



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ДЫННИКОВ  
ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

—  
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**ПОДКЛЕТНОВУ АННУ АЛЕКСАНДРОВНУ**

---

## Содержание

<b>Лекция 1. Конические сечения и их геометрические свойства</b> .....	7
<b>Конические сечения</b> .....	7
<b>Оптическое свойство коник</b> .....	10
<b>Аналитические определения коник</b> .....	11
<b>Лекция 2. Полярные координаты. Директориальные свойства коник. Уравнение коник в обобщенных полярных координатах</b> .....	14
<b>Аналитические определения коник (продолжение)</b> .....	14
<b>Полярные координаты</b> .....	15
<b>Директориальные свойства коник</b> .....	18
<b>Уравнение коник в обобщённых полярных координатах</b> .....	21
<b>Лекция 3. Аффинные системы координат и скалярное произведение</b> .....	23
<b>Аффинные системы координат</b> .....	23
<b>Скалярное произведение</b> .....	24
<b>Лекция 4. Матрица Грама. Площадь и объем. Матрица перехода. Ориентация базисов</b> ..	27
<b>Матрица Грама</b> .....	27
<b>Матрица перехода от базиса к базису</b> .....	30
<b>Лекция 5. Ориентированные площадь и объём. Векторное и смешанное произведения</b> ..	33
<b>Ориентированная площадь. Ориентированный объём</b> .....	33
<b>Непрерывная деформируемость одинаково ориентированных базисов</b> .....	36
<b>Векторное и смешанное произведения</b> .....	38
<b>Формула для векторного произведения в прямоугольной положительно ориентированной системе координат</b> .....	38
<b>Представление вектора в виде кососимметричной матрицы</b> .....	39
<b>Лекция 6. Поворот вокруг вектора в пространстве. Двойственный базис</b> .....	40
<b>Скалярное, смешанное и векторное произведения через кососимметрические матрицы</b> .....	40
<b>Ортогональная проекция вектора на вектор</b> .....	41
<b>Поворот вокруг вектора в пространстве</b> .....	42
<b>Двойственный базис</b> .....	44
<b>Лекция 7. Сферическая геометрия</b> .....	47
<b>Многоугольник на сфере, его углы и длины сторон</b> .....	47
<b>Теоремы синусов и косинусов на сфере</b> .....	48
<b>Угловой дефект</b> .....	50
<b>Лекция 8. Прямые и плоскости</b> .....	53

<b>Система линейных уравнений. Ранг</b> .....	53
<b>Параметрическое задание прямой</b> .....	53
<b>Задание прямой системой уравнений</b> .....	54
<b>Параметрическое задание плоскости</b> .....	55
<b>Задание плоскости уравнением</b> .....	56
<b>Многочлены первой степени. Полуплоскости. Полупространства</b> .....	57
<b>Аффинная классификация</b> .....	60
<b>Лекция 9. Аффинная классификация прямых и плоскостей. Пучки и связки</b> .....	61
<b>Аффинная классификация пар прямых на плоскости</b> .....	61
<b>Аффинная классификация пар прямых в пространстве</b> .....	62
<b>Аффинная классификация пар плоскостей в пространстве</b> .....	63
<b>Пучки прямых на плоскости</b> .....	63
<b>Пучки плоскостей в пространстве</b> .....	64
<b>Связки прямых и плоскостей в пространстве</b> .....	65
<b>Ортогональная (метрическая/евклидова) классификация</b> .....	66
<b>Лекция 10. Формулы для расстояний и углов. Замена аффинных координат.</b> .....	67
<b>Лемма о нормали к прямой</b> .....	67
<b>Формулы для расстояний</b> .....	67
<b>Формулы для углов</b> .....	71
<b>Формула перехода между аффинными системами координат</b> .....	72
<b>Ортогональные матрицы</b> .....	73
<b>Лекция 11. Ортогональные матрицы. Кривые и поверхности второго порядка.</b> .....	75
<b>Ортогональные матрицы (продолжение)</b> .....	75
<b>Преобразование кососимметричных матриц в ортогональные</b> .....	78
<b>Кривые и поверхности второго порядка</b> .....	78
<b>Вырожденные многочлены</b> .....	81
<b>Лекция 12. Приведение к каноническому виду. Ортогональные инварианты.</b> .....	82
<b>Вырожденные многочлены (продолжение)</b> .....	82
<b>Приведение многочлена второй степени к каноническому виду ортогональной заменой координат</b> .....	83
<b>Ортогональные инварианты многочлена второй степени</b> .....	84
<b>Лекция 13. Ортогональные инварианты. Классификации кривых и поверхностей второго порядка.</b> .....	87
<b>Ортогональные инварианты многочлена второй степени (продолжение)</b> .....	87
<b>Ортогональная классификация кривых второго порядка</b> .....	89

Ортогональная классификация поверхностей второго порядка.....	89
Аффинная классификация кривых второго порядка .....	90
Лекция 14. Метод Лагранжа. Индексы инерции.....	91
Аффинная классификация поверхностей второго порядка .....	91
Метод Лагранжа. ....	92
Аффинные инварианты многочлена второй степени .....	93
Частные производные .....	94
Формула Тейлора .....	96
Лекция 15. Асимптотические направления. Диаметр .....	97
Асимптотические направления и их геометрический смысл .....	97
Диаметры .....	100
Сопряженные диаметры .....	101
Главные направления и диаметры.....	102
Лекция 16. Главные направления и оси симметрии. Центры кривых и поверхностей....	103
Главные направления (продолжение).....	103
Центры кривых и поверхностей второго порядка .....	104
Особые точки, касательные .....	106
Лекция 17. Касательные. Сечение поверхности касательной плоскостью. Образующие	107
Касательные прямые, касательные плоскости (продолжение) .....	107
Сечение поверхностей второго порядка касательной плоскостью .....	109
Образующие однополостного гиперболоида .....	109
Образующие гиперболического параболоида.....	110
Кривые второго порядка, проходящие через данные точки .....	111
Теорема Паскаля .....	111
Лекция 18. Теоремы Паскаля и Брианшона. Поляры. Сечения поверхностей.....	113
Теорема Паскаля .....	113
Сопряжённость точек относительно кривой второго порядка. Поляритет .....	114
Построение поляры одной линейкой.....	115
Теорема Брианшона.....	117
Плоские сечения поверхностей второго порядка.....	118
Лекция 19. Сечения поверхностей. Стереографическая проекция .....	120
Общий вид плоскостей, образующих в сечении окружность .....	120
Нахождение канонического вида сечения .....	121

Нахождение ортогональных инвариантов сечения по уравнениям поверхности и плоскости .....	122
Стереографическая проекция.....	124
<b>Лекция 20. Аффинные преобразования .....</b>	<b>127</b>
Определение аффинного преобразования .....	127
Запись аффинного преобразования в координатах .....	128
Преобразование матрицы аффинного преобразования при замене координат.....	130
<b>Лекция 21. Изометрии. Классификация изометрий плоскости .....</b>	<b>132</b>
Определение изометрического преобразования.....	132
Критерии изометричности преобразования.....	132
Классификация изометрий плоскости .....	133
Классификация изометрий пространства .....	135
<b>Лекция 22. Классификация изометрий пространства. Кватернионы. Сжатие – растяжение</b> .....	<b>137</b>
Классификация изометрий пространства(продолжение).....	137
Кватернионы .....	139
Сжатие – растяжение вдоль взаимно перпендикулярных направлений .....	143
<b>Лекция 23. Подобие. Проективная прямая и её проективное преобразование.....</b>	<b>145</b>
Строение произвольного аффинного преобразования.....	145
Преобразование подобия.....	145
Преобразование подобия комплексной прямой .....	148
Проективная прямая .....	149
<b>Лекция 24. Преобразования проективной плоскости. Проективная система координат.</b> 153	153
Проективное преобразование прямой и его общий вид (продолжение) .....	153
Проективная плоскость .....	153
Модель связки.....	154
Системы координат на проективной плоскости.....	155
Биекция между проективной системой координат и аффинной картой.....	156
<b>Лекция 25. Теоремы Дезарга и Паппа. Кривые второго порядка на проективной плоскости .....</b>	<b>157</b>
Общий вид проективного преобразования плоскости в проективных координатах ....	157
Общий вид проективного преобразования плоскости в аффинной карте.....	157
Принцип двойственности, инцидентность точек и прямых .....	158
Теорема Дезарга.....	159
Теорема Паппа .....	160

Кривые второго порядка на проективной плоскости .....	160
Проективная классификация кривых второго порядка .....	161
Лекция 26. Овал как проективная прямая. Гиперболический поворот .....	163
Овал как проективная прямая .....	163
Гомоморфизм $PGL(2) \rightarrow PGL(3)$ .....	164
Общий вид параметризации овала как проективной прямой .....	165
Гиперболический поворот .....	165
Прочие преобразования, сохраняющие гиперболу: .....	166
Псевдоевклидово скалярное произведение .....	166
Длина дуги через логарифм двойного отношения .....	168
Лекция 27. Плоскость Лобачевского. Модели Клейна и Пуанкаре .....	169
Плоскость Лобачевского .....	169
Модель Клейна .....	169
Модель Пуанкаре .....	171
Треугольник на плоскости Лобачевского .....	172
Лекция 28. Гиперболические теоремы синусов и косинусов. Угловой дефект .....	174
Гиперболические теоремы синусов и косинусов .....	174
Угловой дефект .....	177
Прямоугольный шестиугольник .....	178
Лекция 29. Расстояние между прямыми. Параболический поворот. Изометрия .....	180
Расстояние между непересекающимися прямыми на плоскости Лобачевского .....	180
Параболический поворот .....	183
Длина дуги орицикла .....	185
Изометрические преобразования плоскости Лобачевского .....	187
Лекция 30. Классификация движений плоскости Лобачевского. Комплексная проективная прямая .....	189
Напоминание прошлой лекции .....	189
Гомоморфизм $PGL(2) \Rightarrow PO(1,2)$ .....	189
Классификация проективных преобразований прямой (движений плоскости Лобачевского) .....	191
Комплексная проективная прямая .....	195
Обобщенная окружность .....	195
Лекция 31. Проективное преобразование комплексной прямой. Пространство Лобачевского, его движения .....	197
Проективное преобразование комплексной прямой и его общий вид .....	197

---

Конформные преобразования сферы .....	200
Пространство Лобачевского $L^3$ .....	201
Модели Клейна и Пуанкаре .....	202
Движения пространства Лобачевского.....	203
Изоморфизм $PGL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow PO(1,3)$ .....	205
Классификация собственных движений.....	205

## Лекция 1. Конические сечения и их геометрические свойства

### Конические сечения

Определение. Эллипс – это геометрическое место точек  $M$ , сумма расстояний от которых до некоторых фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  постоянна и больше  $|F_1F_2|$ .

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами эллипса.

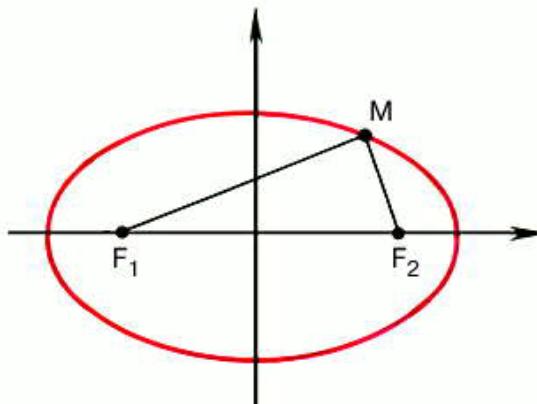


Рис. 1.1 Эллипс

Определение. Парабола – геометрическое место точек  $M$ , таких что

$$|MF| = |MH|,$$

где  $H$  – основание перпендикуляра, проведённого из точки  $M$  на прямую  $d$ , а  $F$  и  $d$  – некоторые фиксированные точки и прямая, причем  $F \notin d$ .

Точка  $F$  называется фокусом параболы, а прямая  $d$  – директрисой.

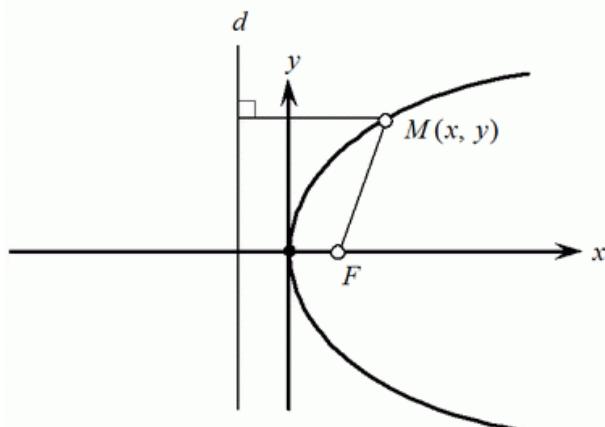


Рис. 1.2 Парабола

Определение. Гипербола – геометрическое место точек  $M$ , таких что

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$

для некоторых точек  $F_1 \neq F_2$  и  $0 < 2a < |F_1F_2|$ .

Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами гиперболы.

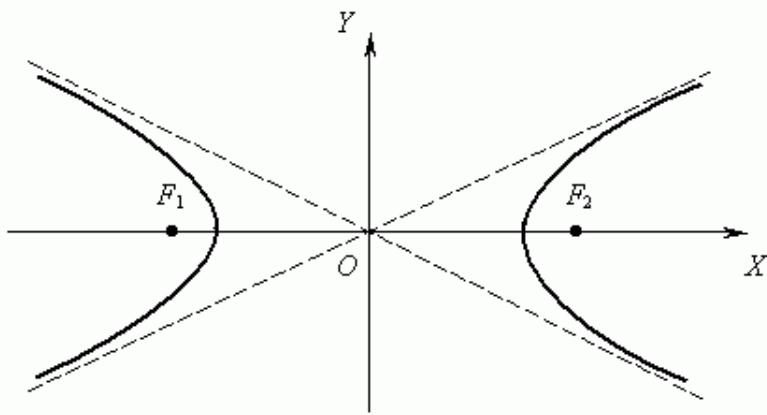


Рис. 1.3 Гипербола

Эллипс, гиперболу и параболу будем называть кониками (коническими сечениями).

Определение. Круговой конус – это объединение семейства прямых в пространстве, образующих некоторый фиксированный угол  $\alpha$  с некоторой фиксированной прямой  $l$  и проходящих через некоторую фиксированную точку  $O \in l$ .

Точка  $O$  называется вершиной конуса, прямая  $l$  называется осью конуса, а прямые, принадлежащие поверхности конуса называются его образующими.

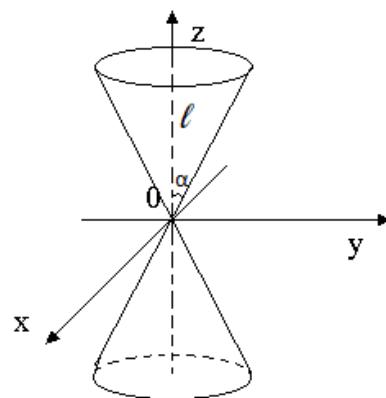


Рис. 1.4 Круговой конус

Теорема.

- 1) Любое сечение кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, является эллипсом, гиперболой или параболой.
- 2) Любую конику можно получить сечением некоторого кругового конуса с любым наперед заданным  $\alpha$ .

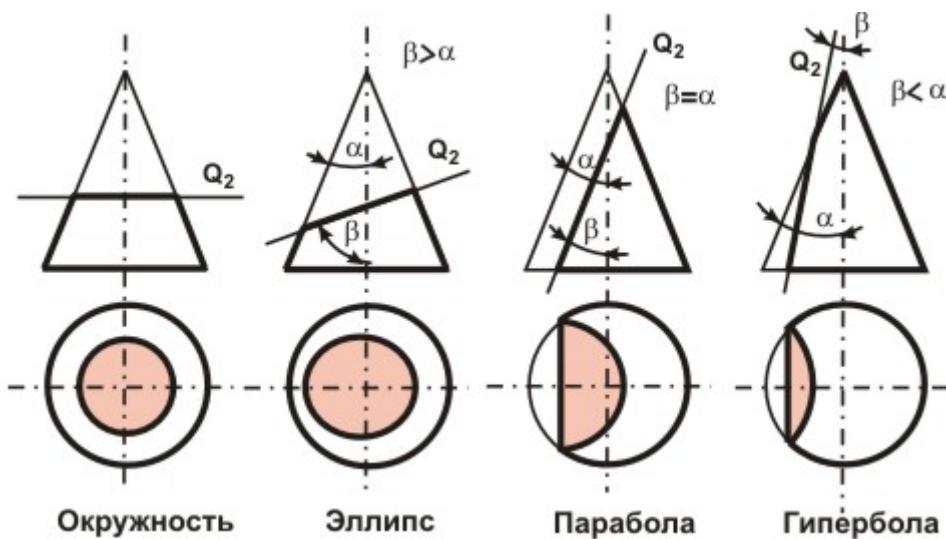


Рис. 1.5 Сечения конуса

Если конус пересекает плоскость под углом  $\beta > \alpha$ , то сечением является эллипс (окружность – частный случай эллипса  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ). Если  $\beta = \alpha$ , то сечением является парабола. При  $\beta < \alpha$  – гипербола (рис. 1.5).

Идея доказательства этой теоремы заключается в геометрическом построении с помощью сфер Данделена, касающихся плоскости сечения в точках  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 1.6). Возьмем произвольную точку  $P$ , лежащую на сечении.  $PF_1$  является касательной к меньшей сфере.  $PO$  также является касательной к сфере в точке  $P_1$ .

$$|PF_1| = |PP_1|$$

Аналогично,  $PF_2$  и  $PP_2$  являются касательными к большей сфере и

$$|PF_2| = |PP_2|$$

Поскольку точки  $P, P_1, P_2$  лежат на одной прямой, мы получаем

$$|PF_1| + |PF_2| = |PP_1| + |PP_2| = |P_1P_2| = \text{const}$$

Таким образом, все точки этого сечения будут лежать на некотором эллипсе с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ .

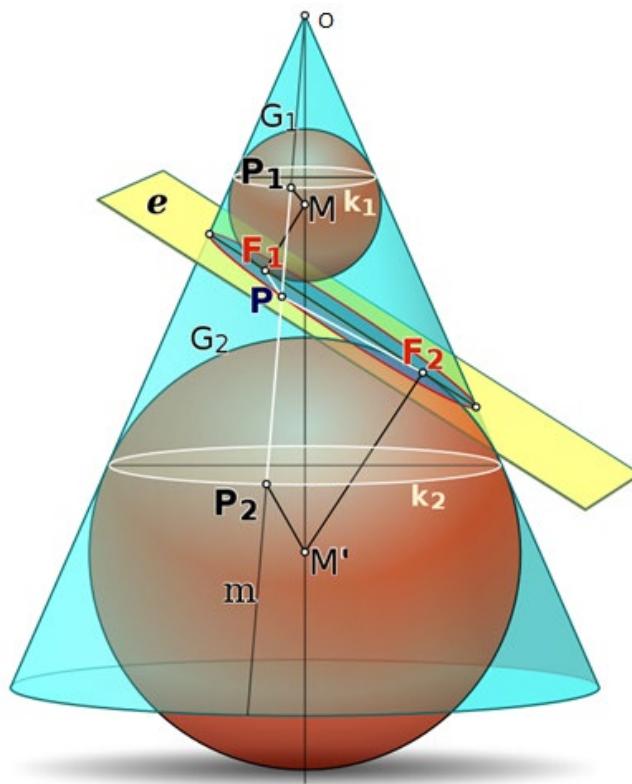


Рис. 1.6

### Оптическое свойство коник

Оптическое свойство эллипса: углы касательной с отрезками, соединяющими точку касания с фокусами, равны.

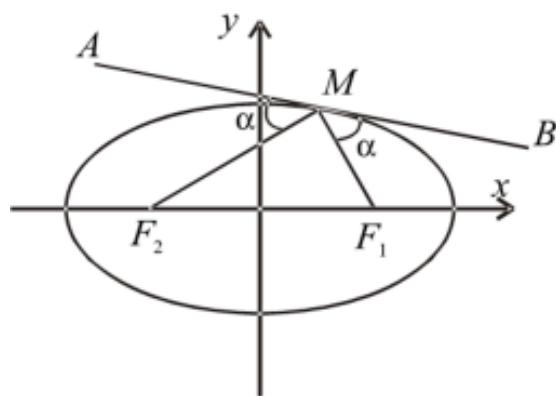


Рис. 1.7

Оптическое свойство параболы: касательная к параболе в некоторой точке  $M$  составляет равные углы с фокальным радиусом  $FM$  и с лучом, исходящим из точки  $M$  и параллельным оси параболы.

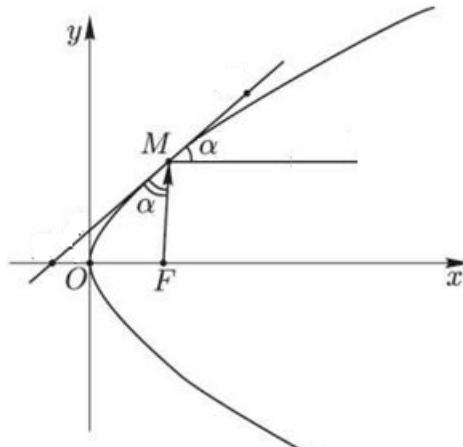


Рис. 1.8

Оптическое свойство гиперболы: касательная к гиперболе в произвольной её точке  $M$  является биссектрисой угла  $\angle F_1 M F_2$

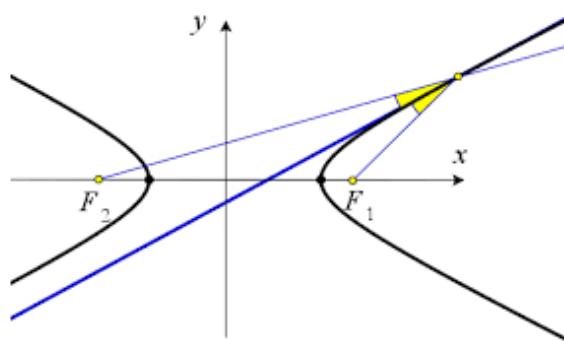


Рис. 1.9

Строгие доказательства для оптических свойств коник будут приведены позднее.

## Аналитические определения коник

Определение. Эллипс – кривая, которая задаётся в некоторой декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где  $a \geq b > 0$ .

$a$  и  $b$  – длины полуосей эллипса.

Определение. Гипербола – кривая, которая задаётся в некоторой декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где  $a$  и  $b > 0$ .

$a$  называется действительной полуосью гиперболы и  $b$  – мнимой полуосью.

Определение. Парабола – кривая, которая задаётся в некоторой декартовой системе координат уравнением

$$y^2 = 2px$$

где  $p > 0$ .

$p$  является расстоянием между директрисой и фокусом параболы.

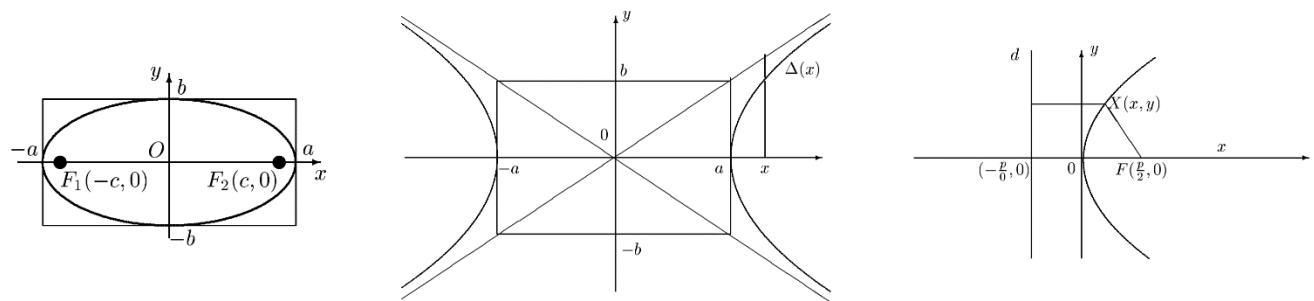


Рис. 1.10 Эллипс, гипербола и парабола

Утверждение. Аналитические и геометрические определения коник эквивалентны.

Доказательство:

Докажем это утверждение для эллипса: введем прямоугольную систему координат как показано на рис. 1.10. Тогда геометрическое определение ( $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ ) перепишется в виде

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

Возведем это уравнение в квадрат:

$$\begin{cases} (x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ 2a \geq \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \end{cases}$$

Упрощая, получим:

$$\begin{cases} a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc \\ 2a \geq \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ a^2 \geq |xc| \end{cases}$$

Возводя еще раз в квадрат, получим:

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

Откуда получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где  $b^2 := a^2 - c^2$ .

## Лекция 2. Полярные координаты. Директориальные свойства коник. Уравнение коник в обобщенных полярных координатах

### Аналитические определения коник (продолжение)

Докажем утверждение о том, что аналитическое и геометрическое определения для параболы эквивалентны.

Выберем систему координат как показано на рисунке 2.1.

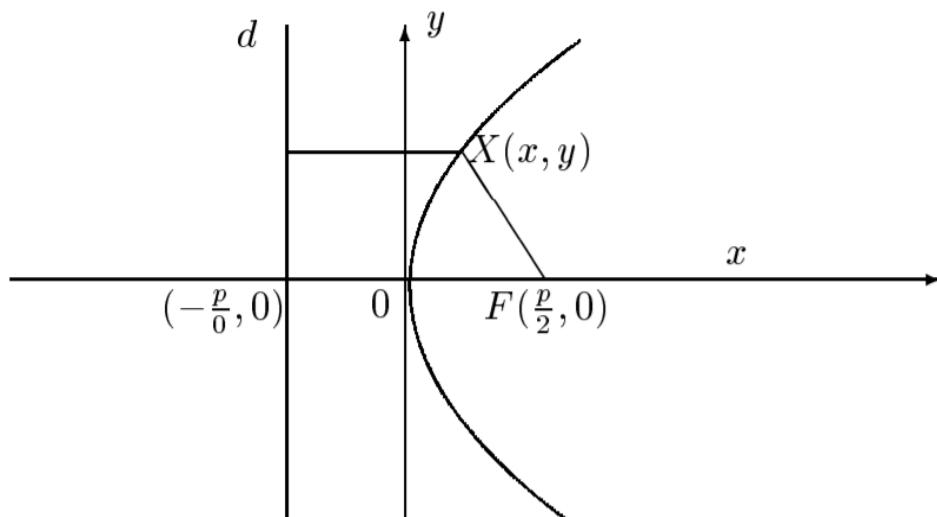


Рис. 2.1

Тогда соотношение из геометрического определения параболы примет вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Получаем:

$$y^2 = 2px$$

Теперь докажем утверждение об эквивалентности геометрического и аналитического определения для гиперболы.

Уравнения для асимптот гиперболы (они же являются диагоналями для основного прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$  (см. рис. 2.2)):

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

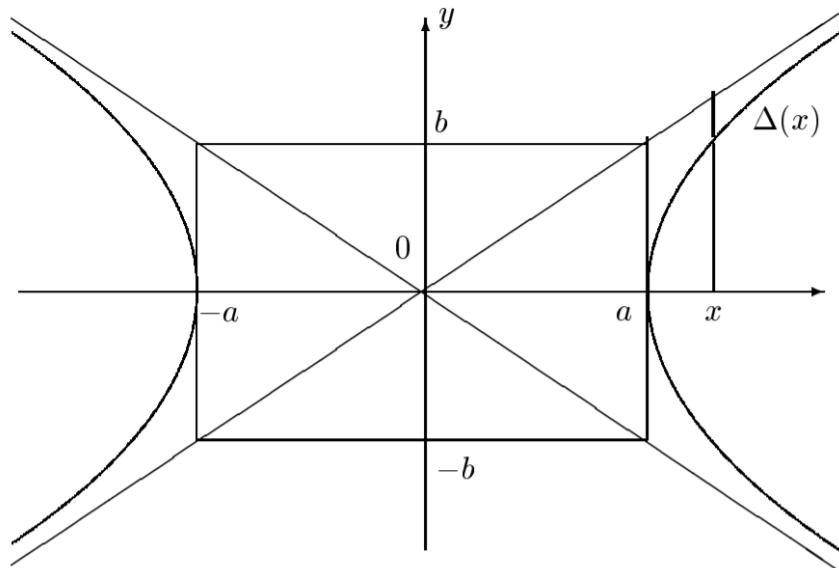


Рис. 2.2

Докажем это, например для  $y = \frac{b}{a} x$ . Имеем (см. рис. 2.2)

$$\Delta(x) = \frac{b}{a} x - b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

Определение. Система координат, которая фигурирует в аналитическом определении для коник называется канонической.

Такая система координат для эллипса, параболы и гиперболы не единственна.

## Полярные координаты

Определение. Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется полярным углом  $\varphi$  и полярным радиусом  $\rho$ .

Заметим, что угол  $\varphi$  определён с точностью до  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

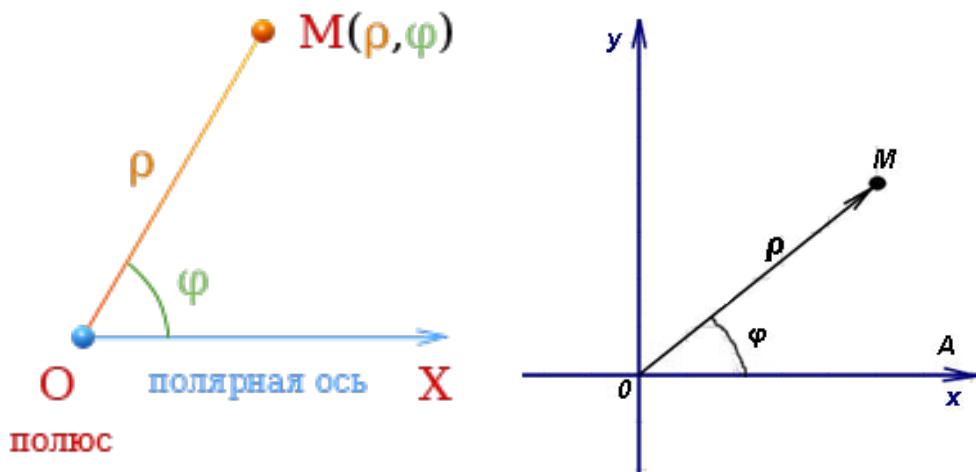


Рис. 2.3 Полярная система координат и связанная с ней декартовая система координат

Свяжем полярную систему координат с декартовой. Для этого полярную ось обозначим за ось  $x$ , а повернутую относительно неё на угол  $\frac{\pi}{2}$  – за ось  $y$ . Тогда  $x$  и  $y$  можно выразить через  $\varphi$  и  $\rho$ :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Задача. Данна точка  $M(x_0, y_0)$ . Мы хотим повернуть точку  $M$  вокруг начала декартовых координат на некоторый угол  $\alpha$  и таким образом получить точку  $M'$ . Найти координаты точки  $M'$ .

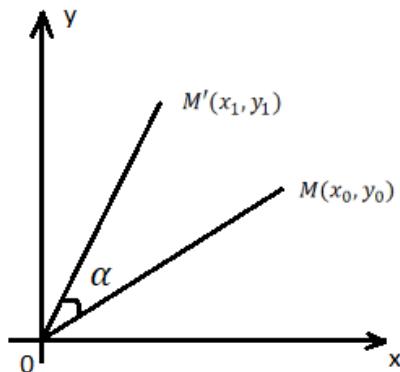


Рис. 2.4

Обозначим декартовые и полярные координаты для точек  $M$  и  $M'$  как в таблице:

	$x, y$	$\rho, \varphi$
$M$	$x_0, y_0$	$\rho_0, \varphi_0$
$M'$	$x_1, y_1$	$\rho_0, \varphi_0 + \alpha$

Тогда

$$x_1 = \rho_0 \cos(\varphi_0 + \alpha) = \rho_0 \cos \varphi_0 \cos \alpha - \rho_0 \sin \varphi_0 \sin \alpha = x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha$$

Аналогично

$$y_1 = \rho_0 \sin(\varphi_0 + \alpha) = x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha$$

Получаем

$$x_1 = x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha$$

$$y_1 = x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha$$

Операцию поворота можно описать следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Задача. Данна точка  $M(x_0, y_0)$ . Мы хотим отразить эту точку относительно прямой, образующей угол  $\beta$  с осью  $Ox$ , и получить точку  $M'$ . Найти координаты точки  $M'$ .

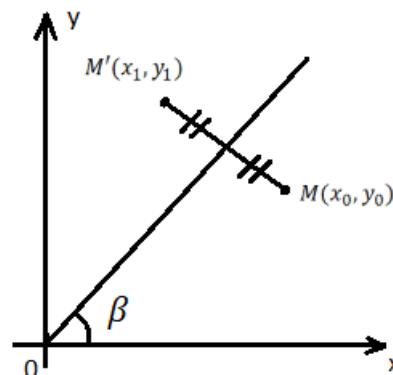


Рис. 2.5

Обозначим декартовые и полярные координаты для точек  $M$  и  $M'$  как в таблице:

	$x, y$	$\rho, \varphi$
$M$	$x_0, y_0$	$\rho_0, \varphi_0$
$M'$	$x_1, y_1$	$\rho_0, 2\beta - \varphi_0$

Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_0 \cos(2\beta - \varphi_0) = \rho_0 \cos 2\beta \cos \varphi_0 + \rho_0 \sin 2\beta \sin \varphi_0 \\ x_1 &= x_0 \cos 2\beta + y_0 \sin 2\beta \end{aligned}$$

Аналогично

$$y_1 = \rho_0 \sin(2\beta - \varphi_0) = \rho_0 \sin 2\beta \cos \varphi_0 - \rho_0 \cos 2\beta \sin \varphi_0$$

$$y_1 = x_0 \sin 2\beta - y_0 \cos 2\beta$$

Такой операции будет соответствовать матрица отражения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Задача. Данна функция  $F(x, y) = 0$ , задающая на плоскости некоторую кривую  $\gamma$ . Мы хотим повернуть эту кривую вокруг начала координат на угол  $\alpha$ . Найти уравнение для повернутой кривой.

Ранее мы нашли матрицу поворота на угол  $\alpha$  вокруг начала координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

С помощью неё мы можем записать уравнение для кривой  $\gamma$ , повернутой вокруг начала координат:

$$F(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha) = 0$$

## Директориальные свойства коник

Теорема. Пусть  $F$  – некоторая точка,  $d$  – некоторая прямая, такая что  $F \notin d$ ,  $e$  – некоторое число,  $e > 0$ . Тогда геометрическое место точек  $M$ , таких что

$$|MF| = e|MH|$$

где  $H \in d$ ,  $MH \perp d$ , является

- 1) эллипсом, при  $e < 1$
- 2) параболой, при  $e = 1$
- 3) гиперболой, при  $e > 1$

Так можно получить любую конику, кроме окружности.

Во всех трёх случаях  $F$  является фокусом.

Доказательство:

Поместим фокус в начало системы отсчёта, а прямую  $d$  расположим параллельно оси ординат на расстоянии  $S$ .

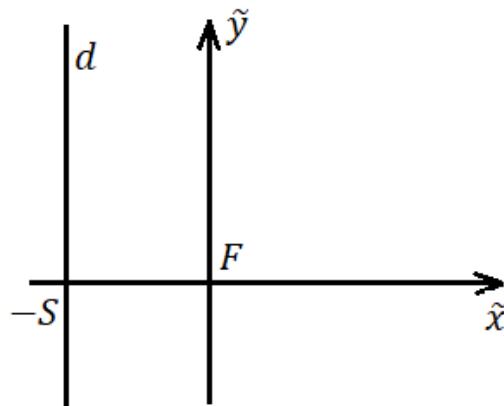


Рис. 2.6

При  $e = 1$ , очевидно, что коника является параболой.

Рассмотрим случай, когда  $e \neq 1$ .

$$|MF| = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = e|\tilde{x} + s|$$

Возведём в квадрат:

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = e^2 \tilde{x}^2 + 2e^2 s \tilde{x} + e^2 s^2$$

$$(1 - e^2) \tilde{x}^2 - 2e^2 s \tilde{x} + \tilde{y}^2 = e^2 s^2$$

$$(1 - e^2) \left( \tilde{x} - \frac{e^2 s}{1 - e^2} \right)^2 + \tilde{y}^2 = e^2 s^2 + \frac{e^4 s^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 s^2}{1 - e^2}$$

Сделаем следующую замену координат:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} - \frac{e^2 s}{1 - e^2} \\ y = \tilde{y} \end{cases}$$

Получим уравнение:

$$\frac{(1 - e^2)^2}{e^2 s^2} x^2 + \frac{(1 - e^2)}{e^2 s^2} y^2 = 1$$

При  $e < 1$ , получим уравнение эллипса, при  $e > 1$ , получим уравнение гиперболы.

Рассмотрим случай, когда  $e < 1$ .

$$a = \frac{es}{1 - e^2}$$

$$b = \frac{es}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e^2 s}{1 - e^2}$$

Обозначим  $p = es$ .  $p$  называется фокальным параметром.

Геометрический смысл фокального параметра: фокальный параметр, это половина длины хорды, проходящей через фокус и параллельной директрисе коники.

Выпишем полный набор формул, связывающий все величины, которые у нас появляются:

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

Число  $e$  называется эксцентриситетом. Для окружности  $e = 0$ .

На рис. 2.7 показано расположение директрис эллипса.

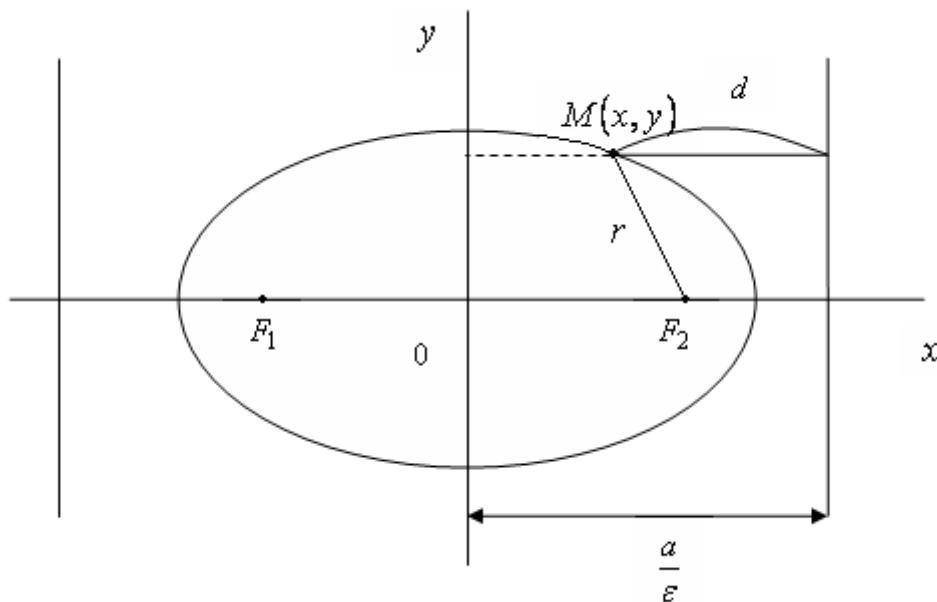


Рис. 2.7

При  $e > 1$ , имеем гиперболу (рис. 2.8).

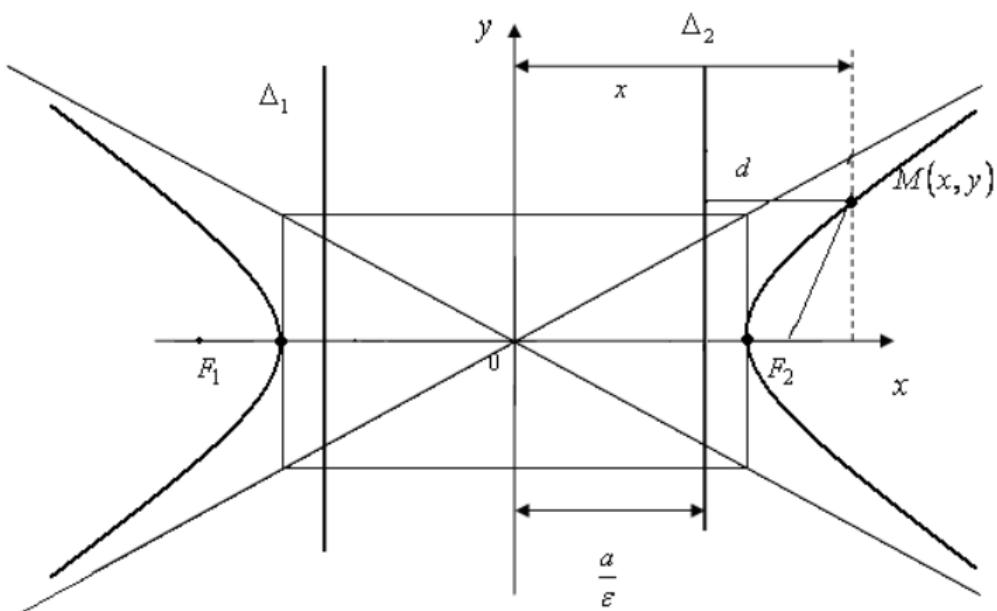


Рис. 2.8

Соотношения для гиперболы:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

## Уравнение коник в обобщённых полярных координатах

Зададим уравнение коник в полярных координатах:

$$|MF| = e|MH|,$$

где  $MH \perp d, H \in d$ .

Будем работать в системе координат, показанной на рис. 16. Подставим вместо декартовых координат их выражения через полярные.

$$\rho = e|\rho \cos \varphi + s|$$

$$\pm \rho = e\rho \cos \varphi + p$$

Таким образом,

$$\rho = \frac{p}{\pm 1 - e \cos \varphi}$$

Вспомним связь между полярными и декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

В обобщённой полярной системе координат одну и ту же точку можно задать как координатами  $(\rho, \varphi)$ , так и координатами  $(-\rho, \varphi + \pi)$ .

В обобщённой полярной системе координат уравнение

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

задаёт ту же кривую, что и уравнение

$$\rho = \frac{p}{-1 - e \cos \varphi}$$

Таким образом, в обобщённых полярных координатах все коники можно задать уравнением вида

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

## Лекция 3. Аффинные системы координат и скалярное произведение

### Аффинные системы координат

Определение. Набор векторов  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  плоскости или пространства называется линейно зависимым, если существует набор вещественных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , таких что

- 1)  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$
- 2)  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = 0$

Пусть  $k$  – это число векторов в наборе линейно зависимых векторов. Тогда

При  $k = 1$ :  $\vec{v}_1 = 0$

При  $k = 2$  и  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq 0$ :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = 0$$

Такие векторы называются коллинеарными.

При  $k = 3$  и  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \neq 0$ :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = 0$$

Такие векторы называются компланарными.

Определение. Базис на прямой, плоскости или в пространстве – максимальный линейно независимый набор  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ .

Определение. Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  – базис, а  $\vec{v}$  – произвольный вектор. Координатами вектора  $\vec{v}$  в этом базисе называются числа  $v_1, \dots, v_k$ , такие что

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_k \vec{e}_k$$

Утверждение. Определение корректно.

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{v}$  линейно зависимы. Значит  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_k \vec{e}_k + \mu \vec{v} = 0, \mu \neq 0$ . Тогда  $v_i = -\frac{\lambda_i}{\mu}$ .

Однозначно ли определены координаты вектора  $\vec{v}$ ?

Предположим, что

$$v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_k \vec{e}_k = v_1' \vec{e}_1 + \dots + v_k' \vec{e}_k$$

Тогда

$$(v_1 - v_1') \vec{e}_1 + \dots + (v_k - v_k') \vec{e}_k = 0$$

Это равенство может быть верным только в случае, когда  $v_i = v_i'$ . Следовательно, координаты определены однозначно.

Пусть координаты вектора  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$ , а координаты вектора  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$ . Тогда координаты их суммы  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_k + v_k)$ .

Определение. Репер – это набор из одной точки и нескольких векторов, которые образуют базис:  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ . Точка  $O$  называется началом отсчёта.

Аффинная система координат:

$M \leftrightarrow (x_1, \dots, x_k)$  – координаты вектора  $\overrightarrow{OM}$  в базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ .

Определение. Пусть  $A$  и  $B$  – различные точки, а  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0,0)$ . Говорят, что точка  $M$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda: \mu$ , если

$$\mu \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

Утверждение. В любой аффинной системе координат

$$M = \frac{\mu A + \lambda B}{\lambda + \mu}$$

Доказательство:

Из определения

$$\mu(M - A) = \lambda(B - M)$$

Следовательно,

$$M = \frac{\mu A + \lambda B}{\lambda + \mu}$$

Выражение  $\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k$  имеет геометрический смысл точки, если  $\sum \lambda_i = 1$  и вектора, если  $\sum \lambda_i = 0$ .

## Скалярное произведение

Определение. Функция векторного аргумента  $f(\vec{v})$  называется линейной, если

- 1)  $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v}$  (аддитивность)
- 2)  $f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$  (однородность 1-й степени)

Определение. Скалярное произведение

$$(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \angle \vec{u} \vec{v}$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) Билинейность

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w}) \\ (\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w}) \\ (\lambda \vec{u}, \vec{v}) &= \lambda (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

2) Симметричность

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$$

3) Положительная определенность

$$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{u}) > 0$$

Аддитивность:

Очевидно, что

$$(0, \vec{u}) = (\vec{u}, 0) = 0$$

Хотим доказать, что

$$(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$$

Пусть  $\vec{u} \neq 0$

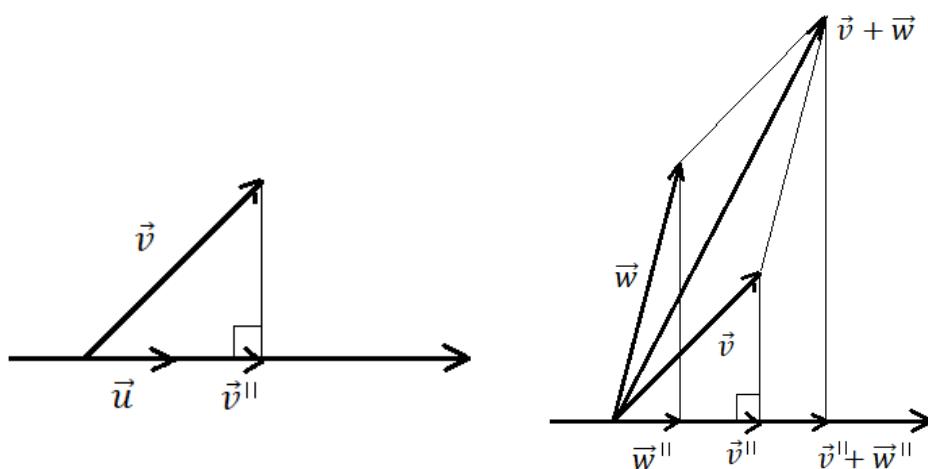


Рис. 3.1

- 1)  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}^{\parallel})$
- 2)  $(\vec{v} + \vec{w})^{\parallel} = \vec{v}^{\parallel} + \vec{w}^{\parallel}$
- 3)  $\vec{v}^{\parallel} = a\vec{u}$   
 $\vec{w}^{\parallel} = b\vec{u}$   
 $(\vec{u}, (a + b)\vec{u}) = (\vec{u}, a\vec{u}) + (\vec{u}, b\vec{u})$

Утверждение. Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  – базис,  $\vec{u}, \vec{v}$  – векторы с координатами  $(u_1, \dots, u_k)$ ,  $(v_1, \dots, v_k)$  в этом базисе. Тогда

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^k u_i v_i (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

Это утверждение следует из свойства билинейности скалярного произведения.

Определение. Базис  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  ортонормирован, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

где  $\delta_{ij}$  – это символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

В ортонормированном базисе:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 + \dots + u_k v_k$$

Отметим, что любая линейная функция – это скалярное произведение с фиксированным вектором:

$(\vec{u}, \cdot)$  – общий вид линейной функции

$$(\vec{u}, \cdot) = (\vec{u}', \cdot) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{u}'$$

## Лекция 4. Матрица Грама. Площадь и объем. Матрица перехода. Ориентация базисов Матрица Грама

Определение. Матрица Грама набора векторов  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ :

$$G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = (g_{ij})_{j,i=1,\dots,k}$$

$$g_{ij} = (\vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

Пример:

$$G(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} (\vec{v}_1, \vec{v}_1) & (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \\ (\vec{v}_2, \vec{v}_1) & (\vec{v}_2, \vec{v}_2) \end{pmatrix}$$

Через матрицу Грама можно выражать все величины, которые зависят от расстояний и углов.

Пусть

$$G = (g_{ij}) = G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Тогда

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{g_{11}}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{g_{22}}$$

$$\angle \vec{v}_1 \vec{v}_2 = \arccos \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}},$$

где  $\angle \vec{v}_1 \vec{v}_2$  – угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$

Найдём площадь параллелограмма, «натянутого» на векторы  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  (рис. 4.1).

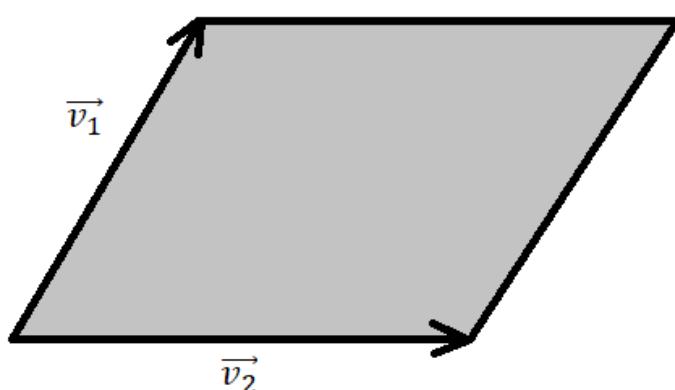


Рис. 4.1

$$S(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = |\vec{v_1}| |\vec{v_2}| \sin \angle \vec{v_1} \vec{v_2}$$

$$S(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{1 - \frac{g_{12}^2}{g_{11} g_{22}}} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{\det G}$$

Получаем, что

$$S(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \sqrt{\det G}$$

Теорема. Квадрат площади параллелограмма, «натянутого» на векторы  $\vec{v_1}, \vec{v_2}$  равен определителю матрицы Грама:

$$S^2(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \det G(\vec{v_1}, \vec{v_2})$$

Теорема. Объём параллелограмма, «натянутого» на векторы  $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$  равен корню из определителя матрицы Грама:

$$V(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \sqrt{\det G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})}$$

Напомним некоторые свойства определителя. Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

При прибавлении к столбцу другого, умноженного на число  $\lambda$ , определитель не меняется:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} + \lambda g_{11} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} + \lambda g_{21} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} + \lambda g_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

При прибавлении к строке другой строки, умноженной на число  $\lambda$ , определитель не меняется:

$$G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} + \lambda \vec{v_1}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} + \lambda g_{11} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} + \lambda g_{21} \\ g_{31} + \lambda g_{11} & g_{32} + \lambda g_{21} & g_{33} + \lambda g_{31} + \lambda(g_{31} + \lambda g_{11}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} + \lambda g_{11} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} + \lambda g_{21} \\ g_{31} + \lambda g_{11} & g_{32} + \lambda g_{21} & g_{33} + \lambda g_{31} + \lambda(g_{31} + \lambda g_{11}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} + \lambda \vec{v_1}) = \det G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$$

$$\det G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} + \mu \vec{v_2}) = \det G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$$

Рассмотрим параллелепипед, «натянутый» на векторы  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  (рис. 4.2). Проведем вектор  $\vec{h}$ , перпендикулярный плоскости, образованной векторами  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ , и имеющий длину, равную высоте параллелепипеда.

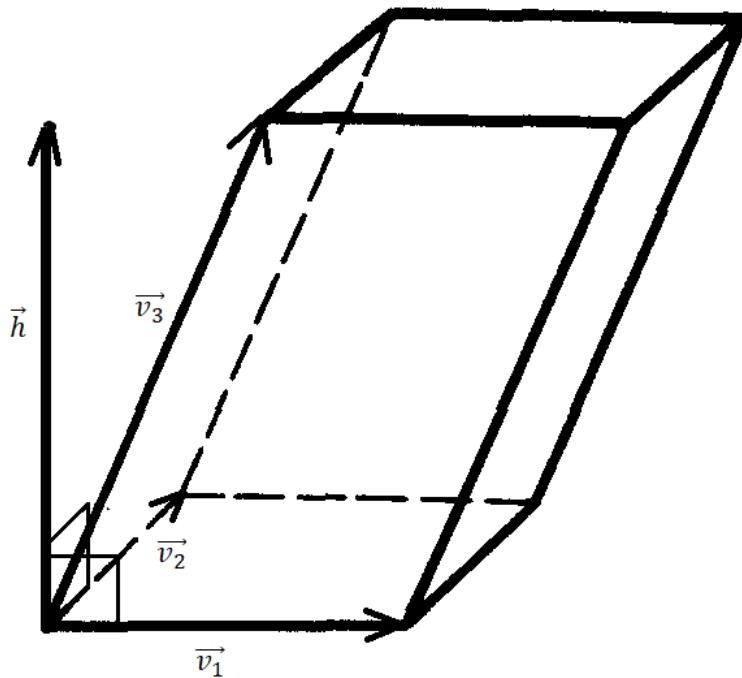


Рис. 4.2

$$\vec{h} = \vec{v}_3 + \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2$$

$$\begin{aligned} V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= |h| \sqrt{\det G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)} = \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |h|^2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\det G(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{h})} \\ &= \sqrt{\det G(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)} \end{aligned}$$

То есть объем параллелепипеда, «натянутого» на векторы  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  равен объему параллелепипеда, «натянутого» на векторы  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{h}$ .

Рассмотрим теперь векторы  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ . Представим их координатами в ортонормированном базисе:

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ki} \end{pmatrix}$$

Тогда получим матрицу

$$X = \begin{pmatrix} v_{1i} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{ki} & v_{k2} & \cdots & v_{km} \end{pmatrix}$$

Матрица Грама связана с матрицей  $X$  следующим соотношением:

$$G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = X^T X$$

## Матрица перехода от базиса к базису

Пусть даны два базиса (на прямой, плоскости или в пространстве):  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  и  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ .

Определение. Матрицей перехода от  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  к  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$  называется матрица  $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ , где  $c_{ij}$  –  $i$ -я координата вектора  $\vec{f}_j$  в базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ .

Рассмотрим случай, когда  $k = 2$ :

$$\vec{f}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$$

Тогда матрица перехода:

$$C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Пусть имеется три базиса.  $C$  – матрица перехода от первого базиса ко второму,  $D$  – матрица перехода от второго базиса к третьему. Тогда матрицей перехода от первого базиса к третьему будет матрица  $CD$ .

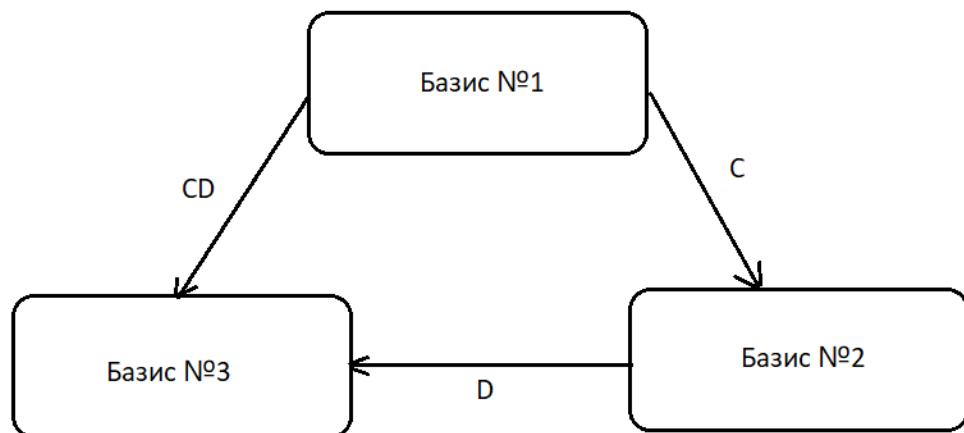


Рис. 4.3

Напомним, что вырожденная матрица, это такая матрица, у которой определитель равен нулю:

$$\det C = 0$$

Если  $\det C \neq 0$ , то существует обратная матрица  $C^{-1}$ :

$$C^{-1}C = CC^{-1} = E,$$

где  $E$  – единичная матрица.

Если  $C$  – матрица перехода от базиса №1 к базису №2, то матрицей обратного перехода (от базиса №2 к базису №1) будет  $C^{-1}$ .

Теорема. Пусть  $C$  – матрица перехода от  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  к  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ . Тогда

При  $k = 2$ :

$$|\det C| = \frac{S(\vec{f}_1, \vec{f}_2)}{S(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$$

При  $k = 3$ :

$$|\det C| = \frac{V(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)}{V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Доказательство:

Для доказательства теоремы будем использовать метод Гаусса (сведение матрицы к единичной с помощью матриц элементарных преобразований):

$$C = C_1 C_2 \dots C_N$$

$$\det C = \prod_{i=1}^N C_i$$

Любую матрицу можно представить как произведение матриц элементарных преобразований.

Пусть на главной диагонали матрицы перехода стоят единицы, за единственным исключением, когда там стоит некоторое число  $\lambda$ , а все остальные элементы равны нулю:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ \ddots & 0 & & \ddots & \\ & 1 & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \lambda & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & 0 & & \ddots \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\frac{V(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k)}{V(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)} = |\lambda|$$

$$|\det C| = |\lambda|$$

Итого,

$$|\det C| = \frac{V(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)}{V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Аналогичные рассуждения можно провести, чтобы показать, что

$$|\det C| = \frac{S(\vec{f}_1, \vec{f}_2)}{S(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$$

Определение. Два базиса одинаково ориентированы, если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен.

Определение. Два базиса противоположно ориентированы, если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму отрицателен.

Ориентация – класс эквивалентности одинаково ориентированных базисов.

## Лекция 5. Ориентированные площадь и объём. Векторное и смешанное произведения.

### Ориентированная площадь. Ориентированный объём.

На прошлой лекции было показано, что, если  $C$  – матрица перехода от базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  к базису  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ , то

$$|\det C| = \frac{V(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)}{V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Пусть фиксирована ориентация на плоскости или в пространстве.

Определение. Ориентированная площадь:

$$S_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{cases} S(\vec{e}_1, \vec{e}_2), & \text{если } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ – положительно ориентированный базис} \\ -S(\vec{e}_1, \vec{e}_2), & \text{если } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ – отрицательно ориентированный базис} \\ 0, & \text{если } S(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \end{cases}$$

Определение. Ориентированный объём:

$$V_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{cases} V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), & \text{если } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ – положит. ориентированный базис} \\ -V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), & \text{в противном случае} \\ 0, & \text{если } V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0 \end{cases}$$

Утверждение. Если  $C$  – матрица перехода от  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  к  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ , то

$$\det C = \frac{S_{or}(\vec{f}_1, \vec{f}_2)}{S_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}, k = 2$$

$$\det C = \frac{V_{or}(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)}{V_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, k = 3$$

Пример.

Пусть задан базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  и даны два вектора:

$$\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

$$\vec{v} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$$

Тогда площадь параллелограмма, «натянутого» на векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  (рис. 5.1), можно рассчитать по следующей формуле:

$$S_{or}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \cdot S_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

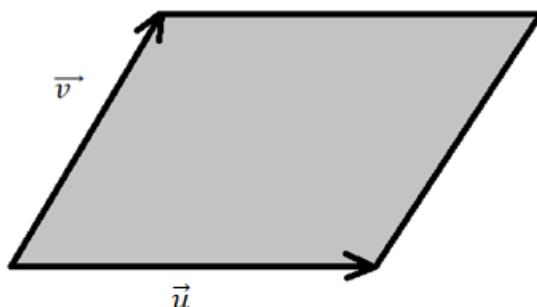


Рис. 5.1

Теорема. Свойства ориентированной площади и ориентированного объёма:

- 1)  $S_{or}$  билинейна
- $V_{or}$  трилинеен
- 2) Косая симметрия:

$$S_{or}(\vec{u}, \vec{v}) = -S_{or}(\vec{v}, \vec{u})$$

$$V_{or}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -V_{or}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -V_{or}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$$

- 3)  $S_{or}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$  линейно зависимы

$$V_{or}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$$
 линейно зависимы

Доказательство:

Косая симметрия:

Матрица перехода от  $\vec{u}, \vec{v}$  к  $\vec{v}, \vec{u}$ :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Получаем, что

$$S_{or}(\vec{u}, \vec{v}) = -S_{or}(\vec{v}, \vec{u})$$

Линейность:

Матрица перехода от  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  к  $\lambda \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\det C = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda,$$

откуда следует однородность, т. е.

$$V_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \lambda V_{or}(\lambda \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

Рассмотрим

$$V_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} V_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = c$$

$$V_{or}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = const$$

Напишем общую формулу для расчёта определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Зададимся вопросом, много ли бывает функций  $f(\vec{u}, \vec{v})$ , обладающих следующими свойствами:

- 1) Косая симметрия
- 2) Билинейность

Для того, чтобы определить полилинейную функцию, достаточно знать её значения для конкретных базисных векторов. То есть для того, чтобы определить билинейную функцию  $f(\vec{u}, \vec{v})$ , нужно знать:  $f(\vec{e}_1, \vec{e}_1), f(\vec{e}_1, \vec{e}_2), f(\vec{e}_2, \vec{e}_1), f(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$ .

Для кососимметричных функций:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = -f(\vec{v}, \vec{u})$$

То есть:

$$f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = -f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0$$

$$f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = -f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0$$

Поэтому для того, чтобы определить кососимметричную функцию  $f(\vec{u}, \vec{v})$  на плоскости нам достаточно знать одно значение этой функции:  $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

## Непрерывная деформируемость одинаково ориентированных базисов

**Теорема.** Два базиса одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда первый можно непрерывно деформировать во второй.

Расшифруем, что значит «непрерывно деформировать» один базис во второй. Пусть даны два базиса:  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  и  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ .

Непрерывная деформация:

$$\exists \vec{a}_1(t), \dots, \vec{a}_k(t) \text{ — непрерывно зависят от } t \in [0,1]$$

$\vec{a}_i(t)$  должны удовлетворять двум требованиям:

- 1) В начальный момент времени, эти векторы совпадают с элементами первого базиса:

$$\vec{a}_i(0) = \vec{e}_i, i \in 0, \dots, k$$

А в конечный момент времени, они совпадают с элементами второго базиса:

$$\vec{a}_i(1) = \vec{f}_i, i \in 0, \dots, k$$

- 2)  $\forall t \vec{a}_1(t), \dots, \vec{a}_k(t)$  — базис

Доказательство:

Докажем сначала, что если базисы непрерывно деформировать, то они будут одинаково ориентированы.

Пусть  $C$  — матрица перехода от  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  к  $\vec{a}_1(t), \dots, \vec{a}_k(t)$ . Найдем её определитель  $\det C$ . Из того, что

$$\det C(0) > 0$$

$$\det C(t) \neq 0 \forall t$$

Следует:

$$\det C(t) > 0 \forall t$$

Теперь докажем в обратную сторону. Мы знаем, что  $\det C(t) > 0 \forall t$ . Нам нужно доказать, что существует  $C(t)$ , непрерывно зависящая от  $t$  и такая, что

$$C(0) = E$$

$$C(1) = C$$

Для этого разложим  $C$  в виде произведения матриц элементарных преобразований:

$$C = C_1 C_2 \dots C_N$$

Но мы можем использовать не любые матрицы элементарных преобразований, а только матрицы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \mu & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & & 0 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & 0 & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & & & 1 \end{pmatrix}, \mu > 0$$

Нужно деформировать матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  в  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , что делается с помощью следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

Примеры:

- 1) Пусть дана матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и мы хотим её деформировать в  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Это можно сделать с помощью матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 2) Матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

можно деформировать в матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \mu & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & & 0 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & 0 & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & & & 1 \end{pmatrix}$$

с помощью следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \mu^t & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & & 0 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & 0 & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & & & 1 \end{pmatrix}$$

## Векторное и смешанное произведения

Фиксируем ориентацию в пространстве.

Определение. Векторное произведение – это операция, которая двум векторам  $\vec{u}, \vec{v}$  в трёхмерном пространстве сопоставляет вектор  $[\vec{u}, \vec{v}]$  в трёхмерном пространстве по следующему правилу:

- 1)  $|[\vec{u}, \vec{v}]| = S(\vec{u}, \vec{v})$
- 2)  $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{u}, \vec{v}$
- 3) Если  $S(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ , то  $\vec{u}, \vec{v}, [\vec{u}, \vec{v}]$  образуют положительно ориентированный базис.

Определение. Смешанное произведение:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ([\vec{u}, \vec{v}], \vec{w})$$
$$([\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}) = S(\vec{u}, \vec{v}) |\vec{w}| \cos \angle [\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}$$

Утверждение. Смешанное произведение есть ориентированный объём:

$$([\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}) = V_{or}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Теорема. Свойства векторного произведения:

- 1) Билинейность
- 2) Косая симметрия (антисимметричность):  
 $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$
- 3)  $[\vec{u}, \vec{v}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$  коллинеарны
- 4) Тождество Якоби:

$$[[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}] + [[\vec{v}, \vec{w}], \vec{u}] + [[\vec{w}, \vec{u}], \vec{v}] = 0$$

Доказательство:

- 1) Нам нужно проверить равенство  
 $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{v}, \vec{w}]$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$([\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}], *) \equiv ([\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{v}, \vec{w}], *) = ([\vec{u}, \vec{v}], *) + ([\vec{v}, \vec{w}], *)$$
$$V_{or}(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, *) \equiv V_{or}(\vec{u}, \vec{w}, *) + V_{or}(\vec{v}, \vec{w}, *)$$

## Формула для векторного произведения в прямоугольной положительно ориентированной системе координат

Пусть

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Доказательство:

Возьмём вектор

$$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$$

$$V_{or}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (\vec{w}, [\vec{u}, \vec{v}])$$

## Представление вектора в виде кососимметричной матрицы

$$\left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Будем записывать вектор в виде кососимметричной матрицы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда векторное произведение:

$$[A, B] = AB - BA$$

## Лекция 6. Поворот вокруг вектора в пространстве.

### Двойственный базис

### Скалярное, смешанное и векторное произведения через кососимметрические матрицы

Пусть  $A$  – квадратная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Следом матрицы  $A$  называется сумма её диагональных элементов:

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Пусть даны две матрицы:  $A$  размером  $m \times n$  и  $B$  размером  $m \times n$ . Тогда

$$\text{tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij}b_{ji}$$

То есть  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Рассмотрим след произведения двух кососимметрических матриц:

$$\text{tr} \left( \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{pmatrix} \right) = -2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

Получаем выражение для скалярного произведения:

$$(A, B) = -\frac{1}{2} \text{tr}(AB)$$

Теперь рассмотрим след произведения:

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ABC)^T = \text{tr}(C^T B^T A^T) = -\text{tr}(CBA)$$

Получаем:

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA)$$

$$V_{or}(A, B, C) = -\text{tr}(ABC)$$

Смешанное произведение:

$$(A, B, C) = -\frac{1}{2} \text{tr}(ABC - BAC) = -\frac{1}{2} \text{tr}((AB - BA)C) = (AB - BA, C)$$

Здесь мы воспользовались свойством кососимметрических матриц:

$$(AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB$$

Таким образом, мы установили следующие факты для кососимметрических матриц:

$$(A, B) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB)$$

$$V_{or}(A, B, C) = -\operatorname{tr}(ABC)$$

$$[A, B] = AB - BA$$

## Ортогональная проекция вектора на вектор

Выведем формулу для поворота вокруг вектора в пространстве.

Рассмотрим векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{u}$  (рис. 6.1).

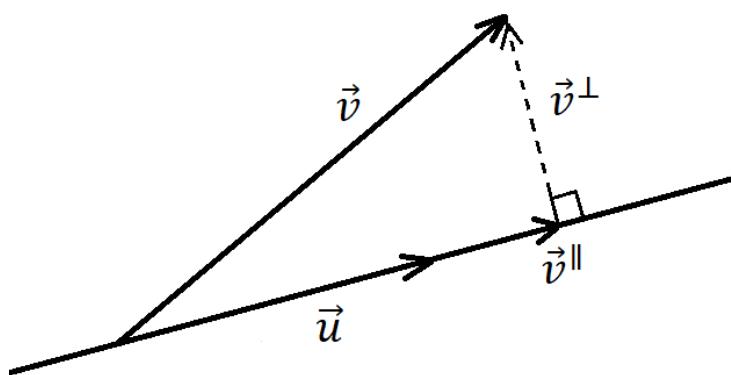


Рис. 6.1

Утверждение. Из свойств скалярного произведения следует

$$\vec{v}^{\parallel} = \frac{(\vec{v}, \vec{u})}{(\vec{u}, \vec{u})} \vec{u}$$

Доказательство:

$$\vec{v}^{\parallel} = \lambda \vec{u}$$

$$(\vec{v} - \vec{v}^{\parallel}, \vec{u}) = 0$$

$$\lambda = \frac{(\vec{v}, \vec{u})}{(\vec{u}, \vec{u})}$$

Зафиксируем ортонормированный базис и рассмотрим векторы:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^T \vec{v}$$

$$(\vec{v}, \vec{u}) \vec{u} = \vec{u} \vec{u}^T \vec{v}$$

Тогда

$$\vec{v}^{\parallel} = \frac{1}{(\vec{u}, \vec{u})} \vec{u} \vec{u}^T \vec{v}$$

$$\frac{1}{(\vec{u}, \vec{u})} \vec{u} \vec{u}^T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

То есть

$$\vec{v}^{\parallel} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \vec{v}$$

### Поворот вокруг вектора в пространстве

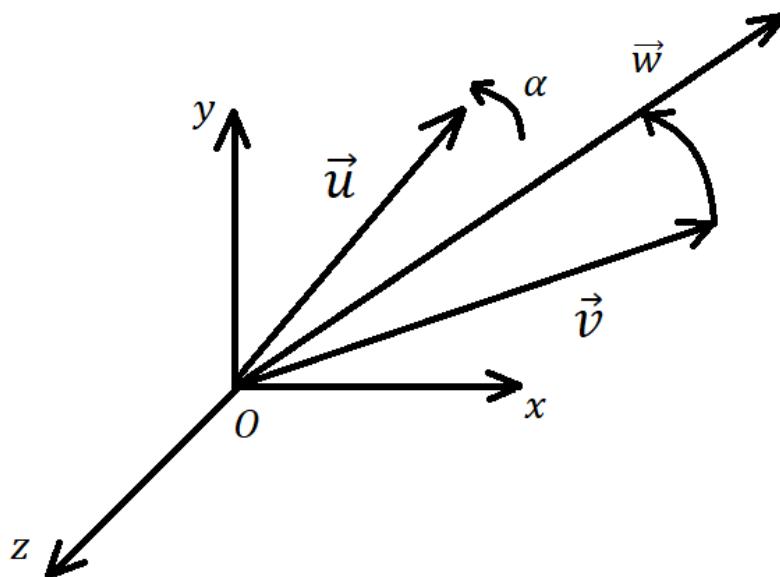


Рис. 6.2

Запишем векторы как:

$$\vec{v} = \vec{v}^{\parallel} + \vec{v}^{\perp}$$

$$\vec{w} = \vec{w}^{\parallel} + \vec{w}^{\perp}$$

$$\vec{v}^{\parallel} = \vec{w}^{\parallel}$$

$\vec{w}^\perp$  получается из  $\vec{v}^\perp$  поворотом на  $\alpha$  вокруг  $\vec{u}$  (рис. 6.4).

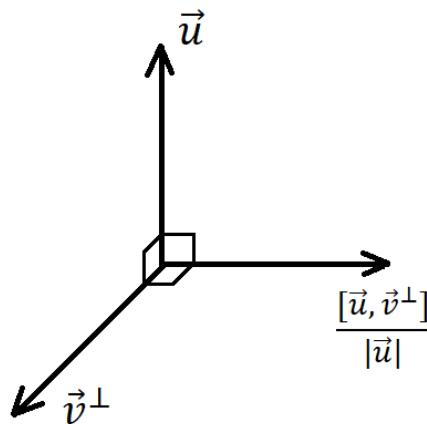


Рис. 6.3

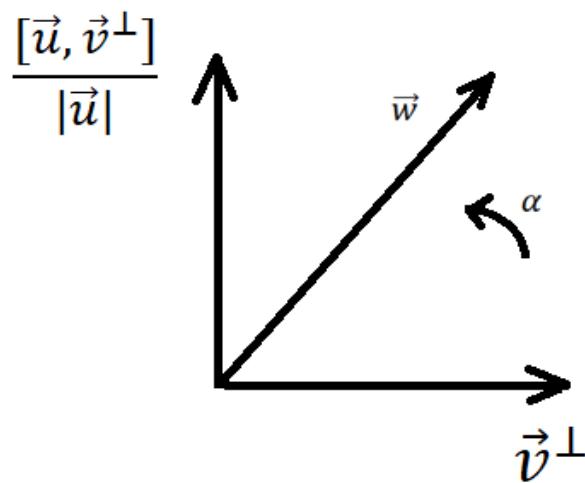


Рис. 6.4

$$\vec{w}^\perp = \cos \alpha \vec{v}^\perp + \frac{\sin \alpha}{|\vec{u}|} [\vec{u}, \vec{v}]$$

$$\vec{w} = \frac{(\vec{v}, \vec{u})}{(\vec{u}, \vec{u})} \vec{u} + \cos \alpha \left( \vec{v} - \frac{(\vec{v}, \vec{u})}{(\vec{u}, \vec{u})} \vec{u} \right) + \frac{\sin \alpha}{|\vec{u}|} [\vec{u}, \vec{v}]$$

Пусть  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\vec{w} = \left( \frac{(1 - \cos \alpha)}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \right) \vec{v}$$

## Двойственный базис

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  – базис.

Определение. Двойственный (дуальный) к  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  базис -  $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^k$ :

$$(\vec{e}^i, \vec{e}_j) = \delta_j^i$$

При  $k = 3$ :

$$\vec{e}^1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

$$\vec{e}^2 \perp \vec{e}_1, \vec{e}_3$$

$$\vec{e}^3 \perp \vec{e}_1, \vec{e}_2$$

$$(e^1, e_1) = 1$$

$$(e^2, e_2) = 1$$

$$(e^3, e_3) = 1$$

Утверждение. Двойственный базис всегда существует и притом единственный.

Может ли быть такое, что  $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^k$  линейно зависимы?

Пусть

$$\lambda_1 \vec{e}^1 + \dots + \lambda_k \vec{e}^k = 0$$

Тогда

$$(\lambda_1 \vec{e}^1 + \dots + \lambda_k \vec{e}^k, \vec{e}_l) = 0$$

$$(\lambda_1 \vec{e}^1 + \dots + \lambda_k \vec{e}^k, \vec{e}_l) = \lambda_l \quad \forall i$$

Следовательно эти векторы линейно независимы.

Теорема.  $G(\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^k) = (G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k))^{-1}$

Доказательство:

Введём матрицу

$$X = ((e_1) \dots (e_k))$$

$$Y = ((e^1) \dots (e^k))$$

Тогда матрицы Грама:

$$G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) = X^T X$$

$$G(\overrightarrow{e^1}, \dots, \overrightarrow{e^k}) = Y^T Y$$

$$Y^T X = E$$

$$Y = (X^{-1})^T$$

$$G(\overrightarrow{e^1}, \dots, \overrightarrow{e^k}) = Y^T Y$$

$$Y^T Y = X^{-1} (X^{-1})^T = (X^T X)^{-1}$$

$$(X^T X)^{-1} = (G(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}))^{-1}$$

Итого, мы получили:

$$G(\overrightarrow{e^1}, \dots, \overrightarrow{e^k}) = (G(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}))^{-1}$$

При  $k = 3$ :

$$\vec{e}^1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

$$(\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e_1}) = 1$$

$$\overrightarrow{e^1} = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

$$\overrightarrow{e^2} = \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

$$\overrightarrow{e^3} = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Пример.

$$(\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^1}) = \frac{([\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_2, \vec{e}_3])}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2}$$

$$\frac{([\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_2, \vec{e}_3])}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2} = \frac{\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{23} & g_{33} \end{vmatrix}}{\det G}$$

$$([\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_2, \vec{e}_3]) = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \end{vmatrix}$$

$$(\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}) = \frac{([\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_3, \vec{e}_1])}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2}$$

$$\frac{([\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_3, \vec{e}_1])}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2} = \frac{- \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}{\det G}$$

$$([\vec{e}_1, \vec{e}_3], [\vec{e}_2, \vec{e}_3]) = \begin{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{vmatrix}$$

Утверждение.  $([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{a}, \vec{d}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{d}) \end{vmatrix}$

Эта формула верна, когда  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \Rightarrow$  формула верна всегда.

## Лекция 7. Сферическая геометрия

### Многоугольник на сфере, его углы и длины сторон

Уравнение, которым задаётся сфера в прямоугольной системе координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

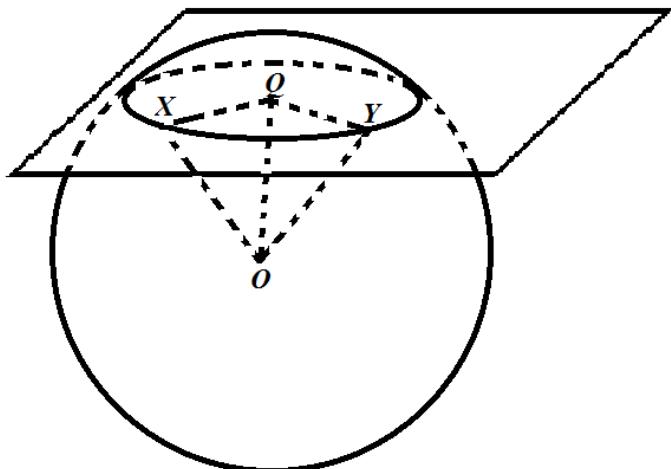


Рис. 7.1 XY – прямая на сфере

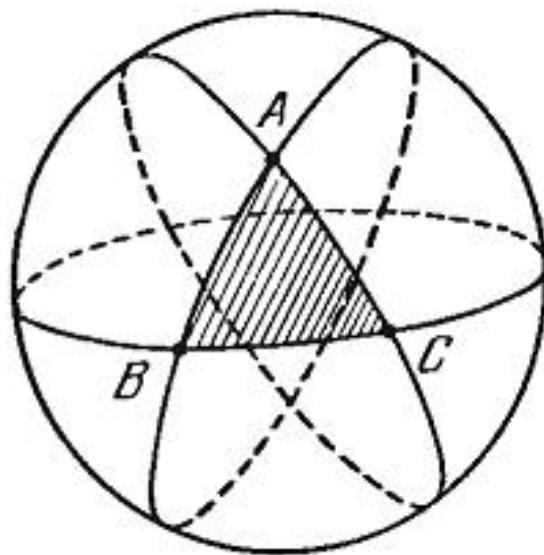


Рис. 7.2 Многоугольник на сфере

Сторона сферического треугольника измеряется величиной опирающегося на неё центрального угла.

Угол между сторонами сферического многоугольника – это угол между касательными к окружностям, образующим этот многоугольник.

## Теоремы синусов и косинусов на сфере

Теорема синусов. Для треугольника на сфере (рис. 7.3) справедливо:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

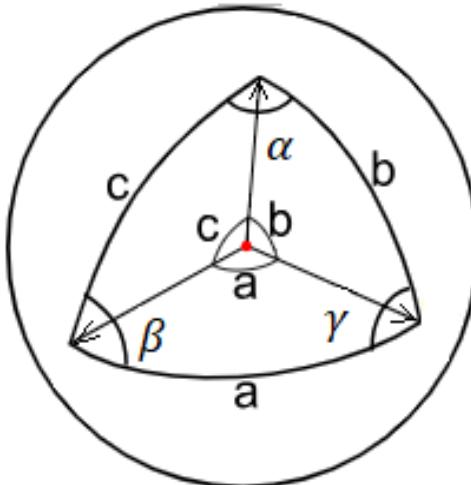


Рис. 7.3 (К теореме синусов и косинусов)

Теорема косинусов. Для треугольника на сфере справедливо:

$$\cos \gamma \sin a \sin b = \cos c - \cos a \cos b$$

$$\cos c \sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta$$

Доказательство теоремы синусов:

Обозначим векторы, идущие из центра сферы к вершинам треугольника  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (см. рис. 7.4).

Матрица Грама этих векторов:

$$G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  – векторы, перпендикулярные к сторонам  $a, b, c$  соответственно и  $|\vec{f}_i| = 1$ .

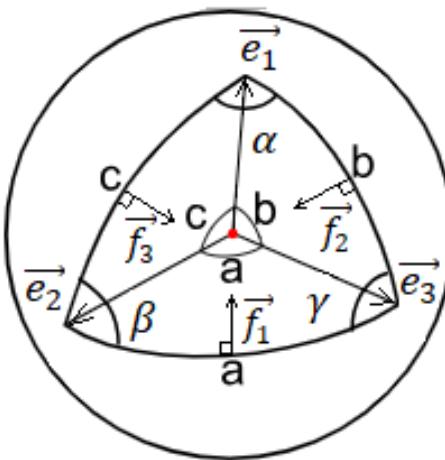


Рис. 7.4

Тогда матрица Грамма для векторов  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ :

$$G(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = 0 \text{ при } i \neq j$$

Ведем ориентацию:

$$\vec{f}_1 = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{\sin \alpha}$$

$$\vec{f}_2 = \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{\sin b}$$

$$\vec{f}_3 = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{\sin c}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{f}_2, \vec{f}_3]}{\sin \alpha}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{[\vec{f}_3, \vec{f}_1]}{\sin \beta}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{[\vec{f}_1, \vec{f}_2]}{\sin \gamma}$$

Тогда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{|[\vec{f}_2, \vec{f}_3]|}{\sin a} = \frac{|[[\vec{e}_3, \vec{e}_1], [\vec{e}_1, \vec{e}_2]]|}{\sin a \sin b \sin c}$$

Напомним формулу из прошлой лекции:

$$([\vec{u}, \vec{v}], [\vec{w}, \vec{z}]) = \begin{vmatrix} (\vec{u}, \vec{w}) & (\vec{u}, \vec{z}) \\ (\vec{v}, \vec{w}) & (\vec{v}, \vec{z}) \end{vmatrix}$$

$$([\vec{u}, \vec{v}], [\vec{w}, \vec{z}]) = ([\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}, \vec{z}) = ([[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}], \vec{z})$$

$$([[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}], *) = \begin{vmatrix} (\vec{u}, \vec{w}) & (\vec{u}, *) \\ (\vec{v}, \vec{w}) & (\vec{v}, *) \end{vmatrix}$$

Получаем:

$$[[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}] = (\vec{u}, \vec{w})\vec{v} - (\vec{v}, \vec{w})\vec{u}$$

Вернёмся к отношению  $\frac{\sin \alpha}{\sin a}$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{|[\vec{f}_2, \vec{f}_3]|}{\sin a} = \frac{|[[\vec{e}_3, \vec{e}_1], [\vec{e}_1, \vec{e}_2]]|}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{|(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)\vec{e}_1|}{\sin a \sin b \sin c}$$

Аналогичные выражения можно получить и для  $\frac{\sin \beta}{\sin b}, \frac{\sin \gamma}{\sin c}$ . И тогда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Доказательство для теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= -(\vec{f}_1, \vec{f}_2) \\ -(\vec{f}_1, \vec{f}_2) &= \frac{([\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_3, \vec{e}_1])}{\sin a \sin b} \\ \frac{([\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_3, \vec{e}_1])}{\sin a \sin b} &= \frac{- \begin{vmatrix} g_{23} & g_{21} \\ g_{33} & g_{31} \end{vmatrix}}{\sin a \sin b} \\ \frac{- \begin{vmatrix} g_{23} & g_{21} \\ g_{33} & g_{31} \end{vmatrix}}{\sin a \sin b} &= \frac{- \begin{vmatrix} \cos a & \cos c \\ 1 & \cos b \end{vmatrix}}{\sin a \sin b} \\ \frac{- \begin{vmatrix} \cos a & \cos c \\ 1 & \cos b \end{vmatrix}}{\sin a \sin b} &= \frac{\cos c - \cos a - \cos b}{\sin a \sin b} \end{aligned}$$

Получаем:

$$\cos \gamma \sin a \sin b = \cos c - \cos a \cos b$$

## Угловой дефект

Зададимся вопросом: чему равна сумма углов сферического треугольника? Очевидно, что она больше 180 градусов.

Рассмотрим внешние углы многоугольника на сфере (рис. 7.5).

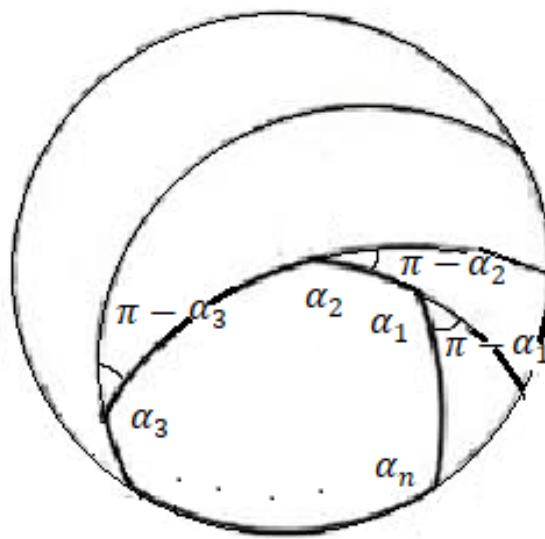


Рис. 7.5

Определение. Угловой дефект сферического  $n$ -угольника —  $D = 2\pi - \sum$  внешних углов.

Угловой дефект у треугольника:  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ .

Теорема. Угловой дефект сферического  $n$ -угольника равен его площади.

Доказательство:

Лемма. Угловой дефект аддитивен.

То есть, если нам дан многоугольник  $P$ , состоящий из нескольких многоугольников:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$$

То его угловой дефект:

$$D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n)$$

Очевидно, что любой  $n$ -угольник можно разрезать на треугольники. Поэтому достаточно доказать, что угловой дефект равен площади для треугольника. Угловой дефект для маленького треугольника ( $a, b, c \ll 1$ ):

$$D = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \gamma - (\pi - \alpha - \beta)$$

$$\gamma - (\pi - \alpha - \beta) \approx \frac{\cos \gamma - \cos(\pi - \alpha - \beta)}{-\sin \gamma}$$

Применяя теорему косинусов, получим:

$$\frac{\cos \gamma - \cos(\pi - \alpha - \beta)}{-\sin \gamma} = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{-\sin \gamma}$$

$$\frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{-\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} (1 - \cos c)$$

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} (1 - \cos c) \approx \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{c^2}{2} \approx \frac{1}{2} \sin \gamma ab$$

Мы получили

$$D \approx \frac{1}{2} \sin \gamma ab$$

То есть мы доказали, что для маленького треугольника угловой дефект равен площади. При суммировании положительных величин относительная погрешность не увеличивается. Следовательно угловой дефект для любого многоугольника на сфере равен его площади.

## Лекция 8. Прямые и плоскости

### Система линейных уравнений. Ранг

Рассмотрим вектор  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Пусть нам даны матрица  $M$  размером  $m \times n$  и столбец  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ . Системой линейных уравнений будем называть

$$M\vec{x} = \vec{b}$$

Что то же самое:

$$\begin{cases} M_{11}x_1 + \cdots + M_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ M_{m1}x_1 + \cdots + M_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система имеет решения тогда и только тогда, когда

$$rk(M) = rk(M|b)$$

Здесь  $rk(M)$  – ранг матрицы. Рангом матрицы называют максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

Если это условие выполнено, то множество решений  $= \{\vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{a}_k\}$ , где

$\vec{x}_0$  – частное решение;

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  – базис решений системы  $M\vec{a} = 0$ .

Число неизвестных равно

$$k = n - rk(M)$$

### Параметрическое задание прямой

Параметрическое задание прямой:

$$\{P + t\vec{v}\}_{t \in R}$$

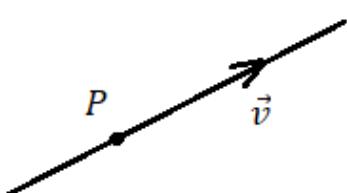


Рис. 8.1

Пусть заданы две прямые:

$$l_1: P_1 + t\vec{v_1}$$

$$l_2: P_2 + t\vec{v_2}$$

Утверждение.  $l_1 = l_2 \Leftrightarrow rk(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{P_1P_2}) = 1$

Доказательство:

Система для поиска общих точек:

$$P_1 + s\vec{v_1} = P_2 + t\vec{v_2}$$

Матрица системы имеет следующий вид:

$$(\vec{v_1} \quad -\vec{v_2} \quad \vec{P_1P_2})$$

$l_1 = l_2 \Leftrightarrow s$  – свободный параметр, а  $t = t(s)$ . Отсюда следует, что

$$rk(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{P_1P_2}) = 1$$

И так как  $rk(\vec{v_1}, \vec{v_2}) > 0$ , то

$$rk(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{P_1P_2}) = rk(\vec{v_1}, \vec{v_2})$$

## Задание прямой системой уравнений

На плоскости:

$$Ax + By + C = 0$$

$$(A, B) \neq (0, 0)$$

Пусть  $l_1$  задано параметрически:

$$l_1: (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta)$$

А  $l_2$  задано уравнением:

$$l_2: Ax + By + C = 0$$

Утверждение.

$$l_1 = l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ A\alpha + B\beta = 0 \end{cases}$$

Первое условие означает, что  $(x_0, y_0) \in l_2$ , а второе условие означает, что  $(\alpha, \beta) \parallel l_2$ .

В трёхмерном пространстве:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$$

Пусть заданы две прямые в пространстве:

$$l_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Когда  $l_1 = l_2$ ? Нужно объединить эти две системы и потребовать, чтобы каждая из них имела однопараметрическое семейство решений.

Матрица объединенных систем:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы количество свободных параметров было равно единице, нужно чтобы

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} = 2$$

Условие существования решения:

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} = 2$$

То есть равенство прямых в данном случае равносильно следующему условию:

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} = 2$$

## Параметрическое задание плоскости

Для параметрического задания плоскости в пространстве нужно выбрать точку и два направляющих вектора (рис. 8.2).

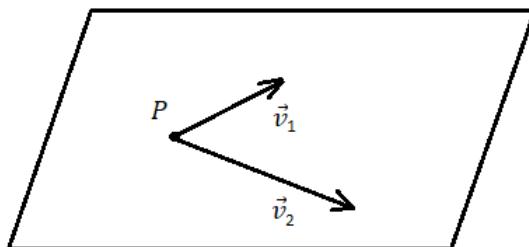


Рис. 8.2

Тогда параметрическое задание плоскости:

$$\Pi: P + s\vec{v_1} + t\vec{v_2}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Пусть заданы две плоскости:

$$\Pi: P + s\vec{v_1} + t\vec{v_2}$$

$$\Pi': P' + s'\vec{v_1'} + t'\vec{v_2'}$$

Зададимся вопросом: когда плоскости  $\Pi$  и  $\Pi'$  совпадают? Для этого приравняем их:

$$P + s\vec{v_1} + t\vec{v_2} = P' + s'\vec{v_1'} + t'\vec{v_2'}$$

Для того, чтобы плоскости совпали нужно, чтобы при решении этого уравнения осталось два свободных параметра, то есть ранг матрицы системы должен равняться двум:

$$rk(\vec{v_1} \quad \vec{v_2} \quad \vec{v_1'} \quad \vec{v_2'} \quad \vec{PP'}) = 2$$

### Задание плоскости уравнением

Задание плоскости в пространстве уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

Опять зададимся вопросом: когда две плоскости, заданные таким уравнением совпадают? Пусть даны две плоскости:

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\Pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Они совпадают тогда, когда система, составленная из этих двух уравнений, имеет двухпараметрическое семейство решений. Это значит, что

$$rk \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1$$

Заметим, что условие

$$rk \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1$$

означает то, что уравнения пропорциональны.

Пусть одна плоскость задана уравнением, а другая параметрически:

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\Pi': (x_0, y_0, z_0) + s(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + t(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

Как проверить, совпадают ли две эти плоскости? Для этого должны быть выполнены условия:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0 \\ A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Где соблюдены условия параллельности векторов  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  и  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  плоскости  $\Pi$ :

$$\begin{cases} A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0 \\ A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

А условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

эквивалентно тому, что точка  $(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ .

## Многочлены первой степени. Полуплоскости. Полупространства

Многочлен первой степени на плоскости:

$$Ax + By + C,$$

$$(A, B) \neq (0, 0)$$

Многочлен первой степени в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D,$$

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

Рассмотрим случай для плоскости (в пространстве всё будет аналогично). Пусть задан многочлен первой степени:

$$Ax + By + C$$

Прямая задается уравнением:

$$Ax + By + C = 0$$

Неравенствами задаются полуплоскости:

$$Ax + By + C \geq 0$$

$$Ax + By + C \leq 0$$

Утверждение. Вектор  $(\alpha, \beta)$  «смотрит» в положительную сторону тогда и только тогда, когда  $A\alpha + B\beta > 0$ .

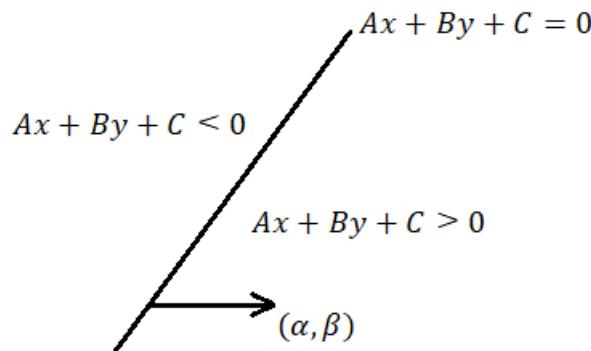


Рис. 8.3

Доказательство:

Возьмём точку  $(x_0, y_0)$ , лежащую на прямой  $Ax + By + C = 0$  и отложим от неё вектор  $(\alpha, \beta)$  (рис. 8.4). Тогда конец этого вектора будет в точке  $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$ .

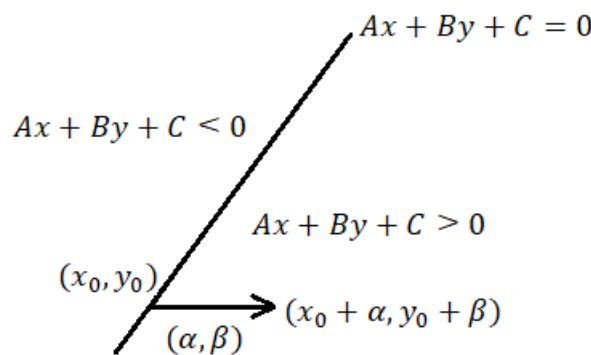


Рис. 8.4

Подставим координаты конца вектора в многочлен:

$$A(x_0 + \alpha) + B(y_0 + \beta) + C = A\alpha + B\beta$$

Получаем, что знак величины  $A\alpha + B\beta$  определяет в какую сторону будет «смотреть» вектор  $(\alpha, \beta)$ .

Заметим, что вектор  $(A, B)$  будет всегда направлен в сторону положительной полуплоскости, то есть где

$$Ax + By + C > 0.$$

Утверждение. Любой многочлен первой степени можно взять за одну из аффинных координат.

Аффинные координаты сами по себе являются многочленами первой степени:  $x$  и  $y$ . Любая их линейная комбинация также будет являться многочленом первой степени. То есть существует аффинная система координат  $x', y'$  такая, что  $x' = Ax + By + C$ .

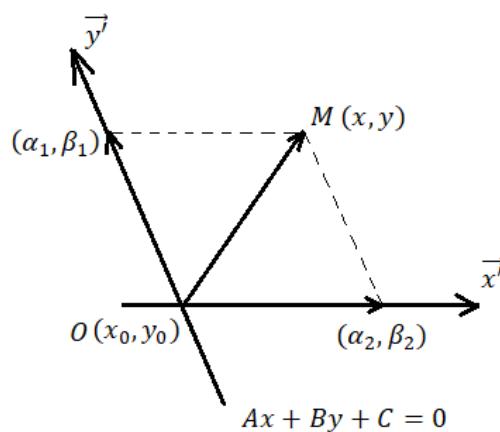


Рис. 8.5

Пусть задана прямая

$$Ax + By + C = 0.$$

Выберем произвольно точку  $O$  на этой прямой и направим из неё вектор  $\vec{y'}$  по данной прямой и вектор  $\vec{x'}$  так, чтобы он не был коллинеарен вектору  $\vec{y'}$  (рис. 8.5).

Какие координаты будут у точки  $M(x, y)$  в системе  $x', y'$ ? Мы можем записать следующее:

$$x - x_0 = x'\alpha_1 + y'\alpha_2$$

$$y - y_0 = x'\beta_1 + y'\beta_2$$

Тогда

$$Ax + By + C = A(x_0 + x'\alpha_1 + y'\alpha_2) + B(y_0 + x'\beta_1 + y'\beta_2) + C$$

$$A(x_0 + x'\alpha_1 + y'\alpha_2) + B(y_0 + x'\beta_1 + y'\beta_2) + C = x'(A\alpha_1 + B\beta_1) + y'(A\alpha_2 + B\beta_2)$$

$$A\alpha_2 + B\beta_2 = 0$$

Получаем, что

$$Ax + By + C = x'\lambda,$$

Где  $\lambda = A\alpha_1 + B\beta_1$

«Растягивая»  $x'$ , мы можем сделать так, чтобы  $\lambda = 1$ .

Утверждение. Пусть  $l: f(x, y) = 0, \deg f = 1, \{A, B\} \notin l$ . Тогда  $AB \cap l$  делит  $AB$  в отношении  $f(A):f(B)$ .

Следствие. Отрезок  $AB$  пересекает прямую  $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(A)f(B) < 0$ .

В пространстве аналогично:

Общий вид аффинной координаты:

$$Ax + By + Cz + D, (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

Полупространства задаются неравенствами:

$$Ax + By + Cz + D \geq 0$$

$$Ax + By + Cz + D \leq 0$$

## Аффинная классификация

Определение. Два объекта  $X_1, X_2$  называются аффинно эквивалентными, если существует две аффинные системы координат  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  такие, что  $X_1$  в  $\mathcal{A}_1$  может быть задан также как  $X_2$  в  $\mathcal{A}_2$ .

## Лекция 9. Аффинная классификация прямых и плоскостей.

### Пучки и связки

#### Аффинная классификация пар прямых на плоскости

Теорема. Для любых двух прямых  $l_1, l_2$  на плоскости верно ровно одно из следующих трёх высказываний:

- 1) Существует аффинная система координат  $x, y$ , в которой

$$l_1: y = 0$$

$$l_2: y = 0$$

- 2) Существует аффинная система координат  $x, y$ , в которой

$$l_1: y = 0$$

$$l_2: y = 1$$

- 3) Существует аффинная система координат  $x, y$ , в которой

$$l_1: y = 0$$

$$l_2: x = 0$$

Пусть в произвольной аффинной системе координат даны две прямые:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Проверим, не совпадают ли они. Возможны два случая:

- 1) Если

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1,$$

то эти уравнения пропорциональны и прямые совпадают, то есть  $l_1 = l_2$  и  $l_1$  можно принять за ось  $Ox$ .

- 2) Если

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

то нужно проверить чему равен ранг матрицы без свободных членов. Для нее опять может быть два варианта:

- a) Если

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1,$$

то по теореме Кронекера-Капелли прямые  $l_1$  и  $l_2$  не имеют общих точек, пара коэффициентов при  $x$  и  $y$  пропорциональны, откуда следует, что прямые параллельны:  $l_1 \parallel l_2, l_1 \cap l_2 = \emptyset$ . В этом случае можно принять

прямую  $l_1$  за ось  $Ox$ , а вторым базисным вектором соединим начало координат с какой-нибудь точкой, лежащей на  $l_2$  (рис. 9.1). Тогда вторая прямая будет задана уравнением  $y = 1$ .

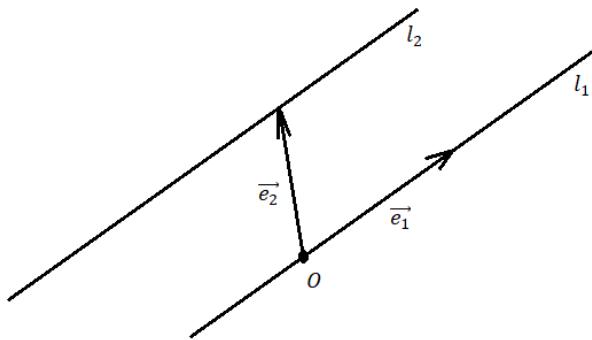


Рис. 9.1

б) Если

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2,$$

то система будет иметь единственное решение, а значит  $l_1$  и  $l_2$  имеют одну общую точку. Эту точку можно взять за начало координат, а  $l_1$  и  $l_2$  принять за оси координат.

В дальнейшем, вместо фразы «существует аффинная система координат, в которой, ... задано ...» будем использовать «выбором аффинной системы координат приводится к виду».

## Аффинная классификация пар прямых в пространстве

Теорема. Выбором аффинной системы координат любую пару прямых можно привести ровно к одному из видов:

- 1)  $l_1 = l_2: (0,0,0) + t(1,0,0)$  (прямые совпадают)
- 2)  $l_1: (0,0,0) + t(1,0,0)$ ,  $l_2: (0,1,0) + t(1,0,0)$  (прямые параллельны)
- 3)  $l_1: (0,0,0) + t(1,0,0)$ ,  $l_2: (0,0,0) + t(0,1,0)$  (прямые пересекаются в точке)
- 4)  $l_1: (0,0,0) + t(1,0,0)$ ,  $l_2: (0,0,1) + t(0,1,0)$  (прямые скрещиваются)

На схеме на рис. 9.2 показано как можно выбрать координатные оси в различных случаях. В пространстве более высокой размерности случаи будут аналогичны (единственное различие будет в количестве координат).

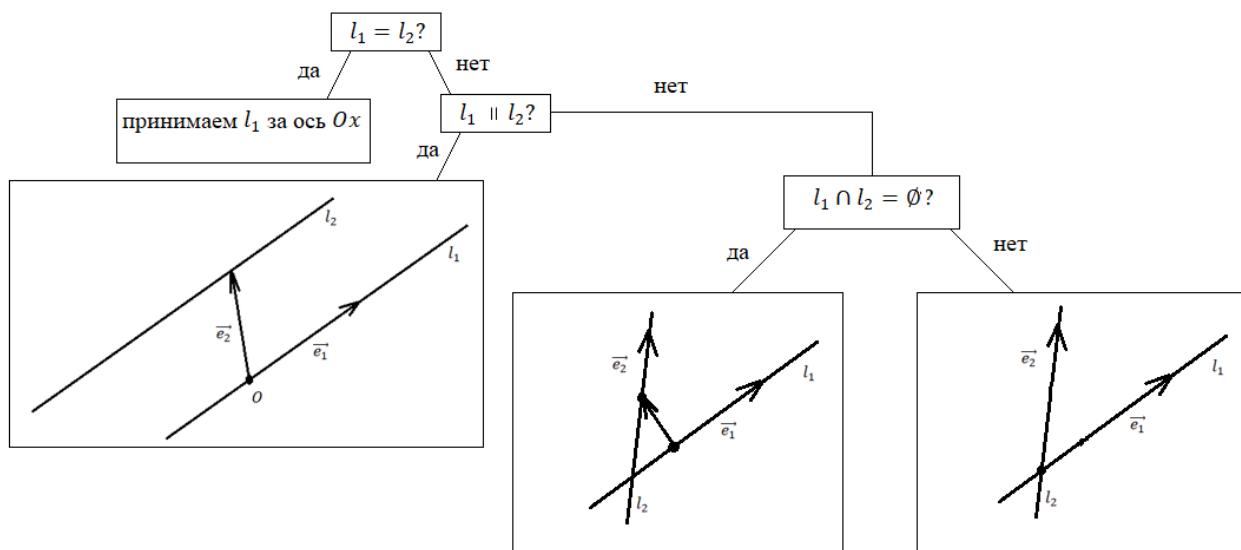


Рис. 9.2

## Аффинная классификация пар плоскостей в пространстве

Теорема. Выбором аффинной системы координат любую пару плоскостей можно привести ровно к одному из видов:

- 1)  $\Pi_1 = \Pi_2: z = 0$  (плоскости совпадают)
- 2)  $\Pi_1: z = 0, \Pi_2: z = 1$  (плоскости параллельны)
- 3)  $\Pi_1: z = 0, \Pi_2: y = 0$  (плоскости пересекаются по прямой)

## Пучки прямых на плоскости

Определение. Собственный пучок прямых на плоскости – семейство всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Определение. Несобственный пучок прямых на плоскости – семейство всех прямых, параллельных некоторому фиксированному вектору.

Утверждение.

- 1) Пусть  $l_1$  и  $l_2$  – две различные прямые на плоскости. Тогда существует единственный пучок прямых, содержащий  $l_1$  и  $l_2$ .
- 2) Прямые  $l_1, l_2, l_3$  лежат в одном пучке тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$l_3: A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

Доказательство:

- 1) Первый пункт очевиден.
- 2) Пусть  $l_1, l_2, l_3$  лежат в одном пучке. Тогда либо существует точка их пересечения  $(x_0, y_0)$  такая, что

$$l_1: A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$$

$$l_3: A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 = 0$$

Либо существует вектор  $(\alpha, \beta)$  такой, что

$$A_1\alpha + B_1\beta = 0$$

$$A_2\alpha + B_2\beta = 0$$

$$A_3\alpha + B_3\beta = 0$$

В обоих случаях получаем, что столбцы

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы. Откуда следует, что

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

что равносильно существованию  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$  таких, что

$$\alpha \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0$$

Далее возникает развилка. Если  $\gamma = 0$ , то  $l_1, l_2, l_3 \parallel (\alpha, \beta)$ . Если нет, то  $l_1, l_2, l_3 \ni (x_0, y_0)$ , где

$$x_0 = \frac{\alpha}{\gamma}, y_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

## Пучки плоскостей в пространстве

Определение. Собственный пучок плоскостей в пространстве – семейство всех плоскостей, содержащих некоторую прямую.

Определение. Несобственный пучок плоскостей в пространстве – семейство всех прямых, параллельных некоторой фиксированной плоскости.

Утверждение.

- 1) Для любых двух плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$ , таких что  $\Pi_1 \neq \Pi_2$  существует единственный пучок, содержащий  $\Pi_1, \Pi_2$ .
- 2)  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  лежат в одном пучке тогда и только тогда, когда

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} < 3$$

Доказательство:

- 1) Первый пункт очевиден.
- 2) Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \\ f_2(x, y, z) &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \\ f_3(x, y, z) &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3 \\ f_4(x, y, z) &= A_4x + B_4y + C_4z + D_4 \end{aligned}$$

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0) \text{ такие, что}$$

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$$

Без ограничения общности  $\gamma \neq 0$ . Это значит, что

$$f_3 = \frac{-(\alpha f_1 + \beta f_2)}{\gamma}$$

Возможны два случая:  $\Pi_1 \parallel \Pi_2$  и  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \in \Pi_3$ .

## Связки прямых и плоскостей в пространстве

Определение. Собственная связка прямых в пространстве – семейство всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Определение. Несобственная связка прямых в пространстве – семейство всех прямых, параллельных некоторому фиксированному вектору.

Определение. Собственная связка плоскостей в пространстве – множество всех плоскостей, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Определение. Несобственная связка плоскостей в пространстве – множество всех плоскостей, параллельных некоторому фиксированному вектору.

Утверждение.

- 1) Пусть  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  – три плоскости, не содержащиеся в одном пучке. Тогда существует единственная связка, содержащая  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ .

2)  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  в одной связке тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\Pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

$$\Pi_4: A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$$

Доказательство аналогично доказательству подобного утверждения для пучков плоскостей в пространстве и оставляется в качестве упражнения.

## Ортогональная (метрическая/евклидова) классификация

Ортогональная классификация пар прямых:

- 1)  $l_1 = l_2: y = 0$
- 2)  $l_1 \parallel l_2$

$$l_1: y = 0, l_2: y = a, a > 0$$

- 3)  $l_1 \nparallel l_2$

$$l_1 = y = 0, l_2: x = ky, k \geq 0$$

В данном случае, инварианты – расстояния и углы.

## Лекция 10. Формулы для расстояний и углов. Замена аффинных координат.

### Лемма о нормали к прямой

Если не будет оговорено иного, то в этой лекции мы по умолчанию будем считать, что  $x, y$  – прямоугольная система координат на плоскости.

Утверждение. Пусть прямая  $l$  задаётся следующим уравнением:

$$l: Ax + By + C = 0$$

Тогда  $(A, B) \perp l$ .

Доказательство:

В любой аффинной системе координат:

$$(\alpha, \beta) \parallel l \Leftrightarrow A\alpha + B\beta = 0$$

В прямоугольной системе координат:

$$A\alpha + B\beta = ((\alpha, \beta), (A, B))$$

Следовательно,  $(A, B) \perp (\alpha, \beta)$ , а значит  $(A, B) \perp l$ .

### Формулы для расстояний

Утверждение. Пусть даны прямая  $l: Ax + By + C = 0$  и произвольная точка  $(x_0, y_0)$ . Тогда расстояние от этой точки до прямой:

$$\rho((x_0, y_0), l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство:

Возьмём точку  $(x_1, y_1)$  на прямой  $l$  и проведем из неё вектор  $\vec{u}$  в точку  $(x_0, y_0)$  (рис. 10.1).

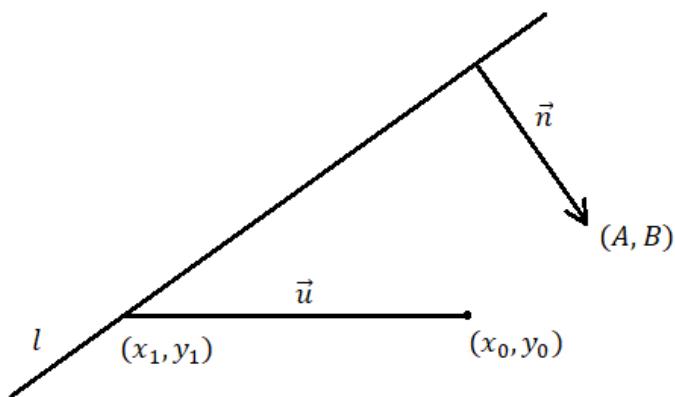


Рис. 10.1

Тогда

$$\rho = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Утверждение. Пусть даны две прямые:

$$l_1: Ax + By + C_1 = 0$$

$$l_2: Ax + By + C_2 = 0$$

Тогда расстояние от этой точки до прямой:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство:

Возьмём на прямой  $l_2$  точку  $(x_0, y_0)$  (рис. 10.2).

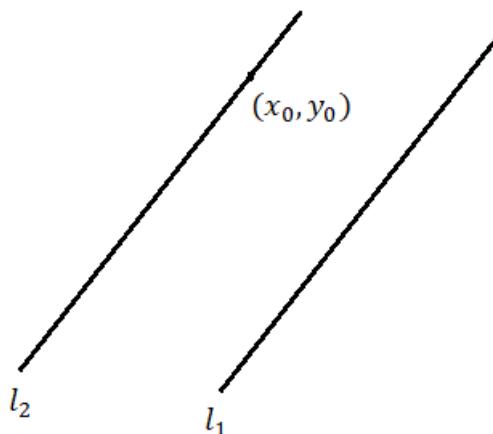


Рис. 10.2

Тогда

$$\rho(l_1, l_2) = \rho((x_0, y_0), l_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Задача.

Пусть даны прямая  $l: Ax + By + C = 0$  и произвольная точка  $(x_0, y_0)$ , не лежащая на этой прямой. Нужно найти функцию  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \rho((x, y), l), & \text{если } (x, y) \text{ и } (x_0, y_0) \text{ лежат в одной полуплоскости} \\ -\rho((x, y), l), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sgn}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Аналогичные формулы имеют место и в пространстве. Пусть  $x, y, z$  – прямоугольная система координат и пусть задана плоскость

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

Тогда расстояние от точки  $(x_0, y_0, z_0)$  до этой плоскости:

$$\rho((x_0, y_0, z_0), \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние между двумя параллельными плоскостями:

$$\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где

$$\Pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

Найдём расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве. Пусть заданы две прямые (рис. 10.3):

$$l_1: P_1 + t\vec{v_1}$$

$$l_2: P_2 + t\vec{v_2}$$

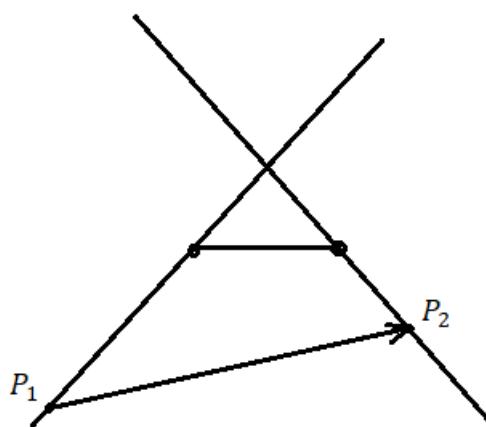


Рис. 10.3

Тогда расстояние между ними:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}, [\vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{|[\vec{v}_1, \vec{v}_2]|} = \frac{V(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)}{S(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

Пусть прямые заданы следующими уравнениями:

$$l_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Попробуем «угадать» формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left| \begin{array}{cccc} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{array} \right|}{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2), [\vec{n}_3, \vec{n}_4]|},$$

где

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\vec{n}_3 = (A_3, B_3, C_3)$$

$$\vec{n}_4 = (A_4, B_4, C_4)$$

## Формулы для углов

Угол между прямыми.

Пусть заданы две прямые:

$$l_1: P_1 + t\vec{v}_1$$

$$l_2: P_2 + t\vec{v}_2$$

Тогда угол между ними определяется как

$$\angle l_1, l_2 = \arccos \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

Если прямые заданы уравнением

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

то

$$\angle l_1, l_2 = \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}$$

Угол, смотрящий на точку.

Пусть даны две прямые и точка. Формула, выражающая угол, который «смотрит» на точку (рис. 10.4):

$$\alpha = \arccos \left( \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}} \operatorname{sgn}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) \operatorname{sgn}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(-1) \right)$$

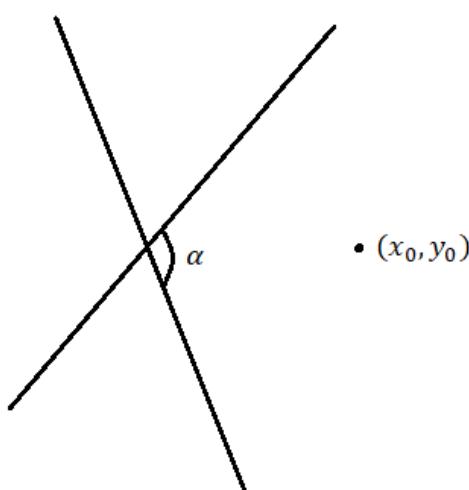


Рис. 10.4

Угол между плоскостями.

Пусть даны две плоскости:

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

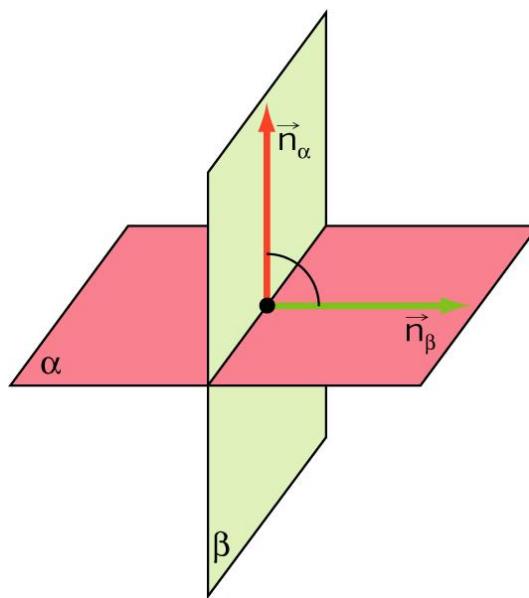


Рис. 10.5

Формула для угла между плоскостями:

$$\angle \Pi_1, \Pi_2 = \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$$

**Формула перехода между аффинными системами координат**

Теорема. Пусть  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  и  $(O', \vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n')$  – два репера,  $x_1, \dots, x_n$  и  $x_1', \dots, x_n'$  – соответствующие системы координат. Пусть  $b$  – это столбец координат вектора  $\overrightarrow{OO'}$  в первой системе, а  $C$  – матрица перехода от первой системы ко второй. Тогда координаты точек в этих реперах связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + b$$

Доказательство:

По условию:

$$\overrightarrow{OO'} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)b$$

$$\left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) = \left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) C$$

Координаты произвольной точки в первой системе:

$$O + \left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Чтобы эта точка имела координаты  $x_1', \dots, x_n'$  во второй системе, нужно приравнять выражения для координат в обеих системах:

$$O + \left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O' + \left( \overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}' \right) \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Из условия:

$$O' = O + \left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) b$$

Тогда

$$O' + \left( \overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}' \right) \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = O + \left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) \left( b + C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \right)$$

Следовательно

$$O + \left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O + \left( \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \right) \left( b + C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \right)$$

А значит,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + b$$

## Ортогональные матрицы

Определение. Матрица  $C$  ортогональна, если

$$CC^T = E$$

Или  $C^{-1} = C^T$ .

Утверждение. Пусть  $C$  – матрица перехода от  $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$  к  $(\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}')$ . Из следующих трёх высказываний, любые два влечут третье:

- 1) Базис  $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$  – ортонормирован
- 2) Базис  $\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}'$  – ортонормирован

3) Матрица  $C$  ортогональна

Доказательство:

Первое высказывание означает, что скалярное произведение между двумя матрицами, столбцами которой являются орты базисов, равно единичной матрице:

$$(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})^T \cdot (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}) = E$$

Третье высказывание означает, что

$$CC^T = E$$

Попробуем из первого и третьего высказываний получить второе.

$$(\vec{e_1'}, \dots, \vec{e_n'})^T \cdot (\vec{e_1'}, \dots, \vec{e_n'}) \leq C^T (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})^T \cdot (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}) C = C^T C = E$$

Следовательно, базис  $\vec{e_1'}, \dots, \vec{e_n'}$  – ортонормирован.

## Лекция 11. Ортогональные матрицы. Кривые и поверхности второго порядка.

### Ортогональные матрицы (продолжение)

Напомним, что по определению матрица  $C$  ортогональная, если

$$C^T = C^{-1} \Leftrightarrow CC^T = E \Leftrightarrow C^T C = E$$

$CC^T = E$  – ортогональность по строкам,

$C^T C = E$  – ортогональность по столбцам.

Утверждение. Общий вид ортогональной матрицы  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

где  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Доказательство:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Откуда получаются три уравнения:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Положим, что

$$a = \cos \varphi$$

$$c = \sin \varphi$$

А  $b$  и  $d$  удовлетворяют уравнению

$$b \cos \varphi + d \sin \varphi = 0$$

Его общее решение:

$$b = \lambda \sin \varphi$$

$$d = -\lambda \cos \varphi$$

Подставляя его в последнее из трёх уравнений, получим:

$$(\lambda \sin \varphi)^2 + (-\lambda \cos \varphi)^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

Утверждение.  $CC^T = E \Rightarrow \det C = \pm 1$ .

Доказательство:

$$\det C^T = \det C$$

$$CC^T = E \Rightarrow (\det C)^2 = 1$$

$$\det C = \pm 1$$

Утверждение. Ортогональные матрицы  $n \times n$  образуют группу.

Доказательство:

Пусть  $C$  и  $D$  – ортогональные матрицы:

$$CC^T = E$$

$$DD^T = E$$

Тогда

$$(CD)(CD)^T = CDD^TC^T = E$$

Утверждение. Любая ортогональная матрица  $3 \times 3$  с определителем, равным единице представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ .

Если последний элемент не равен  $\pm 1$ , то такое разложение единственno.

Доказательство:

Вычислим некоторые из элементов матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} * & * & \sin \varphi \sin \theta \\ * & * & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Пусть  $C$  – произвольная ортогональная матрица с  $\det C = 1$ . Положим  $\theta = \arccos C_{33}$ . Если  $C_{33} = \pm 1$ , то матрица имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Здесь звездочками обозначена ортогональная матрица  $2 \times 2$ . То есть  $C$  может быть одной из матриц:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь предположим, что  $C_{33} \neq \pm 1$ .  $\varphi$  определим из условий:

$$\cos \varphi = -\frac{C_{23}}{\sqrt{1 - (C_{33})^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{C_{23}}{\sqrt{1 - (C_{33})^2}}$$

А  $\psi$  определим из условий:

$$\cos \psi = \frac{C_{32}}{\sqrt{1 - (C_{33})^2}}$$

$$\sin \psi = \frac{C_{31}}{\sqrt{1 - (C_{33})^2}}$$

Отсюда получим матрицу

$$A(\varphi, \psi, \theta) = \begin{pmatrix} * & * & \sin \varphi \sin \theta \\ * & * & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$A(\varphi, \psi, \theta)$  совпадает с  $C$  в последнем столбце и последней строке. Тогда

$$CA^{-1}(\varphi, \psi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A(\varphi, \psi, \theta) = A(\varphi + \alpha, \psi, \theta) = A(\varphi, \psi, \theta)$$

$\varphi, \psi, \theta$  называются углами Эйлера.

$\varphi$  – угол прецессии,

$\psi$  – угол нутации,

$\theta$  – угол собственного вращения.

## Преобразование кососимметричных матриц в ортогональные

На рис. 11. 1 изображена схема преобразования кососимметричных матриц в ортогональные.

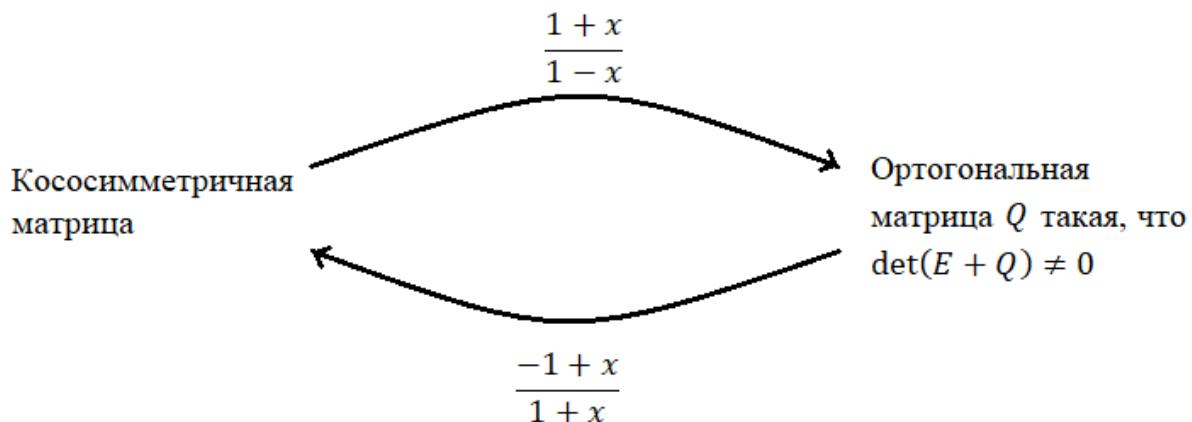


Рис. 11.1

### Пример.

Пусть  $B = -B^T$ .

$$Q = (E + B)(E + B)^{-1} = (E - B)^{-1}(E + B)$$

$$QQ^T = (E + B)(E - B)^{-1}((E - B)^{-1})^T(E + B)$$

$$(E + B)(E - B)^{-1}((E - B)^{-1})^T(E + B) = (E + B)(E - B)^{-1}(E + B)^{-1}(E - B) = E$$

## Кривые и поверхности второго порядка

Алгебраическое уравнение:

$$f(y_1, \dots, y_n) = 0,$$

где  $f$  – многочлен.

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  – другая аффинная система координат. Является ли  $g(\vec{x}) = f(\vec{y}(\vec{x}))$  многочленом?

Напомним, что аффинная замена координат выглядит следующим образом:

$$\vec{y} = C\vec{x} + \vec{b}$$

$$\begin{cases} y_1 = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \dots + C_{1n}x_n + b_1 \\ \vdots \\ y_n = C_{n1}x_1 + C_{n2}x_2 + \dots + C_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

$C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \dots + C_{1n}x_n + b_1$  – многочлен первой степени.

Утверждение.  $g$  – тоже многочлен и  $\deg f = \deg g$ .

Доказательство:

Очевидно, что

$$\deg f \geq \deg g$$

Замена  $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$  обратима. Следовательно,  $\deg f \leq \deg g$ . Значит  $\deg f = \deg g$ .

Многочлен второй степени от  $x, y$ :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$
$$(a_{11}, a_{22}, a_{12}) \neq (0, 0, 0)$$

В дальнейшем, когда мы будем говорить о кривой второго порядка, то будем иметь в виду многочлен второй степени на плоскости, рассматриваемый с точностью до умножения на  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Аналогично, поверхности второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$
$$(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Для того, чтобы компактно записывать подобные уравнения введём следующие матрицы.

Матрица квадратичной части.

В случае кривой:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

В случае поверхности:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Полная матрица коэффициентов.

Для кривой:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Для поверхности:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

В таких обозначениях:

Кривая второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \Leftrightarrow (x \ y \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Поверхность второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x \ y \ z \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Обозначим  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  и  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ . Общий вид замены координат:

$$\vec{x} = C\vec{x}' + \vec{b},$$

где  $C$  -матрица перехода от первого базиса ко второму,  $\vec{b}$  – столбец координат  $O'$  в  $x_1, \dots, x_n$ .

Мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим  $\hat{C} = \begin{pmatrix} C & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{x}' = \begin{pmatrix} \vec{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Утверждение. Пусть  $F$  – многочлен второй степени с матрицей квадратичной части

- В системе  $x_1, \dots, x_n - \hat{Q} (Q)$
- В системе  $x_1', \dots, x_n' - \hat{Q}' (Q')$

Тогда  $Q' = C^T Q C$  и  $\hat{Q}' = \hat{C}^T \hat{Q} \hat{C}$ .

$$\hat{x} = \hat{C} \hat{x}'$$

$$F = \hat{x}^T \hat{Q} \hat{x} = \hat{x}'^T \hat{C}^T \hat{Q} \hat{C} \hat{x}'$$

## Вырожденные многочлены

Определение. Многочлен  $F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, x_n)$  назовём вырожденным, если существует  $\vec{v} \neq 0$  такой, что  $F(\vec{x} + \vec{v}) = F(\vec{x}) \forall \vec{x}$ .

Утверждение. Пусть  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  – линейно независимые векторы такие, что

$$F(\vec{x} + \vec{v}_i) = F(\vec{x}) \forall i = 1, \dots, k$$

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-k}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  – базис,  $y_1, \dots, y_n$  – соответствующие координаты.

Тогда  $F$  как многочлен от  $\vec{y}$  не зависит от  $y_{n-k+1}, \dots, y_n$ .

Доказательство:

Положим

$$\vec{e}_{n-k+1} = \vec{v}_1$$

$$\vec{e}_n = \vec{v}_k$$

$$F(\vec{y} + \vec{e}_i) = F(\vec{y}) \text{ при } i = n - k + 1, \dots, n$$

Зафиксируем  $y$ .

$$F(\vec{y} + k\vec{e}_i) - F(\vec{y}) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$$

$F(\vec{y} + k\vec{e}_i) - F(\vec{y})$  – многочлен от  $k$  с бесконечным числом корней. Отсюда следует, что

$$F(\vec{y} + a\vec{e}_i) = F(\vec{y}) \quad \forall a$$

## Лекция 12. Приведение к каноническому виду. Ортогональные инварианты.

### Вырожденные многочлены (продолжение)

Многочлен  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  называется  $m$ -кратно вырожденным, если существуют  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  – линейно независимые, такие что

$$f(\vec{x} + \vec{v}_i) = f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Утверждение.  $f$   $m$ -кратно вырожденный тогда и только тогда, когда существует аффинная замена  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$ , такая что  $f(\vec{x}(\vec{y}))$  не зависит от  $y_{n-m+1}, \dots, y_n$ .

Утверждение. Пусть  $f$  – многочлен второй степени, а  $Q, \hat{Q}$  – матрица его квадратичной части и всех коэффициентов соответственно.  $f$  вырожден тогда и только тогда, когда

$$\det Q = \det \hat{Q} = 0$$

Доказательство:

Пусть  $f$  – вырожден. Тогда существует  $\vec{v} \neq 0$  такой, что

$$f(\vec{x} + \vec{v}) = f(\vec{x})$$

Введём обозначения:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(\hat{x} + \hat{v})^T \hat{Q} (\hat{x} + \hat{v}) \equiv \hat{x}^T \hat{Q} \hat{x}$$

$$\hat{v}^T \hat{Q} \hat{x} + \hat{x}^T \hat{Q} \hat{v} + \hat{v}^T \hat{Q} \hat{v} = 0$$

$$\hat{v}^T \hat{Q} \hat{x} = \hat{x}^T \hat{Q} \hat{v}$$

$$(2\hat{x} + \hat{v})^T \hat{Q} \hat{v} = 0$$

Последнее равенство тождественно по  $\vec{x}$ .

Отсюда следует, что

$$\hat{Q} \hat{v} = 0 \text{ и } Q \vec{v} = 0$$

Следовательно,

$$\det Q = \det \hat{Q} = 0$$

## Приведение многочлена второй степени к каноническому виду ортогональной заменой координат

Теорема. Для любого многочлена  $f(\vec{x})$  второй степени существует ортогональная замена координат  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$ , такая что  $f(\vec{x}(\vec{y}))$  имеет вид

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \tau$$

или

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \mu y_{k+1},$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu \neq 0$ .

Доказательство:

Пусть  $f$  – однородный многочлен, то есть он имеет вид

$$\sum a_{ij} x_i x_j$$

Будем доказывать по индукции по числу переменных.

Рассмотрим  $n - 1$ -мерную сферу:

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\vec{x}: x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

Пусть  $A$  – точка минимума. Примем вектор  $\overrightarrow{OA}$  за первый базисный вектор:

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$$

Остальные векторы подберем так, чтобы они образовывали ортонормированный базис. Получим новую систему координат:  $y_1, \dots, y_n$ . Обозначим  $f(A) = \lambda$ .

$$F = f(\vec{y}) - \lambda(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = b_{11}y_1^2 + p(y_1, \dots, y_n)y_1 + q(y_2, \dots, y_n)$$

$$\deg p(y_1, \dots, y_n) = 1$$

$$\deg q(y_2, \dots, y_n) = 2$$

$$F(1,0,\dots,0) = 0 \Rightarrow b_{11} = 0$$

$$\forall \vec{y} \in \mathbb{S}^{n-1} \quad f(\vec{y}) \geq 0 \Rightarrow \forall \vec{y} \quad F(\vec{y}) \geq 0$$

Так как  $F(\alpha \vec{y}) = \alpha^2 F(\vec{y})$ , то

$$p(y_1, \dots, y_n)y_1 + q(y_2, \dots, y_n) \geq 0 \quad \forall \vec{y}$$

Отсюда следует, что

$$p(y_1, \dots, y_n) = 0$$

$$f = \lambda(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + q(y_2, \dots, y_n) = \lambda y_1^2 + \tilde{q}(y_2, \dots, y_n)$$

То же самое можно сделать с меньшим числом переменных и далее по индукции.

Пусть  $f$  – произвольный многочлен. Без ограничения общности:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + \dots + 2a_n x_n + a_0$$

$$\lambda_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + \dots + 2a_n x_n + a_0 &= \\ &= \lambda_1 \left( x_1 + \frac{a_1}{\lambda_1} \right) + \dots + \lambda_k \left( x_k + \frac{a_k}{\lambda_k} \right) + 2a_{k+1} x_{k+1} + \dots + \widetilde{a_0} \end{aligned}$$

Сдвинем систему координат:

$$\widetilde{x}_i = x_i + \frac{a_i}{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, k$$

$$x_i = \widetilde{x}_i, \quad i = k+1, \dots, n$$

Тогда получим

$$\lambda_1 \widetilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_k \widetilde{x}_k^2 + 2a_{k+1} \widetilde{x}_{k+1}^2 + \dots + 2a_n \widetilde{x}_n^2 + \widetilde{a_0}$$

Если  $2a_1 \widetilde{x}_{k+1}^2 + \dots + 2a_n \widetilde{x}_n^2 = 0$ , то мы привели многочлен к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 + \tau$$

Если  $2a_1 \widetilde{x}_{k+1}^2 + \dots + 2a_n \widetilde{x}_n^2 \neq 0$ , то обозначим

$$y_i = \widetilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, k$$

$$y_{k+1} = \frac{a_{k+1} \widetilde{x}_{k+1}^2 + \dots + a_n \widetilde{x}_n^2 + \frac{\widetilde{a_0}}{2}}{\sqrt{a_{k+1}^2 + \dots + a_n^2}}$$

Остальные  $y_{k+2}, \dots, y_n$  нужно подобрать так, чтобы замена была ортогональной. В этом случае многочлен приводится к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 + \mu y_{k+1}$$

## Ортогональные инварианты многочлена второй степени

Теорема. Канонический вид многочлена второй степени определён однозначно с точностью до перестановки координат.

Если  $f$   $m$ -кратно вырожден, то  $\det(Q - \lambda E)$  и коэффициент при  $\lambda^m$  в  $(\hat{Q} - \lambda E)$  не зависят от выбора прямоугольной системы координат. В этом случае  $(\hat{Q} - \lambda E)$  делятся на  $\lambda^m$ .

Определение. Пусть  $A$  – квадратная матрица. Тогда многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом матрицы  $A$ .

Для многочленов от двух переменных:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Для многочленов от трёх переменных:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + \det Q$$

В дальнейшем будем использовать обозначения:

Для многочлена от двух переменных:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}$$

$$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Для многочлена от трёх переменных:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det Q$$

То есть

$$(Q - \lambda E) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}I_1 + \dots + (-\lambda)I_{n-1} + I_n$$

$I_1, \dots, I_n$  – ортогональные инварианты многочлена второй степени.

Все коэффициенты характеристического многочлена  $(I_1, \dots, I_n)$  не зависят от выбора прямоугольной системы координат.

Для доказательства теоремы нам нужно проверить верно ли равенство

$$\chi_Q(\lambda) = \chi_{C^T Q C}(\lambda)$$

Вычислим определитель:

$$\det(C^T Q C - \lambda E) = \det(C^T Q C - \lambda C^T C)$$

$$\det(C^T Q C - \lambda C^T C) = \det(C^T (Q - \lambda E) C)$$

$$\det(C^T (Q - \lambda E) C) = \det C^T \det(Q - \lambda E) \det C$$

$$\det C^T \det(Q - \lambda E) \det C = \det(Q - \lambda E)$$

Пример.

Пусть  $f$  – невырожденный многочлен. Тогда возможны два случая:

1)  $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 + \tau$

$$\chi_Q(\lambda) = \prod (\lambda_i - \lambda)$$
$$I_{n+1} = \prod \lambda_i \cdot \tau$$

2)  $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 + \mu y_{k+1}$ ,

$$\chi_Q(\lambda) = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda)$$
$$I_n = - \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i) \cdot \mu^2$$

## Лекция 13. Ортогональные инварианты. Классификации кривых и поверхностей второго порядка.

### Ортогональные инварианты многочлена второй степени (продолжение)

Напомним, что на предыдущей лекции было показано, что для любого многочлена  $f(\vec{x})$  второй степени существует ортогональная замена координат  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$ , такая что  $f(\vec{x}(\vec{y}))$  имеет вид

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \tau$$

или

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \mu y_{k+1},$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu \neq 0$ .

Для первого случая:

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \tau$$

$$\chi_Q(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda) \cdot (-\lambda)^{n-k}$$

Пусть  $k = 2, n = 4$ . Рассмотрим матрицу  $\hat{Q}$  в каноническом виде:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$$
$$\hat{Q} - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\hat{Q} - \lambda E) = (-\lambda)^2 (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\tau - \lambda)$$

Если  $b = (0, \dots, 0, b_{k+1}, \dots, b_n)$ , то  $\hat{Q}$  не изменяется.

Если  $b = (b_1, \dots, b_k, 0, \dots, 0)$ , то

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & b_k \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\hat{C}^T \hat{Q} \hat{C} - \lambda E) = (-\lambda)^{n-k} \det \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \lambda_n & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} - \lambda E \right)$$

Коэффициент при  $\lambda^{n-k}$  в  $\det(\hat{C}^T \hat{Q} \hat{C} - \lambda E)$  равен

$$(-1)^{n-k} \lambda_1 \cdots \lambda_k \tau.$$

Если  $b = 0$ , то  $\chi_{\hat{Q}}$  сохраняется, так как матрица  $\hat{C}$  ортогональна.

Инварианты:

$$k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k, \quad \lambda_1 \cdots \lambda_k \tau$$

Для второго случая:

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 + \mu x_{k+1}$$

Инварианты:

$$k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k, \quad \lambda_1 \cdots \lambda_k \mu^2$$

Тут  $\lambda_1 \cdots \lambda_k \mu^2$  – коэффициент при  $\lambda^{n-k-1}$  в  $\chi_{\hat{Q}}$ .

Рассмотрим характеристический многочлен:

$$\chi_{\hat{Q}}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \lambda^{n+1-i}$$

$c_{k+2} = \cdots = c_{n+1}$  в любом случае. Зададимся вопросом: равен ли  $c_{k+1}$  нулю?

Если да, то имеет место первый случай и

$$\tau = \pm \frac{c_{k+1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$$

Если нет, то имеет место второй случай и

$$\mu = \sqrt{\frac{c_{k+1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}}$$

## Ортогональная классификация кривых второго порядка

Отметим, что кривая (или поверхность) второго порядка – это уравнение, это то же самое, что и многочлен с точностью до множителя.

Любую кривую второго порядка выбором прямоугольной системы координат можно привести ровно к одному из следующих видов:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0 & \text{ (эллипсы)} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geq b > 0 & \text{ (мнимые эллипсы)} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 & \text{ (гиперболы)} \\ x^2 = 2py, \quad p > 0 & \text{ (параболы)} \\ \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0, \quad a \geq 1 & \text{ (пары мнимых пересекающихся прямых)} \\ \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 0, \quad a \geq 1 & \text{ (пары пересекающихся прямых)} \\ x^2 = a^2, \quad a > 0 & \text{ (пары параллельных прямых)} \\ x^2 = -a^2, \quad a > 0 & \text{ (пары мнимых параллельных прямых)} \\ x^2 = 0 & \text{ (пара совпадающих прямых)}\end{aligned}$$

Доказательство:

Пусть дана кривая второго порядка. Заменой координат мы можем привести её к одному из трёх видов:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tau = 0$$

$$\lambda_1 x^2 + 2\mu y = 0$$

$$\lambda_1 x^2 + \tau = 0$$

Все уравнения в теореме являются частными случаями этих трёх видов.

## Ортогональная классификация поверхностей второго порядка

Любую поверхность второго порядка выбором прямоугольной системы координат можно привести ровно к одному из следующих видов:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b \geq c > 0 & \text{ (эллипсоиды)} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b \geq c > 0 & \text{ (мнимые эллипсоиды)} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b > 0, c > 0 & \text{ (однополостный гиперболоид)}\end{aligned}$$

- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b > 0, c > 0 \text{ (двуполостный гиперболоид)}$$
- $$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p \geq q > 0 \text{ (эллиптические параболоиды)}$$
- $$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p \geq q > 0 \text{ (гиперболические параболоиды)}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 0, \quad a \geq b \geq 1 \text{ (мнимые конусы)}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0, \quad a \geq b > 1 \text{ (конусы)}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0 \text{ (эллиптический цилиндр)}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geq b > 0 \text{ (мнимые эллиптический цилиндр)}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 \text{ (гиперболический цилиндр)}$$
- $$x^2 = 2py, \quad p > 0 \text{ (параболический цилиндр)}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0, \quad a \geq 1 \text{ (пары мнимых пересекающихся плоскостей)}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 0, \quad a \geq 1 \text{ (пары пересекающихся плоскостей)}$$
- $$x^2 = a^2, \quad a > 0 \text{ (пары параллельных плоскостей)}$$
- $$x^2 = -a^2, \quad a > 0 \text{ (пары мнимых параллельных плоскостей)}$$
- $$x^2 = 0 \text{ (пара совпадающих плоскостей)}$$

## Аффинная классификация кривых второго порядка

Любую кривую второго порядка выбором аффинной системы координат можно привести ровно к одному из следующих видов:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (эллипсы)}$$

$$x^2 + y^2 = -1 \text{ (мнимые эллипсы)}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ (гиперболы)}$$

$$x^2 = 2y \text{ (параболы)}$$

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ (пары мнимых пересекающихся прямых)}$$

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ (пары пересекающихся прямых)}$$

$$x^2 = 1 \text{ (пары параллельных прямых)}$$

$$x^2 = -1 \text{ (пары мнимых параллельных прямых)}$$

$$x^2 = 0 \text{ (пара совпадающих прямых)}$$

## Лекция 14. Метод Лагранжа. Индексы инерции

### Аффинная классификация поверхностей второго порядка

Утверждение. Для всякой поверхности 2-го порядка существует аффинная система координат, в которой её уравнение имеет один из видов, представленного в следующем списке:

Эллипсоиды и гиперболоиды:

1.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2.  $x^2 + y^2 + z^2 = -1$
3.  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
4.  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Параболоиды:

5.  $x^2 + y^2 = 2z$
6.  $x^2 - y^2 = 2z$

Конусы (действительные и мнимые):

7.  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
8.  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Остальные виды (цилиндры или пары плоскостей):

9.  $x^2 + y^2 = 1$
10.  $x^2 + y^2 = -1$
11.  $x^2 - y^2 = 1$
12.  $x^2 = 2y$
13.  $x^2 + y^2 = 0$
14.  $x^2 - y^2 = 0$
15.  $x^2 = 1$
16.  $x^2 = -1$
17.  $x^2 = 0$

Определение. Данные уравнения называют уравнениями нормального вида.

Утверждение. Данные уравнения попарно аффинно-неэквивалентны.

Для доказательства первого утверждения можно воспользоваться теоремой о метрической классификации. Ранее, были получены подобные уравнения, однако они содержали некий коэффициент. “Растягивая” или “сжимая” оси координат в необходимое число раз – получим требуемый вид.

Рассмотрим более простой метод для доказательства утверждения.

## Метод Лагранжа.

Проблема использования метрической классификации заключалась в выборе прямоугольной системы координат таким образом, чтобы в уравнение не входили попарные произведения.

При рассмотрении данного метода – опустим требование того, чтобы система координат была прямоугольной. Рассмотрим часть уравнения, слагаемые которой содержат  $x$ :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_1x + P(y, z) = 0$$

Где  $P(y, z)$  – некий полином по переменным  $y$  и  $z$ .

Пусть  $a_{11} \neq 0$ , тогда выделим полный квадрат, “выбрасывая” мономы, содержащие  $x$ :

$$\pm \left( \frac{a_{11}}{\sqrt{|a_{11}|}}x + \frac{a_{12}}{\sqrt{|a_{11}|}}y + \frac{a_{13}}{\sqrt{|a_{11}|}}z + \frac{a_1}{\sqrt{|a_{11}|}} \right)^2 + q(y, z) = 0$$

Где  $q(y, z)$  – некий “новый” полином по переменным  $y$  и  $z$ .

Сделаем соответствующую замену координат:

$$\hat{x} = \frac{a_{11}}{\sqrt{|a_{11}|}}x + \frac{a_{12}}{\sqrt{|a_{11}|}}y + \frac{a_{13}}{\sqrt{|a_{11}|}}z + \frac{a_1}{\sqrt{|a_{11}|}}, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{z} = z$$

Рассмотрим полученное уравнение в новой системе координат:

$$\pm \hat{x}^2 + q(\hat{y}, \hat{z}) = 0$$

Заметим, что  $\hat{x}$  в данное уравнение входит единожды в качестве  $\hat{x}^2$ . Переходя к полиному, содержащим меньшее число неизвестных –  $q(y, z)$ , проделываем аналогичную замену переменных:

$$\pm \check{x}^2 \pm \check{y}^2 + r(\check{z}) = 0$$

Если квадратичных членов в ходе какой-то из замен переменных не останется – заменяем линейную часть.

При  $a_{11} = 0$  сделаем следующую замену, вводя квадратичный член, например:

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = y + \varepsilon z, \quad \hat{z} = z + \varepsilon z$$

При данной замене, получим задачу аналогичную, той, когда  $a_{11} \neq 0$ .

Данный метод позволяет осуществить замену координат, сводя уравнение к виду, не содержащему “смешанные” мономы.

Рассмотрим вопрос о единственности такого представления.

## Аффинные инварианты многочлена второй степени

Из рассмотренных ранее инвариантов почти ни один не подходит.

Например, рассмотрим определитель матрицы всех коэффициентов -  $\det \hat{Q}$ . При смене координат:

$$\hat{Q} \rightarrow \hat{C}^T \hat{Q} \hat{C} \Rightarrow \det \hat{Q} \rightarrow \det \hat{Q} * (\det \hat{C})^2$$

Однако, знак определителя изменяется не будет,  $\operatorname{sgn}(\det \hat{Q})$  – аффинный инвариант. Хотя данный инвариант не может дать различие между однополостным и двуполостным гиперболоидом.

В качестве очевидного аффинного инварианта можем рассмотреть степень вырожденности уравнения. Если в одно из нормальных уравнений входило две переменные, а в другое три, то получить одно уравнение из другого не получится.

Если в нормальном уравнении три неизвестных, то степень вырожденности – 0, если две, то степень вырожденности – 1.

Рассмотрим в качестве одного из важнейших инвариантов индексы инерции квадратичной части.

Определение. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  – однородный многочлен степени 2. Положительным (отрицательным) индексом инерции  $f$  называется наибольшее  $k$  такое, что

$$\exists \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0): \quad f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k) > 0 \quad (\text{соответств.} < 0)$$

Рассмотрим многочлен вида:

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+l}^2$$

Покажем, что при аффинной замене координат количество “+” и “-” в квадратичной части сохранится.

Утверждение. Индексы инерции рассматриваемого многочлена равны  $k$  (положительный) и  $l$  (отрицательный).

Доказательство. В качестве векторов  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  возьмём базис -  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ , тогда требование, заложенное в определении, очевидно, выполняется. Таким образом, очевидно, что положительный индекс инерции  $\geq k$ .

Докажем, что положительный индекс инерции  $\leq k$ :

$$\text{Пусть } \exists \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k+1} \in \mathbb{R}^n \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \neq (0, \dots, 0): \quad f(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \vec{u}_i) > 0$$

Тогда подберём  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , чтобы первые  $k$  координат в  $\sum \lambda_i \vec{u}_i$  равнялись 0. Получили однородную систему линейных уравнений с  $k+1$  неизвестной, содержащей  $k$  уравнений. Таким образом, получили противоречие  $\Rightarrow$  положительный индекс инерции

$\leq k$ . Из полученных утверждений, получаем, что положительный индекс инерции равен  $k$ . Для отрицательных доказательство аналогично.

## Частные производные

Изучим некоторые свойства многочленов второй степени.

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  – многочлен ( $\deg f = d$ ),  $x$  – некая точка. Определим в данной точке производную по направлению  $\vec{u}$ .

Определение. Производная  $f$  в точке  $x$  по направлению  $\vec{u}$  – число  $\partial_u f(x)$ , определяемое из равенства:

$$f(x + tu) = f(x) + t\partial_u f(x) + t^2 P(x, u, t)$$

Где  $P(x, u, t)$  – некий многочлен.

При переходе в другую систему координат из начала отсчёта в точке  $x$ , а вектор  $\vec{u}$  возьмём за базисный, то  $\partial_u f(x)$  соответствует линейному коэффициенту при координате, соответствующий данному базисному вектору.

Рассмотрим зависимость  $\partial_u f(x)$ , как функцию от  $x$  при фиксированных  $f$  и  $\vec{u}$ . Заметим, что  $\partial_u f(x)$  – многочлен степени не выше  $d$  ( $\deg f = d$ ).

Заметим, что выполняется правило Лейбница:

$$\partial_u(fg) = (\partial_u f)g + f\partial_u g$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} f(x + tu)g(x + tu) &= (f(x) + t\partial_u f(x) + t^2 P(x, u, t))(g(x) + t\partial_u g(x) + t^2 Q(x, u, t)) \\ &= f(x)g(x) + t((\partial_u f(x))g(x) + f(x)\partial_u g(x)) + t^2(\dots) \end{aligned}$$

Рассмотрим зависимость  $\partial_u f(x)$ , как функцию от  $f$  при фиксированных  $x$  и  $\vec{u}$ . Заметим, что по  $f$  – данная операция линейна, что следует из определения:

$$\partial_u(f + g)(x) = \partial_u f(x) + \partial_u g(x)$$

$$\partial_u(\lambda f)(x) = \lambda \partial_u f(x)$$

Докажем первое из данных утверждений.

Доказательство.

$$(f + g)(x + tu) = (f + g)(x) + t\partial_u(f + g)(x) + t^2 \dots$$

По определению суммы функций  $(f + g)(x + tu) = f(x + tu) + g(x + tu)$ , при этом:

$$f(x + tu) + g(x + tu) = f(x) + t\partial_u f(x) + g(x) + t\partial_u g(x) + t^2 \dots$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при  $t$  получаем доказываемое утверждение.

Наконец, рассмотрим зависимость  $\partial_u f(x)$ , как функцию от  $\vec{u}$  при фиксированных  $x$  и  $f$ .

Утверждение.  $\partial_u f(x)$  линейно по  $\vec{u}$ .

Доказательство. Данное утверждение достаточно доказать для мономов, на произвольные полиномы оно обобщается естественным образом, применяя индукцию по степени с помощью правила Лейбница.

Докажем, что если  $f$  – моном, то  $\partial_{u+\lambda v} f = \partial_u f + \lambda \partial_v f$ . Пусть  $\deg f = 1$ , т. е.  $f(x) = x_i$

$$\partial_v x_i = v_i,$$

$$\partial_{u+\lambda v} x_i = u_i + \lambda v_i$$

База индукции доказана.

Рассмотрим производную по направлению, как операцию от многочлена.

Утверждение. Операция взятия производной по направлению коммутирует:  $\partial_u \partial_v = \partial_v \partial_u$

Доказательство:

$$\begin{aligned} f(x + su + tv) &= f(x + su) + t \partial_v f(x + su) + t^2 \dots \\ &= f(x) + s \partial_u f(x) + t \partial_v f(x) + st \partial_v \partial_u f(x) + t^2 \dots + s^2 \dots \end{aligned}$$

Аналогично, можем разложить сначала по  $s$ , а после по  $t$ , тем самым доказывая данное утверждение.

Определение.  $i$  – ая частная производная  $f$  в точке  $x$  -  $\partial_i f(x) = \partial_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Из линейности по  $u \Rightarrow \partial_u f = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i f$

Координаты необходимо менять комплектом при переходе из одной системы в другую.

Рассмотрим для чего это необходимо:

Пусть  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{y} = x + y \Rightarrow \tilde{e}_1 = e_1 - e_2$ ,  $\tilde{e}_2 = e_2$ , тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Действительно,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## Формула Тейлора

Теорема.  $\forall$  многочлена степени  $k$   $f(x_1, \dots, x_n)$  и  $\forall a = (a_1, \dots, a_n)$  выполнено:

$$f(x) = \sum_{m=0}^k \left( \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f)(a) (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m}) \right)$$

Данная форма даёт соотношение при коэффициентах многочлена при сдвиге системы координат на  $a$ .

## Лекция 15. Асимптотические направления. Диаметр

### Асимптотические направления и их геометрический смысл

Рассмотрим, что будет с кривыми второго порядка, если плоскость, в которой они расположены, будет находиться на “большом” расстоянии от нас:

1) Гиперболу (рис. 15.1) на больших расстояниях мы увидим, как пару пересекающихся прямых, (рис. 15.2):

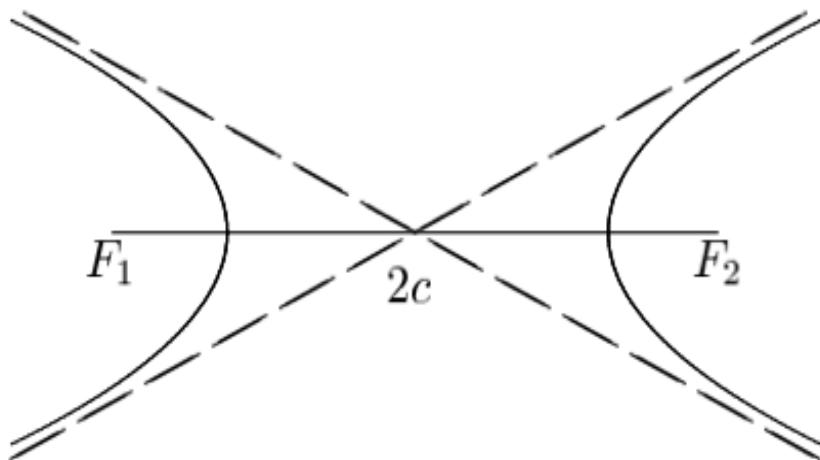


Рис. 15.1

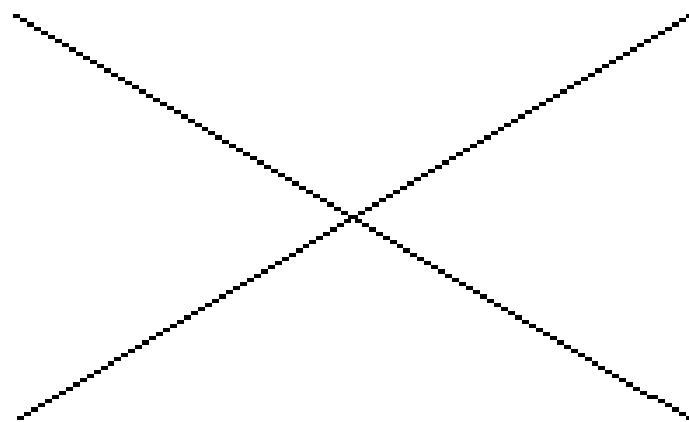


Рис. 15.2

2) Эллипс на больших расстояниях мы увидим, как точку.

3) Параболу на больших расстояниях мы увидим, как луч.

То есть, данные преобразования аналогичны тому, что мы увеличили длину всех базисных векторов в одинаковое число раз. Рассмотрим данные преобразования с алгебраической точки зрения.

Имеем уравнение:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

Если мы “смотрим издалека” на кривую, то выполняется преобразование системы координат:

$$\tilde{x} = \lambda x, \quad \tilde{y} = \lambda y, \quad \lambda \gg 1$$

Уравнение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda^2(a_{11}\tilde{x}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\tilde{y} + a_{22}\tilde{y}^2) + \lambda(2a_1\tilde{x} + 2a_2\tilde{y}) + a_0 &= 0 \\ (a_{11}\tilde{x}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\tilde{y} + a_{22}\tilde{y}^2) + \lambda^{-1}(2a_1\tilde{x} + 2a_2\tilde{y}) + \lambda^{-2}a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Из уравнения видно, что при больших  $\lambda$  вклад в уравнение даёт только его квадратичная часть.

Зная этот принцип, можно, например, предсказать какой вид издалека имеет следующий параболоид:

$$x^2 - y^2 = 2z \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 - \text{пара плоскостей}$$

Рассмотрим геометрию поверхностей второго порядка с точки зрения “бесконечности”.

Определение. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  – некий многочлен. Вектор  $v = (u_1, \dots, u_n) \neq 0$  имеет асимптотическое направление для  $f$ , если при ограничении  $f$  на некоторую прямую с направляющим вектором  $v$ , получаем многочлен меньшей степени.

Замечание. В определении можно заменить “некоторую прямую” на “любую прямую”, так как

$$\deg f(x + tv) < \deg f \Rightarrow \deg f(x' + tv) < \deg f$$

Это следует из того, что для любого отдельно взятого монома  $M$  степени  $k$  справедливо следующее:

$M(x + tv) = ct^k + \dots$  - не считая меньшие степени, при этом  $c$  – зависит только от  $v$ .

Алгебраически, полином от одной переменной будет степени меньше  $k$ , если  $k$  производная от него равна 0.

Утверждение.  $v$  имеет асимптотическое направление для  $f$  ( $\deg f = k$ ), тогда и только тогда, когда  $\partial_v^k f = 0$ .

Рассмотрим многочлен второй степени:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

Пусть  $v = (\alpha, \beta)$ , тогда:

$$f(x + \alpha t, y + \beta t) = (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + \cdots t + \cdots$$

$$f(x + \alpha t, y + \beta t) = \frac{1}{2}t^2 \partial_{(\alpha, \beta)} \partial_{(\alpha, \beta)} f + \cdots t + \cdots$$

При этом

$$(\alpha, \beta) \text{ имеет асимптотическое направление} \Leftrightarrow a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$$

Замечание. Можно было бы дать иное определение: вектор имеет асимптотическое направление, если при подстановке его в квадратичную часть данного многочлена получим ноль.

Однако данное определение не несёт в себе явного геометрического смысла, в отличии от предыдущего.

Рассмотрим в общем случае пересечение кривой второго порядка и прямой  $v$  – направляющий вектор. Довольно часто будем иметь две точки пересечения, которые можем найти из уравнения  $f(x + vt) = 0$ , если корень комплексный, то пересечение отсутствует.

Рассмотрим гиперболу:

$f(x, y) = xy - 1$ . Соответствующее асимптотическое разложение имеет вид:  $\alpha\beta = 0$ . Без ограничений общности, положим  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$  (нулевой вектор здесь и далее из рассмотрения исключён).

Рассмотрим горизонтальные прямые (в соответствии с выбранным направлением). Горизонтальной прямой соответствует некое значение абсциссы –  $y_0$ . При этом:

$f(t, y_0) = y_0 t - 1$  – многочлен степени не выше первой, нулевая степень достигается тогда, когда прямая является асимптотой. При этом реализуется ситуация пересечения в одной точке, либо, соответственно, пересечение отсутствует вовсе.

Рассмотрим параболу:  $y^2 = 2x$  с асимптотическим направлением, как и ранее –  $(1, 0)$  (рис. 15.2). В отличии от гиперболы, здесь точка пересечения всегда есть и при том – единственна.

Утверждение. Прямые асимптотического направления либо пересекают кривую (поверхность) 2-го порядка в одной точке, либо не пересекают вовсе, либо целиком содержатся в ней.

Перепишем формулу  $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2$ , используя матрицу для квадратичной части:

$$(\alpha \quad \beta) Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\alpha \quad \beta \quad 0) \hat{Q} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Где  $Q$  – матрица квадратичной части, а  $\hat{Q}$  – матрица, составленная из всех коэффициентов. Для поверхностей обобщается естественным образом:

$$(\alpha \ \beta \ \gamma) Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\alpha \ \beta \ \gamma \ 0) \hat{Q} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

## Диаметры

Здесь и далее будут рассмотрены кривые, обобщение на поверхности производится добавлением соответствующей координаты.

Пусть  $(\alpha \ \beta) \neq 0$  – не асимптотический вектор не асимптотического направления, тогда  $f(x + \alpha t, y + \beta t)$  – квадратный многочлен, относительно  $t$ . При этом, у данного уравнения всегда есть два корня (в общем случае – комплексные). Рассмотрим его подробнее:

$$f(x + \alpha t, y + \beta t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad t = -\frac{c_1}{2c_2} \text{ – середина хорды.}$$

При этом, в отличие от корней уравнения, середина хорды всегда вещественная.

Утверждение. Середины хорд фиксированного не асимптотического направления образуют прямую (для поверхностей – плоскость).

Доказательство:

Так как наши рассуждения не зависят от выбора системы координат, то без ограничения общности положим  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ . При этом, данный вектор не асимптотический  $\Rightarrow a_{11} \neq 0$ . Подставляя:

$$f(x + t, y) = a_{11}t^2 + p(x, y)t + q(x, y), \quad \deg p \leq 1$$

Заметим, что  $(x, y)$  – середина хорды  $\Leftrightarrow p(x, y) = 0$ , так как корни должны быть симметрично расположены, относительно 0.

Если  $\deg p = 0$  – многочлен, то уравнение  $p(x, y) = 0$  – задаёт пустое множество. Если  $\deg p = -\infty$ , то вся плоскость состоит из середин хорд, что невозможно  $\Rightarrow \deg p \neq 0$ ,  $\deg p \neq -\infty$ .

Утверждение. Пусть  $v$  – вектор не асимптотического направления. Тогда  $x(x_1, \dots, x_n)$  – середина хорды  $\Leftrightarrow \partial_v f(x) = 0$

Распишем данное условие в других формах. Например, раскроем скобки:

$$f(x + \alpha t, y + \beta t) = \dots t^2 + 2(\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2))t + f(x, y)$$

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = \frac{1}{2} \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\alpha \ \beta \ 0) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Диаметр (диаметральная плоскость), сопряженная не асимптотическому направлению – множество середин хорд этого направления.

Геометрический смысл этого уравнения следует из того, что мы начинали из условия не использующий привязку к системе координат.

Примеры диаметров для выделенного направления:

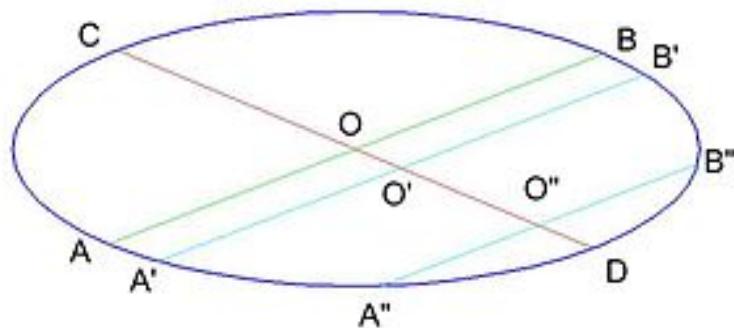


Рис. 15.3

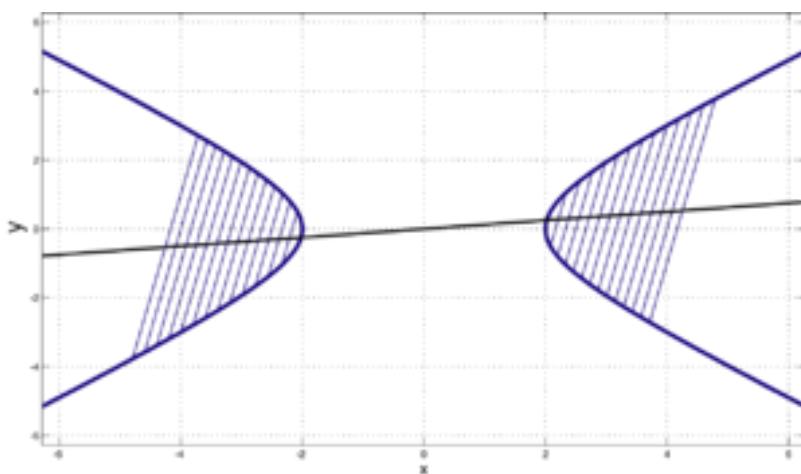


Рис. 15.4

### Сопряженные диаметры

**Утверждение.** Пусть вектор  $v$  параллелен к диаметру, сопряженному не асимптотическому направлению  $v$ . Тогда

$$\partial_u \partial_v f = 0$$

Верно и обратное.

Доказательство:

Уравнение диаметра:

$$\partial_v f(x) = 0$$

Вектор  $u = (\gamma, \delta)$  параллелен прямой

$$Ax + By + C = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\partial_{(\gamma, \delta)}(Ax + By + C) = A\gamma + B\delta = 0$$

В системе координат, в которой  $u$  и  $v$  – базисные векторы, а  $x, y$  – соответствующие координаты коэффициент многочлена  $f$  при  $xy$  равен нулю.

## Главные направления и диаметры

Определение. Неасимптотическое направление кривой (поверхности) второго порядка называется главным, если оно ортогонально соответствующему диаметру (диаметру плоскости).

## Лекция 16. Главные направления и оси симметрии. Центры кривых и поверхностей.

### Главные направления (продолжение)

Главное направление – это такое направление, которое

- 1) Не асимптотическое
- 2) Перпендикулярно диаметру

Определение. Пусть  $A$  – матрица  $n \times n$ ,  $v$  –  $n$ -столбец.  $v$  называется собственным вектором для  $A$ , если

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: Av = \lambda v$$

$\lambda$  называется собственным значением матрицы  $A$ .

Утверждение. Пусть  $Q$  – матрица квадратичной части кривой (поверхности) второго порядка. Тогда  $v$  имеет главное направление тогда и только тогда, когда  $v$  не асимптотический и не собственный для  $Q$ .

Доказательство:

В прямоугольной системе координат:

Уравнение диаметра:

$$(\alpha \quad \beta \quad 0) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Pi': \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0$$

Плоскости, ортогональные  $(\alpha, \beta)$ :

$$\Pi: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\Pi \parallel \Pi' \Leftrightarrow (\alpha', \beta') \text{ коллинеарно } (\alpha, \beta)$$

То есть

$$\lambda(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha', \beta') \hat{Q}$$

Если система координат аффинная:

Уравнение диаметра:

$$\Pi': (\alpha \quad \beta \quad 0) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, перпендикулярной  $(\alpha, \beta)$ :

$$\Pi: (\alpha \quad \beta) G \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

Где  $G$  – матрица Грама.

$$\Pi \parallel \Pi': (\alpha, \beta) \hat{Q} = \lambda(\alpha, \beta) G$$

Утверждение. Для аффинной системы координат. Пусть  $Q$  – матрица квадратичной части кривой (поверхности) второго порядка, а  $G$  – матрица Грама данного базиса. Тогда  $v$  – вектор главного направления тогда и только тогда, когда  $v$  не асимптотический и собственный для  $G^{-1}Q$ .

Геометрический смысл главных направлений:

Главные диаметры (диаметральные плоскости) являются осями (плоскостями) симметрии данной кривой (поверхности).

Доказательство:

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы  $v = e_1$ , а диаметральная плоскость задавалась уравнением  $x = 0$ . То есть нужно, чтобы уравнение

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$$

совпало с уравнением  $x = 0$ . То есть

$$a_{12} = a_1 = 0$$

$x$  входит в уравнение только через  $x^2$ . То есть многочлен

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

чётен по  $x$ , то есть  $x$  является прямой симметрии.

## Центры кривых и поверхностей второго порядка

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  – многочлен произвольной степени. Это означает, что  $f$  симметричен относительно точки  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

Уравнение

$$f(a + v) = 0$$

эквивалентно уравнению

$$f(a - v) = 0$$

как уравнение от  $v$ . То есть

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: f(a + v) = \lambda f(a - v)$$

Учитывая, что

$$f(a - v) = \lambda f(a + v)$$

Получим, что

$$\lambda = \pm 1$$

Следовательно,

$$f(a + v) = (-1)^{\deg F} f(a - v)$$

Мы получили условие симметрии многочлена относительно точки  $a$ .

Утверждение. Точка  $x_0$  является центром кривой (поверхности) второго порядка, заданной уравнением  $f = 0$  тогда и только тогда, когда все первые частные производные  $f$  в точке  $x_0$  равны нулю.

Для кривой:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

Центры:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases}$$

Следствия:

- Все центры лежат на всех диаметрах
- Множество центров образует одно из:
  - 1) Пустое множество
  - 2) Одна точка
  - 3) Прямая
  - 4) Плоскость (в случае поверхности)

Уравнение центров в матричном виде:

На плоскости:

$$\hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$$

В пространстве:

$$\hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

## Особые точки, касательные

Пусть кривая

$$a_{10}x + a_{01}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots = 0$$

проходит через начало координат.

Если мы «растянем» исходную систему координат:

$$\tilde{x} = \lambda x$$

$$\tilde{y} = \lambda y$$

$$\lambda \gg 1$$

То получим:

$$\frac{a_{10}x}{\lambda} + \frac{a_{01}y}{\lambda} + \frac{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}{\lambda^2} + \dots = 0$$

То есть при «растягивании» системы координат больший вклад будет давать сумма

$$a_{10}x + a_{01}y$$

Определение. Особая точка алгебраической кривой (поверхности), заданной уравнением  $f = 0$  – это точка, в которой  $f = 0$  и  $\partial_i f = 0 \forall i$ .

Определение. Пусть  $(x_0, y_0)$  – не особая точка алгебраической кривой  $f = 0$ . Прямая, заданная уравнением  $\partial_{(x-x_0, y-y_0)} f(x_0, y_0) = 0$ , называется касательной к данной кривой в точке  $(x_0, y_0)$ .

Определение. Пусть  $(x_0, y_0, z_0)$  – не особая точка алгебраической кривой  $f = 0$ . Плоскость, заданная уравнением  $\partial_{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)} f(x_0, y_0, z_0) = 0$ , называется касательной плоскостью к данной кривой в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ .

## Лекция 17. Касательные. Сечение поверхности касательной плоскостью. Образующие

### Касательные прямые, касательные плоскости (продолжение)

Касательная прямая – та единственная прямая, ограничения на которую многочлена  $f$  имеет в данной точке  $(x_0, y_0)$  особенность.

Уравнение для касательной плоскости:

$$(x - x_0)\partial_1 f(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\partial_2 f(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\partial_3 f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

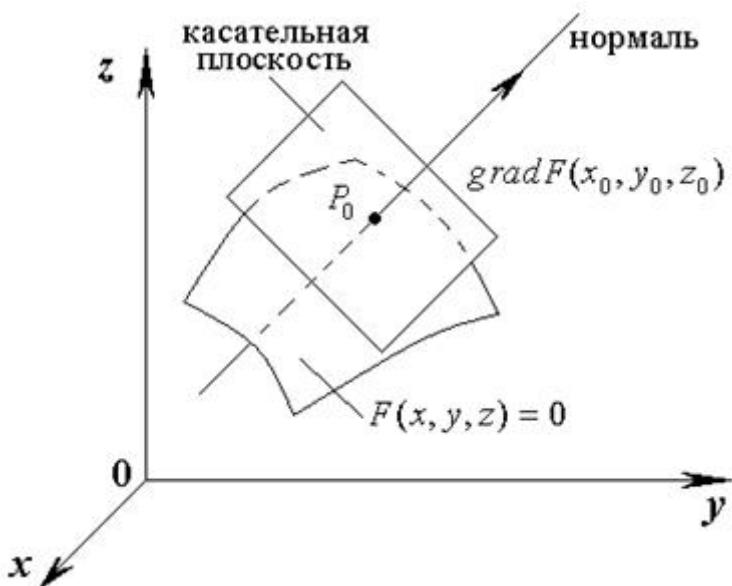


Рис. 17.1

Касательная плоскость к поверхности  $f = 0$  в не особой точке  $(x_0, y_0, z_0)$  – это та единственная плоскость, ограничения на которую многочлена  $f$  имеет в  $(x_0, y_0, z_0)$  особую точку.

Касательная плоскость состоит из всех прямых, ограничения  $f$  на которые имеет в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  кратный корень.

Рассмотрим случай, когда

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

$$f(x_0, y_0) = 0$$

Тогда

$$(x - x_0)\partial_1 f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_2 f(x_0, y_0) = 0$$

В этом случае

$$a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_1(x_0 + x) + a_2(y_0 + y) + a_0 = 0$$

Назовем этот многочлен  $p(x, y)$ :

$$p(x, y) = a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_1(x_0 + x) + a_2(y_0 + y) + a_0$$

Очевидно, что

$$p(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = 0$$

Тогда

$$\partial_1 p = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = \frac{1}{2} \partial_1 f(x_0, y_0)$$

Аналогично

$$\partial_2 p = \frac{1}{2} \partial_2 f(x_0, y_0)$$

Запишем в матричном виде:

$$f(x, y) = (x \ y \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x, y) = (x_0 \ y_0 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Уравнение касательной прямой:

$$(x_0 \ y_0 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Вычислим производную по направлению  $\partial_v f(x_0, y_0), v = (\alpha, \beta)$ :

$$(x + \alpha t \ y + \beta t \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x + \alpha t \\ y + \beta t \\ 1 \end{pmatrix} = f(x, y) + 2(\alpha \ \beta \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} t + \dots t^2$$

$$(x - x_0 \ y - y_0 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \ y \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} - (x_0 \ y_0 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ y_0 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Следовательно, уравнение касательной прямой:

$$(x \ y \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Для поверхностей второго порядка: уравнение касательной плоскости в не особой точке  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$(x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

## Сечение поверхностей второго порядка касательной плоскостью

Касательная плоскость пересекает поверхность по кривой, для которой точка касания является особой.

Рассмотрим поверхность второго порядка:

$$f(x, y, z) = 0, \deg f = 2$$

Сечение должно быть кривой порядка не выше 2.

Может ли оно иметь порядок 0?

$1 = 0$  – невозможно

Может ли оно иметь порядок 1?

В этом случае мы получим прямую, а на прямой нет особых точек. Значит этот случай невозможен.

Утверждение. Сечение поверхности второго порядка касательной плоскостью – пара прямых.

Прямые, содержащиеся в поверхности, называются её образующими.

## Образующие однополостного гиперболоида

Уравнение, задающее однополостный гиперболоид:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

$$\begin{vmatrix} x - z & 1 - y \\ 1 + y & x + z \end{vmatrix} = 0$$

$$\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta: \begin{pmatrix} x - z & 1 - y \\ 1 + y & x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (\gamma \ \ \delta) = \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \alpha\delta \\ \beta\gamma & \beta\delta \end{pmatrix}$$

Теперь положим, что

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Рассмотрим две прямые:

$$\begin{vmatrix} x - z & \alpha \\ 1 + y & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 - y \\ \beta & x + z \end{vmatrix} = 0 \text{ — первое семейство}$$

$$\begin{vmatrix} x - z & 1 - y \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ 1 + y & x + z \end{vmatrix} = 0 \text{ — второе семейство}$$

Утверждение. Образующие из одного семейства попарно скрещиваются.

Если  $l_1$  и  $l_2$  — образующие из разных семейств, то они лежат в одной плоскости.

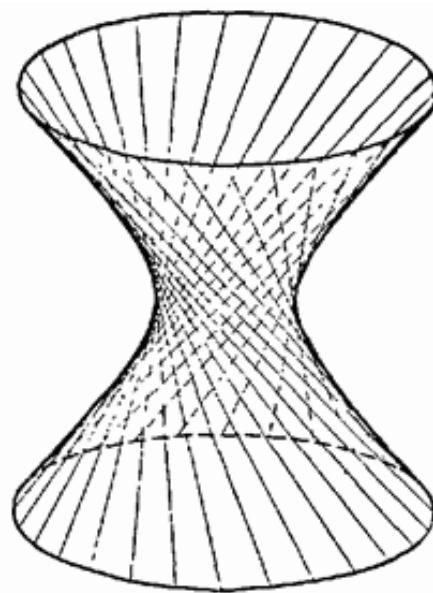


Рис. 17.2

### Образующие гиперболического параболоида

Уравнение, задающее однополостный параболоид:

$$x^2 - y^2 = 2z$$

$$\begin{vmatrix} x - y & z \\ z & x + y \end{vmatrix} = 0$$

Однополостный параболоид имеет два семейства образующих:

$$\begin{vmatrix} x - y & \alpha \\ z & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & z \\ \beta & x + y \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-y & z \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ z & x+y \end{vmatrix} = 0$$

Утверждение. Образующие из одного семейства попарно скрещиваются.

Если  $l_1$  и  $l_2$  – образующие из разных семейств, то они пересекаются.

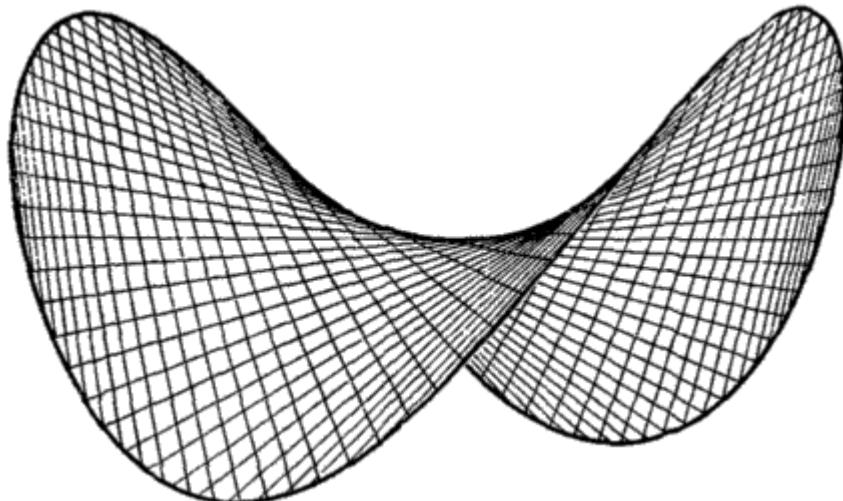


Рис. 17.3

### Кривые второго порядка, проходящие через данные точки

Пусть  $P_1, \dots, P_k$  – фиксированные точки. Мы хотим найти коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_0$  так, чтобы кривая

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

проходила через данные точки.

$f(P) = 0$  – линейное однородное уравнение на коэффициенты. Всего мы имеем 6 коэффициентов.

Теорема. Через пять точек на плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, проходит ровно одна кривая второго порядка.

Доказательство:

Мы имеем 5 уравнений и 6 неизвестных. Следовательно, существует нетривиальное решение.

Для доказательства единственности решения, нужно показать независимость уравнений. Независимость пяти уравнений означает, что из любых четырёх уравнений не следует пятое.

### Теорема Паскаля

Точки в общем положении: отрезки, их соединяющие не параллельны.

**Теорема Паскаля.** Пусть  $P_1, \dots, P_6$  – точки коники, находящейся в общем положении. Тогда точки  $P_1P_2 \cap P_4P_5, P_2P_3 \cap P_5P_6, P_3P_4 \cap P_6P_1$  лежат на одной прямой.

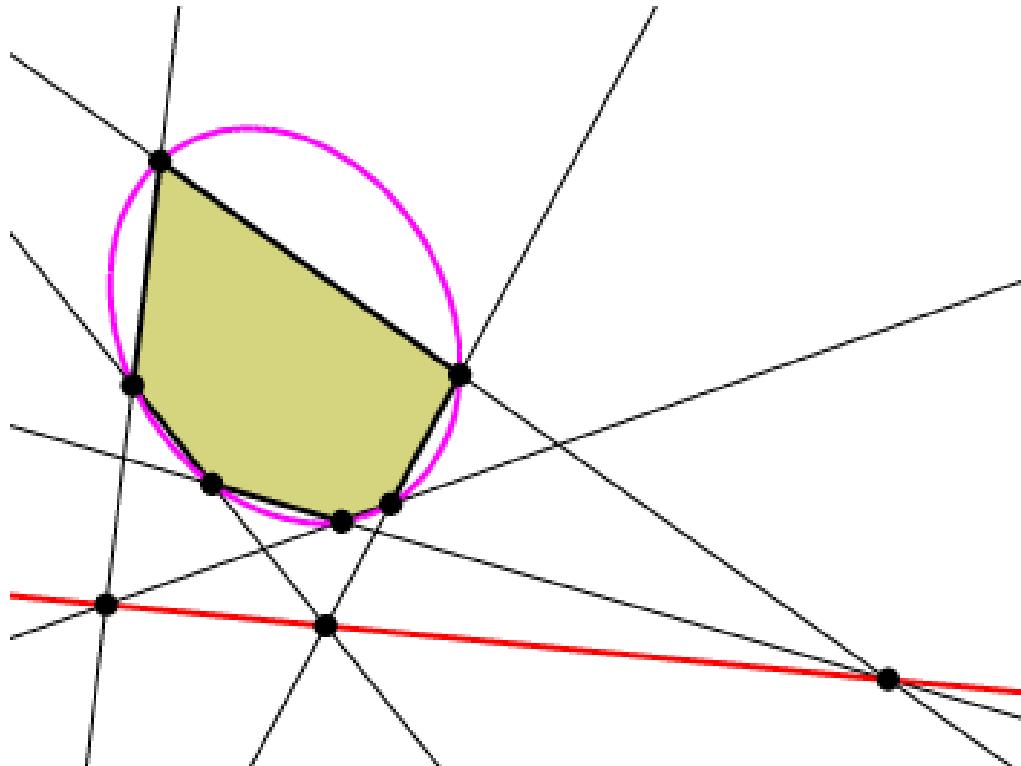


Рис. 17.4

## Лекция 18. Теоремы Паскаля и Брианшона. Поляры. Сечения поверхностей.

### Теорема Паскаля

В прошлый раз была сформулирована теорема Паскаля:

**Теорема Паскаля.** Пусть  $P_1, \dots, P_6$  – точки коники, находящейся в общем положении. Тогда точки  $P_1P_2 \cap P_4P_5, P_2P_3 \cap P_5P_6, P_3P_4 \cap P_6P_1$  лежат на одной прямой.

Доказательство:

Пронумеруем точки и обозначим линии, проходящие через них как на рис. 18.1

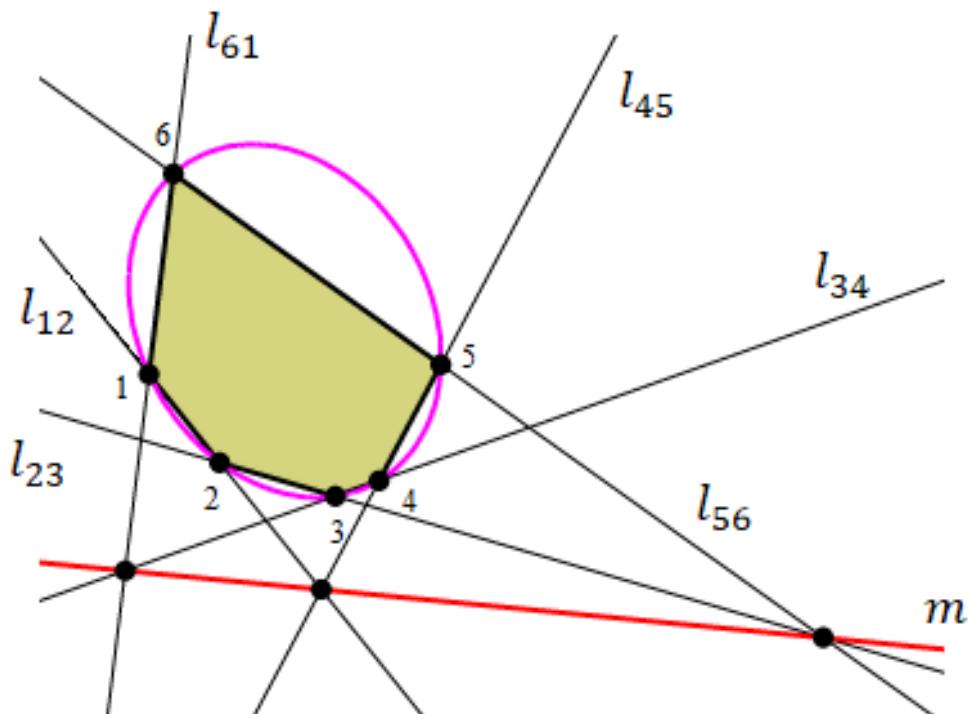


Рис. 18.1

Объединения  $l_{23} \cup l_{45} \cup l_{61}$  и  $l_{12} \cup l_{34} \cup l_{56}$  – кривые третьего порядка.

Они имеют вид:

$$F_1(x, y) = 0$$

$$F_2(x, y) = 0$$

$F_1, F_2$  – многочлены третьей степени.

$F_1|_m, F_2|_m$  – многочлены третьей степени с общими корнями. Значит

$$\exists \lambda \neq 0: F_1|_m - \lambda F_2|_m \equiv 0$$

Обозначим

$$F_1|_m - \lambda F_2|_m = F$$

$F$  – многочлен степени не выше 3

$$F|_m \equiv 0$$

Возьмём прямую  $m$  за ось абсцисс (рис. 18.2)

$F|_m \equiv 0 \Leftrightarrow F$  делится на  $y$ .



Рис. 18.2

$$F(x, y) = y \cdot p(x, y)$$

Здесь  $p$  – многочлен степени не выше 2.  $p$  обращается в нуль в точках 1,2,3,4,5,6.

## Сопряжённость точек относительно кривой второго порядка. Поляритет

Для любого многочлена второй степени  $f(x_1, \dots, x_n)$  существует единственный многочлен  $B_f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  такой, что:

- 1)  $B_f(x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$
- 2)  $B_f$  имеет степень 1 по  $x_1, \dots, x_n$  и по  $y_1, \dots, y_n$
- 3)  $B_f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = B_f(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n)$

В матричном виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \ \cdots \ x_n \ \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (x_1 \ \cdots \ x_n \ \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Точки  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$  называются сопряжёнными относительно  $f = 0$ , если

$$B_f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0$$

Далее будем рассматривать случай, когда  $n = 2$ . И вместо  $x_1, x_2$  будем писать  $x, y$ . То есть, если  $(x_1, y_1)$  сопряжена с  $(x_2, y_2)$ , то:

$$(x_1 \ y_1 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Если  $(x_1, y_1)$  зафиксирована, то условие

$$(x_1 \ y_1 \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

может задавать (относительно  $(x_2, y_2)$ ):

- 1) Прямую
- 2) Пустое множество
- 3) Всю плоскость

Во втором случае:

$$(x_1 \ y_1 \ 1) \hat{Q} = (\partial_1 f(x_1, y_1) \ \partial_2 f(x_1, y_1) \ f(x_1, y_1)) = (0 \ 0 \ \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow (x_1, y_1) - \text{центр, но } f(x_1, y_1) \neq 0$$

В третьем случае:

$$(x_1 \ y_1 \ 1) \hat{Q} = (\partial_1 f(x_1, y_1) \ \partial_2 f(x_1, y_1) \ f(x_1, y_1)) = (0 \ 0 \ 0)$$
$$\Leftrightarrow (x_1, y_1) - \text{особая точка}$$

В первом случае получившаяся прямая называется полярой точки  $(x_1, y_1)$ , а сама точка  $(x_1, y_1)$  — полюсом.

## Построение поляры одной линейкой

Утверждение. Пусть  $A, B$  и  $C, D$  — точки пересечения двух секущих, проведенных из  $P$  к конику, точки  $E$  и  $F$  — точки пересечения  $AD$  с  $BC$  и  $AC$  с  $BD$ . соответственно. Тогда прямая  $(EF)$  является полярой  $P$ . (Рис. 18.3)

Доказательство:

Рассмотрим аффинную систему координат, у которой прямые  $AB$  и  $CD$  являются осями, а точка  $P$  — началом.

Таким образом,  $A$  и  $B$  удовлетворяют  $y = 0$ , а значит,  $A$  и  $B$  имеют координаты  $(x_1, 0)$  и  $(x_2, 0)$  соответственно, где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_1x + a_0 = 0$$

Аналогично  $C$  и  $D$  имеют координаты  $y_1$  и  $y_2$ , причем

$$a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = 0$$

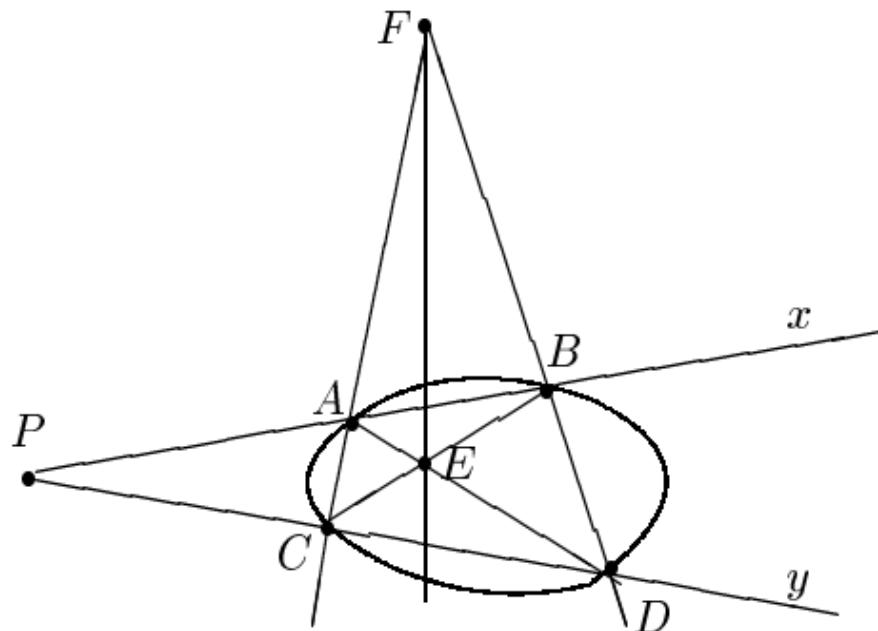


Рис. 18.3

Получаем уравнения соответствующих прямых:

$$(AD): \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} = 1$$

$$(BC): \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} = 1$$

$$(AC): \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

$$(BD): \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} = 1$$

Уравнение  $(EF)$  имеет вид:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} + \frac{y}{y_2} = 2$$

$$(EF): \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} x + \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} y = 2$$

Тогда из уравнений

$$a_{11}x^2 + 2a_1x + a_0 = 0$$

$$a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = 0$$

Получаем:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a_1}{a_{11}}$$

$$x_1x_2 = \frac{a_0}{a_{11}}$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{2a_2}{a_{22}}$$

$$y_1y_2 = \frac{a_0}{a_{22}}$$

Следовательно,

$$(EF): -\frac{2a_1}{a_0}x - \frac{2a_2}{a_0}y = 2$$

Мы получили уравнение поляры точки  $P$ , имеющей координаты  $(0,0)$  в используемой системе.

## Теорема Брианшона

Теорема Брианшона. Если шестиугольник описан около коники, то три диагонали, соединяющие противоположные вершины этого шестиугольника, проходят через одну точку.

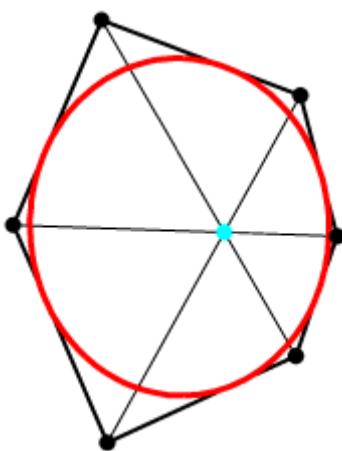


Рис. 18.4

Теорема Брианшона двойственна к теореме Паскаля.

## Плоские сечения поверхностей второго порядка

Будем рассматривать поверхность

$$\Sigma: F(x, y, z) = 0$$

$$\deg F = 2$$

И плоскость

$$\Pi: \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0)$$

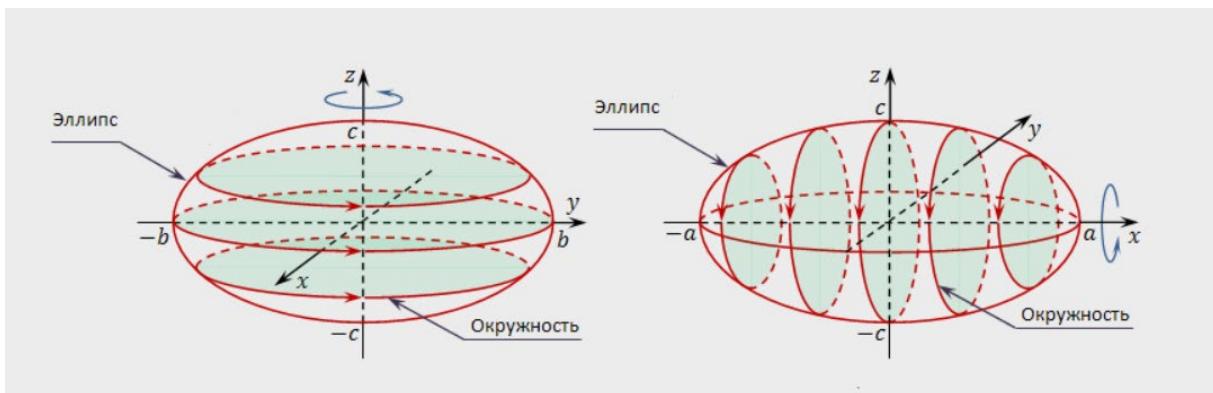


Рис. 18.5 Сечения эллипса

Утверждение. Любая другая поверхность второго порядка, имеющая сечение  $\Sigma \cap \Pi$  плоскостью  $\Pi$  задаётся уравнением вида

$$F(x, y, z) + (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0$$

Доказательство:

Без ограничения общности можно считать, что

$$\Pi: z = 0$$

Пусть  $F_1 = 0$  – поверхность второго порядка, имеющая то же сечение плоскостью  $z = 0$ , что и  $F$ . То есть при подстановке  $z \rightarrow 0$  в  $F_1$  и  $F$  должно получаться одно и то же с точностью до ненулевого множителя.

Без ограничения общности множитель = 1.

$$F_1 - F = z \cdot p(x, y, z)$$

$$\deg p \leq 1$$

Утверждение. Пусть поверхность  $\Sigma$  задаётся уравнением

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + p(x, y, z) = 0$$

$$\deg p \leq 1$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \quad \lambda_2 \neq 0$$

Тогда плоскости, пересекающие  $\Sigma$  по окружности (действительной, мнимой или вырожденной в точку) – это плоскости вида

$$\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}x \pm \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}z = \text{const}$$

Действительная окружность:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Мнимая окружность:

$$x^2 + y^2 = -a^2$$

Окружность, вырожденная в точку:

$$x^2 + y^2 = 0$$

## Лекция 19. Сечения поверхностей. Стереографическая проекция

### Общий вид плоскостей, образующих в сечении окружность

На прошлой лекции было сформулировано утверждение:

Утверждение. Пусть поверхность  $\Sigma$  задаётся в прямоугольной системе координат уравнением

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + p(x, y, z) = 0$$

$$\deg p \leq 1$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \quad \lambda_2 \neq 0$$

Тогда плоскости, пересекающие  $\Sigma$  по окружности (действительной, мнимой или вырожденной в точку) – это плоскости вида

$$\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}x \pm \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}z = \text{const}$$

Как понять, что сечение данной поверхности будет окружностью? Через окружность можно провести сферу. Нам нужно, чтобы уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') + p(x, y, z) = 0$$

было уравнением сферы. То есть его квадратичная часть должна иметь вид:

$$\mu(x^2 + y^2 + z^2)$$

Выпишем коэффициенты при  $xy, xz, yz$ :

$$xy: \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0$$

$$xz: \alpha\gamma' + \alpha'\gamma = 0$$

$$yz: \beta\gamma' + \beta'\gamma = 0$$

Из этих равенств следует, что хотя бы один из коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$  равен нулю.

Предположим противное: пусть  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ . Тогда

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{\gamma'}{\gamma}$$

Но эти три равенства несовместимы. Получаем противоречие. Таким образом, хотя бы один из коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$  равен нулю.

Пусть  $\beta = 0$ . Тогда

$$(\alpha x + \gamma z)(\alpha x - \gamma z) = \alpha^2 x^2 - \gamma^2 z^2$$

Положим

$$\alpha^2 = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$\gamma^2 = \lambda_3 - \lambda_2$$

## Нахождение канонического вида сечения

Пусть

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

Как найти канонический вид сечения?

Ошибка:

Пусть  $\gamma \neq 0$ . Выразим  $z$ :

$$z = -\frac{\alpha}{\gamma}x - \frac{\beta}{\gamma}y - \frac{\delta}{\gamma}$$

И подставим в уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

Тогда получим многочлен  $F(x, y)$ . Но  $x, y$  – не прямоугольная система координат в плоскости  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  при  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . Поэтому подобный способ – ошибочный.

Не ошибочно будет выразить параметрически:

$$x = u$$

$$y = v$$

$$z = -\frac{\alpha}{\gamma}u - \frac{\beta}{\gamma}v - \frac{\delta}{\gamma}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\alpha}{\gamma} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\beta}{\gamma} \end{pmatrix} v$$

Столбцы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\alpha}{\gamma} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\beta}{\gamma} \end{pmatrix}$$

не являются ортонормированным базисом.

## Нахождение ортогональных инвариантов сечения по уравнениям поверхности и плоскости

Уравнение поверхности второго порядка:

$$(x \ y \ z \ 1) \hat{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости:

$$(\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Как преобразуются уравнения при замене координат?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

В новых координатах:

$$\begin{aligned} \hat{Q}' &= \hat{C}^T \hat{Q} \hat{C} \\ Q' &= C^T Q C \\ (\alpha' \ \beta' \ \gamma' \ \delta') &= (\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta) \hat{C} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{C}^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} & & & \alpha \\ & \hat{Q} & & \beta \\ & & & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} & & \alpha \\ & Q & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

В новых координатах:

$$\hat{M}' = \hat{C}^T \hat{M} \hat{C}$$

Здесь

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \hat{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} & 0 \\ C^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} & 0 \\ C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристические многочлены  $\chi_M, \chi_{\hat{M}}, \chi_{\hat{Q}}, \chi_q$  – не меняются, если  $C$  и  $\hat{C}$  ортогональны. То есть, если

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} & 0 \\ C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T C = E$$

Также при ортогональных заменах координат инвариантно

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Рассмотрим частный случай, когда  $\alpha = \beta = 0$ .

Пусть  $P$  – ортогональная проекция точки  $O$  на плоскость сечения  $\gamma z + \delta = 0$  (рис. 19.1).  
Подставим:

$$z \rightarrow -\frac{\delta}{\gamma}$$

Получим многочлен с матрицей коэффициентов:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 - \frac{\delta}{\gamma} a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_2 - \frac{\delta}{\gamma} a_{23} \\ a_1 - \frac{\delta}{\gamma} a_{13} & a_2 - \frac{\delta}{\gamma} a_{23} & a_0 - 2 \frac{\delta}{\gamma} a_3 + \frac{\delta^2}{\gamma^2} a_{33} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

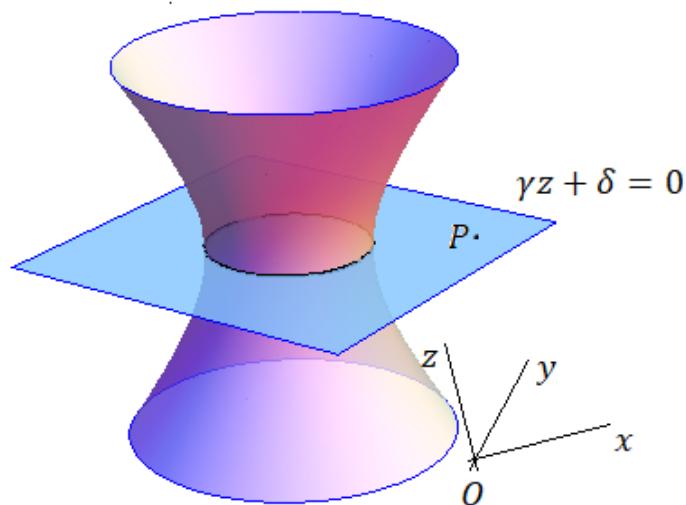


Рис. 19.1

После вычислений, получим следующее:

$$\chi_S(\lambda) = -\frac{\chi_M(\lambda) + \lambda \chi_Q(\lambda)}{\gamma^2}$$

$$\chi_{\hat{S}}(\lambda) = -\frac{\chi_{\hat{M}}(\lambda) + \lambda \chi_{\hat{Q}}(\lambda) - \delta^2 \chi_S(\lambda)}{\gamma^2}$$

### Стереографическая проекция

Стереографическая проекция – центральная проекция из точки  $O'$  на плоскость.

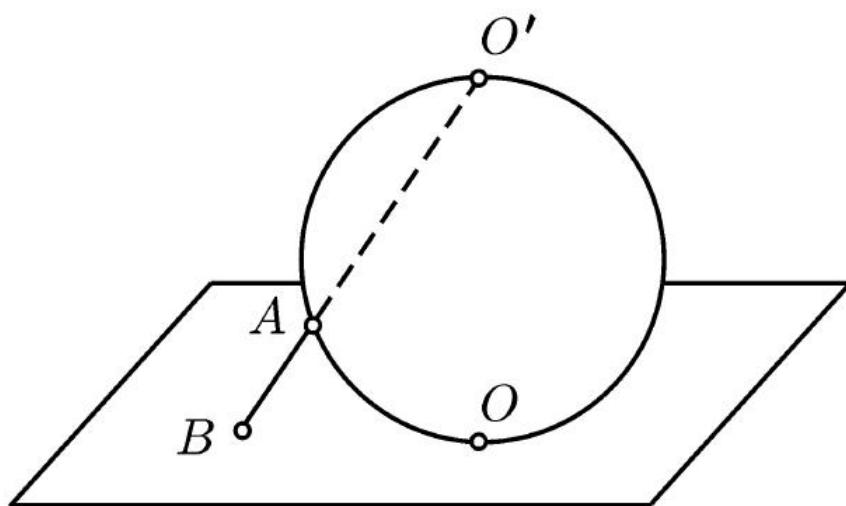


Рис. 19.2 Стереографическая проекция для сферы

Утверждение. Образ любого плоского сечения поверхности  $\Sigma$  при стереографической проекции является либо окружностью, либо прямой.

Доказательство:

Пусть плоскость, пересекающая поверхность, задаётся формулой:

$$\Pi: \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

А поверхность:

$$\Sigma: x^2 + y^2 + \varepsilon(z^2 - 1) = 0$$

$$\varepsilon = \pm 1$$

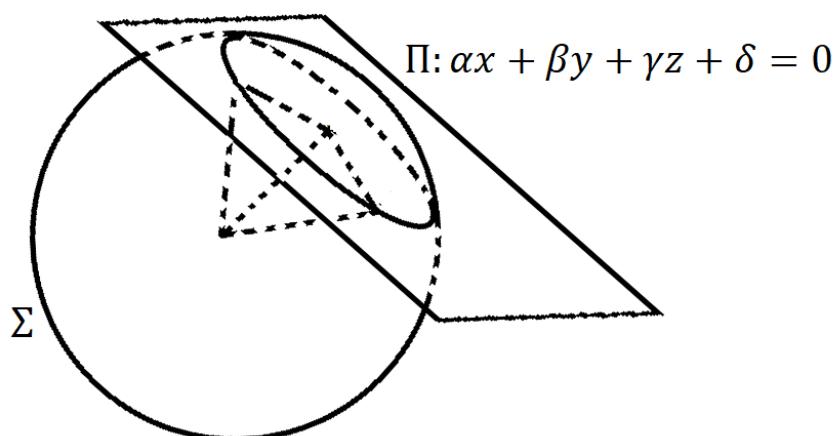


Рис. 19.3

Мы хотим кривую  $\Sigma \cap \Pi$  спроектировать на плоскость  $z = 0$

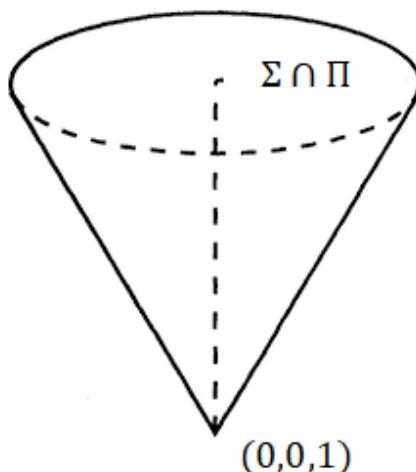


Рис. 19. 4 Конус с направляющей  $\Sigma \cap \Pi$  и вершиной  $(0,0,-1)$

Найдём уравнение конуса с направляющей  $\Sigma \cap \Pi$  и вершиной  $(0,0,-1)$ .

Пусть  $\Pi$  не проходит через  $(0,0,-1)$ .

Уравнение конуса должно иметь вид:

$$x^2 + y^2 + \varepsilon(z^2 - 1) + (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0$$

Точка  $(0,0,-1)$  должна быть особой. Сечение поверхности плоскостью  $z = -1$  уже особо. Выражение

$$x^2 + y^2 + \varepsilon(z^2 - 1) - \frac{2\varepsilon}{\gamma - \delta}(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(z + 1) = 0$$

удовлетворяет условиям.

$$2\varepsilon - \frac{2\varepsilon}{\gamma - \delta}(-\gamma + \delta) = 0$$

Сечение конуса плоскостью  $z = 0$ :

$$x^2 + y^2 + \dots = 0$$

Это уравнение вида окружности.

Утверждение. Стереографическая проекция сферы сохраняет углы пересечения окружностей.

Преобразования, сохраняющие углы, называются конформными.

## Лекция 20. Аффинные преобразования

### Определение аффинного преобразования

Определение. Пусть  $X$  – прямая, плоскость или пространство. Отображение  $f: X \rightarrow X$  называется аффинным преобразованием, если

- 1) для любых трёх попарно различных точек  $A, B, C$  таких, что  $C$  делит  $AB$  в отношении  $\lambda \in \mathbb{R}$ , точка  $f(C)$  делит отрезок  $f(A)f(B)$  в отношении  $\lambda$ .
- 2)  $f$  – биекция

При аффинном преобразовании прямые переходят в прямые.

Для любых точек  $P_1, \dots, P_k \in X$  и  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , таких что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$$

определен

$$\frac{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}$$

Лемма. Если  $f$  – аффинное преобразование, то

$$f\left(\frac{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}\right) = \frac{\lambda_1 f(P_1) + \dots + \lambda_k f(P_k)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}$$

Доказательство:

По индукции по  $k$ .

Если  $k = 2$ , то данное выражение выполнено по определению аффинного преобразования:

$$f\left(\frac{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) = \frac{\lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Переход:

$$\exists i: \lambda_i \neq \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

Без ограничения общности

$$\lambda_2 + \dots + \lambda_k \neq 0$$

Обозначим  $\lambda_2 + \dots + \lambda_k = \mu$ .

$$\frac{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} = \frac{\lambda_1 P_1 + \mu \left( \frac{\lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k}{\lambda_2 + \dots + \lambda_k} \right)}{\lambda_1 + \mu}$$

Обозначим

$$\frac{\lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k}{\lambda_2 + \dots + \lambda_k} = Q$$

Тогда

$$\frac{\lambda_1 P_1 + \mu \left( \frac{\lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k}{\lambda_2 + \dots + \lambda_k} \right)}{\lambda_1 + \mu} = \frac{\lambda_1 f(P_1) + \mu f(Q)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}$$
$$\frac{\lambda_1 f(P_1) + \mu f(Q)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} = \frac{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}$$

Лемма. Если  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , то

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$$

Доказательство:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

$$D = C + B - A$$

Следовательно,

$$f(D) = f(C) + f(B) - f(A)$$

Тогда получаем:

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$$

### Запись аффинного преобразования в координатах

Теорема. Пусть  $X$  – прямая, плоскость или пространство,  $k = 1, 2, 3$  соответственно. Пусть в  $X$  выбрана аффинная система координат

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

- 1) Тогда произвольное аффинное преобразование в этой системе координат имеет вид:

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b},$$

где  $A$  – невырожденная матрица  $k \times k$ ,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

2) Любое отображение такого вида есть аффинное преобразование.

Доказательство:

Зададим систему координат  $O, P_1, \dots, P_k$ .

$$P_i = O + \vec{e}_i$$

Точка с координатами  $(x_1, \dots, x_k)$ :

$$P = O + x_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + x_k \overrightarrow{OP_k} = x_1 P_1 + \dots + x_k P_k + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i\right) O$$

Определим  $A$  следующим образом:

$$(\overrightarrow{f(O)f(P_1)} \quad \dots \quad \overrightarrow{f(O)f(P_k)}) = (\overrightarrow{OP_1} \quad \dots \quad \overrightarrow{OP_k}) A$$

$$f(P_j) = f(O) + \sum_{i=1}^k (a_{ij} \overrightarrow{OP_i})$$

По первой лемме:

$$\begin{aligned} f\left(x_1 P_1 + \dots + x_k P_k + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i\right) O\right) &= \sum_{i=1}^k x_i f(P_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i\right) f(O) \\ \sum_{i=1}^k x_i f(P_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i\right) f(O) &= f(O) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_j a_{ij} \overrightarrow{OP_i} \\ f(O) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_j a_{ij} \overrightarrow{OP_i} &= b_i + \sum_j a_{ij} x_j \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение

$$f: \vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b},$$

где  $A$  – невырожденная матрица  $k \times k$ ,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Если  $\det A = 0$ , то это не биекция.

$$f\left(\frac{\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}}{\lambda + \mu}\right) = A\frac{\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}}{\lambda + \mu} + b = \frac{\lambda(A\vec{x} + \vec{b}) + \mu(A\vec{y} + \vec{b})}{\lambda + \mu}$$

Утверждение. Пусть  $P_1, \dots, P_{k+1}$  – произвольный набор точек, такой что

- Если  $k = 1$ , то  $P_1 \neq P_2$
- Если  $k = 2$ , то  $P_1, P_2$  не коллинеарны
- Если  $k = 3$ , то  $P_1, P_2$  не компланарны

И пусть  $P'_1, \dots, P'_{k+1}$  – другой такой набор. Тогда существует единственное аффинное преобразование, такое что

$$P_i \mapsto P'_i, \quad i = 1, \dots, k+1$$

Другое определение аффинного преобразования:

$f$  – аффинное преобразование, если существуют две аффинные системы координат  $x_1, \dots, x_k$  и  $x'_1, \dots, x'_k$  таких, что  $\forall P \in X$  координаты в первой системе координат совпадают с координатами  $f(P)$  во второй.

## Преобразование матрицы аффинного преобразования при замене координат

В аффинной системе координат аффинное преобразование задаётся с помощью матрицы  $A$  и столбца  $b$ .

Введем матрицу

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аффинное преобразование:

$$\hat{A}' = \hat{C}^{-1} \hat{A} \hat{C}$$

$$A' = C^{-1} A C$$

Утверждение. Матрица аффинного преобразования изменяется при аффинной системе координат по правилу

$$\hat{A}' = \hat{C}^{-1} \hat{A} \hat{C}$$

$$A' = C^{-1} A C$$

$\hat{A}, \hat{A}'$  - расширенные матрицы однородного преобразования в системах координат  $x_1, \dots, x_k$  и  $x'_1, \dots, x'_k$ .

Следствие:

$\det \hat{A} = \det A$  не зависит от выбора аффинной системы координат.

Смысл  $\det A$  - во сколько раз изменяется объём (площадь).

Если  $\det A > 0$ , то преобразование называется собственным. Если  $\det A < 0$ , то преобразование называется несобственным.

## Лекция 21. Изометрии. Классификация изометрий плоскости

### Определение изометрического преобразования

Определение. Изометрия – биекция  $f: X \rightarrow X$ , такая что

$$|f(A)f(B)| = |AB| \quad \forall A, B \in X$$

$X$  – прямая, плоскость или пространство.

Утверждение. Любая изометрия является аффинным преобразованием.

Доказательство:

$A, B, C$  лежат на одной прямой  $\Leftrightarrow$

$$(|AB| - |BC| - |AC|)(|AC| - |AB| - |BC|)(|BC| - |AB| - |AC|) = 0$$

Это условие сохраняется при  $f$ .

$C$  делит  $AB$  в отношении  $\lambda: \mu$ :

$$\mu \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$$

То есть изометрия является аффинным преобразованием.

### Критерии изометричности преобразования

Утверждение. Каждое из следующих условий необходимо и достаточно, чтобы аффинное преобразование  $f$  было изометрией:

- 1) В некоторой прямоугольной системе координат матрица  $f$  ортогональна
- 2) В любой прямоугольной системе координат матрица  $f$  ортогональна
- 3)  $f$  сохраняет все углы и длину некоторого ненулевого вектора
- 4)  $f$  переводит некоторую окружность (сферу) радиуса  $r > 0$  в такую же окружность (сферу)

Доказательство:

Пусть в некоторой прямоугольной системе координат матрица  $A$  ортогональна. В другой прямоугольной системе координат:

$$A' = C^{-1}AC,$$

где  $C$  – ортогональная матрица.

Поэтому критерий 1) равносителен критерию 2).

Пусть выполнен критерий 1). Тогда

$$v \mapsto Av = v'$$

$$(v', v') = v'^T v'$$

$$v'^T v' = (Av)^T Av$$

$$(Av)^T Av = v^T A^T Av$$

$$v^T A^T Av = v^T v$$

$$v^T v = (v, v)$$

То есть преобразование изометрично.

Пусть преобразование изометрично. Тогда

$$\forall v (Av, Av) = (v, v)$$

$$v^T (A^T A) v = v^T v$$

Следовательно,

$$A^T A = E$$

То есть утверждение о том, что некоторое преобразование изометрично равносильно выполнению критерия 1).

Очевидно, что критерии 3) и 4) выполняются для любого изометричного преобразования.

Пусть выполнен критерий 4). Если  $|v| = r$ , то

$$|Av| = r$$

Тогда при выполнении критерия 4) преобразование будет изометричным.

## Классификация изометрий плоскости

Параллельный перенос – это аффинное преобразование с единичной матрицей.

Поворот – это аффинное преобразование, которое в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Изометрические преобразования часто называют движениями.

Теорема Шаля. Всякое собственное изометрическое преобразование плоскости есть либо тождественное преобразование, либо параллельный перенос на ненулевой вектор, либо поворот на некоторый угол  $\alpha \in (0, \pi]$ .

Доказательство:

Ортогональные матрицы  $2 \times 2$  с  $\det A = 1$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица аффинного преобразования не меняется при сдвиге начала отсчета системы координат.

Если матрица

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то это случай параллельного переноса.

Пусть  $\alpha \neq 2\pi n$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Существует единственная неподвижная точка. Она удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha & x_0 \\ -\sin \alpha & 1 - \cos \alpha & y_0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} = 2(1 - \cos \alpha)$$

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0$$

Определение. Скользящая симметрия – преобразование, которое в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ -y \end{pmatrix}$$

Утверждение. Любая несобственная изометрия плоскости – это скользящая симметрия.

Доказательство:

В произвольной прямоугольной системе координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Введем обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos \alpha - 1 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Следовательно,

$$\exists v: \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} v = v$$

Возьмём этот вектор за первый базисный вектор:

$$e_1 = \frac{v}{|v|} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

А за второй базисный вектор возьмем вектор, перпендикулярный  $e_1$ :

$$e_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} e_2 = -e_2$$

В системе координат с базисом  $e_1, e_2$  преобразование будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ -y + b \end{pmatrix}$$

Заменим:

$$\tilde{y} = y - \frac{b}{2}$$

$$\tilde{x} = x$$

Тогда в этой системе координат:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} + a \\ -\tilde{y} \end{pmatrix}$$

## Классификация изометрий пространства

Теорема. Всякое собственное движение пространства есть либо тождественное, либо параллельный перенос, либо винтовое вращение – в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + a \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in (0, \pi]$$

Любое несобственное движение пространства в некоторой прямоугольной системе координат имеет один из видов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in (0, \pi]$$

## Лекция 22. Классификация изометрий пространства. Кватернионы. Сжатие – растяжение

### Классификация изометрий пространства(продолжение)

Теорема. Всякое собственное движение пространства есть либо тождественное, либо параллельный перенос, либо винтовое вращение – в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + a \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in (0, \pi]$$

Любое несобственное движение пространства в некоторой прямоугольной системе координат имеет один из видов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in (0, \pi]$$

Лемма. Если  $A^T A = E$ ,  $A - n \times n, n \equiv 1 \pmod{2}$ , то

$$\det(A - (\det A)E) = 0$$

Доказательство:

Пусть  $\lambda = \pm 1$ . Тогда

$$\det(A - \lambda E) = \det(A(E - \lambda A^T))$$

$$\det(A(E - \lambda A^T)) = \det A \det(E - \lambda A)$$

$$\det A \det(E - \lambda A) = \det A (-\lambda)^n \det(A - \lambda E)$$

$$\det(A - \lambda E) (1 - \det A (-\lambda)^n) = 0$$

Если

$$n \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\lambda = \det A.$$

то

$$2 \det(A - \lambda E) = 0$$

Мы рассматриваем трехмерное пространство ( $n = 3$ ) и  $A^T A = E$

Это означает, что существует ненулевой вектор  $v$ , такой что  $Av = (\det A)v$ .

Выберем ортонормированный базис так, чтобы

$$e_3 = \frac{v}{|v|}$$

В соответствующей системе координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Обозначим матрицу  $2 \times 2$ , которая «входит» в вышенаписанную матрицу как  $*$  за  $B$ .

Известно, что

$$\det B = 1$$

$$B^T B = E$$

$B$  – матрица поворота.

Тогда преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Рассмотрим частные случаи:

1) Пусть  $\det A = 1$  и  $\alpha = 0$ . Тогда преобразование будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{pmatrix}$$

2) Пусть  $\det A = 1$  и  $\alpha \neq 0$ . Тогда преобразование будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + a \end{pmatrix}$$
$$\alpha \in (0, \pi]$$

3) Пусть  $\det A = -1$  и  $\alpha = 0$ . Тогда преобразование будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ -z + c \end{pmatrix}$$

4) Пусть  $\det A = -1$  и  $\alpha \neq 0$ . Тогда преобразование будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

## Кватернионы

Рассмотрим четыре матрицы:

$$\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = -\vec{1}^2$$

$$\vec{ij} = -\vec{ji} = \vec{k}$$

$$\vec{jk} = -\vec{kj} = \vec{i}$$

$$\vec{ki} = -\vec{ik} = \vec{j}$$

Кватернионы:

$$a\vec{1} + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$$

Множество всех кватернионов будем обозначать

$$\mathbb{H} = \{a\vec{1} + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}\}$$

Если  $q_1, q_2$  – кватернионы, то  $q_1 \cdot q_2$  – кватернион.

У кватерниона

$$q = a\vec{1} + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$$

$a\vec{1}$  – вещественная часть  $q$   $Re(q)$

$b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$  – мнимая часть  $q$   $Im(q)$

$$q^* = Re(q) - Im(q) = a\vec{1} - b\vec{i} - c\vec{j} - d\vec{k}$$

$$q^* = \overline{q^T}$$

Введем обозначения:

$$z = a + bi$$

$$w = c + di$$

Тогда

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$q^* = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}$$

$$q_1^* q_2^* = (q_2 q_1)^*$$

$$\det q = z\bar{z} + w\bar{w} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$a, b, c, d$  – прямоугольные координаты в пространстве  $\mathbb{H}$ .

$\det q$  – скалярный квадрат.

Если

$$\det q \neq 0,$$

то

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\det q}$$

Иначе говоря,

$$q q^* = (\det q) \vec{1}$$

Введём обозначения:

$O(n)$  – группа всех ортогональных матриц  $n \times n$

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

$U(n)$  – группа унитарных матриц  $n \times n$ :

$$A \in Mat_n(\mathbb{C})$$

$$A \overline{A^T} = E$$

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

$$|q| = \sqrt{\det q}$$

Например, группа единичных кватернионов:

$$\{q \in \mathbb{H} \mid \det A = 1\} = SU(2)$$

$\mathbb{H}_1$  – пространство чисто мнимых кватернионов, для которых:

$$Re(q) = 0$$

$$q^* = -q$$

Рассмотрим трёхмерное пространство чисто мнимых кватернионов. Зафиксируем

$$q \in SU(2)$$

Рассмотрим отображение  $\varphi: \mathbb{H}_1 \mapsto \mathbb{H}_1$ :

$$w \mapsto qwq^*$$

Так как

$$w^* = -w$$

Следовательно,

$$(qwq^*)^* = (q^*)^*w^*q^* = -qwq^*$$

$$|qwq^*| = |q||w||q^*| = |w|$$

$\varphi$  – изометрия.

Матрица  $\varphi$  в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$Aq: (\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}) = (q\vec{i}q^* \quad q\vec{j}q^* \quad q\vec{k}q^*)Aq$$

$A$  – ортогональная матрица.

$$q \mapsto Aq$$

$$SU(2) \hookrightarrow SO(3)$$

Это отображение является гомоморфизмом.

$$(q_1q_2)w(q_1q_2)^* = q_1(q_2wq_2^*)q_1^*$$

Утверждение.

- 1)  $SU(2) \hookrightarrow SO(3)$  – гомоморфизм
- 2) Ядро =  $\pm 1$
- 3) Образ =  $SO(3)$

Ядро:  $q \in SU(2)$  такое что

$$qwq^* = w \quad \forall w \in \mathbb{H}_1$$

$$q^* = q^{-1}$$

$$qw = wq$$

Следовательно,

$$q = \pm 1$$

Для любой ортогональной матрицы  $3 \times 3$  с определителем, равным единице, справедливо разложение:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть дан кватернион

$$\cos t + \vec{i} \sin t \in SO(2)$$

Рассмотрим матрицу, которая ему соответствует:

$$A_{\cos t + \vec{i} \sin t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & -\sin 2t \\ 0 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$(\vec{1} \cos t + \vec{i} \sin t) \vec{i} (\vec{1} \cos t - \vec{i} \sin t) = \vec{i}$$

$$(\vec{1} \cos t + \vec{i} \sin t) \vec{j} (\vec{1} \cos t - \vec{i} \sin t) = \cos(2t) \vec{j} + \sin(2t) \vec{k}$$

И так далее.

Если

$$q = \cos t \vec{1} + \sin t u$$

где  $u \in \mathbb{H}_1$ .

Тогда  $Aq$  – матрица поворота вокруг  $u$  на угол  $2t$ .

Каждой паре единичных кватернионов можно сопоставить матрицу  $4 \times 4$  следующим образом:

$$q_1, q_2 \in SU(2) \rightsquigarrow A_{q_1 q_2} \in SO(4)$$

Это матрица отображения

$$\mathbb{H} \ni w \mapsto q_1 w q_2^*$$

Это дает гомоморфизм

$$SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$$

Ядро может быть одной из следующих пар:

$$(\vec{1}, \vec{1})$$

$$(-\vec{1}, -\vec{1})$$

Образ:  $SO(4)$ .

## Сжатие – растяжение вдоль взаимно перпендикулярных направлений

Определение. Аффинное преобразование называется преобразованием сжатия – растяжения вдоль взаимно перпендикулярных направлений, если в некоторой прямоугольной системе координат оно имеет следующий вид:

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k),$$

где  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k$ .

Определение. Симметричная матрица  $A = A^T$  называется положительной, если однородный многочлен второй степени с такой матрицей коэффициентов квадратичной части всюду больше нуля, кроме начала координат.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Утверждение. Пусть  $A$  – матрица аффинного преобразования  $f$  в прямоугольной системе координат. Тогда  $f$  – преобразование сжатия – растяжения тогда и только тогда, когда

- 1)  $f$  имеет неподвижную точку
- 2)  $A = A^T$
- 3)  $A > 0$

Доказательство:

Пусть  $f$  – отображение сжатия – растяжения  $\Leftrightarrow$

- 1)  $f$  имеет неподвижную точку
- 2)  $A$  имеет вид  $C^{-1}\Lambda C$ , где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix},$$
$$\lambda_i > 0,$$
$$C^T C = E$$

Проверим, чему равна  $(C^{-1}\Lambda C)^T$ :

$$(C^{-1}\Lambda C)^T = (C^T \Lambda C)^T$$

$$(C^T \Lambda C)^T = C^T \Lambda^T C$$

$$C^T \Lambda^T C = C^{-1} \Lambda C$$

Пусть  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \neq 0$ . Тогда

$$v^T C^{-1} \Lambda C v = (Cv)^T \Lambda (Cv) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 > 0$$

Теперь наоборот предположим, что  $A = A^T$ . Рассмотрим многочлен с матрицей коэффициентов  $A$ .

Существует ортогональная матрица  $C$ , такая что

$$A = C^T \Lambda C,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$A > 0 \Rightarrow \lambda_i > 0, i = 1, \dots, k$$

## Лекция 23. Подобие. Проективная прямая и её проективное преобразование.

### Строение произвольного аффинного преобразования

Теорема. Любое аффинное преобразование является композицией некоторого движения и некоторого сжатия – растяжения.

Доказательство:

Рассмотрим образ единичной окружности (или сферы) (рис. 23.1 и рис. 23.2).

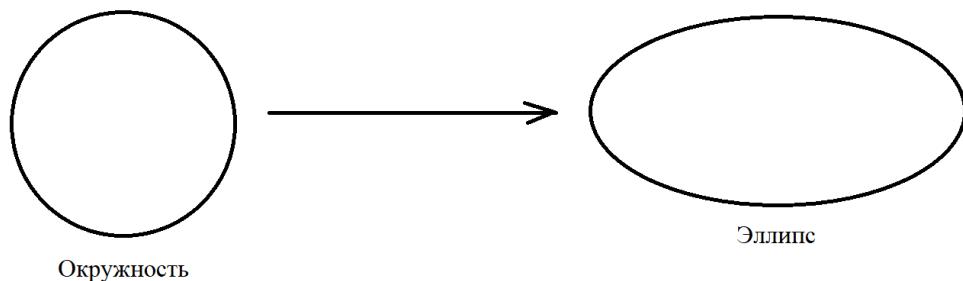


Рис. 23.1

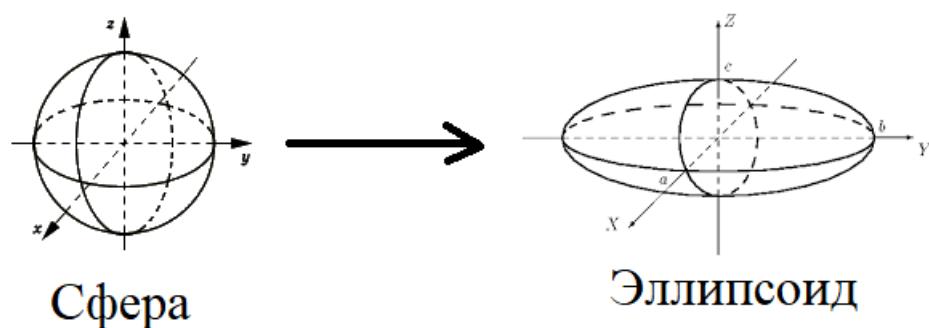


Рис. 23.2

Это преобразование является результатом движения и сжатия-растяжения.

### Преобразование подобия

Определение. Гомотетия – это аффинное преобразование, которое в некоторой системе координат имеет вид:

$$x \mapsto \lambda x,$$

где  $\lambda \neq 0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_k)$ .

Определение. Скалярная матрица – диагональная матрица с одним и тем же числом по диагонали:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Утверждение. Преобразование является гомотетией, если оно не является параллельным переносом и его матрица скалярна.

Определение. Подобие – это биекция  $f$ , такая что  $\exists \lambda > 0 \ \forall A, B$

$$|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$$

Теорема. Пусть  $f$  – отображение плоскости или пространства в себя. Тогда следующие условия равносильны:

- 1)  $f$  – подобие
- 2)  $f$  – композиция движения и гомотетии
- 3)  $f$  – аффинное преобразование с матрицей  $A$  в некоторой прямоугольной системе координат, такой что  $A^T A$  – скалярная матрица
- 4)  $f$  – аффинное преобразование, которое переводит ортогональные векторы в ортогональные
- 5)  $f$  – аффинное преобразование, которое переводит некоторую окружность (или сферу) в окружность (сферу)

Доказательство:

Пусть  $f$  – подобие и пусть

$$|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$$

Рассмотрим композицию  $f$  и гомотетии с коэффициентом  $\frac{1}{\lambda}$ .

$\frac{1}{\lambda}A$  – ортогональна. Следовательно,

$$\frac{1}{\lambda^2}A^T A = E$$

То есть из первого пункта очевидным образом вытекают остальные.

Пусть  $f$  – аффинное преобразование с матрицей  $A$  в некоторой прямоугольной системе координат, такой что  $A^T A$  – скалярная матрица.

$$A^T A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \lambda > 0$$

Тогда

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}A$  – ортогональная матрица.

То есть из пункта 3 следует пункт 2.

Пусть  $f$  – аффинное преобразование, которое переводит ортогональные векторы в ортогональные. Рассмотрим базисные векторы ортонормированного базиса:

$$e_1, \dots, e_n \sim Ae_1, \dots, Ae_n$$

$A^T A$  – диагональная матрица (так как она является матрицей Грама):

$$A^T A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Рассмотрим два ортогональных вектора

$$(e_1 + e_2) \perp (e_1 - e_2)$$

Из того, что

$$A(e_1 + e_2) \perp A(e_1 - e_2)$$

Следует

$$(1 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0) A^T A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Аналогично получаем, что

$$\lambda_i = \lambda_j \ \forall i, j$$

Получается, что из пункта 4 следует пункт 3.

Пусть  $f$  – аффинное преобразование, которое переводит некоторую окружность (или сферу) в окружность (сферу) (Рис. 23.3)

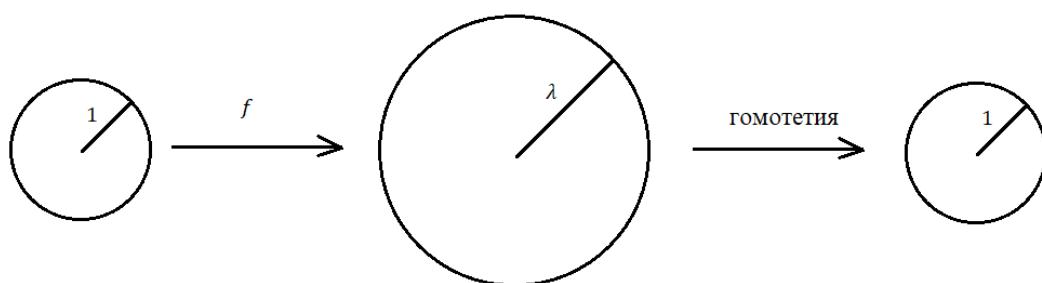


Рис. 23.3

Пример ( $k = 2$ ):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Это преобразование является подобием тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \text{скалярна}$$

Это значит, что

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$ab + cd = 0$$

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$$

А из первого уравнения следует, что

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$$

Тогда два вида матриц подобия на плоскости:

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$$

## Преобразование подобия комплексной прямой

Введём комплексную координату:

$$z = x + iy$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

записывается как

$$z \mapsto (a + ic)z + z_0$$

А отображение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

записывается как

$$z \mapsto (a + ic)\bar{z} + z_0$$

Общий вид комплексных преобразований:

$$z \mapsto (a + ic)z + z_0$$

$$a^2 + c^2 \neq 0$$

## Проективная прямая

$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  - пополненная прямая.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mapsto (x_1 x_2 x_3 x_4) \in \mathbb{R}$$

Число  $(x_1 x_2 x_3 x_4)$  называется двойным (ангармоническим) отношением.

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

Если  $x_i = \infty$ , то берется соответствующий предел.

Например,

$$(\infty 0 1 x) = \frac{(1 - \infty)(x - 0)}{(1 - 0)(x - \infty)} = x$$

Пусть

$$y_i = ax_i + b$$

Тогда

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4)$$

Определение. Проективная прямая – это множество  $X$  с функцией

$$f: \{(x_1 x_2 x_3 x_4) \in X^4 | x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\} \rightarrow \mathbb{R}$$

такой что существует биекция  $X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , которая приводит  $f$  в двойное отношение. Эта биекция будет называться аффинной координатой.

Рассмотрим собственный пучок прямых на плоскости. Выберем аффинную систему координат, в которой  $l_1$  и  $l_2$  будут осями, а  $l_3$  имеет направляющий вектор  $(1,1)$ . (Рис. 23.4)

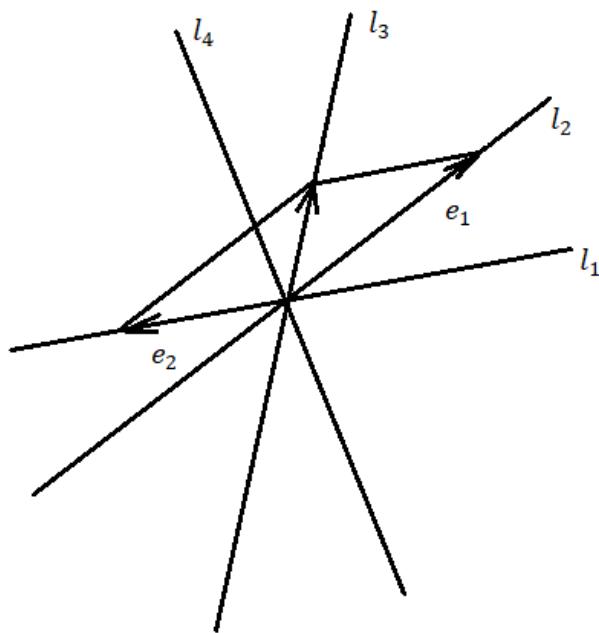


Рис. 23.4

Пусть  $(\alpha, \beta)$  – направляющий вектор  $l_4$ .

$$(l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Введем прямоугольную систему координат (рис. 23.5). Каждая из прямых  $l_1, l_2, l_3, l_4$  пересекает прямую  $y = 1$ .

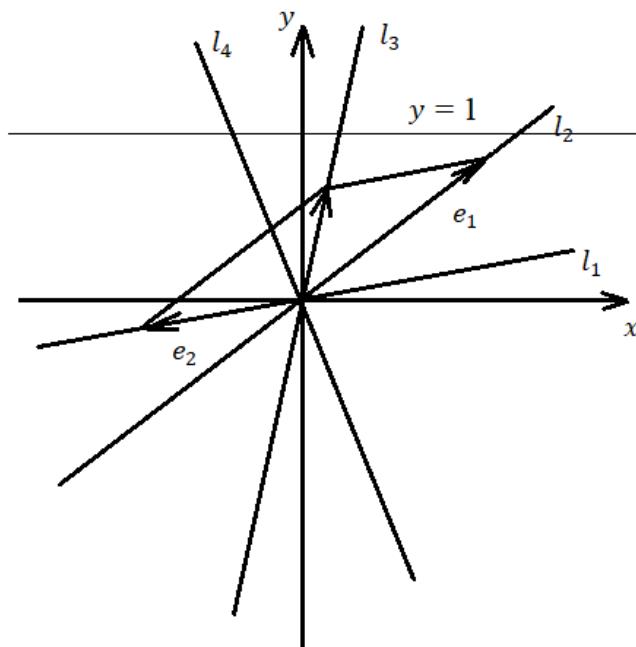


Рис. 23.5

$\infty$  - несобственная точка. Ось  $Ox$  не пересекает прямую  $y = 1$ , поэтому она является несобственной точкой в данном случае.

$l_i$  имеет направляющий вектор  $(x_i, 1)$ .

$$(x_3, 1) = \lambda(x_1, 1) + \mu(x_2, 1) = l_1 + l_2$$

$$e_1 = \lambda(x_1, 1)$$

$$e_2 = \mu(x_2, 1)$$

Для того, чтобы определить  $\lambda, \mu$  нужно решить систему с матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\mu = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}$$

Разложим  $l_4$  через векторы  $e_1, e_2$  и получим:

$$e_1 = (x_3 - x_2)(x_1, 1)$$

$$e_2 = (x_1 - x_3)(x_2, 1)$$

$$(x_4, 1) \sim (x_4 - x_2)(x_1, 1) + (x_1 - x_4)(x_2, 1)$$

$$(x_4 - x_2)(x_1, 1) + (x_1 - x_4)(x_2, 1) = \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2} e_1 + \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_3} e_2$$

$$\alpha = \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$\beta = \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_3}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} = (x_1 x_2 x_3 x_4)$$

Определение. Пусть  $X$  – проективная прямая. Проективное преобразование на  $X$  – биекция  $f: X \mapsto X$ , такая что

$$(f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)) = (x_1 x_2 x_3 x_4)$$

для любых попарно различных  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ .

Утверждение. Общий вид проективного преобразования дополненной прямой  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  таков:

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d},$$

где  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  – невырожденная матрица, однозначно определенная с точностью до множителя.

Доказательство:

Пусть  $f$  – проективное преобразование.

$$(\infty \ 0 \ 1 \ x) = \frac{(1 - \infty)(x - 0)}{(1 - 0)(x - \infty)} = x$$

$$(\infty \ 0 \ 1 \ f(x)) = f(x)$$

Дробно-линейная функция от  $x$ :

$$(f^{-1}(\infty) \ f^{-1}(0) \ f^{-1}(1) \ x) = f(x)$$

## Лекция 24. Преобразования проективной плоскости.

### Проективная система координат

#### Проективное преобразование прямой и его общий вид (продолжение)

Выражение

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

является общим видом проективного преобразования. Но почему любое такое выражение будет проективным преобразованием? Чтобы это проверить, можно доказать, что для таких выражений выполняется двойное соотношение. То есть вычислить

$$\left( \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}, \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d}, \frac{ax_4 + b}{cx_4 + d} \right)$$

Утверждение. Пусть  $X$  – проективная прямая,  $P_1, P_2, P_3$  – попарно различные точки  $X$ ,  $P_1', P_2', P_3'$  – также попарно различные точки  $X$ . Тогда существует ровно одно проективное преобразование  $\varphi: X \mapsto X$ , такое что

$$\varphi(P_i) = P_i', \quad i = 1, 2, 3$$

### Проективная плоскость

Определение. Пополненная плоскость:

$$\Pi \cup \infty_{\Pi},$$

где  $\Pi$  – аффинная плоскость,  $\infty_{\Pi}$  – множество всех несобственных пучков на  $\Pi$  (несобственные точки).

$l$  – прямая  $\sim l \cup \{\infty_l\}$ , где  $\infty_l$  – несобственный пучок, содержащий  $l$ .

Пусть  $P \in \infty_{\Pi}$ . Тогда  $l \cup \{\infty_l\} \ni P$  означает  $l \in P$ .

$\infty_{\Pi}$  – проективная прямая.

Пусть  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \infty_{\Pi}$ . Тогда двойное отношение

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (l_1 l_2 l_3 l_4)$$

$$l_i \in P_i$$

$l_1, l_2, l_3, l_4$  в одном собственном пучке.

На пополненной плоскости:

- 1) Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая

2) Любые две различные прямые пересекаются ровно в одной точке

Если  $l_1 \parallel l_2$ , то  $\infty_{l_1} = \infty_{l_2}$ .

Прямая  $\infty_{\Pi}$  пересекается с прямой  $l$  в точке  $\infty_l$ .

Определение. Проективная плоскость – множество  $X$ , на котором некоторые подмножества названы прямыми и на прямых определено двойное отношение так, что существует биекция  $X \mapsto Y$ , где  $Y$  – пополненная плоскость, при которой

- 1) прямые в  $X$  переходят в прямые в  $Y$
- 2) сохраняется двойное отношение

### Модель связки

В пространстве зафиксируем точку  $O$  и рассмотрим собственную связку прямых  $X$ , проходящих через эту точку.

Прямая в  $X$  – подмножество прямых из этой связки, лежащих в одной плоскости.

Двойное отношение определяется как в пучке.

Пусть  $X$  – проективная плоскость. Проективным преобразованием на  $X$  называется любая биекция  $f: X \mapsto X$ , переводящая прямые в прямые и сохраняющая двойное отношение.

Утверждение. Для любых четырёх точек  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , никакие из которых не лежат на одной прямой, и для такой же четверки  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$  существует единственное преобразование, переводящее  $P_i$  в  $P'_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Доказательство:

Пусть  $f$  – проективное преобразование, такое что

$$f(P_i) = P'_i$$

Пусть прямые  $P_1P_2$  и  $P_3P_4$  пересекаются в точке  $Q$  (рис. 24.1).

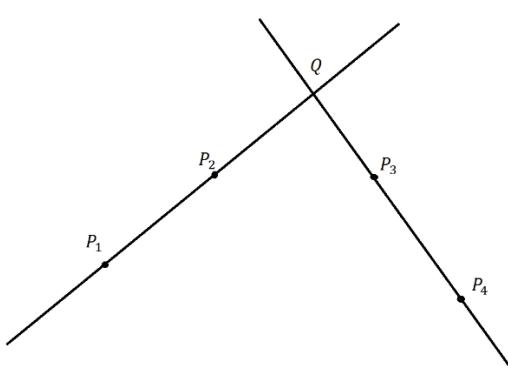


Рис. 24.1

Тогда

$$f(Q) = Q$$

Следовательно,

$$f(R) = R \quad \forall R \in P_1P_2 \cup P_3P_4$$

Почему существует  $f$ , такое что  $f(P_i) = P'_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ?

Пусть  $X$  – собственная связка в пространстве. В модели связки точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$  – проективные прямые, несоппадающие друг с другом.

Построим параллелепипед  $\Omega_{P_1P_2P_3P_4}$ , ребра которого лежат на прямых  $P_1, P_2, P_3$ , а диагональ – на прямой  $P_4$ .

Существует аффинное преобразование, переводящее параллелепипед  $\Omega_{P_1P_2P_3P_4}$  в  $\Omega_{P_1'P_2'P_3'P_4'}$ .

Таким образом получаем отображение  $X \mapsto X$  – проективное преобразование.

## Системы координат на проективной плоскости

Проективные координаты:

Пусть  $X$  – проективная плоскость. Тогда существует биекция

$$X \rightarrow Y \xrightarrow{\text{координаты направляющего вектора в базисе}} x_1, x_2, x_3,$$

где  $Y$  – собственная связка.

Введём обозначение:  $[x_1 : x_2 : x_3]$  – с точностью до множителя,  $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ .

Пример:

$$[1 : 2 : 3] = [-5 : -10 : -15]$$

Аффинная карта:

$$X \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \infty_{\mathbb{R}^2}$$

$\infty_{\mathbb{R}^2}$  – несобственные точки.

Пример:

Прямая

$$l: Ax + By + C = 0$$

$$\infty_l = [\alpha : \beta]$$

$$A\alpha + B\beta = 0$$

## Биекция между проективной системой координат и аффинной картой

Пусть на проективной плоскости задана проективная система координат. Тогда сопоставление точке с проективными координатами  $[x_1:x_2:x_3]$  точки из  $\mathbb{R}^2 \cup \infty_{\mathbb{R}^2}$  по правилу:

$$[x_1:x_2:x_3] \leftrightarrow \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right),$$

если  $x_3 \neq 0$ , и  $[x_1:x_2]$  в противном случае, — есть аффинная карта.

Наоборот, пусть на проективной плоскости задана аффинная карта. Тогда сопоставление собственной точке с координатами  $(x, y)$  тройки  $[x:y:1]$ , а несобственной точке  $[\alpha:\beta]$  тройки  $[\alpha:\beta:0]$  есть проективная система координат.

**Теорема.** Для любых четырех точек  $A_1, A_2, A_3, E$  проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, найдется ровно одна проективная система координат, в которой эти точки имеют координаты, соответственно,  $[1:0:0], [0:1:0], [0:0:1], [1:1:1]$ .

## Лекция 25. Теоремы Дезарга и Паппа. Кривые второго порядка на проективной плоскости

### Общий вид проективного преобразования плоскости в проективных координатах

Матрица в квадратных скобках будет означать ненулевую матрицу с точностью до множителя.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

Утверждение. Общий вид проективного преобразования плоскости в проективных координатах:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

где  $C$  — невырожденная матрица размера  $3 \times 3$ . Наоборот, любое отображение такого вида является проективным преобразованием. При этом матрица  $C$  определена однозначно с точностью до общего множителя.

Доказательство:

На прошлой лекции было сформулировано утверждение, согласно которому для любых четырех точек  $A_1, A_2, A_3, E$  проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, найдется ровно одна проективная система координат, в которой эти точки имеют координаты, соответственно,  $[1:0:0], [0:1:0], [0:0:1], [1:1:1]$ .

То, что любое отображение такого вида является проективным преобразованием, следует из сохранения плоскостей и двойного отношения в собственных пучках при аффинном преобразовании. То, что любое проективное преобразование имеет такой вид, вытекает из одинаковой свободы: в обоих семействах отображение однозначно определяется образом любых четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

### Общий вид проективного преобразования плоскости в аффинной карте

$$[x_1:x_2:x_3] \leftrightarrow \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$$

$$[x:y:1] \leftrightarrow (x, y)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}x + C_{12}y + C_{13} \\ C_{21}x + C_{22}y + C_{23} \\ C_{31}x + C_{32}y + C_{33} \end{bmatrix}$$

Общий вид проективного преобразования в аффинной карте:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} C_{11}x + C_{12}y + C_{13} \\ C_{31}x + C_{32}y + C_{33} \\ C_{21}x + C_{22}y + C_{23} \\ C_{31}x + C_{32}y + C_{33} \end{pmatrix}, & \text{если } C_{31}x + C_{32}y + C_{33} \neq 0 \\ \begin{bmatrix} C_{11}x + C_{12}y + C_{13} \\ C_{21}x + C_{22}y + C_{23} \end{bmatrix}, & \text{если } C_{31}x + C_{32}y + C_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} C_{11}\alpha + C_{12}\beta \\ C_{31}\alpha + C_{32}\beta \\ C_{21}\alpha + C_{22}\beta \\ C_{31}\alpha + C_{32}\beta \end{pmatrix}, & \text{если } C_{31}\alpha + C_{32}\beta \neq 0 \\ \begin{bmatrix} C_{11}\alpha + C_{12}\beta \\ C_{21}\alpha + C_{22}\beta \end{bmatrix}, & \text{если } C_{31}\alpha + C_{32}\beta = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

— невырожденная матрица, однозначно с точностью до общего множителя определенная преобразованием.

### Принцип двойственности, инцидентность точек и прямых

Общее уравнение прямой на проективной плоскости в проективных координатах:

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$$

Прямые  $\leftrightarrow [\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3]$

Говорят, что точка  $P$  и прямая  $l$  на проективной плоскости инцидентны друг другу, если  $P \in l$ .

Теорема. (Принцип двойственности). Любое высказывание о прямых и точках на проективной плоскости, выраженное через отношение инцидентности, равносильно высказыванию, полученному из него заменой точек на прямые, а прямых — на точки.

## Теорема Дезарга

Теорема Дезарга. Пусть попарно различные точки  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  на проективной плоскости таковы, что прямые  $A_1B_1, A_2B_2$  и  $A_3B_3$  попарно различные и пересекаются в одной точке. Тогда точки

$$A_1A_2 \cap B_1B_2,$$

$$A_2A_3 \cap B_2B_3,$$

$$A_3A_1 \cap B_3B_1$$

лежат на одной прямой.

Доказательство:

Рассмотрим это утверждение для точек в пространстве, не лежащих в одной плоскости.

Тогда четверки точек

$$A_i, A_j, B_i, B_j$$

будут лежать в одной плоскости, и прямые  $A_iA_j, B_iB_j$  будут пересекаться.

Точки пересечения будут лежать на линии пересечения плоскостей треугольников  $A_1A_2A_3$  и  $B_1B_2B_3$ .

Теперь «плоское» утверждение получается с помощью проекции этой конструкции на плоскость.

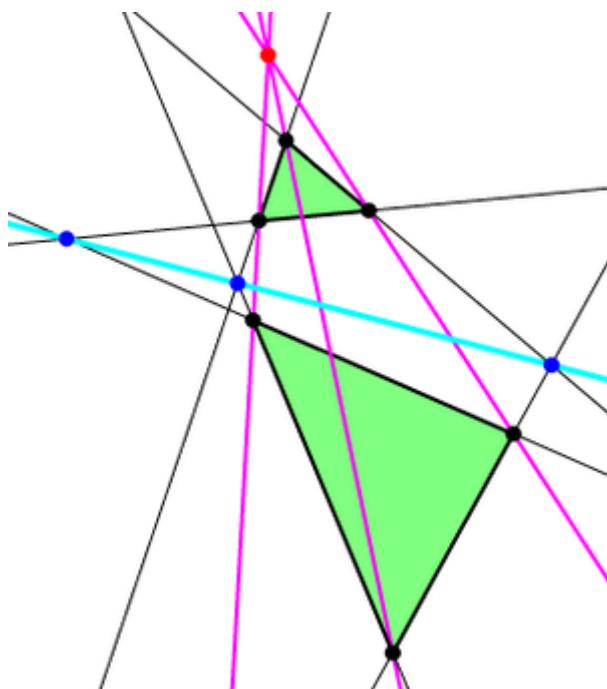


Рис. 25.1

Двойственная теорема Дезарга. Если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что три точки, в которых пересекаются продолжения трёх пар соответственных сторон треугольников, лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку.

### Теорема Паппа

Теорема Паппа. Пусть попарно различные точки  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  на проективной плоскости таковы, что  $A_1, A_2, A_3$  лежат на некоторой прямой  $l_1$ , а  $B_1, B_2, B_3$  — на прямой  $l_2$ , причем  $l_1 \neq l_2$ . Тогда точки пересечения

$$A_1B_2 \cap A_2B_1$$

$$A_2B_3 \cap A_3B_2$$

$$A_3B_1 \cap A_1B_3$$

лежат на одной прямой.

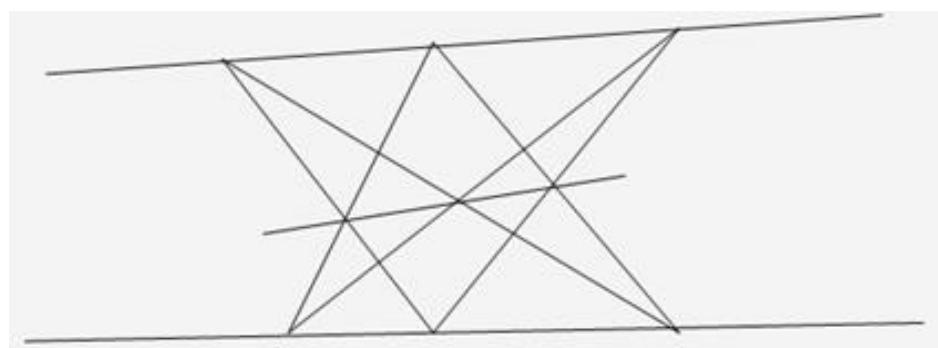


Рис. 25.2

Теорема Паппа является вырожденным случаем в теореме Паскаля: если заменить в теореме Паскаля вписанный в конику шестиугольник на вписанный в пару пересекающихся прямых, то она станет эквивалентной теореме Паппа.

Двойственная формулировка является вырожденным случаем Теоремы Брианшона.

### Кривые второго порядка на проективной плоскости

Алгебраические кривые:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$F$  — однородный многочлен.

$\deg F$  — порядок кривой.

В случае  $\deg F = 2$ :

$$\sum_{i,j=1,2,3} a_{ij} x_i x_j = 0$$

Утверждение. Пусть алгебраическая кривая  $\Gamma$  на проективной плоскости в однородных координатах задается уравнением

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

порядка  $m$ . Пусть  $x, y$  — аффинные координаты в аффинной карте, соответствующей системе  $x_1 : x_2 : x_3$ .

Если кривая  $\Gamma$  не содержит прямую  $x_3 = 0$ , то собственная часть этой кривой в аффинной карте  $x, y$  задается уравнением

$$F(x, y, 1) = 0,$$

которое также имеет порядок  $m$ , а множество несобственных точек совпадает с множеством несобственных пучков прямых, имеющих асимптотическое направление для кривой

$$F(x, y, 1) = 0$$

Если кривая  $\Gamma$  содержит прямую  $x_3 = 0$  с кратностью  $r$ , то в аффинной карте  $x, y$  собственная часть  $\Gamma$  задается уравнением

$$F(x, y, 1) = 0,$$

имеющим порядок  $m - r$ .

Доказательство:

Пусть

$$F(x, y, 1) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = ?$$

$$a_{11} \left( \frac{x_1}{x_3} \right)^2 + 2a_{12} \left( \frac{x_1 x_2}{x_3^2} \right) + a_{22} \left( \frac{x_2}{x_3} \right)^2 + 2a_1 \frac{x_1}{x_3} + 2a_2 \frac{x_2}{x_3} + a_0 = 0$$

Умножим это уравнение на  $x_3^2$ :

$$a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_1x_1x_3 + 2a_2x_2x_3 + a_0x_3^2 = 0$$

Асимптотические направления:

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$$

## Проективная классификация кривых второго порядка

Теорема. Всякая кривая второго порядка на проективной плоскости с помощью выбора проективной системы координат  $x_1 : x_2 : x_3$  может быть приведена ровно к одному из следующих видов:

- 1)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  (мнимый овал);
- 2)  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$  (овал);
- 3)  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  (пара мнимых прямых );
- 4)  $x_1^2 - x_2^2 = 0$  (пара различных действительных прямых );
- 5)  $x_1^2 = 0$  (пара совпадающих прямых ).

## Лекция 26. Овал как проективная прямая. Гиперболический поворот

### Овал как проективная прямая

Утверждение. Пусть  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  — два овала на проективной плоскости. Пусть  $A, B, C \in \Gamma$  и  $A_1, B_1, C_1 \in \Gamma'$  — две тройки различных точек. Тогда существует ровно одно проективное преобразование этой проективной плоскости, при котором точки

$$\Gamma \mapsto \Gamma'$$

$$A \mapsto A'$$

$$B \mapsto B'$$

$$C \mapsto C'$$

Доказательство:

Пусть  $D$  — точка пересечения касательных к  $\Gamma$ , проведенных в точках  $A$  и  $B$ , а  $D'$  — точка пересечения касательных к  $\Gamma'$  в точках  $A'$  и  $B'$ .

Существует ровно одно проективное преобразование, переводящее  $A, B, C, D$  соответственно в  $A', B', C', D'$ . Оно переводит  $\Gamma$  в некоторый овал  $\Gamma''$ , который касается прямых  $A'D'$  и  $B'D'$  в точках  $A'$  и  $B'$  соответственно и проходит через  $C'$ .

Это пять однородных условий на коэффициенты уравнения овала. Показав их независимость, получим  $\Gamma''\Gamma'$ .

Утверждение. Пусть  $P_1, P_2, P_3, P_4, P$  — точки некоторого овала  $\Gamma$  на проективной плоскости, причем первые четыре из них попарно различны. Тогда двойное отношение четверки прямых  $PP_1, PP_2, PP_3, PP_4$  не зависит от точки  $P$  (если  $P \neq P_i$ , то под прямой  $PP_i$  подразумевается касательная к  $\Gamma$  в точке  $P$ ).

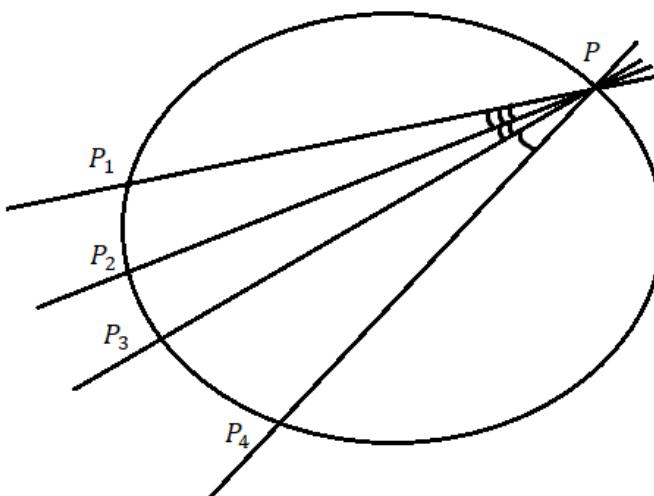


Рис. 26.1

Доказательство:

Поскольку все овалы на проективной плоскости одинаковы, достаточно доказать для одного конкретного. В качестве  $\Gamma$  возьмем окружность.

Тогда для любой точки  $P' \in \Gamma$  четверку прямых  $PP_1, PP_2, PP_3, PP_4$  можно перевести в четверку  $P'P_1, P'P_2, P'P_3, P'P_4$ , так как соответствующие углы между прямыми в этих четверках одинаковы.

## Гомоморфизм $\mathrm{PGL}(2) \rightarrow \mathrm{PGL}(3)$

Пусть  $\Gamma$  — некоторый овал на проективной плоскости  $X$ . Любое проективное преобразование овала  $\Gamma$  можно однозначно продолжить до проективного преобразования  $X$ .

Это конструкция дает гомоморфизм  $\mathrm{PGL}(2) \rightarrow \mathrm{PGL}(3)$ , который для каждого овала и его параметризации как проективной прямой несложно построить явно. Например, пусть  $\Gamma$  — это парабола  $x = y^2$  с параметризацией  $x(t) = t^2, y(t) = t$ .

Проективное преобразование

$$t \mapsto \frac{at + b}{ct + d}$$

этого овала в соответствующих проективных координатах можно представить умножением на матрицу:

$$\begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \left(\frac{at + b}{ct + d}\right)^2 \\ \frac{at + b}{ct + d} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{at + b}{ct + d}\right)^2 \\ \frac{at + b}{ct + d} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (at + b)^2 \\ (at + b)(ct + d) \\ (ct + d)^2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} (at + b)^2 \\ (at + b)(ct + d) \\ (ct + d)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & d^2 \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Получаем следующий гомоморфизм  $\mathrm{PGL}(2) \rightarrow \mathrm{PGL}(3)$ :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & d^2 \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix}$$

## Общий вид параметризации овала как проективной прямой

Параметризация любого овала как проективной прямой с помощью произвольной аффинной координаты  $t$  в любой аффинной карте  $x, y$  на проективной плоскости имеет вид

$$t \mapsto \begin{pmatrix} C_{11}t^2 + C_{12}t + C_{13} \\ C_{31}t^2 + C_{32}t + C_{33} \\ C_{21}t^2 + C_{22}t + C_{23} \\ C_{31}t^2 + C_{32}t + C_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

— некоторая невырожденная матрица:

$$\det C \neq 0$$

## Гиперболический поворот

Пусть на плоскости зафиксирована некоторая гипербола  $\Gamma$ .

Определение. Аффинное преобразование плоскости, переводящую в себя каждую из ветвей  $\Gamma$  и каждую из асимптот, будем называть гиперболическим поворотом.

В системе координат, оси которой – асимптоты:

$$\Gamma: xy = \text{const}$$

Общий вид гиперболического поворота:

$$(x, y) \mapsto \left( \lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right), \quad \lambda > 0$$

Замена:

$$\lambda = e^a$$

$a$  – угол поворота.

Пусть  $a$  – «угол поворота», переводящий  $A$  в  $B$  или  $B$  в  $A$  (Рис. 26.2).  $a$  будем называть псевдоевклидовой длиной души  $AB$ .

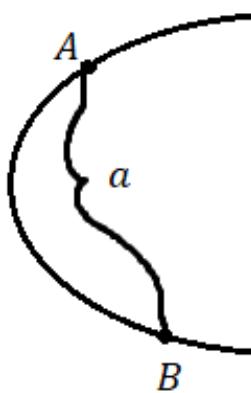


Рис. 26.2 Две точки на гиперболе

Пусть оси аффинной системы координат  $x, y$  являются взаимно сопряженными диаметрами гиперболы  $\Gamma$ , а прямая  $x = y$  является первой из асимптот  $\Gamma$ . Тогда гиперболический поворот  $\rho_a$  в этой системе представляется умножением на матрицу

$$\begin{pmatrix} ch(a) & sh(a) \\ sh(a) & ch(a) \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ch(a) & sh(a) \\ sh(a) & ch(a) \end{pmatrix}$$

Прочие преобразования, сохраняющие гиперболу:

$$\begin{pmatrix} ch(a) & -sh(a) \\ sh(a) & -ch(a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -ch(a) & sh(a) \\ -sh(a) & ch(a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -ch(a) & -sh(a) \\ -sh(a) & -ch(a) \end{pmatrix}$$

Псевдоортогональные преобразования обозначаются  $O(1,1)$ .

### Псевдоевклидово скалярное произведение

Пусть на плоскости зафиксирована некоторая гипербола  $\Gamma$ .

Утверждение. Существует ровно одна билинейная симметрическая функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  от двух векторов плоскости, для которой

$$\Gamma = \{M | \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM} \rangle = 1\},$$

где  $O$  – это центр гиперболы  $\Gamma$ .

Доказательство:

Выберем систему координат так, чтобы

$$\Gamma: xy = 1$$

Тогда

$$\langle(x, y), (x, y)\rangle = xy$$

$$\langle(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{2}$$

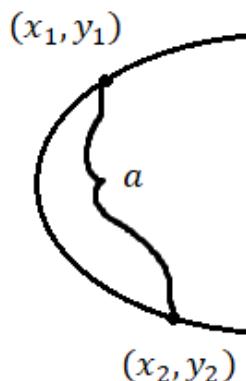


Рис. 26.3 Две точки на гиперболе

$$x_2 = x_1 e^a$$

$$y_2 = y_1 e^{-a}$$

$$y_1 = \frac{1}{x_1}$$

$$\langle(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{2}$$

$$\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{2} = \frac{x_1 y_1 e^{-a} + x_1 y_1 e^a}{2}$$

$$\frac{x_1 y_1 e^{-a} + x_1 y_1 e^a}{2} = ch(a)$$

Мы доказали следующее утверждение.

Утверждение. Пусть  $\gamma$  — дуга гиперболы  $\Gamma$  с концами  $A$  и  $B$ , и пусть  $a$  — псевдоевклидова длина  $\gamma$ . Тогда

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = ch(a)$$

где  $O$  — центр гиперболы  $\Gamma$ .

## Длина дуги через логарифм двойного отношения

Утверждение. Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — асимптоты гиперболы  $\Gamma$ , а  $l_3$  и  $l_4$  — две различные прямые, пересекающие одну из ветвей  $\Gamma$  в точках  $A$  и  $B$ . Тогда длина дуги гиперболы  $\Gamma$  между  $A$  и  $B$  равна

$$\frac{1}{2} |\ln(l_1 l_2 l_3 l_4)| = |\ln(\infty_{l_1} \infty_{l_2} AB)|$$

где в последнем выражении имеется в виду двойное отношение на  $\Gamma$ .

Доказательство:

$$(l_1 l_2 l_3 l_4) = \left( \infty 0 \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \right) = e^{2|a|}$$

$$|AB| = \frac{1}{2} |\ln(l_1 l_2 l_3 l_4)|$$

$$\frac{1}{2} |\ln(l_1 l_2 l_3 l_4)| = |\ln(\infty_{l_1} \infty_{l_2} AB)|$$

## Лекция 27. Плоскость Лобачевского. Модели Клейна и Пуанкаре

### Плоскость Лобачевского

Определение. Плоскостью Лобачевского  $\mathbb{L}^2$  будем называть «верхнюю половину» двуполостного гиперболоида  $\Sigma$ , заданного в аффинной системе координат  $t, x, y$  уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 = 1$$

т.е. его часть, выделяемую неравенством  $t > 0$ .

Скалярное произведение в  $\mathbb{L}^2$ :

$$\langle(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')\rangle = \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma'$$

Пространство  $\mathbb{R}^3$ , наделенное этим псевдоевклидовым скалярным произведением, обозначается через  $\mathbb{R}^{1,2}$  и называется трехмерным пространством Минковского.

Прямые – непустые сечения диаметральными плоскостями.

Расстояние – «угловой размер» дуги, соединяющей точки.

Пусть  $u$  и  $v$  — два касательных вектора к  $\mathbb{L}^2$ , проведенных в одной точке. Угол между ними определяется по формуле

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle}}\right)$$

Уголом между геодезическими лучами, выходящими из одной точки, называется угол между их касательными векторами в их общей начальной точке.

Орициклы – параболы на  $\mathbb{L}^2$ .

### Модель Клейна

Модель Клейна — это центральная проекция  $\mathbb{L}^2$  на плоскость  $t = 1$  из начала координат. Точкам  $\mathbb{L}^2$  соответствуют внутренние точки единичного круга

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

а точкам абсолюта — точки его границы.

Абсолют — множество асимптотических прямых поверхности  $\Sigma$ .

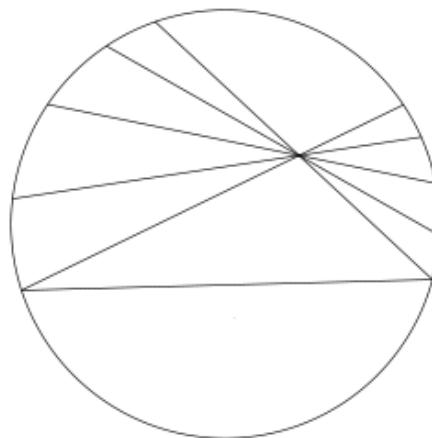


Рис. 27.1 Модель Клейна

Прямые на  $\mathbb{L}^2$  проецируются в хорды единичной окружности.

Расстояние в модели Клейна:

$$|AB| = \frac{1}{2} |\ln(ABCD)|$$

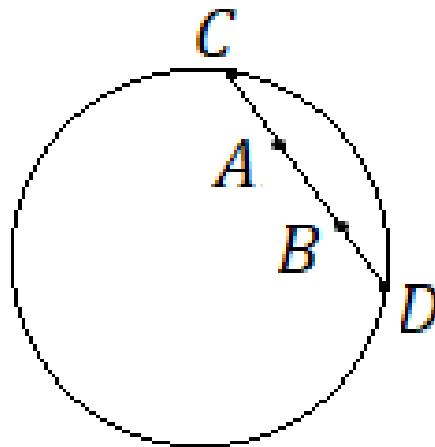


Рис. 27.2

Утверждение. На плоскости Лобачевского для любых трех точек выполнены неравенства треугольника, которые обращаются в равенство только для точек, лежащих на одной прямой.

Доказательство:

Выполним построение (рис. 27.3).

Тогда

$$|AC| < \frac{1}{2} |\ln(EFAC)|$$

$$\frac{1}{2} |\ln(EFAC)| = |AB| + |BC|$$

Следовательно,

$$|AC| < |AB| + |BC|$$

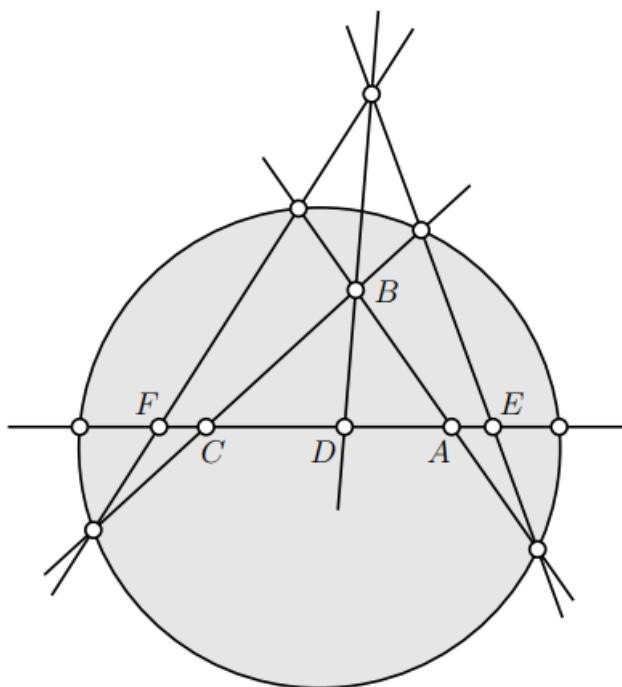


Рис. 27.3

## Модель Пуанкаре

Моделью Пуанкаре называется стереографическая проекция  $\mathbb{L}^2$ , т.е. центральная проекция на плоскость  $t = 0$  из точки  $(-1,0,0)$ .

Образом  $\mathbb{L}^2$  при этой проекции является внутренность единичного круга, а образом абсолюта — его граница.

В модели Пуанкаре сохраняются углы.

В модели Пуанкаре образы прямых — это дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту, и его диаметры без концевых точек, а образы орициклов — окружности, касающиеся абсолюта, с выколотой точкой касания. Углы между образами геодезических лучей в модели Пуанкаре равны соответствующим углам на плоскости Лобачевского.

Расстояние в модели Пуанкаре:

$$|AB| = |\ln(ABCD)|$$

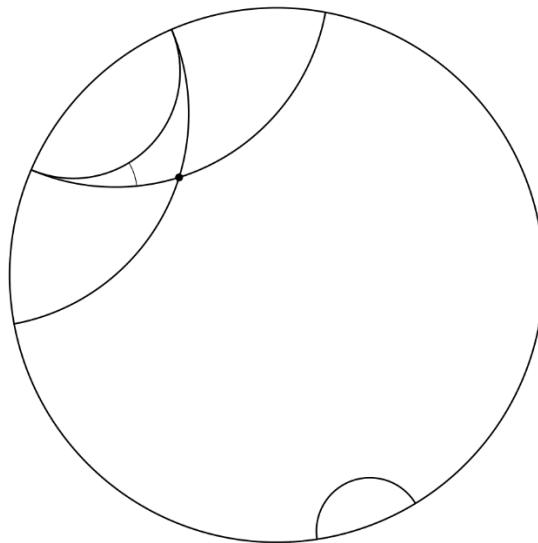


Рис. 27.4 Модель Пуанкаре

### Треугольник на плоскости Лобачевского

Раньше мы использовали следующие формулы:

$$([a, b], [c, d]) = \begin{vmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{vmatrix}$$

$$[[a, b], c] = (a, c)b - (b, c)a$$

Мы определили скалярное произведение в  $\mathbb{L}^2$ :

$$\langle (\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma') \rangle = \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma'$$

Сделаем замену переменных:

$$\hat{z} = t$$

$$\hat{x} = ix$$

$$\hat{y} = iy$$

Если определить векторное произведение в  $\mathbb{L}^2$  как:

$$[(t_1, x_1, y_1), (t_2, x_2, y_2)] = \left( - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_1 & x_1 \\ t_2 & x_2 \end{vmatrix} \right)$$

То будут выполнены следующие равенства:

$$\langle [a, b], [c, d] \rangle = \begin{vmatrix} \langle a, c \rangle & \langle a, d \rangle \\ \langle b, c \rangle & \langle b, d \rangle \end{vmatrix}$$

$$[[a, b], c] = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a$$

$$\langle [u, v], u \rangle = 0$$

$$[v, u] = -[u, v]$$

$$\langle [u, v], w \rangle = \langle [v, w], u \rangle$$

Рассмотрим матрицу  $2 \times 2$  с нулевым следом:

$$(\alpha, \beta, \gamma) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \beta & -\alpha + \gamma \\ \alpha + \gamma & -\beta \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha + \gamma \\ \alpha + \gamma & -\beta \end{pmatrix}$$

Для неё справедливо:

$$\det u = \langle u, u \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = -\text{tr}(uv)$$

$$[u, v] = \frac{1}{2} (uv - vu)$$

## Лекция 28. Гиперболические теоремы синусов и косинусов. Угловой дефект

### Гиперболические теоремы синусов и косинусов

Теорема синусов. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — соответственно противолежащие им углы треугольника на плоскости Лобачевского. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{\sin \alpha}{sh(a)} = \frac{\sin \beta}{sh(b)} = \frac{\sin \gamma}{sh(c)}$$

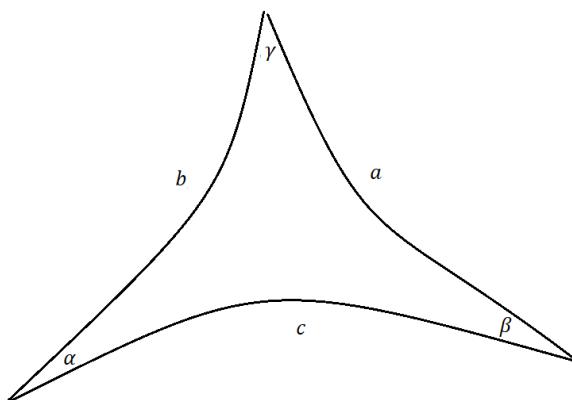


Рис. 28.1

Теорема косинусов. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — соответственно противолежащие им углы треугольника на плоскости Лобачевского. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\cos \gamma sh(a) sh(b) = ch(a) ch(b) - ch(c)$$

$$ch(c) \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma$$

Доказательство теоремы синусов:

В пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,2}$ :

$$\langle [u, v], u \rangle = 0$$

Всякая линейная функция от вектора имеет вид  $\langle u, \cdot \rangle$  для некоторого вектора  $u$ .

Общее уравнение плоскости:

$$\langle u, \overrightarrow{OM} \rangle = const$$

Рассмотрим треугольник (рис. 28.2) и обозначим

$$\overrightarrow{OA} = e_1$$

$$\overrightarrow{OB} = e_2$$

$$\overrightarrow{OC} = e_3$$

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1$$

$$\langle f_i, f_i \rangle = -1$$

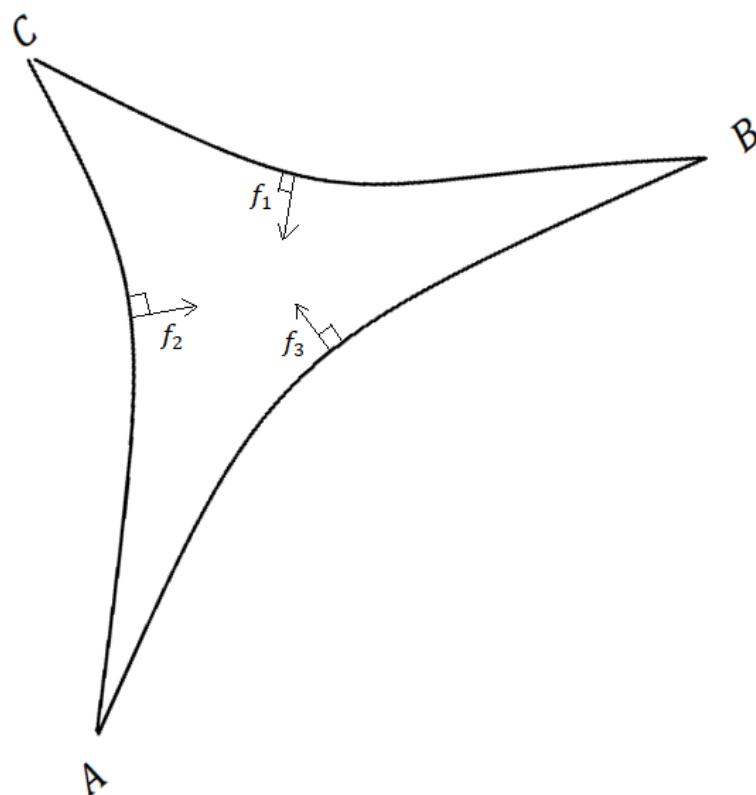


Рис. 28.2

Тогда

$$\langle [e_1, e_2], [e_1, e_2] \rangle = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ch(c) \\ ch(c) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & ch(c) \\ ch(c) & 1 \end{vmatrix} = -sh^2(c)$$

$$f_3 = \frac{1}{sh(c)} [e_1, e_2]$$

Получим следующие тождества:

$$f_3 = \frac{[e_1, e_2]}{sh(c)}$$

$$f_1 = \frac{[e_2, e_3]}{sh(a)}$$

$$f_2 = \frac{[e_3, e_1]}{sh(b)}$$

$$\cos \alpha = \langle f_2, f_3 \rangle$$

$$\langle [f_2, f_3], [f_2, f_3] \rangle = \begin{vmatrix} -1 & -\cos \alpha \\ -\cos \alpha & -1 \end{vmatrix} = \sin^2 \alpha$$

Подытожим, какие соотношения мы имеем:

$$f_1 = \frac{[e_2, e_3]}{sh(a)}$$

$$e_1 = \frac{[f_2, f_3]}{\sin \alpha}$$

$$ch(a) = \langle e_2, e_3 \rangle$$

$$\cos \alpha = \langle f_2, f_3 \rangle$$

Аналогичные соотношения для других двух случаев можно получить циклической перестановкой.

$$e_1 = \frac{[f_2, f_3]}{\sin \alpha}$$

$$\frac{[f_2, f_3]}{\sin \alpha} = \frac{[[e_3, e_1], [e_1, e_2]]}{\sin \alpha sh(b) ch(c)}$$

$$\frac{[[e_3, e_1], [e_1, e_2]]}{\sin \alpha sh(b) ch(c)} = \frac{\langle e_3, [e_1, e_2] \rangle e_1 - \langle e_1, [e_1, e_2] \rangle e_3}{\sin \alpha sh(b) ch(c)}$$

$$\frac{\langle e_3, [e_1, e_2] \rangle e_1 - \langle e_1, [e_1, e_2] \rangle e_3}{\sin \alpha sh(b) ch(c)} = \frac{\langle e_3, [e_1, e_2] \rangle e_1}{\sin \alpha sh(b) ch(c)}$$

$$e_1 = \frac{\langle e_3, [e_1, e_2] \rangle e_1}{\sin \alpha sh(b) ch(c)}$$

Следовательно,

$$\frac{\langle e_3, [e_1, e_2] \rangle}{\sin \alpha sh(b) ch(c)} = 1$$

Проделав подобное для других двух случаев, получим:

$$\frac{\sin \alpha}{sh(a)} = \frac{\sin \beta}{sh(b)} = \frac{\sin \gamma}{sh(c)}$$

Доказательство теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \langle f_1, f_2 \rangle \\ \langle f_1, f_2 \rangle &= \frac{[[e_2, e_3], [e_3, e_1]]}{sh(a) sh(b)} \\ \frac{[[e_2, e_3], [e_3, e_1]]}{sh(a) sh(b)} &= \frac{\begin{vmatrix} \langle e_2, e_3 \rangle & \langle e_2, e_1 \rangle \\ \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_1 \rangle \end{vmatrix}}{sh(a) sh(b)} \\ \frac{\begin{vmatrix} \langle e_2, e_3 \rangle & \langle e_2, e_1 \rangle \\ \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_1 \rangle \end{vmatrix}}{sh(a) sh(b)} &= \frac{\begin{vmatrix} ch(a) & ch(c) \\ 1 & ch(b) \end{vmatrix}}{sh(a) sh(b)} \end{aligned}$$

Получаем:

$$\cos \gamma sh(a) sh(b) = ch(a) ch(b) - ch(c)$$

## Угловой дефект

Выпуклым  $n$ -угольником на плоскости Лобачевского называется пересечение поверхности  $\mathbb{L}^2$  с некоторым выпуклым  $n$ -гранным углом  $\mathcal{A}$  с вершиной в точке  $O$  при условии, что  $\mathcal{A}$  содержится в области

$$\{(t, x, y) | t^2 - x^2 - y^2 > 0\} \cup 0$$

Определение. Угловым дефектом (выпуклого)  $n$ -угольника на плоскости Лобачевского называется разность между суммой его внешних углов и  $2\pi$ .

Теорема. Угловой дефект любого (выпуклого)  $n$ -угольника на плоскости Лобачевского равен его площади.

Доказательство:

Угловой дефект аддитивен. Поэтому можно доказать это для маленького треугольника:

$$\begin{aligned} \pi - \alpha - \beta - \gamma &\approx \frac{\cos \gamma - \cos(\pi - \alpha - \beta)}{\sin \gamma} \\ \frac{\cos \gamma - \cos(\pi - \alpha - \beta)}{\sin \gamma} &= \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} (ch(c) - 1) \\ \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} (ch(c) - 1) &\approx \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \frac{c^2}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta c^2}{\sin \gamma} \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot ab$$

Мы получили:

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma = \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot ab$$

## Прямоугольный шестиугольник

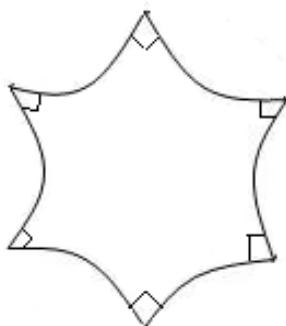


Рис. 28.3 Прямоугольный шестиугольник

Теорема. Пусть  $a, b', c, a', b, c'$  — длины последовательных сторон шестиугольника на  $\mathbb{L}^2$ , все углы которого прямые. Тогда

$$ch(a') = \frac{ch(b)ch(c) + ch(a)}{sh(b)sh(c)}$$

$$ch(b') = \frac{ch(c)ch(a) + ch(b)}{sh(c)sh(a)}$$

$$ch(c') = \frac{ch(a)ch(b) + ch(c)}{sh(a)sh(b)}$$

Доказательство:

Пусть  $\mathcal{A}$  — шестигранный угол, сечением которого является данный шестиугольник, и пусть  $e_1, f_2, e_3, f_1, e_2, f_3$  — единичные векторы, сопряженные относительно  $\Sigma$  плоскостям его последовательных граней и направленные относительно этих граней в ту же сторону, где находится  $\mathcal{A}$ . (Построение, аналогичное рис. 28.3).

Тогда

$$ch(a') = \langle e_2, e_3 \rangle$$

$$\langle e_2, e_3 \rangle = \left\langle \frac{[f_3, f_1]}{sh(b)}, \frac{[f_1, f_2]}{sh(c)} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{[f_3, f_1]}{sh(b)}, \frac{[f_1, f_2]}{sh(c)} \right\rangle = \frac{\begin{vmatrix} \langle f_3, f_1 \rangle & \langle f_3, f_2 \rangle \\ \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle \end{vmatrix}}{sh(b)sh(c)}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \langle f_3, f_1 \rangle & \langle f_3, f_2 \rangle \\ \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle \end{vmatrix}}{sh(b)sh(c)} = \frac{\begin{vmatrix} ch(b) & ch(a) \\ -1 & ch(c) \end{vmatrix}}{sh(b)sh(c)}$$

То есть

$$ch(a') = \frac{ch(b)ch(c) + ch(a)}{sh(b)sh(c)}$$

## Лекция 29. Расстояние между прямыми. Параболический поворот. Изометрия

### Расстояние между непересекающимися прямыми на плоскости Лобачевского

Пары прямых на плоскости Лобачевского бывают трех типов:

1. Пересекающиеся (Рис. 29.1)
2. Имеют одну общую точку в абсолюте (асимптотически параллельные прямые)  
(Рис. 29.2)
3. Прямые и точки абсолюта не пересекаются (Рис. 29.3)

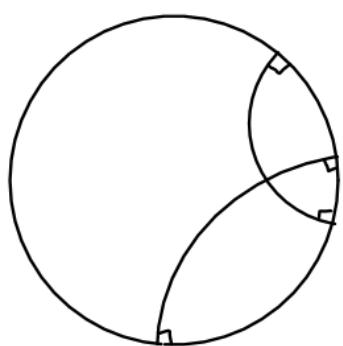


Рис. 29.1

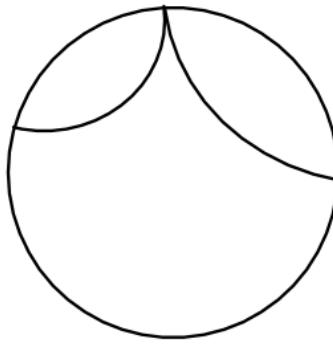


Рис. 29.2

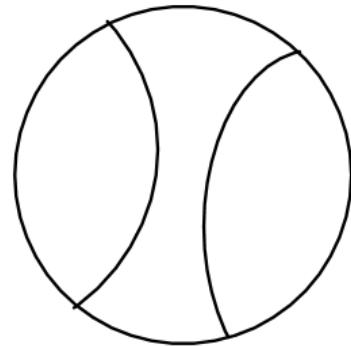


Рис. 29.3

Рассмотрим прямые в трехмерном пространстве Минковского.

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  – пересечения с плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , проходящими через центр двуполостного гиперболоида. (Рис. 29.4)

$$l_i = L^3 \cap \Pi_i$$

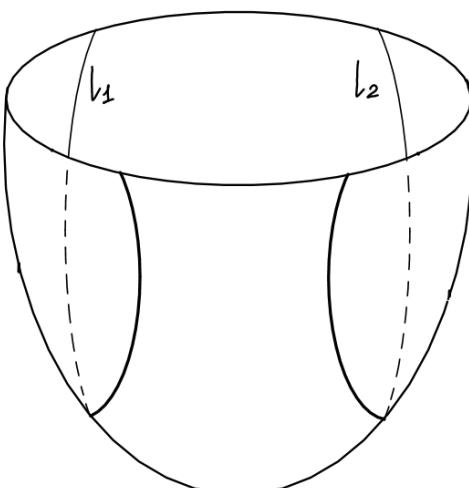


Рис. 29.4

Данные плоскости между собой пересекаются по прямой  $m$ , образуя двугранный угол. (Рис. 29.5)

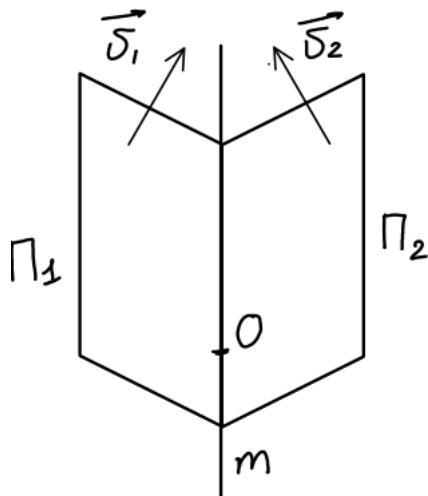


Рис. 29.5

Какой из трех случаев реализуется, определяется тем, пересекает ли прямая  $m$  гиперболоид.

- Если прямая  $m$  пересекает плоскость Лобачевского, то имеет место первый случай;
- Если прямая не задевает гиперболоид, то реализуется третий случай;
- Если прямая  $m$  идет по асимптоте, то мы будем иметь дело со вторым случаем.

Рассмотрим подробнее случай 3 (непересекающиеся и не асимптотически параллельные прямые). Интересующий нас вопрос: как найти общую длину перпендикуляра? (Рис. 29.6)

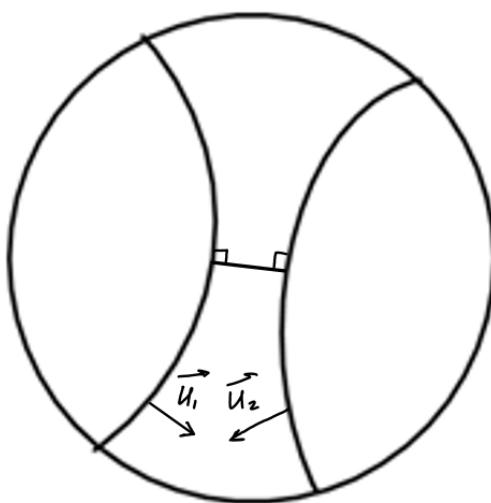


Рис. 29.6

Возьмем два вектора  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ , которые сопряжены плоскостям  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Рассмотрим проекцию вдоль прямой  $m$  (рис. 29.7):

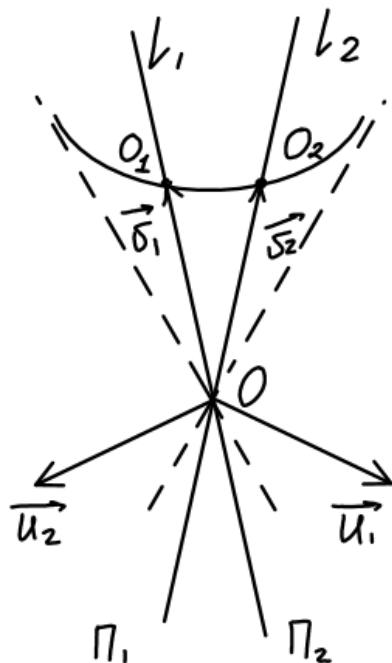


Рис. 29.7

Сопряженное направление к первой плоскости – направление касательной в точке  $M_1$  (при стремлении плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  к асимптотическим направлениям векторы  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  тоже будут стремиться к асимптотическим направлениям).

Далее через т. О параллельно  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  проведем диаметральную плоскость  $\pi$ .

Аналогия со сферической геометрией (рис. 29.8):

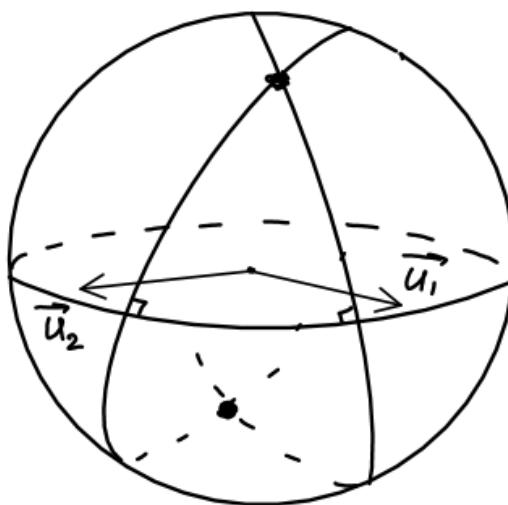


Рис. 29.8

Плоскость, проходящая через  $\vec{u_1}$  и  $\vec{u_2}$ , пересечет сферу по экватору, т.е. по общему перпендикуляру к меридиану.

Оказывается, что этот факт чисто алгебраический. Тогда, возвращаясь к Рис. 29.7, в точках пересечения  $l_i$  с  $\pi_i$  (обозначим их  $O_1$  и  $O_2$ ) линия пересечения будет подходить к  $l_1$  и  $l_2$  по меридиану. Таким образом, общим перпендикуляром является дуга  $O_1O_2$ .

Введем далее вектора:

$$\begin{aligned}\vec{v_1} &\sim \vec{u_2} - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \vec{u_1} \\ \vec{v_2} &\sim \vec{u_1} - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} \vec{u_2} \\ \langle u_1, u_1 \rangle &= \langle u_2, u_2 \rangle = 1 \\ \langle u_1, u_2 \rangle &= a > 0\end{aligned}$$

Длина перпендикуляра  $arcch \langle v_1, v_2 \rangle = arcch \frac{\langle v_1', v_2' \rangle}{\sqrt{\langle v_1', v_1' \rangle \langle v_2', v_2' \rangle}}$ , где  
 $\langle v_1', v_1' \rangle = -1 - a^2 + 2a^2 = a^2 - 1$   
 $\langle v_2', v_2' \rangle = a^2 - 1$   
 $\langle v_1', v_2' \rangle = a - a - a + a^3 = a(a^2 - 1)$

Имеем, длина перпендикуляра:  $arcch(a)$ .

## Параболический поворот

Параболический поворот – аффинное преобразование, сохраняющее параболу.

$$\Gamma: y = x^2$$

Сколько существует таких преобразований? Когда мы говорим, что парабола переходит сама в себя, это значит, что асимптотическое направление остается неизменным. Свобода перемещения сохраняется для оставшихся двух точек.

Утверждение: Пусть  $x \rightarrow ax + b$  – произвольное аффинное преобразование прямой, т.е.  $a \neq 0$ . Тогда

- 1) существует единственное аффинное преобразование плоскости вида  $(x, y) \rightarrow (ax + b, p(x, y))$ , сохраняющее  $\Gamma$ ;
- 2) любое аффинное преобразование, сохраняющее  $\Gamma$ , имеет такой вид.

Доказательство:

Запишем общий вид аффинного преобразования:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Прообраз  $\Gamma$ :  $(c_{11}x + c_{12}y + d_1)^2 - (c_{21}x + c_{22}y + d_2) = 0$ .

Это уравнение должно быть эквивалентно  $x^2 - y = 0 \Rightarrow c_{12} = 0, c_{11} = a, d_1 = b$  ( $a$  и  $b$  – произвольные числа  $a \neq 0$ ).

Должны сократиться свободный член  $\Rightarrow d_2 = d_1^2$  и коэффициент перед  $x \Rightarrow c_{21} = 2c_{11}d_1$ . Осталось выразить коэффициент перед  $y$ :  $c_{22} = c_{11}^2$ .

Замечание: парабола есть аффинная прямая, на которой нет меры длины.

Изобразим параболу и координатную сетку (Рис.29.8). Обозначив любые две точки на этой же параболе, как точки с координатами  $(0,0)$  и  $(1,1)$ , можно по ним подобрать другую систему координат, в которой данная парабола будет тоже задаваться уравнением  $y = x^2$  (Рис. 29.9)

Несмотря на то, что на параболе нет канонически определённой меры длины, на ней есть понятие поворота.

Параболический поворот – это описанное выше преобразование с  $c_{11} = 1$ . После подстановки найденных коэффициентов многочлен  $(c_{11}x + c_{12}y + d_1)^2 - (c_{21}x + c_{22}y + d_2)$  преобразуется в  $c_{11}^2(x^2 - y)$ , т.е. парабола растягивается. При выборе  $c_{11} = 1$  мы будем наблюдать только сдвиг  $x \rightarrow x + d_1$

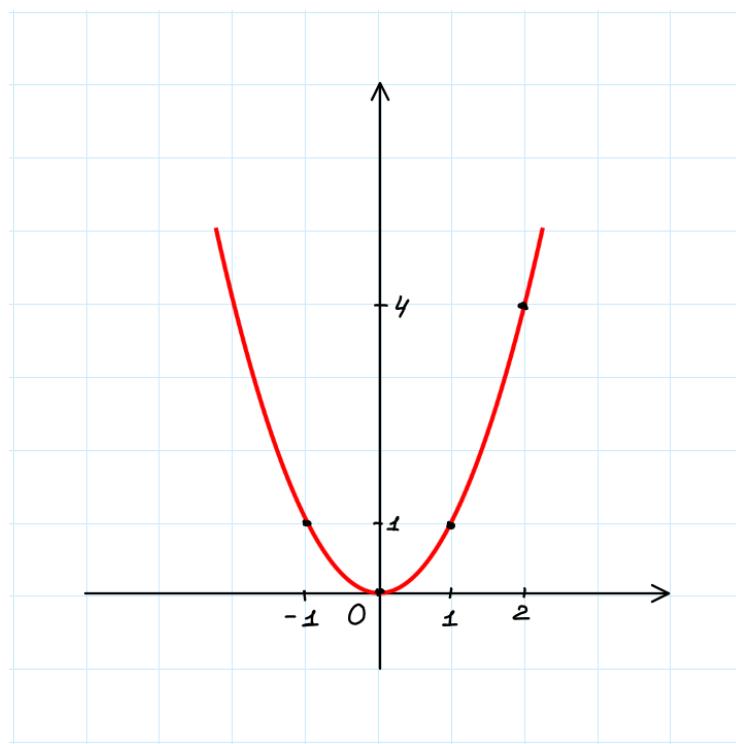


Рис.29.8

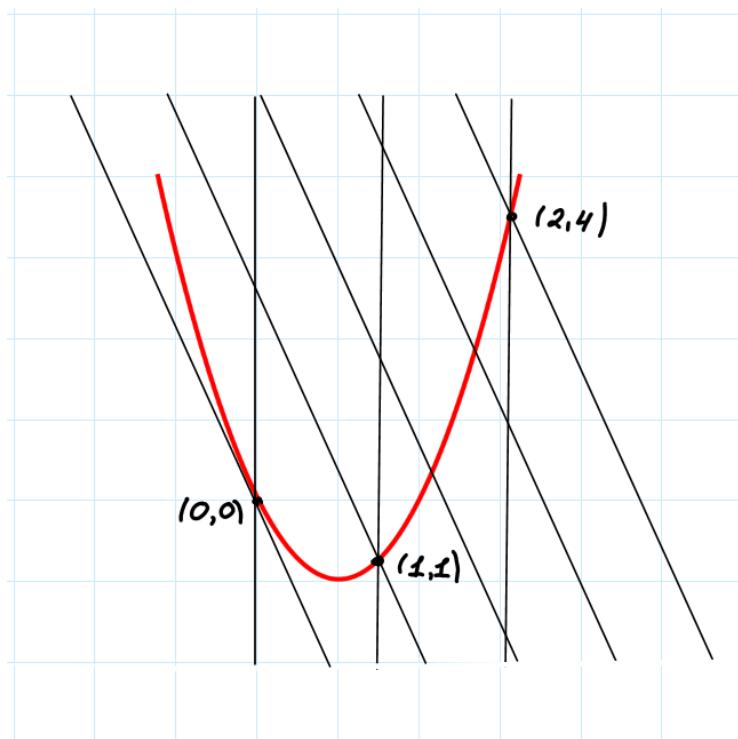


Рис.29.9

### Длина дуги орицикла

Вернемся на плоскость Лобачевского.

$$\begin{cases} t^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

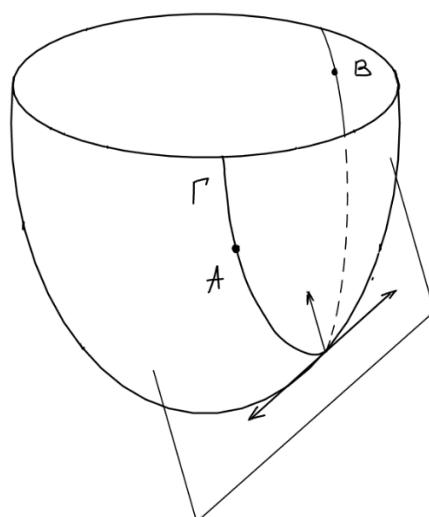


Рис. 29.10

Орицикл – парабола на  $L^2$ . Так как в этом случае мы имеем дело с фиксированным многочленом  $t^2 - x^2 - y^2 - 1$ , то на орициклах возникает длина.

Припишем длину дуге орицикла:

Длина дуги орицикла с концами A, B:  $\sqrt{-\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$  (рис.29.9)

$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle < 0$ , т.к  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ,  $2 - 2ch|AB| = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle$

$|AB| \approx \sqrt{-\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$  при условии  $|AB| \ll 1$

Доказательство:

$$ch|AB| = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = -\frac{1}{2}\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + 1$$

$$ch|AB| \approx 1 + \frac{|AB|^2}{2}$$

Приравнивая эти выражения, получаем  $|AB| \approx \sqrt{-\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$ .

Орицикл обозначим  $\Gamma$  и введем систему координат с началом отсчета в т.О так, чтобы  $\Gamma = \Pi \cap L^2$ ,  $\Pi$ :  $w = 1$  (рис.29. 10) Тогда  $\Gamma$  в  $\Pi$ :  $u^2 = v$ , т.е.  $t^2 - x^2 - y^2 - 1 = -u^2 + v$  при  $w = 1$  (знак в правой части уравнения обеспечен отрицательным скалярным произведением базисного вектора, касательного к параболе).

$t^2 - x^2 - y^2 - 1 = -u^2 + v + (w - 1)(\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta)$  -центр должен быть в т.О, т.е.  $v$ - должно сократиться  $\Rightarrow$

$$(\alpha = 0, \delta = 1, \gamma = 1, \beta = 1)$$

$$-u^2 + v + (w - 1)(\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta) = -u^2 + w^2 + wv - 1$$

Тогда  $t^2 - x^2 - y^2 = -u^2 + w^2 + wv$ . Далее переходим в плоскость  $u, v, w$  и выберем на параболе следующие точки A( $u_1, u_1^2, 1$ ) и B( $u_2, u_2^2, 1$ ) (рис. 29.11).

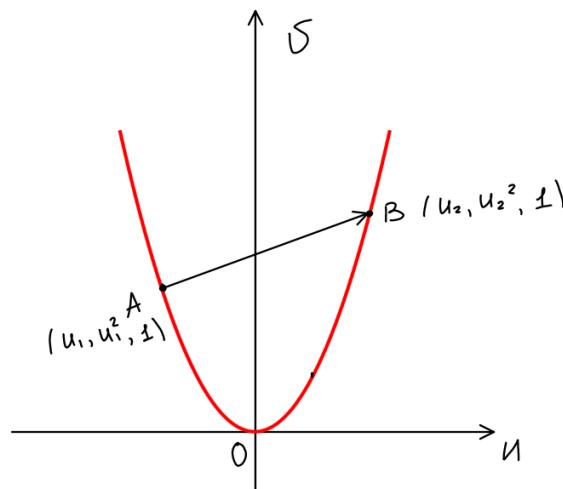


Рис. 29.11

$\overrightarrow{AB}$  в системе координат  $u, v, w: (u_2 - u_1, u_2^2 - u_1^2, 0)$

Чтобы узнать скалярный квадрат  $\overrightarrow{AB}$ , подставим его координаты в  $-u^2 + w^2 + wv$ :

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = -(u_1 - u_2)^2$$

### Изометрические преобразования плоскости Лобачевского

Изометрия – биекция  $f: L^2 \rightarrow L^2$ , т.ч.  $|f(A)f(B)| = |AB| \forall A, B \in L^2$ .

Воспользуемся моделью Клейна: изометрия сохраняет прямые, т.к. три точки, не лежащие на одной прямой, если для них выполнено нестрогое неравенство треугольника.

В этой модели  $|AB| = \frac{1}{2} |\ln (ABCD)|$  (Рис. 29.12).

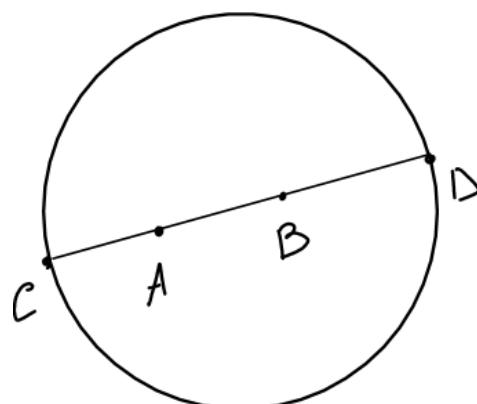


Рис. 29.12

Утверждение. Из того, что расстояние связано с двойным отношением и сохраняется, следует, что сохраняется двойное отношение любых четырех точек на прямой, т.е. изометрия сохраняет двойное отношение.

Таким образом, изометрия плоскости Лобачевского в модели Клейна - проективное преобразование плоскости, ограниченное на круг, что в свою очередь является проективным преобразованием прямой.

$Iso(L^2)$  = проективное преобразование плоскости, сохраняющее окружность

$x^2 + y^2 = 1$  = проективное преобразование прямой

Преобразование плоскости Лобачевского корректно определяет преобразование абсолюта как проективной прямой.

В частности, если взять на плоскости Лобачевского любые три точки на абсолюте и соединить их между собой геодезическими, то получится «идеальный треугольник» площадью  $\pi$  (Рис. 29.13).

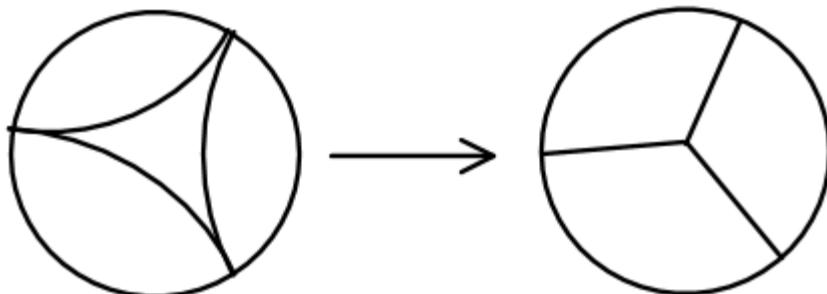


Рис. 29.13

$O(1,2)$  = аффинное преобразование  $R^2$ , сохраняющие скалярное псевдоевклидовое произведение и начала координат (матрицы  $3 \times 3$ ). Эти преобразования сохраняют весь гиперболоид.

$O_+(1,2)$  – преобразования, сохраняющие половинки гиперболоида.

$PO(1,2)$  – преобразования, которые сохраняют конус  $t^2 - x^2 - y^2 = 0$  с точностью до множителей (т.е. проективно, что отражает  $P$ ).

$PGL(2)$  – преобразование проективной прямой.

Все эти группы – одна и та же группа.

## Лекция 30. Классификация движений плоскости Лобачевского. Комплексная проективная прямая

### Напоминание прошлой лекции

На прошлой лекции было обнаружено, что группа проективных преобразований прямой  $PGL(2)$  – это тоже самое, что группа движений плоскости Лобачевского.

Было замечено, что каждое движение плоскости Лобачевского, если рассматривать его в модели Клейна, оказывается ограничением проективного преобразования плоскости на круг. В частности, его можно продолжить на границу круга – овал, имеющий структуру проективной прямой.

Замечание: Овал на проективной плоскости разделяет ее на два неравноправных куска. Из точек внешнего куска можно провести касательные, а из точек внутреннего – нет  $\Rightarrow$  проективное преобразование не может поменять их местами, т.к. они принципиально разные.

В свою очередь, движения плоскости Лобачевского представляю собой аффинные преобразования  $R^{1,2}$ , сохраняющие начало координат и конус  $t^2 - x^2 - y^2 = 0$ .

Обозначение:  $PO(1,2)$  («Р» – с точностью до пропорциональности,  $(1,2)$  – количество 1 и -1 на диагонали)

⇓

Соответствующая группа матриц  $A \in Gh(3)$ : 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} A$$

С другой стороны, группа движения плоскости Лобачевского это то же самое, что группа аффинных преобразований  $R^{1,2}$ , сохраняющие начало координат и  $t^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0, t > 0$

Обозначение:  $O_+(1,2)$  («+» - половина гиперболоида)

Соответствующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, \quad \text{при условии } A = \begin{pmatrix} a_{11} > 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ (условие}$$
  
отражает требование }  $t > 0$ )

Таким образом,  $PGL(2), PO(1,2), O_+(1,2)$  – изоморфные группы.

### Гомоморфизм $PGL(2) \Rightarrow PO(1,2)$

Изобразим трехмерное пространство Минковского  $R^{1,2}$  изобразим матрицами:

$$(t, x, y) \sim \begin{pmatrix} x & -t + y \\ t + y & -x \end{pmatrix}, \quad tr=0$$

$$t^2 - x^2 - y^2 = \det \begin{pmatrix} x & -t+y \\ t+y & -x \end{pmatrix}$$

С точностью до пропорциональности, если  $\text{tr}A=0$  и  $\det A=0$ , то

1) левый нижний элемент матрицы не равен 0

$$[A] = \begin{bmatrix} s & -s^2 \\ 1 & -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -s]$$

2) левый нижний элемент матрицы равен 0

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, s = \inf$$

Получили параметризацию асимптотического конуса.

Сравнивая теперь это с  $\begin{pmatrix} x & -t+y \\ t+y & -x \end{pmatrix}$ , получаем:  $t = \frac{1+s^2}{2}$

$$x = s$$

$$y = \frac{1-s^2}{2}$$

Рациональная параметризация окружности в аффинной карте:  $\begin{pmatrix} \frac{2s}{1+s^2} \\ \frac{1-s^2}{1+s^2} \end{pmatrix}$

Замена:  $s \rightarrow \frac{as+b}{cs+d} \Rightarrow \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $[1 \quad -s] \rightarrow [1 \quad -s] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$  (предлагается проверить).

Тогда проективное преобразование на всем пространстве  $R^{1,2}$ , сохраняющее конус  $\begin{bmatrix} x & -t+y \\ t+y & -x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -t+y \\ t+y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x' & -t'+y' \\ t'+y' & -x' \end{bmatrix}$

След и определитель новой матрицы совпадают со старыми.

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} & ab+cd & \frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{2} \\ ac+bd & ad+bc & \frac{-ac+bd}{2} \\ \frac{-a^2-b^2+c^2+d^2}{2} & -ab+cd & \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2} \end{bmatrix} \in \text{PO}(1,2), \text{ где определитель этой}$$

матрицы равен кубу определителя исходной.

Если  $ad - bc = \pm 1$ , то матрица будет принадлежать  $O(1,2)$ . Если учесть, что левый верхний элемент  $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} > 0$ , то, рассматривая матрицы без учета пропорциональности, можно получить  $O_+(1,2)$ .

## Классификация проективных преобразований прямой (движений плоскости Лобачевского)

На прошлой лекции обсуждалось, что, если задать образы трех различных точек при проективном преобразовании прямой, то это преобразование тем самым будет полностью определено. Это означает, что нетривиальное нетождественное проективное преобразование прямой может иметь не больше 2 неподвижных точек.

Поэтому тип преобразование определяется количеством неподвижных точек:

- 0 неподвижных точек – эллиптические преобразования
- 1 неподвижная точка – параболические преобразования
- 2 неподвижные точки – гиперболические преобразования

Определение: две матрицы  $A$  и  $A'$  подобны, если существует невырожденная матрица  $C$ :  $A' = CAC^{-1}$

Классификацию будем проводить с точностью до подобия.

Теорема: любая матрица  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $ad - bc = 1$ , подобна ровно одной из:

1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5)  $\begin{pmatrix} -ch\varphi & -sh\varphi \\ -sh\varphi & -ch\varphi \end{pmatrix}$

2)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

6)  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3)  $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ , где  $\varphi \in (0, \pi)$

7)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4)  $\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}$

### Доказательство

Если  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  скалярная, то она  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , т.к. скалярная матрица может быть подобна только самой себе.

Если ответ отрицательный, то проверяем след:  $a + d$ :

1.  $|a + d| < 2$ . Тогда  $\varphi = \arccos \frac{a+d}{2}$ .

Подбираем матрицу  $C$ , т.ч.  $C \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C$

Матрица поворота будет иметь такой вид в произвольном базисе из ортогональных векторов равной длины. Тогда один из этих векторов можно выбрать произвольным  $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi + x\sin\varphi = a \\ y\sin\varphi = c \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a-\cos\varphi}{\sin\varphi} \\ 0 & \frac{c}{\sin\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-\cos\varphi}{\sin\varphi} \\ 0 & \frac{c}{\sin\varphi} \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} -\sin\varphi + \cos\varphi \frac{a - \cos\varphi}{\sin\varphi} &= a \frac{a - \cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{cb}{\sin\varphi} \\ 0 = -\sin^2\varphi + a\cos\varphi - \cos^2\varphi - a^2 + a\cos\varphi - bc &= ad + 2a\cos\varphi - a^2 \\ &= -ad + a(a + d) - a^2 = -a(a + d) + a(a + d) = 0 \end{aligned}$$

2. С матрицами 4, 5 можно провести аналогичные вычисления.

3. Рассмотрим 7 матрицу.

Подбираем матрицу  $C$ , т.ч.  $C \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C$

Здесь необходимо начинать со второго столбца. Выберем его произвольно:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{После перемножения матриц}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & x \\ \dots & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & b \\ \dots & d \end{pmatrix}$$

Таким образом,  $C = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix}$

Замечание: матрица  $C$  не должна быть вырожденной. Но, если  $b = 0$ , то за счет того, что матрица не скалярная, всегда можно подобрать подобие, такое, что в новой матрице этот элемент будет отличен от 0.

Замечание: второй столбец матрицы  $C$  может быть любым ненулевым.

Замечание: единственность подобия следует из того, что следы матриц 1-7 различны.

Теорема: Любая матрица  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с  $ad - dc = -1$  подобна ровно одной матрицы вида  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ , где  $\lambda > 0$ .

Доказательство:

$\lambda$  – корень  $\lambda - \frac{1}{\lambda} = a + d$ . Выберем первый столбец произвольно:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x \\ -\frac{y}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + dx \\ b + dy \end{pmatrix}$$

Находим: 
$$\begin{cases} x = \frac{b}{\lambda-d} \\ y = \frac{-b}{d+\frac{1}{\lambda}} \end{cases}$$

Замечание: во всех случаях, когда знаменатель обращается в 0, можно подобрать подобие, которое позволяет этого избежать.

Запишем как будут выглядеть эти матрицы на плоскости Лобачевского:

1)  $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$  – тоже матрица поворота по своей сущности.

2)  $\pm \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ch 2\varphi & sh 2\varphi & 0 \\ sh 2\varphi & ch 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица гиперболического поворота

3)  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  Посмотрим, как выглядит результат умножения на такую матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} + \frac{t+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Такие преобразования с одной точкой на абсолюте называются гиперболическими. Если взять аффинную карту с неподвижной точкой на бесконечности, то мы получим аффинное преобразование (сдвиг).

В нашем случае сохраняется  $t + y$ . Заметим,  $t + y = \text{const} \cap L^2$  – плоскости, сопряженные направлению  $(1,0,1)$  (Рис. 30.1)

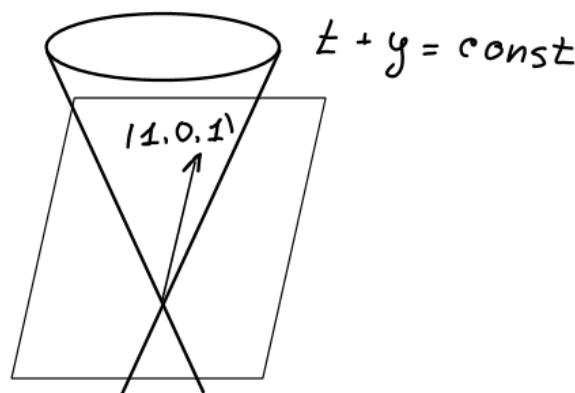


Рис. 30.1

Каждая такая плоскость – орицикл и в каждом из них происходит сдвиг, параболический поворот.

В модели Пуанкаре эти преобразования выглядят так:

1. Гиперболический поворот в плоскости двух отмеченных на рисунке (Рис.30.2). асимптотических направлений. Вдоль каждой из изображенных дуг происходит сдвиг от одной точки до другой.

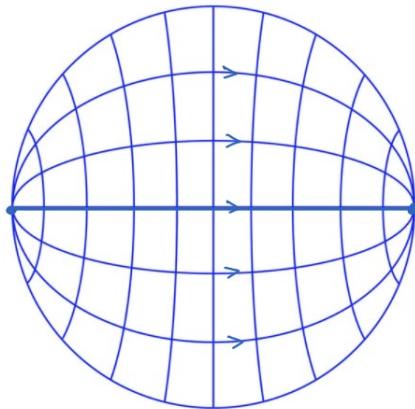


Рис. 30.2

2. Параболические преобразования (Рис.30.3). На бесконечности есть одна фиксированная точка и на каждом из орициклов происходит сдвиг.

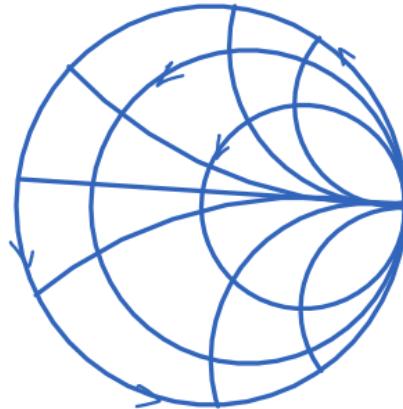


Рис. 30.3

$$4) \begin{pmatrix} e^\varphi & 0 \\ 0 & -e^{-\varphi} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ch2\varphi & 0 & sh2\varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ sh2\varphi & 0 & ch2\varphi \end{pmatrix} \text{ – тоже гиперболический поворот, но с}$$

переворотом относительно инвариантной прямой.

Таким образом, мы знаем все виды движения плоскости Лобачевского: поворот, гиперболический поворот, гиперболический поворот с отражением, параболическое преобразование.

## Комплексная проективная прямая

В данном курсе плоскость комплексных чисел будет называться прямой, т.к. на плоскости нужна одна комплексная координата. То есть комплексная плоскость над полем комплексных чисел является одномерным объектом.

$\mathbb{C}$  – аффинная прямая над  $\mathbb{C}$

$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  – пополненная комплексная прямая

$(z_1 z_2 z_3 z_4)$  и проективные преобразования определяются по аналогии с вещественным случаем.

Если мы смотрим на  $\mathbb{C}$  как на евклидову плоскость, то обнаруживаем, что существует связь между проективными преобразованиями комплексной прямой и плоскости.

## Обобщенная окружность

Определение: Обобщенная окружность в  $\bar{\mathbb{C}}$  – это либо окружность, либо вещественная пополненная прямая.

Утверждение:  $(z_1 z_2 z_3 z_4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 z_2 z_3 z_4$  лежат на одной обобщенной окружности.

Пояснение:  $(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$

Пояснение: «Точки лежат на одной окружности»  $\Leftrightarrow$  угол от  $z_1 - z_3$  до  $z_2 - z_3$  ( $\text{mod } \pi$ ) углу от  $z_1 - z_4$  до  $z_2 - z_4$  (Рис. 30.4)

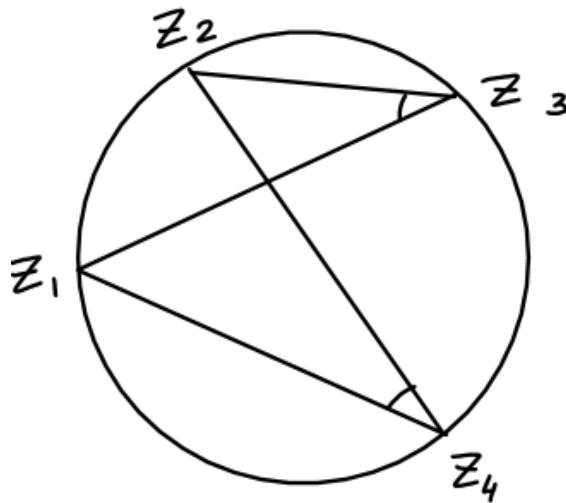


Рис. 30.4

Заметим, что у нас образовалось два двойных отношения на окружности: двойное отношение точек овала  $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\Gamma}$  на вещественной плоскости и  $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\bar{\mathbb{C}}}$ .

Утверждение:  $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\Gamma} = (z_1 z_2 z_3 z_4)_{\bar{\mathbb{C}}}$

Доказательство:

Докажем для окружности, проходящей через начало координат (Рис. 30.5). Рассмотрим отображение  $z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$ . Начало координат перейдет в бесконечность,  $\Gamma$  переходит в прямую с бесконечно удаленной точкой.

Т.к. отображение дробно-линейное с комплексным сопряжением, а  $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\Gamma}$  вещественное, то оно сохраняет  $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\bar{\mathbb{C}}}$  на  $\Gamma$ .

При этом  $\frac{1}{z} = \frac{z}{|z|^2} \Rightarrow$  любые другие точки окружности переходят на ту же прямую и сохраняется  $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\Gamma}$ .

На прямой  $L$   $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\Gamma}$  и  $(z_1 z_2 z_3 z_4)_{\bar{\mathbb{C}}}$  совпадут.

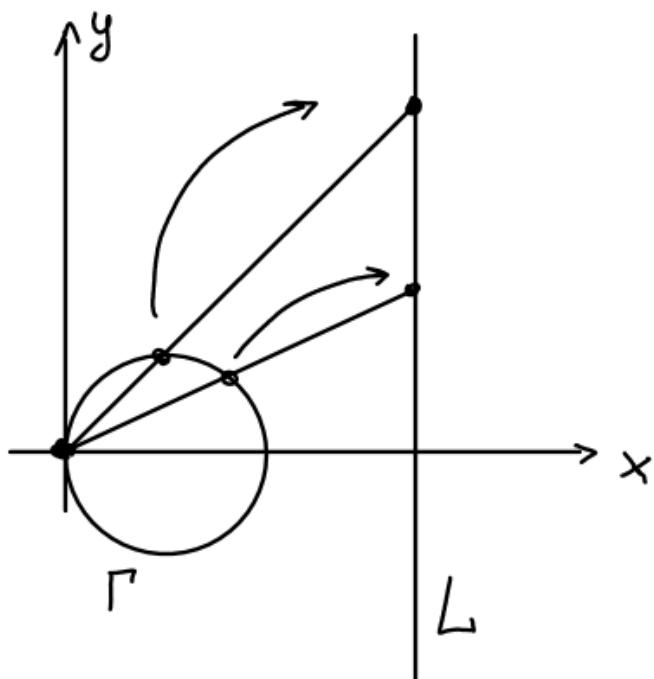


Рис. 30.5

## Лекция 31. Проективное преобразование комплексной прямой. Пространство Лобачевского, его движения

### Проективное преобразование комплексной прямой и его общий вид

На прошлой лекции мы ввели понятие дополненной прямой  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  и по аналогии с вещественным случаем определили проективное преобразование.

Общий вид проективных преобразований:  $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ , где  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  – произвольная невырожденная комплексная матрица, определенная с точностью до множителя. ( $\in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ )

Свойства проективных преобразований:

1. Переводят обобщенную окружность в обобщенную окружность.
2. Сохраняет двойное отношение на обобщенных окружностях.
3. Сохраняет углы пересечений окружностей.

Доказательство пункта 3:

Любое дробно-линейное преобразование общего вида  $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$  раскладывается

в преобразование вида:  $z \rightarrow az + b$  и  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ , т.к.  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{b'}{cz+d} + const$

$z \rightarrow az + b$  – преобразования подобия. Рассмотрим подробнее  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ .

Докажем, что в результате преобразования две произвольные окружности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  перейдут в две другие окружности, пересекающиеся под тем же углом (Рис 31.1). Изобразим дополнительно две окружности  $\Gamma_1'$  и  $\Gamma_2'$ , имеющие те же касательные и проходящие через начало координат.

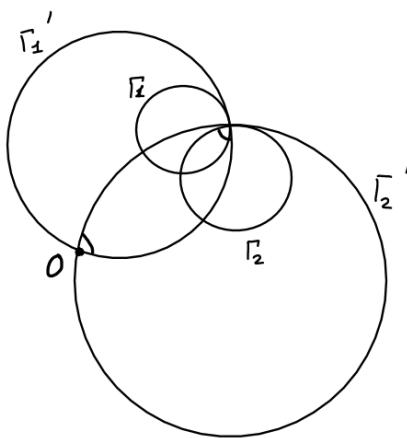


Рис. 31.1

Далее будем проводить рассуждения для преобразования  $z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$  — инверсия (Рис. 31.2).

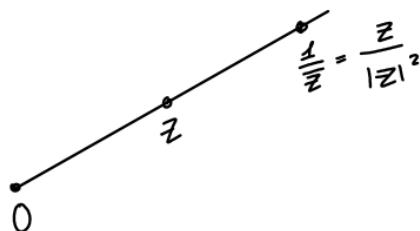


Рис. 31.2

Окружность, проходящая через начало координат, при таком преобразовании не может перейти в окружность, она перейдет в прямую, направление которой совпадет с направлением касательной к окружности в точке начала координат. (Рис.31.4).

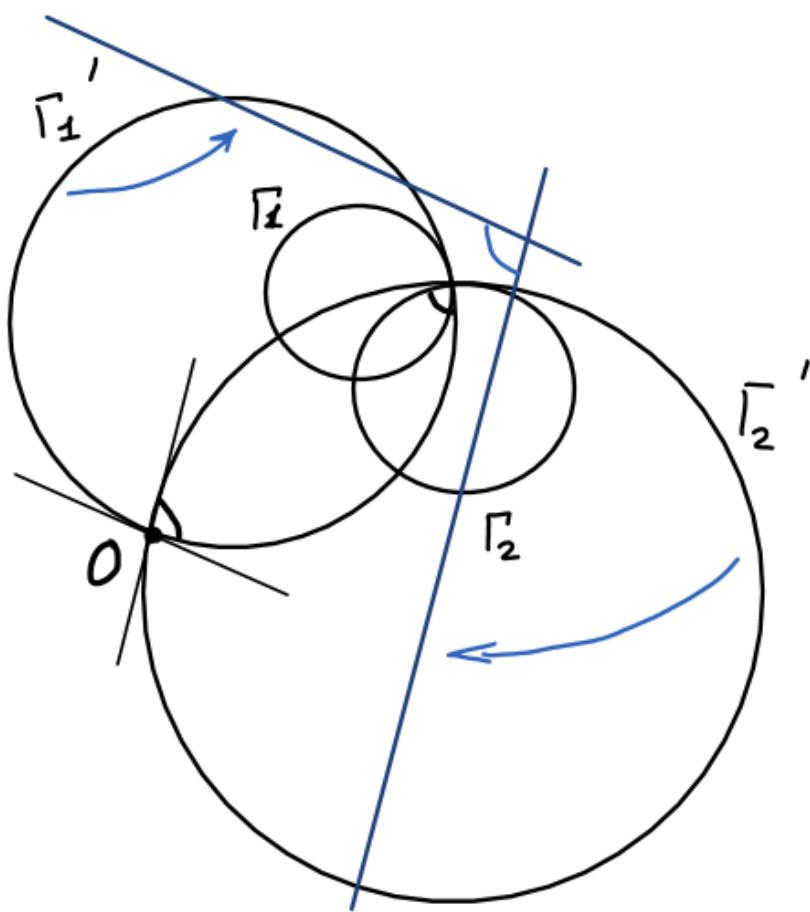


Рис. 31.4

Тогда  $\Gamma_2'$  и  $\Gamma_1'$  перейдут в следующие прямые (не учитываем их положение, только направление), параллельные касательным (Рис. 31.3). Углы между  $\Gamma_2'$  и  $\Gamma_1'$  равны углу между касательными.

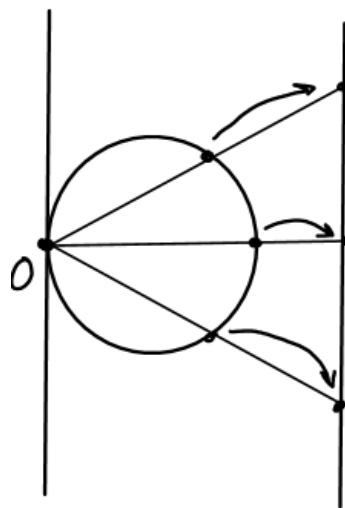


Рис. 31.3

Преобразование  $z \rightarrow \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  тоже обладает свойствами 1-3.

Определение. Будем называть преобразования со свойствами 1,2,3 – конформными.

## Конформные преобразования сферы

Теорема: любая биекция  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  со свойствами 1,2,3 имеет вид  $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$  или  $z \rightarrow \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ .

Доказательство:

Проективное отображение прямой определяется образами трех точек.

Пусть  $\varphi$  обладает свойствами 1,2,3. Возьмем произвольные три точки  $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty)$ .

$\exists!$  Проективное преобразование  $\psi$ , такое что

$$\psi(0) = \varphi(0)$$

$$\psi(1) = \varphi(1)$$

$$\psi(\infty) = \varphi(\infty)$$

Рассмотрим  $\psi^{-1} \circ \varphi$ , обладающее свойствами 1, 2, 3 и

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$\infty \rightarrow \infty$$

Отсюда следует, что  $x \rightarrow x$  для  $\forall x \in \mathbb{R}$ . В какую точку перешла мнимая единица?

Проведем через точку  $i$  всевозможные окружности, которые пересекают вещественную прямую перпендикулярно (Рис. 31.4). Каждая такая окружность может перейти только сама в себя. Таким образом,  $i$  должна перейти в точку пересечения этих окружностей:

$$i \rightarrow i \text{ или } -i$$

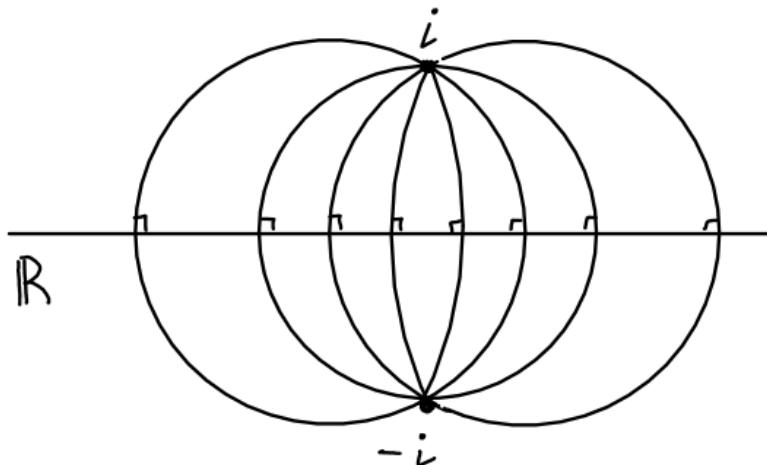


Рис. 31.4

После этого на каждой окружности найдено три точки, образы которых зафиксированы.  $\psi^{-1} \circ \varphi$  – это либо тождественное, либо  $z \rightarrow \bar{z}$ . Далее рассмотрим расширенную комплексную прямую таким образом, чтобы все ее точки стали равноправными.

Таким образом,  $\rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$  или  $z \rightarrow \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  – это конформные преобразования сферы  $S^2$ . Сфера отождествляется с  $\bar{\mathbb{C}}$  с общей стереографической проекцией.

Замечание: используя комплексный анализ можно доказать, что достаточно только 3 условия.

Обозначим группу, состоящую из указанных выше отображений, обозначим  $\text{Conf}(S^2)$

### Пространство Лобачевского $L^3$

Рассмотрим пространство  $R^{1,3}$  с координатами  $t, x, y, z$ .  $L^3$  – половина трехмерного гиперболоида  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, t > 0$ . Плоскость в пространстве  $L^3$  – сечение диаметральной гиперплоскостью, т.е.  $At + Bx + Cy + Dz = 0$ .

Пересечение гиперповерхности с плоскостью  $z = 0$  – плоскость Лобачевского. На примере видно, плоскости в пространстве Лобачевского сами являются плоскостями Лобачевского.

Прямая в  $L^3$  – сечение плоскостью вида  $\begin{cases} A_1t + B_1x + C_1y + D_1z = 0 \\ A_2t + B_2x + C_2y + D_2z = 0 \end{cases}$

Расстояние определяется с помощью скалярного произведения:  
 $\langle (\alpha, \beta, \gamma, \delta), (\alpha', \beta', \gamma', \delta') \rangle = \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta'$

Орисфера – сечение  $L^3$  гиперплоскостью направления, сопряженного асимптотическому  $\Leftrightarrow$  эллиптический параболоид.

Представим, что мы живем в пространстве Лобачевского и надуваем мыльный пузырь (Рис. 31.5). Пока пузырь представляет собой сферу его житель видит, что геометрия пространства, в котором он живет – сферическая. Когда мы надуем пузырь в бесконечный объем, он коснется абсолюта. Теперь для жителя мыльного пузыря он станет, с точки зрения внутренней геометрии, евклидовой плоскостью. При дальнейшем увеличении пузыря он превратится в плоскость Лобачевского. Переход от сферической геометрии к геометрии Лобачевского произойдет в тот момент, когда мы касаемся одной точкой абсолюта. Это будет орисфера.

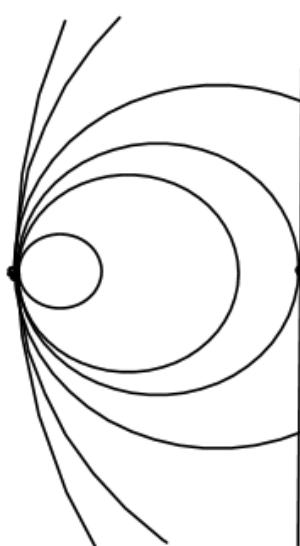


Рис. 31.5

Возьмем любые две точки на орисфере и одну на абсолюте. Через них всегда можно провести окружность – орицикл на какой-то проскости Лобачевского, для которого ранее мы вводили длину дуги.

## Модели Клейна и Пуанкаре

### 1) Модель Клейна

Проектируем из начала координат на гиперплоскость  $t = 1$ , получая единичный шар  $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ . Абсолют:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Плоскости и прямые в модели Клейна – сечения шара обычными плоскостями и прямыми.

### 2) Модель Пуанкаре

Стереографическая проекция их т.  $(-1,0,0,0)$  на гиперплоскость  $t = 0$ . Получаемая проекция – единичный шар  $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ . Абсолют:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Плоскости и прямые в модели Пуанкаре – сечения обобщенными сферами и окружностями перпендикулярными абсолюту.

Утверждение: плоскость любого плоского сечения  $L^3$  в модели Пуанкаре – обобщенная сфера или ее часть.

Утверждение: в модели Пуанкаре сохраняются углы.

Рассмотрим две произвольные плоскости Лобачевского, пересекающиеся под углом  $\alpha$ . (Рис. 31.6). Зависит ли угол пересечения от точки, в которой мы его рассматриваем?

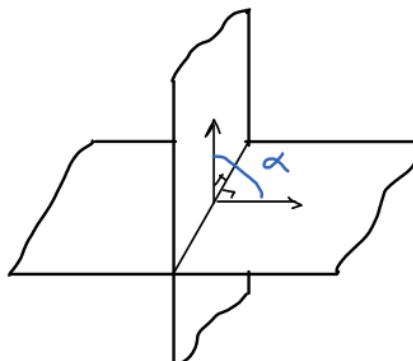


Рис. 31.6

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно рассмотреть модель Пуанкаре, в которой углы сохраняются, плоскости превращаются в сферы. Вдоль окружности, по которой пересекаются сферы, угол пересечения их касательных плоскостей постоянен.

Таким образом, корректно определен двугранный угол.

Под каким углом будут пересекаться абсолют и линия пересечения двух сфер перпендикулярно третьей в модели Пуанкаре? (Рис. 31.7)

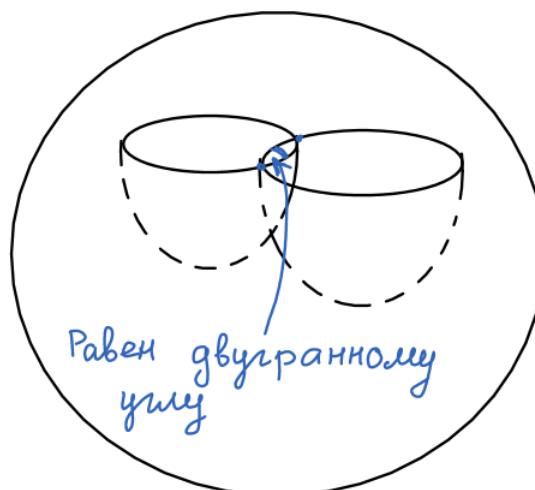


Рис. 31.7

## Движения пространства Лобачевского

Группа  $Iso(L^3) \cong O_+(1,3) \cong PO(1,3)$

$O_+(1,3)$  – аффинное преобразование  $R^{1,3}$ , сохраняющее  $L^3$ ;

$PO(1,3)$  – проективное преобразование пространства, сохраняющее сферу.

На абсолюте сферы и в модели Клейна и в модели Пуанкаре преобразование продолжаются на абсолют одинаково. Движение же должно сохранять углы внутри пространства Лобачевского  $\Rightarrow$  оно должно сохранять углы и на границе.

Таким образом, рассматриваемые нами преобразования, сохраняют окружности, двойное отношение на них и углы  $\Rightarrow Iso(L^3) \rightarrow Conf(S^2)$  – конформное преобразование сферы. Но все ли конформные преобразования сферы мы получим?

Будем рассматривать модель Клейна:

Пусть  $\exists$  конформное отображение сферы в себя:  $P, Q, R \rightarrow P', Q', R'$ . (По доказанному ранее: существует всего два таких преобразования для трех конкретных точек.) Чтобы задать проективное преобразование пространство, нужно пять точек.

Таким образом, нам необходимо по трем точкам построить еще две и убедиться, что это можно сделать ровно двумя способами.

Проведем через  $P, Q, R$  касательные плоскости, которые образуют трехгранный угол. Получаем четвертую точку  $S$ , точку их пересечения, определенную в терминах проективной геометрии. (Рис. 31.8). Далее проведем плоскость, проходящую через  $P, Q, R$ , пересекающую сферу по окружности. Точка  $M$ , образующаяся, если соединить вершины треугольника с точками касания, нам не подходит, так как лежит в той же плоскости, что и  $P, Q, R$  (Рис. 31.9).

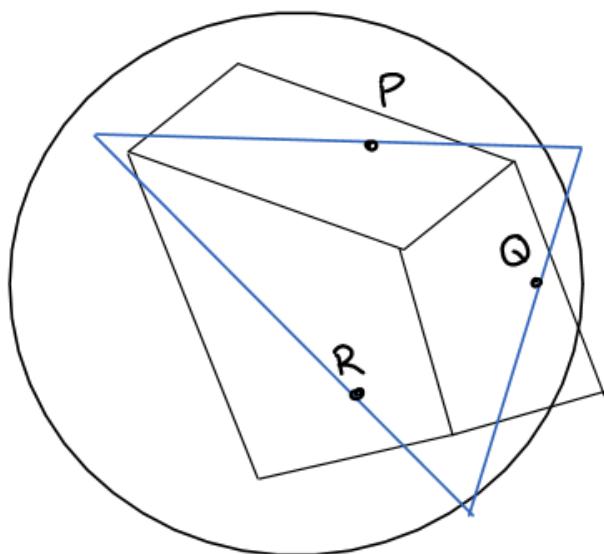


Рис. 31.8

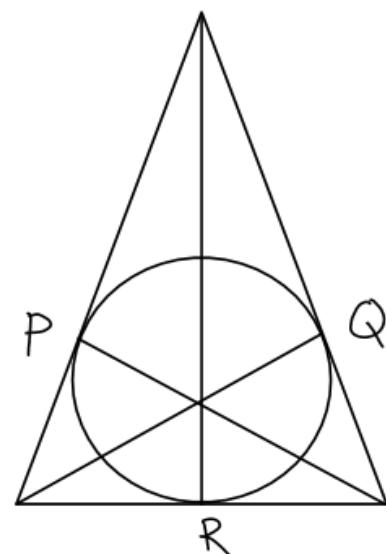


Рис. 31.9

Далее проведем прямую через т.  $M$  и  $S$ , которая пересечет сферу в двух точках  $T_1$  и  $T_2$ , обеспечивая нам тем самым две возможность выбора (Рис. 31.10).

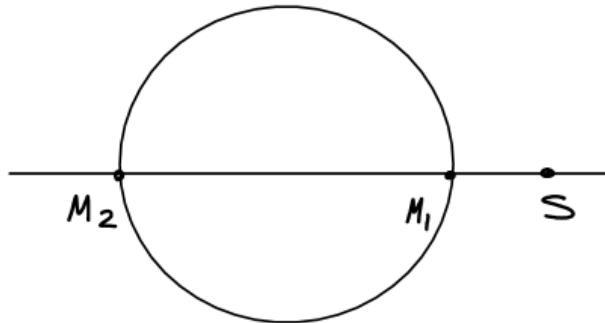


Рис. 31.10

### Изоморфизм $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \Rightarrow \text{PO}(1,3)$

$R^{1,3} \Leftrightarrow$  эрмитовы матрицы ( $\bar{A} = A^T$ )  $2 \times 2$ ,

параметризуемые  $\begin{pmatrix} t+x & y+zi \\ y-zi & t-x \end{pmatrix}$ , где  $\det \begin{pmatrix} t+x & y+zi \\ y-zi & t-x \end{pmatrix} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Абсолют:

$$X = \begin{bmatrix} |\zeta|^2 & \zeta \\ \bar{\zeta} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta \\ 1 \end{bmatrix} [\zeta \ 1]$$

Преобразование  $\zeta \rightarrow \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$  в терминах матрицы  $X$  обозначает:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+x & y+zi \\ y-zi & t-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t'+x' & y'+z'i \\ y'-z'i & t'-x' \end{pmatrix}, \\ \text{где } \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Классификация собственных движений

Движения пространства Лобачевского классифицируются чуть проще, чем все остальные типы преобразований, рассматриваемых в этом курсе, т.к., если

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  – подобна одной из матриц:

1.  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.  $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \lambda \neq \pm 1$

Движение пространства Лобачевского, соответствующее случаю 3 и  $\lambda = ae^{i\alpha}$ , задается

$$\begin{pmatrix} ch2a & sh2a & 0 & 0 \\ sh2a & ch2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

В плоскости  $tx$  происходит гиперболический поворот. Само движение представляет собой винтовое вращение. На абсолюте две неподвижные точки, одна из которых притягивает, другая отталкивает. Все, кроме одной геодезической, сдвигается и вокруг нее происходит поворот.

Преобразования 2 – параболические преобразования, содержащие на абсолюте одну неподвижную точку, которой касаются орициклы. Каждый из орициклов есть евклидова плоскость, в которой происходит параллельный перенос (Параболические сдвиги с одной неподвижной точкой на бесконечности).

Преобразование 1 – тождественное.

Замечание: в этом разделе речь шла только о собственных преобразованиях, соответствующих комплексному сопряжению.



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ