ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ОВЧИННИКОВ
АЛЕКСЕЙ ВИТАЛЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КУЩЕНКО АННУ КОНСТАНТИНОВНУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Системы координат

Система координат – объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости

Зададим начало координат в точке O (от англ. origin) и $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} -$ единичные направляющие векторы координатных осей (орты). Присвоим осям названия: $Ox -$ абсцисса, $Oy -$ ордината. Для каждой точки A, лежащей на плоскости, можно выполнить следующее построение: опустить перпендикуляры на координатные оси и рассмотреть длины двух отрезков (проекций), каждому из них приписать знак. Таким образом, любая точка плоскости может быть описана упорядоченной парой чисел (x_1, x_2).

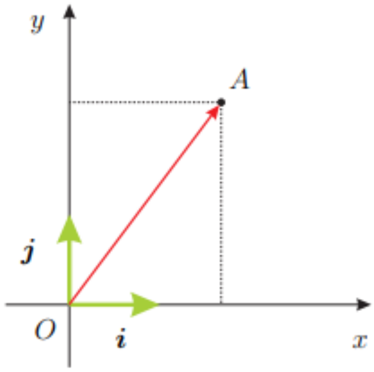

Рис.1.1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости.

Мы выяснили, что точка на плоскости описывается парой чисел, встает вопрос, а как описать линию. Для этого требуется уравнение с двумя неизвестными, которое связывает координаты x, y между собой. Те точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, принадлежат линии. Например, уравнение $x + y = 1$ описывает прямую (рис. 1.2), а $x^2 + y^2 = 1 -$ окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1.3). Более сложные линии исследуются в другом разделе математики, в дифференциальной геометрии.

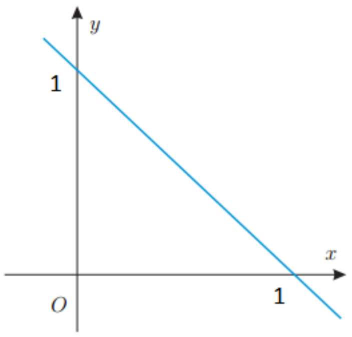

Рис. 1.2. График прямой $x + y = 1$.

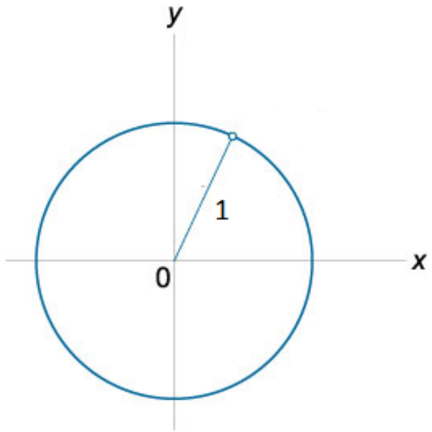

Рис. 1.3. График окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Для описания линии на плоскости нам требуется уравнение вида

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

Встает вопрос, является ли взаимно однозначным соответствие между линиями и их уравнениями. Понятно, что каждому уравнению соответствует только одна линия: если мы найдем множество всех решений уравнения и изобразим их на картинке, то как раз и получится линия. Что касается обратного соответствия, то, конечно, одна и та же линия может быть описана разными уравнениями, например, прямая на рис. 1.2 может также быть задана уравнением $2x + 2y = 2$. Таким образом, соответствие между линиями и их уравнениями не является взаимно однозначным.

Предположительно, для того, чтобы уравнение (1.1) описывало именно линию, на него следует наложить определенные требования. Рассмотрим для примера уравнение $x + y = |x| + |y|$. Множество решений этого уравнения представлено на рис. 1.4 и мало напоминает линию. Какие именно требования нужно накладывать на функцию F – вопрос к математическому анализу.

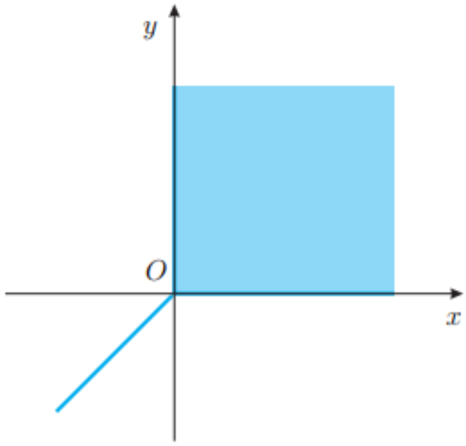

Рис. 1.4. График решения уравнения $x + y = |x| + |y|$.

Существует параметрический способ задания линии, который заключается в том, что координаты x, y предстают в виде функций некоторой третьей переменной – параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}. \qquad (1.2)$$

Такой способ гораздо удобнее для задач механики, в этом случае мы будем трактовать параметр t как время, а x и y как координаты точки, тогда система (1.2) представляет собой не что иное, как уравнение траектории точки (x, y).

Попробуем параметризовать уравнение прямой, изображенной на рис. 1.2, получим, например:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}.$$

Мы можем выбрать и другую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}.$$

Обе системы описывают одну и ту же прямую, но, с точки зрения механики, они отличаются скоростью движения точки вдоль оси Ox.

Для единичной окружности с центром в начале координат (рис. 1.3) получаем следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

Для того, чтобы получилась полная окружность, мы должны задать параметр в пределах $0 \le t < 2\pi$ или $-\pi < t \le \pi$.

2. *Декартова прямоугольная система координат в пространстве*

Берутся три взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых фиксируется направление, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} -$ единичные направляющие векторы координатных осей. Присвоим осям названия: $Ox -$ абсцисса, $Oy -$ ордината, $Oz -$ аппликата. Для каждой точки пространства A можно выполнить следующее построение: опустить перпендикуляры на координатные оси и рассмотреть длины трех отрезков (проекций), каждому из них приписать знак. Таким образом, любая точка в пространстве может быть описана набором координат (x_1, x_2, x_3).

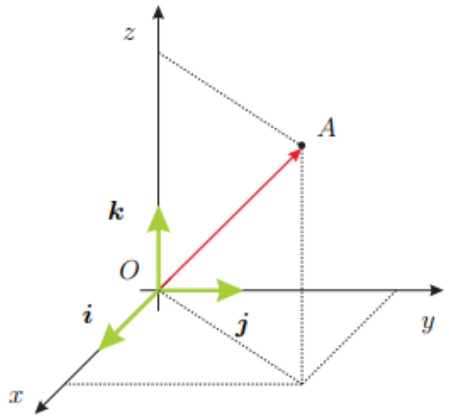

Рис. 1.5. Декартова прямоугольная система координат в пространстве.

Встает вопрос, а как описать линию в пространстве. Если мы попробуем записать уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1.3}$$

то графиком его будет не линия, а поверхность. Для того, чтобы задать линию мы можем использовать систему двух уравнений вида (1.3), тогда линия будет являться пересечением двух поверхностей. Либо мы можем задать линию параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t). \\ z = \varkappa(t) \end{cases}$$

3. *Декартова косоугольная система координат.*

На плоскости берутся две пересекающиеся прямые, начало координат – точка пересечения этих прямых. Названия осей Ox и Oy «абсцисса» и «ордината» в этом случае уже не используются. На осях задаются масштабные отрезки, $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} -$ направляющие векторы координатных осей, углы между векторами могут быть не прямыми, и длины векторов могут быть разными и не равными единице. Такую систему координат удобно использовать для задач кристаллографии. Аналогично можно задать косоугольные координаты в пространстве.

Для того, чтобы в такой системе координат определить координаты точки, нужно рассматривать проекцию на одну ось параллельно другой оси – контравариантные координаты. Если рассматривать ортогональные проекции, то получим другой набор чисел – ковариантные координаты.

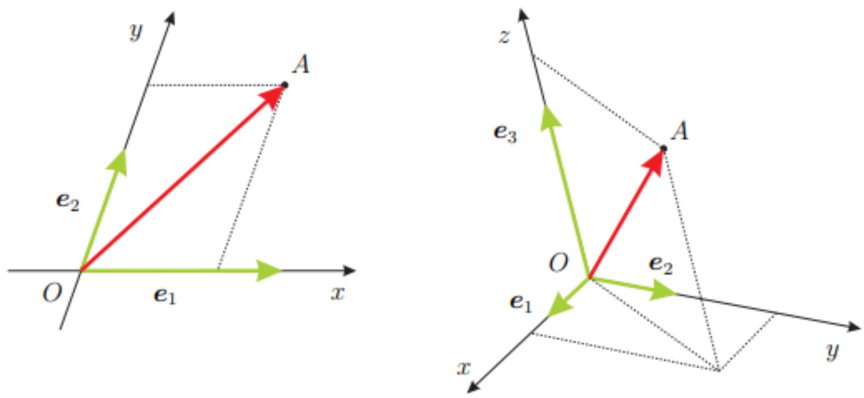

Рис. 1.6. Декартова косоугольная система координат.

4. *Полярная система координат на плоскости.*

Берется луч, его начало называется полюсом P, а сам луч – полярным лучом. Для каждой точки A плоскости будем рассматривать две величины: расстояние r от нее до полюса и угол φ между лучом и отрезком, соединяющим полюс с точкой A. Пара чисел (r, φ) называется полярными координатами точки A.

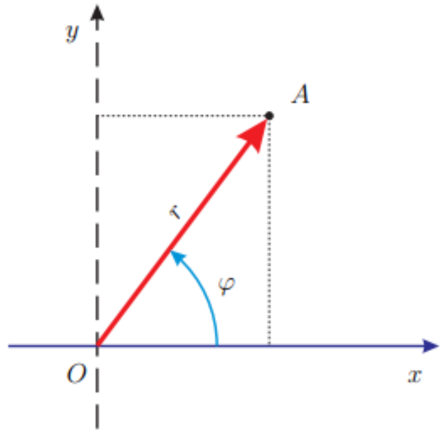

Рис. 1.7. Полярная система координат на плоскости.

Полярные координаты и прямоугольные декартовы координаты связаны между собой. Для того, чтобы установить эту связь, соединим полюс P с началом координат в точке O и полярный луч с осью Ox (рис. 1.7). Тогда имеем:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

5. *Цилиндрическая система координат в пространстве.*

Начнем с рассмотрения декартовой прямоугольной системы координат. Пусть у нас в пространстве есть произвольная точка A, построим ее проекции на координатные оси. Цилиндрическими координатами точки A мы будем называть следующие три величины: длину r отрезка, соединяющего начало координат с проекцией точки на плоскость xy, угол φ между этим отрезком и осью Ox и высоту h точки над плоскостью xy.

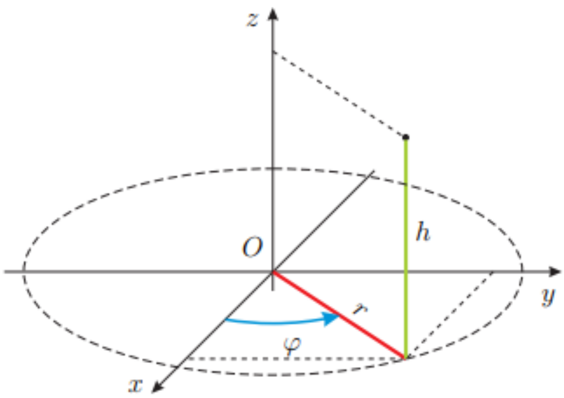

Рис. 1.8. Цилиндрическая система координат в пространстве.

Цилиндрические координаты и прямоугольные декартовы координаты связаны между собой следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ h = z \end{cases}.$$

Диапазоны изменения переменных: $0 \le r < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$, $-\infty < h < \infty$.

Цилиндрические координаты удобно использовать в задачах, обладающих аксиальной симметрией, например, в задаче поиска электрического или магнитного поля, создаваемого заряженной проволокой.

6. *Сферическая система координат в пространстве.*

Начнем так же с рассмотрения декартовой прямоугольной системы координат. Пусть у нас в пространстве есть произвольная точка A, построим ее проекции на координатные оси. Сферическими координатами точки A мы будем называть следующие три величины: длину r отрезка, соединяющего начало координат с нашей точкой (радиус-вектор); угол φ между отрезком, соединяющим начало координат с проекцией точки A на плоскость xy, и осью Ox; угол θ между осью Oz и радиус-вектором точки A. Сферические координаты очень похожи на географические: $\varphi -$ долгота, $\theta -$ широта.

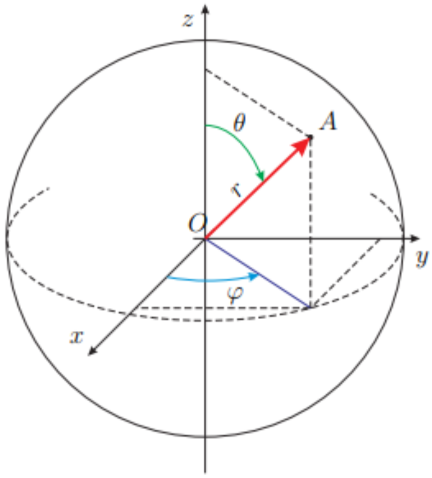

Рис. 1.9. Сферическая система координат в пространстве.

Сферические координаты и прямоугольные декартовы координаты связаны между собой следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta. \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Диапазоны изменения переменных: $0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$.

Отношение эквивалентности

Оказывается, что определение вектора как направленного отрезка не совсем верно, и два этих понятия отличаются. Для того, чтобы в этом разобраться рассмотрим следующее важное понятие отношения эквивалентности. Во-первых, что такое отношение, оно определяется для элементов некоторого множества. Мы не будем давать точного определения отношения, рассмотрим поясняющие примеры. Так, например, на множестве чисел мы можем рассмотреть отношение, которое выражается словом «больше», то есть для любых двух чисел мы можем сказать, является одно из них больше другого или нет. На множестве людей мы можем для любых двух людей сказать, является один из них родителем другого или нет. Таким образом, отношение есть некий факт, и для каждой пары элементов множества можно установить имеет место этот факт или нет. Для того, чтобы все-таки дать более математическое определение отношения, вспомним основы теории множеств.

В теории множеств отсутствует понятие множества, так же как, например, понятие прямой в геометрии. Тем не менее, мы понимаем, что множество состоит из элементов, и мы можем для любого множества A и любого объекта a сказать, является этот объект элементом этого множества $a \in A$ или нет $a \notin A$. Пустое множество – это множество, в котором нет ни одного элемента.

Вспомним основные операции над множествами: объединение $A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$ и пересечение $A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$. Пусть у нас есть два множества $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $B = \{3,4,5,6,7\}$. Тогда объединение множеств $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и пересечение $A \cap B = \{3,4,5\}$.

Говорят, что одно множество является подмножеством другого, если каждый элемент первого принадлежит так же и второму. Например, множество A подмножество $C = \{1,2,5\} \subset A$, причем C не является подмножеством B, то есть $C \not\subset B$.

Рассмотрим множество вида $P = \{2, \{2\}\}$, в этом множестве 2 элемента: число 2 и множество, состоящее из числа 2. Мы можем написать $2 \in P, \{2\} \in P, \{2\} \subset P$, причем в последней записи имеется ввиду двойка, которая является первым элементом в P. Но мы не можем написать $2 \subset P$.

Введем операцию над множествами, которая называется декартово произведение: $X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$, новое множество $X \times Y$ состоит из упорядоченных пар элементов множеств X и Y. Например, плоскость является декартовым произведением двух прямых. Кстати, никто не запрещает нам рассматривать декартово произведение множества само на себя $X \times X$. Наконец, мы можем сформулировать определение отношения.

<u>Определение.</u> Отношением на множестве X называется любое подмножество его декартова квадрата $X \times X$.

Рассмотрим множество $X = \{1,2,3\}$, тогда $X^2 = X \times X = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{Bmatrix}$.
Выберем подмножество $R \subset X^2$, обозначим его R (от англ. relation): $R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$. Заметим, что для каждого элемента в выбранном подмножестве второй элемент пары всегда строго больше первого, таким образом, отношение R и есть отношение «больше». Аналогично мы можем составить отношения «меньше» и «равно». Для записи отношения будем использовать знак «$\sim$».

<u>Определение.</u> Отношение ~ называется рефлексивным, если $\forall x: x \sim x$.

Рефлексивными отношениями являются, например, отношение равенства, отношение подобия, отношение «$\geq$», а вот отношение параллельности прямых, отношение «$>$» не являются рефлексивными.

Определение. Отношение ~ называется симметричным, если $\forall x, y: x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
Симметричными отношениями являются, например, отношение равенства, отношение подобия, отношение параллельности, а вот отношение «$>$» не является симметричным.

Определение. Отношение ~ называется транзитивным, если $\forall x, y, z: x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.
Транзитивными отношениями являются отношение равенства, отношение подобия, отношение «$>$», а вот отношение параллельности не является транзитивным.

Заметим, что все три свойства не зависимы друг от друга, то есть из наличия одного свойства никак не следует наличие или отсутствие другого свойства.

Определение. Отношение называется отношением эквивалентности, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

ЛЕКЦИЯ 2. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Отношение эквивалентности (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели понятия рефлексивных, симметричных и транзитивных отношений, в табл. 2.1 представлены некоторые примеры отношений, и указано, являются ли они рефлексивными (Р), симметричными (С) и транзитивными (Т). Знак «$|||$» обозначает отношение коллинеарности прямых, аналогично, для плоскостей существует отношение компланарности. Знак «$\cong$» обозначает отношение геометрического подобия треугольников.

	Р	С	Т
$=$	$+$	$+$	$+$
$>$	$-$	$-$	$+$
$\geq$	$+$	$-$	$+$
$\|\|$	$-$	$+$	$-$
$\|\|\|$	$+$	$+$	$+$
компла-нарность	$+$	$+$	$+$
$\cong$	$+$	$+$	$+$

Табл. 2.1. Примеры рефлексивных, симметричных и транзитивных отношений.

<u>Определение.</u> Отношение называется отношением эквивалентности, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Пусть у нас есть множество X, на котором задано какое-либо отношение эквивалентности $\sim$. Выберем произвольный элемент $x \in X$ и будем рассматривать множество $[x] = \{y : y \sim x\}$, которое назовем классом эквивалентности элемента x. Например, классом эквивалентности прямой на плоскости является набор всех прямых, коллинеарных ей. Классом эквивалентности треугольника является набор всех подобных ему треугольников.

Рассмотрим следующий пример, пусть у нас есть множество студентов 1-го курса физфака, будем считать, что два студента находятся в отношении, если они учатся в одной группе. Нетрудно проверить, что такое отношение является отношением эквивалентности. Теперь выберем одного студента x и будем рассматривать его класс эквивалентности, он будет состоять из тех студентов, которые учатся с x в одной группе, то есть класс эквивалентности совпадает с университетской группой. Тогда вместо множества студентов мы можем рассматривать множество групп.

Теорема. Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$. Тогда X представляет собой объединение непересекающихся классов эквивалентности своих элементов: $X = \coprod [x]$.

Доказательство:

Докажем, что любые два класса либо совпадают, либо не имеют общих элементов. Предположим, что существует такой элемент c: $c \in [x]$ и $c \in [y]$. Докажем, что $[x] \subset [y]$, то есть $\forall a \in [x]$: $a \in [y]$. То, что $a \in [x]$ означает $a \sim x$, а поскольку $c \in [x]$, имеем $c \sim x$, следовательно, $a \sim x \sim c$. Но также $c \in [y]$, то есть $c \sim y$, тогда $a \sim x \sim c \sim y$. Пользуясь свойством транзитивности отношения, получаем $a \sim y$, а это означает, что $a \in [y]$. Аналогично мы можем показать, что $\forall b \in [y]$: $b \in [x]$, то есть $[y] \subset [x]$. Тогда в итоге получим, что классы совпадают $[x] = [y]$.

Процедура построения классов эквивалентности называется факторизацией. Рассмотрим множество $X = N \times N$, где $N -$ множество натуральных чисел. Элементами множества X являются пары натуральных чисел: $(a, b) \in X, a \in N, b \in N$. Рассмотрим на множестве X следующее отношение: будем считать, что $(a, b) \sim (x, y)$, если $ay = bx$. Покажем, что данное отношение является отношением эквивалентности:

1. Рефлексивность: $(a, b) \sim (a, b)$, так как $ab = ba$.
2. Симметричность: $(a, b) \sim (x, y) \Rightarrow (x, y) \sim (a, b)$, поскольку $ay = bx \Rightarrow xb = ya$.
3. Транзитивность: $(a, b) \sim (x, y)$ и $(x, y) \sim (\alpha, \beta) \Rightarrow (a, b) \sim (\alpha, \beta)$. Из первых двух соотношений имеем систему $\begin{cases} ay = bx \\ x\beta = y\alpha \end{cases}$, перемножим уравнения, сократим на xy и получим $a\beta = b\alpha$.

Будем далее вместо обозначения пары (α, β) использовать $\frac{\alpha}{\beta}$.

Итак, поскольку у нас на множестве пар натуральных чисел задано отношение эквивалентности, то наше множество разбивается на классы. Например, к классу $(2,3) \equiv \frac{2}{3}$ будут относиться все эквивалентные пары $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ и т.д. Такой класс называется рациональной дробью.

Понятие вектора

Вернемся к тому, с чего мы вообще начали рассматривать отношение эквивалентности. Мы говорили о том, что определение вектора как направленного отрезка не верно, и два этих понятия отличаются. Направленный отрезок – это отрезок, для которого указано, какой из его концов является первым, а какой вторым. Будем считать, что направленный отрезок есть множество точек, содержащее концы отрезка и все точки между ними.

Определение. Два направленных отрезка называются равными, если у них одинаковая длина и одинаковое направление, то есть они лежат на коллинеарных прямых и «направлены в одну сторону» (не будем вдаваться в подробности).

Но тут же, поскольку направленные отрезки являются множествами, возникает вопрос, ведь множества называются равными, когда они состоят из одних и тех же элементов. В приведенном ранее определении «равенства» направленных отрезков лучше использовать другой термин – «эквиполентны».

Определение. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются эквиполентными, если у них одинаковая длина и одинаковое направление.

Нетрудно проверить, что введенное нами отношение эквиполентности является отношением эквивалентности. Следовательно, множество всех направленных отрезков распадается на непересекающиеся классы. Так вот вектором называется не каждый направленный отрезок, а весь класс эквиполентных ему направленных отрезков.

Определение. Вектор – это класс эквиполентных между собой направленных отрезков. Каждый отдельный направленный отрезок класса называется представителем этого вектора. (Иногда вектор также называют параллельным переносом.)

Операции над векторами

Сложение направленных отрезков осуществляется по правилу параллелограмма: если у нас есть два направленных отрезка с общим началом, то их суммой является новый направленный отрезок, который представляет собой диагональ параллелограмма, построенного как на сторонах на двух данных направленных отрезках. Данное определение можно перенести на векторы, для этого нужно в каждом классе (вектор) выбрать по одному представителю (направленный отрезок) так, чтобы они оказались приложенными к одной точке, и определить к какому классу относится результат сложения представителей (рис. 2.1).

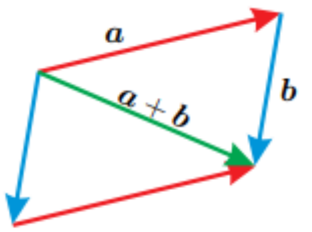

Рис. 2.1. Сложение векторов по правилу параллелограмма.

Существует также правило сложения векторов по треугольнику: представителя одного из векторов берем произвольно, а представителя другого вектора выбираем так, чтобы его начало совпадало с концом первого, соединяем начало первого направленного отрезка с концом второго и получаем представителя искомого суммарного вектора.

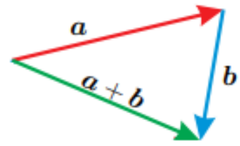

Рис. 2.2. Сложение векторов по правилу треугольника.

Нулевой направленный отрезок имеет нулевую длину, не имеет направления, его начало и конец совпадают: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Нулевой направленный отрезок является представителем класса нулевого вектора. При выполнении операции сложения нулевой вектор играет роль нуля в алгебре.

Операция умножения направленного отрезка на число осуществляется следующим образом: если число положительное, то направление нового направленного отрезка совпадает с направлением исходного, а длина увеличивается или уменьшается в нужное число раз; если число отрицательное, то направление нового направленного отрезка противоположно направлению исходного, а длина получается из длины исходного умножением на модуль числа.

Рис. 2.3. Умножение вектора на число.

Теорема.
Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1) коммутативность сложения: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}: \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
2) ассоциативность сложения: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}: \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
3) свойство нулевого вектора: $\exists \boldsymbol{0}: \forall \boldsymbol{a}: \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$
4) существование противоположного вектора: $\forall \boldsymbol{a}\ \exists \boldsymbol{a}': \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$
5) свойство единицы: $\forall \boldsymbol{a}: 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
6) ассоциативность умножения на число: $\forall \boldsymbol{a}, \forall \alpha, \beta: \alpha(\beta \boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$
7) дистрибутивность: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \forall \alpha: \alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$

8) дистрибутивность: $\forall \boldsymbol{a}, \forall \alpha, \beta\colon (\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$

Определение. Пусть у нас есть некоторое количество векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ и чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Выражение вида $\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_k\boldsymbol{a_k}$ называется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$.

Определение. Если в линейной комбинации все коэффициенты $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, то такая линейная комбинация называется тривиальной. Если же хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ не равен нулю, то линейная комбинация называется нетривиальной.

Очевидно, что нулевой вектор является тривиальной линейной комбинацией. Заметим, что нетривиальная линейная комбинация тоже может быть равна нулевому вектору.

Определение. Векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ называются линейно зависимыми (ЛЗ), если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулевому вектору.

Определение. Векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ называются линейно независимыми (ЛН), если из того, что линейная комбинация равна нулевому вектору, следует, что линейная комбинация тривиальна.

Поговорим о некоторых логических приемах, которые часто используются в математике, например, о построении отрицаний. Пусть у нас есть некоторое высказывание $\forall x\colon P(x)$, его отрицанием будет следующее утверждение: $\exists x\colon \neg P(x)$, которое означает, что существует такой x, при котором $P(x)$ не выполняется. Символ «$\neg$» обозначает отрицание, в итоге можем записать, что $\neg\{\forall x\colon P(x)\} = \exists x\colon \neg P(x)$.

Рассмотрим другой пример, пусть у нас есть утверждение $\exists y\colon P(y)$, сформулируем его отрицание: $\forall y\colon \neg P(y)$. Заметим, что для построения отрицания требуется поменять квантор ($\forall$ или $\exists$) на противоположный и свойство $P(y)$ заменить на его отрицание $\neg P(y)$.

В случае если кванторов несколько, например, у нас есть утверждение $\forall x\ \exists y\colon x < y$, его отрицание: $\exists x\ \forall y\colon x \geq y$. Мы получили бессмысленное высказывание о существовании «самого большого числа». Это логично: если исходное утверждение было верным, то его отрицание должно быть неверным.

Вспомним, как устроено большинство теорем, в теореме есть условие A и заключение B, схема теоремы выглядит следующим образом: $A \Rightarrow B$. В этом случае A называется достаточным для B, а B называется необходимым для A. Например, необходимое условие экстремума звучит следующим образом: если в некоторой точке достигается экстремум функции, то производная функции в этой точке равна нулю.

Заметим, что условие равенства нулю производной не является достаточным для экстремума, подтверждением этого факта служит точка перегиба. Достаточное условие экстремума звучит следующим образом: если в некоторой точке производная функции равна нулю, а вторая производная не равна нулю, то в этой точке достигается экстремум функции. Это условие не является необходимым.

Если мы рассматриваем теорему устройства $A \Rightarrow B,$ то вместе с ней мы можем также рассмотреть следующие утверждения:

- противоположная теорема: $\urcorner A \Rightarrow \urcorner B$
- обратная теорема: $B \Rightarrow A$
- контрапозиция: $\urcorner B \Rightarrow \urcorner A$

Из выполнения исходной теоремы никак не следует выполнение противоположной и обратной теорем, они могут как выполняться, так и не выполняться. А вот контрапозиция исходной теоремы по сути есть то же самое, что и исходная теорема, то есть, если верна исходная теорема, то верна и контрапозиция, и наоборот. Часто вместо исходной теоремы гораздо удобнее доказывать ее контрапозицию, это есть метод от противного.

ЛЕКЦИЯ 3. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ ВЕКТОРЫ

Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов

Теорема.
(1) Если в наборе векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ имеется нулевой вектор $\mathbf{0}$, то эти векторы линейно зависимы.
(2) Если в наборе векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ есть повторяющиеся, то эти векторы линейно зависимы.
(3) Если набор векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ линейно зависим, то $\forall \boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_s}$ набор $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_s}$ тоже линейно зависим.
(4) Если вектора $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ линейно зависимы, то среди них найдется вектор, который равен линейной комбинации остальных.

Доказательство:
(1) Построим линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$, в которой возьмем нулевой вектор $\mathbf{0}$ с коэффициентом 1, а все остальные векторы с коэффициентами, равными нулю. Мы получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$, равную нулевому вектору, тогда по определению вектора $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ будут линейно зависимыми.
(2) Построим линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$, в которой коэффициенты при одинаковых векторах выберем равными 1 и -1, а все остальные векторы возьмем с коэффициентами, равными нулю. Мы получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$, равную нулевому вектору, тогда по определению вектора $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ будут линейно зависимыми.
(3) Векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k} -$ линейно зависимы, то есть $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю, такие, что $\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_k \boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}$. Добавим к левой части равенства линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_s}$ с нулевыми коэффициентами: $\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_k \boldsymbol{a_k} + 0 \cdot \boldsymbol{b_1} + 0 \cdot \boldsymbol{b_2} + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{b_s} = \mathbf{0}$. Полученная в левой части линейная комбинация не является тривиальной, поскольку не все $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ равны нулю, следовательно, по определению набор векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_s}$ будет линейно зависимым.
(4) Векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k} -$ линейно зависимы, то есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_k \boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}$. Предположим, что ненулевым коэффициентом является α_1, $\alpha_1 \neq 0$. Разделим равенство на α_1 и все слагаемые, кроме первого, перенесем в правую часть, получим: $\boldsymbol{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \boldsymbol{a_2} - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \boldsymbol{a_k}$.

С помощью логической операции контрапозиции можно получить соответствующую теорему, описывающую свойства линейно независимых векторов.

Теорема.
(1) Если вектора $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ линейно независимы, то среди них не может быть нулевого вектора.
(2) Если вектора $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ линейно независимы, то среди них не может быть повторяющихся.
(3) Любая часть линейно независимого набора векторов сама является линейно независимым набором.
(4) Если ни один вектор в наборе $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных, то такой набор является линейно независимым.

Рассмотрим множество всех векторов, которые коллинеарны одной и той же прямой. Заметим, что линейные комбинации этих векторов тоже будут коллинеарны этой прямой. Давайте подумаем, какое максимальное количество линейно независимых векторов, коллинеарных одной прямой мы можем взять. Ответ – только один, поскольку два вектора уже будут линейно зависимы.

Если мы рассматриваем векторы, которые лежат в одной плоскости, то максимальное количество линейно независимых среди них составит два. В случае трех векторов на плоскости $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ мы всегда можем представить один из них как линейную комбинацию двух других: $\boldsymbol{a_3} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2}$ (рис. 3.1). Уточним, что здесь мы не рассматриваем нулевые, повторяющиеся и коллинеарные векторы.

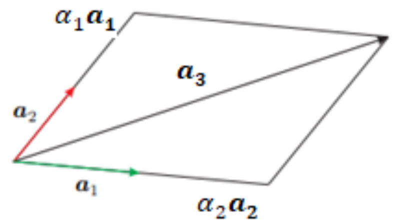

Рис. 3.1. Линейно независимые вектора на плоскости.

В пространственном случае, аналогично, мы получаем три линейно независимых вектора, любые четыре вектора уже являются линейно зависимыми.

Теорема.
(1) В множестве векторов на прямой
   a) существует один линейно независимый вектор
   b) любые два вектора линейно зависимы

(2) В множестве векторов на плоскости
   a) существует два линейно независимых вектора
   b) любые три вектора линейно зависимы

(3) В множестве векторов в пространстве

a) существует три линейно независимых вектора
b) любые четыре вектора линейно зависимы

Максимально возможное число линейно независимых векторов называется размерностью пространства или множества векторов. Например, в 4-хмерном пространстве существует 4 линейно независимых вектора, но любые 5 векторов уже линейно зависимы. Человеческий мозг не способен представить себе такое пространство, тем не менее, мы можем легко его построить.

Встает вопрос, зачем вообще нам нужны многомерные пространства, если мы живем в трехмерном. Представьте себе, что мы решаем задачу движения материальной точки под действием какого-либо силового поля, для того чтобы описать положение этой точки нам требуется трехмерное пространство. Пусть теперь мы рассматриваем не одну точку, а две, они взаимодействуют с внешним полем и могут взаимодействовать между собой. Первая точка описывается тремя координатами и вторая тоже тремя, то есть всего требуется 6 чисел. Вместо того, чтобы рассматривать движение двух точек в трехмерном пространстве, можно рассматривать движение одной точки в шестимерном пространстве.

Определение. Размерность пространства – это максимально возможное число линейно независимых векторов в нем, то есть такое натуральное число n:

a) $\exists n$ ЛЗ векторов
b) $\forall n+1$ векторов – ЛЗ

Разложение векторов по базису

Определение. Базис в трехмерном пространстве – это упорядоченный набор трех некомпланарных (ЛН) векторов. (Упорядоченные векторы – это такие векторы, для которых указано, который из них первый, второй и третий.)

Определение. Базис на плоскости – это упорядоченный набор двух неколлинеарных векторов.

Теорема.
Любой вектор трехмерного пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса. Это представление единственно.
Доказательство:
Пусть векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют базис, то есть они линейно независимы. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ и набор векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Такой набор обязательно будет линейно зависим, следовательно, один из векторов набора можно представить в виде линейной комбинации других. Встает вопрос: обязательно ли $\boldsymbol{x}$ будет линейной

комбинацией остальных. Предположим, что коэффициент при $\boldsymbol{x}$ в линейной комбинации равен нулю: $0 \cdot \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, вектора $\boldsymbol{x}$ фактически нет в линейной комбинации, тогда окажется, что вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ линейно зависимы, а это противоречит условию. Таким образом, коэффициент при $\boldsymbol{x}$ отличен от нуля, и мы можем представить вектор в виде $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$.
Докажем единственность, для этого предположим, что существует два разных разложения: $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{x} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b} + z'\boldsymbol{c}$. Вычтем одно равенство из другого: $\boldsymbol{0} = (x - x')\boldsymbol{a} + (y - y')\boldsymbol{b} + (z - z')\boldsymbol{c}$. Мы получили нулевую линейную комбинацию линейно независимых векторов, это возможно только в случае, если все коэффициенты равны нулю, то есть $x = x', y = y'$ и $z = z'$.

Теорема.
Любой вектор на плоскости можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса. Это представление единственно.

Договоримся об обозначениях:
$\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ – векторы базиса
$x^1, \dots, x^n$ – координаты вектора $\boldsymbol{x}$
Тогда разложение по базису вектора $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде:

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e_1} + \dots + x^n\boldsymbol{e_n} = \sum_{k=1}^{n} x^k\boldsymbol{e_k}.$$

$\boldsymbol{E} = \|\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\|$ – базис в трехмерном пространстве

$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ – столбец координат в трехмерном пространстве

$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$ – произвольная матрица размерности $m \times n$

Тогда разложение по базису вектора $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде:

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e_1} + \dots + x^n\boldsymbol{e_n} = \|\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\| \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}X.$$

Решение систем уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q' \end{cases} \tag{3.1}$$

где $a, b, c, d, p, q -$ заданные числа, $x, y -$ неизвестные. Запишем коэффициенты системы в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

введем также столбец коэффициентов правой части $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ и столбец переменных $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. (Символ «( )» я буду использовать, когда внутри матрицы стоят числа, а «‖ ‖» – когда в матрице стоят не числа, а, например, векторы.) Тогда систему (3.1) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим систему, содержащую m уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = b^m \end{cases} \qquad (3.3).$$

Введем матрицу коэффициентов размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix},$$

матрицу правых частей размера $m \times 1$:

$$B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix},$$

матрицу неизвестных размера $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3.3) можно переписать в виде

$$AX = B.$$

Вернемся к системе уравнений (3.1) и решим ее методом исключения неизвестных. Умножая первое уравнение на d, второе на $-b$ и складывая полученные уравнения, исключаем y:

$$-\begin{cases} ax + by = p & \times d \\ cx + dy = q & \times b \end{cases} \Rightarrow \quad (ad - bc)x = pd - qb.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $-c$, второе на a и складывая полученные уравнения, исключаем x:

$$-\begin{cases} ax + by = p & \times c \\ cx + dy = q & \times a \end{cases} \Rightarrow \quad (ad - bc)y = qa - pc.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, y = \frac{qa - pc}{ad - bc}.$$

Определитель второго порядка

Поставим в соответствие матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ число $ad - bc$, оно называется определителем (детерминантом) матрицы A и обозначается

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A| = detA = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

С помощью определителей полученные выше формулы решения системы (3.1) могут быть переписаны в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{detA_x}{detA}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{detA_y}{detA},$$

где матрица A_x (A_y) получается из матрицы A заменой первого (второго) столбца на столбец, состоящий свободных членов. Полученные формулы называются формулами Крамера, с их помощью удобно решать системы уравнений второго порядка, однако формулы можно обобщить и на случай систем любого размера. Заметим, что формулы Крамера работают только в случае, когда знаменатель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, в противном случае система либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.

ЛЕКЦИЯ 4. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Свойства определителя второго порядка

Теорема. (основные свойства det-2)

Определитель 2-го порядка обладает следующими свойствами:

1) линейность:
   по первому столбцу:
   a) $\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix};$
   b) $\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};$
   по второму столбцу аналогично.

2) кососимметричность (антисимметричность):
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix};$$

3) нормировка
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Из основных свойств определителя можно вывести ряд новых свойств, полезных при вычислениях.

Следствие. (производные свойства det-2)

1) $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\cdot a & b \\ 0\cdot c & d \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$
2) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$
3) Det-2 не изменится, если к любому из его столбцов прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число:
$$\begin{vmatrix} a & b+\alpha a \\ c & d+\alpha c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \alpha a \\ c & \alpha c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Операции над столбцами

Мы говорили, что любой вектор $\boldsymbol{x}$ на плоскости можно разложить по базису $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$:
$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e_1} + x^2\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{E}X,$$

где $\boldsymbol{E} = \|\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\|$, $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$. Введем еще один вектор $\boldsymbol{y}$ и также разложим его по базису:

$$\boldsymbol{y} = y^1\boldsymbol{e_1} + y^2\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{E}Y.$$

Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x^1 + y^1)\boldsymbol{e_1} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{e_2},$$

его также можно разложить по базису

$$\boldsymbol{z} = z^1\boldsymbol{e_1} + z^2\boldsymbol{e_2},$$

тогда столбец координат вектора $\boldsymbol{z}$ принимает вид $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$. Можем ввести определение суммы столбцов.

<u>Определение</u>. Сумма столбцов $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ есть новый столбец

$$X + Y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

<u>Определение</u>. Произведением числа α на столбец $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ является новый столбец

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \alpha x^2 \end{pmatrix}.$$

Перечислим свойства операций сложения столбцов и умножения столбца на число и увидим, что они такие же как у соответствующих операций над векторами.

<u>Теорема</u>.
Операции сложения столбцов и умножения столбца на число обладают следующими свойствами:

1) коммутативность сложения: $\forall X, Y$ (одинакового размера): $X + Y = Y + X$
2) ассоциативность сложения: $\forall X, Y, Z$: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
3) свойство нулевого вектора: $\exists O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\forall X$: $X + O = X$
4) существование противоположного вектора: $\forall X\ \exists X'$: $X + X' = O$
5) свойство единицы: $\forall X$: $1 \cdot X = X$
6) ассоциативность умножения на число: $\forall X, \forall \alpha, \beta \in R$: $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$
7) дистрибутивность: $\forall X, Y, \forall \alpha \in R$: $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$
8) дистрибутивность: $\forall X, \forall \alpha, \beta \in R$: $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$

Если на плоскости задан базис, то каждому вектору однозначно ставится в соответствие столбец его координат, и, наоборот, из каждого столбца можно получить вектор, если элементы этого столбца считать координатами вектора. Таким образом, между столбцами и векторами установлено взаимно однозначное соответствие.

Определение. Изоморфизм множества векторов на плоскости V_2 и множества столбцов из двух элементов R^2 – это взаимно однозначное соответствие между двумя этими множествами $f: V_2 \to R^2,\ \boldsymbol{x} \to X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, при котором сумма векторов переходит в сумму столбцов, и произведение вектора на число переходит в произведение столбца на число:

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}),$$
$$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}).$$

Изоморфизм является основой метода координат. Вместо того, чтобы работать с векторами, то есть геометрическими объектами, мы будем работать с их координатами – алгебраическими объектами. Мы можем ввести все аналогичные понятия: линейную комбинацию столбцов, линейную зависимость и независимость и т.д.

Определение. Пусть у нас есть некоторое количество столбцов $X_1, \dots, X_k$ и чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Выражение вида $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$ называется линейной комбинацией столбцов $X_1, \dots, X_k$.

Определение. Если в линейной комбинации все коэффициенты $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, то такая линейная комбинация называется тривиальной, и она, очевидно, равна нулевому столбцу. Если же хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ не равен нулю, то линейная комбинация называется нетривиальной.

Однако возможна такая ситуация, что для некоторых столбцов имеется нетривиальная линейная комбинация, но, тем не менее, она равна нулевому столбцу. Например,

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

такие столбцы как раз называются линейно зависимыми.

Теорема. Определитель второго порядка det-2 равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.

Доказательство:

1) Пусть столбцы det-2 линейно зависимы, тогда det-2 равен нулю:
   a) $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0;$
   b) $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 = 0.$
2) Пусть det-2 равен нулю, тогда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ad = bc.$$

Если $a, b, c, d \neq 0$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t$. Получаем

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

то есть столбцы det-2 линейно зависимы.

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{a}$ с координатами $\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}$ и вектор $\boldsymbol{b}$ с координатами $\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$ в прямоугольном декартовом базисе единичных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ (рис. 4.1). Введем углы α и β, которые вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют с осью Ox.

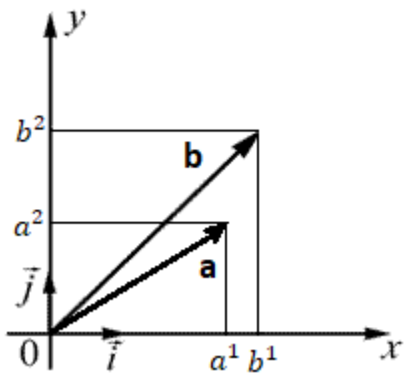

Рис. 4.1. Вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в прямоугольном декартовом базисе.

Попробуем найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$S = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\beta - \alpha) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)$$
$$= |\boldsymbol{a}|\cos\alpha\,|\boldsymbol{b}|\sin\beta - |\boldsymbol{a}|\sin\alpha\,|\boldsymbol{b}|\cos\beta = a^1b^2 - a^2b^1 = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

При этом если определитель положителен, то $\beta - \alpha > 0$, то есть кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ осуществляется в положительном направлении. Если же определитель отрицателен, то $\beta - \alpha < 0$, и кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ осуществляется в отрицательном направлении. Знак определителя говорит о том, как ориентированы вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по отношению друг к другу.

Определитель 3-го порядка

Рассмотрим три линейно зависимых вектора в пространстве. Пусть все вектора ненулевые и попарно неколлинеарные. Тогда один из векторов является линейной комбинацией двух других: $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$. Каждый вектор можно разложить по базису, следовательно,

$$\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix},$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} xa^1 + yb^1 = c^1 \\ xa^2 + yb^2 = c^2. \\ xa^3 + yb^3 = c^3 \end{cases} \tag{4.1}$$

Обратим внимание на то, что система (4.1) является переопределенной, то есть содержит уравнений больше, чем неизвестных. Вообще говоря, она может и не иметь решения, но мы знаем, что имеет, поскольку $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} -$ линейно зависимы. Давайте найдем неизвестные x, y из первых двух уравнений, подставим их в третье уравнение и проверим его выполнение.

По формулам Крамера имеем

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c^1 & b^1 \\ c^2 & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}};$$

подставим в третье уравнение, получим

$$a^3 \begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - b^3 \begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + c^3 \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное слева выражение называется определителем матрицы размера 3×3, составленной из координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

<u>Определение</u>. Определитель 3-го порядка – это число, которое ставится в соответствие каждой матрице размера 3×3 по правилу:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - b^3 \begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + c^3 \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) называется разложением определителя по 3-й строке. Определители в (4.2) называются дополнительными минорами соответствующих элементов. Можно разложить определитель по любой другой строке или столбцу.

ЛЕКЦИЯ 5. ТЕОРЕМА О СВОЙСТВАХ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Разложение det-3 по первому столбцу

Разложим определитель 3-го порядка по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1 \begin{vmatrix} b^2 & c^2 \\ b^3 & c^3 \end{vmatrix} - b^1 \begin{vmatrix} a^2 & c^2 \\ a^3 & c^3 \end{vmatrix} + c^1 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Слагаемые в разложении берутся с чередующимися знаками. Знак каждого слагаемого определяется следующим образом: вычисляется сумма номера строки и номера столбца элемента при миноре, если полученная сумма четная, то слагаемое берется со знаком плюс, нечетная – со знаком минус.

Далее мы можем раскрыть каждый определитель 2-го порядка в разложении и получить сумму 6-ти слагаемых, так называемую, формулу полного разложения определителя:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1b^2c^3 - a^1b^3c^2 - a^2b^1c^3 + a^3b^1c^2 + a^2b^3c^1 - a^3b^2c^1.$$

<u>Теорема</u>. Инвариантность определителя к операции транспонирования.

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

<u>Теорема</u>. (основные свойства det-3)

Пусть $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = |A, B, C|$, где $A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$.

Определитель 3-го порядка обладает следующими свойствами:

1) линейность по столбцам (аналогично по строкам):
$$|A_1 + A_2, B, C| = |A_1, B, C| + |A_2, B, C|,$$
$$|\alpha A, B, C| = \alpha |A, B, C|,$$
и аналогично для всех остальных столбцов;
2) кососимметричность: определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю,
$$|A, A, C| = 0,$$
и аналогично для всех остальных столбцов;
3) нормировка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Аналогично можно определить свойства и для строк.

Следствие. (производные свойства det-3)

1) Определитель равен нулю, если в нем какой-либо столбец (строка) равен нулю.
2) Определитель, в котором есть два одинаковых столбца (строки), равен нулю.
3) Определитель не изменится, если к любому из его столбцов (строк) прибавить любую линейную комбинацию других столбцов (строк).

Теорема. Определитель 3-го порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно зависимы.

Пример.

Рассмотрим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$, прибавим ко второй строке первую, умноженную на -2, получим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$. Умножим первую строку на -3 и прибавим уже к 3-й строке, тогда $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$. Произведем разложение определителя по первому столбцу и сведем, таким образом, задачу вычисления определителя 3-го порядка к задаче вычисления определителя 2-го порядка:
$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$

Определение.
Произведение знака на минор в разложении определителя 3-го порядка называется алгебраическим дополнением (АД) соответствующего элемента.

Теорема. Фальшивое разложение определителя.
Сумма попарных произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.
Доказательство:
Разложим определитель по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1 \text{АД}(a^1) + b^1 \text{АД}(b^1) + c^1 \text{АД}(c^1).$$

Заметим, что алгебраические дополнения элементов 1-й строки не зависят от элементов 1-й строки. Таким образом, мы можем заменить первую строчку на все, что угодно, изменятся только множители a^1, b^1, c^1 в разложении. Тогда

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = x\text{АД}(a^1) + y\text{АД}(b^1) + z\text{АД}(c^1).$$

Если взять $x = a^3, y = b^3, z = c^3$, то

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^3\text{АД}(a^1) + b^3\text{АД}(b^1) + c^3\text{АД}(c^1) = 0.$$

Такой определитель равен нулю, поскольку в нем две строки совпадают.

Скалярное произведение

<u>Определение.</u> Скалярное произведение (СП) двух векторов – это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\varphi.$$

Обратим внимание на то, что поскольку косинус является четной функцией, скалярное произведение коммутативно, то есть

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ — это вектор $\boldsymbol{c}$, коллинеарный $\boldsymbol{b}$, начало (конец) которого представляет собой ортогональную проекцию начала (конца) вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую, параллельную $\boldsymbol{b}$. Обозначение: $\boldsymbol{c} = pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$.

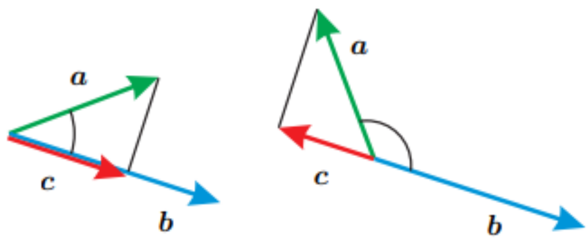

Рис. 5.1. Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$.

Величиной $Pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ проекции $pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ называется ее длина, взятая со знаком «+», если векторы $\boldsymbol{c} = pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены, и со знаком «–» в противном случае. Ясно, что

$$Pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi,$$

где $\varphi -$ угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Мы получаем еще одно представление для скалярного произведения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = Pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}| = Pr_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} \cdot |\boldsymbol{a}|.$$

Заметим, что для проекций выполняется:

$$Pr_{\boldsymbol{b}}\, (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}) = Pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a_1} + Pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a_2},$$
$$Pr_{\boldsymbol{b}}\, (\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda Pr_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}\,.$$

Теорема.
Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:
(1) симметричность:
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$
(2) линейность:
 a) $(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b})$,
 b) $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
 аналогично по второму аргументу
$$(\boldsymbol{a}, \beta_1\boldsymbol{b_1} + \beta_2\boldsymbol{b_2}) = \beta_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b_1}) + \beta_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b_2});$$
(3) положительная определенность:
$$\forall\boldsymbol{a}\colon (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0,$$
причем
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} = 0.$$

Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} -$ ортонормированный базис в пространстве, рассмотрим разложение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в нем:
$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}.$$
Тогда
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + a_1b_2(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) + \cdots,$$
учитывая, что $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = 0$ и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = 1$, получим
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$
Отсюда, кстати, следует, что
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Векторное произведение

Определение. Векторным произведением (ВП) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, удовлетворяющий следующим требованиям:
(1) $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\varphi$;
(2) вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$;
(3) векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ образуют правую тройку.

Теорема.
Векторное произведение обладает следующими свойствами:
(1) кососимметричность:
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}];$$
(2) линейность:
 a) $[\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}]$,

b) $[\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Из линейности по первому аргументу и кососимметричности вытекает линейность и по второму аргументу.

Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} -$ ортонормированный базис в пространстве, рассмотрим разложение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в нем:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}.$$

Тогда

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = a_1b_1[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] + a_1b_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] + a_1b_3[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] + a_2b_1[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] + a_2b_2[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}] + a_2b_3[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] + a_3b_1[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] + a_3b_2[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] + a_3b_3[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}],$$

учитывая, что $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}] = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}] = 0$ и $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}, [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j}, [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i}$ получим

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \boldsymbol{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \boldsymbol{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]).$$

Теорема.

Величина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «–» в противном случае.

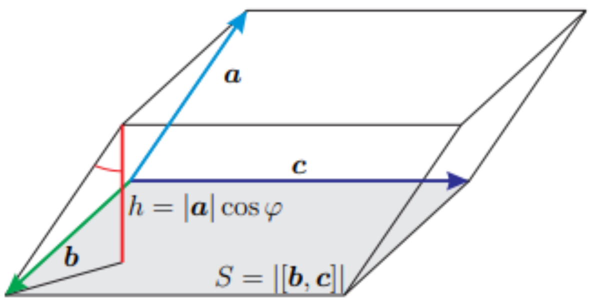

Рис. 5.2. Смешанное произведение.

Теорема.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

(1) линейность:

a) $(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$,

b) $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$,

аналогично по другим элементам;
(2) циклическая симметрия:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a});$$

(3)

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]) = ([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}).$$

Свойство (3) следует из (2), поскольку $([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

Из линейности смешанного произведения можно доказать линейность векторного произведения, то есть

$$[\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}] = \alpha_1[\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b}] + \alpha_2[\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}]$$

или

$$\boldsymbol{d} = \alpha_1[\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b}] + \alpha_2[\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}] - [\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}] = 0.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{d},\alpha_1[\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b}] + \alpha_2[\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}] - [\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}]) \\ &= \alpha_1(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b}) + \alpha_2(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{d},\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

учитывая линейность смешанного произведения

$$(\boldsymbol{d},\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}) = \alpha_1(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b}) + \alpha_2(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}),$$

получим, что $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{d}) = 0$, следовательно, $\boldsymbol{d} = 0$.

Пусть в ортонормированном базисе $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Введем обозначение $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]) = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая на плоскости

В школьном курсе математики уравнение прямой на плоскости принимало вид

$$y = kx + b, \tag{6.1}$$

где $k -$ угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, $b -$ отрезок, который прямая отсекает на оси Oy. Данное уравнение неудобно для решения геометрических задач, поскольку в нем нарушена симметрия между переменными x и y, геометрический смысл коэффициента k весьма сложен, и, более того, не любую прямую можно задать с помощью уравнения (6.1), например, нельзя задать прямую параллельную оси ординат.

Для того, чтобы задать прямую на плоскости, достаточно определить две ее точки. Зафиксируем опорную точку M_0, лежащую на прямой, а вместо второй точки зададим направляющий вектор $\boldsymbol{a}$, который коллинеарен нашей прямой. Пусть точка O является началом координат плоскости, тогда $\boldsymbol{r_0} -$ радиус вектор опорной точки.

Рассмотрим произвольную точку M на прямой, требуется описать ее положение с учетом вышесказанного. Введем вектор $\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = t\boldsymbol{a}$, как видно, он коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$. Таким образом, мы получим векторное параметрическое уравнение прямой на плоскости:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a}, \tag{6.2}$$

где $t -$ некоторое число. На самом деле, уравнение (6.2) может задавать прямую в пространстве любой размерности.

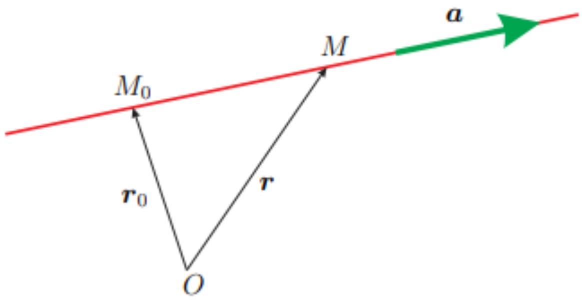

Рис. 6.1. Прямая на плоскости, заданная с помощью направляющего вектора.

Обратим внимание на то, что уравнение (6.2) является законом равномерного прямолинейного движения. При этом опорная точка M_0 соответствует начальному положению частицы $\boldsymbol{r_0}$, а геометрический смыл вектора $\boldsymbol{a} -$ скорость.

Зададим произвольную систему координат Oxy с центром в точке O, в ней

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \|\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j}\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{r_0} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{a} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$$

Тогда векторные параметрические уравнения запишутся в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_x \\ y = y_0 + t a_y \end{cases}. \tag{6.4}$$

Исключив параметр t в (6.4), получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}.$$

Недостаток этого уравнения заключается в том, что в знаменателе может стоять ноль. Рассмотрим пример, пусть у нас есть уравнение

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 5}{0}.$$

В параметрическом виде оно будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 0t \end{cases}.$$

То есть дробь $\frac{y-5}{0}$ имеет смысл при $y = 5$, когда числитель равен нулю. В случае нуля в знаменателе канонического уравнения его следует «перемножить крест-накрест», как пропорцию. Каноническое уравнение прямой в пространстве выглядит следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}.$$

Перепишем уравнение (6.3) в виде

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix},$$

мы получили два линейно зависимых столбца. Если рассмотреть матрицу из этих двух столбцов, то ее определитель будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_x \\ y - y_0 & a_y \end{vmatrix} = 0$$

или, что то же самое,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = 0. \tag{6.5}$$

Уравнение (6.5) также называется каноническим уравнением прямой. Раскроем определитель и получим:

$$a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0,$$
$$a_y x - a_x y = a_y x_0 - a_x y_0.$$

Введем обозначения $A = a_y, B = -a_x, D = a_y x_0 - a_x y_0$, тогда уравнение примет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{6.6}$$

или

$$Ax + By = D. \tag{6.7}$$

Для того, чтобы задать прямую, мы можем вместо направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ использовать нормальный вектор $\boldsymbol{n}$, перпендикулярный прямой. Аналогично, рассмотрим произвольную точку M на прямой. Введем вектор $\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}$, он ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$, то есть

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n}) = 0. \tag{6.8}$$

Мы получили, так называемое, нормальное уравнение прямой. Воспользуемся свойствами скалярного произведения и перепишем (6.8) в виде

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n}) = 0,$$

введем обозначение $D = (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n})$, тогда

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D. \tag{6.9}$$

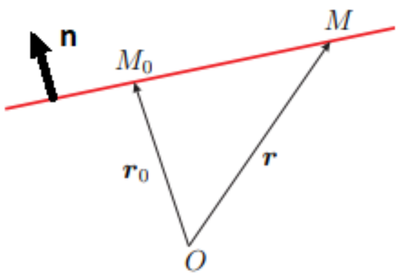

Рис. 6.2. Прямая на плоскости, заданная с помощью вектора нормали.

Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} -$ ортонормированный базис на плоскости, тогда скалярное произведение $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ при учете, что $\boldsymbol{r} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{n} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, примет вид $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = Ax + By$, следовательно, для уравнения (6.9) получим:

$$Ax + By = D, \tag{6.10}$$

а для уравнения (6.8):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{6.11}$$

Обратите внимание, что мы получили те же самые уравнения (6.6) и (6.7). Разница только в том, что уравнения (6.6) и (6.7) были написаны в предположении, что базис любой, и A и B рассматривались как просто некоторые коэффициенты. Последние же два уравнения написаны в предположении, что базис ортонормированный, а A и $B -$ координаты вектора нормали. В этой связи уравнения (6.10) и (6.11) называются нормальными уравнениями в координатах, а уравнения (6.6) и (6.7) – общими уравнениями.

Рассмотрим следующую задачу, пусть на плоскости заданы две прямые

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = D_1 \\ A_2x + B_2y = D_2 \end{cases}. \tag{6.12}$$

Две прямые на плоскости могут располагаться по отношению друг к другу тремя способами: совпадать, быть параллельными или пересекаться в единственной точке. Будем решать систему (6.12) с помощью метода Крамера. Если определитель матрицы системы $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение, то есть прямые пересекаются в единственной точке. Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, это означает, что его строки пропорциональны, то есть $A_2 = kA_1, B_2 = kB_1$. В этом случае система (6.12) принимает вид:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = D_1 \\ k(A_1x + B_1y) = D_2 \end{cases}.$$

Если $D_2 = kD_1$, то система имеет бесконечно много решений, то есть прямые совпадают. Если же $D_2 \neq kD_1$, то прямые будут параллельны.

Плоскость в пространстве

Для того, чтобы задать в пространстве единственную плоскость, требуется задать три точки, не лежащие на одной прямой. Итак, зададим опорную точку M_0, а вместо двух других возьмем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, они должны быть ненулевыми и неколлинеарными, то есть линейно независимыми. Выберем на плоскости произвольную точку M, для координат которой и будем записывать уравнения. Рассмотри вектор $\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}$, здесь $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r_0}$ – это радиус-векторы точек M и M_0. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются линейно независимыми, они образуют базис, тогда можно представить $\boldsymbol{M_0M}$ в виде разложения $\boldsymbol{M_0M} = t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$, где t, s – некоторые числа. В итоге получим векторное параметрическое уравнение плоскости:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}. \tag{6.13}$$

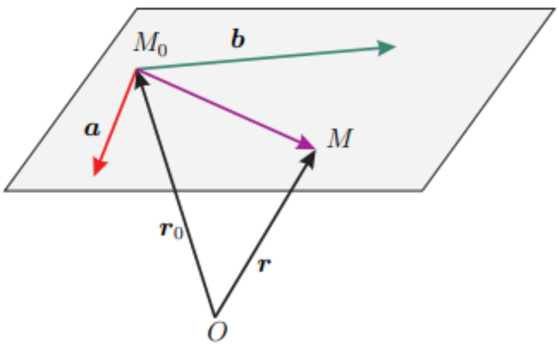

Рис. 6.3. Плоскость в пространстве.

Для того, чтобы получить каноническое уравнение, исключим параметры t, s. Рассмотрим три вектора: $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, они компланарны, то есть лежат в одной плоскости, следовательно, линейно зависимы, тогда определитель из их координат будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.14)$$

Уравнение (6.14) называется каноническим уравнением плоскости. Преобразуем его дальше:

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0.$$

Введем обозначения $A = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$, тогда получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (6.15)$$

или, если ввести еще и $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, получим

$$Ax + By + Cz = D. \qquad (6.16)$$

Уравнения (6.15) и (6.16) называются общими уравнениями плоскости.

Для того, чтобы задать плоскость, мы можем вместо направляющих векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ использовать нормальный вектор $\boldsymbol{n}$, перпендикулярный плоскости. Аналогично, рассмотрим произвольную точку M на плоскости. Введем вектор $\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}$, он ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$, то есть

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n}) = 0. \qquad (6.17)$$

Воспользуемся свойствами скалярного произведения и перепишем (6.17) в виде

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n}) = 0,$$

введем обозначение $D = (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n})$, тогда

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D. \qquad (6.18)$$

Уравнения (6.17) и (6.18) называются нормальными уравнениями плоскости.

В ортонормированном базисе скалярное произведение $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ при учете, что $\boldsymbol{r} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{n} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, примет вид $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = Ax + By + Cz$, следовательно, для уравнения (6.17) получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (6.19)$$

а для уравнения (6.18):

$$Ax + By + Cz = D. \qquad (6.20)$$

Обратим внимание, что мы снова получили идентичные уравнения. Общие уравнения (6.15) и (6.16) были написаны в предположении, что базис любой, и $A, B, C -$ некоторые коэффициенты. Нормальные уравнения (6.19) и (6.20) написаны в предположении, что базис ортонормированный, а $A, B, C -$ координаты вектора нормали.

Задача.

Дано: прямая l, заданная нормальным уравнением $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$, и точка M_1 с радиус-вектором $\boldsymbol{r_1}$.

Требуется найти:

1) точку P, которая является ортогональной проекцией точки M_1 на прямую l;
2) точку S, симметричную точке M_1 относительно прямой l;
3) M_1P − расстояние от точки M_1 до прямой l.

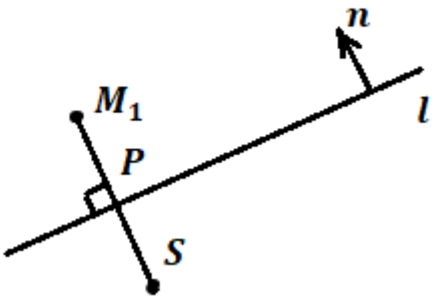

Рис. 6.4. Иллюстрация к задаче: прямая l на плоскости.

Можно сформулировать аналогичную задачу в пространстве.
Дано: плоскость π, заданная нормальным уравнением $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = D$, и точка M_1 с радиус-вектором $\boldsymbol{r_1}$.
Требуется найти:

1) точку P, которая является ортогональной проекцией точки M_1 на плоскость π;
2) точку S, симметричную точке M_1 относительно плоскости π;
3) M_1P − расстояние от точки M_1 до плоскости π.

Обе задачи решаются одинаково, поскольку уравнение прямой и плоскости записаны одинаково.

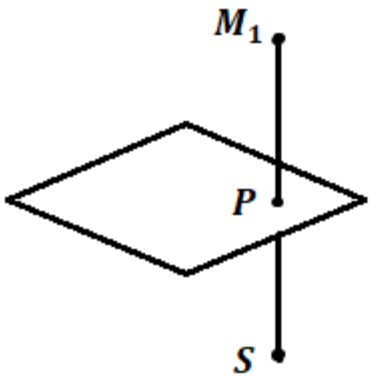

Рис. 6.5. Иллюстрация к задаче: плоскость π в пространстве.

Введем обозначение $\boldsymbol{M_1P} = \boldsymbol{x}$, тогда радиус-вектор точки P есть $\boldsymbol{r_P} = \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{x}$, радиус-вектор точки S есть $\boldsymbol{r_S} = \boldsymbol{r_1} + 2\boldsymbol{x}$. Мы ищем модуль вектора $d = |\boldsymbol{M_1P}| = |\boldsymbol{x}|$.

Вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален прямой (плоскости), следовательно, он коллинеарен вектору нормали $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{n}$. Объединим формулы и получим выражение

$$\lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r_P} - \boldsymbol{r_1},$$

умножим его скалярно на вектор нормали $\boldsymbol{n}$:

$$(\lambda\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{r_P} - \boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{n}),$$
$$\lambda(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{r_P}, \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{n}),$$
$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})},$$

где $D = (\boldsymbol{r_P}, \boldsymbol{n})$. Выразим все вектора через λ:

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{r_P} = \boldsymbol{r_1} + \lambda\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{r_S} = \boldsymbol{r_1} + 2\lambda\boldsymbol{n}.$$

Для искомого расстояния имеем

$$d = |\boldsymbol{x}| = |\lambda\boldsymbol{n}| = |\lambda||\boldsymbol{n}| = \left|\frac{(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\right||\boldsymbol{n}| = \frac{|(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Если уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz = D$, а точка M_1 имеет координаты (x_1, y_1, z_1), то расстояние от этой точки до плоскости выражается следующим образом:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если мы уберем модуль, то получим, так называемое, отклонение точки от плоскости:

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Данная величина будет обращаться в ноль в точках, принадлежащих плоскости π. В точке начала координат (0,0,0) имеем $\delta = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, то есть знак δ определяется знаком D. Итак, в точках, лежащих на плоскости $\delta = 0$, для точек, лежащих в одной полуплоскости $\delta > 0$, в другой – $\delta < 0$.

Прямая в пространстве

В пространственном случае также имеет место векторное параметрическое уравнение прямой (6.2), только теперь у нас три координаты вместо двух, и в координатном виде уравнение записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad (6.21)$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y. \\ z = z_0 + ta_z \end{cases} \qquad (6.22)$$

Каноническое уравнение прямой в пространстве выглядит следующим образом:

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}.$$

На самом деле, это система из двух уравнений:

$$\begin{cases} a_y(x-x_0)-a_x(y-y_0)=0 \\ a_z(y-y_0)-a_y(z-z_0)=0 \end{cases}. \qquad (6.23)$$

Сравнив первое уравнение системы (6.23) с (6.20), мы понимаем, что это уравнение плоскости, в котором коэффициент при z равен нулю. То есть нормальный вектор этой плоскости не имеет координаты z, это означает, что он лежит в плоскости xy. Тогда плоскость параллельна оси Oz. Аналогично, во втором уравнении системы (6.23) отсутствует x, значит, плоскость параллельна оси Ox. Искомая прямая, задаваемая каноническим уравнением, является пересечением этих двух плоскостей. Поскольку расчленять каноническое уравнение на несколько уравнений плоскостей очень неудобно, его обычно рассматривают как заготовку для перехода к параметрическому уравнению путем введения t.

Задача.

Дано: плоскость, заданная уравнением $Ax+By+Cz=D$, и прямая – $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$. Требуется проанализировать их взаимное расположение. Возможны следующие варианты: плоскость и прямая пересекаются в единственной точке, прямая параллельна плоскости, прямая принадлежит плоскости.

В случае прямой параллельной плоскости ее вектор нормали ортогонален направляющему вектору этой плоскости. Но проблема в том, что ортогональны они будут и в случае, когда прямая принадлежит плоскости. Тогда требуется задать также условие принадлежности плоскости опорной точки прямой. Выпишем полученные условия для трех случаев:

1) Прямая принадлежит плоскости:
$$\begin{cases} Al+Bm+Cn=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0=D \end{cases};$$
2) Прямая параллельна плоскости:
$$\begin{cases} Al+Bm+Cn=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0\neq D \end{cases};$$
3) Прямая и плоскость пересекаются:
$$Al+Bm+Cn\neq 0.$$

Для того, чтобы найти точку пересечения требуется решить систему:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \end{cases}$$

Однако решать ее неудобно, поэтому от канонического уравнения прямой перейдем к параметрическому и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \end{cases}.$$

Мы имеем 4 уравнения и 4 неизвестных: x, y, z, t. Подставив три последних уравнения системы в первое, найдем t, а затем легко найдем x, y, z.

Поскольку решение в координатах получается довольно громоздким, перейдем к векторным уравнениям: для плоскости – $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N}) = D$, и для прямой – $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a}$. Подставим $\boldsymbol{r}$ из второго уравнения в первое и получим:

$$(\boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{N}) = D,$$
$$(\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{N}) + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{N}) = D,$$
$$t = \frac{D - (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{N})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{N})}.$$

При этом должно выполняться условие $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{N}) \neq 0$, мы уже получали его выше. Подставим полученное значение $t \equiv t_1$, соответствующее точке пересечения, в уравнение прямой, тогда радиус-вектор точки пересечения примет вид

$$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_0} + t_1\boldsymbol{a}.$$

ЛЕКЦИЯ 7. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Прямая в пространстве

Векторное параметрическое уравнение прямой как на плоскости, так и в пространстве можно записать в виде:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a}.$$

Умножим векторно обе части данного уравнения на вектор $\boldsymbol{a}$, получим

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{a}] + t[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{a}].$$

Введем обозначение $[\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, тогда

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}, \text{ где } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0. \tag{7.1}$$

Такая форма записи уравнения прямой называется уравнением Плюккера. Вектор $\boldsymbol{b}$ не имеет внятного геометрического смысла, аналогично константе D в уравнении плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

<u>Задача.</u>

Дано: прямая, заданная уравнением Плюккера $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Найти: векторное параметрическое уравнение.

Для того чтобы задать векторное параметрическое уравнение требуется знать направляющий вектор и опорную точку. Будем искать опорную точку так, чтобы ее радиус-вектор был ортогонален нашей прямой, то есть $\boldsymbol{r_0} \perp \boldsymbol{a}$. Умножим векторно обе части уравнения Плюккера на вектор $\boldsymbol{a}$, получим

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}]\big] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Поскольку для вектора $\boldsymbol{r_0}$ выполняется $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r_0}) = 0$, имеем

$$\boldsymbol{r_0} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Тогда векторное параметрическое уравнение примет вид:

$$\boldsymbol{r} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}.$$

<u>Задача</u>.

Пусть даны два уравнения плоскости

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_1}) = D_1 \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_2}) = D_2 \end{cases}. \tag{7.2}$$

Данная система может не иметь решения, в этом случае плоскости параллельны. Если плоскости совпадают, то решением системы являются все решения обоих уравнений. Также плоскости могут пересекаться, решением будет прямая. Запишем условия на коэффициенты в уравнениях для этих трех случаев:

1) плоскости параллельны:

$$\boldsymbol{n_1} = \alpha \boldsymbol{n_2},$$
$$D_1 = \beta D_2;$$

2) плоскости совпадают:

$$\boldsymbol{n_1} = \alpha \boldsymbol{n_2},$$
$$D_1 = \alpha D_2;$$

3) плоскости пересекаются:

$$\boldsymbol{n_1} \neq \alpha \boldsymbol{n_2} \text{ или } [\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}] \neq 0.$$

Требуется составить уравнение прямой для 3-го случая, для этого нужно найти направляющий вектор и опорную точку. В качестве направляющего вектора возьмем $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}]$, мы уже показали, что он будет ненулевой. Вектора нормалей $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}$ будем искать из исходной системы. Превратим скалярные уравнения (7.2) в векторные, умножив первое из них на $\boldsymbol{n_2}$, второе – на $\boldsymbol{n_1}$, и вычтя одно из другого:

$$\boldsymbol{n_1}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_2}) - \boldsymbol{n_2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_1}) = D_2 \boldsymbol{n_1} - D_1 \boldsymbol{n_2}.$$

Используя формулу $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big]$ и вспоминая, что $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}]$, получим уравнение Плюккера:

$$\big[\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}]\big] = D_2 \boldsymbol{n_1} - D_1 \boldsymbol{n_2}.$$

Из уравнения Плюккера можем получить уже векторное параметрическое уравнение.

Задача.

Пусть даны три плоскости:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}) = \alpha \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}) = \beta, \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) = \gamma \end{cases} \tag{7.3}$$

где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} -$ векторы нормалей плоскостей, $\alpha, \beta, \gamma -$ числа. Нас интересует случай, когда три плоскости пересекаются в одной точке, во всех остальных случаях две из тех плоскостей либо совпадают, либо параллельны. Условием существования единственного решения системы является линейная независимость векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0.$$

Будем искать решение в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2} + \boldsymbol{r_3}, \tag{7.4}$$

где $\boldsymbol{r_1}$ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{a}) = \alpha \\ (\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{b}) = 0, \\ (\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{c}) = 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

$\boldsymbol{r_2}$ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{a}) = 0 \\ (\boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{b}) = \beta, \\ (\boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{c}) = 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

$\boldsymbol{r_3}$ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{a}) = 0\\ (\boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{b}) = 0.\\ (\boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{c}) = \gamma\end{cases} \tag{7.7}$$

Это легко проверить, если подставить выражение (7.4) в систему (7.3). Таким образом, мы одну более сложную систему заменили тремя более простыми.

Рассмотрим первую систему (7.5), из второго и третьего ее уравнений следует, что вектор $\boldsymbol{r_1}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, будем искать $\boldsymbol{r_1}$ в виде

$$\boldsymbol{r_1} = x[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}],$$

где $x -$ некоторый коэффициент. Подставим $\boldsymbol{r_1}$ в первое уравнение соответствующей системы, получим

$$x([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], \boldsymbol{a}) = \alpha,$$

$$x = \frac{\alpha}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r_1} = \frac{\alpha[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Мы не будем приводить всех вычислений. Решая аналогично системы (7.6) и (7.7), придем к следующему решению исходной системы (7.3):

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\{\alpha[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \beta[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + \gamma[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\}.$$

Вектор $\boldsymbol{r}$ представляет собой линейную комбинацию трех векторов $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, которые образуют базис.

<u>Определение</u>.
Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} -$ линейно независимы, то есть образуют базис. Тогда базис, состоящий из векторов $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$:

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})},$$

$$\boldsymbol{b}^* = \frac{[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})},$$

$$\boldsymbol{c}^* = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})},$$

называется двойственным (дуальным, сопряженным) по отношению к исходному базису.

Для того, чтобы убедиться, что вектора $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ действительно образуют базис, то есть являются линейно независимыми, нужно проверить выполнение условия:

$$(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*) = 0.$$

Запишем смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$:

$$(\boldsymbol{a}^*,\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{c}^*)=\left(\frac{[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\frac{[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right)=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^3}([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$$
$$=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^3}\big([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\big[[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big]\big).$$

Введем обозначение $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$, тогда внутри $(\boldsymbol{a}^*,\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{c}^*)$ имеем двойное векторное произведение $\big[\boldsymbol{x},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big]$, раскроем его и получим:

$$\big[\boldsymbol{x},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big]=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}([\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}([\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\boldsymbol{a}).$$

Заметим, что $([\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ и $([\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$, поскольку это смешанное произведения с двумя одинаковыми элементами.

Тогда получаем

$$(\boldsymbol{a}^*,\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{c}^*)=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^3}\big([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\big)=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^3}([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a})=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a})$$
$$=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\neq 0.$$

Свойства двойственного базиса:

1)
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*)=\left(\boldsymbol{a},\frac{[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right)=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])=1,$$
$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}^*)=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^*)=1;$$

2)
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}^*)=\left(\boldsymbol{a},\frac{[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right)=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}])=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}=0,$$
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^*)=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}^*)=\cdots=0.$$

Пусть в качестве векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ взят обычный ортонормированный базис $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$. Тогда двойственный базис примет вид:

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{[\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]}{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})}=\boldsymbol{i},$$
$$\boldsymbol{b}^*=\frac{[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}]}{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})}=\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{c}^*=\frac{[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]}{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})}=\boldsymbol{k}.$$

Таким образом, двойственный базис совпадает с исходным, этот факт отличает ортонормированные базисы от остальных.

Линии второго порядка

Геометрические объекты, которые мы будем с вами изучать – это, так называемые, конические сечения или линии второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Эти кривые являлись предметом изучения начиная с античного времени. Древние греки получали эти линии, рассматривая сечения бесконечного конуса. Если взять две пересекающиеся прямые и одну из них вращать вокруг другой, то как раз получим такой бесконечный конус. На рис. 7.1 представлены варианты пересечения конуса секущей плоскостью.

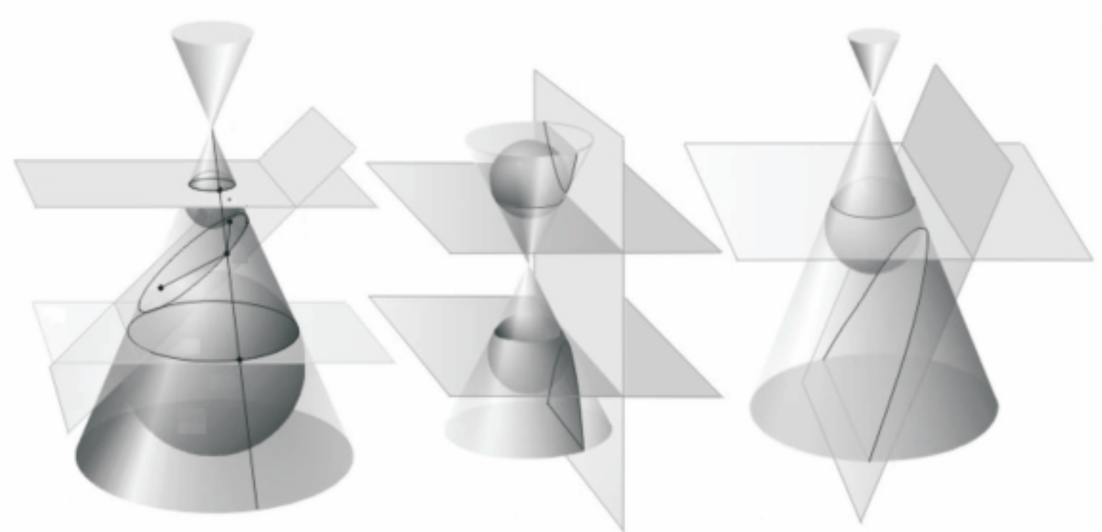

Рис. 7.1. Кривые второго порядка в сечении бесконечного конуса: эллипс, гипербола, парабола (слева направо).

На примере эллипса охарактеризуем полученные кривые не как конические сечения, а через их геометрические свойства. Рассмотрим конус в плоскости сечения, проходящей через его вершину (рис. 7.2).

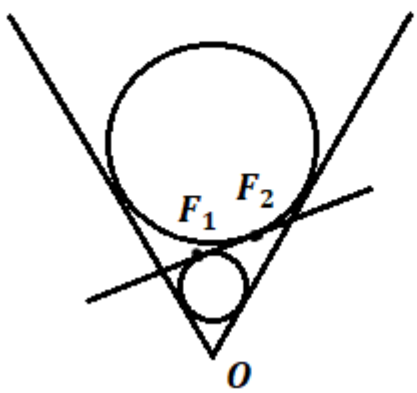

Рис. 7.2. Конус в плоскости сечения, проходящей через его вершину.

В такой проекции эллипс принимает вид отрезка. Впишем в наш конус два шара по обе стороны от секущей плоскости, каждый из них касается как эллипса, так и конуса. Точки, в которых шары касаются плоскости сечения обозначим F_1 и F_2, $O-$ вершина конуса, $M-$ произвольная точка эллипса, $OM-$ луч, который пересекается с окружностями (линии касания шаров с конусом) в точках A и B. Для любой точки M сумма AM и MB будет одинаковая, это есть расстояние между двумя окружностями, лежащими в параллельных плоскостях. Заметим, что $F_1M = MA$, потому что оба эти отрезка являются касательными к сфере, проведенными из одной точки. Аналогично, $F_2M = MB$. Сложим эти две формулы и получим:

$$F_1M + F_2M = AB = const.$$

Определение.

Пусть $F_1, F_2 -$ несовпадающие точки плоскости. Тогда эллипс – это множество всех точек плоскости, для которых выполнено

$$F_1M + F_2M = const > F_1F_2,$$

точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса.

Выберем систему координат таким образом, чтобы фокусы лежали на оси Ox: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(0, c)$, где $c > 0$. Выберем произвольную точку плоскости $M(x, y)$. Тогда для вектора $\boldsymbol{F_1M} \leftrightarrow (x + c, y)$ имеем:

$$F_1M = |\boldsymbol{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

для $\boldsymbol{F_2M} \leftrightarrow (x - c, y)$:

$$F_2M = |\boldsymbol{F_2M}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Отрезки F_1M и F_2M называются фокальными радиусами. Для того, чтобы точка M лежала на эллипсе, должно быть выполнено условие:

$$F_1M + F_2M = const > 2c.$$

Тогда получим следующее уравнение на координаты точек эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a > 2c.$$

Упростим его:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc,$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Введем обозначение $\varepsilon = \frac{c}{a}$, так называемый, эксцентриситет эллипса, для него всегда выполняется $\varepsilon < 1$. В итоге мы получили выражение для F_2M:

$$F_2M = a - \varepsilon x.$$

Аналогично можно получить формулу для F_1M:

$$F_1M = a + \varepsilon x.$$

Но пока мы не получили уравнение эллипса, возведем F_2M в квадрат и получим:

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \varepsilon^2 x^2,$$

$$x^2(1-\varepsilon^2) + y^2 = a^2 - c^2.$$

Заметим, что $1 - \varepsilon^2 = -\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2}$, удобно ввести новое обозначение $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, тогда, наконец, мы поучим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.8)$$

Теперь докажем обратное, что любая точка, удовлетворяющая полученному уравнению, лежит на эллипсе. Пусть точка $M(x,y)$ является решением уравнения (7.8). Найдем расстояния от нее до фокусов:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + (b^2 + c^2)}$$

$$= \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 2\frac{cx\varepsilon}{\varepsilon} + a^2} = \sqrt{(\varepsilon x + a)^2} = \varepsilon x + a.$$

Можно опустить знак модуля, поскольку из уравнения (7.8) нам известно, что $|x| \leq a, |y| \leq b$, а $\varepsilon < 1$. Аналогично поучим расстояние от точки M до фокуса F_2:

$$F_2M = a - \varepsilon x.$$

Сложим отрезки F_1M и F_2M и убедимся, что условие из определения эллипса выполняется, то есть $F_1M + F_2M = 2a$.

Сформулируем геометрические свойства эллипса:

1) $(x,y) \in$ эллипсу $\Rightarrow (-x,y), (x,-y), (-x,-y) \in$ эллипсу.
2) Сумма расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов равна $2a$.
3) Введем расстояния от точки $M(x,y)$ до прямых $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$, которые носят названия правой и левой директрис: $d_1 = \frac{a}{\varepsilon} + x$ и $d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x$. Тогда для любой точки эллипса постоянны следующие отношения:

$$\frac{F_2M}{d_2} = \frac{F_1M}{d_1} = \varepsilon = const < 1.$$

Это, так называемое, директориальное свойство эллипса.

Определение. Эллипсом называется множество точек плоскости, которые обладают директориальным свойством.

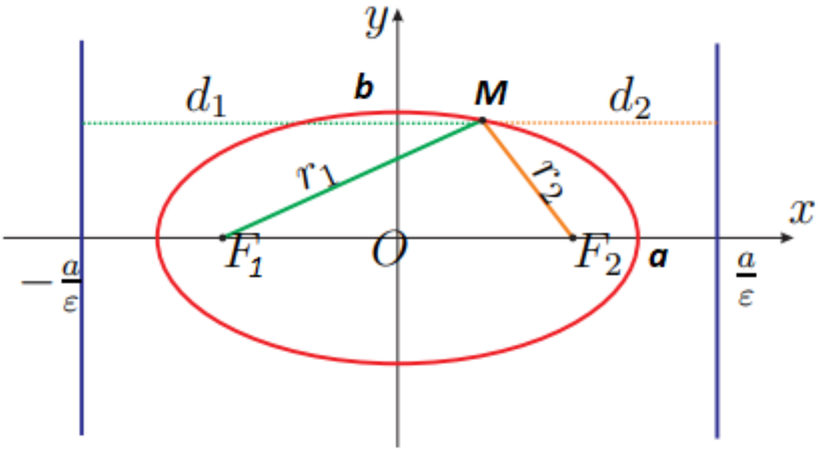

Рис. 7.3. Эллипс в канонической системе координат.

ЛЕКЦИЯ 8. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

Эллипс

Определение (фокальное определение эллипса)

Пусть $F_1, F_2 -$ несовпадающие точки плоскости, расстояние между ними – $F_1F_2 = 2c$. Эллипс – это множество всех точек плоскости $M\colon F_1M + F_2M = 2a = const > 2c$. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса.

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначения:

$a^2 = b^2 + c^2$,

$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 -$ эксцентриситет эллипса,

$x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon} -$ левая и правая директрисы,

$d_1 = \frac{a}{\varepsilon} + x$ и $d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x -$ расстояния от точки $M(x, y)$ до левой и правой директрис.

Директориальное свойство эллипса:

Для любой точки эллипса $M(x, y)$ постоянны следующие отношения

$$\frac{F_2M}{d_2} = \frac{F_1M}{d_1} = \varepsilon = const < 1.$$

Гипербола

Определение.

Пусть $F_1, F_2 -$ несовпадающие точки плоскости, расстояние между ними – $F_1F_2 = 2c$. Гипербола – это множество всех точек плоскости $M\colon |F_1M - F_2M| = 2a = const < 2c$. Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы.

Выберем систему координат таким образом, чтобы фокусы лежали на оси $Ox\colon F_1(-c, 0)$ и $F_2(0, c)$, где $c > 0$. Выберем произвольную точку плоскости $M(x, y)$. Расстояния от точки M до фокусов:

$$F_1M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$
$$F_2M = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Для того, чтобы точка M лежала на гиперболе, должно быть выполнено условие:

$$|F_1M - F_2M| = 2a < 2c.$$

(Данное условие представляет собой неравенство треугольника: разность двух сторон меньше третьей.) Получим следующее уравнение на координаты точек эллипса:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Упростим его:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc,$$

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2.$$

В итоге мы получили выражение для F_2M:

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Введем эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, для него всегда выполняется $\varepsilon > 1$. Для того, чтобы получить уравнение гиперболы, возведем F_2M в квадрат:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \varepsilon^2 x^2,$$

$$x^2(1-\varepsilon^2) + y^2 = a^2 - c^2.$$

Заметим, что $1 - \varepsilon^2 = -\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2}$, удобно ввести новое обозначение $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, тогда, наконец, мы поучим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (8.1)$$

Уравнение (8.1) имеет ограничение на неизвестные:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow |x| \geq a.$$

Теперь докажем обратное, что любая точка, удовлетворяющая полученному уравнению, лежит на гиперболе. Пусть точка $M(x, y)$ является решением уравнения (8.1). Найдем расстояния от нее до фокусов:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 2\frac{cx\varepsilon}{\varepsilon} - a^2} = \sqrt{(\varepsilon x + a)^2} = |\varepsilon x + a| = \begin{cases} \varepsilon x + a, x \geq a \\ -\varepsilon x - a, x \leq -a \end{cases}.$$

Аналогично поучим расстояние от точки M до фокуса F_2:

$$F_2M = |a - \varepsilon x| = \begin{cases} \varepsilon x - a, x \geq a \\ \varepsilon x + a, x \leq -a \end{cases}.$$

Рассмотрим модуль разности величин F_1M и F_2M:

$$|F_1M - F_2M| = 2a,$$

таким образом, мы убедились в том, что условие из определения гиперболы выполнено.

Заметим, что поскольку переменные входят в уравнение гиперболы в квадрате, если точка $(x, y) \in$ гиперболе, то и $(-x, y), (x, -y), (-x, -y) \in$ гиперболе.

Рассмотрим уравнение гиперболы в первом квадранте $(x \geq 0, y \geq 0)$, выразим y как функцию x:

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = b^2\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right),$$

$$y = \frac{b}{a}x\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{1/2},$$

используем асимптотическое разложение при $t \to 0$: $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$, тогда у нас при $x \to \infty$:

$$y = \frac{b}{a}x\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{b}{a}x - \frac{ab}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{b}{a}x + o(1).$$

График функции в первом квадранте имеет асимптоту $y = \frac{b}{a}x$.

На рис. 8.1 представлен график гиперболы на всей плоскости Oxy. Обратим внимание на то, что фокусы и вершины прямоугольника, изображенного на рисунке, лежат на одной окружности радиуса c.

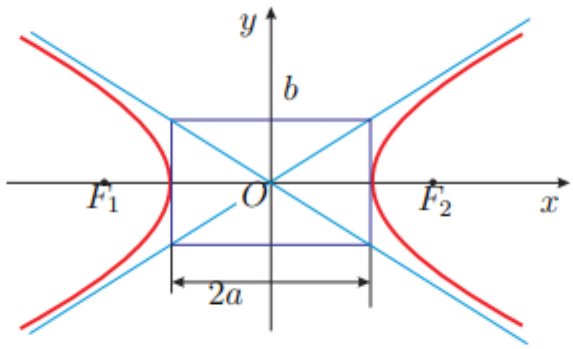

Рис. 8.1. График гиперболы.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \qquad (8.2)$$

его можно записать как

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

замечаем, что переменные x и y просто поменялись местами. Фокусы такой гиперболы будут лежать на оси Oy, ее эксцентриситет будет равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$. Гиперболы, описываемые уравнениями (8.1) и (8.2) называются взаимно сопряженными.

Рассмотрим расстояния от гиперболы до фокуса:

$$F_1M = |a + \varepsilon x| = \varepsilon \left|\frac{a}{\varepsilon} + x\right|,$$

$$F_2M = |a - \varepsilon x| = \varepsilon \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right|.$$

Введем расстояния d_1 и d_2 от гиперболы до директрис $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Для любой точки гиперболы M постоянны следующие отношения:

$$\frac{F_2M}{d_2} = \frac{F_1M}{d_1} = \varepsilon = const > 1.$$

Мы получили директориальное свойство гиперболы. В этом случае на графике директрисы расположены между кривыми, поскольку эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$.

Парабола

Определение.

Пусть на плоскости есть точка $F -$ фокус, прямая $d -$ директриса. Парабола – это множество точек плоскости $\{M: FM = dM\}$, где $FM -$ расстояние от точки M до фокуса, $dM -$ расстояние от точки M до директрисы.

Выберем систему координат таким образом, чтобы фокус был расположен на оси Ox: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса проходит через точку $x = -\frac{p}{2}$. Выберем произвольную точку плоскости $M(x, y)$. Расстояния от точки M до фокуса:

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

расстояния от точки M до директрисы:

$$dM = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Для того, чтобы точка M лежала на параболе, должно быть выполнено условие $FM = dM$:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

$$y^2 = 2px. \tag{8.3}$$

Последняя формула называется каноническим уравнением параболы.

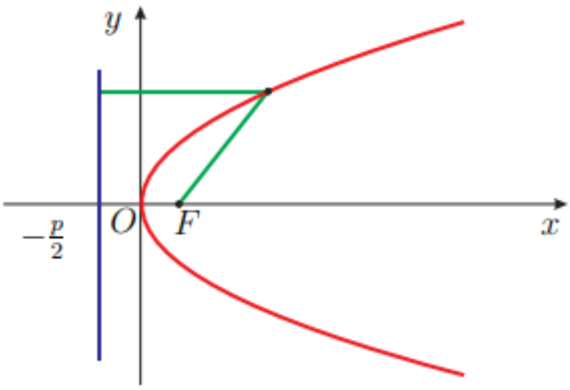

Рис. 8.2. График параболы.

Требуется также доказать обратное, что любая точка, удовлетворяющая полученному уравнению (8.3), лежит на параболе. Но мы не будем на этом останавливаться.

Сравним параболу с эллипсом и гиперболой. Она имеет только один фокус и одну директрису. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$, мы помним, что для эллипса $\varepsilon < 1$, а для гиперболы, наоборот, $\varepsilon > 1$.

Касательные к параболе, эллипсу, гиперболе

Определение.
Касательная к эллипсу – это прямая, имеющая с эллипсом одну общую точку.
Касательная к параболе – это прямая, непараллельная оси параболы, имеющая с параболой одну общую точку.
Касательная к гиперболе – это прямая, непараллельная асимптоте гиперболы, имеющая с гиперболой одну общую точку.

1) Касательная к эллипсу

Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит эллипсу, то есть она удовлетворяет уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Будем искать касательную к эллипсу в этой точке в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm' \end{cases} \tag{8.4}$$

где $l, m-$ координаты направляющего вектора. Решаем систему из трех уравнений, требуя, чтобы она имела единственное решение. Подставляем (8.4) в уравнение эллипса, получаем:

$$\frac{(x_0+tl)^2}{a^2}+\frac{(y_0+tm)^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+2t\left(\frac{x_0 l}{a^2}+\frac{y_0 m}{b^2}\right)+t^2\frac{l^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+t^2\frac{m^2}{b^2}=1,$$

учитываем, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$:

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+2t\left(\frac{x_0 l}{a^2}+\frac{y_0 m}{b^2}\right)=0.$$

Потребуем, чтобы дискриминант уравнения был равен нулю, тогда

$$\frac{x_0 l}{a^2}+\frac{y_0 m}{b^2}=0.$$

Нужно найти какую-нибудь пару чисел, удовлетворяющую этому условию. Возьмем $l=-\frac{y_0}{b^2}$ и $m=\frac{x_0}{a^2}$. Запишем уравнение прямой в каноническом виде:

$$\frac{x-x_0}{-\frac{y_0}{b^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{x_0}{a^2}},$$

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)=-\frac{y_0}{b^2}(y-y_0),$$

$$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0,$$

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1.$$

Последнее уравнение описывает касательную к эллипсу.

2) Касательная к гиперболе:

$$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1.$$

3) Касательная к параболе:

$$y_0 y=p(x+x_0).$$

Оптические свойства кривых второго порядка

Оптическое свойство эллипса

Фокальные радиусы произвольной точки M эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M. Физическая интерпретация: если в фокусе эллипса поместить точечный источник света, а эллипс считать зеркалом, то после отраженный эллипсом луч попадет во второй фокус.

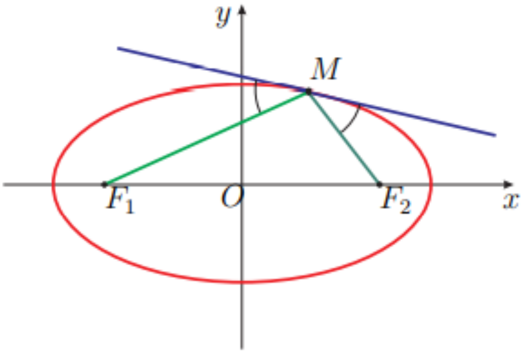

Рис. 8.3. Оптическое свойство эллипса.

Доказательство:
Найдем синусы углов α_1 и α_2, которые фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$ составляют с касательной к эллипсу в точке M:

$$\sin\alpha_1 = \frac{F_1P_1}{F_1M},$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{F_2P_2}{F_2M},$$

где F_1P_1 и F_2P_2 – расстояния от фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ до касательной. Касательная имеет уравнение:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Расстояние можем записать в виде

$$F_1P_1 = \frac{\left|-\frac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}} = \frac{\frac{1}{a}|\varepsilon x_0 + a|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}},$$

тогда

$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}},$$

аналогичное выражение получится для $\sin\alpha_2$.

Применение: в процессе накачки лазера.

Оптическое свойство гиперболы

Фокальные радиусы произвольной точки M гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе в точке M.

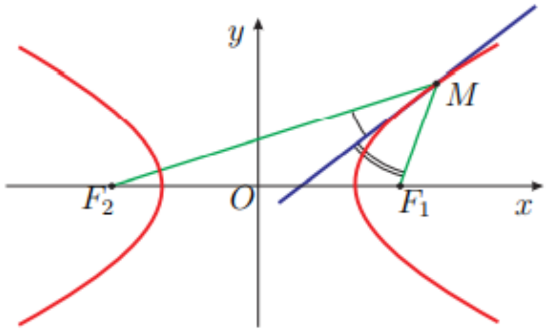

Рис. 8.4. Оптическое свойство гиперболы.

Применение: собирание сходящегося пучка в телескопах системы Кассегрена.

Оптическое свойство параболы

Угол между фокальным радиусом произвольной точки M параболы равен углу между касательной и осью симметрии параболы.

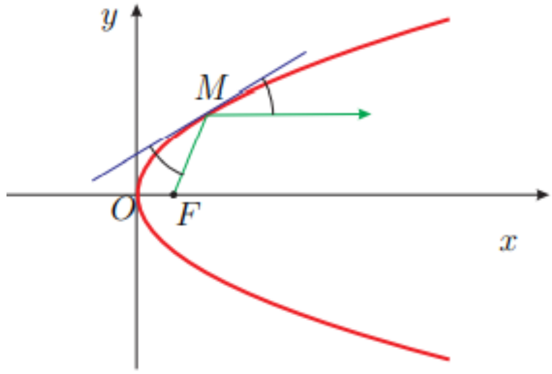

Рис. 8.5. Оптическое свойство параболы.

Применение: фары, параболические антенны.

ЛЕКЦИЯ 9. УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛЯНЫХ КООРДИНАТАХ

Уравнение параболы в полярных координатах

Получим уравнения конических сечений в полярной системе координат, ось которой совпадает с главной осью кривой, а полюс находится в фокусе. Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Полярными координатами точки M будут числа (r, φ).

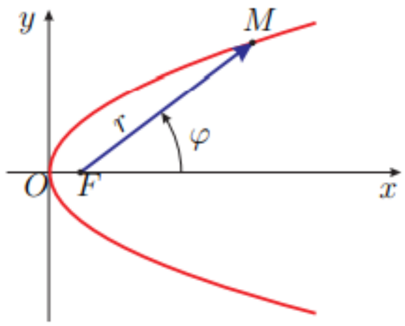

Рис. 9.1. Парабола в полярной системе координат.

Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi.$$

Геометрическое определение параболы:

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Исключим x из полученных соотношений, получим уравнение параболы в полярной системе координат:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Уравнение эллипса в полярных координатах

Поместим полюс в левый фокус эллипса. Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$x + c = r\cos\varphi.$$

Геометрическое свойство эллипса:

$$r = \varepsilon x + a.$$

Исключим x из полученных соотношений, получим уравнение эллипса в полярной системе координат:

$$r = a + \varepsilon(r\cos\varphi - c).$$

Введем фокальный параметр эллипса $p = r$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $p = a - \varepsilon c = a - \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$. Приведем подобные:

$$r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = p,$$

и получим искомое уравнение эллипса в полярной системе координат:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

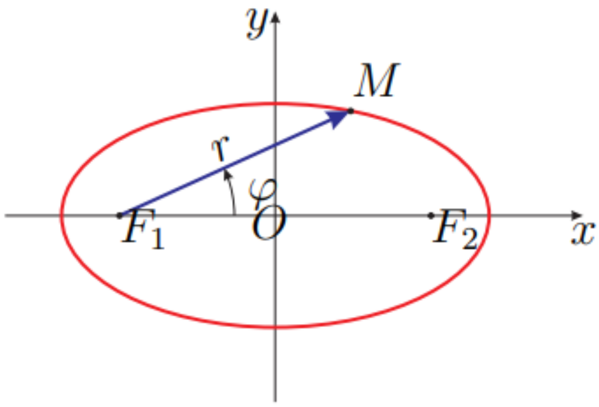

Рис. 9.2. Эллипс в полярной системе координат.

Уравнение гиперболы в полярных координатах

Поместим полюс в правый фокус и ограничимся рассмотрением правой ветви гиперболы. Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$x - c = r\cos\varphi.$$

Геометрическое свойство гиперболы:

$$r = \varepsilon x - a.$$

Исключим x из полученных соотношений, получим уравнение эллипса в полярной системе координат:

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi + c) - a.$$

Введем фокальный параметр гиперболы $p = r$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $p = \varepsilon c - a = \frac{c^2}{a} - a = \frac{b^2}{a}$. Приведем подобные:

$$r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon c - a = p,$$

и получим искомое уравнение гиперболы в полярной системе координат:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

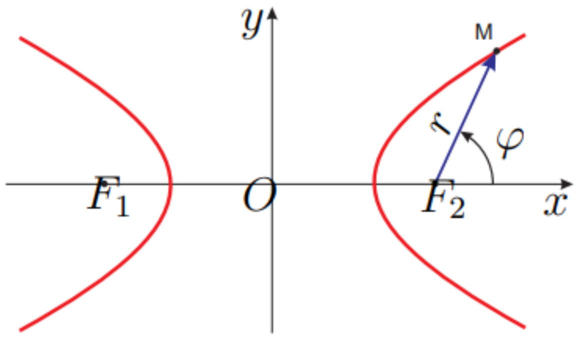

Рис. 9.3. Гипербола в полярной системе координат.

Таким образом, все три линии в полярной системе координат описываются одним уравнением, которое отличается только значением эксцентриситета.

Матрицы

Матрица – это набор чисел, которые организованы в виде прямоугольной таблицы. Элемент матрицы обозначается либо символом a_{ij}, либо a_j^i, где $i -$ номер строки, $j -$ номер столбца. Сама матрица в общем виде имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы будем обозначать следующим образом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

Мы можем переписать исходную матрицу в виде

$$A = \|A_1\ A_2\ \dots\ A_n\|,$$

в случае, когда элементами матрицы являются другие матрицы или столбцы, используется обозначение $\| \quad \|$.

Строки матрицы будем обозначать следующим образом:

$$A^1 = (a_1^1\ a_2^1\ \dots\ a_n^1),$$

$$A^2 = (a_1^2\ a_2^2\ \dots\ a_n^2),$$

$$\dots$$

$$A^m = (a_1^m\ a_2^m\ \dots\ a_n^m).$$

Можем переписать исходную матрицу в виде

$$A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}.$$

Пусть все $a_j^i \in X$, тогда множество матриц, имеющих m строк и n столбцов, обозначается $X^{m\times n}$. Мы в первую очередь будем работать с множеством $R^{m\times n}$, множество столбцов – $R^{m\times 1} \equiv R^m$, множество строк – $R^{1\times n} \equiv R^{*n}$.

Определение.

Две матрицы A и B называются равными, если:

1) они имеют одинаковую размерность;
2) $\forall i, j\ a_j^i = b_j^i$.

Определение.

Пусть $A, B \in R^{m\times n}$. Матрица $C = A + B$ называется суммой матриц A и B, если $\forall i, j$ $c_j^i = a_j^i + b_j^i$.

Определение.

Матрица $D = \alpha \cdot A$ называется произведением матрицы A на число α, если $\forall i, j\ d^i_j = \alpha \cdot a^i_j$.

Свойства операций над матрицами:

1) Коммутативность: $A + B = B + A$;
2) Ассоциативность: $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $\exists O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}: A + O = O + A = A$;
4) $\forall A\ \exists(-A): A + (-A) = O$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
7) Дистрибутивность: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
8) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Определение.

Пусть $A \in R^{*m}$, то есть $A = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_m)$, $B \in R^m$, то есть $B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$. Произведением строки A на столбец B называется

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{m} a_k b^k = a_1 b^1 + \cdots + a_m b^m.$$

Поставим в соответствие матрице A вектор $\boldsymbol{a}$, матрице B – вектор $\boldsymbol{b}$, тогда $A \cdot B = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle$. Считается, что если вектор находится в скобках вида $|\boldsymbol{b}\rangle$, то это нормальный столбец, а если он оказался внутри скобок вида $\langle \boldsymbol{a}|$, то это строка, так называемый, ковектор.

Определение.

Пусть $P \in R^n$: $P = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$, а $Q \in R^{*s}: Q = (q_1\ q_2\ \ldots\ q_s)$. Произведением столбца P на строку Q называется матрица

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} p^1q_1 & p^1q_2 & \cdots & p^1q_s \\ p^2q_1 & p^2q_2 & \cdots & p^2q_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^nq_1 & p^nq_2 & \cdots & p^nq_s \end{pmatrix}.$$

Размер этой матрицы $n \times s$ образуется следующим образом: количество ее строк равно количеству строк P, количество ее столбцов равно количеству столбцов Q.

Определение.

Пусть $A \in R^{m\times s}$, $B \in R^{s\times n}$. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C = A \cdot B$:

$$c_j^i = A^i B_j = \sum_{k=1}^{s} a_k^i b_j^k.$$

Матрица C имеет размерность $m \times n$. Рядом стоящие размеры матриц A и B должны быть равны.

Пример 1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ & 36 \\ & \end{pmatrix}.$$

Произведение $B \cdot A$ не определено.

Пример 2.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 3.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $A \cdot B = B \cdot A$.

Пример 4.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение ненулевых матриц дало нулевую матрицу.

Определение.

Матрица называется квадратной, если у нее количество строк равно количеству столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Элементы, у которых номер строки совпадает с номером столбца, называются диагональными.

Определение.

Диагональная матрица – квадратная матрица, у которой $a_j^i = 0$, если $i \neq j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Определение.

Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой либо под диагональю (вернее треугольная или правая треугольная), либо над диагональю (нижне треугольная или левая треугольная) все элементы равны нулю.

Определение.

Единичная матрица – это диагональная матрица вида:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть A имеет размерность $m \times n$, тогда $I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Определение.

Пусть $A \in R^{m \times n}$, составим $B \in R^{n \times m}$: $b_k^j = a_j^k$. Тогда матрица B называется транспонированной по отношению к A. Обозначения: A^T, ${}^T A, A^{tr}, A'$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) Идемпотентность: $(A^T)^T = A$;
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Свойства операции умножения матриц:

1) Дистрибутивность: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2) Дистрибутивность:
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$$
$$P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R;$$
3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;

ЛЕКЦИЯ 10. СВОЙСТВА МАТРИЧНОГО УМНОЖЕНИЯ

Дистрибутивность: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Доказательство:

Пусть матрицы имеют следующие размерности: $A[m \times s], B[s \times p], C[p \times n]$. Тогда размерности выражений $(A \cdot B) \cdot C, A \cdot (B \cdot C)$ совпадают и равны $[m \times n]$.

Элемент матрицы, стоящей слева:

$$[(A \cdot B) \cdot C]^i_j = \sum_{\alpha=1}^{p} [AB]^i_\alpha [C]^\alpha_j = \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \sum_{\beta=1}^{s} [A]^i_\beta [B]^\beta_\alpha \right\} [C]^\alpha_j = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{s} [A]^i_\beta [B]^\beta_\alpha \, [C]^\alpha_j.$$

Элемент матрицы, стоящей справа:

$$[A \cdot (B \cdot C)]^i_j = \sum_{\beta=1}^{s} [A]^i_\beta [BC]^\beta_j = \sum_{\beta=1}^{s} [A]^i_\beta \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p} [B]^\beta_\alpha [C]^\alpha_j \right\} = \sum_{\beta=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{p} [A]^i_\beta [B]^\beta_\alpha [C]^\alpha_j.$$

Имеем:

$$[(A \cdot B) \cdot C]^i_j = [A \cdot (B \cdot C)]^i_j.$$

Обратная матрица

Определение.

Пусть $A \in R^{n \times n}$. Матрица $B \in R^{n \times n}$ называется обратной для матрицы A, если $AB = BA = I$. Обозначение: $B = A^{-1}$.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ищем $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Запишем произведение этих матриц:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & az + bt \\ cx + dy & cz + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} az + bt = 0 \\ cz + dt = 1 \end{cases}.$$

Решение каждой системы запишем при помощи формулы Крамера. Для того, чтобы система имела единственное решение, определитель основной матрицы системы должен быть отличен от нуля: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{d}{\Delta},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{c}{\Delta},$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{b}{\Delta},$$
$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a}{\Delta}.$$

Тогда обратная матрица принимает вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Проверим также выполнение условия $A^{-1}A = I$:

$$A^{-1}A = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. Строки матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ должны быть линейно зависимы, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу будем искать в виде $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Запишем произведение матриц:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & az + bt \\ \alpha ax + \alpha by & \alpha az + \alpha bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ \alpha(ax + by) = 0 \end{cases},$$
$$\begin{cases} az + bt = 0 \\ \alpha(az + bt) = 1 \end{cases}.$$

В первой системе: второе уравнение может выполняться только в случае, когда $\alpha = 0$, то есть одна строка матрицы A является нулевой. Тогда в системе остается только одно уравнение, и x и y не будут определяться однозначно. Во второй системе: если выполнено первое уравнение, то второе не может выполняться в принципе. Таким образом, предположение о том, что $\Delta = |A| = 0$, приводит к невозможности вычислить обратную матрицу. Условие $\Delta = |A| \neq 0$ является достаточным условием существования обратной матрицы. Оно также является и необходимы условием, но мы не будем это доказывать.

<u>Свойства обратных матриц</u>:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) Если обратная матрица A^{-1} существует, то она единственна;

3) Если у матриц A и B существуют обратные матрицы, соответственно, A^{-1} и B^{-1}, то у их произведения тоже существует обратная матрица: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство:

1) $(A^{-1})A = I \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$.
2) Предположим, что для матрицы A две обратные матрицы P и Q:
$$AP = PA = I,$$
$$AQ = QA = I.$$
Тогда
$$P = P \cdot I = P \cdot (AQ) = (PA)Q = I \cdot Q = Q.$$
3) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$

Теория систем линейных уравнений

Рассмотрим систему, состоящую из m линейных уравнений с n неизвестными:
$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = b^1 \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n = b^2 \\ \cdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n = b^m \end{cases}.$$
Введем основную матрицу системы:
$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \in R^{m\times n},$$
столбец неизвестных:
$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in R^n,$$
столбец правых частей:
$$B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \in R^m.$$
Разложим матрицу A на столбцы:
$$A = \|A_1\, A_2\, \dots\, A_n\|,$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}$.

Мы можем переписать нашу систему по-другому:

1) матричная запись: $AX = B$;
2) полуматричная запись: $A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = B$.

Определение.
Система линейных уравнений называется однородной, если $B = 0$. Обозначение: ОСЛУ.

Определение.
Система линейных уравнений называется неоднородной, если $B \neq 0$. Обозначение: НОСЛУ.

Определение.
Набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ называется решением СЛУ, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получается верное числовое равенство.

Столбец $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ называется решением СЛУ, если при подстановке столбца в матричное уравнение получаем верное матричное равенство.

Определение.
СЛУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Определение.
СЛУ называется определенной, если она совместна и имеет единственное решение, и неопределенной, если она совместна и имеет множество решений.

Глядя на полуматричную запись нашей системы, приходим к тому, что совместность системы – это возможность разложить столбец правых частей B в линейную комбинацию столбцов матрицы A.

Однородные системы линейных уравнений

СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если столбец правых частей равен нулю:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = 0 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = 0 \end{cases}.$$

ОСЛУ всегда совместна: числа $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$ образуют ее решение, называемое тривиальным. Возникает вопрос, может ли ОСЛУ иметь нетривиальное решение.

Теорема.
ОСЛУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы ее основной матрицы ЛЗ.
Доказательство:

1) Пусть ОСЛУ имеет нетривиальное решение $x^1, x^2, \dots, x^n$; это означает, что
$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = 0,$$
где хотя бы один коэффициент $x^k \neq 0$; это и означает ЛЗ столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$.
2) Пусть столбцы основной матрицы ОСЛУ ЛЗ, то есть
$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = 0,$$
где хотя бы один из коэффициентов $x^k \neq 0$. Этот набор коэффициентов и образует нетривиальное решение ОСЛУ.

Теорема.
Если $X_1, X_2 -$ два решения ОСЛУ $AX = 0$, то $\forall c_1, c_2$: $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ тоже является решением этой ОСЛУ.
Доказательство:
Поскольку $X_1, X_2 -$ решения ОСЛУ, имеем:
$$AX_1 = 0,$$
$$AX_2 = 0,$$
Подставим столбец X в ОСЛУ:
$$AX = A(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 A X_1 + c_2 A X_2 = 0.$$

Определение.
Фундаментальная совокупность решений (ФСР) ОСЛУ – это упорядоченный набор столбцов-решений $X_1, X_2, \dots, X_s$:

1) линейно независимых
2) любое решение ОСЛУ можно представить в виде их линейной комбинации:
$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_s X_s,$$
где $c_1, c_2, \dots, c_s -$ произвольные числа.

Неоднородные системы линейных уравнений

Система $AX = B$ называется неоднородной (НСЛУ), если $B \neq 0$. Часто НСЛУ рассматривают вместе с ОСЛУ $AX = 0$, однородную систему в этом случае называют сопутствующей или СОСЛУ.

Теорема.
Пусть $X_1, X_2 -$ решения НСЛУ $AX = B$, тогда их разность $X_0 = (X_1 - X_2) -$ решение СОСЛУ $AX = 0$.
Доказательство:
Поскольку $AX_1 = B, AX_2 = B$, имеем:

$$AX = A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0.$$

Решение СОСЛУ: $X_0 = (X_1 - X_2)$, отсюда имеем $X_1 = X_0 + X_2$. Таким образом, любое решение НСЛУ (X_1) можно представить в виде суммы некоторого частного решения НСЛУ (X_2) и общего решения СОСЛУ (X_0):

ОРНС = ЧРНС + ОРОС.

Это, так называемый, принцип суперпозиции, он выполняется для любых линейных уравнений.

Пример.
Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^3 = 0 \\ x^2 - 3x^3 = 0 \end{cases}, \tag{10.1}$$

преобразуем ее к виду:

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 \\ x^2 = 3x^3 \end{cases}.$$

Если вместо x^3 подставлять произвольные числа и вычислять x^1 и x^2 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3 будет представлять собой некоторое решение ОСЛУ. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной ОСЛУ.

Определение.

1) Базисная неизвестная – это такая неизвестная, которая входит только в одно уравнение системы. Дополним данное определение: если в какое-то уравнение входит две и более переменные, которые больше никуда не входят, то из них только одна будет являться базисной, при этом любая. Для следующей системы
$$\begin{cases} x^1 + x^3 + x^5 = 0 \\ x^2 + x^4 + x^5 = 0 \end{cases} \tag{10.2}$$
базисными неизвестными являются, например, x^1 и x^4.
2) Система называется системой упрощенного вида, если в каждом ее уравнении имеется базисная неизвестная. В этом случае число базисных неизвестных равно числу уравнений в системе.

3) Если система имеет упрощенный вид, неизвестные, не являющиеся базисными, называются свободными.

Продолжим решать систему (10.1), ее решение можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^1 = -2C \\ x^2 = 3C \\ x^3 = C \end{cases},$$

где $C-$ любое число, или $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C \\ 3C \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Любое решение X можно выразить через столбец $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, то есть он представляет собой фундаментальную совокупность решений системы (10.1).

Преобразуем систему (10.2), получим

$$\begin{cases} x^1 = -x^3 - x^5 \\ x^4 = -x^2 - x^5 \end{cases}.$$

Вместо x^2, x^3, x^5 можно подставлять произвольные числа. Запишем решение в виде:

$$\begin{cases} x^1 = -C_2 - C_3 \\ x^2 = C_1 \\ x^3 = C_2 \\ x^4 = -C_1 - C_3 \\ x^5 = C_3 \end{cases}$$

или

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 - C_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ -C_1 - C_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ 0 \\ -C_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_2 \\ 0 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_3 \\ 0 \\ 0 \\ -C_3 \\ C_3 \end{pmatrix} =$$

$$C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Любое решение системы X является линейной комбинацией трех столбцов, они представляют собой фундаментальную совокупность решений системы (10.2).

ЛЕКЦИЯ 11. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ К УПРОЩЕННОМУ ВИДУ

Приведение системы к упрощенному виду

Пример 1.

Рассмотрим систему, которая содержит одно уравнение и две неизвестных:

$$\{x^1 + x^2 = 1,$$

заменим для удобства переменные x^1, x^2 на x, y:

$$\{x + y = 1. \tag{11.1}$$

Любую из двух неизвестных можно выбрать в качестве базисной. Пусть $x -$ базисная переменная:

$$\{x = 1 - y.$$

Решение системы:

$$\begin{cases} x = 1 - C \\ y = C \end{cases}$$

или $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Первый столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ представляет собой частное решение НСЛУ, а второй столбец $C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} -$ общее решение СОСЛУ: $\{x + y = 0$. Геометрический смысл уравнения (11.1) – прямая на плоскости, причем $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} -$ опорная точка, а $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} -$ направляющий вектор.

Пример 2.

Рассмотрим систему, которая содержит одно уравнение и три неизвестных:

$$\{x + y + z = 1.$$

Пусть $x -$ базисная переменная:

$$\{x = 1 - y - z.$$

Решение системы:

$$\begin{cases} x = 1 - C_1 - C_2 \\ y = C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C_1 - C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_1 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_2 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ представляет собой частное решение НСЛУ, а остальные слагаемые образуют общее решение СОСЛУ: $\{x + y + z = 0$. При этом столбцы $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют ФСР СОСЛУ. С геометрической точки зрения $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – опорная точка плоскости, а $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ее направляющие векторы. Проверим, что они линейно независимы, запишем их линейную комбинацию:

$$C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

она равна нулю только при $C_1 = C_2 = 0$.

<u>Пример 3</u>.

Рассмотрим систему, которая содержит два уравнения и три неизвестных:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}. \tag{11.2}$$

Данная система не имеет базисных переменных. Система описывает точки пересечения двух плоскостей, то есть прямую.

Запишем расширенную матрицу данной системы:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Мы знаем, что разные системы могут иметь одно и то же решение, такие системы называются эквивалентными. Преобразования: перестановка уравнений системы местами, умножение любого из уравнений на ненулевой коэффициент, складывание уравнений – не меняют множество решений системы и называются элементарными преобразованиями системы. Каждому элементарному преобразованию соответствует аналогичное преобразование расширенной матрицы. Произведем над системой (11.2) такие преобразования, чтобы какая-нибудь переменная стала базисной:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{-3} \\ \downarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

Мы добились того, чтобы переменная x исчезла из второго уравнения и таким образом стала базисной. Сделаем также y базисной переменной:

$$\begin{array}{c} \\ \boxed{1/4} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/4 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует следующая система:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}z \\ y = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}z \end{cases}.$$

Решение:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}C \\ \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{4} \\ \dfrac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый столбец представляет собой частное решение НСЛУ, второе слагаемое образует общее решение СОСЛУ. С геометрической точки зрения $\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ – опорная точка прямой, $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ – ее направляющий вектор.

Метод преобразования матриц

Рассмотрим вспомогательный алгоритм. Пусть у нас есть матрица $\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & \boxed{q} & r \\ x & y & z \end{pmatrix}$.

Мы хотим обнулить элементы a и b, прибавляя к 1-й и 3-й строкам 2-ю с подходящими коэффициентами. Та строка, которую мы прибавляем ко всем остальным называется ведущей строкой. Тот столбец, который мы хотим заполнить нулями называется ведущим столбцом. Элемент, стоящий на пересечении ведущих строки и столбца, также называется ведущим (выделен квадратом). Преобразуем нашу матрицу:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} aq & bq & cq \\ pb & qb & rb \\ x & y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} aq - pb & 0 & cq - rb \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} aq - pb & 0 & cq - rb \\ p & q & r \\ xq - py & 0 & zq - ry \end{pmatrix}.$$

Решим (11.2) с помощью описанного вспомогательного алгоритма:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-4} & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right).$$

<u>Пример 4</u>.

Пусть ОСЛУ соответствует основная матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Преобразуем матрицу:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, эквивалентная система примет вид:

$$\begin{cases} x^1 = x^3 - 2x^4 \\ x^2 = -x^3 - x^4 \end{cases}.$$

Решение:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - 2C_2 \\ -C_1 - C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_1 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2C_2 \\ -C_2 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют ФСР ОСЛУ. Если взять $C_1 = C_2 = 0$, то получим тривиальное решение системы.

С помощью элементарных преобразований строк мы совершили переход:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим столбцы исходной матрицы: A_1, A_2, A_3, A_4; а столбцы результирующей матрицы: B_1, B_2, B_3, B_4. Заметим, что столбцы B_1, B_2 − линейно независимы, а столбцы B_3, B_4 являются их линейными комбинациями:

$$B_3 = -B_1 + B_2, \tag{11.3}$$

$$B_4 = 2B_1 + B_2. \tag{11.4}$$

Столбцы B_1, B_2 могут служить базисом в линейной оболочке всех столбцов нашей матрицы.

Определение. Линейная оболочка – это множество всех векторов, которые можно получить из данных векторов при помощи линейных комбинаций.

Рассмотрим подобные (11.3) и (11.4) линейные комбинации в исходной матрице:

$$-A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = A_3,$$

$$2A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = A_4.$$

Таким образом, линейные зависимости между столбцами исходной и результирующей матриц одинаковые. Аналогично, можно производить элементарные преобразования над столбцами и получить, что при этом линейные зависимости между строками исходной и результирующей матриц не будут нарушаться.

Вернемся к понятию произведения матриц $C = A \cdot B$:

$$c_j^i = A^i B_j = \sum_{k=1}^{s} a_k^i b_j^k.$$

Будем рассматривать матрицу C в виде: $C = \|C_1\ C_2\ \dots\ C_n\|$, где отдельный столбец

$$C_j = \begin{pmatrix} c_j^1 \\ c_j^2 \\ \vdots \\ c_j^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} a_k^1 b_j^k \\ \sum_{k=1}^{s} a_k^2 b_j^k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} a_k^m b_j^k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} \begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} b_j^k = \sum_{k=1}^{s} A_k b_j^k.$$

Для самой матрицы получим

$$C = \left\| \sum_{k=1}^{s} A_k b_1^k\ \sum_{k=1}^{s} A_k b_2^k \dots \sum_{k=1}^{s} A_k b_n^k \right\| = \sum_{k=1}^{s} A_k \left\| b_1^k\ b_2^k\ \dots\ b_n^k \right\| = \sum_{k=1}^{s} A_k B^k.$$

Перепишем выражение для столбца матрицы C следующим образом:

$$C_j = \sum_{k=1}^{s} A_k b_j^k = \|A_1\ A_2\ \dots\ A_s\| \begin{pmatrix} b_j^1 \\ b_j^2 \\ \vdots \\ b_j^s \end{pmatrix} = AB_j.$$

То есть на каждый столбец произведения влияет только столбец второго сомножителя. Можно получить аналогичные формулы для строк:

$$C^i = \sum_{l=1}^{s} a_l^i B^l,$$

$$C^i = A^i B.$$

Поговорим о том, как элементарные преобразования связаны с умножением матриц.

Теорема.

Пусть $R -$ одно из допустимых элементарных преобразований строк (ЭПС):

1) перестановка;
2) умножение на число $\alpha \neq 0$;
3) сложение.

$R(A) -$ результат преобразования матрицы A.
Тогда

$$R(A) = R(I) \cdot A.$$

Доказательство:

Достаточно доказать утверждение теоремы для столбца $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1) Пусть $R -$ перестановка 2-й и 3-й строк. Тогда $R(A) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}$. Выполним аналогичное преобразование над единичной матрицей:

$$R(I) = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$R(I) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}.$$

2) Пусть преобразование R заключается в следующем: к 1-й строке прибавляем 3-ю, умноженную на α. Тогда $R(A) = \begin{pmatrix} a+\alpha c \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Выполним аналогичное преобразование над единичной матрицей:
$$R(I) = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Имеем
$$R(I) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha c \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица $A -$ квадратная, и нам удалось элементарными преобразованиями свести ее к единичной: $R(A) = I$. Это означает, что $R(I) \cdot A = R(A) = I$, следовательно, $R(I) = A^{-1}$.

ЛЕКЦИЯ 12. ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Понятие и свойства определителя

Вспомним основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка:

1) линейность
2) кососимметричность
3) нормировка

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \|A_1\ A_2 \dots\ A_n\| \in R^{n\times n}$.

Определение. Определитель – это функция det: $R^{n\times n} \to R, A \to detA \equiv |A|$, обладающая следующими свойствами:

1) полилинейность (линейность по любому столбцу):
$$det\|\alpha' A_1' + \alpha'' A_1'', A_2, \dots, A_n\| = \alpha' det\|A_1', A_2, \dots, A_n\| + \alpha'' det\|A_1'', A_2, \dots, A_n\|;$$
2) кососимметричность:
$$det\|A_1\ \dots A_k\ A_{k+1} \dots\ A_n\| = -det\|A_1\ \dots A_{k+1}\ A_k \dots\ A_n\|;$$
3) нормировка:
$$detI = 1.$$

Теорема (производные свойства определителя)

1) Определитель меняет знак при перестановке двух любых столбцов:
$$|A_1 \dots\ A_j \dots\ A_k \dots\ A_n| = -|A_1 \dots\ A_k \dots\ A_j \dots\ A_n|;$$
2) Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю:
$$|A_1 \dots\ B \dots\ B \dots\ A_n| = 0;$$
3) Определитель не изменится, если к любому столбцу прибавить линейную комбинацию других столбцов:
$$|A_1\ A_2 \dots\ A_n| = |A_1 + \alpha A_2 + \dots + \beta A_n, A_2 \dots\ A_n|.$$

Доказательство:

1) Будем использовать метод математической индукции, в качестве параметра выберем количество столбцов, стоящих между теми столбцами, которые мы хотим поменять местами.
   Перепишем определитель в виде:
$$|A_1 \dots\ A_j\ A_{j+1} \dots\ A_{k-1}\ A_k \dots\ A_n|.$$
   Пусть количество столбцов $A_{j+1}, \dots, A_{k-1}$ равно m.

База индукции. При $m = 0$ утверждение верно по определению (кососимметричность определителя).

Шаг индукции. Пусть утверждение верно при $m - 1$. Переставим в определителе столбцы A_j и A_{j+1}:

$$|A| = \left|A_1 \dots A_j\, A_{j+1} \dots A_{k-1}\, A_k \dots A_n\right| = -\left|A_1 \dots A_{j+1}\, A_j\, A_{j+2} \dots A_{k-1}\, A_k \dots A_n\right|.$$

Количество столбцов $A_{j+2}, \dots, A_{k-1}$ будет равно $m - 1$, поэтому мы можем поменять местами столбцы A_j и A_k:

$$|A| = \left|A_1 \dots A_{j+1}\, A_k \dots A_{k-1}\, A_j \dots A_n\right| = -\left|A_1 \dots A_k\, A_{j+1} \dots A_{k-1}\, A_j \dots A_n\right|.$$

Таким образом, мы поменяли столбцы A_j и A_k местами.

2) Поменяем местами два одинаковых столбца:

$$|A_1 \dots B \dots B \dots A_n| = -|A_1 \dots B \dots B \dots A_n| = 0.$$

3) Воспользуемся свойством линейности определителя:

$$\begin{aligned}&|A_1 + \alpha A_2 + \dots + \beta A_n, A_2 \dots A_n|\\ &= |A_1\, A_2 \dots A_n| + \alpha |A_2\, A_2 \dots A_n| + \dots + \beta |A_n\, A_2 \dots A_n|\\ &= |A_1\, A_2 \dots A_n| + 0 + \dots + 0 = |A_1\, A_2 \dots A_n|.\end{aligned}$$

Формулы Крамера

Рассмотрим квадратную систему

$$AX = B,$$

где $A \in R^{n\times n}, X \in R^n$ и $B \in R^n$. Перепишем ее в полуматричном виде:

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = B.$$

Допустим, что существует решение $X = (x^1\, x^2 \cdots x^n)^T$. Рассмотрим определитель

$$\begin{aligned}|B\, A_2 \dots A_n| &= |A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n, A_2 \dots A_n|\\ &= x^1 |A_1\, A_2 \dots A_n| + x^2 |A_2\, A_2 \dots A_n| + \dots + x^n |A_n\, A_2 \dots A_n|\\ &= x^1 |A_1\, A_2 \dots A_n| + 0 + \dots + 0 = x^1 |A_1\, A_2 \dots A_n|.\end{aligned}$$

Если $|A| = |A_1\, A_2 \dots A_n| \neq 0$, то

$$x^1 = \frac{|B\, A_2 \dots A_n|}{|A_1\, A_2 \dots A_n|}.$$

Аналогично получаются формулы для каждой компоненты решения. Уточним, что мы получили формулы Крамера в предположении, что решение существует, мы не доказывали существование решения. Тем не менее формулы Крамера доказывают единственность решения, если выполнено $|A| \neq 0$.

Перестановки

Определение. Пусть $N = \{1,2,\dots,n\} -$ множество первых n натуральных чисел. Перестановкой называется взаимно однозначная функция $\sigma: N \to N$.

Пример. $n = 4$: $N = \{1,2,3,4\}$
Зададим перестановку в виде таблицы, первая строка – аргументы, вторая – значения:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Таким образом, имеем $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 1$. Если в таблице (12.1) поменять местами столбцы, перестановка не изменится, например, можно записать

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем пример таблицы, которая не является перестановкой, поскольку отображение не является взаимно однозначным:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим множество всех перестановок из n элементов: S_n. Имеем:

$$|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \tag{12.2}$$

где $|S_n| -$ количество элементов множества S_n или мощность S_n. Докажем (12.2), для этого рассмотрим перестановку:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Мы можем подобрать $\sigma(1)$ n способами, $\sigma(2)$ $n-1$ способами, и так далее, $\sigma(n)$ одним способом. Перемножим все результаты и как раз получим (12.2). При $n = 2$ количество перестановок $|S_2| = 2! = 2$, а сами перестановки принимают вид:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

При $n = 3$ количество перестановок $|S_3| = 3! = 6$, а сами перестановки принимают вид:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Перестановка вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon$ называется тривиальной.

Определение. Пусть $\sigma, \tau -$ перестановки, их произведением называется перестановка $\sigma \cdot \tau\ (x) = \sigma(\tau(x))$. (Первой перестановкой считают τ, второй – σ).

Пример 1.
Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Произведения:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.
Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Произведения:

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon,$$

Таким образом, произведение перестановок дает нам тривиальную перестановку ε. Перестановки σ и ρ называются взаимно обратными, причем $\rho = \sigma^{-1}$ и $\sigma = \rho^{-1}$. Любая перестановка имеет обратную, это следует из взаимной однозначности.

Определение. Будем говорить, что пара чисел $i, j \in N$ образует инверсию в перестановке σ, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак.

Пример.
Рассмотрим перестановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, в этом случае $N = \{1,2,3,4,5\}$. Проверим образует ли пара чисел $(1,2)$ инверсию в перестановке σ. Величины:

$$i - j = 1 - 2 = -1,$$
$$\sigma(i) - \sigma(j) = 5 - 3 = 2$$

имеют разный знак, следовательно, пара чисел $(1,2)$ образует инверсию в перестановке σ.

Определение. Четность (знак) перестановки $\sigma -$ это функция:

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} +1, \text{если четное число инверсий} \\ -1, \text{если нечетное число инверсий} \end{cases}.$$

Формула для вычисления четности:

$$sgn(\sigma) = \prod_{\substack{\{i,j\} \in N \\ i \neq j}} \frac{i - j}{\sigma(i) - \sigma(j)}.$$

Теорема: $sgn(\sigma \cdot \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$.
Доказательство:
Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$, тогда

$$sgn(\sigma\tau) = \prod_{\substack{\{i,j\} \in N \\ i \neq j}} \frac{i - j}{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))} = \prod_{\substack{\{i,j\} \in N \\ i \neq j}} \frac{i - j}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}$$
$$= sgn(\tau) \cdot sgn(\sigma).$$

Следствие: $sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$.

Теория определителей

Рассмотрим, как устроена, если она существует, полилинейная кососимметричная функция столбцов. Введем обозначения для столбцов матрицы A:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix},$$

а также столбцы:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы $e_1, e_2, \dots, e_n$ являются линейно независимыми, и любой столбец такого же размера можно выразить через них, например,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix} = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + \dots + a_1^n e_n = \sum_{k_1=1}^{n} a_1^{k_1} e_{k_1},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix} = \sum\nolimits_{k_2=1}^{n} a_2^{k_2} e_{k_2}$$

и т.д. Таким образом, $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис в пространстве всех n-элементных столбцов. Обозначим за $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ произвольную полилинейную кососимметричную функцию:

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = F\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_1^{k_1} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} a_2^{k_2} e_{k_2}, \dots, \sum_{k_n=1}^{n} a_n^{k_n} e_{k_n} \right)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} \cdot F\big(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}\big).$$

ЛЕКЦИЯ 13. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Формула полного раскрытия определителя

На прошлой лекции мы рассматривали матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1\ A_2\ \dots\ A_n\|$$

и базис в множестве n-элементных столбцов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый столбец матрицы A можно разложить по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$A_k = \sum_{j_k=1}^{n} a_k^{j_k} e_{j_k}.$$

Рассмотрим произвольную полилинейную кососимметричную функцию столбцов. Значение функции для столбцов единичной матрицы обозначим

$$F(e_1, e_2, \dots, e_n) = F(I) = C.$$

Теперь рассмотрим функцию F на тех же самых единичных столбцах, но взятых не в натуральном порядке, а перемешанных. При этом произойдет какое-то количество смен знака функции. В случае двух одинаковых столбцов функция окажется равной нулю. Тогда

$$F\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}\right) = \begin{cases} 0, \text{если среди } j_1 \dots\ j_n \text{ есть одинаковые} \\ C \cdot sgn(j_1 \dots\ j_n), \text{если } j_1 \dots\ j_n \text{ все разные} \end{cases}.$$

Рассмотрим функцию F от столбцов матрицы A:

$$F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = F\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_1^{j_1} e_{k_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_2^{j_2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_n^{j_n} e_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_1^{j_1} F\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_2^{j_2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_n^{j_n} e_{j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n} \cdot F(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$$

$$= C \sum_{(j_1 \ldots j_n) \in S_n} sgn(j_1 \ldots j_n) \cdot a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n}.$$

Если положить $F(e_1, e_2, \ldots, e_n) = I = C$, то функция F будет являться определителем:

$$|A| = \sum_{(j_1 \ldots j_n) \in S_n} sgn(j_1 \ldots j_n) \cdot a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n}.$$

Полученное выражение для $|A|$ называется формулой полного раскрытия определителя. Рассмотрим частные случаи при $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1,$$

при $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1.$$

При больших n для оценки числа слагаемых в определителе используется формула Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

при $n = 100$ получим $100! \sim 10^{153}$ слагаемых. Если у нас есть компьютер, который способен совершать 10^{20} операций в секунду, тогда время расчета определителя по порядку величины составит $10^{133} c \sim 10^{131}$мин$\sim 10^{129}$ч$\sim 10^{127}$сут$\sim 10^{124}$лет.

Мы получили формулу для любой кососимметричной полилинейной функции:

$$F(A) = C \cdot |A| = F(I) \cdot |A|.$$

Теорема: $|A^T| = |A|$.

Доказательство:

Пусть $A = \left(a_k^j\right)$ и $A^T = \left(\tilde{a}_j^k\right)$, при этом $\tilde{a}_j^k = a_k^j$. Запишем формулу полного развертывания определителя для транспонированной матрицы:

$$|A^T| = \sum_{(j_1 \dots j_n) \in S_n} sgn(j_1 \dots j_n) \cdot \tilde{a}_1^{j_1} \cdots \tilde{a}_n^{j_n} = \sum_{(j_1 \dots j_n) \in S_n} sgn(j_1 \dots j_n) \cdot a_{j_1}^1 \cdots a_{j_n}^n$$
$$= \sum_{(j_1 \dots j_n) \in S_n} sgn(\text{обратной перестановки}) \cdot a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} = |A|,$$

где $k_1 \dots k_n -$ перестановка, обратная к $j_1 \dots j_n$.

Теорема. Определитель нижне треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & 0 \\ a_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \cdots a_n^n.$$

Доказательство:

Условие, определяющее нижне треугольную матрицу A выгляди следующим образом:

$$a_k^j \neq 0 \text{ при } j \geq k.$$

Определитель матрицы A:

$$|A| = \sum_{(j_1 \dots j_n) \in S_n} sgn(j_1 \dots j_n) \cdot a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n}.$$

Ненулевые сомножители получатся при выполнении набора условий: $j_1 \geq 1,\ j_2 \geq 2, \dots, j_n \geq n$, при этом $j_1 + j_2 + \cdots + j_n = n$. Следовательно, имеем:

$$j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_n = n.$$

Для определителя матрицы A получим:

$$|A| = a_1^1 a_2^2 \cdots a_n^n.$$

Доказательство для верхне треугольной матрицы производится аналогично, предварительно верхне треугольная матрица транспонируется и превращается в нижне треугольную матрицу.

Теорема.

Пусть $A = \begin{Vmatrix} B & D \\ O & C \end{Vmatrix}$, где $B, C -$ квадратные блоки. Тогда $|A| = |B| \cdot |C|$.

Доказательство:

Рассмотрим определитель матрицы A как функцию столбцов, входящих в состав матрицы B:

$$|A| = F(B) = F(I) \cdot |B|.$$

$F(I)$ представим в виде функции столбцов, входящих в состав матрицы C:

$$F(I) = \begin{vmatrix} I & D \\ O & C \end{vmatrix} = G(C) = G(I) \cdot |C|,$$

где $G(I) = \begin{vmatrix} I & D \\ O & I \end{vmatrix} = I$. Тогда $|A| = |B| \cdot G(I) \cdot |C| = |B| \cdot |C|$.

Теорема: $|AB| = |A| \cdot |B|$

Доказательство:

Запишем следующее представление для матрицы произведения:

$$C = AB = \|C_1 C_2 \dots C_n\|,$$

$$C_k = \sum_{j_k=1}^{n} A_{j_k} b_k^{j_k}.$$

Тогда

$$|C| = \left| \sum_{j_1=1}^{n} A_{j_1} b_1^{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} A_{j_n} b_n^{j_n} \right| = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} b_1^{j_1} \cdots b_n^{j_n} \left| A_{j_1} \dots A_{j_n} \right|$$
$$= \sum_{(j_1 \dots j_n) \in S_n} b_1^{j_1} \cdots b_n^{j_n} \cdot sgn(j_1 \dots j_n) \cdot |A| = |A| \cdot |B|.$$

Формула разложения определителя по строчкам и столбцам

Рассматриваем определитель матрицы A:

$$|A| = |A_1 \dots A_n| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_1^j e_j, A_2 \dots A_n \right| = \sum_{j=1}^{n} a_1^j \left| e_j, A_2 \dots A_n \right|.$$

Определитель $\left| e_j, A_2 \dots A_n \right| \equiv \mathcal{A}_1^j$ называется алгебраическим дополнением элемента a_1^j. Тогда

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_1^j \mathcal{A}_1^j.$$

Алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_1^1$:

$$\mathcal{A}_1^1 = \begin{vmatrix} 1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Можем разбить определитель $\mathcal{A}_1^1$ на квадратные блоки $\boxed{1}$ и $\boxed{\begin{matrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{matrix}}$ и воспользоваться теоремой о блочном определителе, получим:

$$\mathcal{A}_1^1 = M_1^1,$$

где M_1^1 — минор элемента a_1^1. Алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_1^j$:

$$\mathcal{A}_1^j = \begin{vmatrix} 0 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_2^j & \ddots & a_n^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Будем переставлять j-ю $\boxed{1\ a_2^j\ \cdots\ a_n^j}$ строчку с предыдущими, при каждой такой перестановке знак определителя будет меняться. В итоге получим:

$$\mathcal{A}_1^j = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & a_2^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Теперь можем разбить определитель $\mathcal{A}_1^j$ на квадратные блоки $\boxed{1}$ и $\boxed{\begin{matrix} a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{matrix}}$ и воспользоваться теоремой о блочном определителе, получим:

$$\mathcal{A}_1^j = (-1)^{j-1} M_1^j,$$

где M_1^j — минор элемента a_1^j. Для алгебраического дополнения $\mathcal{A}_k^j$ имеем:

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{j+k} M_1^j.$$

Можно получить аналогичные формулы для разложения определителя матрицы A по строке:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j,$$

где $\mathcal{A}_k^j = (-1)^{j+k} M_1^j$.

Теперь давайте попробуем в формуле разложения определителя по столбцам умножать элементы произвольного столбца на алгебраические дополнения другого столбца:

$$|A| = a_2^1 \mathcal{A}_1^1 + a_2^2 \mathcal{A}_1^2 + \cdots + a_2^n \mathcal{A}_1^n = 0.$$

Это, так называемое, фальшивое разложение определителя.

<u>Теорема</u>:

$$\sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_l^j = \begin{Bmatrix} |A|, k = l \\ 0, k \neq l \end{Bmatrix} = |A| \cdot \delta_{kl}.$$

Теорема о существовании обратной матрицы

<u>Теорема</u>.

Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.

<u>Доказательство</u>:

1) Пусть для матрицы A существует обратная $A^{-1}: AA^{-1} = I$. Для определителей имеем:
$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1,$$
отсюда следует, что $|A| \neq 0,\ |A^{-1}| \neq 0$ и
$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$
2) Пусть $|A| \neq 0$. Введем новую матрицу алгебраических дополнений
$$A^V = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^1 & \mathcal{A}_2^1 & \cdots & \mathcal{A}_n^1 \\ \mathcal{A}_1^2 & \mathcal{A}_2^2 & \cdots & \mathcal{A}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_1^n & \mathcal{A}_2^n & \cdots & \mathcal{A}_n^n \end{pmatrix},$$

ее также называют присоединенной матрицей. Посчитаем произведение

$$A \cdot (A^V)^T = |A| \cdot I.$$

Отсюда следует, что обратная матрица существует и имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^V)^T.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ