$$II = \begin{pmatrix} \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} & \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \\ \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} & \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \end{pmatrix}.$$

2. Задана кривая $x(u), z(u)$ и **поверхность вращения** $r(u, v)$

$$(x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)).$$

Напомним, первая квадратичная форма имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} (x')^2 + (z')^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к вычислению II . Производные имеют вид

$$r_u = \begin{pmatrix} x' \cos v \\ x' \sin v \\ z' \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} -x \sin v \\ x \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вторые производные

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} x'' \cos v \\ x'' \sin v \\ z'' \end{pmatrix}, \quad r_{uv} = \begin{pmatrix} -x' \sin v \\ x' \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{vv} = \begin{pmatrix} -x \cos v \\ -x \sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь,

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' \cos v & x' \sin v & z' \\ -x \sin v & -x \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-xz' \cos v, -xz' \sin v, xx'),$$

$$|[r_u, r_v]| = \sqrt{x^2((x')^2 + (z')^2)},$$

и вектор нормали равен

$$n = \left(-\frac{z' \cos v}{\sqrt{(x')^2 + (z')^2}}, -\frac{z' \sin v}{\sqrt{(x')^2 + (z')^2}}, \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (z')^2}} \right).$$

Вторая квадратичная форма имеет вид

$$II = \begin{pmatrix} \frac{x'z'' - z'x''}{\sqrt{(x')^2 + (z')^2}} & 0 \\ 0 & \frac{xz'}{\sqrt{(x')^2 + (z')^2}} \end{pmatrix}.$$

Из линейной алгебры можно вспомнить утверждение, что, если есть две билинейные формы, можно обе привести к «хорошему» виду: первая приводится к единичному виду, а вторая – к диагональному, где на диагонали стоят собственные значения оператора

$$I^{-1}II = \begin{pmatrix} \frac{x'z'' - z'x''}{((x')^2 + (z')^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{z'}{x\sqrt{((x')^2 + (z')^2)}} \end{pmatrix}.$$

Как легко увидеть, первое собственное значение представляет собой кривизну. Кроме того, оба собственных значения не зависят от v .

3. Вычислим вторую квадратичную форму для сферы

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v, \\ y = \cos u \sin v, \\ z = \sin u. \end{cases}$$

Вычислим производные

$$r_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

и вторые производные

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ x'' \sin v - \cos u \sin v \\ -\sin v \end{pmatrix}, \quad r_{uv} = \begin{pmatrix} \sin u \sin v \\ -\sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{vv} = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторное произведение

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -\cos u \sin v & \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\cos u \sin u),$$

тогда нормаль

$$n = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u).$$

Вторая квадратичная форма

$$II = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Упражнение Предположим, что

$$\lambda I = II, \tag{17}$$

где $\lambda \neq 0$ – постоянная. Покажем, что в таком случае $r(u, v)$ – кусок сферы.

Запишем (17) в виде

$$\lambda(r_u, r_u) = (r_{uu}, n),$$

$$\begin{aligned}\lambda(r_u, r_v) &= (r_{uv}, n), \\ \lambda(r_v, r_v) &= (r_{vv}, n).\end{aligned}$$

Напомним, что, так как

$$\begin{aligned}(n, n) &= 1, \\ (n, n_u) &= 0, \quad \text{и} \quad (n, n_v) = 0.\end{aligned}$$

Кроме этого, всегда выполнено

$$(r_u, n) = 0.$$

Продифференцировав, получим

$$(r_{uu}, n) + (r_u, n_u) = 0,$$

откуда из условий (17) получим

$$(r_u, \lambda r_u) + (r_u, n_u) = 0,$$

или, по-другому,

$$(r_u, \lambda r_u + n) = 0.$$

Обозначим $b = \lambda r + n_u$. Тогда

$$(r_u, b_u) = 0, \quad (n, b_u) = 0. \quad (18)$$

Кроме того,

$$(r_v, b_u) = 0, \quad (19)$$

так как

$$(r_v, n) = 0,$$

а значит, производная

$$\begin{aligned}(r_{vv}, n) + (r_v, n_u) &= 0, \\ (r_v, \lambda r_v) + (r_v, n_u) &= 0.\end{aligned}$$

Из (18), (19) следует, что $b_u \equiv 0$. Аналогично показывается, что $b_v \equiv 0$. Отсюда следует, что

$$\lambda r + n = (A, B, C)$$

– постоянный вектор. Тогда

$$\lambda(r, r_u) = (Ar_u + Br_u + Cr_u),$$

$$\lambda(r, r_v) = (Ar_v + Br_v + Cr_v).$$

Значит,

$$\lambda(r, r) = (\lambda r + n, r) + v_0,$$

что совпадает с уравнением для сферы

$$(r - w, r - w) = R^2,$$

или, по-другому,

$$(r, r) - 2(r, w) + (w, w) = \mathbb{R}^2.$$

4. Вычислим II для геликоида:

$$(u \cos v, u \sin v, v).$$

Вычислим

$$r_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первая квадратичная форма имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Вторые производные

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{vv} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторное произведение

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u),$$

тогда нормаль

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} (\sin v, -\cos v, u).$$

Вторая квадратичная форма

$$II = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Трубчатые поверхности. Пусть задана кривая $\gamma(x(u), y(u), z(u))$. В каждой точке берем сечение, перпендикулярное вектору скорости, и рисуем окружность радиуса, например, 1 (рис. 4.1).

Из пройденного ранее помним, что есть вектора b и $n = \frac{1}{k}\gamma$. Поверхность задается уравнением

$$r(u, v) = \gamma(u) + n \cos v + b \sin v.$$

Запишем

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\dot{n} = -kv + \kappa b,$$

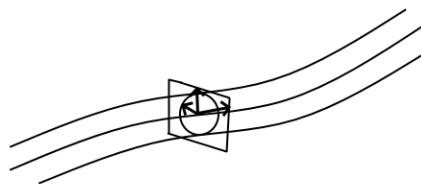


Рис. 4.1. Трубчатая поверхность

$$b = -\kappa n.$$

Найдем производные

$$\begin{aligned} r_u &= \dot{\gamma} + \dot{n} \cos v + \dot{b} \sin v = v + (-kv + \kappa b) \cos v - \kappa n \sin v = \\ &= (1 - k)\bar{v} + (-\kappa \sin v)\bar{n} + (\kappa \cos v)\bar{b}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$r_v = (-\sin v)\bar{n} + \cos v\bar{b}.$$

Найдем

$$(r_u, r_u) = (1 - k)^2 + \kappa^2,$$

$$(r_u, r_v) = \kappa,$$

$$(r_v, r_v) = 1.$$

Первая квадратичная форма имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} (1 - k)^2 + \kappa^2 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{pmatrix}.$$

Семинар 5

Маятник Гюйгенса

Ранее на семинарах уже разбиралась кривая, называемая *циклоидой* (рис. 1.4). Обсудим некоторые ее свойства.

Запишем уравнение кривой, представляющую собой перевернутую циклоиду

$$\begin{cases} x(u) = R(u + \pi + \sin u), \\ y(u) = R(1 - \cos u), \end{cases} \quad (20)$$

где $u \in [-\pi, \pi]$. Построим ее график (рис. 5.1). Будем считать, что у нас есть желоб в форме такой циклоиды, трение отсутствует. На некоторой высоте h_0 расположим шарик. Шарик будет совершать колебания без потери энергии.

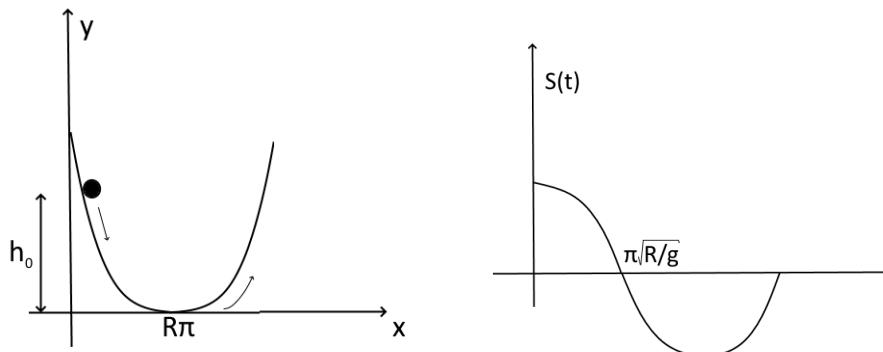


Рис. 5.1. Циклоида. Постановка задачи с шариком

Рис. 5.2. График $s(t)$

Оказывается, что у циклоиды период колебаний шарика не зависит от начальной высоты h_0 . Это свойство циклоиды называется *таутохронностью*.

Докажем его. Запишем закон сохранения энергии:

$$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2}, \quad h \leq h_0,$$

откуда получаем

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)}. \quad (21)$$

Найдем скорость в параметре u :

$$\begin{cases} x' = R(1 + \cos u), \\ y' = R \sin u, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} &= R\sqrt{1 + 2\cos u + \cos^2 u + \sin^2 u} = \\ &= R\sqrt{2(1 + \cos u)} = R\sqrt{4\cos^2 u/2} = 2R|\cos u/2| = 2R\cos u/2, \end{aligned}$$

так как $u \in [-\pi, \pi]$ по условию. Вычислим длину кривой. Будем считать, что начальная точка – самая нижняя (точка максимальной скорости). Получим

$$s = \int_0^u 2R \cos \tau / 2 d\tau = 4R \sin \tau / 2 \Big|_0^u = 4R \sin u / 2,$$

откуда

$$\sin u / 2 = s / 4R.$$

Преобразуем $y(u)$ из (20) как

$$y(u) = 2R \sin^2 u / 2.$$

Тогда можем найти

$$h = y = 2R \sin^2 u / 2 = 2R \frac{s^2}{16R^2} = \frac{s^2}{8R}.$$

Подставив в (21), получим

$$v = \sqrt{2g \left(\frac{s_0^2}{8R} - \frac{s^2}{8R} \right)}.$$

Заметим, что в нашем случае

$$v = -ds/dt.$$

Наконец, получим дифференциальное уравнение

$$-ds/dt = \sqrt{\frac{2g}{8R} (s_0^2 - s^2)}.$$

Решим его. Получим

$$-\int \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \int \sqrt{\frac{g}{4R}} dt.$$

Для интеграла в левой части сделаем замену $s = s_0 \cos x$, тогда

$$\arccos(s/s_0) = \sqrt{g/4R} t + t_0,$$

откуда получаем

$$s = s_0 \cos(\sqrt{g/4R} t + t_0).$$

В момент $t = 0$

$$s = s_0 = s_0 \cos t_0,$$

откуда $t_0 = 0$. Окончательно решение имеет вид

$$s = s_0 \cos(\sqrt{g/4R} t).$$

Построим график зависимости $s(t)$ (рис. 5.2). Получим, что период

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \pi,$$

то есть независит от h .

Прежде, чем обсудить, как заставить шарик двигаться по циклоиде, рассмотрим следующую тему.

Соприкасающаяся окружность. Эволюта

Две кривые r_1 и r_2 , заданные в натуральном параметре, касаются в точке s_0 , если

$$r_1(s_0) = r_2(s_0),$$

$$r'_1(s_0) = r'_2(s_0).$$

Говорят, что у этих кривых *касание порядка не ниже* m , если у них совпадают производные до m включительно:

$$r_1^{(i)}(s_0) = r_2^{(i)}(s_0), \quad 0 \leq i \leq m,$$

и *касание порядка* m , если, помимо этого,

$$r_1^{(m+1)}(s_0) \neq r_2^{(m+1)}(s_0).$$

Пусть есть кривая r , кривизна которой $k \neq 0$. Хотим найти окружность, касающуюся данной кривой с максимальным порядком касания. Поступим следующим образом. В точке s_0 проведем касательную к кривой, отложим от s_0 вектор нормали n , перпендикулярный образующему вектору касательной (рис. 5.3). Продолжим прямую для вектора n и отложим от s_0 расстояние, равное радиусу кривизны $R = 1/k$. Полученная точка называется *центром кривизны*.

Окружность с радиусом R и центром в центре кривизны касается r не ниже 2 порядка.

Рассмотрим теперь центр кривизны для каждой точки кривой r . Множество всех центров кривизны кривой образуют свою кривую, называемую *эволютой* бирегулярной кривой.

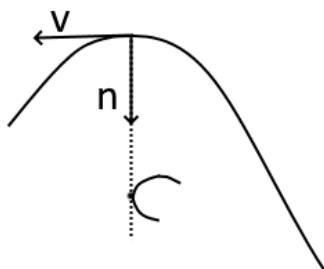


Рис. 5.3. Эволюта кривой

Будем предполагать, что исходная кривая $r(s)$ бирегулярна, параметризована натурально. Эволюта

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(s) + R(s)\vec{n}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{n}(s).$$

Проверим, является ли эволюта регулярной. Найдем

$$\dot{\rho} = \dot{r} + \left(\frac{1}{k}\right)\dot{n} + \left(\frac{1}{k}\right)\dot{n} = v + \left(\frac{1}{k}\right)\dot{n} + \left(\frac{1}{k}\right)(-kv) = \frac{1}{k^2}\dot{n}.$$

Пусть производная кривизны \dot{k} исходной привой r не равна 0 на отрезке $[s_1, s_2]$.

1. Тогда эволюта является регулярной кривой.
2. Касательная прямая к эволюте в точке $\rho(s)$ перпендикулярна исходной кривой в точке $r(s)$.
3. Вычислим

$$\int_{s_1}^{s_2} \left| -\frac{\dot{k}(s)}{k^2(s)} \right| ds = \left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{\dot{k}(s)}{k^2(s)} ds \right| = \left| \frac{1}{k(s_2)} - \frac{1}{k(s_1)} \right| = |R(s_2) - R(s_1)|.$$

Вычисление эволюты циклоиды

Хотим найти эволюту циклоиды

$$\begin{cases} x(u) = R(u + \pi + \sin u), \\ y(u) = R(1 + \cos u). \end{cases}$$

Вычислим вторые производные:

$$\begin{cases} x'' = -R \sin u, \\ y'' = R \cos u. \end{cases}$$

Тогда кривизна

$$\begin{aligned} k &= \frac{|x''y' - x'y''|}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = \frac{|-R^2 \sin^2 u - R^2(1 + \cos u) \cos u|}{8R^3 |\cos u/2|^3} = \\ &= \frac{R^2 |1 + \cos u|}{8R^3 |\cos u/2|^3} = \frac{1}{4R |\cos u/2|}. \end{aligned}$$

Тогда радиус кривизны равен $4R |\cos u/2|$.

Так как работаем на плоскости,

$$\vec{n} = \frac{(-2 \sin u, R(1 + \cos u))}{2R |\cos u/2|} = \frac{(-\sin u, (1 + \cos u))}{2 |\cos u/2|}.$$

Тогда уравнение эволюты

$$\begin{aligned} \rho(s) &= \begin{pmatrix} R(1 + \pi + \sin u) \\ R(1 - \cos u) \end{pmatrix} + 4R |\cos u/2| \begin{pmatrix} -\sin u/(2 |\cos u/2|) \\ 1 + \cos u/(2 |\cos u/2|) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R(1 + \pi + \sin u - 2 \sin u) \\ R(1 - \cos u + 2 + 2 \cos u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(u + \pi - \sin u) \\ R(3 + \cos u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Введем новый параметр $t = u + \pi$. Тогда

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} R(u + \pi - \sin u) \\ R(3 + \cos u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \pi + \pi - \sin(t - \pi)) \\ R(3 + \cos(t - \pi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t + \sin t) \\ R(3 - \cos t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, эволюта имеет вид сдвинутой циклоиды (рис. 5.4).

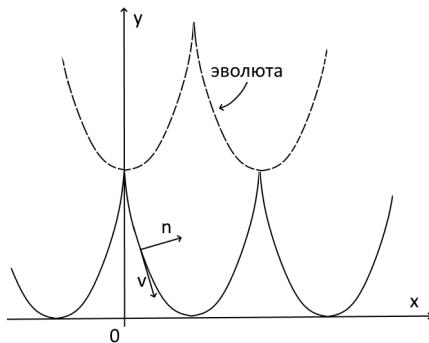


Рис. 5.4. Эволюта циклоиды

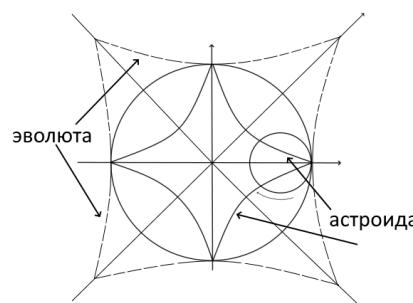


Рис. 5.5. Эволюта астроиды

Астроида

Система уравнений для астроиды имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t, \\ y(t) = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Астроида является частным случаем так называемой гипоциклоиды, получаемой в результате «запуска» окружности меньшего радиуса внутри большей. При некоторых соотношениях радиусов такая кривая будет замкнута.

В частности, это условие выполняется при $r/R = 1/4$, это и будет астроида (рис. 5.5). Так как астроида симметрична, будем рассматривать значения $t \in (0, \pi/2)$.

Вычислим эволюту астроиды по алгоритму, использованному ранее. Производные имеют вид

$$\begin{cases} x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \\ y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x''(t) = 6a \cos t \sin^2 t - 3a \cos^3 t \\ y''(t) = 6a \sin t \cos^2 t - 3a \sin^3 t \end{cases}.$$

Теперь,

$$\begin{aligned} |x''y' - y''x'| &= |(6a \cos t \sin^2 t - 3a \cos^3 t)3a \sin^2 t \cos t + \\ &\quad +(6a \sin t \cos^2 t - 3a \sin^3 t)3a \cos^2 t \sin t| = \\ &= |9a^2(2 \cos t \sin^4 t - \sin^2 t \cos^4 t + 2 \cos^4 t \sin^2 t - \cos^2 t \sin^4 t)| = \\ &= 9a^2 |(\cos^2 t \sin^4 t + \cos^4 t \sin^2 t)| = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t; \\ \sqrt{(x')^2 + (y')^2} &= 3a |\sin t \cos t|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$k = \frac{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t}{27a^3 |\sin t \cos t|^3} = \frac{1}{3a \sin t \cos t},$$

и радиус кривизны

$$R = 3a \sin t \cos t.$$

Вектор нормали имеет вид¹²

$$\vec{n} = (\sin t, \cos t).$$

Наконец, эволюта астроиды

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \begin{pmatrix} a \cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{pmatrix} + 3a \sin t \cos t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a \cos^3 t + 3a \sin^2 t \cos t \\ a \sin^3 t + 3a \sin t \cos^2 t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Получившаяся кривая в данных координатах выглядит сложнее исходной астроиды. Убедимся, что при некоторых преобразованиях координат (рис. 5.5) получим повернутую астроиду.

Перейдем к новым координатам:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \\ \tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

Кроме этого, введем замену параметра $\tau = t + \pi/4$. Тогда новые координаты

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{\sqrt{2}}{2}a(\cos^3 t + 3 \sin^2 t \cos t - \sin^3 t - 3 \sin t \cos^2 t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}a((\cos t - \sin t)(1 + \cos t \sin t) - 3 \sin t^2 \cos t(\cos t - \sin t)) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}a(\cos t - \sin t)(1 - 2 \cos t \sin t) = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\cos t - \sin t)^3 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}a \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 (\cos t \cos \pi/4 - \sin t \sin \pi/4)^3 = 3 \cos^3(t + \pi/4) = 2a \cos^3 \tau.\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$\tilde{y} = 2a \sin^3 \tau.$$

Таким образом, в новых координатах эволюта имеет вид астроиды с двое большим размахом.

Эвольвента

Предположим, есть кривая $r(s)$, на которую намотали нитку определенной длины. Когда эту нитку сматываем с кривой, отрезки нитки натянуты и образуют касательные с исходной кривой (рис. 5.6). В результате конец нитки образует кривую, называемую *эвольвентой*. Уравнение эвольвенты имеет вид

$$\rho(s) = r(s) + v(s_0 - s),$$

где $s_0 - s$ — длина отрезка «сматываемой нитки».

¹²Так как можем сразу сократить \vec{v} на его длину.



Рис. 5.6. Эвольвента

Найдем, является ли эвольвента кривой регулярной.

$$\dot{\rho}(s) = \dot{r}(s) + \dot{v}(s_0 - s) + v(-1).$$

Воспользуемся формулой Френе $\dot{v} = kn$ и получим

$$\dot{\rho}(s) = k(s_0 - s)n.$$

Получается, что, если $r(s)$ была бирегулярна, то ее эвольвента является регулярной при $s \neq s_0$.

Исследуем теперь $\rho(s)$ на бирегулярность:

$$\ddot{\rho} = \dot{k}(s_0 - s)\vec{n} - k\vec{n} + k(s_0 - s)\dot{\vec{n}} = \dot{k}(s_0 - s)\vec{n} - k\vec{n} - k^2(s_0 - s)\vec{v}.$$

Тогда

$$\frac{\|[\dot{\rho}, \ddot{\rho}]\|}{\|\dot{\rho}\|^3} = \frac{k^3(s_0 - s)^2}{k^3(s_0 - s)^3} = \frac{1}{s_0 - s},$$

то есть при $s \neq s_0$ $\rho(s)$ бирегулярна.

Вычислим эволюту $\tilde{\rho}$ эвольвенты ρ кривой r :

$$\tilde{\rho} = \rho + 1/k_\rho n_{\text{ев.}} = r(s) + v(s_0 - s) + (s_0 - s)(-v) = r(s),$$

то есть эволюта от эвольвенты является исходной кривой.

Вернемся к исходной задаче. Построим эволюту исходной циклоды. Подвесим шарик в вершину этой эволюты так, чтобы нитка шарика шла вдоль (то есть образовывала эвольвенту). Пользуясь соображениями выше, получим, что шарик движется по исходной циклоиде.

Семинар 6

Риманова метрика

Расстояние между двумя точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) обычно вычисляется при помощи теоремы Пифагора:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

В случае же, если требуется найти длину кривой, нужно взять касательный вектор к этой кривой и проинтегрировать его вдоль нее. При этом его длину мы понимаем в смысле евклидовой метрики. Говорят, что метрика евклидова, если существуют локальные координаты, в которых она принимает вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Рассмотрим несколько задач для случаев, когда метрика не такая.

1. Пусть метрика имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + 2dy^2,$$

то есть матрица метрики

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти угол между кривыми

$$v = 2u, \quad v = -2u$$

в точке их пересечения (очевидно, $(0, 0)$).

Найдем касательные вектора. Первая прямая имеет параметризацию

$$\begin{cases} u = t, \\ v = 2t, \end{cases}$$

и касательный вектор имеет вид $v_1 = (1, 2)$. Вторая прямая задается параметризацией

$$\begin{cases} u = t, \\ v = -2t, \end{cases}$$

касательный вектор $v_2 = (1, -2)$.

Скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos \varphi,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|}.$$

Найдем

$$\langle v_1, v_2 \rangle = (1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 - 8 = -7.$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = (1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 9,$$

откуда $\|v_1\| = 3$. Аналогично найдем, что $\|v_2\| = 3$. Тогда

$$\cos \varphi = -7/9.$$

Возьмем острый из углов между прямыми. Ответ: $\arccos(7/9)$.

2. Возьмем метрику

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Дан треугольник, образованный кривыми (рис. 6.1)

$$2u = \pm av^2, \quad \text{и } v = 1.$$

Требуется найти периметр и углы треугольника.

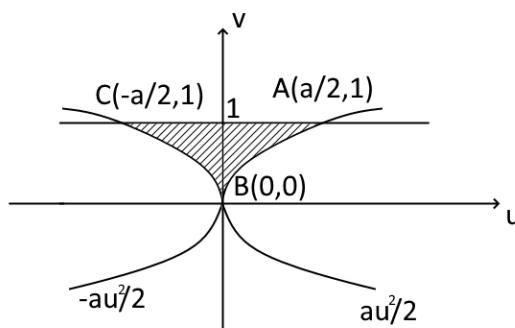


Рис. 6.1. Треугольник, задача 2

Найдем углы. Сначала найдем угол A . Для этого найдем касательные вектора.

$$v_{1A} = (1, 0),$$

что можно получить из параметризации $u = t, v = 1$. Теперь,

$$v_{2A} = (a, t),$$

что получается из параметризации¹³ $u = at^2/2, v = t$ с учетом $t = 1$ в точке A . Запишем квадратичную форму

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

¹³Заметим, что касательный вектор кривой

$$(\dot{u}, \dot{v}) = (at, 1)$$

то есть зависит от точки на прямой.

В точке $A(a/2, 1)$

$$G_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5a^2/4 \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущей задаче, получим, что

$$\|v_{1A}\| = 1, \quad \|v_{2A}\| = 3a/2, \quad \langle v_{A1}, v_{A2} \rangle = a.$$

Отсюда

$$\cos \angle A = \frac{a}{1 \cdot 3a/2} = 2/3.$$

Угол C будет равен углу A , так как метрика симметрична относительно замены u на $-u$.

Найдем угол B . Касательные вектора кривых BA и BC имеют вид $(at, 1)$ и $(-at, 1)$ соответственно. В точке B они оба принимают значение $(0, 1)$. Отсюда следует, что

$$\cos \angle B = 0.$$

Найдем теперь стороны. Чтобы найти квадратичную форму вдоль BA , подставим в матрицу (22) параметризацию $u = at^2/2, v = t$:

$$G_{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2t^4/4 + a^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Касательный вектор имеет вид

$$\chi = (\dot{u}, \dot{v}) = (at, 1),$$

тогда

$$\begin{aligned} \|\chi\|^2 &= (at, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2t^4/4 + a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= a^2t^2 + a^2t^4/4 + a^2 = a^2(t^4/4 + t^2 + 1) = a^2(t^2/2 + 1)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\|\chi\| = a(t^2/2 + 1).$$

Длина

$$AB = \int_0^1 a(t^2/2 + 1) dt = a(t^3/6 + t) \Big|_0^1 = 7/6a.$$

Ввиду симметричности метрики относительно u получим, что

$$BC = AB = 7/6a.$$

Найдем длину AC . Параметризация имеет вид

$$u = t, \quad v = 1, \quad t \in [-a/2, a/2].$$

Касательный вектор имеет координаты

$$\eta = (1, 0)$$

и длину $\|\eta\| = 1$. Матрица

$$G_{CA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 + a^2 \end{pmatrix}.$$

$$CA = \int_{-a/2}^{a/2} 1 dt = a.$$

Значит, периметр равен

$$P = 7/6a + 7/6a + a = 10a/3.$$

3. Возьмем ту же метрику

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Дан треугольник, образованный кривыми (рис. 6.2)

$$2u = \pm av, \quad \text{и } v = 1.$$

Требуется найти площадь треугольника.

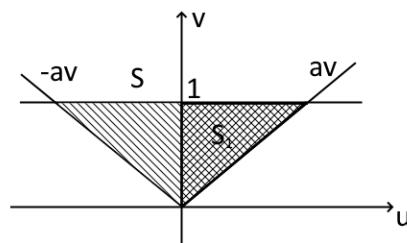


Рис. 6.2. Задача 3

Площадь фигуры Ω в римановой метрике считается как

$$S = \int_{\Omega} \sqrt{\det G}.$$

В нашем случае

$$\sqrt{\det G} = \sqrt{u^2 + a^2}.$$

Воспользовавшись симметричностью метрики и фигуры, будем искать только левую половину треугольника.

$$S_1 = \int_0^a \int_{u/a}^1 \sqrt{u^2 + a^2} dv du = \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2} (1 - u/a) du =$$

$$= \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2} du - \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2} u / adu.$$

Сделав замену $u = a \operatorname{sh} t$, возьмем интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \int a^2 \operatorname{ch} t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \operatorname{ch} 2t) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t) + C. \end{aligned}$$

Сделав обратную замену

$$t = \ln \left(u/a + \sqrt{u^2/a^2 + 1} \right),$$

получим

$$I = \frac{a^2}{2} \left(\ln \left(u/a + \sqrt{u^2/a^2 + 1} \right) + \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{a^2} \right) + C.$$

Соответствующий определенный интеграл в S_1 равен

$$\frac{a^2}{2} \left(\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{a^2\sqrt{2}}{a^2} \right).$$

Вычислим теперь интеграл

$$\int \sqrt{u^2 + a^2} u / adu = \frac{1}{2a} \int \sqrt{u^2 + a^2} d(u^2 + a^2) = \frac{(u^2 + a^2)\sqrt{u^2 + a^2}}{3a} + C.$$

Соответствующий определенный интеграл в S_1 равен

$$\frac{2a^2\sqrt{2}a}{3a} - \frac{a^3}{3a}.$$

Отсюда

$$S_1 = \frac{a^2}{2} \left(\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \right).$$

Окончательно получим, что

$$S = a^2 \left(\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

4. Дан параболоид вращения (рис. 6.3)

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2/2. \end{cases}$$

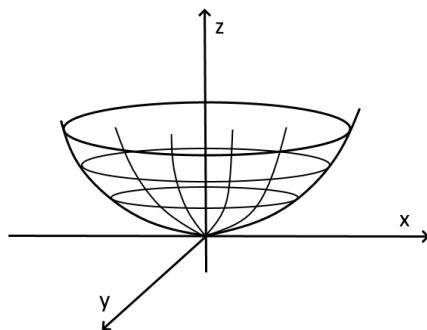


Рис. 6.3. Параболоид вращения

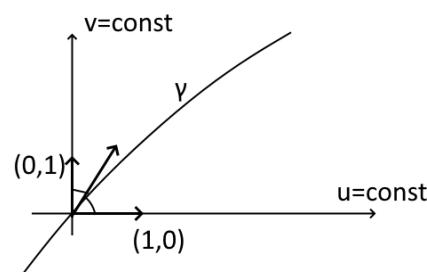


Рис. 6.4. Постановка задачи 4

Найти уравнения линий, которые делят пополам углы между координатными линиями.

Всего два семейства линий (по направлениям). Будем искать линии первого семейства. Переформулируем задачу понятным языком (рис. 6.4). Нужно, чтобы были равны углы между вектором касательной к кривой линии, и координатные вектора. Углы будут равны, когда

$$\frac{\langle v_1, \dot{\gamma} \rangle}{\|v_1\|} = \frac{\langle v_2, \dot{\gamma} \rangle}{\|v_2\|}.$$

Для того, чтобы решить уравнение, надо знать, как считается скалярное произведение на поверхности. На самом деле, для этого нужно найти индуцированную метрику.

$$\begin{aligned} \partial u &= (\cos v, \sin v, u), \\ \partial v &= (-u \sin v, u \cos v, 0), \end{aligned}$$

откуда квадратичная форма

$$\begin{pmatrix} 1+u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix},$$

а значит, метрика имеет вид

$$ds^2 = (1+u^2)du^2 + u^2dv^2.$$

Зададим на искомой кривой γ параметризацию $v(u)$, то есть

$$u = t, \quad v = v(t).$$

Тогда касательный вектор

$$\dot{\gamma} = (1, v_t).$$

Вдоль кривой квадратичная форма

$$G_\gamma = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение

$$(1, 0) \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_t \end{pmatrix} = 1+t^2$$

а

$$\|v_1\| = \sqrt{1+t^2}.$$

Для вектора v_2 скалярное произведение

$$(0, 1) \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_t \end{pmatrix} = t^2 v_t,$$

$$\|v_2\| = t.$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} &= \frac{t^2 v_t}{t}, \\ \sqrt{1+t^2} &= t v_t, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}, \\ v &= \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dt = \int \frac{1+t^2}{t^2} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену $x = \sqrt{1+t^2}$. Тогда

$$dx = \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}},$$

и

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx = x + \frac{dx}{x^2 - 1} + C_1 = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \\ &= \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+t^2} - 1}{\sqrt{1+t^2} + 1} \right| = \sqrt{1+t^2} + \ln \frac{\sqrt{1+t^2} - 1}{t} + C. \end{aligned}$$

Итак, полный ответ

$$v(t) = \pm \left(\sqrt{1+u^2} + \ln \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{u} + C \right),$$

причем нужный нам (рис. 6.4) будет со знаком «-».

Изометрия

Предположим, даны метрики или поверхности заданы абстрактно. Если существует преобразование, переводящее одну поверхность в другую так, чтобы расстояния между точками сохранялись, говорят, что поверхности *изометричны*.¹⁴

Решим несколько задач.

Рассмотрим плоскую кривую $\rho(t)$, произвольный вектор \vec{e} и поверхность

$$\vec{r}(t, v) = \vec{\rho}(t) + v\vec{e}.$$

Такая поверхность называется *цилиндрической*.

Докажем, что, если взять кусочек из поверхности, какая бы $\rho(t)$ ни была, его всегда можно положить на эту плоскость (рис. 6.5) 6.5).¹⁵

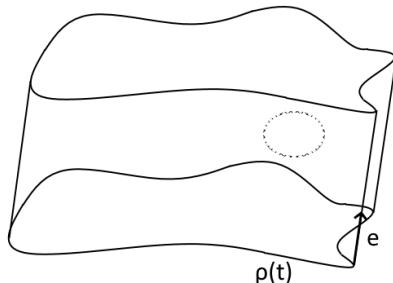


Рис. 6.5. Коническая поверхность

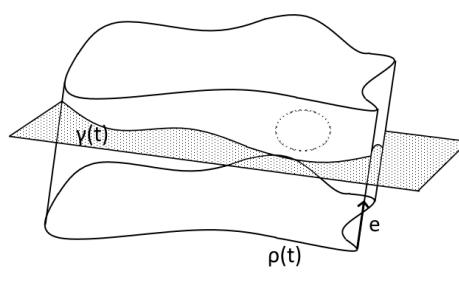


Рис. 6.6. Сечения перпендикулярными к \vec{e} поверхностями

Вычислим

$$\vec{\partial}_t = \rho', \quad \vec{\partial}_v = \vec{e}.$$

Матрица метрики имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (\rho', \rho') & (\rho', \vec{e}) \\ (\rho', \vec{e}) & (\vec{e}, \vec{e}) \end{pmatrix}.$$

Если взять вектор e единичной длины и выберем натуральную параметризацию ρ , получим

$$(\rho', \rho') = (e, e) = 1,$$

но оставшиеся два значения остаются неизвестными.

Поступим по-другому. Пусть длина \vec{e} равна 1. Рассмотрим сечение цилиндра плоскостями α , перпендикулярными \vec{e} (рис. 6.6). Выберем для кривых $\gamma(t)$ на пересечении плоскости и цилиндра натуральную параметризацию,

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1.$$

¹⁴ То есть, несмотря на громоздкость формул, возможно подобрать (может быть, локально) координаты так, что метрика перепишется в другом виде.

¹⁵ То есть что локально поверхность изометрична плоскости.

В этом случае цилиндрическую поверхность можно записать как

$$r(t, v) = \gamma(t) + v\vec{e}.$$

Тогда

$$\langle \dot{\gamma}, e \rangle = 0,$$

и метрика примет вид

$$ds^2 = dt^2 + dv^2.$$

Итак, получили свойство локальной изометричности цилиндра плоскости.

Докажем аналогичный факт для конической поверхности. Возьмем точку (для упрощения пусть это будет начало координат O), кривую $\rho(t)$ и каждую точку кривой соединим с началом координат. Запишем параметризацию такой поверхности:

$$\vec{r}(t, v) = v\vec{\rho}(t).$$

Тогда

$$\partial_t = v\rho', \quad \partial_v = \rho,$$

а их скалярные произведения получаются неудобными для вычислений.

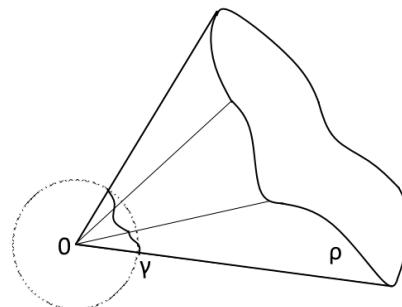


Рис. 6.7. Цилиндрическая поверхность

Поступим следующим образом. Рассмотрим единичную сферу с центром в точке O (рис. 6.7). Она высечет на конической поверхности некоторую кривую $\gamma(t)$.¹⁶ Заметим, что

$$|\gamma(t)| = 1.$$

Тогда параметризация примет вид

$$\vec{r}(t, v) = v\vec{\gamma}(t).$$

Скалярные произведения

$$\langle \partial_t, \partial_t \rangle = v^2 \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = v^2,$$

$$\langle \partial_t, \partial_v \rangle = v \langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle,$$

¹⁶Будем считать $\gamma(t)$ параметризованной натурально.

$$\langle \partial_v, \partial_v \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle = 1.$$

Продифференцировав

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = 1,$$

получим, что

$$2\langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle = 0.$$

Таким образом, получаем, что в такой параметризации

$$ds^2 = v^2 dt + dv^2.$$

Заметим, что если на плоскости с евклидовой метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

перейти к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

и метрика примет вид

$$ds^2 = (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi)^2 = dr^2 + \varphi^2 d\varphi^2.$$

Вернемся к задаче. Итак, можно считать, что коническая поверхность локально плоская.

В качестве последнего упражнения покажем изометричность *катеноида* и *геликоида*. Параметризация катеноида имеет вид

$$\begin{aligned} r &= (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u), \\ \vec{\partial}_u &= (\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, 1), \\ \vec{\partial}_v &= (-\operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, 0), \end{aligned}$$

и метрика

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 u du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2.$$

У геликоида

$$\begin{aligned} r &= (\tilde{u} \cos \tilde{v}, \tilde{u} \sin \tilde{v}, \tilde{v}), \\ \vec{\partial}_{\tilde{u}} &= (\cos \tilde{v}, \sin \tilde{v}, 0), \\ \vec{\partial}_{\tilde{v}} &= (-\tilde{u} \sin \tilde{v}, \tilde{u} \cos \tilde{v}, 1), \\ ds^2 &= d\tilde{u}^2 + (\tilde{u}^2 + 1) d\tilde{v}^2. \end{aligned}$$

Положим

$$\tilde{u} = \operatorname{sh} u, \quad \tilde{v} = v.$$

Тогда

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 u du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2,$$

то есть катеноид и геликоид локально изометричны.

Семинар 7

Неевклидовы геометрии

Из курса школьной геометрии нам всем известен постулат Евклида, говорящий, что через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Заменой этого постулата, например, могло бы быть утверждение, что через такую точку можно провести как минимум две разных прямых, параллельных данных, или что через точку вне прямой нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной (т. е. что параллельных прямых не существует).

Геометрия без параллельных прямых

Возьмем двумерную сферу S^2 единичного радиуса

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

в трехмерном евклидовом пространстве с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Введем сферические координаты

$$\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \psi, \\ y = \sin \varphi \sin \psi, \\ z = \cos \varphi, \end{cases}$$

тогда координаты касательных векторов равны

$$r_\varphi = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, -\sin \varphi),$$

$$r_\psi = (-\sin \varphi \sin \psi, \sin \varphi \cos \psi, 0),$$

и индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2 = d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\psi^2.$$

Обсудим, как будут выглядеть прямые¹⁷ в этой геометрии. Возьмем на сфере точки $A(t_1)$ и $B(t_2)$, причем предположим, что они лежат на одном меридиане (в противном случае сферу можно повернуть). Покажем, что линия с минимальной длиной – сам меридиан.

Предположим обратное. Пусть линия с минимальной длиной – некоторая γ , заданная параметризованная $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Найдем ее длину.

$$\dot{\gamma} = (\dot{\varphi}, \dot{\psi}),$$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\psi}^2.$$

¹⁷Линии кратчайшей длины.

Оценим длину γ :

$$|\gamma| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dot\varphi^2 + \sin^2 \varphi \dot{\psi}^2} dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi} dt = \varphi(t_2) - \varphi(t_1)$$

в предположении, что φ возрастает от t_1 к t_2 . Физический смысл угла φ – угол между осью z и радиус-вектором в точке. Таким образом, вышеполученная оценка означает, что длина γ всегда будет не меньше, чем разность значений таких углов, то есть длина меридиана.

Заметим, что минимальная длина достигается, если $\dot{\psi} = 0$.

Прямые в данной геометрии выглядят, как линии сечения сферы центральными плоскостями. Любые две таких линии пересекаются в двух точках. Отсюда следует, что параллельных прямых в данной геометрии нет.

Геометрия с двумя параллельными прямыми

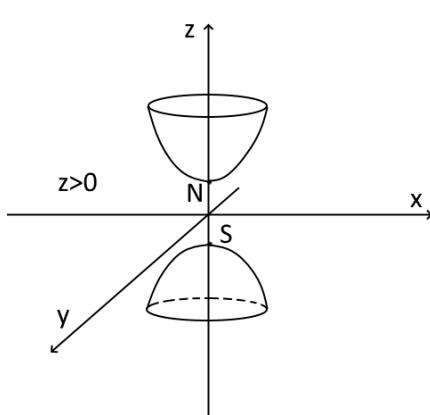


Рис. 7.1. Гиперболоид

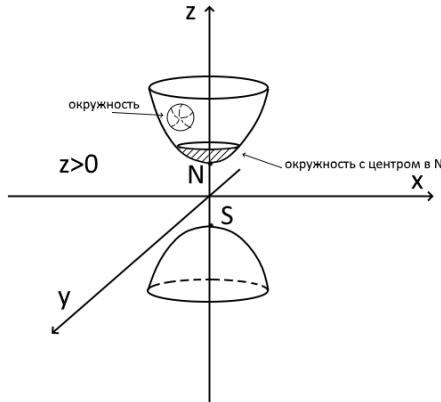


Рис. 7.2. Окружности на гиперболоиде

Будем рассматривать гиперболоид (рис. 7.1)

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

метрику

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 \quad (23)$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем параметризацию верхней половины гиперболоида

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} \chi \cos \psi, \\ y = \operatorname{sh} \chi \sin \psi, \\ z = \operatorname{ch} \chi. \end{cases}$$

Тогда

$$r_\chi = (\operatorname{ch} \chi \cos \psi, \operatorname{ch} \chi \sin \psi, \operatorname{sh} \chi),$$

$$r_\psi = (-\operatorname{sh} \chi \sin \psi, \operatorname{sh} \chi \cos \psi, 0),$$

$$\langle r_\chi, r_\chi \rangle = \operatorname{ch}^2 \chi - \operatorname{sh}^2 \chi = 1,$$

$$\langle r_\chi, r_\psi \rangle = 0,$$

$$\langle r_\psi, r_\psi \rangle = \operatorname{sh}^2 \chi$$

и индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\psi^2.$$

Хотим показать, что минимальное расстояние между точками получается, если идти вдоль меридиана.

Предположим, что это не так. Тогда существует кривая $\gamma: \chi(t), \psi(t), \dot{\gamma} = (\dot{\chi}, \dot{\psi})$,

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \dot{\chi}^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \dot{\psi}^2.$$

Ее длина

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\chi}^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \dot{\psi}^2} \geq \int_{t_1}^{t_2} \dot{\chi} dt = |\chi(t_2) - \chi(t_1)|,$$

что достигается на меридиане, т.е. при $\psi = \operatorname{const}$.

Докажем следующее **утверждение**: прямые в данной геометрии – это центральные сечения.

Найдем такое преобразование, которое бы переводило точку A линии AB в северный полюс $(0, 0, 1)$. Тогда точки A и B окажутся на одном меридиане.

Рассмотрим гиперболический поворот с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ 0 & \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix}.$$

Проверим, что такая матрица сохраняет метрику (23). Вычислим

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ 0 & \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ 0 & \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix}^T = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u \\ 0 & \operatorname{sh} u & -\operatorname{ch} u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ 0 & \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Применим теперь матрицу поворота на $-\chi_0$ к точке A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \chi_0 & -\operatorname{sh} \chi_0 \\ 0 & -\operatorname{sh} \chi_0 & \operatorname{ch} \chi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sh} \chi_0 \\ \operatorname{ch} \chi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача Пусть дана окружность с центром в точке N и радиусом ρ (рис. 7.2). Найти ее длину и площадь ограниченного ей круга.

Введем параметризацию. Вдоль радиуса окружности $\chi \in [0, \chi_0]$, $\varphi = \text{const} \psi_0$. Положим

$$\chi = t, \quad \psi = \psi_0.$$

Тогда

$$\dot{\gamma} = (1, 0), \quad \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1,$$

$$\rho = \int_0^{\psi_0} dt = \psi_0.$$

Найдем теперь длину окружности. Положим

$$\chi = \rho, \quad \psi = t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\dot{\gamma} = (0, 1),$$

длина окружности равна

$$L = \int_0^{2\pi} \rho dt = 2\pi \rho.$$

И, наконец, площадь

$$S = \int_{\Omega} \sqrt{\det G} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \rho d\chi d\psi = 2\pi \rho (\sinh \rho - 1) = 4\pi \rho \sinh^2 \frac{\rho}{2}.$$

Модель Пуанкаре

Продолжаем работу с гиперболоидом. Напомним, что прямые – центральные сечения. Хотим от модели гиперболоида перейти к какой-нибудь плоской модели, с которой будет удобно работать. Рассмотрим стереографическую проекцию верхней половины гиперболоида на плоскость xOy , где центр этой проекции – южный полюс S (рис. 7.3).

Справедливо следующее соотношение:

$$\frac{u}{x} = \frac{1}{z+1}, \quad \frac{v}{y} = \frac{1}{z+1}.$$

Подставим $x = u(z+1)$ и $y = v(z+1)$ в уравнение гиперболоида

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

Получим

$$(u^2 + v^2)(z+1)^2 - z^2 = -1,$$

$$z^2(u^2 + v^2 - 1) + 2z(u^2 + v^2) + (u^2 + v^2 + 1) = 0.$$

Заметим, что $u^2 + v^2 > 1$, иначе линия не будет пересекать гиперболоид. Проекция – внутренность единичного круга.

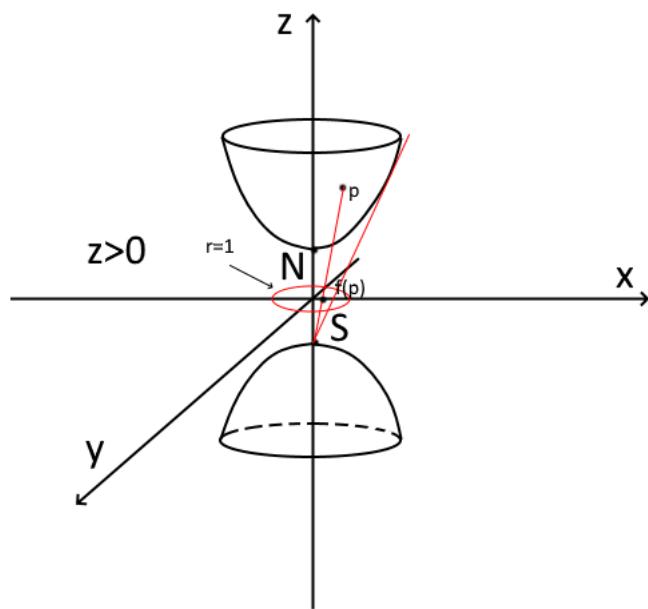


Рис. 7.3. Проекции точек гиперболоида

Вычислим дискриминант

$$D = (u^2 + v^2)^2 - (u^2 + v^2 - 1)(u^2 + v^2 + 1) = 1,$$

ТОГДА

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-(u^2 + v^2) + 1}{u^2 + v^2 - 1} = -1 \\ z_2 &= \frac{-(u^2 + v^2) - 1}{u^2 + v^2 - 1} = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 - u^2 - v^2}. \end{aligned}$$

Корень z_1 , очевидно, не подходит.

$$z + 1 = \frac{2}{1 - u^2 - v^2}.$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \\ y = \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 - u^2 - v^2}. \end{cases}$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{2(1 - u^2 - v^2) - (2u)2u}{(1 - u^2 - v^2)^2} = \frac{2(1 + u^2 - v^2)}{1 - u^2 - v^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{2u2v}{(1 - u^2 - v^2)^2} = \frac{4uv}{(1 - u^2 - v^2)}, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{2u(1 - u^2 - v^2) + 2u(u^2 + v^2 - 1)}{(1 - u^2 - v^2)} = \frac{4u}{(1 - u^2 - v^2)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$r_u = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2} (1+u^2-v^2, 2uv, 2u).$$

Так как формулы для координат практически симметричны для u и v ,

$$r_v = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2} (2uv, 1+u^2-v^2, 2v).$$

Вычислим скалярные произведения

$$\begin{aligned} \langle r_u, r_u \rangle &= \frac{4}{(1-u^2-v^2)^4} ((1+u^2-v^2)^2 + 4u^2v^2 - 4u^2) = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^4} (1+u^4+v^4-2u^2+2u^2v^2-4u^2) \\ \langle r_u, r_v \rangle &= \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2} (2uv(1+u^2-v^2) + 2uv(1-u^2-v^2) - 4uv) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, метрика

$$ds^2 = \frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2} = f(u,v)(du^2+dv^2).$$

Такой вид метрик называется *комфорно-евклидовым*. Такие метрики хороши, например, тем, что значение угла между двумя кривыми в таких метриках будет совпадать со значением в евклидовой.

Вернемся к вопросу о прямых. Найдем, во что перешли центральные сечения. Уравнение секущей плоскости имеет вид

$$-ax+by+cz=0,$$

или, в координатах u, v

$$2au+2bv+c(u^2+v^2+1)=0.$$

Рассмотрим два случая.

1. $c=0$, то есть уравнение

$$au+bv=0.$$

Это означает, что нормаль к плоскости лежит в xOy . Результатом пересечения такой плоскости с гиперболоидом будет меридиан, которые переходят в диаметры в единичном круге (рис. 7.4).

2. $c \neq 0$. Тогда уравнение имеет вид

$$u^2 + \frac{2a}{c}u + v^2 + \frac{2b}{c}v = -c,$$

или, по-другому,

$$(u+a/c)^2 + (v+b/c)^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}$$

— окружность с центром в точке $(u_0, v_0) = (-a/c, -b/c)$ (рис. 7.5).¹⁸

В завершение семинара остановимся на сумме углов треугольника Лобачевского в модели Пуанкаре (рис. 7.6). По построению видно, что она меньше 180° .

¹⁸Заметим, что $a^2+b^2 > c^2$, иначе плоскость пройдет по касательной к гиперболоиду.

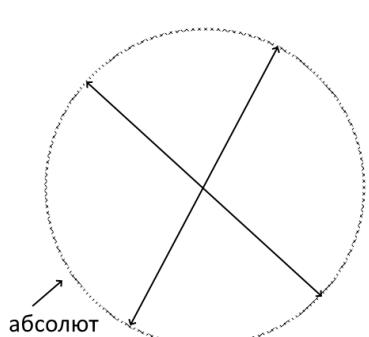


Рис. 7.4. Проекции при $c = 0$

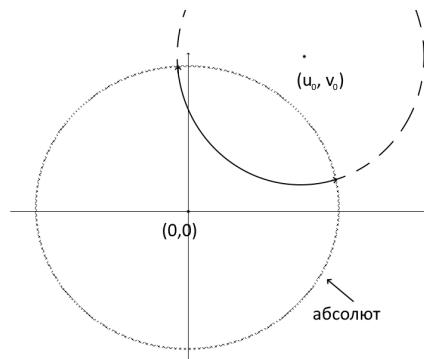


Рис. 7.5. Проекции при $c \neq 0$

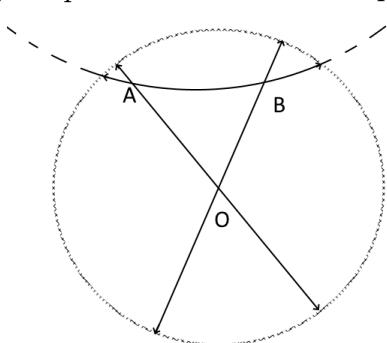


Рис. 7.6. Треугольник Лобачевского

Семинар 8

Модель Пуанкаре (повторение)

В прошлый раз работали в пространстве с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2,$$

где рассматривали геометрию на верхней половине гиперболоида

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

Показали, что прямые – меридианы или центральные сечения. Кроме того, рассмотрели стереографическую проекцию гиперболоида на xOy из южного плюса S гиперболоида. Полученная проекция будет единичным кругом, который называется *абсолютом* (рис. 7.4, 7.5).

Такая модель называется моделью Пуанкаре. В прошлый раз выяснили, что метрика такой модели имеет вид

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}. \quad (24)$$

Модель верхней полуплоскости

Перепишем (24) в комплексных координатах

$$z = u + iv, \quad \bar{z} = u - iv,$$

тогда

$$dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv,$$

$$dzd\bar{z} = du^2 + dv^2.$$

Тогда

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}.$$

Перейдем теперь из сферы в верхнюю полуплоскость с помощью линейного преобразования

$$w = \frac{z + i}{iz + 1}. \quad (25)$$

Прямые в модели Пуанкаре перешли либо в прямые, перпендикулярные абсолюту, либо в дуги окружностей с центром на абсолюте (рис. 8.1).

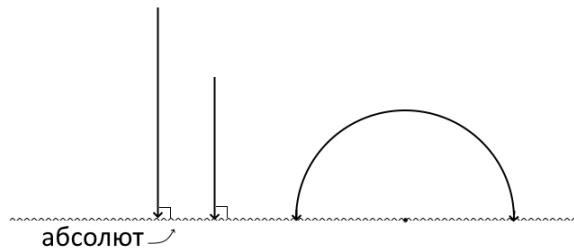


Рис. 8.1. Прямые после преобразования

Осталось понять, как в такой модели будет записана метрика. Выразим из (25) w :

$$wzi + w = z + i,$$

откуда

$$z = \frac{w - i}{1 - wi},$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{w} + i}{1 + \bar{w}i}.$$

Тогда

$$dz = \frac{(1 - wi)dw - (d(-wi))(w - i)}{(1 - wi)^2} = \frac{(1 - wi)dw + i(w - i)dw}{(1 - wi)^2} = \frac{2}{(1 - wi)^2} dw,$$

$$d\bar{z} = \frac{(1 + \bar{w}i)d\bar{w} - i(\bar{w} + i)d\bar{w}}{(1 + \bar{w}i)^2} = \frac{2d\bar{w}}{(1 + \bar{w}i)^2}.$$

Тогда

$$dzd\bar{z} = \frac{16dwd\bar{w}}{(1-wi)^2(1+wi)^2},$$

$$1-z\bar{z} = 1 - \frac{(w-i)(\bar{w}+i)}{(1-wi)(1+\bar{w}i)} = \frac{2i(\bar{w}-\bar{w})}{(1-wi)(1+\bar{w}i)},$$

и метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{16dwd\bar{w}}{4i^2(w-\bar{w})^2} = \frac{-4dwd\bar{w}}{(w-\bar{w})^2}.$$

Заметим, что, если

$$w = x + iy, \quad \bar{w} = x - iy,$$

то

$$w - \bar{w} = 2iy, \quad (w - \bar{w})^2 = -4y^2.$$

Кроме того,

$$dwd\bar{w} = dx^2 + dy^2.$$

Тогда

$$ds^2 = \frac{dwd\bar{w}}{(\text{Im}w)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Итак, работаем с моделью в верхней полуплоскости. Метрика модели¹⁹

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dwd\bar{w}}{(\text{Im}w)^2} = \frac{-4dwd\bar{w}}{(w-\bar{w})^2}.$$

Движение геометрии Лобачевского

Будем рассматривать преобразования, которые сохраняют метрику Лобачевского. Хотелось бы рассматривать, во-первых, преобразования вида

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

и, во-вторых, преобразования вида²⁰

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc < 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

Задача Найти преобразование, сохраняющие метрику, которое приводит прямую

$$x^2 + y^2 = 1$$

в прямую $x = 0$.

¹⁹Заметим, что $y \neq 0$, так как точки не лежат на абсолюте по определению, то есть метрика корректно определена везде.

²⁰Можно показать, что преобразования первого типа сохраняют ориентацию, а преобразования второго типа – меняют.

Таких преобразований существует много. Потребуем дополнительно, чтобы, например, точка $(-1, 0)$ переходила в $(0, +\infty)$, а точка $(1, 0)$ в $(0, 0)$. Линейное преобразование имеет вид

$$f(z) = \frac{az + b}{z + 1}.$$

Подставим точку $(1, 0)$. Получим условие

$$\frac{a + b}{2} = 0.$$

И, наконец, найдем, что преобразование

$$f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Задача Найти преобразование, которое приводит прямую

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4$$

в прямую $x = 3$, а точку $(1, 2)$ в $(3, 2)$.

Будем искать преобразование, которое точку 3 оставляет на месте, а -1 преобразует в $(3, \infty)$. Линейное преобразование будет иметь вид

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{z + 1}.$$

По условию, $1 + 2i$ должна перейти в $3 + 2i$. Запишем это как

$$3 + 2i = \frac{a(1 + 2i) + b}{1 + 2i + 1},$$

$$2 + 10i = (a + b) + 2ai,$$

откуда $a = 5$, $b = -3$.

Преобразование имеет вид

$$f(z) = \frac{5z - 3}{z + 1}.$$

Задача Найти преобразование симметрии относительно прямой

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

Будем искать преобразование в виде

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Так как точка 1 должна перейти в ∞ ,

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{\bar{z} - 1}.$$

Точка 3 должна остаться на месте, то есть

$$\frac{3a + b}{2} = 3.$$

Потребуем, чтобы точка $1 + 2i$ переходила в $1 + 2i$. Тогда

$$\frac{(1 - 2i)a + b}{1 - 2i - 1} = 1 + 2i,$$

откуда $a = 1$, $b = 3$. Преобразование будет иметь вид

$$f(z) = \frac{\bar{z} + 3}{\bar{z} - 1}.$$

Расстояние между точками

В общем случае, чтобы в рассматриваемой модели найти расстояние между двумя точками, нужно подобрать такую окружность (т.е. прямую для модели), которая бы проходила через обе этих точки, потом найти касательный вектор и посчитать расстояние. Процедура получается довольно громоздкой.

Выведем формулу, которая поможет находить расстояние между точками.

$$\operatorname{ch} d = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}, \quad (26)$$

где d – расстояние между точками.

Пусть две точки лежат на какой-то прямой. Всегда существует преобразование, переводящее эту прямую в прямую $x = \operatorname{const}$.

Обсудим, меняет ли линейное преобразование правую часть (26). По сути, преобразование

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

является композицией преобразований

$$z \rightarrow az, \quad (27)$$

$$z \rightarrow z + b, \quad (28)$$

$$z \rightarrow -1/z. \quad (29)$$

Покажем, что относительно таких преобразований правая часть формулы не меняется. Действительно, для (27)

$$z \rightarrow az, \quad w \rightarrow aw.$$

Тогда

$$\frac{a^2|z - w|}{2\operatorname{Im}(az)\operatorname{Im}(aw)} = \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

Утверждение для (28) очевидно. Проверим утверждение для (29). Для знаменателя

$$\left| \frac{-1}{z} + \frac{1}{w} \right|^2 = \frac{|z-w|^2}{|z|^2|w|^2}.$$

Для числителя

$$2\operatorname{Im}(-1/z)\operatorname{Im}(-1/w) = 2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w/(|z|^2|w|^2),$$

так как для $z = x + iy$

$$\frac{-1}{z} = -\frac{1}{x+iy} = \frac{-(x-iy)}{x^2+y^2}.$$

Итак, так как преобразования не меняют (26), достаточно проверить формулу для случая, когда точки лежат на прямой $x = \operatorname{const}$. Запараметризуем такую прямую как

$$\begin{cases} x = c, \\ y = t, \end{cases}$$

и пусть точки имеют координаты (c, t_1) и (c, t_2) соответственно. Касательный вектор прямой будет иметь координаты $(0, 1)$, а длина²¹

$$d = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t} = \ln(t_2) - \ln(t_1) = \ln \frac{t_2}{t_1}.$$

Тогда

$$\operatorname{ch} d = \frac{e^{\ln(t_2/t_1)} + e^{-\ln(t_2/t_1)}}{2} = \frac{t_2/t_1 - t_1/t_2}{2} = \operatorname{fract}_2^2 - t_1^2 t_2.$$

Пусть

$$z = c + it_1, \quad w = c + it_2.$$

Тогда правая часть формулы (26)

$$1 + \frac{|it_1 - it_2|^2}{2t_1 t_2} = 1 + \frac{(t_1 - t_2)^2}{2t_1 t_2} = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_1 t_2}.$$

Таким образом, убедились в справедливости формулы (26).

Пусть теперь дана точка w_0 . Хотим найти уравнение, описывающее все точки, лежащие на расстоянии ρ от w_0 (то есть окружность). Пусть $w_0 = x_0 + iy_0$, а искомые точки $z = x + iy$. Воспользуемся формулой (26):

$$\operatorname{ch} \rho = 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2yy_0},$$

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 + 2yy_0 - 2y_0y \operatorname{ch} \rho &= 0, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0 \operatorname{ch} \rho)^2 &= y_0^2 \operatorname{ch}^2 \rho - y_0, \end{aligned}$$

отуда получаем

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \operatorname{ch} \rho)^2 = y_0^2 \operatorname{sh}^2 \rho.$$

Получается, множество искомых точек будет выглядеть как евклидова окружность.

²¹Здесь учли, что метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

а под интегралом стоит $\sqrt{\det G}$.

Аналог теоремы Пифагора

Пусть в нашей модели дан прямоугольный треугольник. Тогда

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b, \quad (30)$$

$$\operatorname{tha} = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha. \quad (31)$$

Прежде, чем заняться формулами, расположим треугольник удобным способом (рис. 8.2). Это возможно, так как преобразования $f(z)$ переводят прямые и дуги в прямые и дуги.

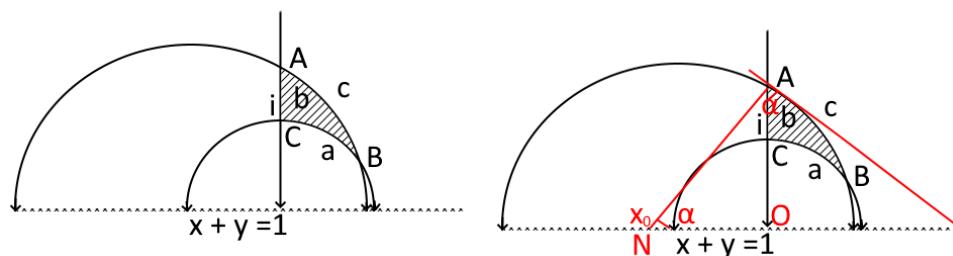


Рис. 8.2. Прямоугольный треугольник

Рис. 8.3. Нахождение угла α

Воспользовавшись (26), вычислим

$$\operatorname{ch} a = 1 + \frac{\cos^2 \varphi + (1 - \sin \varphi)^2}{2 \sin \varphi} = \frac{2}{2 \sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi},$$

$$\operatorname{ch} b = 1 + \frac{(h-1)^2}{2h} = \frac{h^2+1}{2h},$$

$$\operatorname{ch} c = 1 + \frac{\cos^2 \varphi + (h - \sin \varphi)^2}{2h \sin \varphi} = \frac{h^2+1}{2h} \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Формула (30) доказана. Теперь,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$\operatorname{sh}^2 b = \operatorname{ch}^2 b - 1 = \frac{(h^2+1)^2}{4h^2} - 1 = \frac{h^4 + 2h^2 + 1 - 4h^2}{4h^2} = \frac{(h^2-1)^2}{4h^2}.$$

Значит,

$$\operatorname{sh} b = \frac{h^2 - 1}{2h}.$$

$$\operatorname{sh}^2 a = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

откуда

$$\operatorname{tha} = \cos \varphi.$$

Обсудим, как разобраться с углом α (рис. 8.3). Если в точке A провести касательную к окружности, она пройдет как раз под углом α . По построению $\angle ANO = \alpha$.

$$(NA)^2 = x_0^2 + h^2 = (x_0 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = (NB)^2.$$

$$x_0^2 + h^2 = x_0^2 - 2x_0 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi,$$

$$2x_0 \cos \varphi = 1 - h^2,$$

$$x_0 = \frac{1 - h^2}{2 \cos \varphi}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{|x_0|} = \frac{2h \cos \varphi}{h^2 - 1}.$$

Отсюда легко можно показать (31).

Аналог теоремы синусов

Для данной задачи нам удобнее будет пользоваться моделью для гиперболоида. Расположим на нем треугольник так, чтобы одна вершина лежала в вершине гиперболоида, сторона на меридиане, а остальное произвольным образом.

На прошлом занятии говорили о преобразованиях, сохраняющих метрику в такой задаче: поворот

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и гиперболический поворот

$$H(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \operatorname{ch} \chi & \operatorname{sh} \chi \\ 0 & \operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \xi \end{pmatrix}.$$

Сделаем шесть преобразований, приведя треугольник в себя. Выполним последовательно преобразования

$$H(-c) \circ R(\pi - \beta) \circ H(-a) \circ R(\pi - \gamma) \circ H(-b) \circ R(\pi - \alpha) = Id.$$

Перемножать 6 матриц неудобно, поэтому выполним обратные преобразования и получим

$$R(\pi - \gamma) \circ H(-b) \circ R(\pi - \alpha) = H(a) \circ R(\beta - \pi) \circ H(c).$$

Начнем с преобразования $H(a) \circ R(\beta - \pi) \circ H(c)$. Его результатом будет матрица

$$\begin{pmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta \operatorname{ch} c & -\sin \beta \operatorname{sh} c \\ \sin \beta \operatorname{ch} a & -\operatorname{ch} a \cos \beta \operatorname{ch} c & -\operatorname{sh} c \operatorname{ch} a \cos \beta + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} c \\ \operatorname{sh} a \sin \beta & -\operatorname{sh} a \cos \beta \operatorname{ch} c + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} c & -\operatorname{sh} c \operatorname{sh} a \cos \beta + \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c \end{pmatrix}.$$

Результатом $R(\pi - \gamma) \circ H(-b) \circ R(\pi - \alpha)$ будет матрица

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \sin \gamma \operatorname{ch} b & -\cos \gamma \sin \alpha - \cos \alpha \sin \gamma \operatorname{ch} b & -\sin \gamma \operatorname{sh} b \\ \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma \operatorname{ch} b & -\sin \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \cos \gamma \operatorname{ch} b & \cos \gamma \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh} b \sin \alpha & \operatorname{sh} b \cos \alpha & \operatorname{ch} b \end{pmatrix}.$$

Приравняем первые элементы данных матриц. Получим

$$\cos \gamma \cos \alpha + \cos \beta = \sin \alpha \sin \gamma \operatorname{ch} b.$$

То есть, если знаем углы, можем определить сторону. Отсюда следует, что два треугольника геометрии Лобачевского равны, если у них равны углы. Приравняв

$$\operatorname{ch} b = -\operatorname{sh} c \operatorname{sh} a \cos \beta + \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c,$$

получим, что по трем сторонам можем найти угол. Рассмотрим еще равенство элементов

$$\sin \beta \operatorname{sh} c = \sin \gamma \operatorname{sh} b.$$

С учетом симметрии, можем записать

$$\frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma} = \frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha}.$$

Площадь треугольника

Будем рассматривать модель верхней полуплоскости. Пусть дан треугольник с углами α, β, γ . Докажем, что

$$S = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Рассмотрим сначала треугольник конкретного вида (рис. 8.4).

По стандартной схеме вычисления площади,

$$\begin{aligned} \sqrt{\det G} &= 1/y^2, \\ S &= \int_0^{\cos \beta} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_0^{\cos \beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= -\arccos(x) \Big|_0^{\cos \beta} = -\beta + \pi/2 = \pi - \pi/2 - \beta - 0. \end{aligned}$$

Для треугольника с углами α, β и 0 (рис. 8.5) площадь равна

$$S = \pi/2 - \beta + \pi/2 - \alpha = \pi - \alpha - \beta - 0.$$

Теперь вычислим площадь в общем случае. Введем дополнительные построения (рис. 8.6). Здесь угол D равен 0 , так как это дуги окружностей в одной точке. Тогда

$$S = S_{ABC} - S_{DBA} = \pi - \gamma - (\theta + \beta) - (\pi - (\pi - \alpha) - \theta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

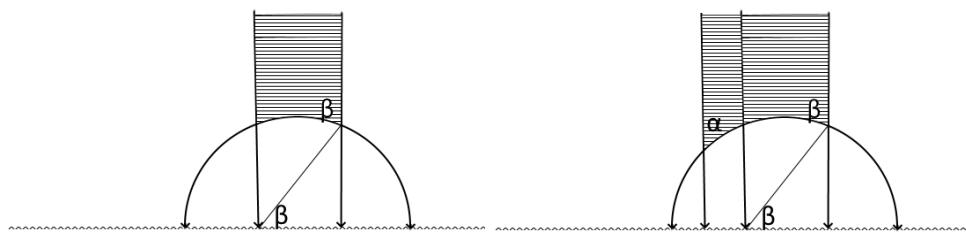


Рис. 8.4. Первый шаг. Треугольник с углами $0, \pi/2, \beta$

Рис. 8.5. Второй шаг. Треугольник с углами $0, \alpha, \beta$

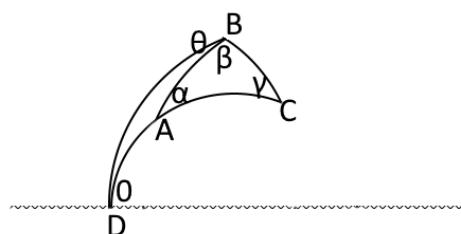


Рис. 8.6. Треугольник с дополнительным углом

Семинар 9

Определение гладкого многообразия

Ранее в курсе встречалось понятие многообразия, или топологического многообразия. Напомним, что топологическое пространство называется *топологическим многообразием*, если у каждой точки p этого пространства есть окрестность U , которая гомеоморфна B^n – открытому шару в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Отметим, что топологическое многообразие является свойством самого пространства. Гладкое многообразие, о которых речь пойдет дальше – это уже некоторая структура, введенная на данном пространстве.

Пусть дано пространство X . Так как у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная шару, все пространство можно покрыть объединением гомеоморфных \mathbb{R}^n подмножеств:

$$X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Предположим, фиксируем два таких подмножества U_{α} и U_{β} и соответствующие им гомеоморфизмы φ_{α} и φ_{β} . Пара

$$(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$$

называется *карточкой*, а множество таких пар

$$\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$$

– *атласом*. Точка p , попавшая в пересечение карт, имеет два набора координат

$(\varphi_\alpha(p)$ и $\varphi_\beta(p))$. Рассмотрим отображение²²

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \underbrace{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)}_{\subset \mathbb{R}^n}.$$

На такие отображения накладывается следующее **требование**. Для любой пары пересекающихся карт U_α и U_β отображение

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

является *гладким*, то есть если записать это отображение в координатах

$$y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n),$$

то эти функции должны быть гладкими.²³

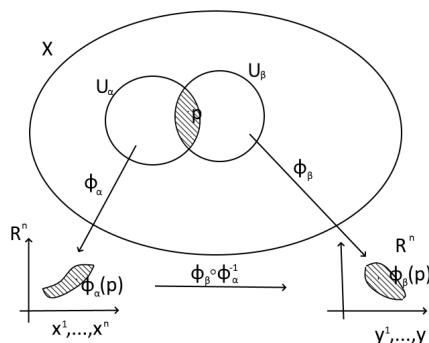


Рис. 9.1. Гладкое многообразие

Заметим, что получившаяся таким образом схема (рис. 9.1) называется *гладким многообразием размерности n*.

Примеры

1. Область в \mathbb{R}^n (все \mathbb{R}^n).
2. Двумерная сфера²⁴ S^2 , задаваемая уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Представим такую сферу в виде объединения двух карт

$$S^2 = U_1 \cup U_2.$$

²²Такие отображения часто называют *функциями склейки*.

²³То есть бесконечно дифференцируемыми.

²⁴Заметим, что двумерную сферу нельзя покрыть единственной картой. В противном случае бы получалось, что S^2 гомеоморфна \mathbb{R}^2 , что невозможно. Например, сфера, в отличие от пространства, компактна.

Возьмем точки N и S (северный и южный полюс) и положим

$$U_1 = S^2 N, \quad U_2 = S^2 S.$$

В качестве соответствующих гомеоморфизмов φ_1 и φ_2 возьмем проекции точек сферы на плоскость $x0y$ из точек N и S соответственно (рис. 9.2).

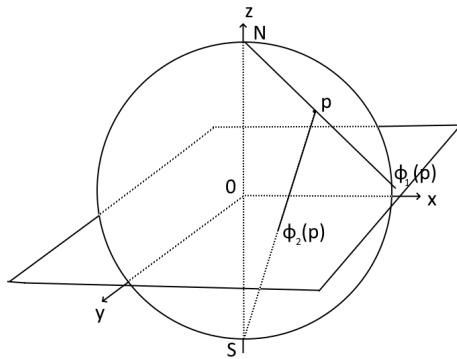


Рис. 9.2. Атлас S^2 из двух карт

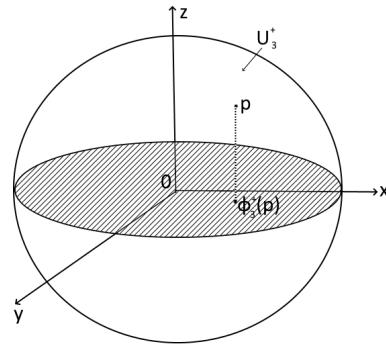


Рис. 9.3. Карта U_3^+ сферы S^2

3. Покроем сферу

$$S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

шестью картами. В качестве подмножеств возьмем полусфера, образуемые при пересечении S^2 с плоскостями координат:

$$U_3^+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\},$$

$$U_3^- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 0\},$$

$$U_2^+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\},$$

$$U_2^- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y < 0\},$$

$$U_1^+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\},$$

$$U_1^- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\}.$$

В качестве $\varphi_i^{\{+,-\}}$ возьмем проекции координат на плоскость. Так, например, $\varphi_3^+(p)$ положим равной координатам (x, y) соответствующей точки (рис. 9.3).

Нетрудно проверить, что выражения одних координат через другие задается гладкими функциями. Например, для U_3^+

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

а для U_3^-

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Данный пример является частным случаем более общей ситуации, обсуждаемой на лекциях.

Теорема 9.1. Пусть в \mathbb{R}^n подмножество M задано уравнениями

$$M = \begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \\ f_k(x^1, \dots, x^n) = 0, \end{cases} \quad k < n.$$

Если в каждой точке $p \in M$ ранг матрицы

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{pmatrix} \right|_p \quad (32)$$

равен k , то M – гладкое многообразие размерности $n - k$.

Скажем пару слов о геометрической интерпретации данной теоремы. Пусть в (34) за минор порядка k отвечают первые k столбцов. Из курса математического анализа известно, что тогда все координаты можно выразить через оставшиеся $n - k$ координат. Геометрически это значит, что проекция окрестности U точки p на координаты x_{k+1}, \dots, x_n будет взаимно однозначной (рис. 9.4). При условиях теоремы и гладкости функций f^i функции

$$x^i(x^{k+1}, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, k$$

будут гладкими функциями.

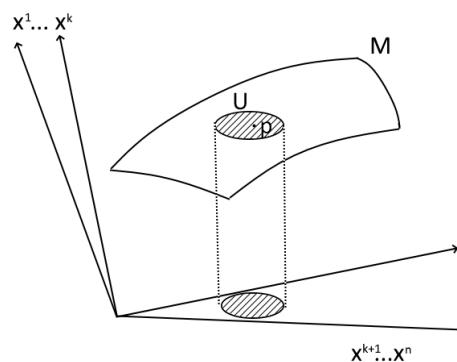


Рис. 9.4. Иллюстрация к теореме 34

Гладкие отображения на гладких многообразиях

Пусть есть гладкое многообразие M . Рассмотрим функцию:

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Рассмотрим карту U_α , содержащую точку p , и отображение φ_α в \mathbb{R}^n .

Определение 9.1. Функция f на гладком многообразии M называется *гладкой* в т. p , если для любой карты U_α , содержащей p , функция

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

– гладкая²⁵ (на $\varphi_\alpha(U_\alpha)$), то есть если запись f в координатах

$$f(x^1, \dots, x^n)$$

– гладкая функция.

Заметим, что для проверки, является ли функция на многообразии гладкой, достаточно рассмотреть какую-то одну карту. Если условие выполняется, для остальных карт оно следует автоматически. Предположим, в окрестности p есть две карты U_α и U_β и $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ является гладкой. Можно представить

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} = \underbrace{f \circ \varphi_\beta^{-1}}_{\text{гладким отображением}} \circ \underbrace{\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}}_{\text{гладким отображением}}. \quad (33)$$

Так как имеем дело с гладким многообразием, композиции в правой части (33) являются гладкими отображениями, а значит, и их композиция тоже.

Рассмотрим более общую ситуацию.

Определение 9.2. Отображение

$$F : X \rightarrow Y$$

называется *гладким отображением гладких многообразий X и Y в точке p* , если для любых карт $p \in U_\alpha$, $F(p) \in V_\beta$ отображение

$$\phi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

гладкое, то есть

$$y^i(x^1, \dots, x^n)$$

– гладкие функции.

Примеры гладких отображений

1. Пусть дана сфера S^2 , (θ, φ) , $R = 1$ – сферические координаты на ней (рис. 9.5). Рассмотрим две непрерывные функции на сфере²⁶

$$f_1 = \cos \theta, \quad f_2 = \sin \theta.$$

Проверим, будут ли они гладкими.

²⁵Здесь речь идет о гладкой функции на пространстве \mathbb{R}^n , определение же дается для гладкости функции на некотором топологическом пространстве, поэтому противоречия нет.

²⁶Заметим, что сферические координаты не будут покрывать северный и южный полюса сферы. В этих точках можем доопределить функции так, чтобы они были непрерывны.

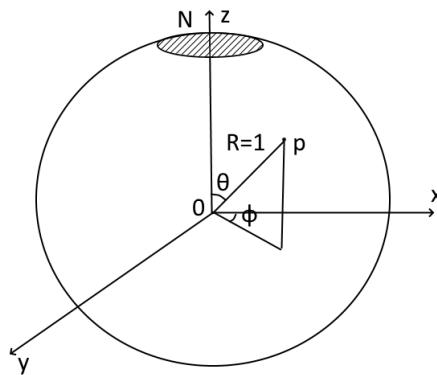


Рис. 9.5. Сфера S^2

Для этого нужно проверить две точки: северный и южный полюса. Так как сферические координаты в окрестности этих точек не действуют, необходимо выбрать другую карту.

Рассмотрим f_1 в окрестности точки N в координатах (x, y) . Заметим, что $\cos \theta$ – просто величина проекции, равной величине z , которую можно выразить из уравнения сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Таким образом, в окрестности точки N , которая в выбранной карте имеет координаты $(0, 0)$,

$$f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Можно проверить, что эта функция является гладкой в окрестности точки $(0, 0)$. Например, убедимся, что частные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

непрерывны в нуле.

Аналогичным образом проведем рассуждения для

$$f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Частные производные

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

не являются непрерывными в $(0, 0)$. Таким образом, f_2 не будет гладкой.

2. Положим $M = \mathbb{R}$ – числовую прямую,

$$U_1 = \mathbb{R}, \quad U_2 = \mathbb{R}.$$

Положим $\varphi_1(a) = a$ для любой точки a , $\varphi_2(a) = a^2$.

Замечание $(M, U_1 \cup U_2)$ не является гладким многообразием, так как

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : y \rightarrow \sqrt[3]{y}.$$

Прежде чем перейти к второму замечанию, введем следующее определение.

Определение 9.3. Отображение

$$F : X \rightarrow Y$$

гладких многообразий X и Y называется *диффеоморфизмом*, если, во-первых, F – биекция, во-вторых, F – гладкое, и, в-третьих, F^{-1} тоже гладкое.

Если для X и Y существует диффеоморфизм, то они называются *диффеоморфными*.

Замечание

$$M_1 = (M, (U_1, \varphi_1)), \quad M_2 = (M, (U_2, \varphi_2))$$

– два одномерных многообразия, они диффеоморфны, отображение

$$F : M_1 \rightarrow M_2,$$

$$F : x \rightarrow x = y(x).$$

Вторая запись имеет в виду разные координаты.

Ориентируемость

Определение 9.4. Гладкое многообразие M называется *ориентируемым*, если для него существует такой атлас²⁷ $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что якобиан функций склейки $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ положителен для любой пары пересекающихся карт U_α и U_β .

Иными словами, рассмотрим две карты U_α с соответствующими наборами координат x^1, \dots, x^n и U_β и y^1, \dots, y^n . Определение означает, что если для любых таких двух карт определитель Якоби

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} > 0.$$

Второе определение связано с понятием *переноса ориентации* для пути. Пусть есть две точки P, Q и кривая $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющая эти точки (рис. 9.5) и есть касательное пространство в точке P и касательное пространство в точке Q . Можем выбрать базис²⁸ $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

²⁷Конечно, определение гладкого многообразия уже задает атлас для него, но в этот атлас можно добавлять новые карты не противоречащим с определением гладкого многообразия образом. Именно в таком смысле имеется в виду, что атласов для гладкого многообразия может быть несколько.

²⁸Здесь положим $\bar{e}_i(0) = \bar{e}_i$.

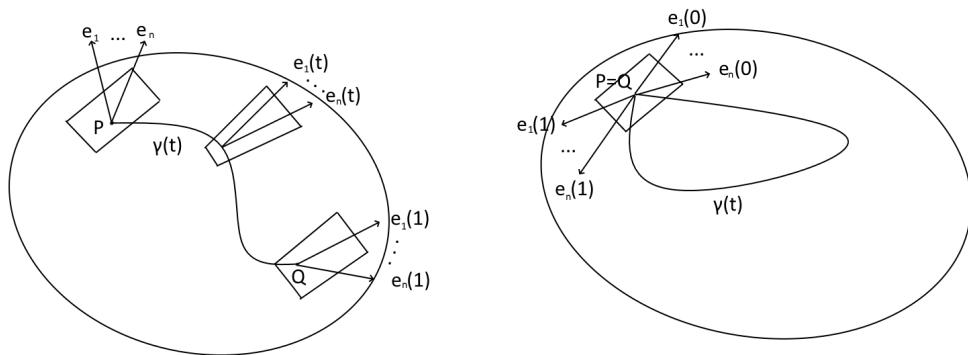


Рис. 9.6. Перенос ориентации вдоль незамкнутой кривой

Рис. 9.7. Перенос ориентации вдоль замкнутой кривой

Рассмотрим базис в касательном пространстве в точке $\gamma(t)$

$$\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_n(t),$$

причем $\bar{e}_i(t)$ непрерывно зависит от t .

Предположим, деформировали базис по-другому: в каждой точке $\gamma(t)$ базис

$$\bar{e}'_1(t), \dots, \bar{e}'_n(t),$$

причем $\bar{e}_i(0) = \bar{e}'_i(0)$. Хотим понять, что оба репера

$$\bar{e}_1(1), \dots, \bar{e}_n(1)$$

и

$$\bar{e}'_1(1), \dots, \bar{e}'_n(1)$$

задают одну и ту же ориентацию в касательном пространстве к точке Q .

Пусть $f(t)$ – функция на отрезке $[0, 1]$, равная определителю матрицы перехода от

$$\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_n(t)$$

к

$$\bar{e}'_1(t), \dots, \bar{e}'_n(t).$$

Так как в точке t реперы совпадают, $f(0) = 1$. Кроме того, $f(t) \neq 0$. Отсюда следует, что $f(1) > 0$, что и означает согласованность ориентации.

Рассмотрим теперь случай замкнутой кривой (рис. 9.7), то есть $P = Q$. Путь γ не меняет ориентацию, если результат от переноса ориентации вдоль него совпадает с исходной ориентацией.

Дадим теперь другое определение ориентируемости.²⁹

²⁹ Отметим, что с помощью нижеприведенного определения бывает удобно доказывать, что гладкое многообразие не является ориентируемым (достаточно показать, что для некоторой кривой условие не выполняется). С помощью же определения выше удобно бывает доказывать ориентируемость гладкого многообразия.

Определение 9.5. Гладкое многообразие M называется *ориентируемым*, если любой замкнутый путь γ на M не меняет ориентации.

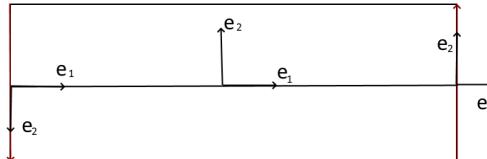


Рис. 9.8. Ориентируемость вдоль ленты Мёбиуса (развертка)

В качестве примера неориентируемого многообразия можно рассматривать *ленту Мёбиуса*. Действительно, представим ленту Мёбиуса в виде прямоугольника, на противоположных сторонах которого выбраны в противоположные стороны направленные стрелки (рис. 9.8), которые затем соединены в одном направлении. В качестве контура достаточно взять кривую, идущую вдоль ленты Мёбиуса. Выберем в качестве базиса два вектора, один из которых направлен вдоль траектории, а другой перпендикулярно ему (вектора $\bar{e}_1(0)$ и $\bar{e}_2(0)$). Тогда при прохождении полного пути вдоль прямой вектор, направленный вдоль траектории, совпадет с начальным вектором, а перпендикулярный окажется направленным в противоположную сторону.

Вернемся к теореме 9.1. В формулировку можно добавить, что при выполнении условий M будет гладким *ориентируемым* многообразием.

Теорема 9.2. Пусть в \mathbb{R}^n подмножество M задано уравнениями

$$M = \begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \\ f_k(x^1, \dots, x^n) = 0, \end{cases} \quad k < n.$$

Если в каждой точке $p \in M$ ранг матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & a_{n2} & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^n} & & \end{array} \right) \Big|_p \quad (34)$$

равен k , то M – гладкое ориентируемое многообразие размерности $n - k$.

Обсудим идею доказательства ориентируемости получившегося гладкого многообразия. Будем пользоваться определением 9.4. Для простоты рассмотрим случай $k = 1$. Уравнение

$$f(x^1, \dots, x^n) = 0$$

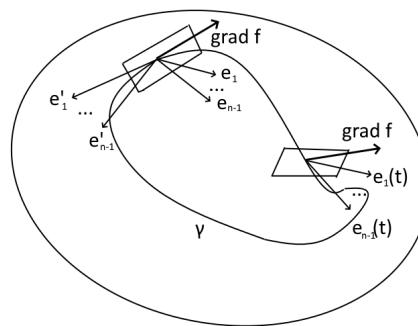


Рис. 9.9. Иллюстрация к теореме 9.2

задает множество M . Тогда условие, что ранг матрицы частных производных равен k , означает, что в каждой точке есть вектор частных производных функции, который можно обозначить $\text{grad } f$.

Рассмотрим замкнутый путь γ в M . В касательном пространстве выберем некоторый репер e_1, \dots, e_{n-1} . Тогда в каждой точке γ есть перенесенный $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$ и $\text{grad } f$, который можно рассматривать как n -ый вектор базиса (рис. 9.9). В конечной точке вектор градиента совпадет с начальным значением, а ориентация векторов e'_1, \dots, e'_{n-1} совпадет с e_1, \dots, e_{n-1} . Это следует из того, что матрица перехода будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{c|c} (*) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 01 \end{array} \right).$$

Так как \mathbb{R}^n ориентируемо, ее определитель будет > 0 , а значит, и определитель подматрицы $(*)$ будет > 0 .

Семинар 10

Примеры гладких ориентируемых многообразий

Рассмотрим несколько примеров.

1. Области в \mathbb{R}^n , S^n – гладкие ориентируемые многообразия (случай сферы следует из теоремы 9.2).

2. $\mathbb{R}P^n$ – n -мерное проективное пространство, определяемое как множество наборов в \mathbb{R}^{n+1} с точностью до пропорциональности

$$\{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) | \exists i, x_i \neq 0\} = \mathbb{R}P^n.$$

Зададим для этого пространства атлас. Положим³⁰

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) | x_i \neq 0\},$$

$$\varphi_i : (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Очевидно,

$$\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{R}P^n.$$

Убедимся, что отображения являются гладкими. Для двух карт U_i и U_j с наборами координат y^1, \dots, y^n и z^1, \dots, z^n соответственно

$$(y^1, \dots, y^n) \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right),$$

здесь в правой части записаны координаты (z_1, \dots, z_n) .

При $n = 1$ $\mathbb{R}P^n = S^1$ – ориентируемое гладкое многообразие. При $n = 2$ получим двумерный диск $D^2 / \xrightarrow{x \sim -x}$, противоположные точки на границе которого «склеены».

В прошлый раз обсуждалось, что окрестность пути, соединяющего точки x и $-x$ будет листом Мёбиуса, то есть неориентируемым гладким многообразием.

Таким образом, видим, что ориентируемость $\mathbb{R}P^n$ зависит от значения n .³¹

Рассмотрим отдельно случай $n = 3$. Проверим, что можно ввести согласованный атлас. Выпишем отображения

$$\varphi_0 : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} \right),$$

$$\varphi_1 : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right),$$

³⁰Заметим, что обратное отображение φ_i^{-1} существует и будет иметь вид

$$\varphi_i^{-1}(y^1, \dots, y^n) \rightarrow (y_1 : y_2 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n).$$

³¹При нечетных n гладкое многообразие будет ориентируемо, при четных – неориентируемо.

$$\varphi_2 : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2} \right),$$

$$\varphi_3 : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_3}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right).$$

Вычислим, например,

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : (y^1, y^2, y^3) \rightarrow \left(\frac{1}{y^1}, \frac{y^2}{y^1}, \frac{y^3}{y^1} \right),$$

якобиан равен

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{(y^1)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{y^2}{(y^1)^2} & \frac{1}{y^1} & 0 \\ -\frac{y^3}{(y^1)^2} & 0 & \frac{1}{y^1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(y^1)^4} < 0.$$

Аналогично,

$$\varphi_2 \circ \varphi_0^{-1} : (y^1, y^2, y^3) \rightarrow \left(\frac{1}{y^2}, \frac{y^1}{y^2}, \frac{y^3}{y^2} \right).$$

В этом случае якобиан равен

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(y^2)^2} & 0 \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{y^1}{(y^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{y^3}{(y^2)^2} & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(y^2)^4} > 0.$$

Для наглядности изобразим таблицу со знаками якобианов функций перехода:

	U_0	U_1	U_2	U_3
U_0		—	+	—
U_1	—		—	+
U_2	+	—		—
U_3	—	+	—	

(35)

Обсудим теперь следующий момент. Пытаемся показать, что гладкое многообразие ориентируемо, используя определение 9.4.

Возьмем карту U_i и соответствующее отображение φ_i . Каждой точке $p \in U_i$ сопоставляется точка $\varphi_i(p)$ с координатами x^1, \dots, x^n . Определим операцию *изменение ориентации на карте*. Например, заменим отображение φ_i на $\tilde{\varphi}_i$ такое, что

$$(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (-x^1, \dots, x^n).$$

Вместо карты (U_i, φ_i) будем рассматривать карту $(U_i, \tilde{\varphi}_i)$. Ясно, что якобиан функции склейки на пересечении измененной карты и какой-либо другой поменяет знак. Вернемся к задаче. Можно подобрать изменения ориентаций на некоторых U_i так, чтобы все якобианы (35) оказались положительными. Таким образом, все карты оказываются согласованными, а значит, гладкое многообразие $\mathbb{R}P^n$, $n = 3$ ориентировано.

Матричные многообразия

Напомним некоторые обозначения.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ \text{вещественные матрицы } A \text{ } n \times n, \det A \neq 0 \},$$

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{ \text{вещественные матрицы } A \text{ } n \times n, \det A = 1 \},$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{ \text{вещественные матрицы } A \text{ } n \times n, A^T A = E \},$$

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{ \text{вещественные матрицы } A \text{ } n \times n, A^T A = E, \det A = 1 \},$$

$$SU(n, \mathbb{R}) = \{ \text{комплексные матрицы } A \text{ } n \times n, A^T A = E, \det A = 1 \}.$$

Оказывается, что вышеперечисленные группы являются гладкими ориентируемыми многообразиями. Проверим это утверждение для некоторых из них.

1. $GL(n, \mathbb{R})$ гомеоморфно открытому подмножеству³² в \mathbb{R}^{n^2} , то есть $GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие размерности n^2 .

2. $SL(n, \mathbb{R})$ задается уравнением $f(A) = 1$, где $f(A) = \det A$. Воспользуемся теоремой 9.2. Найдем, как выглядит градиент f . Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_j^i} = \frac{\partial}{\partial x_j^i} \left(\underbrace{\dots}_{\text{не зависит от } x_j^i} + x_j^i \underbrace{(\dots)}_{\alpha} \right).$$

Здесь α – алгебраическое дополнение к элементу A в i строке j столбце, не зависит от x_j^i . При взятии частной производной по x_j^i получим ровно α .

Так как $\det A = 1 \neq 0$, найдется минор порядка $n-1$, не равный 0. Это означает, что

$$\text{grad } f \neq 0$$

в любой точке матрицы $A \in SL(n, \mathbb{R})$.

Получаем, что $SL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие размерности $n^2 - 1$.

3. $SO(2)$ – множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

является гомеоморфным S^1 .

4. $SO(3) = \{3 \times 3 \text{ матрицы } A | A^T A = E, \det A = 1\}$. Запишем

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

³²Так как $\{A | \det A = 0\}$ является замкнутым подмножеством.

Заметим, что элемент $(A^T A)_{ij}$ – скалярное произведение i и j столбцов A . Условия группы дают $9 + 1$ уравнений (причем уравнение для i и j столбцов совпадают с уравнением для j и i столбца, то есть уникальных уравнений 7). Выпишем их:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \\ \det A = 1 \end{cases} \quad (36)$$

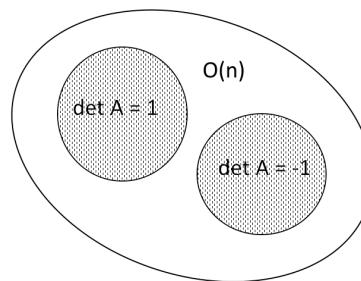


Рис. 10.1. Структура $O(n)$

Последнее уравнение можно не учитывать, так как на множестве ортогональных матриц $O(3)$ функция $f(A) = \det A$ локально постоянна и принимает либо значение либо 1, либо -1 в зависимости от подмножества $O(3)$ (рис. 10.1). Для наглядности запишем значения градиентов для функций, задающих систему уравнений (36):

	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	
λ_1	$2a_{11}$	$2a_{21}$	$2a_{31}$	0	0	0	0	0	0	$\text{grad } f_1$
λ_2	0	0	0	$2a_{12}$	$2a_{22}$	$2a_{32}$	0	0	0	$\text{grad } f_2$
λ_3	0	0	0	0	0	0	$2a_{13}$	$2a_{23}$	$2a_{33}$	$\text{grad } f_3$
λ_4	a_{33}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{11}	a_{21}	a_{31}	0	0	$\text{grad } f_4$
λ_5	a_{13}	a_{23}	a_{33}	0	0	0	a_{11}	a_{21}	a_{31}	$\text{grad } f_5$
λ_6	0	0	0	a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	$\text{grad } f_6$

Докажем, что ранг этой матрицы равен 6. Если это не так, существует линейная комбинация строк с λ_i , равная 0. Так, например, для первых трех столбцов должно выполняться

$$2\lambda_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}) + \lambda_4(a_{12} + a_{22} + a_{32}) + \lambda_5(a_{13} + a_{23} + a_{33}) = 0.$$

Так как столбцы исходной матрицы A линейно независимы, получим, что

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0.$$

Аналогично получаем, что

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0,$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0.$$

Отсюда получаем, что $O(3)$ и $SO(3)$ – гладкие многообразия размерности $9 - 6 = 3$.

5. $SO(n)$ является подмножеством пространства всех матриц \mathbb{R}^{n^2} . В частности, единичная матрица $E \in SO(n)$.

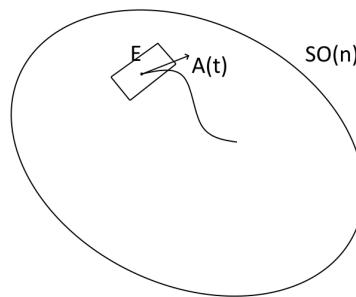


Рис. 10.2. Схема для $A(t)$ из $SO(n)$

Попытаемся понять, как устроено касательное пространство к этому подмножеству в точке E (рис. 10.2). Рассмотрим кривые $A(t) \in SO(n)$ такие, что $A(0) = E$ и их вектора скорости X , где

$$X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t).$$

Заметим, что³³ $A(t) \subset O(n)$ тогда и только тогда, когда

$$A^T(t)A(t) \equiv E. \quad (37)$$

Продифференцировав (37) в точке $t = 0$, получим

$$\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) \right)^T \cdot A(0) + A^T(0) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) \right) = 0,$$

откуда

$$X^T + X = 0,$$

то есть вектора скорости рассматриваемых кривых $A(t)$ – кососимметрические матрицы.

³³Ранее обсудили, что множество $O(n)$ разбивается на два непересекающихся подмножества (рис. 10.2). Все кривые из $O(n)$, содержащие E , автоматически будут принадлежать $SO(n)$.

Убедимся, что наоборот данное утверждение тоже будет верно. Пусть X – произвольная кососимметрическая матрица. Построим кривую $A(t)$ такую, что

$$\begin{cases} A^T(t) \cdot A(t) \equiv E, \\ A(0) = E, \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(t) = X. \end{cases} \quad (38)$$

Рассмотрим

$$A(t) = \exp \{tX\} = E + tX + \frac{(tX)^2}{2} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots + \frac{(tX)^n}{n!} + \dots$$

Последние два условия (38), очевидно, при таком выборе $A(t)$ выполняются. Убедимся, что

$$(\exp \{tX\})^T \cdot \exp \{tX\} \equiv E.$$

Заметим, во-первых, что

$$(\exp \{tX\})^T = \exp \{tX^T\} = \exp \{-tX\},$$

а во-вторых,

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B},$$

если $AB = BA$. Тогда

$$\begin{aligned} (\exp \{tX\})^T &= \exp \{-tX\} \exp \{tX\} = \\ &= \exp \{-tX + tX\} = \exp \{0\} = E. \end{aligned}$$

Итак, построенная кривая $A(t)$ удовлетворяет свойствам (38).

Из рассуждений выше можно сделать следующий вывод. Множество векторов скорости кривых, лежащих в $O(n)$ и начинающихся в E – это множество кососимметрических матриц. Осталось показать, что $O(n)$ является гладким многообразием. Нетрудно проверить, что отображение $\exp(X)$ матриц X , будет являться гомеоморфизмом, который отображает кососимметрические матрицы X в окрестности нуля на окрестность единицы ортогональных матриц.

Обсудим, как быть с точками $O(n)$, отличными от E . Пусть $B \in O(n)$. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} L_B : O(n) &\rightarrow O(n), \\ L_B : A &\rightarrow BA. \end{aligned} \quad (39)$$

В частности, $L_B(E) = B$. L_B будет являться гомеоморфизмом, обратное к нему есть $L_{B^{-1}}$. Поэтому окрестность матрицы B в $O(n)$ устроена точно так же, как окрестность E в $O(n)$. Итак, рассматривая карту в окрестности E , можем с помощью таких отображений переносить ее в другие точки. В итоге получим атлас на всем $O(n)$. Можно проверить согласованность карт.

Отметим, что $O(n)$ – гладкое многообразие размерности $(n^2 - n)/2$.

Задача Доказать, что касательное пространство в точке E к многообразию $SL(n, \mathbb{R})$ состоит из матриц X таких, что $\text{tr}X = 0$.

Ориентированность матричных групп

Для матричных групп задать ориентацию можно следующим образом. Можно построить несколько векторных полей v_1, \dots, v_n , которые будут линейно независимы и в каждой точке будут задавать ориентацию касательного пространства. Рассмотрим по аналогии с (39) отображение

$$L_B : G \rightarrow G,$$

$$L_B : A \rightarrow BA.$$

Напомним определение дифференциала отображения. Пусть есть гладкое отображение f гладких многообразий X и Y , в них точки p и $f(p)$ соответственно. Тогда, если возьмем вектор v из касательного многообразия к точке p многообразия X $T_p X$, то есть

$$v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t),$$

где $\gamma(0) = p$, ему сопоставляется вектор

$$d_p f(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Итак, дифференциал отображения переводит касательные:

$$d_E L_B : T_E G \rightarrow T_B G.$$

Таким образом, взяв некоторый касательный базис в точке E , имеем возможность «разнести» его по всему многообразию.

Понятия погружения и вложения

Определение 10.1. Гладкое отображение f гладких многообразий

$$f : X^m \rightarrow Y^n, \quad m \leq n$$

называется *погружением*, если ранг дифференциала отображения f в любой точке $P \in X$ равен m , то есть

$$\ker (d_p f) = \{0\}.$$

Определение 10.2. Погружение $f : X \rightarrow Y$ называется *вложением*, если f является гомеоморфизмом X и $f(X)$.

Пример Рассмотрим гладкое отображение f интервала $X = (a, b)$ на плоскость $Y = \mathbb{R}^2$ (рис. 10.3). Так как концы интервала не рассматриваются, отображение взаимно однозначно, но гомеоморфизмом не является. Поэтому f не является вложением, хотя f – погружение и взаимно однозначно с образом.

Утверждение Если X компактно и $f : X \rightarrow Z$ – непрерывная биекция, где Z – хаусдорфово, то $f^{-1} : Z \rightarrow X$ тоже непрерывно.

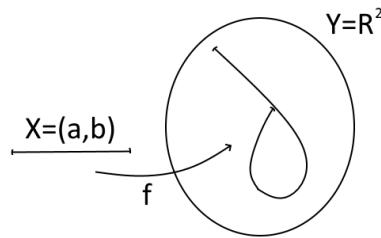


Рис. 10.3. Контрпример вложения

Определение 10.3. Подмножество X в \mathbb{R}^n является *подмногообразием*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U (в \mathbb{R}^n) и координаты x^1, \dots, x^n в ней такие, что

$$X \cap U = \{x^1 = \dots = x^k = 0\}.$$

Напомним, что на лекциях обсуждалась слабая теорема Уитни, утверждающая, что любое многообразие можно вложить в евклидово пространство большей размерности.

Задача То, что $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, является известным фактом. Можно ли вложить S^2 в \mathbb{R}^2 ?

Убедимся в том, что нельзя. Пусть на S^2 заданы локальные координаты (u, v) . Отображение

$$F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

можно рассматривать как пару функций

$$f, g : S^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(P) = x(F(P)), \quad g(P) = y(F(P)). \quad (40)$$

Заметим, что f и g достигают своих минимальных и максимальных значений, так как определены на компактном множестве. Матрица Якоби отображения

$$\begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{pmatrix} \Big|_p$$

должна иметь ранг не меньше 2, чтобы быть вложением. Так как в матрице Якоби фактически построчно записаны градиенты функций (40), в точке максимума f она будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Таким образом, есть точки, в которых матрица вырождена, а значит, ее ранг меньше размерности пространства.

Вопрос Существует ли погружение в \mathbb{R}^2 $M^2 \{p\}$, где M^2 – компактное двумерное многообразие?

Задачи

Обсудим две задачи.

1. Найти матрицу B вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

являющуюся касательным вектором к многообразию $SL(2, \mathbb{R})$ в точке

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти образ этой матрицы B при дифференциале отображения

$$f : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{R}),$$

где Mat – пространство матриц, заданном формулой

$$f(X) = X^2 - X.$$

1. Поймем, как устроено касательное пространство многообразия $SL(2, \mathbb{R})$ в данной точке. Рассмотрим кривые $A(t)$ такие, что

$$\det(A(t)) \equiv 1 \tag{41}$$

и

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем $A(t)$ в виде

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда условие (41) имеет вид

$$a(t)d(t) - c(t)b(t) \equiv 1.$$

Взяв d/dt в точке $t = 0$ от этого выражения, получим

$$\frac{da}{dt} \Big|_{t=0} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(t) - \frac{dc}{dt} \Big|_{t=0} \cdot 0 - 2 \cdot \frac{db}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \tag{42}$$

С искомой матрицей B кривая $A(t)$ связана как

$$\frac{dA}{dt} \Big|_{t=0} = B.$$

Обозначим

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Тогда (42) можно записать в виде

$$\alpha + \delta - 2\beta = 0.$$

По условию задачи, $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ и $\delta = 1$, откуда

$$2 - 2\beta = 0,$$

то есть $\beta = 1$. Матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. По условию, матрица $X(2, \mathbb{R})$ переходит под действием отображения в $X^2 - X$. Требуется найти $d_p f(B)$. Представим

$$B = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t),$$

где $A(t) \subset SL(2, \mathbb{R})$, $A(0) = P$ из условия задачи.

Отображаем кривую

$$f(A(t)) = A(t)^2 - A(t).$$

Найдем вектор скорости полученной кривой. Дифференцируем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(A(t))) &= \left(\frac{dA}{dt} \Big|_{t=0} \right) A(0) + A(0) \left(\frac{dA}{dt} \Big|_{t=0} \right) - \left(\frac{dA}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ