ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 3

БУТУЗОВ
ВАЛЕНТИН ФЕДОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
УЛЬЯНОВУ ЛИВИЮ-НИКОЛЬ

Содержание

Лекция 1

1.1. Скалярные и векторные поля. Основные понятия и формулы

Определение: Пусть G область в трехмерном пространстве или на плоскости. Если каждой точке M из G поставлено в соответствие число *u(M)*, то говорят что в области G задано *скалярное поле* и записывается: $M \in G \Rightarrow u(M)$

Далее, если не оговаривается обратного, будем считать G областью в трехмерном пространстве.

Физические примеры:

1) Скалярное поле температур. Температура меняется от точки к точке в какой-то выбранной области области.

2)Поле плотности заряда. Предположим есть какое-то заряженное тело. В каждой его точке плотность заряда является числом.

Физический скалярные поля не зависят от выбора системы координат,но могут зависеть от времени,тогда они называются нестационарными.

Пусть задана прямоугольная система координат $Oxyz$ в области G, тогда скалярное поле описывается функцией трех переменных: $u = u(x, y, z), (x, y, z) \in G$ Нередко приходится рассматривать ту часть области G, где u имеет одно и тоже значение во всех точках. Это поверхность заданная уравнением $u = u(x, y, z) = C = Const$ и называется *поверхностью уровня* скалярного поля. Для двухмерного пространства это *линии уровня.*

Примером может служить линии постоянной глубины океана или одинаковых высот на географической карте.

Далее будем считать что функция *u(x,y,z)*, описывающая скалярное(или векторное) поле, имеет непрерывные частные производные по всем аргументам необходимого порядка.

Определение: Градиентом скалярного поля в точке *M(x,y,z)* называется вектор-фунция:

$$gradu(M) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right\} \tag{1}$$

Глядя на это определение можно подумать, что градиент зависит от выбора системы координат, выбрав другую систему будут другие *x,y,z* и свои частные производные. Но во II семестре было показанно что при смене системы координат, координаты вектора *gradu(M)* изменяются, но сам вектор, то есть его длина и направление, остаются без изменений. Направление вектора *gradu(M)* это направление наибольшего роста функции, а модуль этого вектора $|gradu(M)|$ это производная по этому направлению. Направление наибольшего роста функции не меняется от выбоа координат, а это и есть направление *gradu(M)*.

Проведем произвольный единичнй вектор $\vec{L} = \{cos(\alpha), cos(\beta), cos(\gamma)\}$ из точки M, его координаты задаются направляющими косинусами, тогда *производная по направлению* в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial L}(M) = (gradu(M) \cdot \vec{L}) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M)cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}(M)cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z}(M)cos(\gamma) \right\}$$

Определение: Если каждой точке M области G поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области G задано *векторное поле* и записывается: $M \in G \Rightarrow \vec{a}(M)$

Физические примеры:

1)Электрическое поле. В каждой точке характеризуется вектором напряженности $\vec{E}(M)$.

2)Магнитное поле. В каждой точке характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}(M)$.

3)Поле Тяготение. Можно охарактеризовать в каждой точке силой $\vec{F}(M)$ с которой это поле действует на единчную массу помещенную в точку M.

4) Поле скоростей потока жидкостей. Стационарный поток можно характеризовать в каждой точке вектором скорости $\vec{v}(M)$.

Векторное поле также не зависит от выбора системы координат. Если ввести систему координат $Oxyz$, то векторное поле задается вектор-функцией трёх переменных $\vec{a}(x, y, z)$, но часто мы будем рассматривать ее координаты и обозначать их $\vec{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$

Если для скалярных полей вводятся поверхностей уровня, для векторных полей вводится понятие *векторной линии*

Рассмотрим некоторую кривую L, она называется векторной линией векторного поля $\vec{a}(M)$, если в каждой точке M кривой L вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к этой кривой. (Рис. 1.1)

Для электрического и магнитного полей, а также для поля тяготения векторные линии называются силовыми линиями, для поля скоростей — линиями тока.

Определение: *Дивергенцией векторного поля* $\vec{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ называется скалярная функция(или скалярное поле)

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Дальше будет показанно что дивергенция, как и градиент, зависит только от векторного поля и не зависит от выбора системы координат.

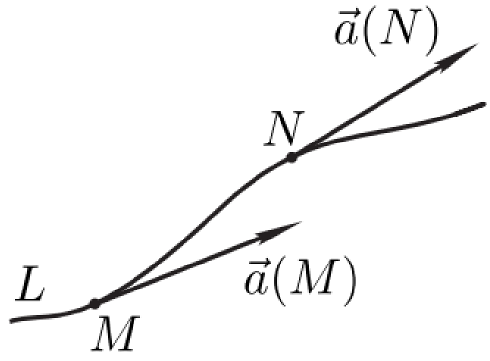

Рис. 1.1 – Кривая L и векторные линии в точках M и N.

Посчитаем дивиргенцию поля точечного заряда e помещенного в начале координат(рис.1.2). В каждой точке *M(x,y,z)* это поле характеризуется вектором электрической напряженности и этот вектор направлен так же как вектор $\vec{OM}$ если заряд e положительный.

$$\vec{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{OM} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

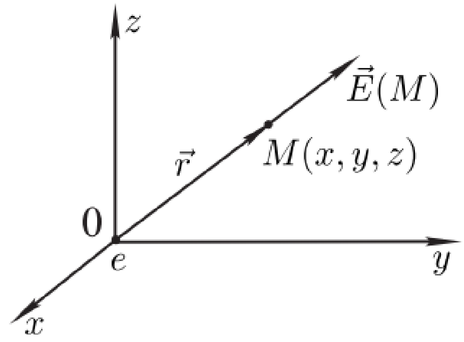

Рис. 1.2 – электрическое поле точечного заряда, помещенного в начале координат.

Найдем в точке M дивергенцию векторного поля: $\vec{E}(M)$

$$div\,\vec{E}(M) = ke\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3}\right) \tag{2}$$

Вычислив частные производные, получим:
$div\,\vec{E} = 0$ при $r \neq 0$,

Если $r = 0$ вычислять частные производные по формуле (2) нельзя, но при $r \to \infty$, $div\,\vec{E} \to \infty$, так что можно считать что:
$div\,\vec{E} = \infty$ при $r = 0$

Физическая интерпретация этого примера говорит о том, что $div\,\vec{a}(M)$ характеризует плотность источников векторного поля $\vec{a}$ в данной точке M. В любой точке где $r \neq 0$ нет заряда и соответственно плотность равна нулю.

Определение: Ротором векторного поля $\vec{a}$ в точке M называется вектор-функция:

$$rot\,\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

.

Далее будет доказано :
1) $rot\,\vec{a}$ также не зависит от выбора системы координат;
2) $rot\,\vec{a}(M)$ характеризует завихренность векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M.

Рассмотрим снова поле точечного заряда e помещенного в начале координат и вычислим $rot\,\vec{E}(M)$. Если исходить из того что ротор характеризует завихрение, то исходя из рисунка 1.2 видно что напряженность направлена из точки в радиальном направлении и никакого завихрения нет, соответственно $rot\,\vec{a}(M) = \vec{0}$, то же можно получить с помощью вычислений.

Определение: Пусть векторное поле $\vec{a}(M)$ определенно в области G. Пусть Φ — гладкая двусторонняя поверхность, лежащая в области G. Выберем одну из сторон поверхности, зафиксировав непрерывное векторное поле единичных нормалей $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности Φ :

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

называется потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через выбранную сторону поверхности Φ.

Если $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ — скорость движущейся жидкости в точке M, то

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds$$

представляет собой объем жидкости, протекающей через поверхность Φ за единицу времени в выбранном направлении. Эта величина называется в физике потоком жидкости через поверхность Φ, поэтому название «поток» используется и в случае произвольного векторного поля $\vec{a}(M)$.

Отметим, что поток не зависит от выбора системы координат, так как векторное поле и поверхность от этого не зависит.

Дадим инвариантное определение дивергениции потока векторного поля.

Пусть Φ гладкая поверхность ограничивающая тело G, напишем формулу Остроградского — Гаусса в компактном векторном виде:

$$\iiint\limits_{G} div\,\vec{a}\,dV = \iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds \tag{3}$$

Зафиксируем какую-нибудь точку M области G и будем стягивать поверхность Φ, оставляя ее гладкой, к точке M ,то есть будем диаметр области G стремить к нулю $d(G)\to 0$,так что точка M всегда находится внутри области G

Применим к левой части равенства формулу среднего значения,вынесем за знак интеграла некоторое среднее значение в некоторой точке M_*:

$$\iiint\limits_{G} div\,\vec{a}\,dV = div\,\vec{a}(M_*)\iiint\limits_{G} dV = div\,\vec{a}(M_*)\,V(G)$$

Теперь перепишим формулу (3) поделив на объем обе части:

$$div\,\vec{a}(M_*) = \frac{\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)}$$

Сжимаем поверхность Φ окружающюю точку M $d(G)\to 0$, тогда так функция непрерывна, то $M_*\to M$ Отсюда слудует что $div\,\vec{a}(M_*)\to div\,\vec{a}(M)$

Здесь важен выше упомянутый факт непрерывности частных производных.

Таким образом

$$div\,\vec{a}(M) = \lim_{\substack{d(G)\to 0\\ M\in G}} \frac{\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)} \tag{4}$$

Мы отметили что поток,не зависит от системы координат, объем также не зависит от системы координат, отсюда следует что дивергенция также не зависит от системы координа. Формула (4) дает инвариантное определение дивергенции.

Рассмотрим опять случай, когда $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ — скорость движущейся жидкости. Тогда $\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds$ это количество жидкости вытекающей(так как нормаль направленна наружу) из области G ограниченной поверхностью Φ, поделив на объем, поделив на объем облсти $V(G)$ получим среднее количество жидкости, вытекающей (либо втекающей) за единицу времени из единицы объёма области G. Естественно назвать эту величину средней плотностью источников жидкости в области G.

Указанный физический смысл дивергенции векторного поля особенно ярко проявляется в известных уравнениях Максвелла, имеющих (в системе СИ) вид $div\vec{D} = p$ $div\vec{B} = 0$ Здесь $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции, p — плотность электрических зарядов. Первое уравнение выражает закон Кулона, а второе уравнение — факт отсутствия магнитных зарядов.

Задача: Рассмотрим поле точечного заряда e помещенного в начале координат и сферу радиуса R с центром в начале координат. Надо найти поток векторного поля точеченого заряда через внешнюю поверхность сферы Φ радиуса R.

$$\vec{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$$

$$\iint\limits_{\Phi}(\vec{E}\cdot\vec{n})\,ds = 4\pi ke \tag{5}$$

Ответ не зависит от радиуса сферы, взяв сферу другого размера поток не изменится. Если мы будем стягивать сферу к началу координат, то по формуле (5) видим что числитель не меняется, а знаменатель стремится к нулю.Тем самым можно сказать что дивергенция точечного заряда в самой точке заряда равна бесконечности.

Циркуляция векторного поля.

Пусть в области G задано векторное поле $\vec{a}$ и пусть AB — гладкая кривая, лежащая в области G, кривая может быть как замкнутой так и незамкнутой(рис.1.3). Если она замкнута необходмо выбрать направдение обхода. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода по кривой AB:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz \tag{6}$$

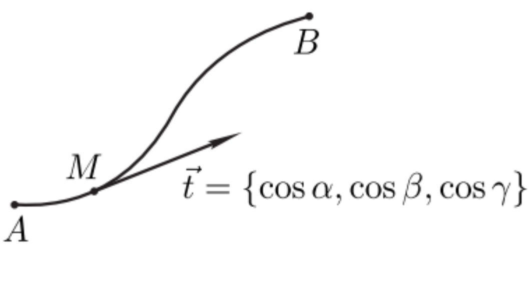

Рис. 1.3 – Вектор касательной t к кривой AB

Этот криволинейный интеграл второго рода и есть циркуляция векторное поля $\vec{a}$ вдоль кривой AB. Введем вектор $\vec{dl} = \{dx, dy, dz\}$(рис.1.3). В каждой точке этот вектор направлен по касательной кривой. Убедимся в этом на физическом примере. Рассмотрим параметрическое уравнение кривой $L : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t_a < t < t_b$ если t трактовать как время, то φ', ψ', χ' координаты вектора скорости, а вектор скорости направлен по касательной. тогда циркуляцию, после введение вектора $\vec{dl}$ можно записать в виде $\int\limits_{AB} (\vec{a} \cdot \vec{dl})$ введем единичный вектор касательной $\vec{t}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, тогда $\vec{dl} = \vec{t} \cdot |\vec{dl}|$, где $|\vec{dl}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = dl$ - элемент длины кривой. Тогда ту же циркуляцию можно записать в виде криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{AB} (\vec{a} \cdot \vec{t})\, dl = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz \tag{7}$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{t}$, а также кривая AB, не зависят от выбора системы координат, то и циркуляция векторного поля вдоль кривой AB не зависит от выбора системы координат. Это свойство циркуляции позволит дать нам *инвариантное определение ротора.*

Зафиксируем какую-нибудь точку M области G, проведём через неё произвольную плоскость и рассмотрим гладкий замкнутый контур L, лежащий в этой плоскости и ограничивающий плоскую область Φ, такую, что точка M — точка этой области (рис.1.4).

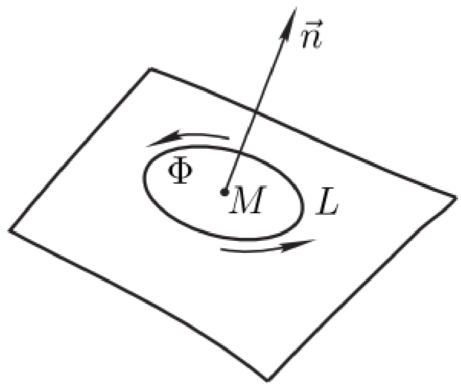

Рис. 1.4 – Контур L, ограничивающий область Φ, проведенный через зафиксированную точку M области G.

Для поверхности Φ и ограничивающего ее контура L напишем формулу Стокса, в удобном нам компактно-векторном виде.

$$\oint\limits_{L} (\vec{a} \cdot \vec{dl}) = \iint\limits_{\Phi} (rot\, \vec{a} \cdot \vec{n})\, ds$$

От выбора направления вектора нормали $\vec{n}$ зависит направление обхода контура. Так же как и с инвариантным определением дивергенции, применим формулу среднего значения для интеграла в правой части:

$$\iint\limits_{\Phi} (rot\, \vec{a} \cdot \vec{n})\, ds = (rot\, \vec{a}(M_*) \cdot \vec{n}) \cdot S(\Phi)$$

получаем

$$(rot\,\vec{a}(M_*)\cdot\vec{n}) = \frac{\oint\limits_L(\vec{a}\cdot\vec{dl})}{S(\Phi)}$$

Перейдем к пределу. Будем контур L стягивать к точке M так что эта точка остается внутри контура. Иначе говоря диаметр $d(\Phi)$ устримим к нулю. Ротор выражается через частные производные наших функций P,Q,R эти частные производные непрерывные функции значит:

$$(rot\,\vec{a}(M)\cdot\vec{n}) = \lim_{\substack{d(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \frac{\oint\limits_L(\vec{a}\cdot\vec{dl})}{S(\Phi)} \tag{8}$$

так как циркуляция векторного поля и площадь области не зависят от выбора системы координат, то правая часть равенства (8) а, значит, и левая часть, которая представляет собой проекцию вектора $rot\,\vec{a}(M)$ на вектор $\vec{n}($ обозначается $\Pi\rho_{\vec{n}}rot\vec{a}\,(M))$ не зависит от выбора системы координат. Таким образом, формула (8) дает инвариантное определение проекции ротора векторного поля на произвольное направление.

$$\Pi\rho_{\vec{n}}rot\vec{a}\,(M) = \lim_{\substack{d(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \frac{\oint\limits_L(\vec{a}\cdot\vec{dl})}{S(\Phi)} \tag{9}$$

чтобы определить вектор $rot\,\vec{a}(M)$, пользуясь формулой (9), достаточно рассмотреть в точке M проекции $rot\,\vec{a}(M)$ на три некомпланарных направления. Эти три проекции однозначно определяют вектор $rot\,\vec{a}(M)$.

Покажем что $rot\,\vec{a}(M)$ характеризует **завихренность** векторного поля. Рассмотрим циркуляцию вектора a по тому же замкнутуму контур L что и на рис.1.5.

Она равна $\oint\limits_L(\vec{a}\cdot\vec{t})$ она будет максимальной в том случае когда $\vec{a}$ направлен по касательной, то есть коллинеарен вектору $\vec{t}$, в этом случае лучше всего видно завихрение векторного поля.

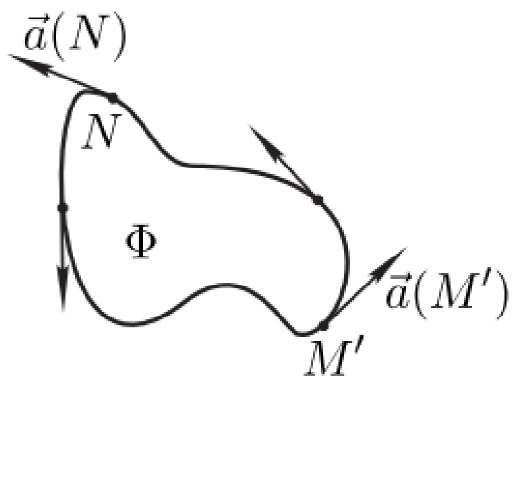

Рис. 1.5 – Циркуляция вектора a.

Напишем еще два уравнения Максвелла в СИ, которые записываются с помощью ротора:

1) $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$, это уравнение является обобщением закона Био-Савара и выражает тот факт, что магнитное поле $\vec{H}$ порождается токами проводимости (j — плотность тока) и токами смещения $\frac{\partial D}{\partial t}$, $\vec{D}$ — электрическая индукция

2) $rot\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$, выражает закон электромагнитной индукции Фарадея и показывает, что одним из источников электрического поля является изменяющееся во времени магнитное поле.

Лекция 2

2.1. Потенциальные векторные поля

Определение: Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется потенциальным в области G, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля *u(M)*:

$$\vec{a}(M) = gradu(M)$$

функция *u(M)* называется скалярным потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$.

Пусть вектор $\vec{a} = P, Q, R$ равен градиенту скалярного поля *u(M)* $\vec{a} = \{P, Q, R\} = gradu = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$, тогда приравнивая соответствующие координаты получим $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z}$ Рассмотрим выражение, фигурирующее в определении циркуляции, тогда

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{10}$$

это выражение является полным дифференциалом функции *u(M)* в области G. Левая часть выражения (10) стоит под знаком криволинейного интеграла (6). Таким образом выполнено условие 3 теоремы 5 об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве,эта теорема доказывалась во II семестре. Из условия 3 следует выполнение условий 1, 2 и 4 этой теоремы, это и есть **свойства потенциального векторного поля**, установим их:

1) Для любого кусочно-гладкого контура L, лежащего в области G циркуляция векторного поля равна нулю:

$$\oint_L (\vec{a} \cdot \vec{dl}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

2) Для любых фиксированных точек A и B из области G циркуляция вдоль кривой AB не зависит от выбора кривой соединяющей точки AB и равна разности значений потенциала *u(M)* в точках A и B:

$$\int_{AB} (\vec{a} \cdot \vec{t}) = u(B) - u(A)$$

3)Любое потенциальное поле является безвихревым:

$$rot\,\vec{a} = 0$$

Это вытекает из 4 условия теоремы 5.

Существует **второе определение потенциального поля:** Поле называется потенциальным, если его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю

Поставим вопрос: верно ли обратное, т. е. следует ли из условия $rot\,\vec{a} = \vec{0}$ что векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным? Ответ зависит от вида области G. Если область G поверхностно односвязна, то согласно упомянутой теореме 5 из условия 4 следует условие 3(из 3 всегда следует 4), а значит существует такая функция $u(x,y,z) : \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$, значит $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = gradu$, это и означает что векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциално.

Пример:

$\vec{a} = \{P, Q, R\}$, где $P = -\frac{y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}, R = 0, x^2+y^2 \neq 0$, плоское поле, вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости Oxy, это поле неопределенно в точках $x^2+y^2=0$ то есть вся ось Oz. Возьмем в качестве области G все пространство с выброшенной осью Oz. Легко вычислить что для любой точки M из области G :

$$rot\vec{a} = 0$$

Покажем теперь что поле не является потенциальным, укажем такой контур L по которому циркуляция не равна нулю, что протеворечит свойству 1. $L : x = \cos t, y = \sin t, z = 0, 0 < t < 2\pi$ это окружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащая в плоскости Oxy, $L \in G$ так как в эту область не входит только ось Oz, а окружность не проходит через эту ось.

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_0^{2\pi} -\sin t\, d\cos t + \cos t\, d\sin t\, dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Следовательно, данное векторное поле не является потенциальным в области G

Физические примеры:

1)Электрическое поле $\vec{E}(M)$ точечного заряда e, помещенного в начале координат равно

$$\vec{E} = \frac{ke}{r^3}\vec{r} \qquad r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad r = |r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Это поле является потенциальным. В некоторых физических задачах удобно представлять потенциального поле не как градиент некоторого скалярного, а как минус градиент.

$$\vec{E}(M) = -gradu, \qquad u = \frac{ke}{r} \quad \text{- электрический потенциал}$$

вычислим частные производные функции u:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ke\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = ke\frac{x}{r^3}$$

аналогично для $-\frac{\partial u}{\partial y}$ и $-\frac{\partial u}{\partial z}$, координаты вектора $\vec{E}$ совпадают с полученным выражение для частных производных, мы проверили что потенциалом электрического поля является скалярная функция u.

2) Рассмотрим точечную массу m помещенную в начало координат, $M(x,y,z)$ гравитационное поле:

$$\vec{F}(M) = -\gamma\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

Это векторное поле также является потенциальным.

$$\vec{F}(M) = gradu, \qquad u = \frac{\gamma m}{r} \quad \text{- ньютонов потенциал}$$

Электрическое поле и поле тяготения потенциальные поля, физичексий смысл циркуляции вдоль некоторой кривой это работа по перемещний тела или заряда вдоль этой кривой. Воспользуемся вторым свойством потенциальных полей и получим для поля тяготения:

$$\int\limits_{AB} (\vec{F} \cdot \vec{dl}) = u(B) - u(A) = \gamma m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

эта формула выражает работу поля тяготения, аналогично для электрического поля.

2.2. Соленоидальные векторные поля

Определение: Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется соленоидальным в области G, если во всех точках этой области

$$div\, \vec{a} = 0$$

Так как $div\, \vec{a}$ характеризует плотность источников тока, то в области где поле соленоидально нет источников поля $\vec{a}(M)$.

Пример: Электрическое поле точеченого заряда $\vec{E} = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$, мы говорили что $div\, \vec{E} = 0$ при $r \neq 0$, то есть во всех точках не содержащих заряда поле $\vec{E}$ является соленоидальным.

Пусть векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить в области G в виде ротора другого векторного поля:

$$\vec{a}(M) = rot\, \vec{b}(M)$$

В этом случае вектор-функция $\vec{b}(M)$ называется векторным потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$

$$div\, \vec{a}(M) = div\, rot\, \vec{b}(M) = 0$$

Проверьте это самостоятельно рассписав выражение для $rot\, \vec{b}(M)$, а затем выразив через этот вектор $div\, rot\, b$.

Определение: Область G является *объёмно односвязной* если для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности Φ принадлежащей области G, ограниченная этой поверхностью область, целиком принадлежит области G. *Примеры односвязных областей:* Шар, параллелепипед, тор, все пространство. Если из шара удалить какую-нибудь внутреннюю точку, то получится область, не являющаяся объёмно односвязной (но являющаяся, как и шар, поверхностно односвязной).

Если поле $\vec{a}(M)$ является соленоидальным в объёмно односвязной области G, то для любой замкнутой кусочно-гладкой поверхности Φ лежащей в области G поток векторного поля через эту поверхность равен 0.

Действительно, пусть кусочно-гладкая замкнутая поверхность Φ, расположенная в объёмно односвязной области G, ограничивает область G_1. По формуле Остроградского — Гаусса имеем

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = \iiint\limits_{G_1} div\,\vec{a}\,dx\,dy\,dz \tag{11}$$

так как поле соленоидально $div\,\vec{a} = 0$ правая часть формулы (11) равна нулю, значит:

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = 0 \tag{12}$$

иногда свойство (12) соленоидальных полей принимается за их определение.

Из этого свойства следует, что векторные линии соленоидального поля не могут начинаться или заканчиваться внутри области соленоидальности, а начинаются и заканчиваются либо на границе области, либо являются замкнутыми.

Примеры:

1)Рассмотрим электрическое поле точеченого заряда помещенного в центре координат $\vec{E} = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$. В любой области, не содержащей точки O, векторные линии этого поля лучи, начинаются и заканчиваются на границе области G.(рис.2.1 правая часть) Так же отметим что в любой такой области поле соленоидально, однако поток поля через область содержащюю точку O не равен нулю. Поток через внешнюю сторону сферы радиуса R с центром в точке O равен $4\pi ke \neq 0$. Это связано с тем, что все пространство с выброшенной одной точкой не является объёмно односвязной областью.

2) Векторные линии прямого проводника с током замкнутые линии.(рис.2.1 левая часть)

Для соленоидального поля имеет место закон сохранения интенсивности векторной трубки. Он состоит в следующем. Пусть $\vec{a}(M)$ — соленоидально поле в объёмно односвязной области G. Через каждую точку области проходят векторные линии, если мы возьмем сплошной(без пустот) пучок этих векторных линий, и отрежем его с двух сторон сечениями Φ_1 и Φ_2, это будет векторная трубка, то есть боковая поверхность Φ_3 этой трубки состоит и векторнх линий(рис.2.2).

Поток соленоидального поля $\vec{a}(M)$ через поверхность $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, ограничивающую отрезок векторной трубки, равен нулю:

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = \iint\limits_{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = 0$$

где вектор нормали $\vec{n}$ направлен наружу. По определению векторных линий вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к поверхности, а вектор $\vec{n}$ перпендикулярен ей, значит на повеерхности Φ_3 $\vec{a}(M) \perp \vec{n} \Rightarrow (\vec{a}(M)\cdot\vec{n})$ и следоватльно

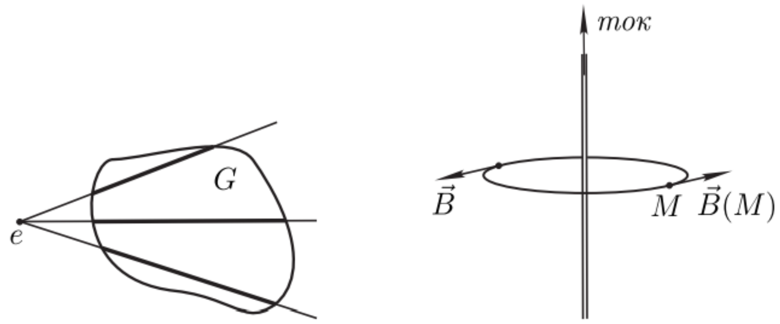

Рис. 2.1 – Векторные линии точеченого заряда и прямого проводника с током.

$$\iint\limits_{\Phi_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = 0$$

Поэтому из всего интеграла по поверхности Φ останется только интеграл по поверхности $\Phi_1 + \Phi_2$

$$\iint\limits_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds + \iint\limits_{\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = 0$$

вектор $\vec{n}$ направлен наружу, значит на сечениях Φ_1 и Φ_2, вектор $\vec{n}$ имеет противоположенные направления, поменяем $\vec{n}$ на $\vec{n_1}$, тогда интеграл по Φ_1 поменяет знак и тогда имеем равенство

$$\iint\limits_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n_1})\,ds = \iint\limits_{\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n_2})\,ds \tag{13}$$

таким образом, поток соленоидального векторного поля через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение. Формула (13) дает закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Замечание: что любое векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\vec{a}(M) = gradu(M) + rot\,\vec{b}(M)$$

причем такое представление не единственное, ведь поле может одновременно являться и соленоидальным и потенциальным, а значит часть потенциального поля, которое является соленоидальной можно перенести во второе слагаемое.

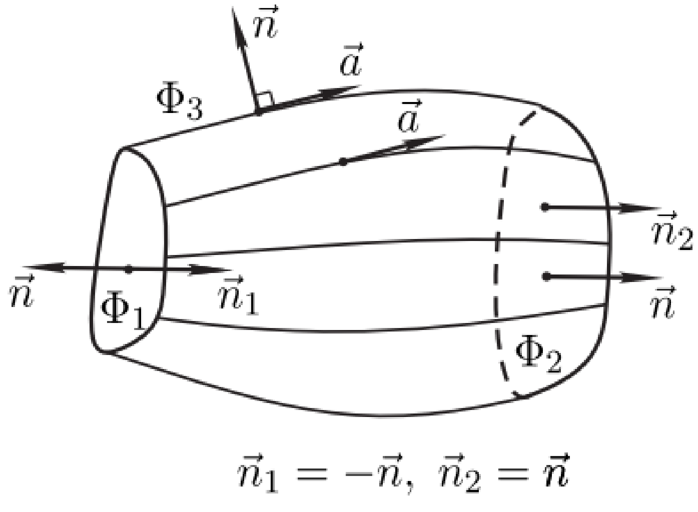

Рис. 2.2 – Векторная трубка.

.

Лекция 3

3.1. Оператор Гамильтона

Мы уже знакомы с некоторыми операторами, например оператор частной производной по x $\frac{\partial}{\partial x}$ при действии на функцию u переводит ее в другую функцию $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial u}{\partial x}$, аналогично $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ — операторы частных производных по y и z.

Определение: векторный оператор «набла» или оператор Гамильтона это:

$$\bigtriangledown = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right\}$$

с помощью этого оператора удобно записывать и выполнять операции векторного анализа.

Градиент функции u получается в результате действия (умножения) векторного оператора $\bigtriangledown$ на эту функцию:

$$gradu = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \bigtriangledown u$$

дивергенция векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ получается как результат скалярного умножения векторного оператора набла на $\vec{a}$:

$$div\,\vec{a} = (\bigtriangledown \cdot \vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}$$

Ротор векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ представляет собой векторное произведение векторного оператора $\bigtriangledown$ и вектор — функции $\vec{a}$

$$rot\,\vec{a} = [\bigtriangledown \cdot \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

С оператором набла действия производяться как с обычными векторами.

Повторные дифференциальные операции:
1) $rot\,gradu = [\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown u] = \vec{0}$,
($\bigtriangledown$ - вектор, u - скаляр, заметим если бы это простые вектора, векторное произведение вектора на тот же вектор умноженный на число равно 0.)
2) $div\,rot\vec{a} = (\bigtriangledown \cdot [\bigtriangledown \cdot \vec{a}]) = 0$
3)$div\,gradu = (\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown u) = \bigtriangledown^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = \triangle u$

Оператор $div\,grad = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ называется оператором Лапласа, а уравнение $\triangle u = 0$ уравнением Лапласа (это одно из классических фундоментльных уравнений математической физики). Функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа в некоторой области, называется гармонической функцией в этой области.

Примеры:

1)Пусть векторное поле $\vec{a}$ одновременно и потенциально, и соленоидально. Так как оно потенциально его можн опредставить его можно представить $\vec{a} = gradu$, то что оно соленоидально означает $div\,\vec{a} = div\,gradu = 0$, то есть это скалярный потенциал u поля $\vec{a}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle u = 0$, а значит скалярный потенциал одновременно и потенциального и соленоидального поля является является гармонической функцией.

2)потенциал электрического поля точечного заряда, которое одновременно и потенциальнно и соленоидальнно, $u = \frac{ke}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической функцией в любой области, не содержащей начала координат. То есть функция $u = \frac{ke}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа, это можно получить непосредственно из вычислений:

$$\triangle \frac{ke}{r} = ke \triangle \frac{1}{r} = 0$$

3)Пусть векторное поле $\vec{a}(P, Q, R)$ является в соленоидальным и безвихревым то есть

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{14}$$

и

$$rot\,\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{15}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{16}$$

Продифференциируем (14) равенство по x

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \tag{17}$$

Продифференциируем равенство (15) по y и равенство (16) по z:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \tag{19}$$

из (17), (18), (19) следует:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) = 0 \Longleftrightarrow \triangle P = 0$$

аналогично $\triangle Q = 0$ и $\triangle R = 0$.

Вывод если поле $\vec{a}$ является соленоидальным и безвихревым, тогда координаты вектора $\vec{a}$ являются гармоническими функциями.

4) Рассмотрим плоское векторное поле $\vec{a}\{P(x,y),Q(x,y)\}$ которое является соленоидальным и безвихревым

$$div\,\vec{a}=0\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0,\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial Q}{\partial y}\tag{20}$$

$$rot\,\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\tag{21}$$

Равенства (20) и (21) являются условиями Коши—Римана для функции комплексной переменной:

$$z=x+iy$$

$$f(z)=Q(x,y)+iP(x,y)$$

Выполнение этих равенств означает, что $f(z)$— аналитическая функция.

3.2. Операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах

Мы ввели понятия $gradu, rot\,\vec{a}, div\,\vec{a}$ в прямоугольной системе координат, но показали что результат не зависит от выбора системы координат. Во многих задачах математической физики удобнее пользоваться выражениями для этих операций в других системах координат, например, в цилиндрической или сферической.Мы выведем выражения для $gradu, rot\,\vec{a}, div\,\vec{a}$ в криволинейных ортогональных координатах, частными случаями которых являются цилиндрические и сферические координаты.

Пусть x,y,z прямоугольные координаты точки M, а q_1,q_2,q_3 ее криволинейные координаты. Формулы, связывающие криволинейные координаты с прямоугольными, запишем в виде:

$$x=x(q_1,q_2,q_3)\qquad y=y(q_1,q_2,q_3)\qquad z=z(q_1,q_2,q_3)\tag{22}$$

Зафиксируем значения координат q_2 и q_3 тогда уравнения (22) описывают параметрически кривую(q_1-параметр), которая называется координатная q_1-линией. Аналогично определяются координатные q_2-линия и q_3-линия. Через каждую точку пространства проходят три координатные q_i линии, (i=1,2,3). Криволинейные координаты q_1,q_2,q_3 называются ортогональными, если в любой точке пространства три координатные линии, проходящие через эту точку, попарно ортогональны(т.е. касательные к координатным линиям в этой точке попарно перпендикулярны). **Примеры:**

1) цилиндрические координаты:

$$x=r\cos\phi,\qquad y=r\sin\phi,\qquad z=z$$

$$r\geq 0,\qquad 0\leq\phi\leq 2\pi,\qquad -\infty<z<\infty$$

2)сферические координаты:

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\qquad y=z\sin\theta\sin\phi,\qquad z=r\cos\theta$$

$$r \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Параметры Ламе. Рассмотрим отрезок координатной q_1 — линии с длиной dl_1 и точки M и M_1 (рис.3.1).

Прямоугольные координаты точки M обозначим (x, y, z), а точки M_1 - $(x + dx, y+dy, z+dz)$. В силу уравнений (22):

$$dx = x(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - x(q_1, q_2, q_3)$$

Применим формулу Лагранжа конечных приращений:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1$$

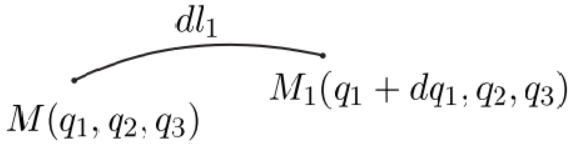

Рис. 3.1 – отрезок координатной q_1 — линии.

аналогично $dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1$ и $dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$, будем считать что производные беруться в точке M, тогда эти равенства верны с точностью до бесконечно малых второго порядка.

$$dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1 = H_1 dq_1$$

$dl_1 = H_1 dq_1$, где $H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$ Аналогично на q_2-линии: $dl_2 = H_2 dq_2$. На q_3-линии: $dl_3 = H_3 dq_3$, где $H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$ и $H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$ Величины $H_i, i = 1, 2, 3$ называются параметрами Ламе или масштабными множителями криволинейных координат , он показывает на сколько изменилась длина dl_i если параметр q_i изменился на dq_i.

Параметры ламе в цилиндрических координатах(r, ϕ, z):

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$

$$H_2 = r \qquad\qquad H_3 = 1$$

Эти значения можно получить геометрически.(рис.3.2 правая часть)

$$OM = r, \qquad\qquad HM = OC = z$$

$$MM_1 = dl_1 = dr \Rightarrow H_1 = 1$$

$$MM_2 = dl_2 = r d\phi \Rightarrow H_2 = r$$

$$MM_3 = dl_3 = dz \Rightarrow H_3 = 1$$

Параметры Ламе сферических координат(r, θ, ϕ): Можно вывести из формул, а так же геометрически(рис.3.2 левая часть)

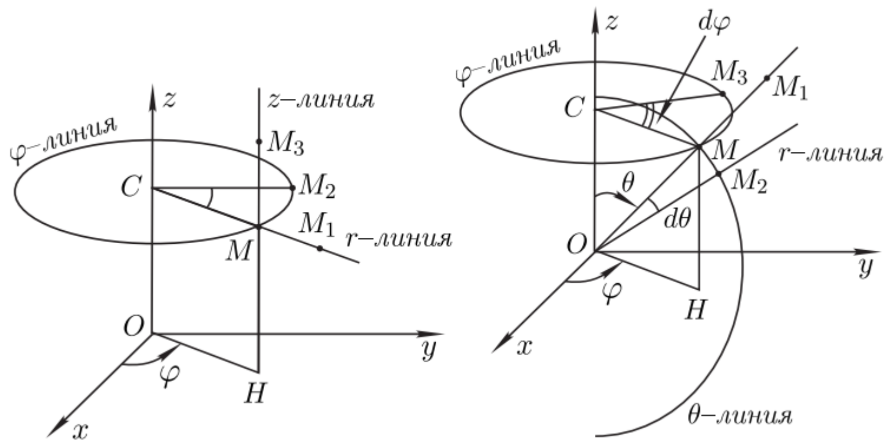

Рис. 3.2 – Геометрическая интрепретация цилиндрических и сферических координат.

$$OM = r,$$
$$CM = r\sin\theta$$
$$MM_1 = dl_1 = dr \Rightarrow H_1 = 1$$
$$MM_2 = dl_2 = rd\theta \Rightarrow H_2 = r$$
$$MM_3 = r\sin\theta d\phi \Rightarrow H_3 = r\sin\theta$$

Из полученных ранее формул следует:

$$dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{23}$$

Элементы dl_1, dl_2, dl_3 ортогональны, это длины сторон прямоугольного параллелепипеда, значит левая часть выражения (23) равна объему в декартовых координатах, а $dq_1 dq_2 dq_3$ равна объему в криволинейных координатах:

$$dV_{xyz} = H_1 H_2 H_3 dV_{q_1 q_2 q_3}$$

С другой стороны:

$$dV_{xyz} = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)}\right| dV_{q_1 q_2 q_3} \tag{24}$$

Поэтому

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)}\right| = H_1 H_2 H_3 \tag{25}$$

Операция градиент в криволинейных ортогональных координатах Пусть (q_1, q_2, q_3) криволинейные ортогональные координаты точки M, возьмем в качестве базиса свзанного в точке M единичные векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ направленные по касательным к координатным линиям в точке M в сторону возрастания соответствующей координаты. Особенность этого базиса в том, что в разных точках он направлен по разному(в отличие от векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), так как по разному направленны касательные. Напишем ралзожение $gradu$ в точке M по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ связанному с точкой M:

$$gradu(M) = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} \tag{26}$$

вычислим c_1 умножив скалярно равенство (26) на вектор $\vec{e_1}$:

$$(gradu(M) \cdot \vec{e_1}) = \frac{\partial u}{\partial \vec{e_1}}(M) = c_1 \tag{27}$$

Здесь мы учли что скалярное произведение ортогональных векторов дает ноль. $\frac{\partial u}{\partial \vec{e_1}}(M)$ - это производная функции $u(M)$ по направлению $\vec{e_1}$ в точке M(рис.3.3),

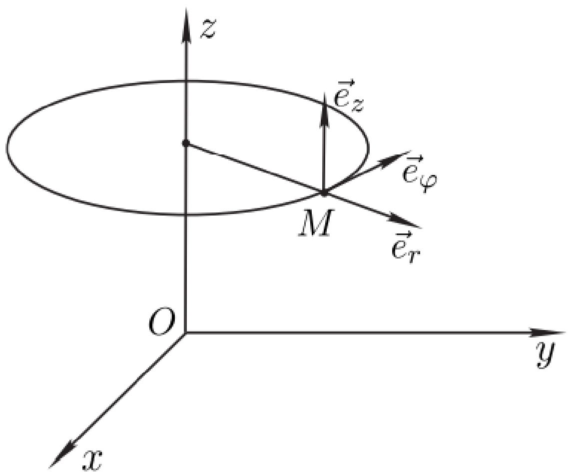

Рис. 3.3 – Производная функции $u(M)$.

значит (27) можно записать:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e_1}}(M) = \lim_{dl_1 \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{dl_1} = \frac{1}{H_1} \lim_{dl_1 \to 0} \frac{u(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{dq_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}$$

Аналогично:

$$c_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}, \qquad c_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}$$

Подставив найденные значения c_1, c_2, c_3 в выражение (26) получим выражение для градиента в криволинейных координатах:

$$gradu(M) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e_3} \tag{28}$$

Величны H_1, H_2, H_3 так же зависят от выбора точки M.

Пример: Выражение для $gradu$ в цилиндрических координатах(рис.):

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{e_r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\vec{e_\phi} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e_z}$$

Задание. Записать выражение для gradu в сферических координатах.

Дивергенция векторного поля в криволинейных ортогональных координатах записывается в виде:

$$div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_1H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right) \tag{29}$$

Выражение (29) так же берется в точке M.

Пример: Пусть разложение вектора $\vec{a}$ по базису, связанному с цилиндрическими координатами имеет вид

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\phi\vec{e_\phi} + a_z\vec{e_z}$$

Так как $H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = 1$, то:

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ra_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Ротор векторного поля в криволинейных ортогональных координатах:

$$rot\,\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{e_1} & H_2\vec{e_2} & H_3\vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3 \end{vmatrix} \tag{30}$$

Лекция 4

4.1. Числовой ряд. Критерий Коши сходимости числового ряда

Под словом «ряд» в математическом анализе понимают сумму бесконечного числа слагаемых. пусть a_n некоторая числовая последовательность.Образуем формальное выражение:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{31}$$

выражение (31) назвается *числовым рядом*, а числа a_k *членами ряда*. Оно формально потому что мы еще не ввели понятие суммы бесконечного числа слагаемых. Сумма первых n слагаемых:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{32}$$

называется частичной суммой (n-ой частичной суммой) ряда.

если существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{33}$$

то ряд называется сходящимся, а число S называется суммой ряда.

Пример:

1)

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Чтобы установить для каких q ряд сходится надо рассмотреть предел частичных сумм при $n \to \infty$

1.1) если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ отсюда следует что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{q-1} \Rightarrow S = \frac{1}{q-1}$$

1.2) если $|q| > 1$, то q^n - беконечно большаяя последовательность $\lim_{n\to\infty} S_n$-не существует, ряд расходится.

1.3) Если $q = 1$, $S_n = n \Rightarrow$ряд расходится.

1.4)Если $q = -1$, то $S_n = 1, 0, 1, 0, ...1, 0..$-ряд рассходится.

2)Гармоническим ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Докажем что этот ряд рассходится, сгруппировав члены ряда следующим образом:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+...+\frac{1}{32}\right)$$

Сумма дробей в каждой из круглых скобок больше $\frac{1}{2}$, откуда вытекает, что S_n — бесконечно большая последовательность и ряд рассходится.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости числового ряда).

Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $p \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Сходимость числового ряда — это сходимость последовательности S_n его частичных сумм, а для сходимости последовательности S_n необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т.е. удовлетворяла условию:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $p \in \mathbb{N}$: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ или:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

что и доказывает теорему.

Следствие 1.(необходимое условие сходимости ряда) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ **Доказательство.** Поскольку ряд сходится, то, согласно критерию Коши, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $p \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

Положим в этом неравенстве $p = 1$. Тогда получим, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|a_{n+1}| < \varepsilon$. Это и означает, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим через r_n сумму:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Эта величина называется остатком ряда.

Следствие 2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $r_n \to 0$ при $n \to \infty$

Доказательство. Пусть сумма ряда равна S, тогда $r_n = S - S_n$, причем $S_n \to S$ при $n \to \infty$, значит $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S^A И S^B, тогда для любых чисел α и β ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$$

сходится и его сумма равна $\alpha S^A + \beta S^B$

Доказательство. Для любого n справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Первое слагаемое в правой части равенства стремится к αS^A, а второе — к βS^B, значит:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S^A + \beta S^B$$

4.2. Ряды с положительными членами

Если все $a_k \geq 0$, то ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется рядом с положительными членами. Члены такого ряда часто будем обозначать p_k(или q_k) Последовательность S_n частичных сумм ряда с положительными членами является неубывающей. Поэтому для сходимости ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

Теорема 3(признак сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами:

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (Ряд P) и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ (Ряд Q)

и пусть $\forall : p_k \leq q_k$

Тогда:

1) из сходимости ряда Q следует сходимость ряда P;

2) из расходимости ряда P следует расходимость ряда Q. **Доказательство.**

Утверждения теоремы следуют из неравенств

$$S_n^P = \sum_{k=1}^{n} p_k \leq \sum_{k=1}^{n} q_k = S_n^Q$$

если ряд Q сходится, то последовательность $\{S_n^Q\}$ его частичных сумм ограничена, а так как $S_n^P \leq S_n^Q$ последовательность $\{S_n^P\}$ частичных сумм ряда P также ограничена и, следовательно, ряд P сходится. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

Пример. Рассмотрим обобщенный гармонический ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$

где α — положительное число. Если $\alpha < 1$, то для $\forall k : \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ и по признаку сравнения с гармоническим рядом следует, что обобщенный гармонический ряд при $\alpha < 1$ расходится.

Теорема 4 . Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ - ряд с положительными членами и $\forall k : \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right)$, тогда ряд с сходится(расходится) **Доказательство:**
Воспользуемся признаком сравнения (теорема 3). Пусть $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$, тогда:

$$p_{k+1} \leq q \cdot p_k \leq q \cdot q \cdot p_{k-1} \leq q^2 \cdot p_{k-1} \leq q^3 \cdot p_{k-2} \leq ... \leq q^k \cdot p_1$$

так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot p_1$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ также сходится.

Если $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right)$, то $p_{k+1} \geq p_k \geq p_{k-1} \geq ... \geq p_1$ Все члены ряда больше или равны некоторого положительного числа q_1, значит не выполнено необходимое условие сходимости ряда и значит ряд расходится.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). Если существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = q < 1 \left(\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} > 1\right)$$

то ряд $\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k}$ сходится(расходится).

Замечание 1. В условии теоремы 4 неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ нельзя заменить условием $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$

пример: Для гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

это условие выполнено, но ряд расходится.

Замечание 2. Если предел $\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$, то ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, может как сходиься, так и расходиться.

примеры:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Для этих рядов выполнено указанное условие,и при этом первый из рядов расходится, а второй — сходится.

Теорема 5 Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, ряд с положительными членами, пусть $\forall k : \sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} > 1)$, тогда ряд сходится(расходится)

Доказательство:

Если $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$, то $p_k \leq q^k$.Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ сходится(поскольку$0 < q < 1$), значит ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ так же сходится.

Если $\sqrt[k]{p_k} \geq 1$, то $p_k \geq 1$, то не выполнено необходимое условие сходимости ряда, и, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится.

Следствие: Если существует $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = q < 1 \quad \left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} > 1\right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится(расходится).

Замечание 1. Неравенство $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ нельзя заменить на неравенство $\sqrt[k]{p_k} < 1$
пример: Для гармонического и обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

это условие выполнено: $\sqrt[k]{\frac{1}{k}} < 1$ и $\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} < 1$, но первый ряд расходится, а второй сходиться.

Замечание 2. Если предел $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = 1$, то ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, может как сходись, так и расходиться.

пример: В качестве примеров снова возьмем гармонический и обобщенный гармонический ряд, для которых указанное условие выполнено, и при этом первый ряд сходится, а второй — расходится.

Замечание 3. Признак Коши имеет более широкую область применимости по сравнению с признаком Даламбера.

Если $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$, то начиная с некоторого номера будет выполненно нераввенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q_1 < 1$, то есть из выполнения признака Даламбера, следует выполнение признака Коши. Обратное неверно. Рассмотрим **пример:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2}{2^k}$$

Для этого ряд $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k+2}{2}$ поэтому, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ и, следовательно, «работает» признак Коши, согласно которому ряд сходится. Но при этом:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(-1)^{k+1} + 2}{(-1)^k + 2} \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & \text{если } k \text{ четное.} \\ \dfrac{3}{2}, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Полученные соотношения показывают, что признак Даламбера в данном случае «не работает» так как для нечетных $k : \frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$.

Теорема 6 (интегральный признак Коши – Маклорена).

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ряд с положительными членами и пусть существует функция $f(x)$, определенная при $x \geq 0$ и удовлетворяющая условиям:

1)$f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$;

2)$f(x)$ не возрастающая функция при $x \geq 0$;

3)$\forall k : f(k) = p_k$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \qquad \text{где} \qquad a_n = \int\limits_1^n f(x)\, dx$$

Доказательство. если $k - 1 \leq x \leq k$, то

$$p_k = f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) = p_{k-1} \qquad \text{при} \qquad k - 1 \leq x \leq k$$

Поэтому

$$\int\limits_{k-1}^{k} p_k\,dx \le \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le \int\limits_{k-1}^{k} p_k\,dx$$

то есть

$$p_k \le \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le p_{k-1} \qquad k = 2, 3, ...$$

Просуммируем эти неравенства по k от 2 до n:

$$S_n - p_1 \le \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx \le S_{n-1} \tag{34}$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ряд с положительными членами, то S_n неубывает, так как $f(x)$ неотрицательная, то a_n также неубывающая, следовательно для сходимости этих последовательностей достаточно их ограниченности. Но из неравенства (34) следует, что последовательности либо ограниченны, либо неограниченны одновременно, следовательно, последовательность S_n сходится (а значит, сходится и наш ряд a_n) тогда и только тогда, когда существует $\lim_{n\to\infty} a_n$

Пример: Рассмотрим обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \text{при } \alpha > 1$$

В качестве функции $f(x)$ возьмем $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, x \ge 1$, эта функция убывающая и неотрицательная при $x \ge 1$, и $f(k) = \frac{1}{k^\alpha}$, поскольку

$$a_n = \int\limits_{1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

первое слагаемое стремиться к нулю, значит

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-\alpha}$$

Следовательно, согласно теореме 6, обобщенный гармонический ряд сходится при $\alpha > 1$.

Лекция 5

5.1. Знакопеременные ряды

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(будем обозначать его A) Будем считать, что он содержит бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. В таком случае ряд A назовем знакопеременным.

Определение. Ряд А: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$(обозначим его ряд $|A|$)

Отметим, что если ряд A сходится абсолютно, то он сходится (докажите это с помощью критерия Коши).

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ..$$

является абсолютно сходящимся, т.к. сходится ряд из модулей его членов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Определение. Ряд A называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд $|A|$ расходится.

Пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

не является абсолютно сходящимся, т.к. расходится ряд из модулей его членов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Докажем что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ является условно сходящийся доказав его сходимость, для этого рассмотрим два выражения и два неравенства для его частичных сумм S_{2n}

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) > 0,$$

Запишем эту сумму в другом виде

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - ... - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n} < 1$$

Из этих неравенств следует, что последовательность S_{2n} ограниченная, поскольку для любого n выполнены неравенства $0 < S_{2n} < 1$. Кроме того, как показывает первое выражение, S_{2n} — возрастающая последовательность. следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

Возьмем теперь частичную сумму с нечетными номерами

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to S \qquad \text{при } n \to \infty$$

Любая последовательность частичных сумм с четными или нечетными номерами сходится к одному и тому же пределу значит

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Следовательно, данный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ сходится условно.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$(ряд A) знакопеременный ряд, выпишим его положительные и отрицательные члены в том порядке как они стоят в ряде A. $p_1, p_2, ..., p_n$- положительные члены. $-q_1, -q_2, ..., -q_n$- отрицательные члены. И введем два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$(Ряд P) и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ (Ряд Q)

Теорема 7.

1) Если ряд A сходится абсолютно, то ряды P и Q сходятся, причем сумма ряда A равна разности сумм рядов P и Q

$$S^A = S^P - S^Q$$

2) Если ряд A сходится условно, то ряды P и Q расходятся.

Докозательство:

1)Пусть ряд A сходится абсолютно, т.е $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = S^A$, тогда

$$\forall n: \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = S^A \tag{35}$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Пусть в эту сумму входят положительные слагаемые $p_1, p_2, ..., p_{n_1}$ и отрицательные $-q_1, -q_2, ..., -q_{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$ Введем обозначения сумм этих слагаемых, взяв q_i:

$$S_{n_1}^{\ P} = \sum_{k=1}^{n_1} p_k \qquad \text{и} \qquad S_{n_2}^{\ Q} = \sum_{k=1}^{n_2} q_k$$

тогда S_n^A и $S_{|n|}^A$ можно записать в виде:

$$S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$$

$$S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q, \qquad S_n^{|A|} = S_{n_1}^P + S_{n_2}^Q \tag{36}$$

Из (35) и (36) следует $S^P_{n_1} \leq S^{|a|}$ и $S^Q_{n_2} \leq S^{|a|}$, следовательно последовательности частичных сумм P и Q ограниченны, и следовательно сходяться.

Перейдем к пределу в первом равенстве из (36)

$$\lim_{n\to\infty} S^A_n = S^A_n = S^P - S^Q$$

Первое утверждение доказанно.

2) Пусть ряд A сходится условно. Докажем что P и Q расходятся. Если бы они сходились, т. е. существовали бы пределы:

$$\lim_{n_1\to\infty} S^P_{n_1} \quad \text{и} \quad \lim_{n_2\to\infty} S^Q_{n_2}$$

то в силу второго равенства (36) существовал бы и предел $\lim_{n\to\infty} S^{|A|}_n$ т. е. сходился бы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, что противоречит условию что ряд A сходится условно. Следовательно, по крайней мере один из рядов P и Q расходится. Если допустить что один из рядов P и Q сходится, а другой расходится, то первого равенства (36) следует что расходился бы ряд A, а он по условию сходится. Итак, ряды P и Q расходятся.

Признак Дирихле

Этот признак относится к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Теорема 8 (признак Дирихле).

1) Пусть последовательность b_n не возрастающая и бесконечно малая.($\forall k:\ b_k \geq 0, b_{k-1} - b_k \geq 0$)

2) Пусть последовательность $\sum_{k=1}^{n} a_k$ - ограниченна, т. е. $\exists M > 0,\ \forall n : |S_n| \leq M$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство.

Для доказательства сходимости данного ряда воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим «отрезок» ряда, который фигурирует в критерии Коши, от $k = n+1$ до $k = n+p$, и представим a_k как $a_k = S_k - S_{k-1}$. Преобразуем выражение для указанного «отрезка» ряда следующим образом:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = \sum_{k=n+2}^{n+p+1} b_{k-1} S_{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} =$$

$$b_{n+p} S_{n+p} + \sum_{k=n+2}^{n+p} b_{k-1} S_{k-1} - b_n S_n - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = b_{n+p} S_{n+p} - b_n S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}(b_{k-1} - b_k)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\exists N, \text{такой, что } \forall n > N : 0_n < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le b_{n+p}M + b_nM + M((b_n - b_{n+1}) - (b_{n+1} + b_{n+2}) + ... + (b_{n+p-1} - b_{n+p})) =$$

$$= 2b_n \cdot M < \frac{2\varepsilon}{2M}M < \varepsilon$$

Из полученного неравенства согласно критерию Коши следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \tag{37}$$

x - фиксированное число. Если $x = \pi m, m \in \mathbb{Z}$, то каждый $\sin kx$ равен нулю и ряд сходится. Поэтому будем считать что $x \neq \pi m$. Если $\alpha \le 0$ и $x \neq \pi m$, то ряд расходится. Поэтому будем считать $\alpha > 0$

Применим к этому ряду признак Дирихле. Положим $a_k = \sin kx$ и $b_k = \frac{1}{k^{\alpha}}$. Последовательность b_k удовлетворяет условию 1) теоремы 8. Проверим выполнение условия 2).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \right.$$

$$\left. - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2} + ... + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Здесь мы воспользовались равенством $2\sin\frac{x}{2}\sin kx = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x$

Из полученного выражения для S_n следует, что

$$|S_n| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \text{ если } x \neq \pi m, \ m \in \mathbb{Z}$$

Значит последовательность S_n ограниченна и условие 2) выполняется, и, следовательно, по признаку Дирихле ряд сходится, если $x \neq \pi m$, при $x = \pi m$ ряд также сходится, так как все члены ряда равны нулю.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \qquad \text{- сходится для } \forall x \text{ при } \alpha > 0.$$

Если $\alpha > 1$, то ряд сходится абсолютно, так как

$$\left|\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \text{а ряд} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{сходится}$$

Если $0 < \alpha \leq 1$, то ряд сходится условно для этого докажем что ряд из модулей расходится.

$$\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \geq \frac{\sin^2 kx}{k^\alpha} = \frac{1-\cos 2kx}{2k^\alpha}$$

При $0 < \alpha \leq 1$ ряд расходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2kx}{2k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{2k^\alpha}$$

Первый ряд в равенстве расходится(обобщеный гармонический ряд,при $0 < \alpha \leq 1$), а второй сходится (это можно доказать с помощью признака Дирихле так же, как это было сделано для ряда (37)) Следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \qquad \text{расходится}$$

Это означает, что при $0 < \alpha \leq 1$, ряд (37) сходится условно.

Следствие 1 из теоремы 8 (признак Абеля). 1)Пусть последовательность b_k монотонная и ограниченная

2) ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится

Тогда ряд $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится.

Доказательство.

Пусть (для определенности) последовательность $\{b_k\}$ — невозрастающая , ограниченная, ее предел $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Тогда $b_k - b$ стремится к нулю не возрастая.

Так как ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится, то последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ ограниченна. Тем самым ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b)$$

сходится по признаку Дирихле.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k b$$

b как постоянный множитель можно вынести за сумму ряда a_k, который по условию сходится, тем самым сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

Следствие 2 из теоремы 8 (признак Лейбница).

Рассмотрим знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k, \qquad p_k > 0$$

пусть p_k монотонно стремиться к нулю. Тогда ряд называется рядом Лейбница. Ряд Лейбница сходится.

Доказательсвто. Применим признак Дирихле. $a_k = (-1)^{k-1}$, а $b_k = p_k$, тогда

$$S_n = 1, 0, 1, 0, \dots 0, 1, \dots \qquad\qquad \text{ограниченая}$$

Поэтому, согласно теореме 8, ряд Лейбница сходится.

пример.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Этот ряд сходится, так как является рядом Лейбница.

Лекция 6

6.1. Свойства рядов.

Сочетательное свойство рядов.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ряд A), объеденим члены этого ряда в группы следующим образом

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} = b_1$$

$$a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k} = b_k$$

И составим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad (\text{ряд } B)$$

Теорема 9. Если ряд A сходится, то ряд B также сходится и их суммы равны.

Доказательство.

Рассмотрим частичную сумму ряда B: $S_k^B = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = a_1 + \ldots + a_{n_k} = S_{n_k}^A$. Так как $\{S_n^A\} \to S^A$ при $n \to \infty$, а $\{S_k^B\}$ подпоследивательность $\{S_n^A\}$, и следовательно сходится к тому же числу что и $\{S_n^A\}$, т.е. сумма ряда B равна сумме ряда B.

Обратное утверждение неверно, достаточно рассмотреть контрпример.

Рассмотрим ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots - 1 + 1 - \ldots$ этот ряд рассходится его частичные суммы чередуются 0 и 1, но слагаемые можно сгруппировать так что мы получим ряд состоящий из нулей $(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots$, он сходится его сумма равна нулю.

Перестановочное свойство рядов.

Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ряд A) и $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ (ряд A'), где $a'_k = a_{n_k}$ и $a_k = a_{m_k}$, n_k, m_k - какие-то номера.

Теорема 10. Если ряд A сходится абсолютно, то ряд A' также сходится абсолютно и их суммы равны: $S_A = S_{A'}$

а) Сначала рассмотрим случай, когда члены ряда A неотрицательны $a_k \geq 0$. Ряд A сходится(значит сходится абслолютно т.к все членены неотрицательны) и его сумма равна S^A.

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S^A$$

$$S_k^{A'} = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} \leq S^A$$

отсюда следует что $\{S^{A\prime}\}$ - ограниченная последовательность, поэтому ряд A' сходится. Кроме того

$$\lim_{k\to\infty} S_K^{A'} = S^{A'} \leq S^A$$

С другой стороны ряд A можно рассматривать как ряд полученный путем перестановки членов ряда A', поэтому

$$S^A \leq S^{A'}$$

и значит $S^A = S^{A'}$

б) Пусть ряд A - знакопеременный и сходится абсолютно, т.е .сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Согласно доказанному в пункте а) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|$ полученный путем перестановки членов из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, и их суммы равны. По теореме 7: $S^A = S^P - S^Q$, $S^{A'} = S^{P'} - S^{Q'}$(обозначения такие же как и в теореме 7). Ряды P' и Q' получаются путем перестановки членов рядов P и Q, поэтому по доказанному в пункте а) $S^{P'} = S^P$ и $S^{Q'} = S^Q$ и, следовательно, $S_A = S_{A'}$.

Теорема 11 (Римана).

Если ряд A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно,тогда для любого числа S можно так представить члены ряда A что сумма полученного ряда A' будет равна S. **Доказательство.** Пусть ряд A сходитс условно, есму соответствуют 2 ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \qquad \text{Ряд } P \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \qquad \text{Ряд } Q$$

которые, согласно теореме 7, эти ряды расходятся.

Зададим произвольное число S, путь для определенности $S > 0$ и покажем, как можно переставить члены ряда A, чтобы сумма полученного ряда A' равнялась S.

равнялась S. Сначала будем брать члены ряда P, в том порядке как они стоят в ряде A, до тех пор, пока не получится сумма, большая S:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1 - 1} \leq S, \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1 - 1} + p_{n_1} > 1.$$

Затем будем добавлять члены ряда Q со знаком минус до тех пор, пока не получится сумма, меньшая S:

$$p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{n_2} \geq S$$

Здесь мы пользуемся тем что раз ряды P и Q расходяться на каждом этапе у нас будет бесконечное число членов с помощью которые мы можем составить сумму как большую, так и меньшую S.

В результате получим ряд с переставленными членами A' частичные суммы которого "колеблятся"возле числа S, причем "амплитуда"этих колебаний стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $p_n \to 0$ и $q_n \to 0$, при $n \to \infty$, это означает что ряд A' сходится и его сумма равна S.

Лекция 7

7.1. Функциональные последовательности.

Пусть каждому натуральному числу поставленно в соответствие функция $f_n(x)$, определенная на множестве X, то говорят, что на множестве X задана функциональная последовательность и обозначается

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Зафиксируем какое-нибудь значение $x_0 \in X$, тогда для этого значения x_0 наша последовательность является числовой последовательностью $f(x_0)$. если эта числовая последовательность сходится (расходится) в точке x_0, то говорят что функциональная последовательность сходится (расходится) в точке x_0 Если функциональная последовательность сходится в каждой точке X то говорят что она сходится на множестве X.

При этом предел последовательности будет зависить от x т.е. является функцией (обозначим ее $f(x)$)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

или

$$f_n(x) = f(x) \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

Функция $f(x)$ называется пределом или предельной функцией последовательности.

Пример. рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ она определенна на всей числовой прямой $x \in (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Для $\forall x \neq (-1, 1]$ последовательность расходится расходится, то есть *область сходимости* последовательности полуинтервал $(-1, 1]$ и его сумма $S(x) = \frac{x}{1-x}$.

Отметим, что каждая функция $f_n(x) = x^n$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$, а предел последовательности разрывная функция в точке 1.

Возникает вопрос в каких случаях предел последовательностей непрерывных функций будет непрерывной функцией. Ответ на этот вопрос связан с понятием равномерной сходимости функциональных последовательностей.

Определене 1. Говорят что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на множестве X, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Главным моментом в этом определении является то, что номер N, один и тот же для всех x из множества X.

Определене 2. Говорят что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на множестве X, если $\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ (то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall n > N$:

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Эти определения эквивалентны,это следует из того, что если $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ для всех x из множества X, то $\sup\limits_X |f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon$ и обратно: если $\sup\limits_X |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ то $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для все $x \in X$

Примеры.

1)$f_n(x) = x^n, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} = X$ На этом сегменте $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ для $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$. Последовательность сходится на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$, выясним сходится ли она равномерно, применим второе определение

$$\sup_{[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,\frac{1}{2}]} x^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

Это значит что последовательность $x^n \rightrightarrows f(x) = o$ на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$.

2) $f_n(x) = x^n, \quad 0 \le x < 1 = X$

На этом полуинтервале $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ для $\forall x \in [0, 1)$

$$\sup_{[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1)} x^n = 1 \nrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

последовательность $\{x^n\}$ сходится к $f(x) = 0$ на полуинтервале $[0, 1)$ неравномерно.

Теорема 12 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности).

Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась к $f(x)$ на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$: выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{38}$$

Доказательство.

1)Необходимость. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X. Тогда (по определению 1 равномерной сходимости) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

так как $n + p > n$ тогда $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$: выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Из двух написанных неравенств следует выполнения условия с (38)

Достаточноть. Пусть выполнено условие (38), тогда $\forall x \in X$: $f_n(x)$ - фундоментальна и следовательно сходится, докажем что она сходится равномерно

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

В условии (38) перейдем к пределу при $p \to \infty$, тогда $f_{n+p} \to f(x)$, получаем

$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

Таким образом, доказанно, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall n > N$, и $\forall x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

Но это и означает согласно определению 1 равномерной сходимости, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

7.2. Функциональные ряды.

Пусть $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ последовательность функций определенных на одном множестве X, составим формальныую сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$$

Зафиксируем значение $x = x_0 \in X$, тогда наш ряд станет числовым рядом, если числовой ряд сходится, то говорят что функциональный ряд сходится в точке x_0, если он сходится в каждой точке множества X, то говорят что он сходится этом множестве.

Определение. Говорят что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно к функции $S(x)$

Теорема 12' (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).

ункционального ряда). Для того чтобы функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходился равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \tag{39}$$

Доказательство. По определению ряд равномерно сходится, когда равномерно сходятся последовательность частичных сумм, это следует из неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, он сходится при $|x| < 1$, его сумма равна

$$S(x) = \frac{x}{1-x}$$

Посомтрим сходится ли он равномерно на полуинтервал $X = [0, 1)$.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^n}{1-x}$$

$$S_n(x) - S(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k x = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\sup_{[0,1)} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{[0,1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$$

Это означает что на моножестве $X = [0,1)$ ряд сходится неравномерно.

Возьмем теперь другое множество $X = [0, 1-\delta]$, где $0 < \delta < 1$

$$\sup_{[0,1-\delta]} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{[0,1-\delta]} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{(1-\delta)^{n+1}}{\delta} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Это означает что на моножестве $X = [0, 1-\delta]$ ряд сходится равномерно.

Задача. Проверте сходится ли этот ряд на множестве $(-1, 0]$ и $[-1+\delta, 0]$

Признаки равномерной сходимости функционалных рядов.

Определение. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, $(p_k \geq 0)$ назвается мажорантным для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X, если $\forall k$ и $\forall x \in X : |u_k(x)| \leq p_k$

Теорема 13 (признак Вейерштрасса). Если для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X существует сходящийся мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши для числовых рядов, $\exists N$, такой,что $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k \leq \varepsilon$$

Таким образом, для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ выполнено условие Коши из теоремы 12' равномерной сходимости ряда, следовательно ряд сходится равномерно.

Замечание 1. Если выполненно условие теоремы 13, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно на множестве X.

Замечание 2. Обратное устверждение теоремы 13 неверно. Из равномерной сходимости на множестве X функционального ряда не следует существование сходящегося мажорантного ряда для этого функционального ряда.

Пример. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$$

для $\alpha > 0$ ряд сходится при $\forall x \in \mathbb{R}$ Надо установить сходится ли он равномерно. пусть $\alpha > 1$, в качестве мажорантного ряда возьмем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

(он будет мажорантным для $\forall \alpha$), этот ряд сходится при $\alpha > 1$, следовательно наш Рассмотрим функциональный ряд сходится равномерно на всей чилсловой прямой.

Если $0 < \alpha \leq 1$, то у нашего функционального ряда нет сходящегося мажорантного ряда. Докажем от противного, если есть такой ряд есть , то сходился бы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k^{\alpha}}$, а этот ряд, как было доказанно ранее, расходится. Значит при таких α нельзя доказать равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса.

Признаки Дирихле и Абеля.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ назвается равномерно ограниченной на множестве X, если $\exists$ число $M > 0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|f_n(x)| \leq M$$

Примеры.

1)

$$\{f_n(x)\} = \frac{\sin nx}{n}$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$, в качестве M возьмем 1.

$$\forall n \quad \text{и} \quad \forall x \quad |f_n(x)| \leq 1$$

2)

$$\{f_n(x)\} = \frac{nx}{n+x}$$

где $x \in [0, +\infty)$, для начала заметим что $\forall n \quad f_n(x)$ ограниченна на $[0, +\infty)$:

$$\{f_n(x)\} = \underbrace{\frac{x}{n+x}}_{\leq 1} \cdot n \leq n$$

$\forall n$ Функциональная последовательность $f_n(x)$ также ограниченна:

$$\{f_n(x)\} = \underbrace{\frac{n}{n+x}}_{\leq 1} \cdot x \leq x$$

Несмотря на это последовательность не является равномерно ограниченной. Возьмем $x = n$

$$\{f_n(x)\} = \frac{n \cdot n}{n+n} = \frac{n}{2}$$

Всегда можно указать намер n, который будет больше $\forall M$.

Признаки Дирихле и Абеля относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \tag{40}$$

Теорема 14 (признак Дирихле равномерной сходимости)

1) последовательность $\{b_n(x)\}$ при любом $x \in X$ является невозрастающей и $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на x

2) последовательность $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\}$ равномерно ограниченна на x(т.е $\exists$ число $M > 0$, $\forall n$ и $\forall x \in X$: $|f_n(x)| \leq M$)

Тогда ряд (40) равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Проводится в точности так же, как и доказательство теоремы 8 о признаке Дирихле для числовых рядов, но только теперь нужно использовать критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 14' (признак Абеля равномерной сходимости ряда)

1) последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограниченна на xи монотонна при любом $x \in X$

2) последовательность $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\}$ сходится равномерно на x

Тогда ряд (40) равномерно сходится на множестве X.

Доказать эту теорему предлагается самостоятельно.

Пример. Снова рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Приминим к нему признак Дирихле, $a_k(x) = \sin kx$, $b_k(x) = \frac{1}{k^{\alpha}}$

1)$\{b_n(x)\}$ не зависит от x, поэтому

$$\{b_n(x)\} = \left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\} \rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad (-\infty, +\infty)$$

Последовательность $\{b_n(x)\}$ убывающая.

2)Для

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$$

Ранее была получена оценка

$$|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \text{ если } x \neq \pi m, \;\; m \in \mathbb{Z}$$

Возьмем сегмент $X = \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < \pi$, тогда

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\delta}{2}|} = M \quad \forall x \in [\delta, 2\pi - \delta]$$

По теореме 14 ряд $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$ сходится равномерно на сегменте $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Из доказанного следует что на любом сегменте принадлежащему интервалу $(0, 2\pi)$ ряд сходится равномерно. Это же утверждение справедливо для любого интервала $(2\pi m, 2\pi m + 2\pi)$

Докажем что на сегменте $[0, 2\pi]$ ряд сходится неравноменрно. Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости, для этого построим к нему отрицание $\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N, \exists p \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 2\pi]$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \right| \geq \varepsilon \tag{41}$$

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\sin 1, \forall N : n > N, p = n, x = \frac{1}{n} \in [0, 2\pi]$ и рассмотрим левую часть неравенства (41)

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin\frac{k}{n}}{k^\alpha}\right| > \sum_{k=n+1}^{2n} \sin 1 \cdot \frac{1}{2n} = \sin 1 \cdot n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sin 1 > \varepsilon$$

Здесь мы воспользовались вспомагательными неравенствами

$$1 + \frac{1}{n} \le \frac{k}{n} \le 2 \Rightarrow \sin\frac{k}{n} \ge \sin 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{k^\alpha} \ge \frac{1}{k} \ge \frac{1}{2n}$$

7.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Равномерная сходимость и непрерывность.

Теорема 15. Пусть функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на промежутке X и для $\forall n$ $f_n(x)$ непрерывная функция на промежутке X, тогда $f(x)$ также непрерывна на X.

Доказательство. Докажем непрерывность функции $f(x)$ в произвольной точке x_0 принадлежащую промежутку X. Для этого нужно даказать что $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0, \forall x \in X$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N, \forall n > N$ и $x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \left|\frac{\varepsilon}{3} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{42}$$

В частности это выполненно для

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{43}$$

Возьмем какую-нибудь функцию $f_n(x)$ с номером $n > N$, для нее выполнены неравенства (42) и (43), а так как $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0, то по заданному ε $\exists\delta$:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta \tag{44}$$

Используя неравенства (42), (43), (43) получаем

$$|f(x) - f(x_0)| \le |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))| \le$$

$$\le |f(x) \underset{<\frac{\varepsilon}{3}}{-} f_n(x)| + |f_n(x) \underset{<\frac{\varepsilon}{3}}{-} f_n(x_0)| + |f_n(x_0) \underset{<\frac{\varepsilon}{3}}{-} f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Равномерная сходимость последовательности непрерывных функций является только достаточным, но не необходимым условие непрерывности предельной функкии. Приведем пример

$$f_n(x) = \frac{n}{n+x} \qquad x \in [0, +\infty)$$

$f_n(x) \to f(x) = 1$, все $f_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны на полупрямой $[0, +\infty)$, но при этом последовательность $f_n(x)$ сходится неравномерно к $f(x)$.

$$\sup_{[0,+\infty]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,+\infty]} \frac{x}{n+x} = 1 \nrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Теорема 15'. Пусть все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на промежутке X и ряд сходится равномерно на этом промежутке, тогда сумма ряд $S(x)$ непрерывная функция на промежутке X.

Доказательство Конечная сумма непрерывных функций $u_k(x)$ является непрерывной суммой, поэтому частичная сумма $S_n(x)$ является непрерывной. По условию $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на промежутке X. Поэтому, согласно теореме 15, $S(x)$ непрерывная функция на промежутке X.

Лекция 8

8.1. Переход к пределу под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда.

Пусть $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на X и пусть все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ интегрируемы на любом сегменте, принадлежащем промежутку X. Возьмем две точки на этом промежутке - точку x_0 (зафиксируем ее) и точку x (она может пробегать весь промежуток X) и рассмотрим 2 интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Поставим вопрос: справедливо ли равенство

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Это равенство можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (\lim_{n\to\infty} f_n(t))\,dt \tag{45}$$

Если это равенство справедливо, то говорят, что можно переходить к пределу под знаком интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$.

Пример 1

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin nx, & 0 \le x \le \frac{\pi}{n} \\ 0, & \frac{\pi}{n} \le x \le \pi \end{cases}$$

Посмотрим к чему стремится эта функциоальная последовательность, возьмем $0 < x \le \pi$, тогда $\exists N, \forall n > N : x > \frac{\pi}{n} \Rightarrow f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ значит

$$\forall n : f_n(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$

Это значит что

$$\forall x \in [0,\pi] : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$$

Возьмем $x_0 = 0$ $0 < x \le \pi$

$$\int_0^x \underbrace{f_n(t)}_{=0}\,dt = \int_0^x (\lim_{n\to\infty} f_n(t))\,dt = 0$$

Но при этом

$$\forall n > N : \int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} n\sin nx\,dx = -\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{n}} = \cos\pi - \cos 0 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^x f_n(t)\,dt = 2 \neq 0$$

Тем самым равенство (45) не выполняется.

Теорема 16. Пусть $\{f_n\} \rightrightarrows f(x)$ и пусть все функции $\{f_n\}$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, тогда для любых двух точек пренадлежащих $[a, b]$ справедливо равенство (45), более того

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \tag{46}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу теоремы 15 предельная функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на любом сегменте x_0, x принадлежащему этом сегменту.

Для доказательства утверждения (46) воспользуемся определением 1 равномерной сходимости функциональной последовательности. Нужно доказать что $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$:

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| < \varepsilon \tag{47}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, то $\exists N, \forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Используя последднее неравенство получаем для $\forall n$ и $\forall x \in [a, b]$:

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} (f_n(t) - f(t))\,dt \right| \leq \left| \int\limits_{a}^{b} |f_n(t) - f(t)|\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b dt = \varepsilon$$

Условие (47) выполнено, что и требовалось доказать.

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на промежутке X и его сумма равна $S(x)$, пусть все функции $u_k(x)$ и $S(x)$ являются интегрируемыми функциями на любом сегменте $[x_0, x]$ принадлежащему X, поставим вопрос верно ли равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$$

Это равенство можно записать в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \tag{48}$$

Если это равенство справедливо, то говорят что ряд можно интегрировать почленно. Покажем что равенство (48) не всегда выполняется.

Пример 2.

$$f_k(x) = \begin{cases} k\sin kx, & 0 \le x \le \frac{\pi}{k} \\ 0, & \frac{\pi}{k} \le x \le \pi \end{cases}$$

Положим $u_1(x) = f_1(x), u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \ldots, u_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x), \ldots \quad k \ge 2$ Частичая сумма этого ряда равна

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = f_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \ \forall x \in [0, \pi]$$

$f_n(x) \to 0 \quad$ при $\quad n \to \infty$ это было выясненно в примере 1. Значит ряд сходится и его сумма равна нулю для $x \in [0, \pi]$, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^x u_k(t)\, dt = 2$$

Тем самым равенство (48) не выполняется.

Теорема 16'. Если все функции $u_k(x)$ являются непрерывными на сегменте $[a, b]$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на этом сегменте, то для любых x_0 и x из сегмента $[a, b]$ справедливо равенство (48).

Доказательство. Из условия теоремы следует, что сумма ряда $S(x)$ непрерывная функция на сегменте $[a, b]$(Теорема 15'), каждая частичная сумма $S_n(x)$ непрерывная функция на $[a, b]$, и $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a, b]$, тем самым для последовательности $S_n(x)$ выполнены все условия теоремы 16, значит

$$\int\limits_{x_0}^{x} S_n(t)\, dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)\, dt$$

Перепишем это утверждение в другом виде

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\, dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt$$

Последнее утверждение показывает, что последовательность частичных сумм сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ и его сумма равна $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right) dt$, т.е. справедливо равенство (48).

8.2. Переход к пределу под знаком производной и почленное дифференцирование ряда.

Пусть последовательность $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ на промежутке X и пусть все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ дифференцируемы на промежутке X.

Поставим вопрос: справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

Его можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' \tag{49}$$

Если это равенство справедливо, то говорят, что можно переходить к пределу под знаком производной. Приведем пример, показывающий, что равенство (49) может не выполняться.

Пример. Возьмем последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ рассмотрим ее на промежутке $X = (-\infty, +\infty)$, ее предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$$

Посмотрим выполняется ли равенство (49).

$$f'(x) = 0, \quad f_n'(x) = \cos nx$$

Последовательность $\{\cos nx\}$ сходится в точках $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ (при этом ее предел равен 1 и расходится в остальных точках числовой прямой. Следовательно, равенство (49) не выполнено ни в одной точке.

Теорема 17. Пусть выполнены условия:

1) все функции $\{f_n(x\}$ имеют непрерывные производные $f_n'(x)$ на сегменте $[a, b]$;

2) $f_n(x) \to f(x)$ на сегменте $[a, b]$;

3) $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Тогда функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и справедливо равенство

$$f_n'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a, b]$$

то есть справедливо равентсво (49).

Доказательство. Прежде всего отметим что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ по теореме 15. Отметим на $[a, b]$ точки x_0(ее зафиксируем) и x(любая точка из сегмента), тогда по теореме 15

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница для интеграла в левой части

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(t)\Big|_{x_o}^{x} = f_n(x) - f_n(x_0)$$

Тогда предел этого интеграла

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = f(x) - f(x_0)$$

Получим

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt$$

Продифференцируем полученное равенство учитывая что при фиксированном x_0 $f(x_0) = const$, производная константы ноль, а производная интеграла с переменным верхним пределом $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt$ равна подынтегральной функции взятой в этом верхнем пределе, при условии что эта функция непрерывна.

$$(f(x_0))' = 0, \qquad \left(\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt\right)' = \varphi(x)$$

Таким образом $f'(x) = \varphi(x)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится и его сумма $S(x)$ дифференцируемы на промежутке X, пусть все $u_k(x)$ также дифференцируемы на промежутке X.

Поставим вопрос: справедливо ли равенство

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

Его можно записать в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \tag{50}$$

Если это равенство справедливо, то говорят, что ряд можно дифференцировать почленно.

Приведем пример, показывающий, что равенство (50) можетне выполняться.

Теорема 17'. Пусть выполнены условия:

1)все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеют непрерывные производные $u_k'(x)$ на сегменте $[a, b]$;

2)ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на сегменте $[a, b]$ и его сумма равна $S(x)$;

3)ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к функции $\varphi(x)$.

Тогда функция $S(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и справедливо равенство

$$S'(x) = \varphi(x)$$

Его можно записать в виде (50).

Доказательство. Оно проводится на основе теоремы 17.

Замечание. В теореме 17' условие 2) можно заменить на условие 2') Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке. Тогда из условия 2') и 3) следует равномерная сходимость ряда на сегменте $[a, b]$.

Лекция 9

9.1. Сходимость в среднем

Пусть все функции $f_n(x)$ и и функция $f(x)$ интегрируемы на $[a, b]$

Определение. Говорят что функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если

$$\int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Возникает вопрос: как связанны между собой эти виды сходимости?

Из равномерной сходимости функциональной последовательности на сегменте $[a, b]$ следует поточечная сходимость. Обратное, как мы знаем, не верно. Такого же типа связь существует между равномерной сходимостью и сходимостью в среднем.

Теорема 18. Если все функции $f_n(x)$ и функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и последовательность $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$, то $f_n(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b - a}}$$

Используя это неравенство, получаем $\forall n > N$:

$$\int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx < \frac{\varepsilon}{b - a} \int\limits_a^b dx = \varepsilon$$

Это выполненно для $\forall n > N$, значит последовательность $f_n(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Замечание.Мы потребовали в условии теоремы , чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой на сегменте $[a, b]$. Можно доказать, что если все функции $f_n(x)$ интегрируемы и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то предельная функция $f(x)$ также будет интегрируемой на сегменте $[a, b]$.

Теперь покажем на примерах что между поточенной сходимостью и сходимостью в среднем нет никакой связи.

Пример 1. Для любого натурального числа k и любого натурального числа i, такого, что $1 \le i \le k$ определим функцию (рис.) $f_{ki}(x)$ на сегменте $0 \le x \le 1$ следующим образом:

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \frac{i-1}{k} \le x \le \frac{i}{k} \\ 0, & \text{в остальных точках сегмента} \quad [0, 1] \end{cases}$$

И составим последовательность $f_{11}(x), f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{k1}(x), \dots, f_{kk}(x), \dots$ Докажем что эта последовательность сходится в среднем к функции $f(x) = 0$ на сегменте $[0,1]$

$$\int\limits_0^1 (f_{ki}(x) - f(x))^2\,dx = \int\limits_{\frac{i}{k}}^{\frac{i-1}{k}} 1\,dx = \frac{1}{k} \to 0$$

Это значит что эта последовательность сходится в среднем к функции равном нулю на сегменте $[0,1]$. Вместе с тем данная последовательность не сходится ни в одной точке сегмента $[0,1]$, так как для любого фиксированного x из сегмента $[0,1]$ бесконено много членов равны нулю и бесконечно много членов равны единице.

Таким образом, из сходимости в среднем не следует поточечная сходимость.

Пример 2. Рассмотрим на сегменте $[0,\pi]$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}\sin nx, & \text{если} \quad 0 \le x\frac{\pi}{n} \\ 0, & \text{в остальных точках сегмента} \quad [0,\pi] \end{cases}$$

Похожую функцию мы рассматривали ранее, она стремилась к нулю во всех точка, ясно что корень из этой функции также стремится к нулю.

Докажем что в среднем она не сходится к $f(x) = 0$.

$$\int\limits_0^\pi (f_n(x) - \underset{=0}{f(x)})^2\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} n\sin nx\,dx = 2 \nrightarrow 0$$

Значит, что последовательность не сходится в среднем.

Таким образом, из поточечной сходимости не следует сходимость в среднем.

Теорема 19. Если все функции $f_n(x)$ и функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и последовательность $f_n(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a,b]$, то для любых точек x_0 и x из сегмента $[a,b]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

т.е. можно переходить к пределу под знаком интеграла, причем

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{на} \quad [a,b] \tag{51}$$

Доказательство. Требуется доказать соотношение (51) или что тоже самое

$$\int\limits_{x_0}^{x} (f_n(t) - f(t))\,dt \rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad [a,b]$$

Нам дано что

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{52}$$

воспользуемся неравенство Коши-Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx}$$

применим это неравенство к интегралу $\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx$

$$\left|\int_{x_0}^x (f_n(x) - f(x))\cdot 1\,dt\right| \le \sqrt{\int_{x_0}^x (f_n(x) - f(x))^2\,dt \int_{x_0}^x 1^2\,dt} \le$$

$$\sqrt{\int_{x_0}^x (f_n(x) - f(x))^2\,dt \cdot (b-a)} \tag{53}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, тогда в силу (52) $\exists N$, что $\forall n > N$ правая часть в неравенстве (53) будет меньше ε, следовательно и левая часть будет меньше ε для $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$

$$\left|\int_{x_0}^x (f_n(t) - f(t))\,dt\right| < \varepsilon$$

А это и означает, что $\int_{x_0}^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ на сегменте $[a, b]$. Теорема 19 доказана.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и функцию $S(x)$, которые определенны на сегменте $[a, b]$, так что все $u_k(x)$ и функция $S(x)$ интегрируемы на этом сегменте.

Определение. Говорят что функциональный ряд сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a, b]$, если последовательность частичных сумм ряда $S_n(x)$ сходится в среднем к функции $S(x)$ то есть

$$\int_a^b (\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - S(x))^2\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Отметим что если ряд сходится в среднем к функции $S(x)$, то $S(x)$ вовсе не обязательно сумма ряда, он может рассходится во всех точках.

Теорема 19'. Если все члены функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и функция $S(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и ряд сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a, b]$, то этот ряд можно интегрировать почленно, то есть

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \quad \forall x_0, x \in [a, b]$$

Причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt \quad \text{на} \quad [a, b]$$

Доказательство. По условию последовательность $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\}$ частичных сумм ряда сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a, b]$. Поэтому, согласно теореме 19,

$$\int\limits_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt \quad \text{на сегменте} \quad [a, b]$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt \quad \text{на сегменте} \quad [a, b]$$

Это и означает, что ряд сходится равномерно на сегменте $[a, b]$. Теорема 19' доказана.

9.2. Теорема Арцела

Мы знаем что если последовательность x_n ограниченна то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано – Вейерштрасса). Тоже самое относится к последовательностям точек $\{M_n\}$ m-мерного пространства. Поставим вопрос: можно ли из равномерно ограниченной функциональной последовательности выделить сходящуюся подпоследовательность функций? Теорема Арцела дает при определенных условиях положительный ответ на этот вопрос.

Определение. функциональноая последовательность $f_n(x)$ называется равностепенно непрерывной на промежуте X, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое,что $\forall n$ и $\forall x'$ и $x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

Из определения следует что каждая функция $f_n(x)$ является равномерно непрерывной на промежутке X. Обратное не верно.

Пример. Пусть $f_n(x) = \sin nx$ на $X = [0, 1]$, каждая функция $f_n(x)$ непрерывна на промежутке X, а следовательно и равномерно непрерывна, по теореме Кантора.

Покажем что эта последовательность не является равностепенно непрерывной. Построим отрицание к определению равностепенной непрерывности, Нужно доказать что $\exists\varepsilon > 0 \exists N$, такое, что $\forall\delta > 0$ $\exists x'$ и $x'' \in [0, 1]$ для которых $|x' - x''| < \delta$ но

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \geq \varepsilon$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и положим $x' = \frac{\pi}{n}$ и $x'' = \frac{\pi}{2n}$, тогда $\forall\delta > 0, \exists N : |x' - x''| = \frac{\pi}{2n} < \delta$, но при этом

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |\sin\frac{\pi}{2} - \sin\pi = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$$

Теорема 20 (Арцела). Если функциональная последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$, то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этом сегменте. **Доказательство.** Можно посмотреть в учебнике.

Замечание. Вместо условия равномерной ограниченности последовательности можно потребовать ее ограниченность хотя бы в одной точке сегмента.

Несобственные интегралы

Для определенного интеграла от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ были существенными два момента:

1) промежуток интегрирования, сегмент $[a, b]$, — ограниченное множество(для неограниченного промежутка введенное определение интеграла не пригодно);

2) функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$.(определенный интеграл от неограниченной на сегменте функции не существует).

Различные задачи в математике и ее приложениях приводят к необходимости обобщить понятие определенного интеграла на случаи, когда либо промежуток интегрирования — неограниченный, либо подынтегральная функция является неограниченной. В результате появляются понятия несобственных интегралов первого и второго рода.

9.3. Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leq x < \infty$ и пусть $\forall A > a$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$, он является функцией переменной A. Рассмотрим

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$$

Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае он называется несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$ и обозначается так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

и называть несобственным интегралом первого рода от функции Если указанный предел существует (не существует), то говорят, что несобственный интеграл сходится (расходится).

Аналогично определяются несобственный интеграл по полупрямой $(-\infty, a]$

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{a} f(x)\,dx$$

и несобственный интеграл по всей числовой прямой:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}} \int\limits_{B}^{A} f(x)\,dx$$

Примеры.

1) Пример сходящегося интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}$$

2) Пример несходящегося интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{0}^{A} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty} (1-\cos A) - \quad \text{не существует}$$

3)

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha > 0,\ a \quad \text{— произвольное число.}$$

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{a}^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^A, & \alpha \neq 1 \\ \ln x\Big|_a^A, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{a^{\alpha-1}}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \text{не существует}, & \alpha \le 1 \end{cases}$$

Во всех трех примерах первообразная для подынтегральной функции выражалась через элементарные функции, и это помогло легко установить сходимость (или расходимость) несобственного интеграла. Однако первообразная для подынтегральной функции может быть не элементарной функцией. Например, рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Известно, что первообразная для подынтегральной функции не является элементарной. Но можно считать, что в точке $x = 0$ функция доопределена по непрерывности, в силу первого замечательного предела, значением 1, во всех остальных точках она непрерывна, было доказанно что непрерывная функция имеет первообразную. Пусть какая-то функция $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$ является первообразной для нашей функции при $x \geq 0$, тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{A\to+\infty} (F(A) - F(0))\, dx$$

Но поскольку мы не знаем выражения для первообразной $F(x)$, так как она не является элементарной функцией, то для ответа на вопрос о существовании предела $\lim_{A\to+\infty} F(A)\, dx$ необходимы признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

Лекция 10

10.1. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода

Теорема 1 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого рода).

Для того, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0, \exists A > a$,такое, что для $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство.

Доказательство. Введем обозначение

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$$

Сходимость несобственного интеграла по определению означает существование предела $\lim_{A\to+\infty}\Phi(A)$, в свою очередь для того чтобы этот предел существовал необходимо и достаточно, по критерию коши сходимости для функций при стремлении аргумента к бесконечности, необходимо и достаточно чтобы $\forall\varepsilon > 0, \exists A > a$, такое, что для $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ выполнялось неравенство

$$|\Phi(A'') - \Phi(A')| < \varepsilon \quad \text{то есть} \quad \left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Теорема 1 доказана.

Теперь чтобы установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ воспользуемся критерием Коши, для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos x}{x}\bigg|_{A'}^{A''} - \int\limits_{A'}^{A''} \frac{d(-\cos x)}{x} = \int\limits_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

здесь мы воспользовались формулой интегрирования по частям

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{A''} + \frac{1}{A'} + \left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{dx}{x^2}\right| = \frac{1}{A''} + \frac{1}{A'} + \left|-\frac{1}{x^2}\bigg|_{A'}^{A''}\right| \le \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем $A = \frac{4}{\varepsilon}$ тогда для $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$:

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leq \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''} < \frac{4}{A} = \varepsilon$$

Признак сравнения. Пусть функция $f(x) \geq 0$ на $[a, +\infty)$, интегрируема на любом сегменте $[a, A]$, обозначим этот интеграл

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\, dx$$

Функция $\Phi(A)$ очевидно, неубывающей функцией переменной A, для существования предела $\lim_{A\to+\infty} \Phi(A)$ дотаточно ограниченности функции $\Phi(A)$

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полупрямой $[a, +\infty)$, интегрируемы на любом сегменте $[a, A]$, где $A > a$, и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

Тогда из сходимости интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx \tag{54}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{55}$$

а из расходимости интеграла (54) следует расходимость интеграла (55).

Доказательство. Введем обозначения:

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\, dx, \quad G(A) = \int\limits_a^A g(x)\, dx$$

Из условий теоремы следует $\forall A \geq a$: выполняются неравенства

$$0 \leq \Phi(A) \leq G(A).$$

Если интеграл (54) сходится, то функция $G(A)$ ограничена на $[a, +\infty)$, поэтому в силу последнего неравенства функция $\Phi(A)$ также ограничена и, значит, интеграл (55) сходится. А если интеграл (55) расходится, то функция $\Phi(A)$ будет неограниченной на $[a, +\infty)$, поэтому в силу последнего неравенства функция $G(A)$ также будет неограниченной и, следовательно, интеграл (54) расходится. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если $0 \leq x \leq \frac{c}{x^\alpha}$, где $c > 0, \alpha > 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ при 0 сходится. Если $x \geq \frac{c}{x^\alpha}$, где $c > 0, 0 < \alpha \leq 1$ то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ при 0 расходится. Утверждение следует из теоремы 2, с учетом того факта, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{c}{x^\alpha}\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$

Следствие 2 (признак сравнения в предельной форме). Пусть функция $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, +\infty)$ Пусть эти функции интегрируемы на любом сегменте $[a, A]$, и пусть выполнено условие $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, тогда

1) Если $k > 0$, то несобственные интегралы (54) и (55) сходятся или расходятся одновременно;

2) если $k = 0$, то из сходимости интеграла (54) следует сходимость интеграла (55), а из расходимости интеграла (55) следует расходимость интеграла (54).

Примеры.

1) Рассмотрим интеграл и посмотрим при каких значений α он сходится

$$\int\limits_1^\infty \underbrace{x^\alpha \ln\frac{x+1}{x}}_{=f(x)}\,dx$$

Посмотрим как ведет себя эта логарифмическая функция на бесконечнности

$$\ln\frac{x+1}{x} = \ln 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{при} \quad x \to 0$$

В качестве функции сравнения возьмем $g(x) = x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha-1}$

$$\int\limits_1^\infty g(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx = \begin{cases} \text{сходится при} & \alpha < 0 \\ \text{сходится при} & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$$

Следовательно наш интеграл

$$\int\limits_1^\infty x^\alpha \ln\frac{x+1}{x}\,dx = \begin{cases} \text{сходится при} & \alpha < 0 \\ \text{сходится при} & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

2) Исследуем, для каких значений α сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty \underbrace{x^\alpha e^{-x}}_{=f(x)}\,dx$$

В качестве функции сравнения возьмем $g(x) = \frac{1}{x^2}$, интегра $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx$ сходится, так как показатель степени больше 1, теперь рассмотрим предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-2}e^{-x} = 0 \quad \text{для любого } \alpha$$

Согласно следствию 2, интеграл $\int\limits_1^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$ сходится для любого α.

Признак Дирихле Он относятся к несобственным интегралам вида

$$\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

Теорема 3 (признак Дирихле)

Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a, +\infty)$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$

2) функция $g(x)$ не возрастает на полупрямой $[a, +\infty)$, стремится к нулю при $x \to \infty$ и имеет непрерывную производную $g(x)$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Из условия 2) следует что $g(x) \geq 0, g'(x) \leq 0$. Воспользуемся критерием Коши. С этой целью рассмотрим интеграл $\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx$, где $A' > a$ и $A'' > a$, Преобразуя его по формуле интегрирования по частям

$$\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx = \int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_{A'}^{A''} = \int\limits_{A'}^{A''} F(x)g(x)\,dx$$

Теперь оценим последний интеграл. Так как функция $F(x)$ ограничена (по условия), то $\exists M > 0$ такое, что $\forall x \in [a, +\infty) : |F(x)| \leq M$, а из словия 2) следует что $g(x) \geq 0, g'(x) \leq 0$. Пусть для определенности $A'' \geq A'$. Получим

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \leq Mg(A') + Mg(A'') - \int\limits_{A'}^{A''} Mg'(x)\,dx = Mg(A') - Mg(A'') + g(x)\Big|_{A'}^{A''} = Mg(A') + Mg(A'')$$

$$= Mg(A') + Mg(A'') - Mg(A'') + Mg(A') = 2Mg(A') \tag{56}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ так как $g(x) \downarrow 0$(монотонно стремится к нулю) при $x \to \infty$, то $\exists A, \forall A' > A : g'(A') < \frac{\varepsilon}{2M}$ из (56) получаем

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \leq 2Mg(A') < \varepsilon, \quad \forall A' > a, A'' > a$$

а это и означает, согласно критерию Коши, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ сходится. Теорема 3 доказана.

Примеры. 1) Нужно исследовать, для каких значений α сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

Применим признак Дирихле, $f(x) = \sin x$, непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[1, +\infty)$ $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, пусть $\alpha > 0$, тогда $g(x) \downarrow 0$ при $x \to \infty$ и $g'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$ непрерывна на $[1, +\infty)$. Значит все условия теоремы 3 выполненны и интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится при $\alpha > 0$.

2) Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \sin\left(x^2\right)dx$$

он называется интегралом Френеля. Представим его в вид суммы двух интегралов

$$\int\limits_0^\infty \sin\left(x^2\right)dx = \int\limits_0^1 \sin\left(x^2\right)dx + \int\limits_1^\infty \sin\left(x^2\right)dx$$

Первое слагаемое в правой части равенства — это определенный интеграл от непрерывной функции (он существует), а во втором слагаемом сделаем замену переменной

$$x = \sqrt{t}, \quad 1 \le t < \infty$$

Тогда

$$x^2 = t, \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

и для второго слагаемого получим

$$\int\limits_1^\infty \sin\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

Интеграл в правой части равенств сходится (см. пример 1, здесь $\alpha = \frac{1}{2} > 0$)

Замечание 1 Правомерно ли было производить замену переменных в несобственном интеграле? Ответ таков: при определенных условиях имеет место теорема о замене переменной в несобственном интеграле. Мы не будем рассматривать эту теорему, отметим только, что сделанная в интеграле Френеля замена переменной правомерна.

Замечание 2 Когда мы рассматривали ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимым условием сходимости которого было $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Можно подумать (проводя аналогию между числовыми рядами и несобственными интегралами), что необходимым условием сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ является условие $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Однако это не так, и контрпримером служит интеграл Френеля

10.2. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого род

Определение. Говорят что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ расходится.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

он сходится при $\alpha > 0$ при $\alpha > 1$, данный интеграл сходится абсолютно, так как

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится, если $\alpha > 0$, значит признак сравнения работает и интеграл сходится абсолютно. Докажем, что если $0 < \alpha \leq 1$, то интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится условно.

1) способ. Воспользуемся неравентсвом

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}$$

Интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{2x^\alpha} - \int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$$

расходится, так как интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ расходитя при $0 < \alpha \leq 1$. Значит интеграл $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\,dx$ расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

2) способ. Воспользуемся критерием Коши, построим отрицание, $\exists\varepsilon > 0$, такое, что $\forall A, \exists A' > A, A'' > A$:

$$\left|\int\limits_{1}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right| dx\right| \geq \varepsilon$$

Возьмем $0 < \varepsilon < \frac{1}{\pi}$ и для $\forall A > 0$ возьмем $A' = \pi n > A$, $A'' = 2\pi n > A$, тогда

$$\left|\int\limits_{1}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right| dx\right| \geq \int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}|\sin x|\,dx = \frac{1}{2\pi n}\cdot 2n = \frac{1}{\pi} > \varepsilon$$

Следовательно интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right| dx$ расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

Лекция 11

11.1. Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полусегменте $(a, b]$, где $a < x \leq b$, не ограничена на этом полусегменте, но ограничена на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$ (здесь δ — произвольное положительное число, такое, что $a < a+\delta < b$). Точку $x = a$ назовем особой точкой функции $f(x)$.

Пример. Рассмотрим функцию полусегменте $(0, 1]$

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha > 0$$

Она стремится к бесконечности при $x \to +0$. Теперь возьмем $[\delta, 1]$ на этом сегменте $0 < f(x) \leq \frac{1}{\delta^\alpha}$ функция ограниченна. Точка $x = 0$ особая точка данной функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на полусегменте $(a, b]$, где a особая точка функции. Пусть функция $f(x)$ интегрируема любом сегменте вида $[a+\delta, b]$, то есть существует определенный интеграл $\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$, который является функией от δ, рассмотрим предел

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

Он может существовать и может не существовать. В любом случае будем называть его несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по полусегменту $(a, b]$ и будем обозначать его так же, как определенный интеграл:

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Аналогично определяются несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по полусегменту $[a, b)$, где b — особая точка $f(x)$:

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

и несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по интервалу (a, b), где a и b — особые точки $f(x)$ (и других особых точек на сегменте $[a, b]$ у функции $f(x)$ нет):

$$\lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\int\limits_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Пусть точка c принадлежит интервалу $[a,b]$ и c особая точка функции $f(x)$ как на полусегменте $[a,c)$, так и на полусегменте $[c,b)$, и других особых точек на сегменте $[a,b]$ у функции $f(x)$ нет, то несобственный интеграл по сегменту $[a,b]$ определяется как сумма двух пределов:

$$\lim_{\delta_1\to+0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2\to+0}\int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Если оба предела существуют, то говорят, что несобственный интеграл сходится, а если хотя бы один из пределов не существует, то — расходится.

Теорема 4 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода). Пусть функция $f(x)$ определена на полусегменте $(a,b]$ и интегрируема на любом сегменте вида $[a+\delta,b]$, тогда для того чтобы несобственный интеграл от функции $f(x)$ на полусегменте $(a,b]$ сходился необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие: $\forall\varepsilon>0\exists\delta>o$, такое, что $\forall\delta'$ и δ'' , удовлетворяющих условиям $0<\delta'<\delta$ и $0<\delta''<\delta$, выполняется неравенство

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Phi(\delta)=\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

По определению сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ означает существование предела $\lim_{\delta\to+0}\Phi(\delta)$. В свою очередь, для того, чтобы существовал этот предел, необходимо и достаточно (согласно критерию Коши существования одностороннего предела функции), чтобы было выполнено следующее условие: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>o$, такое, что $\forall\delta'$ и δ'' , удовлетворяющих условиям $0<\delta'<\delta$ и $0<\delta''<\delta$, выполнялось неравенство

$$|\Phi(\delta'')-\Phi(\delta')|<\varepsilon \quad \text{то есть} \quad \left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

Теорема 4 доказана.

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \alpha>0$$

Посмотрим для какиех α интеграл сходится, Особой точкой функции $\frac{dx}{x^\alpha}$ является точка $x = 0$. Поэтому, согласно определению,

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\begin{cases}\frac{x^{-\alpha+1}}{1+\alpha}\Big|_\delta^1, & \alpha\neq 1\\ \ln x\Big|_\delta^1, & \alpha = 1\end{cases} = \lim_{\delta\to+0}\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}(1-\delta^{\alpha-1})\Big|_\delta^1, & \alpha\neq 1\\ -\ln\delta, & \alpha = 1\end{cases} =$$

$$= \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1\\ \text{не существует}, & \alpha\geq 1\end{cases}$$

Значит интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Замечание. Аналогично доказывается что интегралы

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad \alpha > 0$$

сходятся при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Теорема 5 (признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определена на полусегменте $(a, b]$, где a особая точка обеих функций, и интегрируемы на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$, и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad x\in(a,b] \tag{57}$$

Тогда из сходимости интеграла

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{58}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{59}$$

а из расходимости интеграла (59) следует расходимость интеграла (58)

Следствие. Если вместо условия (57) выполнены условия $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ и $\exists\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$ то интегралы (59) и (58) сходятся или расходятся одновременно. Докажите теорему 5 и ее следствие самостоятельно по аналогии с теоремой о признаке сравнения интеграла первого рода.

Примеры.

1) Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

Особая точка подынтегральной функции $x = 1$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{сходится, так как } 0 < \alpha < 1$$

Чтобы применить следствие из теоремы 5 рассмотрим предел

$$\lim_{x\to -0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to -0} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

согласно следствию из теоремы 5, интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ сходится.

2) Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

В этом интеграле есть несобственность первого и второго рода. Особая точка подынтегральной функции $x = 0$, при $\alpha > 1$. Разобьем этот интеграл на два интеграла

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx}_{I_2}$$

Интеграл I_2 мы уже рассматривали ранее, он сходится при $\alpha > 0$, интеграл I_1 является определенным при $0 < \alpha \leq 1$, и являеется несобственным при $\alpha > 1$. Так как при $x \to 0$ $\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, возьмем в качестве $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, dx$$

Сходится при $\alpha - 1 < 1$, то есть при $\alpha < 2$, значит по признаку сравнения интеграл I_1 сходится при $\alpha < 2$. В итоге интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ сходится при $0 < \alpha < 2$

11.2. Главное значение несобственного интеграла

Рассмотрим пример:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A x\, dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \frac{1}{2}(A^2 - B^2) - \text{не существует}$$

Если $B = -A$, то

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^A x\, dx = 0$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$$

то он называется главным значением (в смысле Коши) несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

и обозначается так:

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

(V.p. — начальные буквы французских слов «Valeur principal», означающих «Главное значение»). Если несобственный интеграл $\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$ сходится, то его значение равно, очевидно, главному значению этого интеграла. Но может быть так, что несобственный интеграл расходится, но имеет конечное главное значение.

Пусть функция $f(x)$ определенна на сегменте $[a,b]$ и внутренняя точка сегмента $[a,b]$ является особой точкой функции $f(x)$, тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to+0}\int\limits_{a}^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2\to+0}\int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx$$

Рассмотрим частный случай когда $\delta_1=\delta_2=\delta$, тогда

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int\limits_{a}^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx\right] = V.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Последний интеграл называется главным значением (в смысле Коши) несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

Отметим, что расходящийся интеграл второго рода может иметь главное значение.

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$$

Особой точкой функции $\frac{1}{x}$ является точка $x = 0 \in [-1, 2]$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{-\delta_1} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\delta_2}^{2} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{-\delta_1} + \ln x\Big|_{\delta_2}^{2} = \ln\delta_1 + \ln 2 - \delta_2 = \ln 2 + ln\frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}} \left(\ln 2 + ln\frac{\delta_1}{\delta_2}\right) \quad \text{не существует}$$

Это означает что $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$ расходится. Но если положить $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, его главное значение

$$V.p. \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \ln 2$$

Лекция 12

12.1. Кратные несобственные интегралы.

Как и в случае одномерных интегралов, несобственный кратный интеграл — это либо интеграл от неограниченной функции, либо интеграл по неограниченной области, либо одновременно и то, и другое.

Пусть G — ограниченная квадрируемая область на плоскости (x, y) и пусть в области G (за исключением, быть может, точки $M_0(x_0, y_0)$) определена функция $f(x, y)$, неограниченная в любой окрестности точки M_0. Тогда точка M_0 называется особой точкой функции $f(x, y)$. Обозначим через ω_δ произвольную квадрируемую окрестность точки M_0, диаметр которой равен δ(рис.12.1).

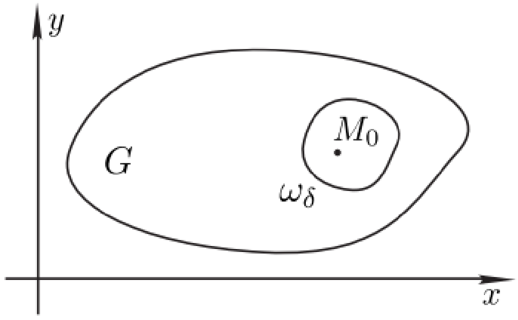

Рис. 12.1 – Область ω_δ в области G.

Пусть для любой окрестности ω_δ функция $f(x, y)$ интегрируема в области $G - \omega_\delta$. Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta \to 0} \iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x, y)\, dx\, dy$$

Можно сказать, что это предел при условии что окрестность ω_δ стягивается к точке M_0. Если указанный предел существует и не зависи от способа стягивания ω_δ к точке M_0, то он называется несобственным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G. И обозначается так же, как и двойной интеграл:

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy$$

Пример 1. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ внутренняя точка области G, и M произвольная точка этой области, расстояние между ними $r_{M_0M} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_o)}$, зафиксируетм некоторое положительное число $\alpha > 0$ и рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{G} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\, dx\, dy$$

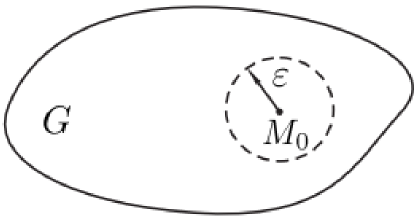

Рис. 12.2 – ε-окрестность точки M_0.

Обозначим за Ω_ε ε-окрестность точки M_0(это круг с центром в точке M_0 радиуса ε) и возьмем столь малое ε, чтобы область Ω_ε принадлежала G(рис.12.2)

Теперь рассмотрим область $G - \Omega_\varepsilon$. В этой области подынтегральная функция неотрицательна $0 < \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}} \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$ и непрерывна, значит существует интеграл

$$\iint\limits_{G-\Omega_\varepsilon} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = I$$

Обозначим через I_ε несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = I_\varepsilon$$

Чтобы сходился интеграл I, необходимо и достаточно чтобы сходился интеграл

I_ε. Для того чтобы установаить для каких α сходится интеграл I_ε, рассмотрим предел

$$\lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{\Omega_\varepsilon-\Omega_\delta} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy$$

Если в несобственном интеграле по произвольной области G функция $f(x, y)$ неотрицатльна, то интеграл сходится, если предел $\lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{G-\Omega_\delta} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy$ существует хотя бы для одного способа стягивания. Воспользуемся этим фактом и возьмем в качетве Ω_δ круг $\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ с радиусом $\frac{\delta}{2}$. Рассмотрим интеграл по области $\Omega_\varepsilon - \Omega_{\frac{\delta}{2}}$ (это кольцо с центром в точке M_0 (рис.11)).

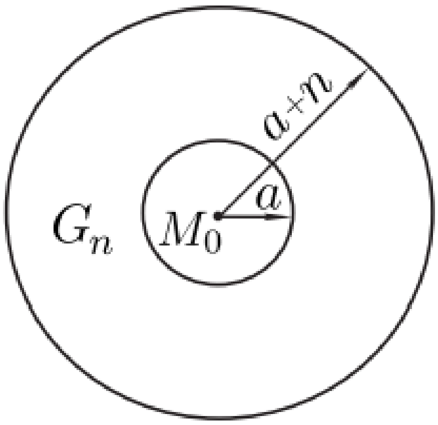

Рис. 12.3 – Кольцо с центром в точке M_0.

Для того чтобы его вычислить удобно перейти в полярные системы координат, $x - x_0 = r\cos\varphi, y - y_0 = r\sin\varphi, \frac{\delta}{2} \leq r = r_{M_0M} \leq \varepsilon, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{\Omega_\varepsilon-\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\varepsilon} \frac{1}{r^\alpha} \cdot r\, dr =$$

$$= 2\pi \begin{cases} \left.\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_{\frac{\delta}{2}}^{\varepsilon}, & \alpha \neq 2 \\ \left.\ln 2\right|_{\frac{\delta}{2}}^{\varepsilon}, & \alpha = 2 \end{cases} = 2\pi \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}\left(\varepsilon^{2-\alpha} - \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2-\alpha}\right), & \alpha \neq 2 \\ \ln \frac{2\varepsilon}{\delta}, & \alpha = 2 \end{cases}$$

Это означает что

$$\lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{\Omega_\varepsilon - \Omega_{\frac{\delta}{2}}} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha}\varepsilon^{2-\alpha}, & 0 < \alpha < 2 \\ \text{Не существует}, & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Окончательно, интеграл

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon - \Omega_{\frac{\delta}{2}}} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = \begin{cases} \text{Сходится}, & 0 < \alpha < 2 \\ \text{Расходится}, & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Замечание. Аналогично устонавливается, что тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon - \Omega_{\frac{\delta}{2}}} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = \begin{cases} \text{Сходится}, & 0 < \alpha < 3 \\ \text{Расходится}, & \alpha \geq 3 \end{cases}$$

Пусть функция $f(x)$ определенна и ограничена в не ограниченной области G(открытой). Рассмотрим последовательность областей G_n удовлетворяющих следущим условиям.

1) Пусть все G_n открыты и квадрируемы. $\forall n : \overline{G_n} \subset G_{n+1}$(замкнутая область G_n принадлежит открытой области G_{n+1});

2)$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$

Про последовательность G_n говорят, что она монотонно исчерпывает область G.

Пример. Пусть область G вся плоскость. Последовательность открытых кругов с радиусом $1, 2, 3, \dots n$ с центром в начале координат, монотонно исчерпывает всю плоскость $\mathbb{R}^2$

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в любой ограниченной квадрируемой области, содержащейся в области G. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \iint\limits_{\overline{G_n}} f(x, y)\, dx\, dy$$

И рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} I_n$$

Если этот предел существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности G_n, то говорят, что несобственный интеграл от функции $f(x, y)$ по области G сходится, в противном случае — расходится. И обозначается

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy$$

Если функция $f(x, y)$ неотрицательна, то для сходимости этого интеграла, достаточно чтобы существовал $\lim_{n\to\infty} I_n$ хотя бы для одной последовательности $\{G_n\}$ монотонно исчерпывающей область G.

Пример 2. Отметим на плоскости точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем окружность радиуса a с центром в этой точке, и возьмем в качестве области $G = \mathbb{R}^2 - \Omega_a$, где Ω_a область ограниченная нашей окружностью. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_G \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy$$

В этой области подынтегральная функция неотрицательна $0 < \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}} \le \frac{1}{a^\alpha}$ и непрерывна, значит интегрируема в любой квадрируемой области. Рассмотрим последовательность областей $\{G_n\} = \{(x,y) : a < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_o)} < a+n\}$. Рассмотрим интеграл в полярных координатах, $x - x_0 = r\cos\varphi, y - y_0 = r\sin\varphi, a < r = r_{M_0M} < a+n, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$I_n = \iint\limits_{G_n} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = 2\pi \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}\left((a+n)^{2-\alpha} - a^{2-\alpha}\right), & \alpha \ne 2 \\ \ln\frac{a+n}{a}, & \alpha = 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha-2} a^{2-\alpha}, & \alpha > 2 \\ \text{Не существует}, & 0 < \alpha \le 2 \end{cases}$$

Значит

$$\iint\limits_G \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = \begin{cases} \text{Сходится}, & \alpha > 2 \\ \text{Расходится}, & 0 < \alpha \le 2 \end{cases}$$

Замечание. Аналогично устонавливается, что тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3 - \Omega_\alpha} \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\, dx\, dy = \begin{cases} \text{Сходится}, & \alpha > 3 \\ \text{Расходится}, & 0 < \alpha \le 3 \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

В качестве последовательности ограниченных квадрируемых областей G_n, монотонно исчерпывающей всю плоскость $\mathbb{R}^2$, возьмем последовательность концентрических кругов $\{G_n\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < n^2\}$. Рассмотрим интеграл в полярных координатах, $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 < r = r_{M_0M} < n, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$I_n = \iint\limits_{\overline{G_n}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n e^{-r^2} \cdot r\, dr = \pi(1 - e^{-n^2})$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \pi \Rightarrow \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi$$

Теперь рассмотрим другую последовательность $\{G'_n\} = \{(x,y) : -n < x < n, -n < y < n\}$ Поскольку последовательность неотрицательна предел по этой последовательности будет тот же.

$$I'_n = \iint\limits_{G'_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \underbrace{\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx}_{K_n}\underbrace{\int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy}_{K_n} = K_n^2$$

$$\lim_{n\to\infty} I'_n = \pi = \lim_{n\to\infty} k_n^2$$

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx =: k$$

Тем самым

$$K = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Этот несобственный интеграл называется интегралом Пуассона.

Так как e^{-x^2} — четная функция, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx =$, и, следовательно

$$2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

В математической физике важную роль играет функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

Она носит название «интеграл ошибок». Множитель $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ необходим для нормировки, так как $\Phi(\infty) = 1$

Кратные несобственные интегралы обладают удивительным (на первый взгляд) свойством, отличающим их от одномерных несобственных интегралов, а именно: для несобственных кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны, т.е. если несобственный интеграл $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$ сходится, то несобственный интеграл $\iint\limits_{G} |f(x,y)|\,dx\,dy$ также сходится, и обратно. Возникает вопрос: почему для кратных несобственных интегралов это свойство имеет место, а у одномерных несобственных интегралов этого свойства нет?

Ответ в том, что когда мы определяли кратные несобственные интегралы, то мы допускали стягивание окрестностей ω_δ к M_0 *произвольно*, а в случае неограниченной области допускали любую исчерпывающаю монотонно последовательность областей, чего нет для одномерных интегралов, там есть исключительно один способ, когда полупрямая $[a, +\infty)$ монотонно исчерпывается расширяющимися сегментами вида $[a, A]$ при $A \to \infty$, но можно выбрать другой(недопустимый) способ, тогда одномерные интегралы будут иметь это же свойство кратных интегралов. Подробнее об этом можно прочитать в учебнике.

Интегралы, зависящие от параметров

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

Подынтегральная функция зависит от x и y. Пусть для $\forall y \in Y$ этот интеграл существует, он будет функцией y,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

Функция $F(y)$ называется интегралом, зависящим от параметра y. Также вводится понятие интеграла зависящего от нескольких параметров

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx$$

Аналогично вводятся n-кратные интеграл зависящие от нескольких параметров

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int \underset{G_m}{\ldots} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx_1\, dx_2\, \ldots dx_m$$

Отметим, что интегралы, зависящие от параметров, играют важную роль в математической физике. С одним физическим примером — ньютоновым потенциалом — мы познакомимся в конце главы.

Лекция 13

13.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $Q = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$, Пусть для $\forall y \in [c, d]$ существует интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$, тем самым определенна функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$. Функцию $F(y)$ мы называем собственным интегралом, зависящим от параметра y. Займемся исследованием свойств этой функции.

Теорема 1 (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра).

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, то функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ непрерывна на сегменте $[c, d]$.

Доказательство. По теореме Кантора функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике Q. То есть $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, такое, что $\forall M'(x', y')$ и $\forall M''(x', y'')$ расстояние между которами $\rho(M', M'') < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$$

В частности $\forall x \in [a, b]$ и $\forall y', y'' \in [c, d]$, таких что $|y' - y''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Используя это неравенство получаем

$$|F(y'') - F(y')| = \left| \int\limits_a^b f(x, y'')\, dx - \int\limits_a^b f(x, y')\, dx \right| \le \left| \int\limits_a^b |f(x, y'') - f(x, y')|\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} \left| \int\limits_a^b dx \right| = \varepsilon$$

Таким образом $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ и $\forall y', y'' \in [c, d]$ таких что $|y' - y''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|F(y'') - F(y')| < \varepsilon$$

Это и означает, что функция $F(y)$ равномерно непрерывна (а, значит, и просто непрерывна) на сегменте $[c, d]$. Теорема 1 доказана.

Обобщением теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 1'. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, и пусть $x_1(y)$ и $x_2(y)$ непрерывны на сегменте $[c, d]$ и удовлетворяют неравенствам(рис. 13.1)

$$a \le x_1(y) \le x_2(y) \le b$$

тогда функция

$$g(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

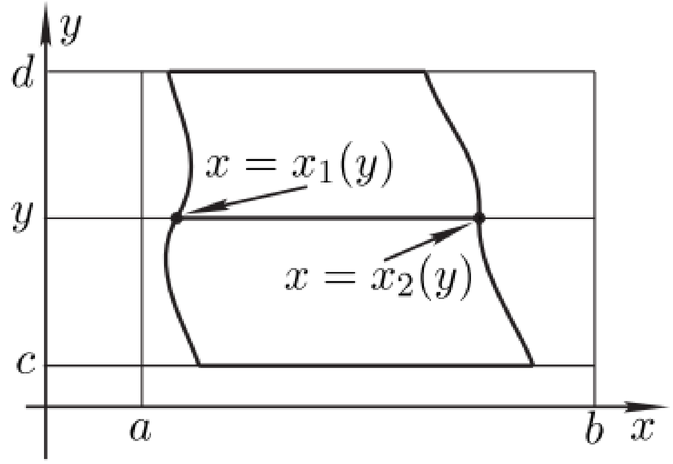

Рис. 13.1 – Функция $f(x,y)$ непрерывная в прямоугольнике Q.

непрерывна на сегменте $[c,d]$. (Докажите это самостоятельно).

Теорема 2 (об интегрировании по параметру). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, тогда функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \qquad (60)$$

в таком случае говорят, что можно изменить порядок интегрирования.

Доказательство. По теореме 1 функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте.

Функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, поэтому существует двойной интеграл $\iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$ и существуют внутренние интегралы в повторных интегралах, входящих в равенство (60). Следовательно(теорема второго семестра), существуют повторные интегралы и каждый из них равен двойному интегралу, а, значит, эти повторные интегралы равны друг другу, т.е. выполняется равенство (60). Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (о дифференцировании по параметру).

усть функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике Q. Тогда функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ имеет на сегменте $[c,d]$ непрерывную производную $F(y)$ и справедливо равенство

$$F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

в таком случае говорят, что интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Доказательство. Введем функцию

$$G(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

По теореме 1 функция $G(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$. Нам нужно доказать, что функция $F(y)$ имеет непрерывную производную и $F(y) = G(y)$. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt = \int\limits_c^y \left[\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\right] dt$$

В силу теоремы 2 в повторном интеграле можно изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\right] dx$$

Внутренний интеграл в правой части равенства вычислим по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt = f(x,t)\Big|_c^y = f(x,y) - f(x,c)$$

Откуда получаем

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt = \int\limits_a^b \left[f(x,y) - f(x,c)\right] = F(y) - F(c)$$

Следовательно

$$F(y) = \int\limits_c^y G(t)\,dt + F(c)$$

Так как $G(t)$ — непрерывная функция, то

$$\frac{d}{dy}\left[\int\limits_c^y G(t)\right] = G(y)$$

(производная интеграла с переменным верхним пределом). Следовательно,

$$F'(y) = G(y$$

Теорема 3 доказана.

Обобщением теоремы 3 является следующая теорема.

Теорема 3'.

Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть $x_2(y)$ дифференцируемы на сегменте $[c, d]$ и удовлетворяют неравенствам

$$a \le x_1(y) \le x_2(y) \le b$$

Тогда функция

$$g(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

дифференцируема на сегменте $[c, d]$ и справедливо равенство

$$g'(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx + f(x_2(y), y) \cdot x_2'(y) - f(x_1(y), y) \cdot x_1'(y) \tag{61}$$

Доказательство. Введем функцию

$$\Phi(x, y) = \int\limits_a^x f(t, y)\, dt$$

В силу теоремы 1

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = f(x, y) \quad \text{непрерывная функция}$$

В силу теоремы 3

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \int\limits_a^x \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\, dt \quad \text{непрерывная функция}$$

Значит $\Phi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, отсюда следует, по достаточному условию дифференциируемости, что $\Phi(x, y)$ дифференциируема. Используя $\Phi(x, y)$ получим

$$g(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y)\, dx = \Phi(x, y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} = \Phi(x_2(y), y) - \Phi(x_1(y), y)$$

Вычислим производную $g'(y)$ по правилу дифференцируемости сложной функции

$$g'(y) = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_2(y), y)}_{f(x_2(y), y)} \cdot x_2'(y) + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_2(y), y)}_{\int\limits_a^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx} - \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_1(y), y)}_{f(x_1(y), y)} \cdot x_1'(y) - \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_1(y), y)}_{\int\limits_a^{x_1(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx} =$$

$$= \int\limits_a^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx - \int\limits_a^{x_1(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(x_2(y),y)\cdot x_2'(y) - f(x_1(y),y)\cdot x_1'(y)$$

так как

$$\int\limits_a^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + \int\limits_{x_1(y)}^{a} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

Таким образом формула (10) справедлива. Теорема 3' доказана.

13.2. Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена в полуполосе $\{(x,y) : x \geq a, c \leq y \leq d\}$ (рис.13.2)

и пусть для $\forall y$ из сегмента $[c,d]$ существует несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ Тогда на сегменте $[c,d]$ определена функция

$$F(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$$

которая называется несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра y.

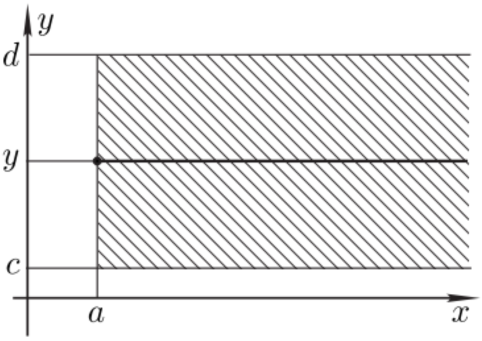

Рис. 13.2 – Полуполоса.

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$F(y) = \int\limits_a^{\infty} ye^{-xy}\,dx$$

на полупрямой $y \geq 0$. Если $y = 0$, то $F(0) = 0$, а если y > 0, то

$$F(y) = \lim_{A\to\infty} \int\limits_0^{A} ye^{-xy}\,dx = \lim_{A\to\infty} (-e^{-xy})\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} (1 - e^{Ay}) = 1$$

Значит

$$F(y) = \int\limits_a^{\infty} ye^{-xy}\,dx = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = ye^{-xy}$ непрерывна в $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, а $F(y)$ разрывна в точке $y = 0$. В связи с этим отметим, что:

1) для собственного интеграла $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывность $f(x,y)$ гарантировала непрерывность функции $F(y)$ (теорема 1);

2) с аналогичной ситуацией мы встречались при изучении функциональных рядов: сумма ряда, членами которого являются непрерывные функции, может быть разрывной функцией. В теории функциональных рядов и последовательностей важную роль играло понятие равномерной сходимости. Например (как мы знаем), если члены ряда — непрерывные функции и ряд сходится равномерно на некотором промежутке, то и сумма ряда— непрерывная функция на этом промежутке. Введем понятие равномерной сходимости для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

Определение. Будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y, на промежуке Y, если он сходится равномерно для любого y из Y и $\forall \varepsilon > 0, \exists A > a$ и для $\forall A' > A$ и $\forall y \in Y$, выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{A'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\left| \int\limits_{A'}^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \tag{62}$$

Главным моментом в этом определении является то, что для заданного ε существует A одно и то же для всех y из промежутка Y .

Вернемся к рассмотренному примеру:

$$F(y) = \int\limits_a^\infty ye^{-xy}\,dx \quad y \geq 0$$

и исследуем этот несобственный интеграл на равномерную сходимость. Рассмотрим неравентсво (62), для $y > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$

$$\left| \int\limits_{A'}^\infty ye^{-xy})\,dx \right| = e^{-A'y} < \varepsilon \tag{63}$$

Это неравенство выполняется, если $A' > -\frac{\ln\varepsilon}{y}$. Так как $-\frac{\ln\varepsilon}{y} \to +\infty$ при $y \to +0$ то для заданного$\varepsilon \in (0 < \varepsilon < 1)$ не существует числа A (одного и того же для всех $y > 0$), такого, чтобы $\forall A' > A$ и $\forall y > 0$

выполнялось неравенство (63). Это означает, что данный несобственный интеграл сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $(0, \infty)$ (и также на полупрямой $[0, \infty)$)

Задание 1. Доказать, пользуясь определением равномерной сходимости, что этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на $Y = [y \geq y_0)$, где $y_0 > 0$.

Задание 2. Сформулируйте определение неравномерной сходимости по параметру y несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ (т.е. отрицание равномерной сходимости) и примените его для установления неравномерной сходимости при $y > 0$ рассмотренного несобственного интеграла.

Признаки равномерной сходимости.

Перейдем к признакам равномерной сходимости несобственных интегралов.

Теорема 4 (критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов первого ряда, зависящих от параметра).

Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из промежутка Y . Для того чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру y на промежутке Y , необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0, \exists A > a$ и для $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$, выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \tag{64}$$

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y . Тогда, согласно определению равномерной сходимости, $\forall \varepsilon > 0, \exists A > a$ и для $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$, выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left| \int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Используя эти неравенства, получаем:

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| \leq \left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| + \left| \int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Тем самым утверждение о необходимости условия (64) доказано.

2) Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0, \exists A > a$ и для $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ и $\forall y \in Y$ выполнено условие (64). Перейдем в неравентстве (64) к пределу при $A'' \to \infty$, получим неравентство

$$\left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| \leq \varepsilon$$

которое справедливо $\forall A' > A$ и $\forall y \in Y$. А это и означает, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y . Теорема 4 доказана.

Задание.

1) Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty ye^{-xy}\,dx \quad y \geq 0$ сходится при $y \geq 0$ неравномерно по параметру y пользуясь теоремой 4.

2) Доказать, что $\int\limits_a^\infty ye^{-xy}\,dx \quad y \geq 0$ при $y \geq y_0$, где $y_0 > 0$, сходится при $y \geq 0$ равномерно по параметру y пользуясь теоремой 4.

Теорема 5 (мажорантный признак Вейерштрасса). Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $G = \{(x,y) : x \geq a, y \in Y$ где Y — некоторый промежуток$\}$ и пусть $\forall y \in Y$ существует инетеграл $\int\limits_a^A f(x,y)\,dx$ на любом сегменте вида $[a, A]$; в области G выполняется неравенство $|f(x,y)| \leq g(x)$, где $g(x)$ — такая функция, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится. Тогда несобственные интегралы

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\infty |f(x,y)|\,dx$$

сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y .

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию Коши для несобственных интегралов первого рода $\exists A$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Так как $\forall x \geq a, \forall y \in Y$ выполнены неравенство $|f(x,y)| \leq g(x)$, то

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right| \leq \left|\int\limits_{A'}^{A''} |f(x,y)|\,dx\right| \leq \left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Эти неравенства означают, что несобственные интегралы $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty |f(x,y)|\,dx$ сходятся равномерно по параметру y на промежутке Y. Теорема 5 доказана.

Следующий признак равномерной сходимости относится к несобственным интегралам вида

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)\,dx \tag{65}$$

Теорема 6 (признак Дирихле — Абеля).

1)Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $G = \{(x,y) : x \geq a, y \in Y$ где Y — некоторый промежуток$\}$ и имеет ограниченную первообразную по переменной x.(То есть $\exists F(x,y) : \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y))$

2)пусть функция $g(x,y) \downarrow 0$(монотонно стремится к нулю) при $x \to \infty$ равномерно относительно $y \in Y$ и имеет непрерывную производную $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ при $x \geq a, y \in Y$

Тогда несобственный интеграл (65) сходится равномерно по параметру y на промежутке Y.

Доказательство. теоремы проводится в точности так же, как и доказательство теоремы о признаке Дирихле для несобственного интеграла вида $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ но только теперь нужно воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (теорема 4 данного параграфа).

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx$$

Он сходится $\forall y \in (\infty, \infty)$: при $y = 0$ он равен нулю, при $y \neq 0$ сходится по признаку Дирихле(теорема 3 из главы 17). Докажем, что этот интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[y_0, \infty)$, где $y_0 > 0$.

Положим $f(x,y) = \sin xy, g(x,y) = \frac{1}{x}$. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 6: она непрерывна в области $G = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq y_0\}$ и имеет в этой области ограниченную первообразную $F(x,y)$ по переменной x : $F(x,y) = \frac{\cos xy}{y}$, $|F(x,y)| \leq \frac{1}{y_0}$. Функция $g(x,y)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 6: $g(x,y) = \frac{1}{x}$ — убывающая функция на полупрямой $[1,\infty)$; $g(x,y) \to 0$ при $x \to \infty$, причем это стремление равномерно по y, поскольку $g(x,y)$ не зависит от y; $g(x,y)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$.

Следовательно, по признаку Дирихле—Абеля данный несобственный интеграл сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[y_0, \infty)$.

Теперь докажем что интеграл сходится неравномерно по y на всей прямой $y \in \mathbb{R}$ по критерию коши, построим отрицание, $\exists \varepsilon > 0.\forall A > 1 \exists A' > A\ \exists A'' > A$ и $\exists y$

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin xy}{x}\,dx\right| \geq \varepsilon$$

Мы взяли $A > 1$ так как нижний предел равен единице. Возьмем $\varepsilon = \sin\frac{1}{3} > 0$, для $\forall A$ возьмем $A' = n > A$, $A'' = 3n$, $y = \frac{1}{3n}$, тогда

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin xy}{x}\,dx\right| = \left|\int\limits_{n}^{3n} \frac{\sin\frac{x}{3n}}{x}\,dx\right| \geq \sin\frac{1}{3}\int\limits_n^{3n}\frac{dx}{x} = \sin\frac{1}{3}\cdot\ln 3 > \sin\frac{1}{3} = \varepsilon$$

Это и означает в соответствии критерия коши что интеграл сходится неравномерно по y на всей прямой $y \in \mathbb{R}$.

Лекция 14

14.1. О непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра

Обратимся еще раз к примеру, рассмотренному ранее

$$F(y) = \int\limits_a^\infty ye^{-xy}\,dx = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases}$$

В этом примере подынтегральная функция $f(x, y) = ye^{-xy}$ непрерывна в квадранте $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, а функция $F(y)$(несобственный интеграл, зависящий от параметра y) разрывна в точке $y = 0$. Как мы установим, это обусловлено неравномерной сходимостью несобственного интеграла по параметру y.

Теорема 7 (о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x, y)$ определена в полуполосе $\{(x, y) : x \geq a, c \leq y \leq d\}$ и пусть несобственный интеграл $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c, d]$.

Тогда функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$. **Доказательство.** Для каждого натурального числа n введем функцию

$$F_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x, y)\,dx$$

Для каждого n функция $F_n(y)$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y. По теореме 1 каждая функция $F_n(y)$ непрерывна на сегмете $[c, d]$.

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx = F(y)$$

Докажем что $F_n(y) \rightrightarrows F(y)$ на сегмете $[c, d]$. Отсюда последует (в силу теоремы 15 из главы 16), что функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, так как $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c, d]$, то $\exists A > a$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^\infty f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

Возьмем N такое что $a + N > A$, тогда $\forall n > N : a + N > A$, следовательно

$$\left|\int\limits_{a+n}^\infty f(x, y)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx - \int\limits_a^{a+n} f(x, y)\,dx\right| = |F(y) - F_n(y)| < \varepsilon$$

То есть
$$\forall n > N, \forall y \in [c,d] : |F_n(y) - F(y)| < \varepsilon$$
Это и означает, что $F_n(y) \rightrightarrows F(y)$ на сегменте $[c,d]$, что и требовалось доказать.

Теорема 8 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру). Пусть выполнены условия теоремы 7, значит функция $F(y)$ непрерына на сегменте $[c,d]$. Функция $F(y)$ интегрируема на сегменте $[c,d]$, и справедливо равенство
$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy = \int\limits_a^\infty \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \tag{66}$$

Доказательство. По теореме 7 функция F(y) непрерывна на сегменте $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте.

Несобственный интеграл в правой части равенства (66) — это $\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$ (по определению несобственного интеграла первого рода), а так как в повторном интеграле, стоящем под знаком предела, можно изменить порядок интегрирования (в силу теоремы 2), то для доказательства равенства (66) нужно доказать, что
$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^A f(x,y)\,dx\right] dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy$$
или, что то же самое,
$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^A f(x,y)\,dx - \int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx\right] dy = 0$$
то есть
$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy = 0 \tag{67}$$
Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$, то $\exists A$, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in [c,d]$ будет выполнено неравенство
$$\left|\int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$
Используя это неравенство, получаем, что $\forall A' > A$:
$$\left|\int\limits_c^d \left[\int\limits_{A'}^\infty f(x,y)\,dx\right] dy\right| \le \frac{\varepsilon}{d-c}\int\limits_c^d dy = \varepsilon$$

а это и означает справедливость равенства (67), что и требовалось доказать.

Теорема 9 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y) : x \geq a, c \leq y \leq d\}$;

2) несобственный интеграл $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится $\forall y \in [c,d]$;

3) несобственный интеграл $F(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$.

Тогда функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$F'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

т.е

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

В таком случае говорят, что несобственный интеграл зависящий от параметра y, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Доказательство. Рассмотрим функциональную последовательность $\{Fn(y)\}$, где

$$F_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$$

Для каждого n функция $F_n(y)$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y. По теореме 3 каждая функция $F_n(y)$ дифференциирума на сегмете $[c,d]$ и справедливо равенство

$$F_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

Из условия 2) следует что $F_n(y) \to F(y), \forall y \in [c,d]$, а из условия 3) следует что $F_n'(y) \rightrightarrows \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ на сегмете $[c,d]$.

Тем самым, для функциональной последовательности $\{F_n(y)\}$ выполнены все условия теоремы 17 из главы 16. Согласно этой теореме, функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и имеет место равенство

$$F'(y) = \lim_{n\to\infty} F_n'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

Теорема 9 доказана.

14.2. Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру

Рассмотрим пример: вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

(в точке x = 0 считаем подынтегральную функцию равной 1). Мы знаем, что этот интеграл сходится, и задача теперь состоит в том, чтобы найти его значение. С этой целью рассмотрим несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра y:

$$F(y) = \int\limits_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad y \geq 0$$

Тогда

$$F(0) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Разобьем наши вычисления на несколько этапов

а)Сначала докажем, что $F(y)$ непрерывна при $y \geq 0$.

$$F(y) = \int\limits_0^1 e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_1^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx = F_1(y) + F_2(y)$$

По теореме 1 $F_1(y)$ непрерывна по параметру y при $y \geq 0$. Чтобы доказать что $F_2(y)$ непрерывна достаточно доказать (согласно теореме 7) что она сходится равномерно. Воспользуемся признаком Дирихле-Абеля (теорема 6). С этой целью положим $\tilde{f}(x,y) = \sin x$, $g(x,y) = \frac{1}{x}e^{-xy}$.

1) $\tilde{f}(x,y)$- непрерывная и имеет ограниченную первообразную $-\cos x$

2) Функция $g(x) \downarrow 0$ при $x \to \infty$ равномерно по y (доказывается с помощью оценки $g(x,y) \leq \frac{1}{x}$). Также производная

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-ye^{-xy} - e^{-xy}}{x^2} = e^{-xy}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

ограничена и непрерывна.(разбиение интеграла на 2 части потребовалось для ограниченности частной производной, точка 0 не входит в предел интегрирования)

Итак, функции $\tilde{f}(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 и, следовательно, по признаку Дирихле-Абеля несобственный интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y \geq$, что обеспечивает непрерывность $F_2(y)$. Значит, и $F(y)$ непрерывна на полупрямой $y \geq$ как сумма непрерывных функций.

б) Докажем что $F(y)$ дифференциируема при $y > 0$ и ее производную $F(y)$ можно вычислить путем дифференцирования под знаком интеграла. Возьмем произвольный сегмент $[y_0 \leq, y_1]$, где $y_0 > 0$. Мы берем сегмент, так как в теореме 9, был сегмент, но если мы докажем это для $\forall y_0, y_1$, то отсюда будет следовать что она дифференциируема при $y > 0$. Проверим условия теоремы 9. 1) $f(x,y) = e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} - \sin x e^{-xy}$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y) : x \geq 0, y_0 \leq y \leq y_1\}$

2) $\int\limits_0^\infty f(x,y)\,dx$ сходится $\forall y \in [y_0, y_1]$ (доказанно в пункте а))

3) $\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[y_0, y_1]$. (это доказывается с помощью мажорантного признака Вейерштрасса используя оценку: $|\sin x e^{-xy}| \leq e^{-xy_0} := g(x)$ в $\{(x,y) : x \geq 0, y_0 \leq y \leq y_1\}$, а несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx$ сходится — он равен $\frac{1}{y_0}$.)

б) Теперь вычислим

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = -\int\limits_0^\infty \sin x e^{-xy}\,dx = \lim_{a\to\infty} -\int\limits_0^A \sin x e^{-xy}\,dx =$$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{e^{-xy}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\bigg|_0^A = -\frac{1}{1+y^2} \tag{68}$$

б) В этом и состоит суть метода: несобственный интеграл $F(y)$ не вычисляется непосредственно, но, как оказалось, нетрудно вычислить несобственный интеграл $F(y)$. Из (68) следует, что

$$F(y) = -arctg\, y + C \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{69}$$

Найдем постоянную C, для чего воспользуемся оценкой

$$f(x,y) \leq e^{-xy}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-xy}$$

в силу которой

$$|F(y)| \leq \int\limits_0^\infty e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y}$$

Отсюда следует, что $\lim_{y\to\infty} F(y) = 0$. Переходя к пределу при $y \to \infty$ в равенстве (69), получаем:

$$F(y) = \int\limits_0^\infty \sin x e^{-xy}\,dx = -arctg\, y + \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y > 0$$

а поскольку функция $F(y)$ непрерывна при $y \geq 0$ (это доказано в п. а)), то

$$F(0) = \lim_{y\to 0} F(y) = \frac{\pi}{2}$$

Итак,

$$F(0) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = F(y) = \frac{\pi}{2}$$

Это классический пример как иногда можно вычислить "неберущийся"интеграл с помощью дифференциирования по параметру.

Следствие. $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$. Если $\alpha = 0$, тогда $I(0) = 0$. Пусть $\alpha > 0$, сделаем замену $\alpha x = t$, тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Так как $I(\alpha)$ нечетная функция, то $I(-\alpha) = -I(\alpha)$, значит при $\alpha < 0$ $I(\alpha) = -\frac{\pi}{2}$
Таким образом

$$I(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \alpha < 0 \end{cases}$$

Функция $I(\alpha)$ называется разрывным множителем Дирихле. Через эту функцию можно выразить известную функцию $Sign\alpha$:

$$Sign\alpha = \frac{2}{\pi}I(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -1 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Лекция 15

О несобственных интегралах второго рода, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определенна в области $G = \{(x,y) : a < x \geq b, y \in Y\}$, пусть $\forall y \in Y$ функция $f(x,y)$ неограничена в окрестности точки $x = a$, но ограничена наа любом сегменте вида $\delta \leq x \leq b$, где $\delta > 0$. Рассмотрим несобственный интеграл второго рода по полусегменту $(a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \quad y \in Y$$

Если этот интеграл сходится для $\forall y \in Y$, то тем самым определенна функция

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \quad y \in Y$$

Эта функция $F(y)$ и называется несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y.

Определение. Говорят, что несобственный интеграл второго рода сходится равномерно по параметру y если он сходится для любого yY и $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, такое, что $\forall \delta' \in (0, \delta)$ и для $\forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_a^{a+\delta'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

Главный момент здесь в том что δ берется одно и то же для всех y.

Задание. Сформулировать критерий Коши равномерной сходимости по параметру несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра.

Признаки Вейерштрасса и Дирихле-Абеля для интегралов второго рода, зависящих от параметра, формулируются так же как и для интегралов первого рода, зависящих от параметра.

15.1. Интегралы эйлера

Под этим названием в математическом анализе выступают две функции:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx \tag{70}$$

Это «гамма-функция» аргумента p, это несобственный интеграл, зависящий от параметра p.

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{71}$$

Это «бета-функция» аргументов p и q, это интеграл, зависящий от параметров p и q. Мы рассмотрим некоторые свойства этих функций.

Свойства Г — функции.

1) Область определения. Представим функцию $\Gamma(p)$ в виде суммы двух слагаемых

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{1} x^{p-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p)$$

Интеграл $\Gamma_2(p)$ сходится для $\forall p$. Рассмотрим итеграл $\Gamma_1(p)$, если $p < 1$ то он является несобственным интегралом второго рода, точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $1 - p < 1$, т.е. $p > 0$. Значит функция $\Gamma(p)$ определена для $\forall p > 0$

2) Непрерывность. Для непрерывности есть достаточное условие равномерной сходимости по параметру, но мы разбили функцию $\Gamma(p)$ на два слагаемых, первое из которых несобственный интеграл второго рода, но мы не формулировали достаточное условие для несобственных интегралов второго рода. Поэтому рассмотрим лишь непрерывность $\Gamma_2(p)$.

Рассмотрим произвольный сегмент $[p_1 p \geq p_2]$, где $p_1 > 0.$. На этом сегменте функция $\Gamma_2(p)$ сходится равномерно по параметру p, на $[p_1, p_2]$ что можно доказать по признаку Вейерштрасса.

$$0 < f(x, y) = x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_2-1}e^{-x} = g(x)$$

А интеграл $\int\limits_1^{\infty} g(x)\,dx$ сходится, значит по мажорантному признаку Вейерштрасса равномерно сходится интеграл $\int\limits_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ Тем самым $\Gamma_2(p)$ непрерывна на $[p_1, p_2]$, а следовательно при любом $p > 0$. Также по признаку Вейерштрасса можно доказать непрерывность $\Gamma_1(p)$. Сумма двух непрерывных функций является непрерывной функцией, следовательно $\Gamma(p)$ непрерывна.

3) Дифференцируемость. С помощью теоремы 9 и аналогичной теоремы для несобственных интегралов второго рода нетрудно доказать, что функции $\Gamma_2(p)$ и $\Gamma_1(p)$ дифференцируемы любое число раз по параметру p на полупрямой $p > 0$ и их производные можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла. Для производной n–го порядка функции $\Gamma(p)$ получается формула

$$\Gamma^n(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1}\ln^n x e^{-x}\,dx$$

Задание. Доказать это утверждение.

Замечани. Можно было бы начать с дифференциируемости, доказав его опираясь на теорему 9, а из дифференциируемости следовала бы непрерывность.

4) Рекуррентная формула. Пусть $p > 0$, рассмотрим интеграл $\Gamma(p+1)$ применим к нему формулу интегрирования по частям(можно доказать, что в данном случае эта формула применима)

$$\Gamma(p+1)=\int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx=\int\limits_0^\infty x^p d(-e^{-x})=-x^p e^{-x}\Big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty p x^{p-1}e^{-x}\,dx=p\Gamma(p)$$

Итак, для $p>0$ справедливо равенство

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \tag{72}$$

Это равенство называется формулой приведения. Пусть $n-1<p\leq n$, где n — натуральное число, то, применяя формулу (72) приведения несколько раз, получим:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)=p(p-1)\Gamma(p-1)=\ldots=$$

$$=p(p-1)\ldots p(p-n+1)\Gamma(p-n+1) \tag{73}$$

Так как $0<p-n+1\leq 1$ то равенство (73) дает возможность свести вычисление $\Gamma(p)$ для любого $p>1$ к вычислению $\Gamma(p)$ для $0<p\leq 1$ Полагая в равенстве (73) $p=n$, где n — натуральное число, и учитывая, что $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=1$, приходим к замечательной формуле

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\ldots 1=n!$$

5) График функции. Из формулы (72) следует что

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}\sim\frac{1}{p}\quad \text{при}\quad p\to+0$$

Если $p\to+0$, то $\Gamma(p+1)\to\Gamma(1)=1$. Более детальное исследование показывает, что график функции имеет вид, представленный на рис.15.1

6) Функция при p<0. Как уже было отмечено, при $p\leq 0$ несобственный интеграл (70) расходится и поэтому формула (70) не может служить определением функции $\Gamma(p)$ для $p<0$. Но можно определить $\Gamma(p)$ для $p<0$ иначе, а именно, используя рекуррентную формулу.

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p} \tag{74}$$

Пусть $-1<p<0\Rightarrow 0<p+1<1$. Тогда мы можем определить Γ-функцию для $-1<p<0$ по формуле (74). Возьмем теперь $-2<p<-1\Rightarrow -1<p+1<0$, а для этих p числитель в формуле (74) определен на предыдущем шаге. Продолжая этот процесс, мы определим функцию $\Gamma(p)$ с помощью формулы (18.16) на любом интервале $(-n,-(n-1))$, где n — натуральное число.

Задание. Изобразите (качественно) график функции $\Gamma(p)$ для $p<0$.

7) Формула дополнения.

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

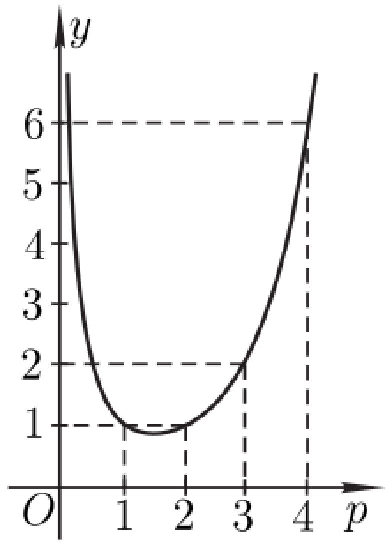

График функции $y = \Gamma(p)$

Рис. 15.1

Свойства B — функции.

1) Область определения Представим функцию $B(p, q)$ в виде суммы двух слагаемых

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B_1(p,q) + B_2(p,q)$$

Если $p \geq 1$ и $q \geq 1$, то $B_1(p,q)$ $B_2(p,q)$ являются собственными интегралами — непрерывными функциями параметров p и q. Если же $p < 1$, то $B_1(p,q)$ является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $(0, \frac{1}{2}]$, точка x $= 0$ является особой точкой подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $1p < 1$, т.е. $p > 0$. Аналогично, если $q < 1$, то $B_2(p,q)$ является несобственным интегралом второго рода по полусегменту $[\frac{1}{2}, 1)$, $x = 1$ — особая точка подынтегральной функции, и интеграл сходится, если $q > 0$. Таким образом, функция $B(p,q)$ определена в квадранте $\{p > 0, q > 0\}$.

2) Симметрия. Справедливо равенство

$$B(p,q) = B(q,p)$$

Сделаем замену переменной $x = 1 - t$, тогда

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = -\int\limits_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt = \int\limits_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt = B(q,p)$$

3) Связь функций B(p,q) и Γ(*p*). имеет место равенство

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Из этой формулы следует, что раз функция $B(p,q)$ выражается через дифференцируемую функцию, то она имеет в квадранте $\{p>0, q>0\}$ непрерывные частные производные любого порядка.

4) Другая формула для B (p,q). В интеграле

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

сделаем замену переменной $x = \frac{1}{1+t}$, получим $1 - x = \frac{t}{1-t}$ и $dx = -\frac{1}{(1+t)^2}$. Тогда

$$B(p,q) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{q-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx$$

Полученное выражение удобно для вычисления целого ряда интегралов.

Пример.

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^3}\,dx$$

Запишем интеграл в виде

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{4}{3}-1}}{(1+x)^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}}\,dx = B\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$\frac{1}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Лекция 16

16.1. Кратные интегралы, зависящие от параметров

Кратные интегралы, зависящие от параметров, — это функции следующего вида:

$$u(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \int \underset{G}{\ldots} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

Мы ограничимся рассмотрением тройных интегралов, имеющих вид

$$U(M) = \iiint\limits_G f(M, P) g(P) dV_p \tag{75}$$

где G — кубируемая область в пространстве, $P(x, y, z)$ пробегает область G, $dV_p = dxdydz$, $g(P)$- ограниченная интегрируемая в области G функция, $M(x_0, y_0, z_0)$, причем $f(M, P) = f(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ непрерывна при $M \neq P$ и неограничена при $P \to M$.(рис.16.1)

Важным примером интегралов такого типа является потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ телом G с плотностью массы $\rho(P)$ в точке $P(x, y, z)$. Этот потенциал называется объемным потенциалом или ньютоновым потенциалом и имеет вид

$$U(M) = \iiint\limits_G \frac{\rho(P)}{r_{MP}} dV_p$$

где $r_{MP} = \sqrt{(x - x_0)^{+}(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, $f(M, P) = \frac{1}{r_{MP}}, g(P) = \rho(P)$

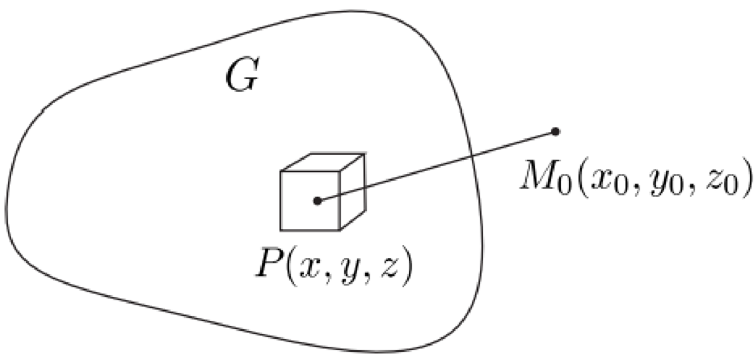

Рис. 16.1 – Кубируемая область G в пространстве.

1) Рассмотрим случай когда точка $M \notin G$, тогда $r_{MP} \neq 0, \forall P \in G$, следовательно $U(M)$ собственный интеграл, зависящий от точки M, как от параметра. Тогда $U(M)$

непрерывная функция и имеет производную любого порядка, которую можно вычислить дифференциируя под знаком интеграла. Вычислим частную производную

$$\frac{\partial U}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_G \rho(P)\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)dV_p = \iiint\limits_G \rho(P)\frac{x-x_0}{r_{MP}^3}dV_p$$

Аналогичные выражения получаются для $\frac{\partial U}{\partial y_0}(M)$ и $\frac{\partial U}{\partial z_0}(M)$ сила $\vec{F}(M)$, с которой единичная точечная масса, помещенная в точку M, притягивается телом G, записывается через частные производные

$$\vec{F}(M) = gradu(M) = \left\{\frac{\partial U}{\partial x_0}(M), \frac{\partial U}{\partial y_0}(M), \frac{\partial U}{\partial z_0}(M)\right\}$$

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} = \iiint\limits_G \rho(P)\left(-\frac{1}{r_{MP}^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r_{MP}^5}\right)dV_p$$

Аналогичные выражения получаются для $\frac{\partial^2 U}{\partial y_0^2}(M)$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial z_0^2}(M)$ Складывая вторые частные производные получим

$$div\, gradu(M) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}(M) + \frac{\partial^2 U}{\partial y_0^2}(M) + \frac{\partial^2 U}{\partial z_0^2}(M) = \triangle U(M) =$$

$$\iiint\limits_G \rho(P)\left(-\frac{3}{r_{MP}^3} + \frac{3[(x-x_0)^+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]}{r_{MP}^5}\right)dV_p = -\frac{3}{r_{MP}^3} + \frac{3}{r_{MP}^3} = 0$$

Это показывает что если точка M лежит вне области G, то потенциал гравитационного поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle U(M) = 0$

2) Пусть точка M внутренняя точка области G. Тогда наш интеграл становится несобственным. Возникают вопросы о непрерывности, дифференцируемости и сохранении уравнения $\triangle U(M) = 0$, чтобы ответить на эти вопросы нужно ввести некоторые понятия.

Вернемся к интегралу (75) пусть точка $M_0 \in G$, обозначим через $\Omega_{M_0}^\delta$ шар с центром в точке M_0 радиуса δ.

Определение. Несобственный интеграл (75) называется сходящимся равномерно относительно M (по параметру M) в точке M_0, если $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, такое, что шар $\Omega_{M_0}^\delta$ целиком содержится в области G и для любой кубируемо области $\omega \in \Omega_{M_0}^\delta$ $\forall M \subset \Omega_{M_0}^\delta$ выполняется неравенство

$$\left|\iiint\limits_\omega f(M,P)g(P)dV_p\right| < \varepsilon$$

Теорема 10. Если несобственный интеграл (75) сходится равномерно относительно M в точке M_0, то функция $u(M)$ непрерывна в точке M_0.

Теорема 11. Если функия $f(M,P)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(M,P)| \leq \frac{c}{r_{MP}^{\alpha}}$$

где $c = const > 0$ какое-то число $0 < \alpha < 3$(где 3 берется из-за размерности)

то несобственный интеграл (75) сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G.

Здесь доказательства этих теорем представлены не будут, их можно прочитать в учебнике.

Вернемся к примеру и применим теоремы 10 и 11 к ньютонову потенциалу.

$$U(M) = \iiint\limits_G \frac{\rho(P)}{r_{MP}} dV_p \quad M \in G$$

Так как подынтегральная функция удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\rho(P)}{r_{MP}}\right| \leq \frac{c}{r_{MP}}$$

Здесь $\alpha = 1 < 3$, то по теореме 11 этот несобственный интеграл сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G и, следовательно, по теореме 10 функция $U(M)$ — непрерывная функция внутри области G.

Можно доказать, что частные производные первого порядка функции $U(M)$, как и в первом случае, можно вычислять с помощью дифференцирования под знаком интеграла

$$\frac{\partial U}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_G \rho(P) \frac{x - x_0}{r_{MP}^3} dV_p \tag{76}$$

и аналогично производные по y_0 и z_0. Так как $\left|\frac{x-x_0}{r_{MP}^3}\right| \leq \frac{c}{r_{MP}^2}$,($\alpha = 2 < 3$) то опираясь на теорему 11 можно сказать что несобственные интегралы частных производных (76) сходятся равномерно относительно M в любой внутренней точке M_0 области G и, следовательно, частные производные первого порядка функции $U(M)$ непрерывны внутри области G.

Оказывается, что частные производные второго порядка функции $u(M)$ уже нельзя вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла. Можно доказать что если функция $\rho(P)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, то $U(M)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка и справедливо равенство

$$\triangle U(M) = -4\pi p(M)$$

Это *уравнение Пуассона.*

Лекция 17

17.1. Тригонометрический ряд Фурье

Определение. Функция $f(x)$, определенная на всей числовой прямой, называется периодической, если $\exists$ число $T > 0$, такое, что $\forall x : f(x+T) = f(x)$. Число T называется периодом функции $f(x)$.

Заметим, что если число T — период функции, то числа $2T, 3T, \ldots$ — также периоды этой функции. Обычно под периодом функции понимают наименьший период(если такой есть).

Известные примеры периодических функций — это $sinx$ и $cosx$. Их период (наименьший) равен 2π.

Пример периодической функции периодом которой является любое сколь угодно маленькое положительное число.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное} \end{cases}$$

Это функция Дирихле. Возьмем в качестве T любое положительное рациональное число. Тогда если x рациональное, то $x + T$ также рациональное и $D(x) = 1$, если x иррациональное, то $x + T$ также иррациональное и $D(x) = 0$

Задание. Доказать что любое иррациональное число не будет периодом.

Рассмотрим последовательность функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

Она называется тригонометрической системой. Любая линейная комбинация функций тригонометрической системы, в том числе и бесконечная (т.е. ряд, если он сходится) является периодической функцией с периодом 2π.

Теперь поставим обратную задачу. Пусть функция $f(x)$ с периодом 2π. Встает вопрос можно ли ее представить в виде линейной комбинации функций периодической системы. Будет доказано что при определенных условиях функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{77}$$

где a_n и b_n — числа. Они называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Пусть равенство (77) верно и ряд можно интегрировать почлено. Получим формулы для коэффициентов ряда Фурье. Чтобы их получить будем пользоваться ортогональностью тригонометрической системы. Это свойство состоит в том что интеграл от произведения любых двух функций тригонометрической системы по сегменту $[-\pi, \pi]$ равен нулю. Например

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) \, dx = 0$$

Рассмотрим множество всевозможных непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций $f(x)$, оно образует линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на число. Введем скалярнеое умножение для элементов этого пространства. Скалярным произведением функций $f(x)$ и $g(x)$ назовем число

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$$

Легко проверить что все свойства скалярного умножения выполнены.Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными если их скалярное произведение равно нулю. Отсюда понятно почему свойство называется ортогональностью системы. Итак, получем формулы для коэффициентов. Проинтегрирем равенство (77)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + 0 \, dx = a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

Умножим равенство (77) на $\cos kx$, где k произвольное натуральное число и проинтегрируем полученное равенство.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

Умножим равенство (77) на $\sin kx$, получим аналогичную формулу для b_k

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена только на сегменте $[-\pi, \pi]$. Тогда по полученным формулам можно найти коэффициенты Фурье для функции $f(x0$ и составить ряд Фурье. Возникают вопросы: 1) при каких условиях этот ряд сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$? 2) будет ли его сумма равна $f(x)$? Ответы на эти вопросы будут даны в следующих параграфах.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $f(x) = x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$. Найдем коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0$$

и

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

так как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} xd\cos nx =$$

$$-\frac{2}{\pi n}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)_0 = -\frac{2}{\pi n}\pi\cos n\pi = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Итак, ряд Фурье для функции $f(x) = x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \tag{78}$$

Знак $\sim$ означает, что найденный ряд Фурье поставлен в соответствие на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, но пока мы не можем ответить на вопрос: сходится ли этот ряд к $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$?

То, что он сходится, доказать нетрудно: $\forall x \in (-\pi, \pi)$ это можно сделать с помощью признака Дирихле (сделайте это), а для $x = -\pi$ и для $x = \pi$ все члены ряда равны нулю, поэтому и сумма ряда равна нулю. Вопрос состоит в том, будет ли сумма ряда равна x? Очевидно, что для $x = \pi$ и $x = \pi$ сумма ряда не равна x. Позднее будет доказано, что $\forall x \in (-\pi, \pi)$ сумма ряда равна х, т.е. $\forall x \in (-\pi, \pi)$ знак $\sim$ можно заменить на знак равенства.

Пример 2. $f(x) = |x|$ определена на сегменте $[-\pi, \pi]$. Найдем коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = -\frac{4}{\pi}\begin{cases}0, & n = 2k\\ \frac{1}{(2k-1)^2}, & n = 2k-1, k = 1, 2, \ldots, n\end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx$$

таким образом

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \tag{79}$$

Позднее мы докажем, что знак $\sim$ можно заменить на знак равенства $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Замечание 1. При $x = 0$ из равенства (79) получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

а из (78) при $x = \frac{\pi}{2}$ получается равенство

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Замечание 2. При $0 \leq x < \pi$ функция $f(x) = |x| = x$ раскладывается как в ряд (78) (по синусам), так и в ряд (79) (по косинусам).

Отметим еще одно свойство периодических функций: если функция $f(x)$ — периодическая с периодом T, то $\forall a$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx$$

т.е. интеграл от периодической функции по любому сегменту длиной в период имеет одно и то же значение. Чтобы это доказать, представим интеграл в левой части в виде

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx$$

и в последнем слагаемом сделаем замену переменной $x = t + T$. Тогда

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(t+T)\,dt = -\int\limits_a^0 f(t)\,dt$$

(поскольку $f(t+T) = f(t)$), и, следовательно, мы приходим к искомому равенству.

17.2. Кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции.

Напомним, что функция $f(x)$ называется кусочнонепрерывной на сегменте $[a, b]$, если она определена и непрерывна во всех точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют левый и правый пределы этой функции в точке x_0 (они обозначаются $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$), не равные друг другу.

Кусочно-непрерывную на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ будем называть кусочно-гладкой на этом сегменте, если ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна во всех точках сегмента $[a, b]$, за исключением, быть может конечного числа точек, а в этих точках (где $f'(x)$ не существует или разрывна) существуют левый и правый пределы $f'(x)$, т.е. существуют $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$.

Отметим, что левый и правый пределы $f'(x)$ в точке x_0 следует отличать от левой и правой производной функции $f(x)$ в точке x_0.

$$f'(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f'(x)$$

левый предел $f'(x)$ в точке x_0,

$$f'_{\text{лев}}(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

левая производная функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию на сегменте $x \in [-1, 1]$, существенно что этот сегмент содержит точку нуль. Эта функция непрерывна и имеет производную в любой точке x, при этом

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

В точке $x = 0$ производная $f'(x)$ не является непрерывной — в этой точке не существуют левый и правый пределы $f'(x)$. Следовательно, согласно нашему определению, функция $f(x)$ не является кусочно-гладкой на любом сегменте, содержащем точку $x = 0$. Отметим , что левая и правая производные функции $f(x)$ в точке $x = 0$ существуют:

$$f'_{\text{лев}}(0) = f'_{\text{пр}}(0) = f'(0) = 0$$

Пример 2.

$$f(x) = |x| \quad x \in [-1, 1]$$

Эта функция непрерывна и ее производная есть во всех точках кроме нуля.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0)$ не существует, но при этом существуют пределы

$$\lim_{x\to -0} f'(x) = -1 \qquad \lim_{x\to +0} f'(x) = 1$$

Эта функция является кусочно-гладкой в соответсвии с определением.

Задание. Проверить является ли функция $sign\ x$ кусочно-гладкой.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в правой полуокрестности точки x_0, и пусть в точке x_0 существует правый предел производной:

$$f'(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f'(x)$$

Тогда в точке x_0 существует правый предел самой функции:

$$\lim_{\xi \to x_0+0} = \frac{f(x_0+\xi) - f(x_0+0)}{\xi} \tag{80}$$

и он равен $f'(x_0+0)$ Смысл этой леммы состоит в следующем: если доопределить $f(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0) = f(x_0+0)$, то предел (80) станет правой производной функции $f(x)$ в точке x_0, и тогда утверждение леммы можно сформулировать так: если в точке x_0 существует правый предел производной, то в этой точке существует правая производная функции, и они равны:

$$f'_{\text{пр}}(x_0) = f(x_0+0)$$

Лемма 2 (об аппроксимации непрерывной на сегменте функции непрерывной кусочно-гладкой функцией). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует непрерывная кусочно-гладкая функция $l(x)$, такая, что $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - l(x)| < \varepsilon$$

и, кроме того, $l(a) = f(a), l(b) = f(b)$.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, так как $f(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a,b]$ (по теореме Кантора), то $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall x', x''$ из сегмента $[a,b]$ удовлетворяющих условию $|x'-x''| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Разобьем сегмент $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{i-1},x_i], \ldots, [x_{n-1},x_n]$ такие, что $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ и построим ломаную, состоящую из n звеньев, так что ее i–е звено соединяет точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $(x_i, f(x_i))$(рис.17.1)

Уравнение ломаной запишем в виде $y = l(x)$ $a \le x \le b$. Функция $l(x)$ является непрерывной и кусочно-гладкой.

Закончите доказательство самостоятельно.

Лемма 3. Если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a,b]$, тогда

$$J_1(\lambda) := \int_a^b f(x)\cos\lambda x\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty$$

$$J_2(\lambda) := \int_a^b f(x)\sin\lambda x\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty$$

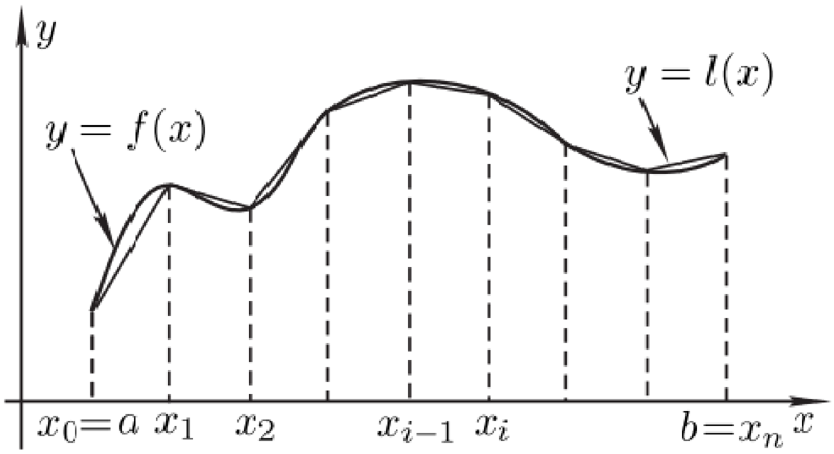

Рис. 17.1 – Ломанная линия из n-звеньев.

.

Лекция 18

18.1. Теорема о сходимости ряда Фурье

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi,\pi]$ Тогда ряд тригонометрический Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

сходится в каждой точке сегмента $[-\pi,\pi]$ и для его суммы $S(x)$ справедливо равенство

$$\forall x(-\pi,\pi):\qquad S(x)=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)) \tag{81}$$

в частности, $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$(рис18.1);

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$$

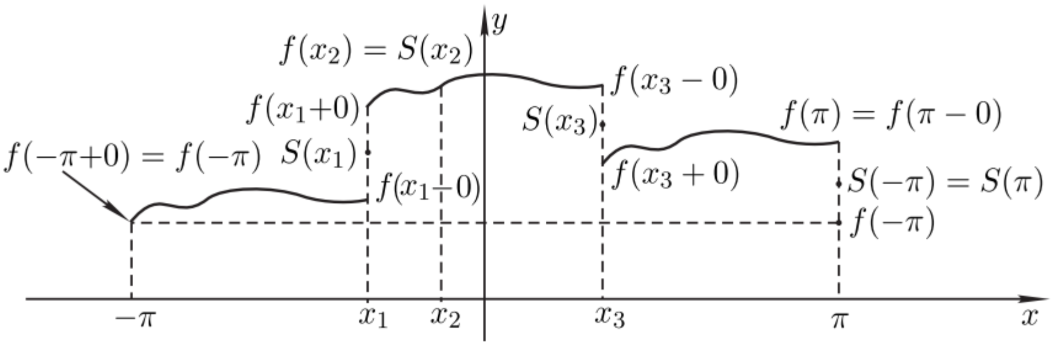

Рис. 18.1 – $f(x)$ — кусочно-гладкая функция.

Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ на всю числовую прямую периодически с периодом 2π и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье для какой-нибудь точки $x\in[-\pi,\pi]$:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

Для доказательства (81) нужно доказать что $S_n(x)\to\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ при $\to\infty$. Используя формулы для коэффициентов Фурье

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt$$

преобразуем выражение для $S_n(x)$:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\cos kt\cdot\cos kx+\sin kt\cdot\sin kx\right]dt=$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] f(t)\,dt =: \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt$$

где

$$D_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\xi\right] \tag{82}$$

Функция $D_n(\xi)$ называется *ядром Дирихле порядка n.*

Сделав в интеграле замену переменной $t = x + \xi$, получим:

$$S_n(x) = \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi$$

Так как $D_n(\xi)$ и $f(x+\xi)$ — периодические функции аргумента ξ с периодом 2π, то, пределы интегрирования можно было заменить на $-\pi$ и π.

Разобьем последнее выражение на сумму двух слагаемых:

$$S_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{0} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi + \int\limits_{0}^{\pi} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi = S_n^-(x) + S_n^+(x)$$

вычислив интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right] d\xi = 1$$

и учитывая, что $D_n(\xi)$ — четная функция, приходим к равенствам

$$\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(\xi)\,d\xi = \int\limits_{0}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2} \tag{83}$$

Умножив второе из этих равенств (83) на $f(x+0)$ и вычтя из $S_n^+(x)$, получим:

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2} f(x+0) = \int\limits_{0}^{\pi} [f(x+\xi) - f(x+0)] D_n(\xi)\,d\xi \tag{84}$$

Преобразуем выражение (82) для $D_n(\xi)$. С этой целью, считая, что $\xi \neq 0$, умножим равенство (82) на $\sin\frac{\xi}{2}$ и воспользуемся формулой

$$\sin\frac{\xi}{2} \cdot \cos k\xi = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k\xi + \frac{\xi}{2}\right) - \sin\left(k\xi - \frac{\xi}{2}\right)\right]$$

Используя эту формулу, получаем:

$$D_n(\xi)\sin\frac{\xi}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\xi + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\xi}{2} - \sin\frac{\xi}{2}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\xi}{2}-\sin\frac{3\xi}{2}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\xi\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi$$

Следовательно,

$$D_n(\xi)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{\sin\frac{\xi}{2}} \quad \text{при} \quad \xi\neq 0$$

а при $\xi=0$ из (82) имеем

$$D_n(0)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+n\right)=\lim_{\xi\to 0}D_n(\xi)$$

Подставляя полученное выражение для $D_n(\xi)$ в (84), приходим к равенствам

$$S_n^+(x)-\frac{1}{2}f(x+0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi[f(x+\xi)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left[\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\cdot\frac{\frac{\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}\right]\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi d\xi=:J(x,n)$$

Функция, стоящая в квадратных скобках под знаком интеграла, является, очевидно, кусочно-гладкой на полусегменте $(0<\xi\leq\pi)$, а поскольку предел $\lim_{\xi\to 0}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ существует (и равен $f'(x+0)$ в силу леммы 1) и также существует $\lim_{\xi\to +0}\frac{\frac{\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}=1$ (первый замечательный предел), то заключенная в квадрадные скобки функция является кусочно-непрерывной на сегменте $[0\leq\xi\leq\pi]$. Поэтому, согласно лемме 3 $J(x,n)\to 0$ при $n\to\infty$ (параметр λ здесь $n+\frac{1}{2}$) Это значит что

$$S_n^+(x)-\frac{1}{2}f(x+0)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

В точности так же доказывается, что $S_n^-(x)-\frac{1}{2}f(x-0)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$, а так как $S_n(x)=S_n^+(x)+S_n^-(x)$, то

$$S_n(x)-\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

т.е.

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$$

Тем самым доказана справедливость равенства (81).

В частности, если x—точка непрерывности $f(x)$, то $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$ и $S(x)=f(x)$. Для точек $x=\pi$ и $x=\pi$, учитывая периодическое продолжение функции $f(x)$, имеем:

$$f(-\pi+0)=f(\pi+0),\ \ f(-\pi-0)=f(\pi-0)$$

поэтому

$$S(-\pi)=\frac{1}{2}(f(-\pi-0)+f(-\pi+0))=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$$

$$S(\pi)=\frac{1}{2}(f(\pi-0)+f(\pi+0))=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$$

Теорема 1 доказана.

Замечания 1. Кусочная гладкость функции на сегменте $[-\pi,\pi]$ является только достаточным, но не необходимым условием. Оказывается, это условие можно ослаблабить. Однако, одной лишь кусочной непрерывности и даже непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ не достаточно для сходимости ряда Фурье в каждой точке этого сегмента. Ряд Фурье непрерывной функции может расходиться на бесконечном множестве точек. Более подробно об этом можно прочитать учебник. Оказывается для рядов Фурье справедлив принцип локализации. Суть его состоит в том, что сходимость или расходимость в данной точке x_0 тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ определяется лишь поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки x_0 и не зависит от того, какова эта функция вне сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Замечания 2. Так как члены ряда Фурье периодические функции с периодом 2π, то ряд Фурье сходится в любой точке числовой прямой. Его суммой на всей прямой является периодическое продолжение на всю прямую функции $S(x)$ — суммы ряда на сегменте $[-\pi,\pi]$.

Замечания 3. Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет точки разрыва на сегменте $[-\pi,\pi]$, и также если $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, но $f(-\pi)(\pi)$, то ряд Фурье этой функции сходится на этом сегменте неравномерно.

Замечания 4. Если $f(x)$ — нечетная функция на сегменте $[-\pi,\pi]$, то ее разложение в ряд Фурье содержит только синусы, а если — четная функция, то — только косинусы. Если $f(x)$ задана на сегменте $[0,\pi]$, то ее можно продолжить на сегмент $[-\pi,0]$ как четным, так и нечетным образом, и в результате получаются два разложения $f(x)$ на сегменте $[0,\pi]$ — одно по косинусам, а другое — по синусам. Ранее мы уже встречались с такой ситуацией

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\qquad 0\le x\le\pi$$

и

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\qquad 0\le x\le\pi$$

Замечания 5. Мы рассмотрели вопрос о разложении в ряд Фурье функций, заданных на сегменте $[-\pi,\pi]$. В некоторых случаях приходится рассматривать функции, заданные на сегменте $[-l,l]$, где l—какое-то число, и их периодические продолжения с периодом $2l$. Ортогональную тригонометрическую систему на сегменте $[-l,l]$ образуют функции

$$1,\cos\frac{\pi nx}{l},\sin\frac{\pi nx}{l}\quad n=1,2,\dots$$

При $l = \pi$ эта система функций совпадает с рассмотренной ранее тригонометрической системой. Ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе функций имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

18.2. Ряд Фурье в комплексной форме

Рассмотрим ряд Фурье для функции $f(x)$ заданной на сегменте $[-\pi, \pi]$ в следущем виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

Так как $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia})$, i-мнимая единица, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)[e^{in(t-x)} + e^{-in(t-x)}]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt\right)e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)e^{inx}$$

Введем обозначения:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \;\; c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Тогда получим

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Итак, ряд Фурье функции $f(x)$ можно записать в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{85}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-inx}\,dt \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Равенство (85) является разложением $f(x)$ по системе функция $\{e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ Эта система является ортогональной, если скалярное произведение комплексно-значных функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[\pi, \pi]$ определить как

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)\,dx$$

где $\overline{g}(x)$ — комплексно сопряженная функция по отношению к $g(x)$. В таком случае

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \neq m \\ 2\pi, & \text{если} \quad n = m \end{cases}$$

то есть при $n \neq m$ функции e^{inx} и e^{imx} функции.

Лекция 19

19.1. Ряд Фурье в бесконечномерном евклидовом пространстве

Напомним, что линейное пространство называется бесконечномерным если в нем можно указать как угодно большое число линейно независимых элементов; линейное пространство называется евклидовым, если в нем введено скалярное произведение элементов. Скалярное произведение элементов f и g будем обозначать так: (f, g).

Пример. Рассмотрим множество всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций, таких, что значение любой функции $f(x)$ в точке x_0 разрыва равно $\frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0 + 0))$. Это множество становится линейным пространством, если ввести обычным образом операции сложения двух функций и умножения функции на вещественное число. Обозначим это пространство $Q[a, b]$. Это линейное пространство — бесконечномерное ($\forall n \quad 1, x, x^2, \dots, x^n$ — линейно независимы). Скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ введем по формуле

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Задание. Проверить, что все требования, предъявляемые к скалярному произведению, при этом выполнены.

Линейное пространство называется нормированным, если каждому элементу f этого пространства поставлено в соответствие неотрицательное число (оно называется нормой элемента f и обозначается $\|f\|$ так, что при этом выполнены условия:

1) $\|f\| > 0$, если $f \neq \Theta$(Θ - нулевой элемент) и $\|f\| = 0$ если $f = \Theta$;

2) $\forall$ элемента f и $\forall$ числа $\alpha: \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

3)$\forall$ элементов f и g: $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (это неравенство называется неравенством треугольника или неравенством Минковского).

Во всяком евклидовом пространстве можно ввести норму элементов с помощью скалярного произведения:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

Задание. Проверьте, что все условия из определения нормы будут выполнены.

Пример.В частности, в пространстве $Q[a, b]$ введенная таким образом норма элемента $f(x)$ имеет вид

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$$

Пусть $\{fn\} = f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — последовательность элементов нормированного пространства.

Определение. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к элементу f по норме данного пространства, если

$$\|f_n - f\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Норма $\|f_n - f\|$ называется также отклонением элемента f_n от элемента f по норме данного пространства.

Пример. Сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ по норме пространства $Q[a, b]$ означает, что

$$\|f_n - f\| = \sqrt{\int\limits_a^b (\|f_n(x) - f(x)\|)^2\, dx} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Это есть ничто иное как сходимость в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Последовательность $\{\psi_n\} = \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ элементов евклидова пространства называется ортогональной системой, если ее элементы попарно ортогональны (т.е. $(\psi_i, \psi_j) = 0$ при $i \neq j$). Ортогональная система $\{\psi_n\}$ называется ортонормированной, если норма каждого ее элемента равна 1.

Любую ортогональную систему, в которой нет нулевых элементов, можно сделать ортонормированной. Умножив каждый элемент на число $\frac{1}{\|\psi_n\|}$, получим ортонормированную систему $\left\{\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}\right\}$

Пример. В пространстве $Q[-\pi, \pi]$ тригонометрическая система

$$\{\psi_n\} = \{1, \cos nx, \sin nx, \ \ n = 1, 2, ..\}$$

является ортогональной, а соответствующей ортонормированной системой является последовательность

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ \ n = 1, 2, ..\right\}$$

Пусть в бесконечномерном евклидовом пространстве задана ортогональная система $\{\psi_n\}$, не содержащая нулевых элементов, f — какой-то элемент этого пространства. Составим (формально) ряд

$$f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + \ldots + f_n\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\psi_n \tag{86}$$

где f_n — числа, определяемые равенством

$$f_n = \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2} \ \ n = 1, 2, .. \tag{87}$$

Ряд (86) называется рядом Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\psi_n\}$, а числа f_n называются коэффициентами Фурье элемента f.

Укажем формальный способ получения формулы (87) (формальный потому, что будем производить действия с рядами без каких бы то ни было обоснований). Напишем формальное равенство

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n$$

И скалярно умножим его обе части на ψ_k. Получим равенство

$$(f, \psi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (\psi_n, \psi_k)$$

Так как система ортоганальна,то в правой части равенства ненулевым будет только одно слагаемое

$$(f, \psi_k) = f_k(\psi_k, \psi_k) = \|\psi_k\|^2 \Rightarrow f_k = \frac{(f, \psi_k)}{\|\psi_k\|^2}$$

Тем самым мы получим формулу (87).

Из курса линейной алгебры известно, что в N-мерном евклидовом пространстве любые N линейно независимых элементов $\{\psi_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$ попарно ортогональных элементов, норма каждого из которых равна 1, образует ортонормированный базис этого пространства. Любой элемент f можно разложить по этому базису:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n \quad \text{где} \quad f_k = (f, \psi_k) \tag{88}$$

Разложение (88) и есть в данном случае ряд Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_n\}$, но только этот «ряд» содержит конечное число слагаемых.

В случае бесконечномерного евклидова пространства встает вопрос о сходимости ряда Фурье элемента f по норме данного пространства к элементу f.

Определение. Говорят, что ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n$ сходится к элементу f по норме данного пространства, если

$$\|S_n - f\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

где $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ — n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f.

зафиксируем номер n и будем рассматривать всевозможные линейные комбинации вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, где c_k — произвольные числа.(S_n одна из таких сумм). Оказывается, что среди этих линейных комбинаций n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f обладает следующим *экстремальным свойством.*

Теорема 2. При фиксированном n среди всех сумм вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ частичная сумма $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ имеет наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства.

Доказательство. Используем ортогональность системы $\{\psi_n\}$, тогда:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f, \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\psi_k, \psi_k) - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + (f, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\psi_k\|^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 \|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|\psi_k\|^2 \quad (89)$$

Из вида правой части равенства следует, что норма

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|$$

имеет наименьшее значение, если $c_k = f_k$, т.е. наименьшее отклонение от элемента f по норме данного пространства дает $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ частичная сумма ряда Фурье элемента f. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если $\{\psi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — ортонормированная система, то для любого элемента f и для любого n справедливо равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

Оно следует из (89), если положить $c_k = f_k$ и учесть, что $\|\psi_k\|$ Это равенство называется тождеством Бесселя в честь немецкого астронома и математика Ф. Бесселя (1784 - 1846).

Следествие 2. Если $\{\psi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — ортонормированная система, то для любого элемента f, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$(где $f_n = (f, \psi_n)$) сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f^2\|$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя.

Доказательство. Из тождества Бесселя следует, что $\forall n$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f^2\|$. Оно показывает, что последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$, члены которого — неотрицательные числа, ограничена числом $\|f^2\|$. Поэтому этот ряд сходится, и его сумма также не превосходит числа $\|f^2\|$.

Пример. В пространстве $Q[-\pi, \pi]$ рассмотрим ряд Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$ по ортонормированной тригонометрической системе

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \;\; n = 1, 2, .. \right\} :$$

$$f(x) \sim \overline{a_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right) + \overline{b_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right)$$

Знак $\sim$ означает, что функции $f(x)$ поставлен в соответствие ее ряд Фурье по данной системе, a_n и b_n — коэффициенты этого ряда. Он может и не сходиться к $f(x)$, поскольку $f(x)$ — только кусочно-непрерывная функция, а не кусочно-гладкая. Если ввести обозначения

$$a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{a_0}{2}, \quad \overline{a_n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = a_n, \quad \overline{b_n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = b_n$$

тогда этот ряд запишется так, как мы ранее записывали тригонометрический ряд Фурье. В силу следствия 2

$$\overline{a_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\overline{a_n^2} + \overline{b_n^2}) \leq \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Разделив это неравенство на π и используя введенные обозначения, получаем неравенство для коэффициентов a_n, b_n тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Так выглядит неравенство Бесселя для тригонометрического ряда Фурье.

19.2. Замкнутые и полные ортогональные системы

Определение. Ортогональная система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется замкнутой, если любой элемент этого пространства можно приблизить с произвольной точностью по норме данного пространства с помощью конечной линейной комбинации элементов системы $\{\psi_n\}$, т.е. для любого элемента f и $\forall\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k$, такая, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\| < \varepsilon$$

Отметим, что это неравенство в силу теоремы 2 обеспечивает выполнение неравенства

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\| < \varepsilon$$

где f_k — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Теорема 3 (необходимое и достаточное условие замкнутости ортонормированной системы). Для того чтобы ортонормированная система $\{\psi_n\}$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента f выполнялось равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \tag{90}$$

где $f_k = (f, \psi_k)$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$. Равенство (90) называется равенством Парсеваля в честь французского математика М. Парсеваля (умер в 1836 г.).

Доказательство. Воспользуемся тождеством Бесселя для ортонормированной системы $\{\psi_n\}$ и произвольного элемента f:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

1) Необходимость. Пусть ортонормированная система $\{\psi_n\}$ — замкнутая и пусть f — любой данный элемент. Согласно определению замкнутой системы $\forall\varepsilon > 0, \exists N$, такой, что будет выполнено неравенство левая часть тождества Бесселя будет меньше ε при $n = N$. Отсюда следует, что правая часть тождества будет меньше ε при $n > N$:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \varepsilon$$

а так как левая часть этого неравенства неотрицательна (в силу неравенства Бесселя) и ε—любое положительное число, что

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0$$

То есть для любого элемента f выполняется равенство Парсеваля.

2) Достаточность. Пусть для любого элемента f выполнено равенство Парсеваля, т.е. сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ равна $\|f\|^2$. Тогда $\forall\varepsilon > 0, \exists n$, такое, что n-я частичная сумма ряда будет отличаться от суммы ряда меньше, чем на :

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$$

Следовательно, и левая часть тождества Бесселя для элемента f меньше ε, а это и означает, что система $\{\psi_n\}$ — замкнутая. Теорема 3 доказана.

Следствие. Если система $\{\psi_n\}$ — ортонормированная, замкнутая, то для любого элемента f его ряд Фурье по системе $\{\psi_n\}$ сходится к этому элементу по норме данного пространства, т.е.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{91}$$

Доказательство. Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$ — замкнутая, то для любого элемента f выполняется равенство Парсеваля (90), а это означает, что $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу тождества Бесселя следует, что выполняеется (91).

Геометрический смысл равенства Парсеваля. Рассмотрим линейное пространство линейных векторов. Пусть вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ попарно ортогональных и имеют дливны равные единице. Для любого вектора $\vec{f} = f_1 \cdot \vec{e_1} + f_2 \cdot \vec{e_2} + f_3 \cdot \vec{e_3}$ справедливо равенство

$$\|\vec{f}\|^2 = (\vec{f}, \vec{f}) = |\vec{f}|^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \sum_{k=1}^{3} f_k^2$$

Это и есть равенство Парсеваля в данном трехмерном случае, его можно назвать трехмерной теоремой Пифагора.

Точно так же, равенство Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$ можно назвать теоремой Пифагора в бесконечномерном евклидовом пространстве, а замкнутую ортонормированную систему можно назвать базисом в этом пространстве, поскольку любой элемент пространства можно разложить в ряд по замкнутой системе (ряд Фурье), сходящийся к этому элементу по норме пространства.

Докажите единственность такого разложения. От противного. Допустим, что какой-то элемент f имеет два разложения в ряд по замкнутой (ортонормированной) системе $\{\psi_n\}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k' \psi_k$$

причем оба ряда сходятся к элементу f по норме пространства. **Задание.** Закончите доказательство этого утверждения.

Определение. Ортогональная (в частности, ортонормированная) система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется полной, если единственным элементом, ортогональным ко всем элементам ψ_n данной системы, является нулевой элемент.

Теорема 4. Любая замкнутая система является полной.

Доказательство. Пусть $\{\psi_n\}$ — замкнутая система и пусть элемент f ортогонален всем элементам системы $\{\psi_n\}$. Согласно определению полной системы требуется доказать, что f — нулевой элемент.

Так как по условию $(f, \psi_n) = 0$ для любого n, то все коэффициенты Фурье элемента f, т.е. числа $f_n = \frac{(f,\psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$

равны нулю. Отсюда в силу равенств Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_n\|^2 = \|f\|^2$ следует, что $\|f\|^2 = 0$, поэтому (согласно свойству нормы) f — нулевой элемент и значит система $\{\psi_n\}$ полная. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если система $\{\psi_n\}$ — полная, то два различных элемента не могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой системе.

Доказательство. Допустим, что элементы f и g имеют одинаковые ряды Фурье по полной системе $\{\psi_n\}$, т.е. для любого k коэффициенты Фурье элементов f и g одинаковы: $f_k = g_k$. Докажем, что тогда $f = g$. Рассмотрим разность $f - g$. Ее коэффициенты Фурье равны $f_k = g_k$ и, следовательно, они равны нулю для любого k. Это означает, что элемент $f - g$ ортогонален всем элементам полной системы $\{\psi_n\}$. Отсюда в силу полноты системы $\{\psi_n\}$ следует, что $f - g = \Theta$ — нулевой элемент, поэтому $f = g$, что и требовалось доказать.

Замечание. Понятия замкнутой и полной систем можно ввести и для конечномерных евклидовых пространств (с помощью таких же определений, как и для бесконечномерных пространств). Мы доказали, что в любом бесконечномерном евклидовом пространстве замкнутая система является полной (теорема 4). Это утверждение верно и для конечномерных евклидовых пространств (доказательство такое же). Более того, для конечномерных евклидовых пространств верно и обратное утверждение: любая полная система является замкнутой. Но для бесконечномерных пространств это не так: можно привести пример полной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве, которая не является замкнутой.

Среди бесконечномерных евклидовых пространств особое место занимают гильбертовы пространства. Гильбертово пространство — это линейное бесконечномерное евклидово полное сепарабельное пространство. Эпитеты «линейное», «бесконечномерное», «евклидово» нам известны — мы знаем, что они означают.

Полное нормированное пространство — это такое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность элементов сходится по норме пространства к некоторому элементу этого пространства.

Сепарабельность нормированного пространства означает, что в этом пространстве существует счетное всюду плотное (в смысле нормы пространства) множество элементов.

Множество называется всюду плотным в данном нормированном пространстве, если любой элемент пространства можно представить как предел (по норме пространства) последовательности элементов этого множества.

Например, множество рациональных чисел является счетным всюду плотным множеством на числовой прямой. В отношении гильбертовых пространств справедливы следующие утверждения.

1. В гильбертовом пространстве понятия замкнутости и полноты ортогональной системы эквивалентны.

2. В гильбертовом пространстве существуют замкнутые системы.

От общих рядов Фурье вернемся к тригонометрическому ряду Фурье.

Лекция 20

20.1. Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье

Теорема 6 (о равномерной сходимости ряда Фурье). Пусть $f(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$ и пусть $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно и абсолютно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Согласно признаку Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости на сегменте $[-\pi, \pi]$ ряда Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{92}$$

достаточно доказать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \tag{93}$$

Одновременно отсюда последует, что ряд (92) сходится абсолютно.

Обозначим через α_n и β_n коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, которая в силу условия теоремы является кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

Непрерывная кусочно-гладкая функция $f(x)$ является первообразной для кусочно-непрерывной функции $f'(x)$. Учитывая это и применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, df(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, так как $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$, а второе слагаемое равно $n \cdot b_n$, где b_n — коэффициент Фурье функции $f(x)$. Итак, $\alpha_n = n \cdot b_n$, откуда следует, что $b_n = \frac{1}{n}|\alpha_n|$. Аналогично получается равенство $a_n = \frac{1}{n}|\beta_n|$ где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Таким образом, ряд (93) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \tag{94}$$

Воспользуемся известным неравенством $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, в силу которого

$$|\alpha_n|\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\alpha^2\right), \quad |\beta_n|\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\beta^2\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{n}(|\alpha_n|+|\beta_n|) \leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$ также сходится (поскольку его члены — квадраты коэффициентов Фурье кусочно-непрерывной функции $f'(x)$), то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$$

сходится, а поэтому, согласно признаку сравнения, сходится ряд (94), т.е. сходится ряд (93), что и требовалось доказать. Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (о почленном дифференцировании ряда Фурье). Пусть выполнены условия: 1) функция $f(x)$ и ее производные до m-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[-\pi,\pi]$;

2) производная $(m+1)$-го порядка $f^{m+1}(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$;

3)$f(-\pi)=f(\pi)$,$f'(-\pi)=f'(\pi),\ldots,f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi)$

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{95}$$

можно m раз дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall k=1,2,\ldots,m$ и $\forall x\in[-\pi,\pi]$ справедливо равенство

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n^k\cos\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)+b_n\cdot n^k\sin\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)$$

Доказательство. Обозначим через α_n и β_n коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(x)\cos nx\,dx, \quad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(x)\sin nx\,dx$$

Интегрируя по частям $(m+1)$ раз и учитывая условие 3) теоремы, приходим к равенству (аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 6):

$$|\alpha_n|+|\beta_n|=n^{m+1}(|a_n|+|b_n|)$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Из этого равенства следует, что

$$n^m(|a_n|+|b_n|)=\frac{1}{n}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$$

и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$ сходится (это доказывается так же, как была доказана сходимость ряда (94)), то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m(|a_n|+|b_n|) \tag{96}$$

Обратимся теперь к ряду Фурье функции $f(x)$, т.е. ряду (95). Если этот ряд продифференцировать почленно k раз, то получится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k(a_n\cdot\cos\Big(nx+k\frac{\pi}{2}\Big)+b_n\cdot\sin\Big(nx+k\frac{\pi}{2}\Big))$$

Для любого $k=0,1,\ldots,m$ этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом (96), поэтому $\forall k=0,1,\ldots,m$ он сходится равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ (по признаку Вейерштрасса).

Отсюда следует, согласно теореме 17' главы 16, что ряд (95) можно дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$ m раз. Теорема 7 доказана.

Пример 1. Пусть $f(x)=(x^2-\pi^2)^2$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ Тогда

$$f'(x)=4x(x^2-\pi^2),\ \ f''(x)=4(x^2-\pi^2),\ \ 4(x^2-\pi^2)+8x^2$$

откуда получаются равенства

$$f(-\pi)=f(\pi), f'(-\pi)=f'(\pi), f''(-\pi)=f''(\pi)$$

и неравенство

$$f'''(-\pi)\neq f'''(\pi)$$

Эти соотношения показывают, что для данной функции $f(x)$ выполнены условия теоремы 7 для $m=2$. Следовательно, ряд Фурье этой функции можно дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$ два раза.

Задание 1. Вычислить коэффициенты Фурье функции $f(x)=(x^2-\pi^2)^2$ на сегменте $[-\pi,\pi]$.

Задание 2. Доказать что ряд фурье можно дифференцировать почленно во внутренних точках сегмента $[-\pi,\pi]$

Пример 2.

Пусть $f(x)=\sin(\cos x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$.

Так как $\sin x$ и$\cos x$, а также их производные любого порядка являются периодическими функциями с периодом 2π, то для данной функции условия теоремы 7 выполнены для любого m, и поэтому ряд Фурье этой функции можно дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$ бесконечное число раз.

20.2. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

Алгеброическиv многочленом степени n называется функция вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

где n — натуральное число, $a_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ — какие-то числа (коэффициенты многочлена).

Тригонометрическим многочленом на сегменте $[-\pi, \pi]$ назовем любую линейную комбинацию конечного числа функций тригонометрической системы:

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

Теорема 8 (ее часто называют теоремой Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то эту функцию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ тригонометрическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу леммы 2 (см. §2 главы 19) существует непрерывная кусочно-гладкая функция $l(x)$, такая, что

$$\forall x \in [-\pi, \pi] : |f(x) - l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и $l(-\pi) = l(\pi)$

По теореме 6 ряд Фурье функции $l(x)$ сходится к этой функции равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому для заданного ε существует номер n, такой, что

$$\forall x \in [-\pi, \pi] : |l(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

где $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $l(x)$ и, тем самым, $S_n(x)$ — тригонометрический многочлен.

Из этих двух неравенств следует, что

$$\forall x \in [-\pi, \pi] : |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-l, l]$ и $f(-l) = f(l)$, то эту функцию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-l, l]$ тригонометрическим многочленом вида

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos \frac{\pi k x}{l} + B_k \sin \frac{\pi k x}{l} \tag{97}$$

Теорема 9 (ее также называют теоремой Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то ее можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на этом сегменте алгебраическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

1) Рассмотрим сначала произвольную функцию $f(x)$, непрерывную на сегменте $[-l, l]$ и удовлетворяющую условию $f(-l) = f(l)$, где $l > 0$ — какое-то число. Согласно замечанию к теореме 8 для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ вида (97), такой, что

$$\forall x \in [-l, l] : |f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Разложим каждую из функций $A_k \cos \frac{\pi k x}{l}$ и $B_k \sin \frac{\pi k x}{l}$, входящих в (97), по формуле Маклорена и возьмем в разложении каждой функции многочлен Тейлора такой степени, чтобы остаточный член формулы Тейлора был по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{4m}$ на всем сегменте $[-l, l]$. Объединяя все эти многочлены Тейлора и прибавляя слагаемое A_0, входящее в $T(x)$, получим многочлен $P_n(x)$, такой, что

$$\forall x \in [-l, l] : |T(x) - P_n(x)| < 2m\frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$\forall x \in [-l, l] : |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

2) Пусть теперь функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$. Возьмем такое число l, что $[a, b] \subset [-l, l]$, и продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[-l, l]$ непрерывным образом.

Получим функцию $F(x)$, непрерывную на сегменте $[-l, l]$ и совпадающую с $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Очевидно, функцию $F(x)$ можно выбрать так, что будет выполнено равенство $F(-l) = F(l)$.

Согласно доказанному в пункте 1), $\forall \varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x \in [-l, l]$ выполняется неравенство $|F(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. На сегменте $[a, b]$ это неравенство принимает вид $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

20.3. Замкнутость тригонометрической системы

Теорема 10. Тригонометрическая система

$$\{\psi_n\} = \{1, \cos nx, \sin nx, \;\; n = 1, 2, ..\}$$

является замкнутой в пространстве $Q[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Согласно определению замкнутой системы нужно доказать, что любую кусочно-непрерывную на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$ можно приблизить с произвольной точностью по норме пространстве $Q[-\pi, \pi]$ с помощью конечной линейной комбинации функций тригонометрической системы, т.е. $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что

$$\|f(x) - T(x)\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 \, dx} < \varepsilon$$

Прежде всего заметим, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно построить такую непрерывную функцию $F(x)$, которая совпадает с $f(x)$ за исключением малых окрестностей точек разрыва $f(x)$ и, быть может, малой окрестности точки $x = \pi$, а в этих окрестностях функция $F(x)$ является линейной функцией и, кроме того, она удовлетворяет условию $F(-\pi) = F(\pi)$ (рис. 20.1). В малых окрестностях точек x_1 и x_2 (это точки разрыва $f(x)$ на рисунке 20.1) и также в малой полуокрестности точки $x = \pi$ функция $f(x)$ заменена на линейную функцию $F(x)$.

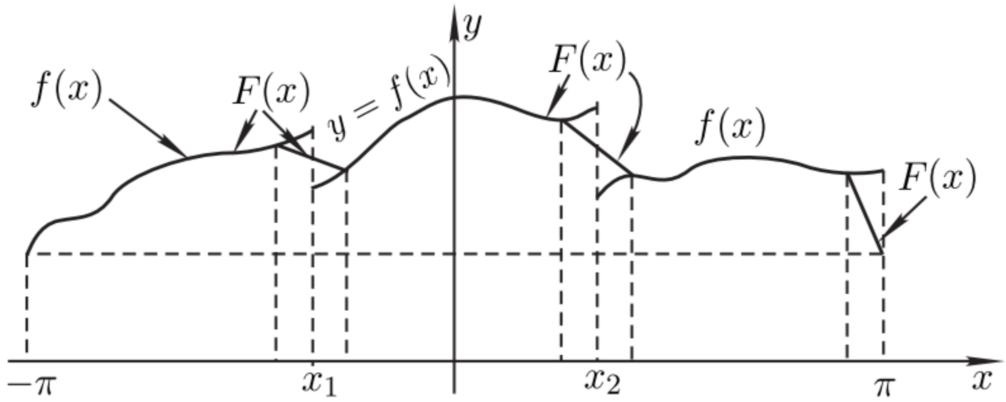

Рис. 20.1 – Кусочно-непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Указанные окрестности можно выбрать столь малыми, что будет выполнено неравенство

$$\|f(x) - F(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 \, dx} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{98}$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 8. Согласно теореме 8 по заданному ε найдется тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi]$ будет выполнено неравенство

$$|F(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$$

Из последнего неравенства следует

$$\|F(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - T(x))^2 \, dx} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{99}$$

Из (98) и (99) следует, что

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \underbrace{\|f(x) - F(x)\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|F(x) - T(x)\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Так как тригонометрическая система является замкнутой в пространстве $Q[-\pi,\pi]$, то для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ выполняется равенство Парсеваля

$$\overline{a_0^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{a_n^2}+\overline{b_n^2})=\|f(x)\|^2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$

где $\overline{a_n}$, $\overline{b_n}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной тригонометрической системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\;\; n=1,2,..\right\}$

Для коэффициентов Фурье a_n, b_n функции $f(x)$ по тригонометрической системе $\{1,\cos nx,\sin nx,\;\; n=1,2,..\}$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$

Следствие 2. Согласно следствию из теоремы 3 для любой функции $f(x)$ кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ по норме пространства $Q[-\pi,\pi]$, т.е. сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$. Это означает, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right)^2dx\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

Следствие 3. Для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ ее тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно на этом сегменте, т.е. для любых x_0 и x из сегмента $[-\pi,\pi]$ справедливо равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\,dt=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,dt$$

Это следует из сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ в среднем на сегменте $[-\pi,\pi]$ и теоремы 19' главы 16.

Лекция 21

21.1. Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является кусочно-гладкой на каждом сегменте. Разложим функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на произвольном чегменте $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \tag{100}$$

В физике функци $\cos\frac{\pi n x}{l}$ и $\sin\frac{\pi n x}{l}$ называют гармониками, а ряд (100) — разложением функции $f(x)$ по гармоникам. Амплитуды гармоник равны a_n и b_n. Коэффициенты при x это частоты гармоник $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ они образуют бесконечно большую последовательность. Разность двух соседних частот $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l}$ тем меньше, чем больше l, т.е. с увеличением l соседние частоты становятся все ближе друг к другу. В пределе при $l \to \infty$ получается разложение функции $f(x)$ по гармоникам с непрерывно изменяющейся частотой λ от 0 до $+\infty$, а ряд Фурье переходит в интеграл Фурье.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt$$

Подставим выражение для a_n и b_n в равенство (100) и получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(t-x)\,dt\right]\Delta\lambda_n$$

Прежде чем переходить к пределу потреуем чтобы функция $f(t)$ была абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е. считая, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

сходится. Тогда предел при $l \to \infty$ первого слагаемого в правой части равенства равен нулю,в итоге получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \tag{101}$$

Руководствуясь такими эвристических (не строгих) рассуждений мы получили выражение (101), которое называется представлением функции $f(x)$ и виде интеграла Фурье. А сама правая часть этого выражения называется интегралом Фурье.

Записывая $\cos\lambda(t-x)$ в виде $\cos\lambda t\cos\lambda x+sin\lambda t\sin\lambda x$, перепишем формулу (101) в виде

$$f(x)=\int\limits_0^\infty(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda \tag{102}$$

где

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)cos\lambda t\,dt\qquad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt$$

Формула (102) представляет собой разложение функции $f(x)$ по гармоникам $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ с частотой λ, изменяющейся непрерывно от 0 до $+\infty$, и амплитудами $a(\lambda)d\lambda$ и $b(\lambda)d\lambda$.

Перейдем теперь к строгому обоснованию справедливости равенства (101).

Теорема 11. Если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является кусочно-гладкой на любом сегменте и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой (т.е. несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ сходится), то для любого x справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dl\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] \tag{103}$$

в частности, в точках непрерывности $f(x)$ правая часть равенства (103) равна $f(x)$, т.е. справедливо равенство (101).

Доказательство этой теоремы не входит в план курса, но все желающие могут посмотреть это достаточно красивое и интересное доказательство в учебнике.

21.2. Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 11. Представим ее в виде интеграла Фурье (будем считать, что в точках разрыва $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dl\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt \tag{104}$$

Здесь мы для удобства написали $x-t$ вместо $t-x$, так как cos четная функция это не на что не повлияет.

Обозначим внутренний интеграл $F_1(\lambda, x)$ и заметим, что он является четной функцией λ, значит

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} F_1(\lambda, x)dl = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda, x)dl$$

и равенство (104) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt \tag{105}$$

Введем еще одну функцию

$$F_2(\lambda, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt$$

является нечетной функцией λ, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(\lambda, x)dl = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dl \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt = 0 \tag{106}$$

если понимать этот интеграл в смысле главного значения, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_2(\lambda, x)dl = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} F_2(\lambda, x)d\lambda$$

Умножая равенство (106) на i (мнимую единицу), складывая с равенством (105) и учитывая, что $\cos\lambda(x-t) + i\sin\lambda(x-t) = e^{i\lambda(x-t)}$, приходим к комплексной форме интеграла Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt \tag{107}$$

Отметим еще раз, что внешний интеграл (по переменной λ) понимается в смысле главного значения. Перепишем равенство (107) в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right]e^{i\lambda t}\,d\lambda$$

Введем обозначение для интеграла в квадратных скобках:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \tag{108}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t}\, d\lambda \tag{109}$$

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется образом Фурье функции $f(x)$, а переход от $f(x)$ к $\hat{f}(\lambda)$ по формуле (108) называется преобразованием Фурье функции $f(x)$. Функция $f(x)$ по отношению к своему образу $\hat{f}(\lambda)$ называется оригиналом, а переход от образа $\hat{f}(\lambda)$ к оригиналу $f(x)$ по формуле (109) называется обратным преобразованием Фурье или восстановлением оригинала по его образу. Еще раз отметим, что несобственный интеграл в обратном преобразовании Фурье понимается в смысле главного значения, а в преобразовании Фурье — как обычный несобственный интеграл, т.е. как

$$\lim_{\substack{A_1 \to -\infty \\ A_2 \to +\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{A_1}^{A_2} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

Преобразование Фурье используется в курсе методов математической физики, которую вы будете изучать осенью будущего года. Например, чтобы решить уравнение теплопроводности, которое описывает распространение тепла в каждой точке с течением времени по заданной начальной температуре.

Вернемся к вещественной форме интеграла Фурье (формула (102)) и рассмотрим два случая.

1) $\boldsymbol{f(x)}$ — четная функция, т.е. $\forall x : f(-x) = f(x)$.

В этом случае $f(t)\cos\lambda t$ — четная функция аргумента t, а $f(t)\sin\lambda t$ — нечетная функция аргумента t, поэтому

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} f(t) \cos\lambda t\, dt, \quad b(\lambda) = 0$$

и формулу (102) можно записать в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(t) \cos\lambda t\, dt \right) \cos\lambda t\, d\lambda$$

Введем обозначение

$$\overset{\wedge}{f_c}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(t) \cos\lambda t\, dt \tag{110}$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \overset{\wedge}{f_c}(\lambda) \cos\lambda x\, d\lambda \tag{111}$$

Формула (110) называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формула (111) — обратным косинус-преобразованием Фурье.

1) $f(x)$ — нечетная функция , т.е. $\forall x : f(-x) = -f(x)$.

В этом случае $f(t)\cos\lambda t$ — нечетная функция аргумента t, а $f(t)\sin\lambda t$ — четная функция аргумента t, поэтому

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\lambda t\,dt$$

и формулу (102) можно записать в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\lambda t\,dt\right)\sin\lambda t\,d\lambda$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формула

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \hat{f}_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$$

- обратным синус-преобразованием Фурье.

Если функция $f(x)$ задана на полупрямой $0 \le x < +\infty$ то ее можно продолжить на полупрямую $-\infty < x < 0$ как четным, так и нечетным образом, и в соответствии с этим использовать либо косинус-преобразование Фурье, либо синус-преобразование Фурье.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad |x| = 1 \end{cases}$$

Эта функция — четная, найдем ее косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\cos\lambda t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1 1\cdot\cos\lambda t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}$$

Обратное косинус-преобразование Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$$

Вычислим этот интеграл при $x = \pm 1$:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\frac{\sin 2\lambda}{\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} = f(\pm 1)$$

Задание. Вычислить Обратное косинус-преобразование Фурье для $|x| < 1$ и для $|x| > 1$

Пример 2.

$$f(x) = e^{-ax} \quad \text{при} \quad 0 \le x < +\infty, a > 0$$

Продолжим эту функцию на отрицательную полуось нечетным образом

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ -e^{-ax}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Будем пользоваться синус-преобразованием Фурье:

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-at} \sin \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Im \int\limits_0^\infty e^{(-a+i\lambda)t} \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Im \frac{1}{-a+i\lambda} e^{(-a+i\lambda)t} \Bigg|_0^\infty =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} Im \frac{1}{-a+i\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Im \frac{a+i\lambda}{a^2+\lambda^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}$$

Задание. Сделать обратное синус-преобразование Фурье. То есть вычислить интеграл

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda$$

Лекция 22

Обобщенные функции

Понятие обобщенной функции является обобщением классического понятия функции. Впервые обобщенные функции были введены П. Дираком в 20-е годы прошлого столетия при исследовании задач квантовой механики. Математические основы теории обобщенных функций были заложены советским математиком академиком С.Л. Соболевым (в 30-е годы прошлого века) и французским математиком Л. Шварцем (в начале 50-х годов прошлого века). В настоящее время обобщенные функции находят широкое применение в математике и физике. Они позволяют выразить в математической форме такие идеализированные физические понятия, как плотность массы материальной точки, плотность точечного электрического заряда, интенсивность мгновенного точечного источника, которые не могут быть выражены с помощью обычных функций.

22.1. Понятие обобщенной функции. Пространство обобщенных функций

Будем рассматривать множество всевозможных функций $\varphi(x)$, определенных на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и обладающих следующими двумя свойствами:

1) каждая функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема (т.е. имеет производные всех порядков) на всей числовой прямой; это обозначают так: $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;

2) каждая функция $\varphi(x)$ является финитной, т.е. для каждой функции $\varphi(x)$ существует интервал, вне которого она равна нулю.

Обозначим через X_φ множество всех точек x, в которых $\varphi(x) \neq 0$, а через $\overline{X}_\varphi$ — замыкание множества X_φ, т.е. $\overline{X}_\varphi$ является объединением множества X_φ и всех его предельных точек.

Множество $\overline{X}_\varphi$ называется носителем функции $\varphi(x)$ и обозначается так: $Supp\varphi(x)$ (от французского support). Очевидно, что функция $\varphi(x)$ является финитной тогда и только тогда, когда $Supp\varphi(x)$ — ограниченное множество.

Множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций назовем множеством основных функций и обозначим буквой D.

Пример. Рассмотрим функцию(рис 22.1)

$$\omega_a(x) = \begin{cases} -e^{\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a, a > 0 \\ 0, & |x| = a \end{cases}$$

Эта функция называется "шапочка"

Задание. Докажите, что $\omega_a^{(n)} = 0$ для $\forall n$

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций сходится к функции $\varphi(x)$ из множества D, если: 1) существует интервал $(-a, a)$, такой, что $\forall n$

$$Supp\varphi_n(x) \in (-a, a)$$

2) $k = 0, 1, 2, \dots$ последовательность $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi^{(k)}(x)$ на всей прямой $\mathbb{R}$. (Заметим, что равномерная сходимость на всей прямой равносильна

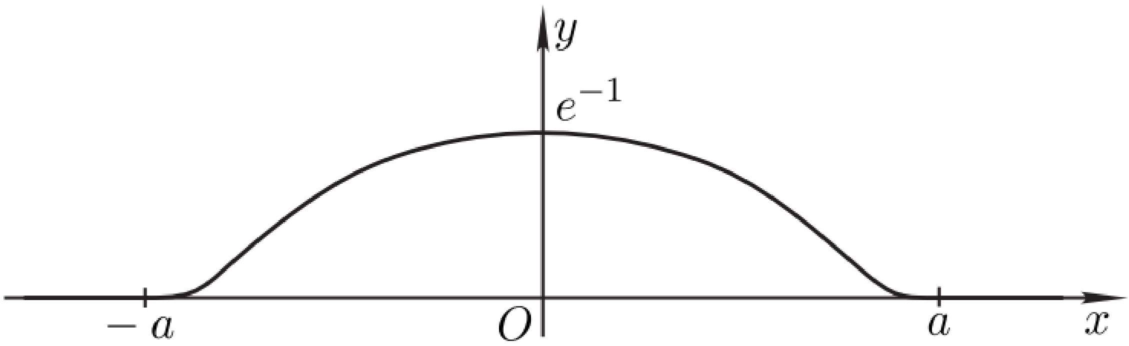

Рис. 22.1 – Функция "шапочка".

равномерной сходимости на интервале $(-a, a)$). Будем обозначить это

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{в пространстве } D$$

Пример 1.

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\omega_a(x) \quad \text{где} \quad \omega_a(x) - \text{шапочка}$$

Докажем, что

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{в пространстве } D$$

Требуется доказать что $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ $\{\varphi_n^{(k)}(x)\} = \{\frac{1}{n}\omega_a^{(k)}(x)\} \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$ или что тоже самое на $[-a, a]$ Для этого воспользуемся определением равномерной сходимости связанным с супремумом

$$\underset{[-a,a]}{Sup}|\varphi_n^{(k)}(x) - \underset{=0}{\varphi^{(k)}(x)}| = \frac{1}{n}\underset{[-a,a]}{Sup}|\omega_a^{(k)}(x)| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\underset{[-a,a]}{Sup}|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = 0$$

а это означает, что

$$\{\varphi_n^{(k)}\} \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x) = 0 \quad \text{на} \quad [-a, a]$$

То есть $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве D

Определение. Будем говорить, что на пространстве D задан функционал, если указано правило, по которому каждой функции $\varphi(x) \in D$ ставится в соответствие определенное число $u(\varphi)$. Функционал также будем обозначать $u(\varphi)$.

Определение. Функционал $u(\varphi)$ называется линейным, если для $\forall\varphi_1(x)$ и $\forall\varphi_2(x)$ из пространства D и любых чисел α и β выполняется равенство

$$u(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)) = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2)$$

Пример. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и интегрируема на любом сегменте. В таком случае будем называть функцию $f(x)$ локально интегрируемой. С помощью функции $f(x)$ определим на пространстве D функционал следующим образом: каждой функции $\varphi(x) \in D$ поставим в соответствие число

$$u(\varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{112}$$

Отметим, что хотя этот интеграл имеет бесконечные пределы интегрирования и, тем самым, является несобственным, на самом деле для каждой функции $\varphi(x)$ это обычный определенный интеграл, поскольку любая функция $\varphi(x)$ из пространства D является финитной и, следовательно, равна нулю вне некоторого интервала.

Докажем что этот функционал является линейным

$$u(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\alpha(\varphi_1) + \beta(\varphi_2)]\,dx =$$

$$= \alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)\,dx + \beta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)\,dx = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2)$$

Этот функционал в дальнейшем будем обозначать символом $\widehat{f}$, а значение функционала $\widehat{f}$ на элементе $\varphi(x)$ пространства D обозначим так: $(\widehat{f}, \varphi)$, т.е.

$$(\widehat{f}, \varphi) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{113}$$

Аналогичное обозначение будем использовать в дальнейшем и в том случае, когда линейный функционал не является интегралом вида (112). Символ (f, φ) будет обозначать значение функционала f на элементе $\varphi(x)$ пространства D.

Пример 2. Рассмотрим множество всех функций, определенных на сегменте $[a, b]$ и имеющих на этом сегменте непрерывную первую производную. Это множество обозначим $C^1[a, b]$. Каждой функции $\varphi(x)$ из этого множества поставим в соответствие число $l(\varphi)$, равное длине кривой, являющейся графиком функции $y = \varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$

$$l(\varphi) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \varphi'^2(x)\,dx}$$

Тем самым на множестве $C^1[a, b]$ задан функционал. Он не является линейным. Если бы он был линейным, то это означало бы, с геометрической точки зрения, что длина графика суммы функций равна сумме длин, но это явно не так.

Определение. Функционал f, определенный на пространстве D основных функций, называется непрерывным, если для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в D к функции $\varphi(x)$, числовая последовательность (f, φ_n) сходится к (f, φ).

Задание. доказать что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

является непрерывным.

Определение. Обобщенной функцией называется любой линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве основных функций.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций сходится к обобщенной функции f, если для любой функции $\varphi(x)$ из пространства D числовая последовательность (f_n, φ) сходится к (f, φ).

Множество всех обобщенных функций с введенным понятием сходимости обозначается D' и называется пространством обобщенных функций.

Сходимость последовательности $\{f_n\}$ обобщенных функций к обобщенной функции f называется слабой сходимостью. Говорят также, что последовательность функционалов $\{f_n\}$ слабо сходится к функционалу f. Обозначение: $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве D'.

Отметим что пространство D основных функций является линейным пространством с обычными операциями сложения и умножения на число.

Введем операции сложения двух обобщенных функций и умножения обобщенной функции на число, то есть в пространстве D'.

Суммой двух обобщенных функций f и g назовем функционал (обозначим его $f + g$), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in D : \quad (f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi)$$

Произведением обобщенной функции f на число α назовем функционал (обозначим его αf), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in D : \quad (\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$$

Задание 1. Доказать что $f + g$ и αf являются линейными и непрерывными функционалами, то есть обобщенными функциями.

Задание 2. Проверить выполнение аксиом линейного пространства для введенных действий сложения и умножения.

В частности, роль нулевого элемента играет функционал, ставящий в соответствие каждой функции из пространства D число нуль.

Следовательно, множество обобщенных функций становится линейным пространством.

22.2. Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция. Она порождает линейный непрерывный функционал $\widehat{f}$ на пространстве D, т.е. порождает обобщенную функцию, определенную формулой (113). Такая обобщенная функция называется регулярной.

Сингулярная функция - это функция не являющаяся регулярной.

Классический пример обобщенной сингулярной функции является δ-функция

$$\forall\varphi(x)\in\quad(\delta,\varepsilon)=\varphi(0)$$

Иногда будем обозначать ее $\delta(x)$

Теорема 1. δ-функция является линейным непрерывным функционалом, то есть обобщенной функцией.

Доказательство. Докажем сначала, что δ–функция – линейный функционал. В самом деле, $\forall\varphi_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ из пространства D и для любых чисел α и β имеем (согласно определению δ–функции):

$$(\delta,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha\varphi_1(0)+\beta\varphi_2(0)=\alpha(\delta,\varphi_1)+\beta(\delta,\varphi_2)$$

а это и означает, что δ–функция – линейный функционал.

Докажем теперь, что δ–функция – непрерывный функционал. Для этого, согласно определению непрерывного функционала, нужно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в D к функции $\varphi(x)$, соответствующая числовая последовательность (δ,φ_n) сходится к (δ,φ). Но $(\delta,\varphi_n)=\varphi_n(0)$, $(\delta,\varphi)=\varphi(0)$ (по определению δ–функции), поэтому нужно доказать, что если

$$\varphi_n(x)\to\varphi(x)\quad\text{при}\quad n\to\infty\quad\text{в пространстве } D \tag{114}$$

то

$$\varphi_n(0)\to\varphi(0)\quad\text{при}\quad n\to\infty$$

Из (114) по определению сходимости в пространстве D следует, что $\varphi_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$ на всей числовой прямой, в частности, $\varphi_n(0)\rightrightarrows\varphi(0)$ при $n\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. δ-функция является сингулярной обобщенной функцией.

Доказательство. Предположим, что δ-функция является регулярной обобщенной функцией. То есть существует локально интегрируемая функция $f(x)$, такая, что

$$\forall\varphi(x)\in D:(\delta,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0)$$

Возьмем в качестве $\varphi(x)$ «шапочку» Для нее выполнены соотношения

$$0\le\omega_a(x)\le e^{-1},\quad\omega_a(0)=e^{-1}$$

По определению δ-функции $(\delta,\omega_a)=\omega_a(0)=e^{-1}$ Тогда

$$(\delta,\omega_a)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\omega_a(x)\,dx=\int\limits_{-a}^{+a}f(x)\omega_a(x)\,dx$$

И следовательно

$$\int\limits_{-a}^{+a}f(x)\omega_a(x)\,dx=e^{-1} \tag{115}$$

Так как функция $f(x)$ локально интегрируема, то она ограничена на любом отрезке, поэтому

$$\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\omega_a(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0$$

Но это противоречит равенству (115) и, следовательно, наше предположение неверно, а значит, δ-функция является сингулярной обобщенной функцией. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. δ-функцию можно представить как предел в пространстве D' последовательности регулярных обобщенных функций.

Доказательство. Для любого $a > 0$ введем функцию

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & |x| \le \frac{a}{2} \\ 0, & |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Каждая функция $\delta_a(x)$ порождает функцию $\widehat{\delta}_a$, которая действует следущим образом

$$\forall \varphi(x) \in D: \quad (\widehat{\delta}_a, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(x)\,dx$$

Докажем что

$$\widehat{\delta}_a \to \delta - \text{функции} \quad \text{при} \quad a \to +0 \quad \text{в пространстве } D'$$

Для этого нужно доказать

$$\forall \varphi(x) \in D: \quad (\widehat{\delta}_a, \varphi) \to (\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \text{при} \quad a \to +0$$

Или, что тоже самое

$$\forall \varphi(x) \in D: \quad (\widehat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0) \to 0 \quad \text{при} \quad a \to +0 \tag{116}$$

По определению предела нужно доказать что $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 > 0$, такое, что

$$|\widehat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < a < a_0 \tag{117}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, найдется $a_0 > 0:$

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x| < a_0$$

Используя это неравентсво оценим выражение (117)

$$|(\overset{\wedge}{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0)| = \left|\frac{1}{a}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{a}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(0)\,dx\right| = \left|\frac{1}{a}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \le |\right.$$

$$\leq \left| \frac{1}{a} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(0)|}_{<\varepsilon} dx \right| < \frac{1}{a} \varepsilon \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx = \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < a < a_0$$

Тем самым выполнено неравенство (116) и значит теорема 3 доказана.

Замечания. Оказывается, любую сингулярную обобщенную функцию можно представить как предел в пространстве D последовательности регулярных обобщенных функций. Положим $a = \frac{1}{n}$, тогда $a \to +0$ при $n \to \infty$. Из теоремы 3 следует что $\widehat{\delta}_{\frac{1}{n}} \to \delta$ при $n \to \infty$ в пространстве D'

Лекция 23

Локальные свойства обобщенных функций.

Обобщенные функции, в отличие от обычных функций, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции на каком-то интервале.

Определение. Говорят, что обобщенная функция f равна нулю на интервале I, если $\forall\varphi(x) \in D$, носитель которой $Supp\varphi(x) \in I$, выполняется равенство $(f, \varphi) = 0$.

Иногда это записывают так: $f = 0$ на интервале I или $f(x) = 0$ при $x \in I$. Нужно только понимать условность последней записи – $f(x)$ не имеет значений в отдельных точках x из интервала I, а равенство $f(x) = 0$ при $x \in I$ понимается в смысле данного определения.

Определение. Обобщенные функции f и g называются равными на интервале I, если $f(x) - g(x) = 0$ при $x \in I$.

Объединение всех интервалов, на которых обобщенная функция f равна нулю, называется нулевым множеством обобщенной функции f, обозначается O_f. Дополнение множества O_f до всей прямой, то есть разность $\mathbb{R} - O_f$, называется носителем обобщенной функции f (обозначение: $Suppf$). Если $Suppf$ — ограниченное множество, то обобщенная функция f называется финитной.

Примеры. Рассмотрим δ-функцию. Для любого интервала I не содержащего точку $x = 0$ $\delta(x) = 0$. Действительно, возьмем любую функцию $\varphi(x)$ носитель которой принадлежит интервалу I, отсюда следует что $\varphi(0) = 0$ и значит $(\delta, \varphi) = \varphi(0) = 0$. Нулевое множества δ-функции это $O_\delta = (x < 0) \cup (x > 0)$. Это значит носитель $Supp\delta$ δ-функции является единственная точка $x = 0$

23.1. Действия над обобщенными функциями

1. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция, $\widehat{f}$ — порождаемая функцией $f(x)$ регулярная обобщенная функция, $a(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на всей прямой $\mathbb{R}$ ($a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$). Рассмотрим регулярную обобщенную функцию $\widehat{af}$, она также локально интегрируемая. Тогда

$$\forall\varphi(x) \in D: \quad (\widehat{af}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(x)f(x)\varphi(x)\,dx = \widehat{f}, a\varphi)$$

Итак, для любой регулярной обобщенной функции $\widehat{f}$ и для любой функции $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$(\widehat{af}, \varphi) = (\widehat{f}, a\varphi)$$

Определение. Произведением обобщенной функции f на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ называется обобщенная функция (обозначим ее af), действующая по правилу:

$$\forall\varphi(x) \in D: \quad (af, \varphi) = f, a\varphi)$$

Подчеркнем, что для регулярных обобщенных функций это равенство было обосновано, а для сингулярных обобщенных функций оно принимается в качестве определения произведения на дифференцируемую функцию.

Пример. $a(x)\delta(x)$ — это такая (по определению) обобщенная функция, что $(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta, \varphi)$, т.е. умножение δ-функции на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ равносильно умножению δ–функции на число $a(0)$: $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$. Отметим, что произведение двух обобщенных функций не определяется.

Отметим, что произведение двух обобщенных функций не определяется.

2. Линейная замена переменных в обобщенных функциях Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция, a и b — произвольные числа, $a \neq 0$. Рассмотрим функцию $f(ax+b)$ и порождаемую ею регулярную обобщенную функцию, которую обозначим $\widehat{f}(ax+b)$. Для любой функции $\varphi(x) \in D$ имеем равенство

$$(\widehat{f}(ax+b), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx \tag{118}$$

Сделаем в интеграле замену переменной $t = ax+b$. Тогда $dx = \frac{1}{a}dt$, $x = \frac{t-b}{a}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\,dx = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) \tag{119}$$

Отметим что при $a < 0$ и при $a > 0$ получаются, на самом деле, разные интегралы, но так как в них различны лишь пределы интегрирования они оба уложились в одну запись

$$\frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,dt$$

Из (118) и (119) следует, что для любой регулярной обобщенной функции $\hat{f}(x)$ и любых чисел $a \neq 0$ и b справедливо равенство

$$(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$$

Для сингулярных обобщенных функций примем это равенство в качестве определения линейной замены переменных. Таким образом, мы вводим следующее определение.

Определение. Обобщенная функция $f(ax+b)$ — это функционал, действующий по правилу:

$$\forall\varphi(x)\in D:\qquad (f(ax+b),\varphi(x))=\frac{1}{|a|}\left(f(x),\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$$

Частные случай 1. При $a=1$, $b=-c$ получаем формулу сдвига аргумента обобщенной функции:

$$(f(x-c),\varphi(x))=(f(x),\varphi(x+c))$$

Частные случай 2. При $b=0$, $a\neq 0$ — формулу растяжения аргумента обобщенной функции:

$$(f(ax),\varphi(x))=\frac{1}{|a|}\left(f(x),\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

Примеры.

1)

$$(\delta(x-c),\varphi(x))=(\delta(x),\varphi(x+c))=\varphi(x+c)\Big|_{x=0}=\varphi(c)$$

2)

$$(\delta(ax),\varphi(x))=\frac{1}{|a|}\left(\delta(x),\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right)=\frac{1}{|a|}\varphi(0)=\frac{1}{|a|}(\delta(x),\varphi(x))$$

т.е. растяжение аргумента обобщенной функции $\delta(x)$ с коэффициентом a равносильно умножению $\delta(x)$ на число $\frac{1}{|a|}$:

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

В частности, при $a=-1$ получаем равенство $\delta(-x)=\delta(x)$ (четность δ–функции).

3. Дифференцирование обобщенных функций. Пусть $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$ и является интегрируемой на любом сегменте. Операцию дифференцирования будем обозначать либо штрихом (как это делалось раньше), либо буквой D (так принято в теории обобщенных функций):

$$f'(x)=D(x),\ \ f''(x)=(f'(x))'=D(Df(x))=D^2f(x),\dots,f^{(k)}(x)=D^{(k)}(x)$$

Функция $Df(x)$ порождает регулярную обобщенную функцию $\widehat{Df}$, действие которой на произвольную функцию $\varphi(x)$ из пространства D выражается равенством

$$(\widehat{Df},\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)\,dx$$

Применяя к интегралу формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)\,dx=\underbrace{f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)\,dx=-(\widehat{f},\varphi')=-(\widehat{f},D\varphi)$$

Для регулярной обобщенной функции приходим к равенству

$$(\widehat{Df}, \varphi) = -(\widehat{f}, D\varphi) \tag{120}$$

Аналогично получается равенство (путем k–кратного применения формулы интегрирования по частям)

$$(\widehat{D^k f}, \varphi) = (-1)^k(\widehat{f}, D^k\varphi), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{121}$$

Равенства (120) и (121) получены для регулярной обобщенной функции. Для сингулярных обобщенных функций примем эти равенства в качестве определения ее производных.

Определение. Производной n-го порядка обобщенной функции f называется обобщенная функция (она обозначается $D^n f$), действующая по правилу:

$$\forall\varphi(x) \in D : \quad (D^n f, \varphi) = (-1)^n(f, D^n\varphi), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Это означает, что любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема, т.е. имеет производные всех порядков.

Пример 1. Найдем производную обобщенной функции Хевисайда($\Theta(x)$)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\forall\varphi(x) \in D : \quad (\widehat{\Theta}, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

поэтому, согласно определению производной обобщенной функци

$$(D\widehat{\Theta}, \varphi) = -(\widehat{\Theta}, D\varphi) = -(\widehat{\Theta}, \varphi') = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = ((\delta(x), \varphi(x)))$$

Следовательно, $D\widehat{\Theta} = \delta(x)$, т.е. производная обобщенной функции Хевисайда равна δ-функции

Пример 1. Найдем производную δ-функции.

$$\forall\varphi(x) \in D : \quad (D\delta(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), D\varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0)$$

Таким образом, производная δ-функции ставит в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ из пространства D число – $\varphi(0)$. Аналогичным образом получаем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (D^n\delta(x), \varphi(x)) = (-1)^n(\delta(x), D^n\varphi(x)) = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

Пример 2. Рассмотрим обобщенные функции $\widehat{\sin x}$ и $\widehat{\cos x}$, порожденные функциями $\sin x$ и $\cos x$

$$\forall\varphi(x)\in D: \quad (\widehat{\sin x},\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\cdot\varphi(x)\,dx$$

Найдем производную обобщенной функции $\widehat{\sin x}$

$$(D\widehat{\sin x},\varphi)=-(\widehat{\sin x},D\varphi)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\cdot\varphi'(x)\,dx=-\sin x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x\cdot\varphi(x)\,dx=(\widehat{\cos x},\varphi)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ