



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. СЕМИНАРЫ

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Оглавление

Семинар 1. Составление уравнений кривых на плоскости.	7
Задача 220.....	7
Задача 235.....	11
Семинар 2. Эллипс и его простейшие свойства.	14
Задача 198a.....	14
Задача 203.....	17
Семинар 3. Гипербола, парабола и их простейшие свойства.	19
Задача 188.....	20
Задача 198 п.2	21
Задача 204.....	21
Задача 213.....	25
Семинар 4. Элементы векторной алгебры. Часть 1.	27
Задача 65.....	27
Задача 67.....	27
Задача 68.....	28
Задача 73.....	28
Семинар 5. Элементы векторной алгебры. Часть 2.	30
Задача 80.....	30
Задача 81 п.1	30
Задача 82.....	30
Семинар 6. Скалярное произведение векторов.....	33
Задача 94.....	33
Задача 98.....	33
Задача 100.....	33
Задача 108.....	34
Задача 109.....	35
Задача 112.....	35
Задача 113.....	35
Задача 115.....	36
Семинар 7. Ориентация, ориентированная площадь, векторное и смешанное произведение.	38
Ориентированная площадь.....	38
Задача 122.....	38

Задача 128.....	38
Задача 131.....	39
Задача 132 п.1	40
Векторное произведение.....	40
Задача 136.....	41
Задача 143 п.1	41
Задача 144 п.1	42
Задача 145.....	42
Смешанное произведение.....	42
Задача 158 п.1	42
Семинар 8. Уравнения прямой. Линейные неравенства.....	44
Уравнения прямой.....	44
Задача 260 п.4, 8	45
Задача 261.....	46
Задача 262.....	47
Задача 265.....	47
Линейные неравенства.....	48
Задача 286.....	49
Задача 288.....	49
Задача 290.....	50
Семинар 9. Взаимное расположение прямых на плоскости и пучки. Метрические задачи на прямую: перпендикуляр, углы и расстояния.....	51
Задача 271 п.1, 2, 3	51
Задача 277 п.1, 2, 7	51
Задача 294.....	53
Задача 296.....	54
Расстояние от точки до прямой.....	55
Задача 301.....	55
Угол между прямыми.....	56
Семинар 10. Составление уравнений плоскостей. Взаимное расположение плоскостей. Линейные неравенства в пространстве.....	57
Задача 353.....	57
Задача 356.....	57
Задача 357.....	58
Задача 379 п.1, 4, 6	58

Задача 389 п.1	59
Задача 395 п.1	61
Задача 409.....	61
Семинар 11. Составление уравнений прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Метрические задачи в пространстве.	62
Задача 364.....	62
Задача 365.....	63
Задача 368 п.1	64
Задача 380 п.1	64
Задача 381 п.1	65
Задача 416.....	66
Задача 424.....	66
Задача 427.....	66
Задача 430.....	67
Задача 431.....	68
Семинар 12. Аффинная и ортогональная замены координат.	69
Задача 478.....	69
Задача 488.....	70
Семинар 13. Преобразование уравнений при замене координат. Цилиндрические и сферические координаты. Составление уравнений кривых второго порядка.	72
Задача 492.....	72
Задача 58а.....	73
Задача 62а.....	75
Задача 512.....	76
Семинар 14. Приведение квадрик к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Часть 1.	79
Алгоритм приведения квадрики к каноническому виду ортогональными преобразованиями.....	79
Задача 540 п.1	80
Семинар 15. Приведение квадрик к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Часть 2. Ортогональные инварианты линий 2-го порядка.	83
Задача 540 п.8	83
Ортогональные инварианты линий второго порядка.....	85
Задача 542 п.1	85
Алгоритм составления канонического уравнения линии второго порядка по ее ортогональным инвариантам	86

Семинар 16. Ортогональные инварианты линий второго порядка. Пучки и связки линий второго порядка. Часть 1.	87
Задача 543	87
Задача 643	88
Пучок кривых второго порядка	88
Семинар 17. Ортогональные инварианты линий второго порядка. Пучки и связки линий второго порядка. Часть 2.	90
Задача 637	90
Задача 622	93
Семинар 18. Диаметры, взаимно сопряженные и асимптотические направления линий второго порядка.	95
Задача 589	96
Задача 591	97
Задача 592	97
Задача 595	98
Задача 599 п.1	98
Задача 599 п.5	99
Семинар 19. Приведение квадрик к каноническому виду.	101
Задача 541	101
Семинар 20. Касательные к линии второго порядка. Поляритет.	105
Задача 561	105
Задача 576	106
Поляритет (полярное соответствие)	107
Задача 980 п.1	108
Задача 982 п.1	108
Семинар 21. Поляритет. Аффинные преобразования плоскости.	110
Задача 984	110
Задача 983	110
Задача 812	111
Задача 814	112
Задача 818	112
Семинар 22. Изометрические преобразования.	114
Теорема Шаля	114
Задача 891	114
Классификация изометрий пространства	116

Задача 901 п.1	117
Семинар 23. Аффинные типы плоских квадрик. Составление уравнений поверхностей.	
Простейшие свойства поверхностей второго порядка.....	120
Задача 558 п.1 и п.3	120
Задача 649.....	121
Задача 698.....	122
Семинар 24. Приведение поверхностей к каноническому виду. Часть 1.	124
Задача 718 п.6	124
Семинар 25. Прямолинейные образующие. Плоские сечения поверхностей второго	
порядка.....	128
Задача 750.....	128
Задача 780.....	129
Задача 792 п.1	130
Семинар 26. Диаметральные плоскости. Ортогональные инварианты поверхностей	
второго порядка.....	132
Задача 765.....	132
Ортогональные инварианты поверхностей второго порядка.....	133
Задача 723 п.1	133
Семинар 27. Аффинная классификация квадрик в пространстве. Касательные плоскости.	
.....	136
Задача 719 п.1, п.10	136
Задача 742.....	137
Семинар 28. Приведение поверхностей к каноническому виду. Часть 2.	140
Задача 718 п.1	140
Семинар 29. Проективная плоскость.	143
Задача 927.....	144
Задача 936.....	148
Семинар 30. Проективная плоскость. Проективная прямая.	149
Задача 937.....	149
Задача 908 п.1	149
Задача 909.....	150
Задача 904.....	150
Задача 931.....	151
Задача 915.....	153
Задача 947.....	154

Задача 953.....	154
Семинар 31. Линии второго порядка в проективных координатах.....	156
Задача 956 п.1	156
Задача 957 п.1	156
Задача 959.....	157
Задача 962.....	159

Семинар 1. Составление уравнений кривых на плоскости.

Данный курс семинаров по аналитической геометрии связан с курсом лекций по аналитической геометрии (31 лекция). По возможности темы семинаров будут совпадать с темами соответствующих лекций. На протяжении всего курса мы будем пользоваться задачником “Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре” под редакцией Ю. М. Смирнова (издание 2).

Задача 220. Дана окружность радиуса a с центром в точке O , ее диаметр BC . По окружности движется переменная точка A . На луче OA откладывается отрезок OM , равный расстоянию от точки A до прямой BC . Найти кривую, описываемую точкой M .

Решение.

Вначале сделаем чертеж, затем выберем систему координат и напомним параметрическое уравнение кривой, затем неявное уравнение кривой и из вида этого уравнения сделаем вывод о кривой, описываемой точкой M .

Введем систему координат. Как ее выбрать? Самые простые уравнения получаются тогда, когда самые важные точки имеют простые координаты. Пусть начало координат будет в точке O , оси направим, как показано на рисунке.

Положение точки A удобно задать одним параметром – углом φ , который мы будем отсчитывать от оси Ox против часовой стрелки.

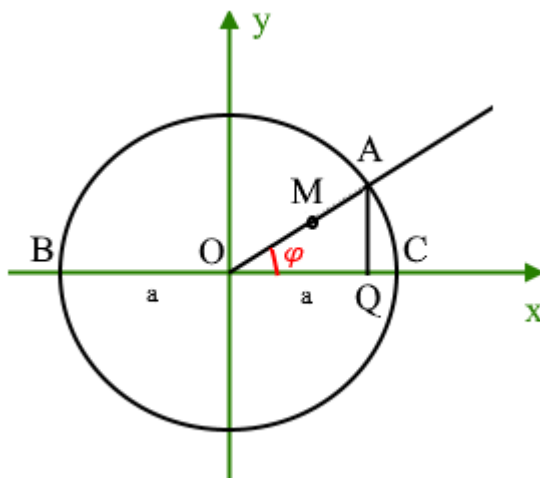


Рис. 1.1 Условие задачи

Тогда $|OA| = a$ и точка A имеет координаты $A(a \cos \varphi, a \sin \varphi)$.

Так как $|AQ| = a|\sin \varphi|$ и $\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi)$ вектор $\overrightarrow{OM}$ должен быть пропорционален вектору $\overrightarrow{OA}$ и иметь нужную длину, то есть $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA}$.

Коэффициент $\lambda > 0$ подбираем так, чтобы $|OM| = |AQ| = a|\sin \varphi|$.

Таким образом,

$$\overrightarrow{OM} = a|\sin \varphi| \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = a|\sin \varphi| \frac{(a \cos \varphi, a \sin \varphi)}{a} = (a|\sin \varphi| \cos \varphi, a|\sin \varphi| \sin \varphi)$$

Рассмотрим случай верхней полуплоскости.

Здесь $\sin \varphi \geq 0$ и $\overrightarrow{OM} = (a \sin \varphi \cos \varphi, a \sin^2 \varphi)$, то есть, $M = (a \sin \varphi \cos \varphi, a \sin^2 \varphi)$.

Таким образом, мы получили параметрическое уравнение кривой, по которой движется точка М:

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \varphi \\ y = a \sin^2 \varphi \end{cases}$$

Данное уравнение немного может нам сказать о виде кривой, описываемой точкой М, поэтому постараемся получить неявное уравнение этой кривой.

Посмотрим на параметрическое уравнение кривой как на систему, содержащую три неизвестные x, y, φ и исключим из нее φ . Для этого нужно понять, каким тригонометрическим тождеством нужно воспользоваться.

Перепишем первое уравнение системы как

$$x = \frac{a}{2} \sin 2\varphi$$

Второе уравнение системы можно переписать в виде

$$y = \frac{a}{2} (1 - \cos 2\varphi)$$

Так как $\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi = 1$, из первого уравнения системы $\sin 2\varphi = \frac{2x}{a}$, из второго уравнения системы $\cos 2\varphi = 1 - \frac{2y}{a}$. Получаем

$$\left(1 - \frac{2y}{a}\right)^2 + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 = 1$$

Полученное уравнение является следствием исходной системы (параметрического уравнения кривой). После несложных преобразований получаем

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

То есть, точка М движется по кривой, задаваемой этим неявным уравнением. Легко видеть, что это уравнение окружности радиуса $\frac{a}{2}$ и центром $(0, \frac{a}{2})$. Нарисуем:

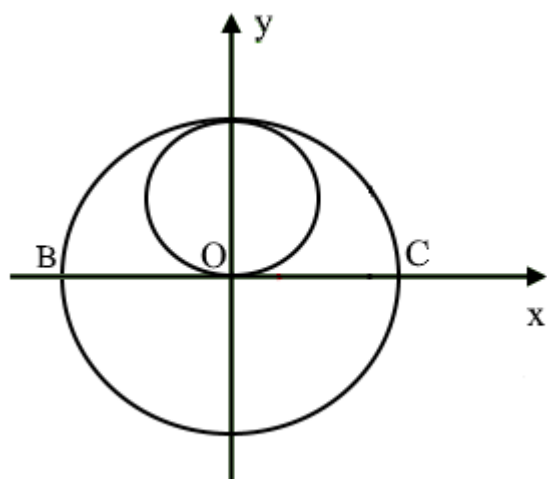


Рис. 1.2

До этого мы говорили только про верхнюю полуплоскость. В нижней полуплоскости $\sin \varphi \leq 0$ и решением будет являться окружность, симметричная окружности, которую мы получили для случая верхней полуплоскости:

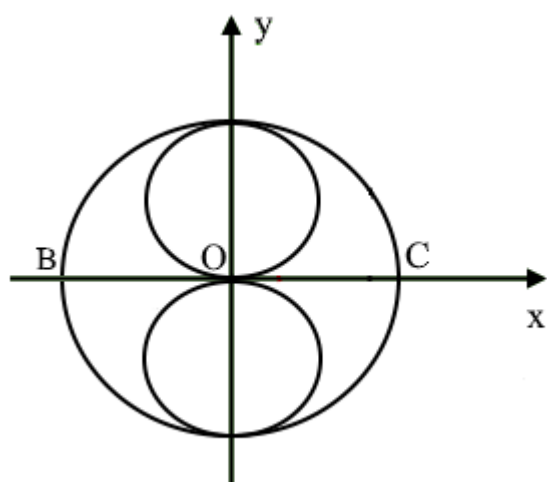


Рис.1.3

Стоит отметить, что это еще не решение задачи. Мы получили лишь, что каждому φ соответствует некая точка (x, y) , которая лежит на построенных окружностях радиуса $\frac{a}{2}$. При исключении φ из системы уравнений были сделаны неравносильные переходы и теоретически может оказаться так, что существуют точки, удовлетворяющие уравнению $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, но не являющиеся решением исходной задачи.

Вопрос: все ли точки полученной кривой удовлетворяют условию задачи? Не приобрели ли мы лишних точек? Нужно сделать проверку. Рассмотрим произвольную точку M на полученной кривой. Не умаляя общности, можно считать, что M лежит в верхней полуплоскости.

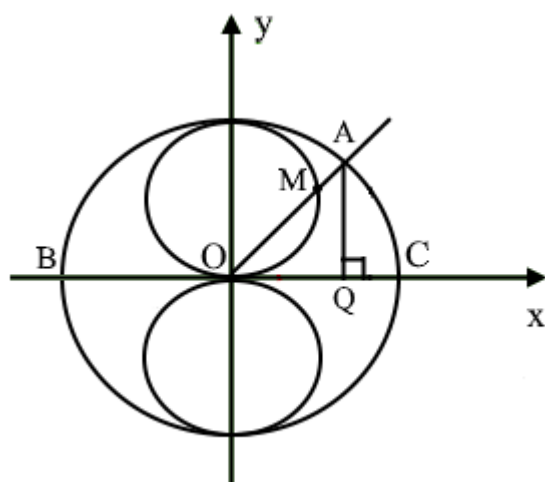


Рис.

1.4

Тогда $M = (x, y)$ и $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Проведем луч OM , который пересечет окружность радиуса a в точке A . Тогда $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Так как $\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{OA}$, $|\overrightarrow{OA}| = a$, получаем $\overrightarrow{OA} = a \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y)$.

Тогда $|\overrightarrow{AQ}| = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Из уравнения $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ следует (после раскрытия скобок), что $ay = x^2 + y^2$. Поэтому $|\overrightarrow{AQ}| = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overrightarrow{OM}|$.

Особый случай: $M = O$.

В этом случае точка C совпадает с точкой A , тогда точка M совпадает с точкой O .

Таким образом, мы показали, что каждая точка полученной кривой удовлетворяет условию задачи.

Отметим, что ответ принято записывать в геометрических терминах, не задействуя систему координат.

Ответ: точки М образуют две окружности радиуса $\frac{a}{2}$ с центрами на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки О на прямой, проходящей через О перпендикулярно ВС.

Задача 235. (Конхоида Никомеда). Даны точка О и прямая l на расстоянии a от точки О. Вокруг точки О вращается луч. Пусть прямая, содержащая этот луч, пересекает прямую l в переменной точке В. На прямой ОВ от точки В в направлении луча откладывается отрезок ВМ, $|ВМ| = b$. Найти уравнение линии, описываемой точкой М.

Решение.

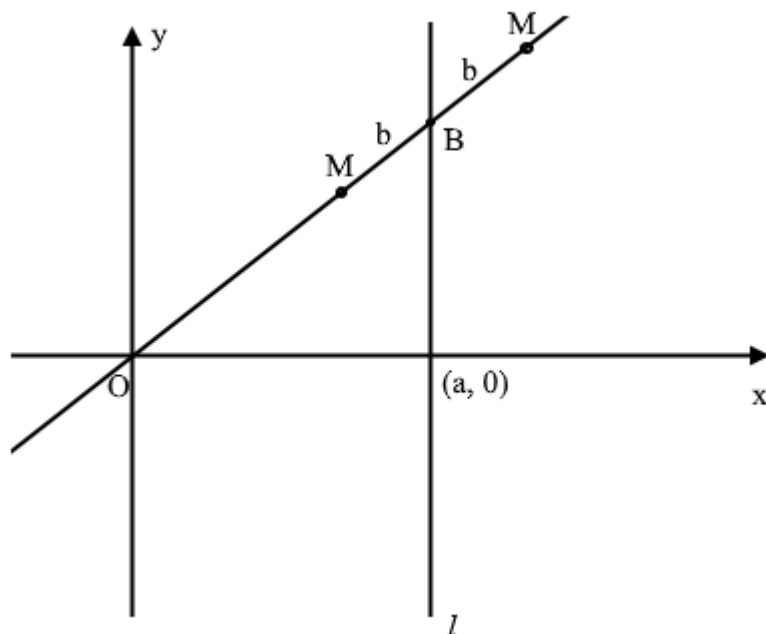


Рис. 1.5

Снова начнем с составления параметрического уравнения. Заметим, что, так как точка В лежит на прямой l, ее абсцисса фиксирована и равна a. В качестве параметра выберем s – ординату точки В. Таким образом, В будет иметь координаты $B = (a, s)$. Тогда $\vec{OB} = (a, s)$. Поймем, какие координаты будут у $\vec{OM}$. С одной стороны, $\vec{OM} \parallel \vec{OB}$, поэтому $\vec{OM} = \lambda \vec{OB}$. Так как $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$ и $\vec{BM} = \pm b \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$, то

$$\vec{OM} = \vec{OB} \pm b \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} = \left(1 \pm \frac{b}{|\vec{OB}|}\right) \vec{OB} = \left(1 \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + s^2}}\right) (a, s)$$

Так как точка О – начало координат, то координаты точки М и вектора $\vec{OM}$ совпадают, таким образом, получаем параметрическое уравнение конхоиды Никомеда:

$$\begin{cases} x = (1 \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + s^2}})a \\ y = (1 \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + s^2}})s \end{cases}$$

Как и в предыдущей задаче, теперь нужно исключить параметр s из этой системы уравнений. Разделив второе уравнение системы на первое, получим

$$\frac{s}{a} = \frac{y}{x}$$

Откуда

$$s = \frac{ay}{x}$$

Подставляя в первое уравнение системы, после преобразований получим

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2$$

Точки конхоиды Никомеда удовлетворяют полученному уравнению. Как и в предыдущей задаче, при выводе этого уравнения мы делали неравносильные переходы. Сделаем проверку – посмотрим, что будет, когда полученная кривая пересекается с прямой $y = kx$, проходящей через точку O . Должно быть ровно два решения. Получаем

$$(x - a)^2(x^2 + k^2x^2) = b^2x^2$$

- уравнение 4 степени, заметим, что $x=0$ всегда будет являться решением. Если $b \neq a$, то надо выкинуть точку $(0,0) = O'$.

Если $x \neq 0$, то разделим на x^2 и получим

$$(x - a)^2(1 + k^2) = b^2$$

Это квадратное уравнение имеет 2 решения, проверка завершена.

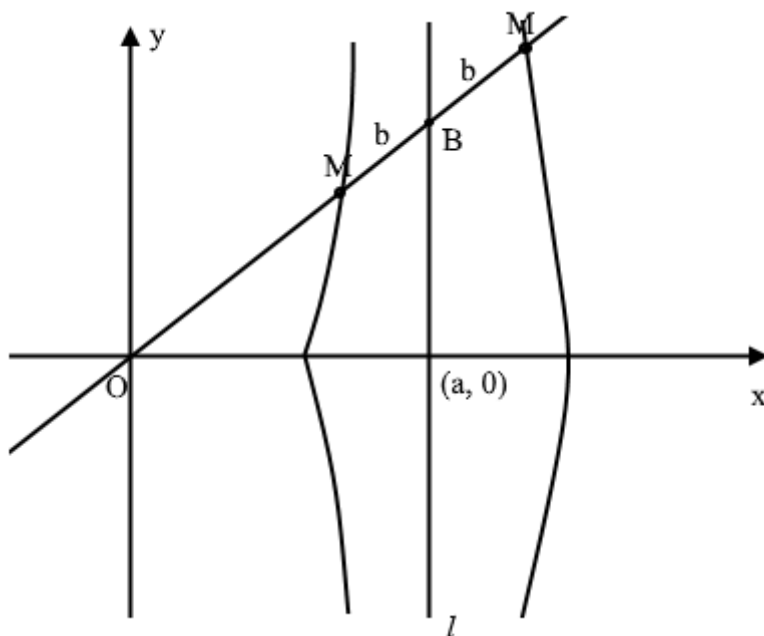


Рис. 1.6 Конхоида Никомеда

Ответ: конхоида Никомеда описывается уравнением $(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2$, но если

$b \neq a$, то надо исключить точку $(0,0) = O$.

В заключение добавим, что конхоида Никомеда – это та кривая, с помощью которой можно решить задачу о трисекции угла.



Семинар 2. Эллипс и его простейшие свойства.

В курсе лекций обговаривалось, что с аналитической точки зрения эллипс – множество точек, которое в некоторой подходящей декартовой ортогональной системе координат описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$

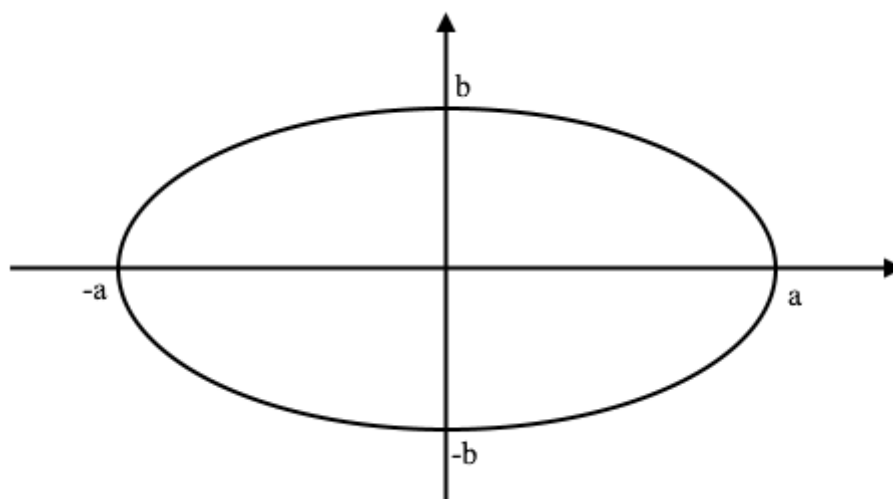


Рис. 2.1 Эллипс

$(0, 0)$ – центр, a – большая полуось, b – малая полуось, фокусы расположены в точках $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, эксцентриситет $e = \frac{c}{a}$.

Задача 198а. Даны две точки $A_1 = (-a, 0)$ и $A_2 = (a, 0)$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2 и отсекающих на оси ординат отрезки, произведение которых равно b^2 .

Решение.

Замечание: геометрическое место точек (ГМТ) – несколько старомодный термин, означающий то же самое, что и множество.

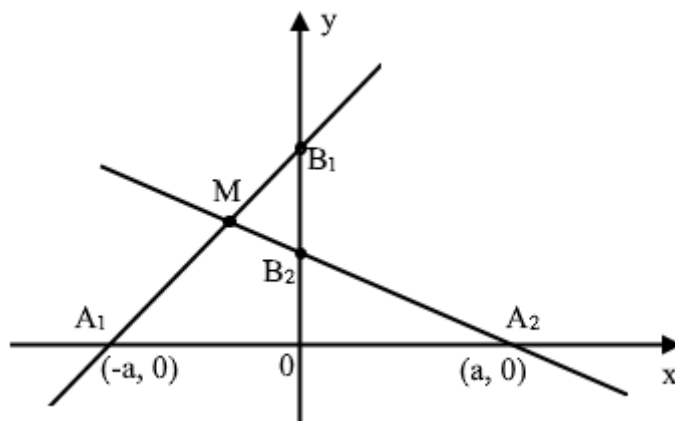


Рис. 2.2

Пусть точки B_1 и B_2 имеют координаты $B_1 = (c, 0)$ и $B_2 = (d, 0)$. По условию $cd = b^2$.

Пусть прямая A_1B_1 имеет вид $y = k_1x + b_1$. Ей удовлетворяют точки A_1 и B_1 .

Подставляя координаты этих точек, найдем k_1 и b_1 :

$$\begin{cases} 0 = k_1(-a) + b_1 \\ c = b_1 \end{cases}$$

Откуда $b_1 = c$, $k_1 = \frac{c}{a}$. Таким образом, прямая A_1B_1 имеет уравнение

$$y = \frac{c}{a}x + c$$

Аналогично находим уравнение прямой A_2B_2 .

Пусть прямая A_2B_2 имеет вид $y = k_2x + b_2$. Ей удовлетворяют точки A_2 и B_2 .

Подставляя координаты этих точек, найдем k_2 и b_2 :

$$\begin{cases} 0 = k_2a + b_2 \\ d = b_2 \end{cases}$$

Откуда $b_2 = d$, $k_2 = -\frac{d}{a}$. Таким образом, прямая A_2B_2 имеет уравнение

$$y = -\frac{d}{a}x + d$$

Теперь найдем M - точку пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 (решение соответствующей системы уравнений):

$$\begin{cases} y = \frac{c}{a}x + c \\ y = -\frac{d}{a}x + d \end{cases}$$

Решая, получаем $x = a \frac{d-c}{d+c}$, $y = \frac{2cd}{c+d}$. Таким образом,

$$M = \left(a \frac{d-c}{d+c}, \frac{2cd}{c+d} \right)$$

Учитывая, что $d = \frac{b^2}{c}$, получаем $x = a \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}$, $y = \frac{2b^2c}{b^2+c^2}$

$$\begin{cases} x = a \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} \\ y = \frac{2b^2c}{b^2+c^2} \end{cases}$$

a и b – константы, c – параметр. То есть, мы получили параметрическое уравнение искомого множества через параметр c .

Исключим параметр c :

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = \frac{a^2(b^2-c^2)^2 + \frac{a^2}{b^2}(2b^2c)^2}{(b^2+c^2)^2} = a^2 \frac{(b^2+c^2)^2}{(b^2+c^2)^2} = a^2$$

Разделив полученное уравнение на a^2 , получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

То есть, искомые точки M лежат на эллипсе с полуосями a и b .

Теперь проверим, все ли точки этого эллипса удовлетворяют условию. Возьмем произвольную точку $M = (\hat{x}, \hat{y})$ на эллипсе и найдем координаты точек пересечения прямых A_1M и A_2M с осью ординат

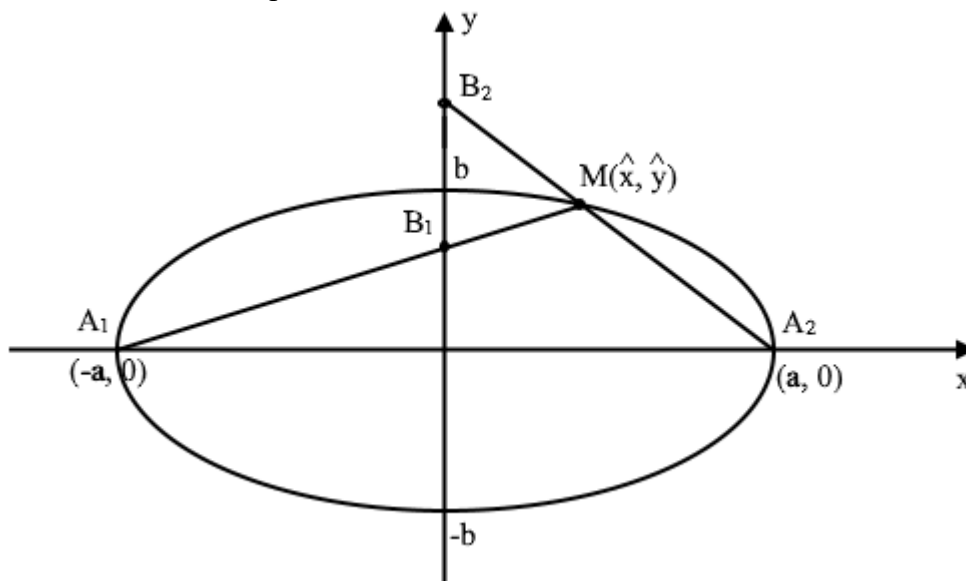


Рис. 2.3

Имеем

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1$$

Пусть прямая A_2M имеет уравнение $y = k_2x + b_2$. Ему удовлетворяют точки A_2 и M . Подставляя координаты этих точек, найдем k_2 и b_2 :

$$\begin{cases} 0 = k_2a + b_2 \\ \hat{y} = k_2\hat{x} + b_2 \end{cases}$$

Откуда $k_2 = \frac{\hat{y}}{\hat{x}-a}$, $b_2 = -\frac{\hat{y}a}{\hat{x}-a}$. Таким образом, прямая A_2M имеет уравнение

$$y = \frac{\hat{y}}{\hat{x}-a}x - \frac{\hat{y}a}{\hat{x}-a}$$

Следовательно, $B_2 = \left(0, \frac{\hat{y}a}{a-\hat{x}}\right)$.

Аналогично для прямой A_1M :

Пусть прямая A_1M имеет уравнение $y = k_1x + b_1$. Ему удовлетворяют точки A_1 и M . Подставляя координаты этих точек, найдем k_1 и b_1 :

$$\begin{cases} 0 = -k_1a + b_1 \\ \hat{y} = k_1\hat{x} + b_1 \end{cases}$$

Откуда $k_1 = \frac{\hat{y}}{\hat{x}+a}$, $b_1 = \frac{\hat{y}a}{\hat{x}+a}$. Таким образом, прямая A_1M имеет уравнение

$$y = \frac{\hat{y}}{\hat{x}+a}x + \frac{\hat{y}a}{\hat{x}+a}$$

Следовательно, $B_1 = \left(0, \frac{\hat{y}a}{a+\hat{x}}\right)$.

Проверка:

$$\frac{\hat{y}a}{a - \hat{x}} \cdot \frac{\hat{y}a}{a + \hat{x}} = \frac{\hat{y}^2 a^2}{a^2 - \hat{x}^2}$$

Так как $\hat{x}$ и $\hat{y}$ удовлетворяют уравнению $\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1$, то $\hat{x}^2 b^2 + \hat{y}^2 a^2 = a^2 b^2$, поэтому

$$\frac{\hat{y}a}{a - \hat{x}} \cdot \frac{\hat{y}a}{a + \hat{x}} = \frac{a^2 b^2 - b^2 \hat{x}^2}{a^2 - \hat{x}^2} = b^2$$

Особый случай:

$\hat{x} = \pm a$ - вырожденный случай, когда ординаты точек пересечения равны 0 и ∞ , то есть, точки A_1 и A_2 нужно выкинуть из решения.

Ответ: эллипс $\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1$ без двух точек $(\pm a, 0)$.

Задача 203. Определить наибольшее и наименьшее значение отношения $\frac{|r_1|}{|r_2|}$ для эллипса

$\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1$, $a > b$, где r_1 и r_2 – фокальные радиусы точки эллипса для левого и правого фокуса.

Решение.

Фокальный радиус:

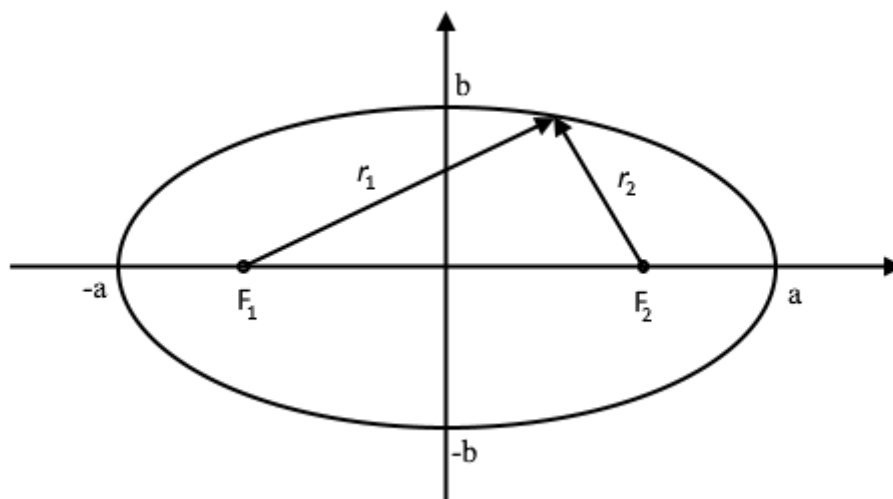


Рис. 2.4. r_1 – левый фокальный радиус, r_2 – правый фокальный радиус

Напомним формулу, которая доказывалась на лекции:

$$|r_1| = a + \frac{c}{a}x$$

$$|r_2| = a - \frac{c}{a}x$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Тогда дело сводится к нахождению максимума и минимума функции

$$f(x) = \frac{|r_1|}{|r_2|} = \frac{a + \frac{c}{a}x}{a - \frac{c}{a}x}, \quad x \in [-a, a]$$

Находим нули производной и сравниваем значения функции в нулях производной со

значениями функции на концах отрезка.

Значения на концах отрезка:

$$f(-a) = \frac{a-c}{a+c}$$
$$f(a) = \frac{a+c}{a-c}$$

Производная:

$$f'(x) = \frac{\frac{c}{a}\left(a - \frac{c}{a}x\right) - \left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(-\frac{c}{a}\right)}{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \frac{2c}{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} \neq 0$$

Производная в ноль не обращается, поэтому функция достигает наибольшего и наименьшего значения на концах отрезка: $\frac{a-c}{a+c}$ – минимум, $\frac{a+c}{a-c}$ – максимум.

Ответ: $\frac{a-c}{a+c}$ и $\frac{a+c}{a-c}$.

Семинар 3. Гипербола, парабола и их простейшие свойства.

Напомним некоторые важные свойства гиперболы и параболы, которые ранее обсуждались на лекциях:

Гипербола:

В курсе лекций обговаривалось, что с аналитической точки зрения гипербола – множество точек, которое в некоторой подходящей декартовой ортогональной системе координат описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

a – действительная полуось, b – мнимая полуось, есть асимптоты, есть фокусы правый и левый, они находятся в точках $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, эксцентриситет $e = \frac{c}{a}$,

фокальный параметр $p = \frac{b^2}{a}$ (половина длины фокальной хорды), директрисы $x = \pm \frac{a^2}{c}$

Уравнения асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x$

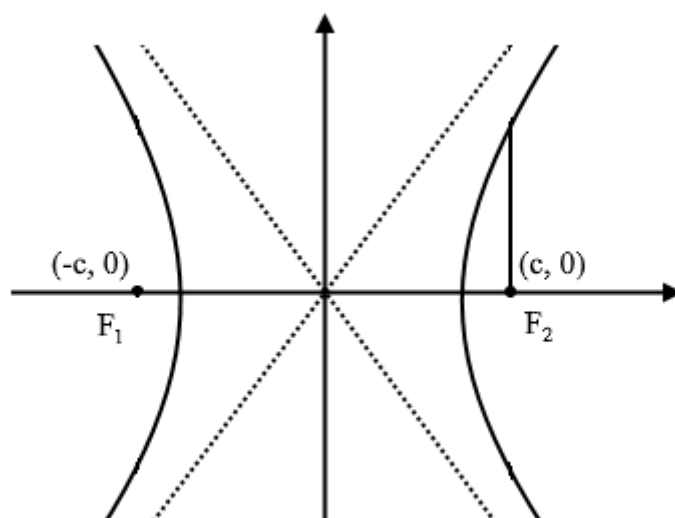


Рис. 3.1. Гипербола

Парабола: с аналитической точки зрения парабола – множество точек, которое в некоторой подходящей декартовой ортогональной системе координат описывается уравнением

$$y^2 = 2px$$

Фокус находится в точке $(\frac{p}{2}, 0)$, $x = -\frac{p}{2}$ – директриса, директориальное свойство параболы: расстояния от любой точки параболы до директрисы и фокуса равны.

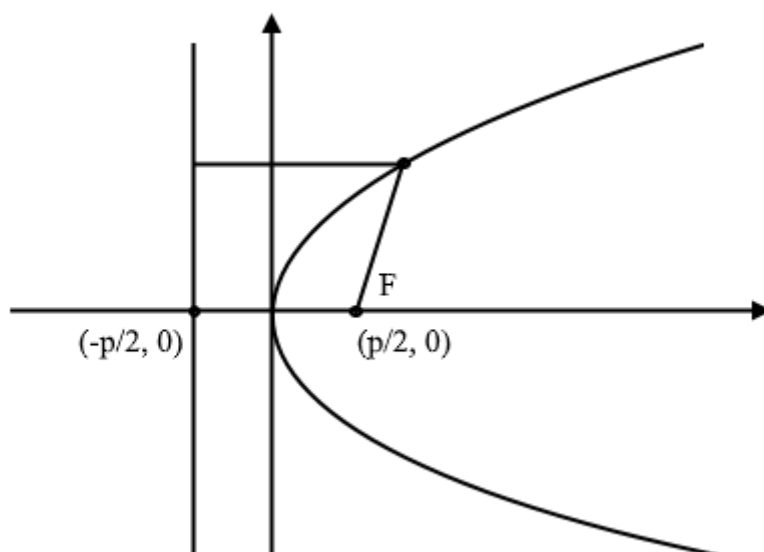


Рис. 3.2. Парабола

Задача 188. Вычислить длину отрезка асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, заключенного между центром и директрисой.

Решение.

Так как ветви гиперболы симметричны относительно начала координат, будем искать длину отрезка асимптоты $y = \frac{b}{a}x$, заключенного между центром и директрисой $x = \frac{a^2}{c}$.

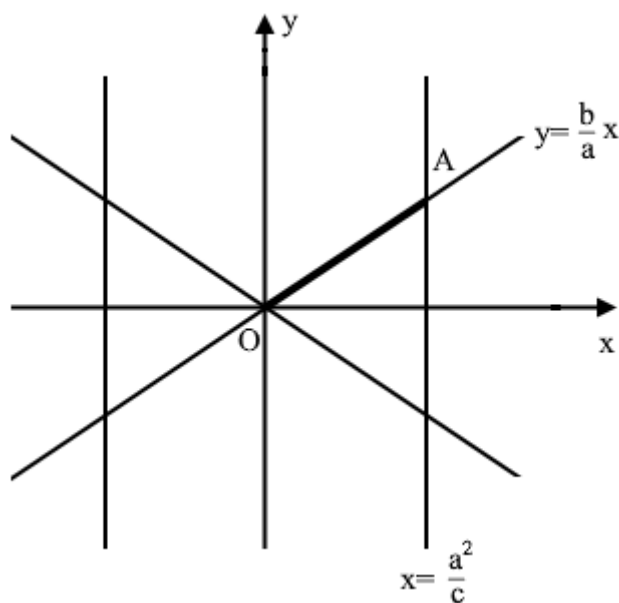


Рис. 3.3 К задаче 188

Точка А имеет координаты $A = \left(\frac{a^2}{c}, \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{c}\right) = \left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$, искомая длина отрезка равна

$$OA = \sqrt{\frac{a^4}{c^2} + \frac{a^2 b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2}} = a$$

Ответ: a .

Задача 198 п.2. Даны две точки $A_1 = (-a, 0)$ и $A_2 = (a, 0)$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2 и отсекающих на оси ординат отрезки, произведение которых равно $-b^2$.

Решение.

При записи семинара произошла досадная ошибка: так как семинар 3 записывался в конце курса, то лектор вместо п.2 решал п.1.

Задача 204. Найти геометрическое место точек, симметричных фокусу невырожденной линии второго порядка относительно касательных этой линии.

Решение.

При решении этой задачи нужно рассматривать три случая – эллипс, гиперболу и параболу. Мы ограничимся случаем эллипса. Безусловно, эту задачу можно решать аналитически, но мы решим ее, используя оптическое свойство эллипса. Напоминание: на лекциях мы определяли касательную к эллипсу как прямую, имеющую с ним ровно одну общую точку.

Оптическое свойство эллипса: физически это означает, что если из одного фокуса эллипса выходит луч света, то отразившись от стенок эллипса, он попадет во второй фокус. Геометрически это означает равенство углов между касательной в точке и фокальными радиусами (см. рисунок 3.5):

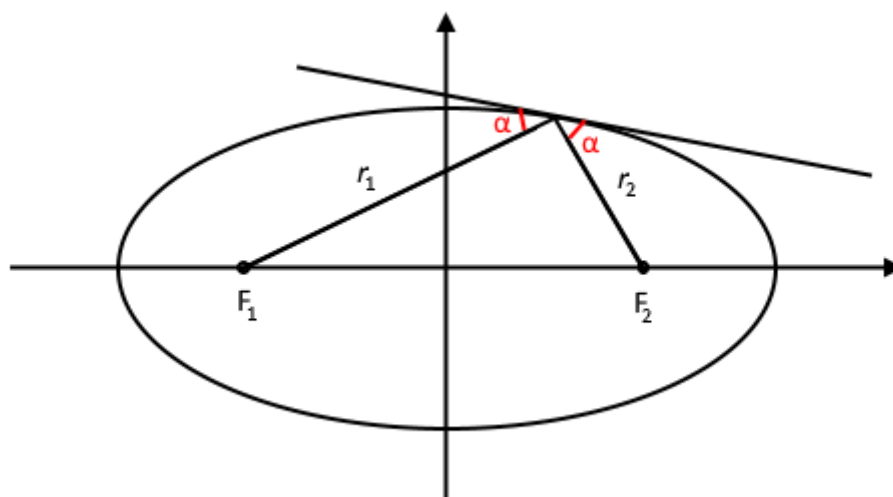


Рис. 3.5 Оптическое свойство эллипса

Заметим, что тр-к QPF_1 = тр-ку QPF_1 штрих (по двум катетам). Отсюда $\angle F'_1QP = \angle F_1QP$ и равен углу между правым фокальным радиусом и касательной (см. рисунок). Значит, F'_1, Q и F_2 лежат на одной прямой α

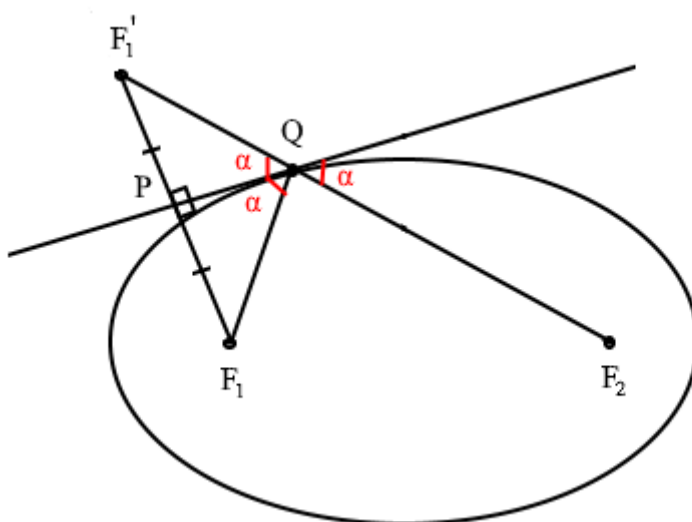


Рис. 3.6

Так как $|F_1Q| + |QF_2| = 2a$ (геометрическое свойство эллипса – сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равно $2a$). Из равенства треугольников $|F_1Q| = |F'_1Q|$, поэтому $|F'_1Q| + |QF_2| = 2a$. Но, так как F'_1, Q и F_2 лежат на одной прямой, то $|F'_1Q| + |QF_2| = |F'_1F_2| = 2a$. Поэтому отраженные точки F'_1 лежат на окружности радиуса $2a$ с центром в другом фокусе.

Верно ли обратное?

Построим эллипс с фокусами F_1 и F_2 и окружность радиуса $2a$ с центром в одном из фокусов (F_2), возьмем на окружности произвольную точку A и соединим с F_2 . Через точку пересечения AF_2 с эллипсом проведем касательную

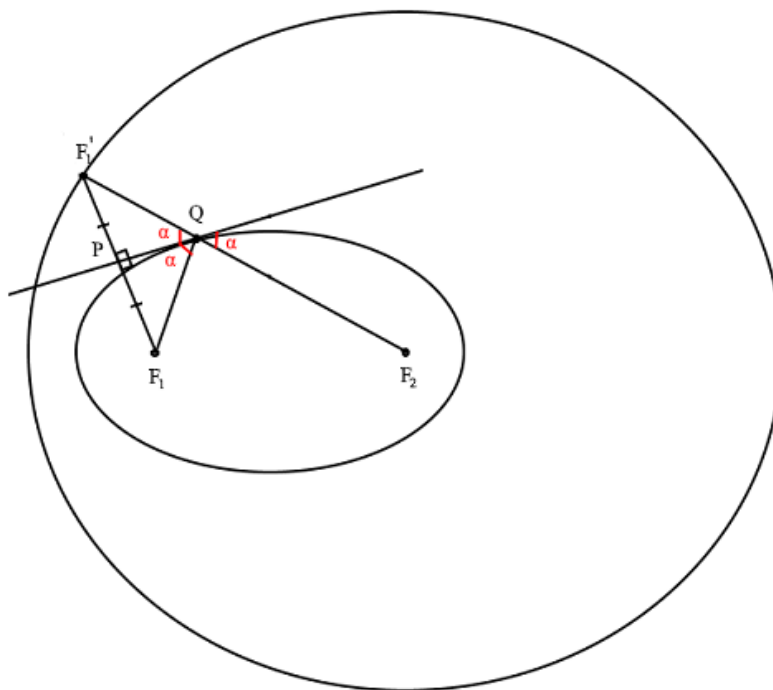


Рис. 3.7

Полярная система координат.

Задается точкой (полюс) и лучом, выходящим из этой точки (полярная ось), тогда координаты произвольной точки задаются расстоянием до полюса и углом, отсчитываемым от полярной оси против часовой стрелки.

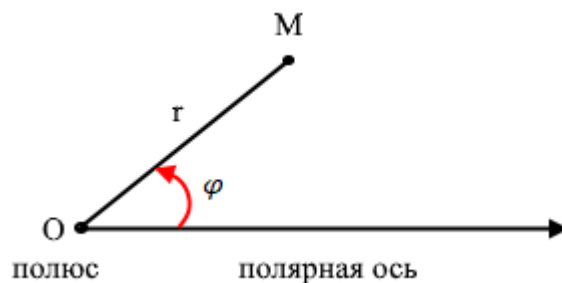


Рис. 3.8. Полярная система координат

Полярные координаты удобно пересчитывать в декартовы, если выбрать полюс в начале координат, а полярную ось совместить с осью абсцисс.

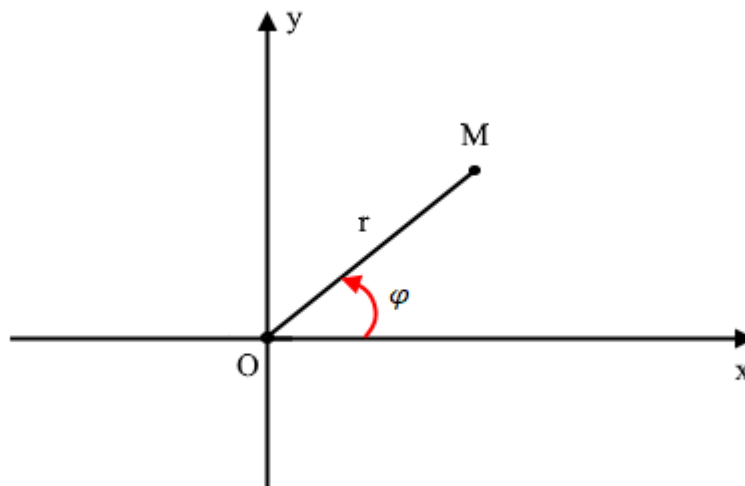


Рис. 3.9. Полярная и декартова системы координат

Тогда

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

φ выражается в зависимости от знака y : $\arctg \frac{x}{y}$ ($y > 0$) или $\pi + \arctg \frac{x}{y}$ ($y < 0$).

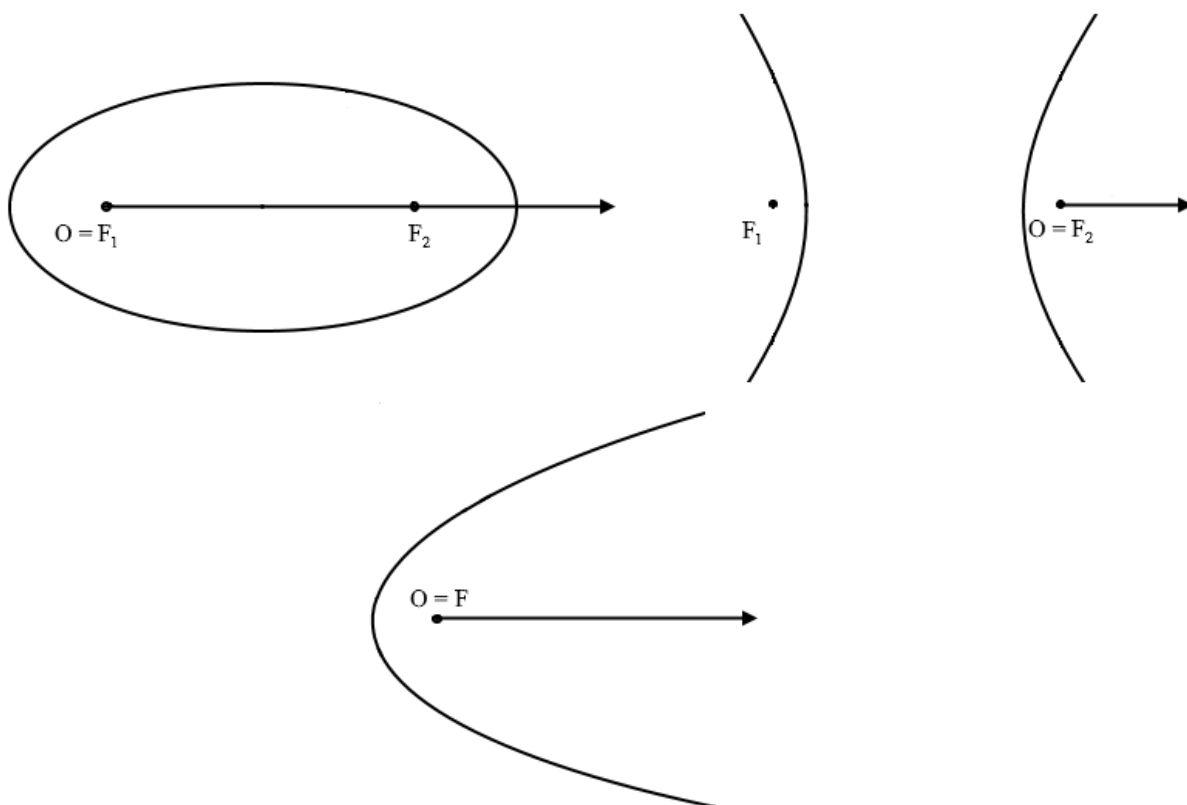


Рис. 3.10. Коники в полярной системе координат

Если для линий второго порядка разместить полярную систему координат как показано

на рисунке 3.10, то их уравнение в этой полярной системе координат приобретет простой вид:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

P – фокальный параметр, e – эксцентриситет (эллипс, парабола и правая ветвь гиперболы), левая ветвь гиперболы в этой системе координат имеет уравнение

$$r = -\frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

Задача 213. Дан эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить уравнение в полярной системе координат, если полюс: 1) в центре, 2) правом фокусе, 3) левом фокусе, а направление полярной оси – положительное направление оси x .

Решение.

1) Центр

Подставляем выражения для x и y в уравнение эллипса, получаем

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{25} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{16} = 1$$

2) Правый фокус

Воспользуемся директориальным свойством эллипса: $\frac{r}{x_2} = e \Leftrightarrow \frac{r}{XQ + QC} = e$ (см. рисунок 3.11).

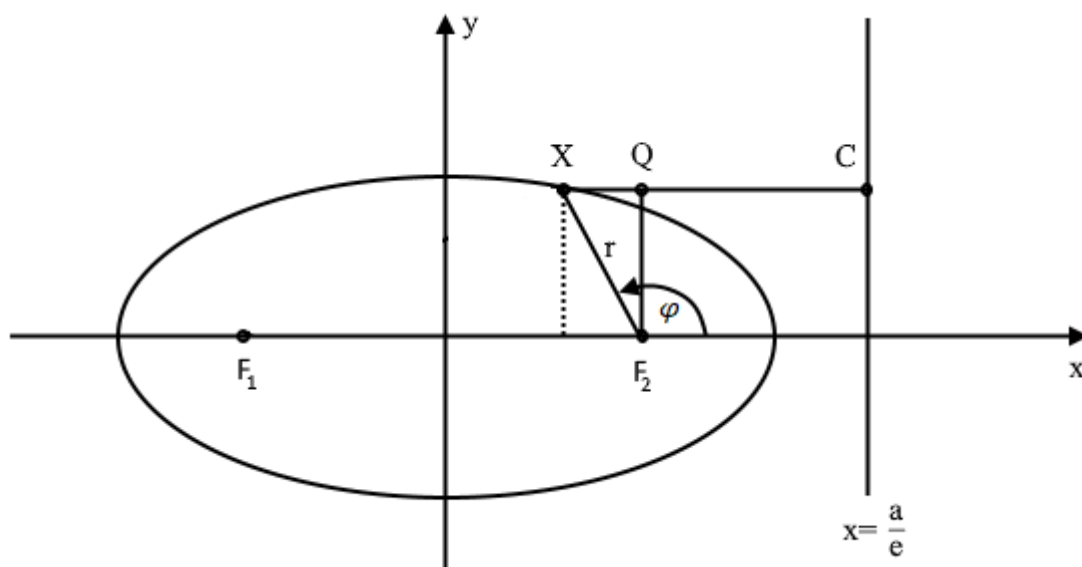


Рис. 3.11. К задаче 213

Из рисунка можно заключить, что $XQ = r \cos(\pi - \varphi) = -r \cos \varphi$. Тогда

$$\frac{\frac{p}{e}}{-r \cos \varphi} = e$$

Откуда

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

3) Левый фокус

Как обсуждалось ранее, уравнение будет иметь вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

Семинар 4. Элементы векторной алгебры. Часть 1.

Задача 65. В треугольнике ABC проведены медианы AD , BE и CF . Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

Решение.

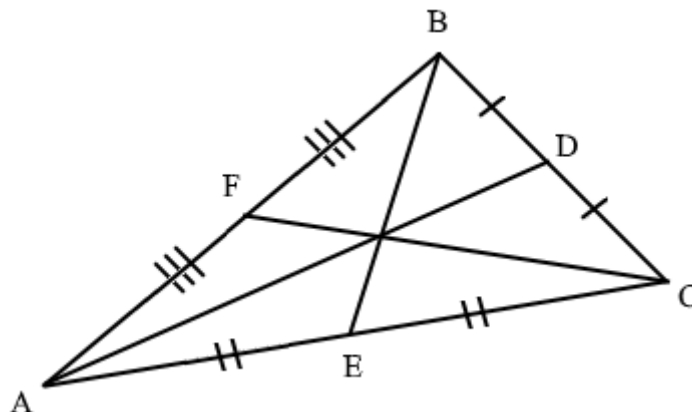


Рис. 4.1 К задаче 65.

Выберем $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ как два неколлинеарных вектора, через которые будем выражать другие.

$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ (исходя из сложения векторов по правилу параллелограмма и того, что D – середина BC).

Заметим, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Тогда $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Аналогично $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Тогда $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Получаем $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Ответ: 0.

Задача 67. Векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма ABCD.

Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

Решение.

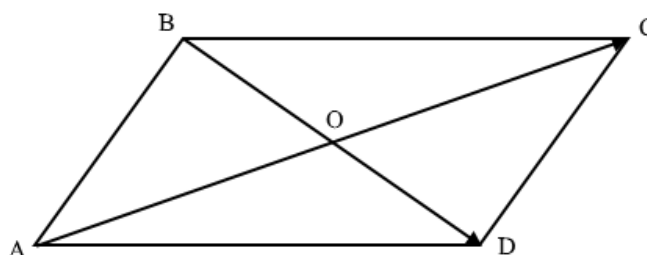


Рис. 4.2. К задаче 67.

Сразу заметим, что $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$.

Заметим, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \vec{a}$.

С другой стороны, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, откуда $\overrightarrow{AB} + \vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\vec{b} \end{cases}$$

Решая ее, получаем $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$ и $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. Тогда $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$ и $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = \frac{-\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA} = \frac{-\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

Задача 68. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$.

Полагая $\overrightarrow{AK} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AL} = \vec{l}$ выразить через $\vec{k}$ и $\vec{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Решение.

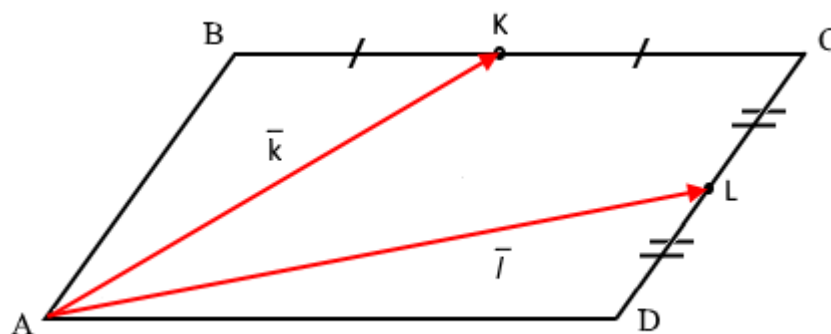


Рис. 4.3 К задаче 68.

Очевидно, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow -\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{k}$.

Аналогично $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AL} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \vec{l}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = \vec{k} \\ \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \vec{l} \end{cases}$$

Решая ее, получаем $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\vec{l} - \frac{2}{3}\vec{k}$ и $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\vec{l} - \frac{4}{3}\vec{k}$.

Ответ: $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\vec{l} - \frac{2}{3}\vec{k}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\vec{l} - \frac{4}{3}\vec{k}$.

Задача 73. В тетраэдре $ABCD$ даны векторы ребер, выходящих из вершины A :

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

Выразить через них:

- векторы остальных ребер тетраэдра,
- медианы DM грани BCD ,
- вектор $\overrightarrow{AQ}$, где Q – точка пересечения медиан грани BCD .

Решение.

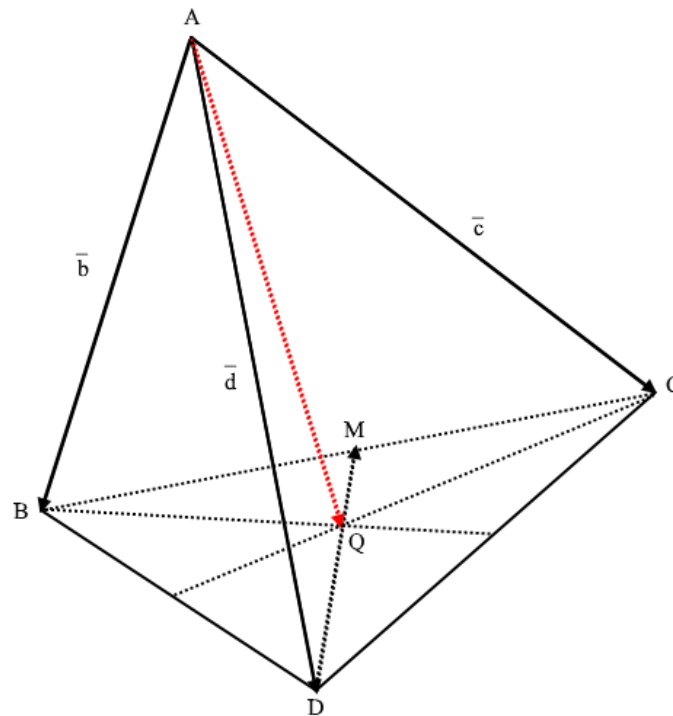


Рис. 4.4 К задаче 73.

Вначале выразим остальные ребра тетраэдра:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \vec{b} + \overrightarrow{BD} = \vec{d}, \text{ откуда } \overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \vec{c} + \overrightarrow{CD} = \vec{d}, \text{ откуда } \overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{c}, \text{ откуда } \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

Выразим медиану DM грани BCD:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{2} = \frac{-\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}}{2} = \frac{-\vec{d} + \vec{b} - \vec{d} + \vec{c}}{2} = \frac{-\vec{d} + \vec{b} - \vec{d} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d}}{2}$$

Выразим вектор $\overrightarrow{AQ}$:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AQ}$. Так как точка пересечения медиан делит медианы в отношении 2:1 считая от вершины, то $\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DM}$. Получаем $\vec{d} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AQ}$, откуда

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{d} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DM} = \vec{d} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

Ответ: $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d}}{2}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$.

Семинар 5. Элементы векторной алгебры. Часть 2.

Задача 80. Даны три вектора $\vec{a} = (5, 7, 2)$, $\vec{b} = (3, 0, 4)$, $\vec{c} = (-6, 1, -1)$. Найти векторы:

- 1) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$;
- 2) $5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$

Решение.

Напоминание: например, вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(5, 7, 2)$. Это означает, что выбран некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{a} = 5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. Таким образом, мы должны действовать покомпонентно с координатами векторов. То есть, например,

$3\vec{a} = 15\vec{e}_1 + 21\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ и $3\vec{a} = (15, 21, 6)$. Аналогично $-2\vec{b} = (-6, 0, -8)$ и т.д. Тогда $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 15\vec{e}_1 + 21\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 6\vec{e}_1 - 8\vec{e}_3 - 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = 3\vec{e}_1 + 22\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$

Естественно, такой же результат получится, если мы просто покоординатно запишем:

- 1) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1, 3 \cdot 7 + 1, 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 1) = (3, 22, -3)$
- 2) $5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c} = (5 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot (-6), 5 \cdot 7 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1, 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-1)) = (19, 39, 30)$.

Ответ: 1) $(3, 22, -3)$, 2) $(19, 39, 30)$.

Задача 81 п.1. Представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:
 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (5, 7, 0)$, $\vec{c} = (3, -2, 4)$, $\vec{d} = (4, 12, -3)$.

Решение.

Ищем $\vec{d}$ в виде $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Отсюда

$$(4, 12, -3) = (2x + 5y + 3z, 3x + 7y - 2z, x + 4z)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 4 \\ 3x + 7y - 2z = 12 \\ x + 4z = -3 \end{cases}$$

Решая систему методом исключения переменных, получаем $x = 1, y = 1, z = -1$. То есть, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

В дальнейшем для решения систем линейных уравнений мы будем пользоваться матричной записью, например, в нашем случае это

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 12 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{array} \right)$$

Ответ: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Задача 82. Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

- 1) $\vec{a} = (5, 2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 4, 2)$, $\vec{c} = (-1, -1, 6)$
- 2) $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$
- 3) $\vec{a} = (6, -18, 12)$, $\vec{b} = (-8, 24, -16)$, $\vec{c} = (8, 7, 3)$

Решение.

- 1) Линейная зависимость векторов означает, что есть их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, то есть, существуют такая тройка $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, что

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

Отсюда можно получить систему на x, y, z . В нашем случае

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

Решаем:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -11 & -31 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Получили, что система имеет только нулевое решение $x = y = z = 0$. Таким образом, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы, и $\vec{c}$ нельзя выразить как линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- 2) Пусть $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$. Получаем систему

$$\begin{cases} 6x - 9y - 3z = 0 \\ 4x + 6y + 6z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Решаем:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть, исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

У этой системы бесконечное множество решений, выберем, например, $z = 6$, откуда $x = -3$, $y = -4$. Получаем

$$-3\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c} = \vec{0}$$

Следовательно, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы и $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

- 3) Пусть $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$. Получаем систему

$$\begin{cases} 6x - 8y + 8z = 0 \\ -18x + 24y + 7z = 0 \\ 12x - 16y + 3z = 0 \end{cases}$$

Решаем:

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 & 8 \\ -18 & 24 & 7 \\ 12 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть, исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Получаем, $x = \frac{4}{3}y$, $z = 0$. Выберем, например, $y = 3$, получим

$$4\vec{a} + 3\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$$

- нетривиальная линейная комбинация векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, но нельзя выразить $\vec{c}$ как линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ:

1) линейно независимы,

2) линейно зависимы, $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$,

3) линейно зависимы, но нельзя выразить $\vec{c}$ как линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Семинар 6. Скалярное произведение векторов.

Задача 94. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждом из следующих случаев:

- 1) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 5, (\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{3}$;
- 2) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, (\widehat{a, b}) = \frac{3\pi}{4}$;
- 3) $a \perp b$;
- 4) $|\vec{a}| = 3, \vec{b} = 2\vec{a}$;
- 5) $|\vec{a}| = 3, \vec{b} = -2\vec{a}$.

Решение.

По определению скалярного произведения, $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 8 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 20$
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 3) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$
- 4) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 0 = 3 \cdot 6 \cdot 1 = 18$
- 5) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \pi = 3 \cdot 6 \cdot (-1) = -18$

Ответ: 1) 20; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; 4) 18; 5) -18.

Задача 98. Какой угол образуют единичные векторы s и t , если известно, что векторы $p = s + 2t$ и $q = 5s - 4t$ взаимно перпендикулярны?

Решение.

$$p \perp q \Leftrightarrow (p, q) = 0 \Leftrightarrow (s + 2t, 5s - 4t) = 0$$

Теперь воспользуемся билинейностью скалярного произведения:

$$(s, 5s - 4t) + 2(t, 5s - 4t) = 0 \Leftrightarrow 5(s, s) - 4(s, t) + 10(t, s) - 8(t, t) = 0$$

Так как $(s, s) = |s|^2 = 1$ и $(t, t) = |t|^2 = 1$ и скалярное произведение симметрично:

$$(s, t) = (t, s), \text{ получаем } 6(s, t) - 3 = 0, \text{ откуда } (s, t) = \frac{1}{2}.$$

Так как $(s, t) = |s||t| \cos \varphi$ и $|s| = |t| = 1$, получаем, что $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Задача 100. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF . Вычислить $(\vec{BC}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BE}) + (\vec{AB}, \vec{CF})$.

Решение.

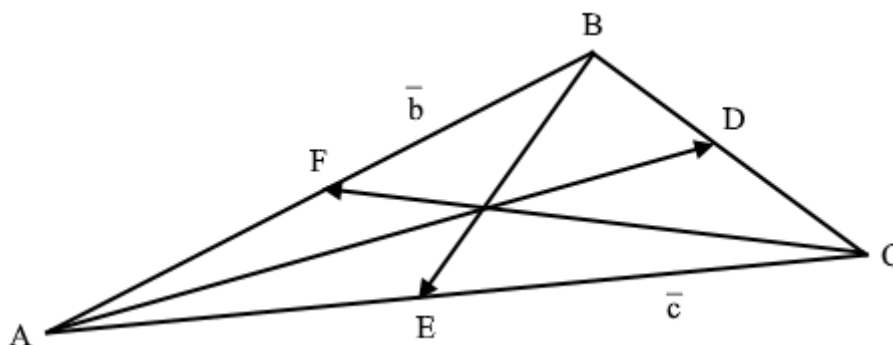


Рис. 6.1. К задаче 100

Выразим все векторы, участвующие в задании, через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Получаем:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \text{ откуда } \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b};$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \text{следует из правила параллелограмма сложения векторов};$$

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{c};$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} - \vec{b}) = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c} - \vec{c}) = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Тогда

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}) = \left(\vec{c} - \vec{b}, \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \left(-\vec{c}, -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \left(\vec{b}, -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

Раскрывая скобки, используя билинейность скалярного произведения, получаем

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}) = 0$$

Ответ: 0.

Задача 108. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами, в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\vec{a} = (3, 5, 7), \vec{b} = (-2, 6, 1)$

2) $\vec{a} = (3, 0, 1), \vec{b} = (3, -2, 4)$

3) $\vec{a} = (2, 5, 1), \vec{b} = (3, -2, 4)$

Решение.

Подразумеваем, что координаты векторов даны в ортонормированном базисе.

Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то в ортонормированном базисе

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 1 = 31$

2) $(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 13$

3) $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 0$

Ответ: 1) 31, 2) 13, 3) 0.

Задача 109. Вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

- 1) $A(2, 3), B(3, -1), C(-1, 4)$;
- 2) $A(1, -1, 3), B(3, 2, 0), C(-1, 4, 1)$.

Решение.

- 1) Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = (1, -4), \overrightarrow{AC} = (-3, 1)$. Тогда

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 = -7$$

- 2) Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = (2, 3, -3), \overrightarrow{AC} = (-2, 5, -2)$. Тогда

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) = 17$$

Ответ: 1) -7 ; 2) 17 .

Задача 112. Найти единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a} = (-8, 4, 1)$.

Решение.

Нужно вектор $\vec{a}$ разделить на его длину – полученный вектор будет единичной длины, параллелен и сонаправлен $\vec{a}$.

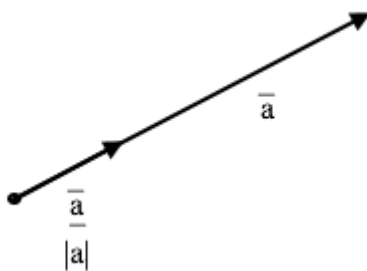


Рис. 6.2. К задаче 112

Длину вектора можно выразить через его скалярный квадрат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9$$

Тогда искомый вектор

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{9} \vec{a} = \frac{1}{9} (-8, 4, 1) = \left(-\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

Задача 113. Вычислить ортогональную проекцию вектора $(1, 5, -3)$ на направление вектора $(1, -2, 1)$.

Решение.

Обсудим решение задачи в общей постановке: как найти проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$?

Для этого нужно $\vec{a}$ представить в виде $\vec{a} = \vec{a}^{\parallel} + \vec{a}^{\perp}$, где $\vec{a}^{\parallel} \parallel \vec{b}$, а $\vec{a}^{\perp} \perp \vec{b}$.

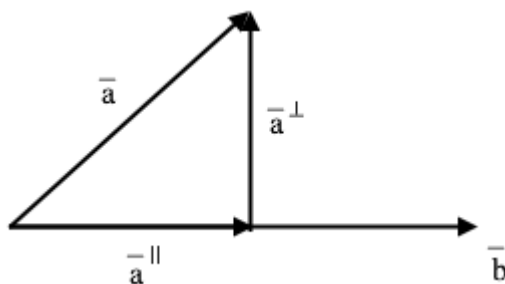


Рис. 6.3. К задаче 113

Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}^{\parallel} + \vec{a}^{\perp}, \vec{b}) = (\vec{a}^{\parallel}, \vec{b}) + (\vec{a}^{\perp}, \vec{b}) = (\vec{a}^{\parallel}, \vec{b})$.

С другой стороны,

$$\vec{a}^{\parallel} = |\vec{a}^{\parallel}| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}^{\parallel}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(\vec{a}^{\parallel}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})} \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})} \vec{b}$$

Заметим, что рассуждения проводились для случая, когда угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ был острым. Если угол тупой, рассуждения будут схожими, а формула не изменится:

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})} \vec{b}$$

Теперь не составляет труда решить задачу: $\vec{a} = (1, 5, -3)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 - 10 - 3 = -12$$

$$(\vec{b}, \vec{b}) = 1 + 4 + 1 = 6$$

Тогда

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{-12}{6} \vec{b} = -2\vec{b} = (-2, 4, 2)$$

Ответ: $(-2, 4, 2)$.

Задача 115. Из одной точки проведены вектор $\vec{a} = (-3, 0, 4)$ и $\vec{b} = (5, -2, -14)$. Найти единичный вектор, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

- Заметим, что в равнобедренном треугольнике биссектриса совпадает с медианой и равна полусумме векторов, являющихся сторонами треугольника:

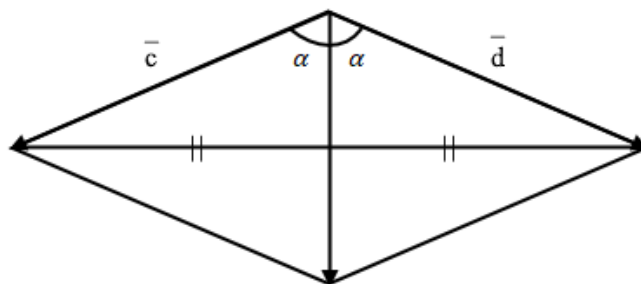


Рис. 6.4. К задаче 115

Биссектриса = медиана = $\frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b}, \vec{b})} = \sqrt{25 + 4 + 196} = 15$$

Получаем, $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Тогда биссектриса угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна

$$\vec{f} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{2} = (-2, -1, -1)$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{(\vec{f}, \vec{f})} = \sqrt{6}$$

Тогда единичный вектор, который делит пополам угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равен

$$\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, -1)$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, -1)$.



Семинар 7. Ориентация, ориентированная площадь, векторное и смешанное произведение.

Ориентированная площадь, порожденная двумя векторами:

$$S_{or}(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$$

По абсолютной величине ориентированная площадь равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ее знак зависит от ориентации пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – если они ориентированы так же, как и базис, то знак “+”, если противоположным образом, то знак “-”.

Задача 122. На плоскости дан базис e_1, e_2 . Принимая его ориентацию за положительную, определить ориентацию следующих базисов:

- 1) e_2, e_1 ; 2) $-e_1, e_2$; 3) $e_2, -e_1$.

Решение.

1) $e_2 = (0, 1), e_1 = (1, 0)$. Тогда $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, значит, базис e_2, e_1 отрицательно ориентирован;

2) $-e_1 = (-1, 0), e_2 = (0, 1)$. Тогда $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$, значит, базис $-e_1, e_2$ отрицательно ориентирован;

3) $e_2 = (0, 1), -e_1 = (-1, 0)$. Тогда $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$, значит, базис $e_2, -e_1$ положительно ориентирован.

Ответ: 1) отрицательная; 2) отрицательная; 3) положительная.

Задача 128. Даны три точки на плоскости: $A(-2, 3), B(2, 1), C(5, -3)$. Найти площадь S треугольника ABC и длину h высоты, опущенной на сторону BC .

Решение.

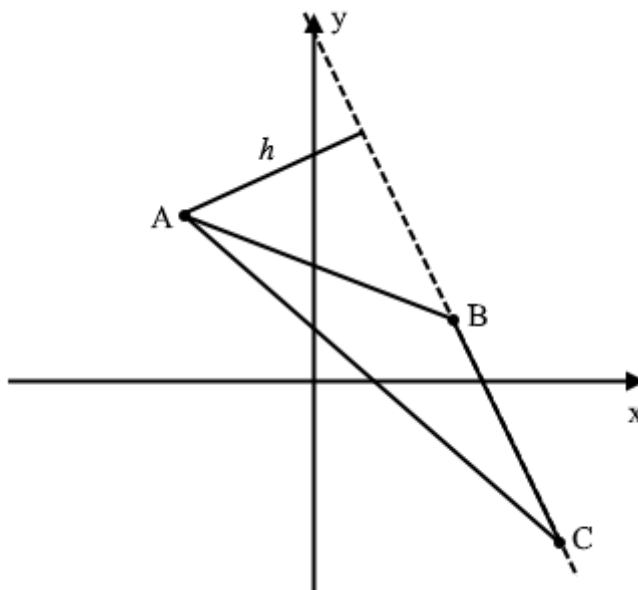


Рис. 7.1. К задаче 128

Заметим, что площадь треугольника, двумя сторонами которого являются вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине модуля ориентированной площади.

Найдем вектора $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = (-4, 2), \overrightarrow{BC} = (3, -4).$$

$$S_{or}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 10$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} |S_{or}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = 5.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{ABC} = \frac{1}{2} |BC| \cdot h$$

$$|BC| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

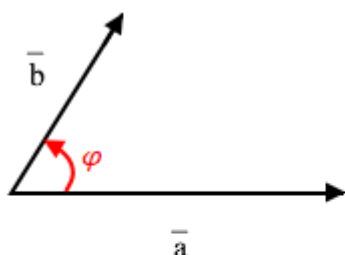
$$\text{Таким образом, } h = \frac{2S_{ABC}}{|BC|} = 2.$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = 5, h = 2.$$

Как мы знаем, угол между векторами находится по формуле

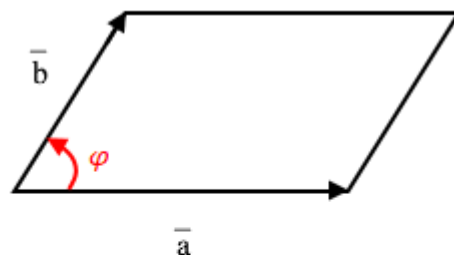
$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Мы можем ввести понятие ориентированного угла между векторами – если отсчитываем угол от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ против часовой стрелки, то считаем, что отсчитываем в положительном направлении.



$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

направление φ не важно



$$\sin \varphi = \frac{S_{or}(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

направление φ важно

Рис. 7.2. Ориентированный угол между векторами

Задача 131. Найти угол от вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, если:

$$1) \vec{a} = (1, 1), \vec{b} = (-1, 2);$$

$$2) \vec{a} = (-1, 1), \vec{b} = (1, 1);$$

$$3) \vec{a} = (3, 2), \vec{b} = (2, 1).$$

Решение.

$$1) |\vec{a}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

$$S_{or}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \text{ поэтому}$$

$$\sin \varphi = \frac{S_{or}(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Таким образом, возможны два значения φ : $\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\pi - \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Нужное значение выбираем с помощью знака $\cos \varphi$.

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-1 + 2}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} > 0$$

Таким образом, φ лежит в первой четверти и $\varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$S_{or}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \text{ поэтому}$$

$$\sin \varphi = \frac{S_{or}(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2}{2} = -1$$

откуда $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$$3) |\vec{a}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{13}, |\vec{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$S_{or}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \text{ поэтому}$$

$$\sin \varphi = \frac{S_{or}(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{65}}$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{6+2}{\sqrt{65}} = \frac{8}{\sqrt{65}} > 0$$

Таким образом, φ лежит в четвертой четверти и $\varphi = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{65}}) = -\arcsin(\frac{1}{\sqrt{65}})$.

Ответ: 1) $\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) $-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{65}})$.

Задача 132 п.1. В пространстве дан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Принимая его ориентацию за положительную, определить ориентацию базиса $\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3$.

Решение.

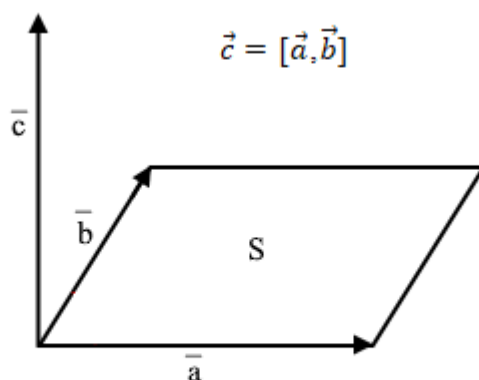
$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1). \text{ Тогда } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0, \text{ значит, базис}$$

$\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3$ ориентирован отрицательно.

Ответ: отрицательная.

Векторное произведение.

Пусть есть ориентированное пространство, в котором даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда их векторным произведением называется вектор $\vec{c}$, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ положительно ориентирована, и $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, натянутой на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



1) $|\vec{c}| = S$

2) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ положительно ориентирована и $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$

Рис. 7.3. Векторное произведение

Свойства векторного произведения:

1) Билинейность

2) Кососимметричность $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

Если $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\vec{b} = (b^1, b^2, b^3)$, то векторное произведение можно вычислить с помощью символического определителя:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} k =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \right)$$

где i, j, k – базисные векторы.

Задача 136. Зная векторное произведение $\vec{c}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найти:

1) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]$;

2) $[\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}]$;

3) $[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}]$.

Решение.

1) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] - [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}] =$
 $= -[\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{a}, \vec{b}] = -2\vec{c}$

2) $[\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$

3) $[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}] = \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b}] - \frac{1}{4}[\vec{a}, \vec{a}] + \frac{1}{2}[\vec{b}, \vec{b}] - \frac{1}{4}[\vec{b}, \vec{a}] = \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b}] + \frac{1}{4}[\vec{a}, \vec{b}] = \frac{3}{4}\vec{c}$

Ответ: 1) $-2\vec{c}$; 2) $\vec{c}$; 3) $\frac{3}{4}\vec{c}$.

Задача 143 п.1. Найти векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (5, 6, 4)$.

Решение.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \right) = \\ = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \right) = (6, -3, -3)$$

Ответ: $(6, -3, -3)$.

Задача 144 п.1. Найти векторное произведение $[\vec{AB}, \vec{AC}]$, если $A = (1, -1, 3)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (-1, 4, 1)$.

Решение.

$$\vec{AB} = (2, 3, -3), \vec{AC} = (-2, 5, -2).$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \right) = (9, 10, 16)$$

Ответ: $(9, 10, 16)$.

Задача 145. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = (8, 4, 1), \vec{b} = (2, -2, 1).$$

Решение.

По определению, длина векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) = (6, -6, -24) \\ S = |(6, -6, -24)| = 6|(1, -1, -4)| = 18\sqrt{2}$$

Ответ: $18\sqrt{2}$.

Смешанное произведение.

Если $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\vec{b} = (b^1, b^2, b^3)$, $\vec{c} = (c^1, c^2, c^3)$, то смешанное произведение можно вычислить следующим образом:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение равно ориентированному объему.

Задача 158 п.1. Доказать тождество

$$([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

Решение.

Вначале перейдем от смешанного произведения к скалярному:

$$([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], [[\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]])$$

Теперь воспользуемся тождеством $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$, получим

$$([\vec{a}, \vec{b}], [[\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) - \vec{a}([\vec{b}, \vec{c}], \vec{c}))$$

Заметим, что $[\vec{b}, \vec{c}] \perp \vec{c}$, поэтому $([\vec{b}, \vec{c}], \vec{c}) = 0$. Таким образом,

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) - \vec{a}([\vec{b}, \vec{c}], \vec{c})) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}))$$

Теперь выносим число $([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a})$ за скобки:

$$\begin{aligned}([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a})) &= ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a})([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])(\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \\ &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2\end{aligned}$$



Семинар 8. Уравнения прямой. Линейные неравенства.

Уравнения прямой

$Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой

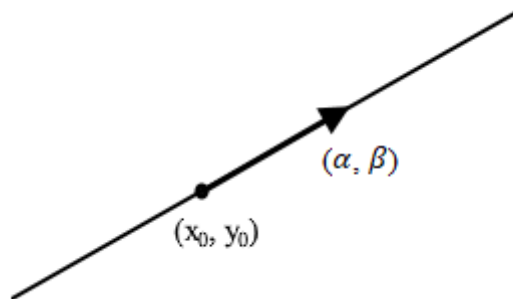


Рис. 8.1. Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} - \text{параметрическое уравнение прямой}$$

Выражая t из первого и второго уравнения и приравняв полученные выражения, можно получить:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} - \text{каноническое уравнение прямой}$$

Если $\alpha = 0$, то получаем прямую $x = x_0$ параллельную оси ординат

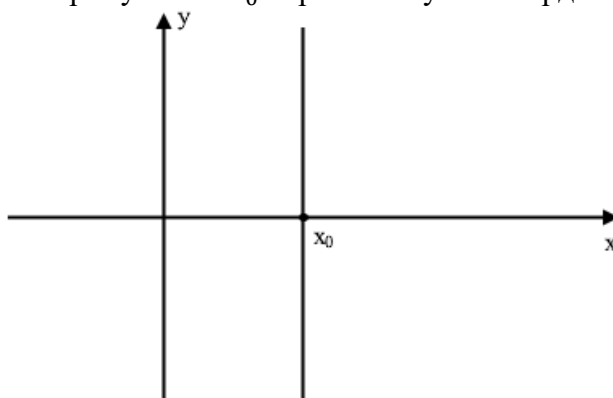


Рис. 8.2. Случай $\alpha = 0$

Если $\beta = 0$, то получаем прямую $y = y_0$ параллельную оси абсцисс:

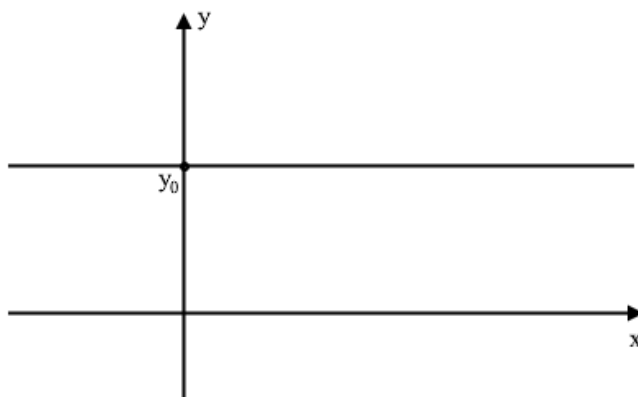


Рис. 8.3. Случай $\beta = 0$

Задача 260 п.4, 8. Написать общее уравнение прямой:

4) проходящей через две точки $A = (1, 2)$ и $B = (-3, 4)$;

8) проходящей через точку $A = (1, 3)$ и перпендикулярной прямой $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$.

Решение.

Пункт 4. Можно решать эту задачу геометрически:

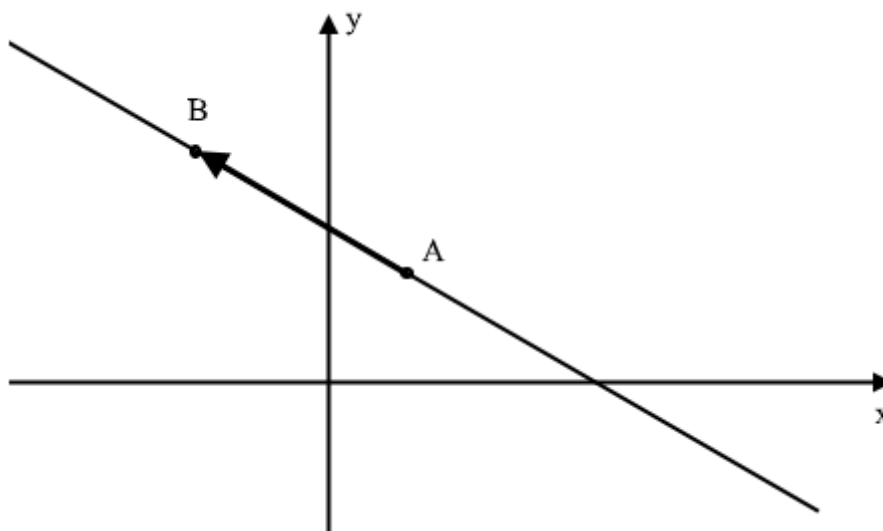


Рис. 8.3. К задаче 260 п.4

$\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$. Тогда каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 2}{2}$$

Отсюда можно получить общее уравнение прямой:

$$x + 2y - 5 = 0$$

А можно решать алгебраически: общее уравнение прямой имеет вид $Ax + By + C = 0$.

Так как точка A лежит на этой прямой, то $A + 2B + C = 0$; так как точка B лежит на этой прямой, то $-3A + 4B + C = 0$. Получаем систему:

$$\begin{cases} A + 2B + C = 0 \\ -3A + 4B + C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Примем $C = -5$, тогда $A = 1$ и $B = 2$ – получаем уравнение прямой

$$x + 2y - 5 = 0$$

Пункт 8. У искомой прямой направляющий вектор v должен быть ортогонален

направляющему вектору прямой $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$, то есть, вектору $(1, -3)$.

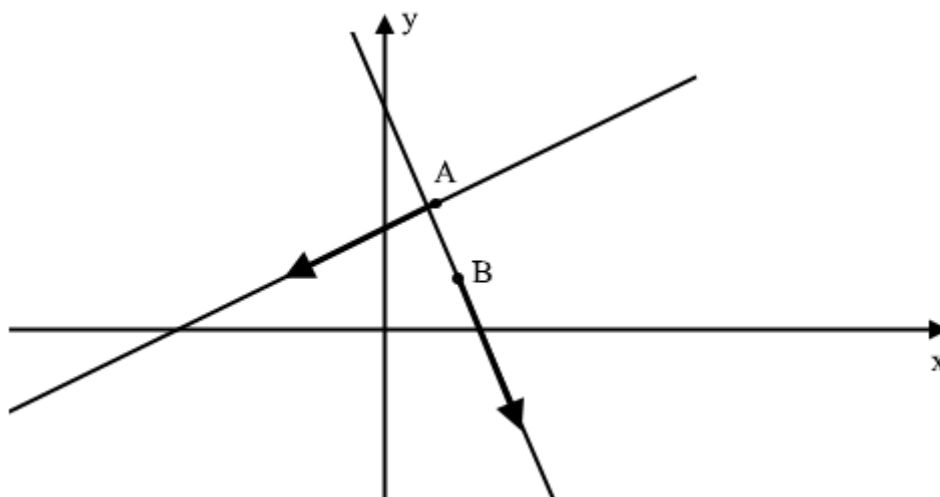


Рис. 8.4. К задаче 260 п.8

В качестве вектора v можно взять (их скалярное произведение должно быть равно нулю), например, вектор $(-3, -1)$. Тогда каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 3}{-1}$$

Общее уравнение прямой:

$$x - 3y + 8 = 0$$

Ответ: 4) $x + 2y - 5 = 0$, 8) $x - 3y + 8 = 0$.

Задача 261. Дано общее уравнение прямой $2x - 3y - 9 = 0$. Написать ее параметрическое уравнение. Какие отрезки отсекает эта прямая на осях координат? Найти ее угловой коэффициент (система координат прямоугольная).

Решение.

$$2x - 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 3$$

Таким образом, угловой коэффициент $k = \frac{2}{3}$.

Найдем отрезки, которые отсекает эта прямая на осях координат:

$$x = 0 \Rightarrow y = -3$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

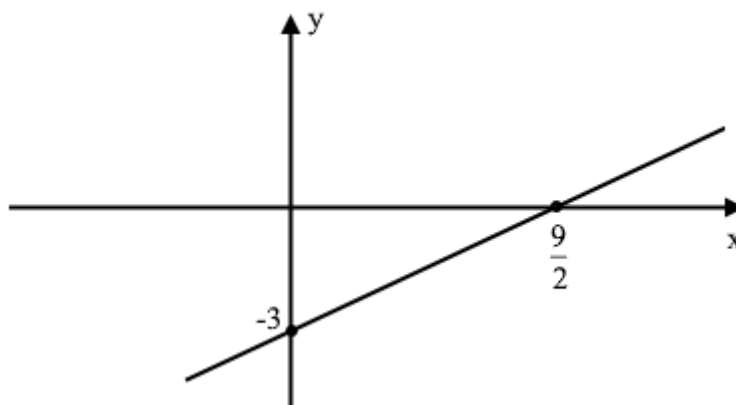


Рис. 8.5. К задаче 261

Таким образом, прямая отсекает на осях координат отрезки длины 3 и $\frac{9}{2}$.

Найдем параметрическое уравнение прямой:

Прямая проходит через точки $A = (0, -3)$ и $B = (\frac{9}{2}, 0)$. В качестве направляющего выберем вектор $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (3, 2)$. Параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

Можно находить параметрическое уравнение и алгебраически: пусть $x = t$, тогда $y = \frac{2}{3}t - 3$, откуда параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + \frac{2}{3}t \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$, угловой коэффициент $k = \frac{2}{3}$, отсекает на осях координат отрезки длины 3 и $\frac{9}{2}$.

Задача 262. Дано параметрическое уравнение прямой: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$. Написать ее общее уравнение.

Решение.

Из параметрического вида прямой можно заключить, что прямая проходит через точку $(1, 2)$, а ее направляющий вектор равен $(-3, 2)$. Поэтому каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 2}{2}$$

Отсюда получаем общее уравнение $2x + 3y - 8 = 0$.

Ответ: $2x + 3y - 8 = 0$.

Задача 265. Дан треугольник ABC : $A(4, 4)$, $B(-6, -1)$, $C(-2, -4)$. Написать уравнение прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла треугольника при вершине C .

Система координат прямоугольная.
Решение.

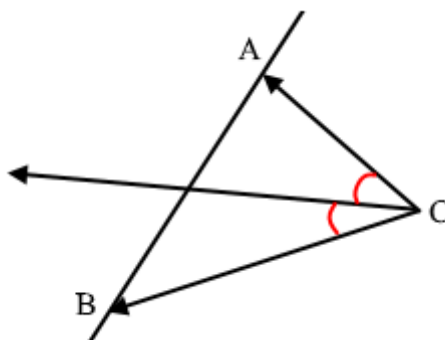


Рис.8.6. К задаче 265

В равнобедренном треугольнике биссектриса совпадает с медианой, поэтому если $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ будет направляющим для прямой, являющейся биссектрисой угла, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{CA} = (6, 8), |\vec{CA}| = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$\vec{CB} = (-4, 3), |\vec{CB}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Таким образом, $|\vec{CA}| = 2|\vec{CB}|$. В качестве $\vec{a}$ выберем $\frac{1}{2}\vec{CA} = (3, 4)$, в качестве $\vec{b}$ выберем

$\vec{CB} = (-4, 3)$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 7)$ – направляющий вектор биссектрисы. Так как искомая прямая проходит через точку $C = (-2, -4)$, получаем уравнение прямой

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y+4}{7}$$

Ответ: $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+4}{7}$.

Линейные неравенства

Прямая $Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости:

$Ax + By + C > 0$ и $Ax + By + C < 0$.

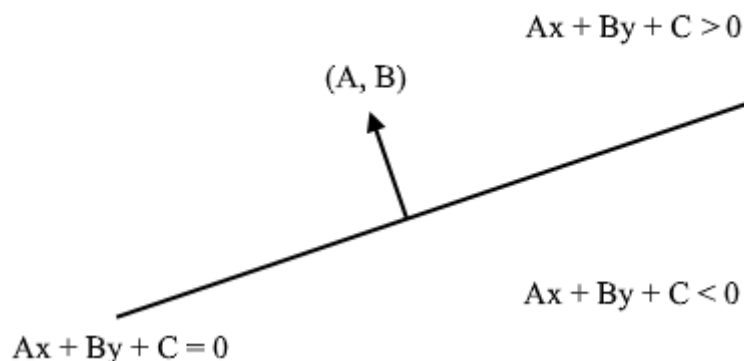


Рис. 8.7. Линейные неравенства

Вектор (A, B) направлен в сторону полуплоскости $Ax + By + C > 0$ (в ортогональной системе координат он будет ортогонален прямой $Ax + By + C = 0$).

Задача 286. Две параллельные прямые $3x - y - 2 = 0$ и $3x - y - 7 = 0$ делят плоскость на три области: полосу и две полуплоскости. В каких областях лежат следующие точки: $A(4, 5)$, $B(0, -3)$, $C(5, 1)$, $D(1, 4)$?

Решение.

Составим таблицу:

	$3x-y-2$	$3x-y-7$
A	$12-5-2=7 > 0$	$12-5-7=0$
B	$3-2=1 > 0$	$3-7=-4 < 0$
C	$15-1-2=12 > 0$	$15-1-7=7 > 0$
D	$3-4-2=-3 < 0$	$3-4-7=-8 < 0$

Определить, в каких областях лежат точки, можно исходя из знаков чисел, полученных после подстановки координат точек в уравнения прямых:

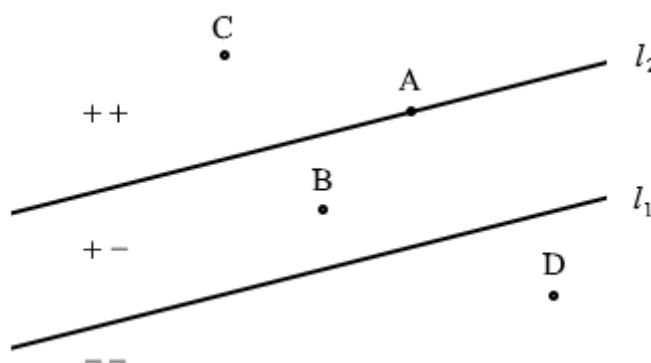


Рис. 8.8. К задаче 286

Ответ: точка B лежит в полосе между данными прямыми, точки C и D – в разных полуплоскостях, а точка A – на второй прямой.

Задача 288. Даны две точки $A(-3, 1)$, $B(5, 4)$ и прямые $l_1: x - 2y + 1 = 0$, $l_2: x + y - 1 = 0$, $l_3: 3x - y + 11 = 0$. Для каждой из них установить, пересекает ли эта прямая отрезок AB , его продолжение за точку A или за точку B .

Решение.

Действуем так же, как и в предыдущей задаче. Составим таблицу:

	$x-2y+1$	$x+y-1$	$3x-y+11$
A	$-3-2+1=-4 < 0$	$-3+1-1=-3 < 0$	$-9-1+11=1 > 0$
B	$5-8+1=-2 < 0$	$5+4-1=8 > 0$	$15-4+11=22 > 0$

Исходя из знаков и величины чисел, полученных после подстановки координат точек в уравнения прямых, можно определить взаимное расположение прямых и отрезка AB :

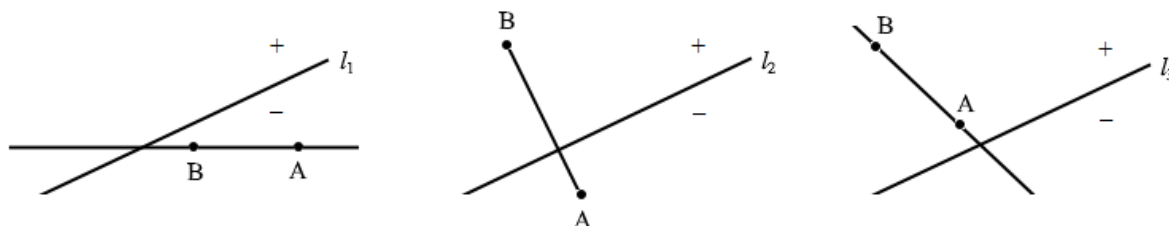


Рис. 8.9. К задаче 288

- l_1 пересекает продолжение отрезка AB за точку B ,
- l_2 пересекает отрезок AB ,
- l_3 пересекает продолжение отрезка AB за точку A .

Ответ: 1) продолжение отрезка AB за точку B , 2) отрезок AB , 3) продолжение отрезка AB за точку A .

Задача 290. Определить положение прямой $x - 7y + 5 = 0$ относительно треугольника, вершины которого находятся в точках $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$ и $C(1, 0)$.

Решение.

Действуем так же, как и в предыдущих задачах. Составим таблицу:

	$x-7y+5$
A	$3-7+5=1 > 0$
B	$-2-28+5=-25 < 0$
C	$1+5=6 > 0$

Исходя из знаков и величины чисел, полученных после подстановки координат точек в уравнение прямой, можно определить взаимное расположение прямой и треугольника ABC :

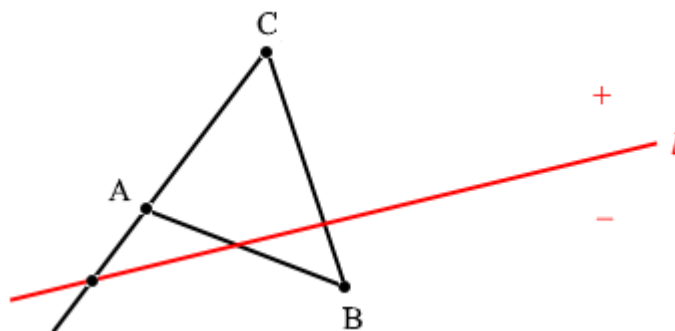


Рис. 8.10. К задаче 290

Ответ: прямая пересекает стороны AB и BC и продолжение стороны AC за точку A .

Семинар 9. Взаимное расположение прямых на плоскости и пучки.

Метрические задачи на прямую: перпендикуляр, углы и расстояния.

Задача 271 п.1, 2, 3. В каждом из следующих случаев определить взаимное

расположение прямых l_1 и l_2 . Если прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения:

1) $l_1: 3x - y - 2 = 0, l_2: 6x - 2y - 2 = 0;$

2) $l_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}, l_2: \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = -2t \end{cases};$

3) $l_1: 2x + 3y + 1 = 0, l_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases}.$

Решение.

Пункт 1. Уравнения прямых не пропорциональны, значит, $l_1 \neq l_2$. С другой стороны, линейные части уравнений прямых пропорциональны: $6x - 2y = 2(3x - y)$, значит, $l_1 \parallel l_2$.

Пункт 2. Из вида задания прямых можно заключить, что l_1 задается точкой $(1, -3)$ и направляющим вектором $\vec{v}_1 = (2, 1)$, а l_2 задается точкой $(7, 0)$ и направляющим вектором $\vec{v}_2 = (-4, -2)$. Заметим, что направляющие векторы пропорциональны: $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$, откуда следует, что $l_1 \parallel l_2$ или $l_1 = l_2$.

Чтобы выяснить, с каким случаем мы имеем дело, поймем, принадлежит ли точка $(1, -3)$ прямой l_2 : если принадлежит, то существует такое t , что

$$\begin{cases} 7 - 4t = 1 \\ -2t = -3 \end{cases}$$

Такое $t = 1,5$ действительно существует, значит, прямые l_1 и l_2 совпадают.

Пункт 3. Найдем пересечение $l_1 \cap l_2$: подставим выражения для x и y из уравнения l_2 в уравнение l_1 , получим

$$2(1 + 3t) + 3(-2 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 12t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

Таким образом, прямые пересекаются в точке, соответствующей $t = \frac{1}{4}$, то есть, в точке $(\frac{7}{4}, -\frac{3}{2})$.

Ответ: 1) прямые параллельны, 2) прямые совпадают, 3) прямые пересекаются в точке $(\frac{7}{4}, -\frac{3}{2})$.

Задача 277 п.1, 2, 7. В каждом из следующих случаев определить взаимное расположение трех прямых:

1) $l_1: 3x - y - 2 = 0, l_2: 6x - 2y - 2 = 0, l_3: 3x - 2y - 2 = 0;$

2) $l_1: x + 2y + 3 = 0, l_2: 2x + 3y + 5 = 0, l_3: x - y + 7 = 0;$

7) $l_1: 2x + 3y - 1 = 0, l_2: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, l_3: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -1 - 4t \end{cases}$

Решение.

Пункт 1. Уравнения прямых l_1 и l_2 не пропорциональны, значит, $l_1 \neq l_2$. С другой стороны, линейные части уравнений прямых l_1 и l_2 пропорциональны: $6x - 2y = 2(3x - y)$, значит, $l_1 \parallel l_2$.

Линейные части уравнений прямых l_2 и l_3 не пропорциональны, значит, прямые l_2 и l_3 не параллельны, следовательно, не параллельны и прямые l_1 и l_3 .

Следовательно, прямые l_1 , l_2 и l_3 располагаются, как показано на рис. 9.1:

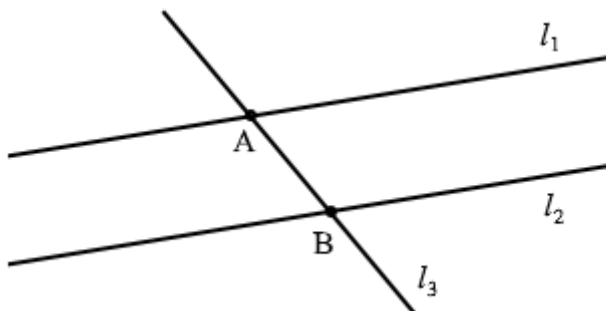


Рис. 9.1. К задаче 277 п.1

Точки пересечения:

A – точка пересечения l_1 и l_3 :

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $A = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

B – точка пересечения l_2 и l_3 :

$$\begin{cases} 6x - 2y - 2 = 0 \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $B = (0, -1)$.

Пункт 2. Линейные части уравнений прямых l_1 , l_2 и l_3 попарно не пропорциональны, значит, прямые l_1 , l_2 и l_3 попарно непараллельны. Таким образом, возможны два случая: прямые располагаются общим образом, или прямые пересекаются в одной точке (собственный пучок). Если прямые образуют собственный пучок, то одна из прямых должна являться линейной комбинацией двух других, следовательно, определитель, составленный из коэффициентов уравнений прямых должен быть равен нулю. Проверим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Таким образом, прямые располагаются общим образом:

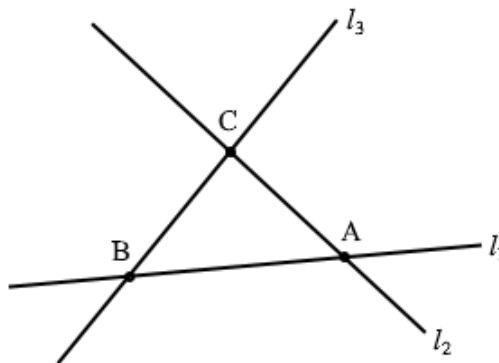


Рис. 9.2. К задаче 277 п.2

Точки пересечения:

A – точка пересечения l_1 и l_2 :

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $A = (-1, -1)$

B – точка пересечения l_2 и l_3 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $B = \left(-\frac{26}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

C – точка пересечения l_1 и l_3 :

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C = \left(-\frac{17}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Пункт 7. Из вида задания прямых можно заключить, что l_2 задается точкой $(-1, 1)$ и направляющим вектором $\vec{v}_2 = (-3, 2)$, а l_3 задается точкой $(2, -1)$ и направляющим вектором $\vec{v}_3 = (6, -4)$. Заметим, что направляющие векторы пропорциональны: $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_2$, откуда следует, что $l_2 \parallel l_3$ или $l_2 = l_3$.

Чтобы выяснить, с каким случаем мы имеем дело, пойдем, принадлежит ли точка $(-1, 1)$ прямой l_3 : если принадлежит, то существует такое t , что

$$\begin{cases} 2 + 6t = -1 \\ -1 - 4t = 1 \end{cases}$$

Такое $t = \frac{1}{2}$ действительно существует, значит, прямые l_2 и l_3 совпадают.

Теперь найдем точку пересечения l_1 и l_2 . Подставим выражения для x и y из уравнения l_2 в уравнение l_1 , получим

$$2(-1 - 3t) + 3(1 + 2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Получили тождество, следовательно, $l_1 = l_2 = l_3$.

Ответ: 1) $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \cap l_3 = A = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $l_2 \cap l_3 = B = (0, -1)$; 2) $l_1 \cap l_2 = A = (-1, -1)$, $l_2 \cap l_3 = B = \left(-\frac{26}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $l_1 \cap l_3 = C = \left(-\frac{17}{3}, \frac{4}{3}\right)$; 7) $l_1 = l_2 = l_3$.

Задача 294. Дана прямая $x - 2y + 1 = 0$, содержащая основание BC треугольника ABC , и вершина $A(3, -4)$, противолежащая этому основанию. Найти уравнение высоты, опущенной из A на BC .

Решение.

В ортогональной системе координат вектор (A, B) ортогонален прямой $Ax + By + C = 0$. Поэтому направляющий вектор прямой, содержащей высоту, опущенную из A на BC , будет равен $(1, -2)$.

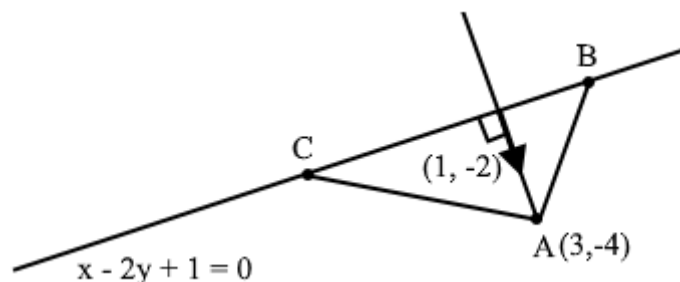


Рис. 9.3. К задаче 294

Уравнение этой прямой легко записать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 2t \end{cases}$$

или в каноническом виде:

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 4}{-2}$$

Тогда общее уравнение этой прямой $2x + y - 2 = 0$.

Ответ: $2x + y - 2 = 0$.

Задача 296. Найти точку, симметричную точке $(0, 11)$ относительно прямой

$$x + 7y - 52 = 0.$$

Решение.

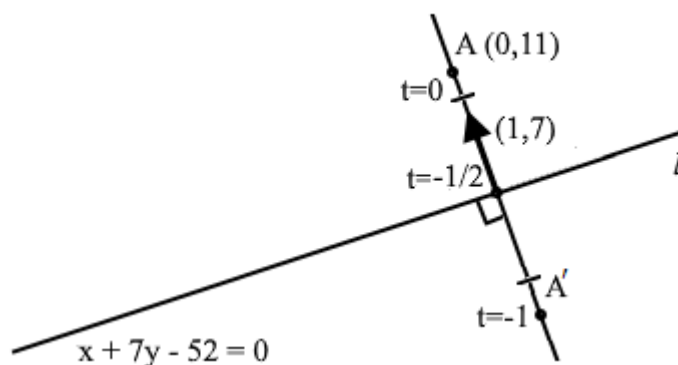


Рис. 9.4. К задаче 296

Вектор $(1, 7)$ перпендикулярен прямой $x + 7y - 52 = 0$. Тогда уравнение перпендикуляра, проходящего через точку $(0, 11)$, будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 11 + 7t \end{cases}$$

Ищем основание перпендикуляра: это точка пересечения перпендикуляра и прямой $x + 7y - 52 = 0$. Подставим параметрические выражения для x и y в уравнение прямой:

$$t + 7(11 + 7t) - 52 = 0 \Leftrightarrow 50t = -25 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Точка $A = (0, 11)$ соответствует значению параметра $t = 0$, точка пересечения перпендикуляра и прямой соответствует значению параметра $t = -\frac{1}{2}$, значит, точка A' , симметричная точке A , должна соответствовать значению параметра $t = -1$, то есть, ее координаты:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 11 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(-1, 4)$.

Расстояние от точки до прямой.

Расстояние от точки до прямой вычисляется по следующей формуле: $\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

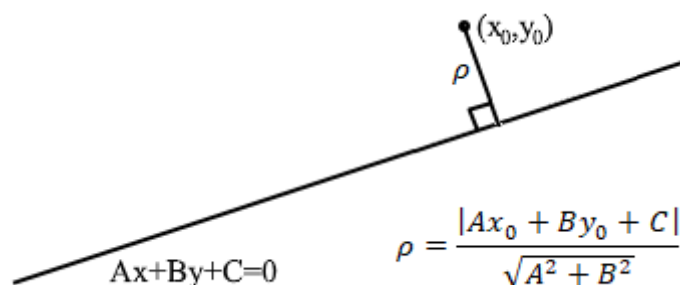


Рис. 9.5. Расстояние от точки до прямой

Задача 301. На прямой $2x - 3y + 6 = 0$ найти точки, находящиеся на расстоянии $\frac{2}{5}$ от прямой $3x - 4y + 11 = 0$.

Решение.

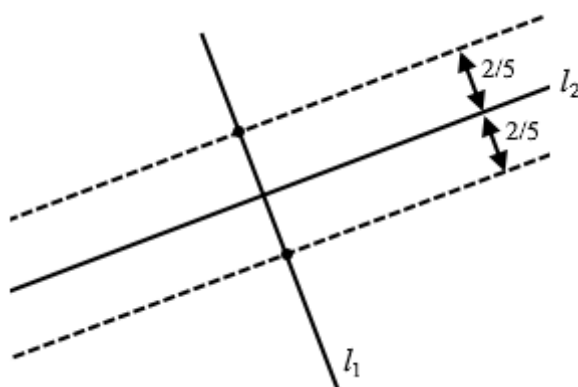


Рис. 9.6. К задаче 301

Напишем уравнения прямых, параллельных прямой $3x - 4y + 11 = 0$ и находящихся от нее на расстоянии $\frac{2}{5}$ (на рис. 9.6 эти прямые выделены пунктиром):

$$\frac{2}{5} = \frac{|3x - 4y + 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow |3x - 4y + 11| = 2$$

Тогда искомые точки – это точки пересечения этих прямых с прямой $2x - 3y + 6 = 0$.

Находим их из системы

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ |3x - 4y + 11| = 2 \end{cases}$$

В зависимости от знака выражения, стоящего под знаком модуля, получаем две системы:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 3x - 4y + 11 = 2 \end{cases}$$

Решая систему, получаем точку $(-3, 0)$.

$$2) \begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 3x - 4y + 11 = -2 \end{cases}$$

Решая систему, получаем точку $(-15, -8)$.

Ответ: $(-3, 0)$ и $(-15, -8)$.

Угол между прямыми.

Угол между прямыми удобно считать как угол между нормальными к этим прямым:

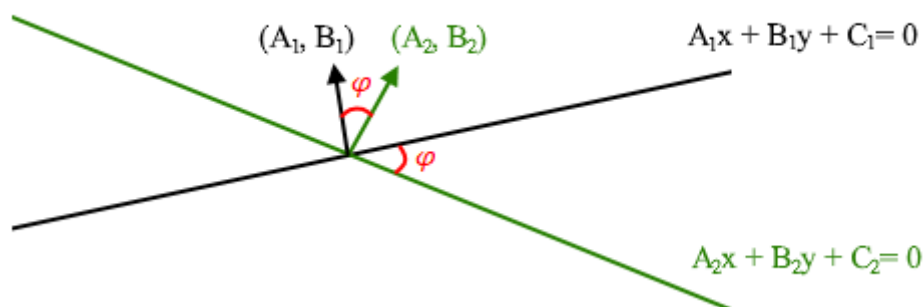


Рис. 9.7. Угол между прямыми

Угол между нормальными ищем одним из способов, описанных на наших занятиях ранее.

Семинар 10. Составление уравнений плоскостей. Взаимное расположение плоскостей. Линейные неравенства в пространстве.

$Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости

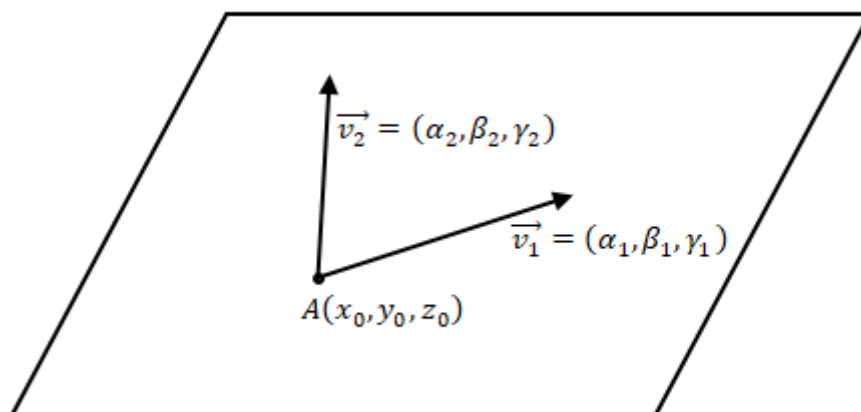


Рис. 10.1. Параметрическое задание плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v \\ y = y_0 + \beta_1 u + \beta_2 v \\ z = z_0 + \gamma_1 u + \gamma_2 v \end{cases} \text{ – параметрическое уравнение плоскости, } u \text{ и } v \text{ – параметры.}$$

Задача 353. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x = u - 6v \\ y = 1 + 2u \\ z = 2 + 3v \end{cases}$$

Решение.

Посмотрим на параметрическое уравнение плоскости как на систему из 3 уравнений на 5 неизвестных x, y, z, u, v . Нужно исключить u и v . Из второго уравнения видно, что $u = \frac{y-1}{2}$, а из третьего уравнения, что $v = \frac{z-2}{3}$. Подставим эти значения в первое уравнение, получим

$$x = \frac{y-1}{2} - 6 \cdot \frac{z-2}{3} \Leftrightarrow 2x - y + 4z - 7 = 0$$

Ответ: $2x - y + 4z - 7 = 0$.

Задача 356. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 2, -3)$ и параллельной векторам $(1, -1, 2)$ и $(2, 3, -1)$.

Решение.

Сразу можно написать параметрическое уравнение плоскости:

$$\begin{cases} x = 1 + u + 2v \\ y = 2 - u + 3v \\ z = -3 + 2u - v \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения, получаем $x + y = 3 + 5v$, откуда $v = \frac{x+y-3}{5}$.

Складывая удвоенное второе уравнение с третьим, получаем $2y + z = 1 + 5v$, откуда $v = \frac{2y+z-1}{5}$.

Получаем

$$\frac{x + y - 3}{5} = \frac{2y + z - 1}{5}$$

откуда

$$x - y - z - 2 = 0$$

Ответ: $x - y - z - 2 = 0$.

Задача 357. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A = (4, 3, 2)$, $B = (5, 2, 4)$, $C = (1, -1, 1)$.

Решение.

Можно свести эту задачу к предыдущей, записав параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (4, 3, 2)$ с направляющими векторами $\vec{AB} = (1, -1, 2)$ и $\vec{AC} = (-3, -4, -1)$.

Но мы решим задачу иным способом. Пусть в искомой плоскости лежит точка $Q = (x, y, z)$. Вектор $\vec{AQ} = (x - 4, y - 3, z - 2)$ компланарен $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

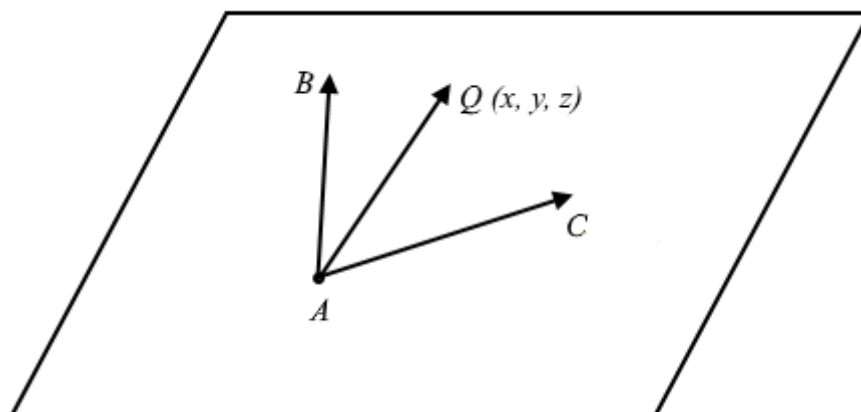


Рис. 10.2. К задаче 357

Это означает, что определитель матрицы, составленной из координат векторов $\vec{AQ}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 3 & z - 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 4) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - (y - 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (z - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x - 4) + 5(3 - y) - 7(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 9x - 5y - 7z - 7 = 0$$

Ответ: $9x - 5y - 7z - 7 = 0$.

Задача 379 п.1, 4, 6. Определить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны, или совпадают:

1) $\pi_1: x + 2y - z + 1 = 0$ и $\pi_2: x + y - 2z + 1 = 0$;

4) $\pi_1: \begin{cases} x = 1 + 2u + v \\ y = 3u + 2v \\ z = -1 + u + v \end{cases}$ и $\pi_2: \begin{cases} x = 4u + 3v \\ y = -2 + u - 4v \\ z = 3 + u + 2v \end{cases}$;

6) $\pi_1: \begin{cases} x = -3 + u + 4v \\ y = 3 + u + v \\ z = 2 + u + 2v \end{cases}$ и $\pi_2: x + 2y - 3z + 2 = 0$

Решение.

Пункт 1. Уравнения плоскостей π_1 и π_2 не пропорциональны, значит, $\pi_1 \neq \pi_2$.

Линейные части уравнений плоскостей π_1 и π_2 также не пропорциональны значит, π_1 и π_2 пересекаются.

Пункт 4. Можно перейти к общим уравнениям и сделать как в п.1. Мы решим эту задачу геометрически:

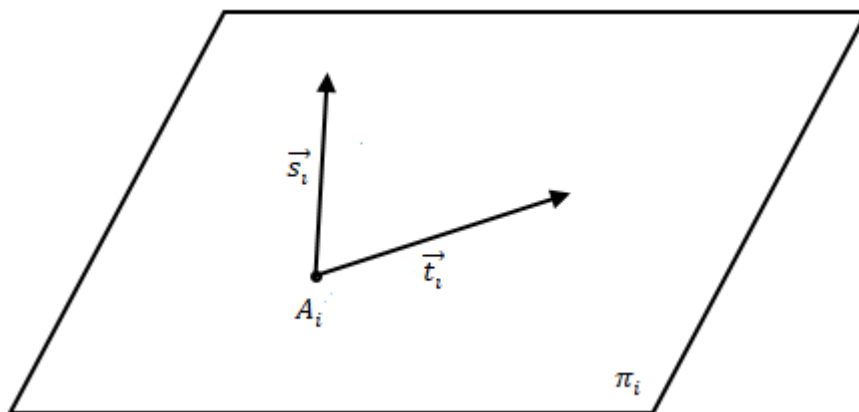


Рис. 10.3. к задаче 379 п.4

$\pi_1: A_1 = (1, 0, -1), \vec{s}_1 = (2, 3, 1), \vec{t}_1 = (1, 2, 1)$

$\pi_2: A_2 = (0, -2, 3), \vec{s}_2 = (4, 1, 1), \vec{t}_2 = (3, -4, 2)$

Параллелен ли $\vec{s}_1$ плоскости π_2 ? $\Leftrightarrow \vec{s}_1$ линейно зависим с $\vec{s}_2$ и $\vec{t}_2$? $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 16 - 3 - 24 + 8 = -22 \neq 0$$

Значит, $\vec{s}_1$ не параллелен плоскости π_2 , поэтому плоскости π_1 и π_2 пересекаются.

Пункт 6. Можно записать π_1 в виде общего уравнения и решать как в п.1, а можно искать пересечение π_1 и π_2 . Подставим параметрические выражения x, y и z в уравнение π_2 :

$$(-3 + u + 4v) + 2(3 + u + v) - 3(2 + u + 2v) + 2 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$$

Решений нет, значит, $\pi_1 \parallel \pi_2$.

Ответ: 1) пересекаются, 4) пересекаются, 6) параллельны.

Задача 389 п.1. Определить взаимное расположение трех плоскостей:

$\pi_1: x + 2y - z + 7 = 0, \pi_2: x + y - 2z + 4 = 0, \pi_3: 5x + 3z + 2 = 0.$

Решение.

Возможны 8 случаев взаимного расположения трех плоскостей:

1) есть одна общая точка (как пересекаются координатные плоскости);

- 2) есть общая прямая (“книжка”);
- 3) плоскости попарно пересекаются по параллельным прямым (призма);
- 4) две плоскости параллельны, третья их пересекает;
- 5) три плоскости параллельны;
- 6) две плоскости совпадают, третья их пересекает;
- 7) две плоскости совпадают, третья им параллельна;
- 8) три плоскости совпадают.

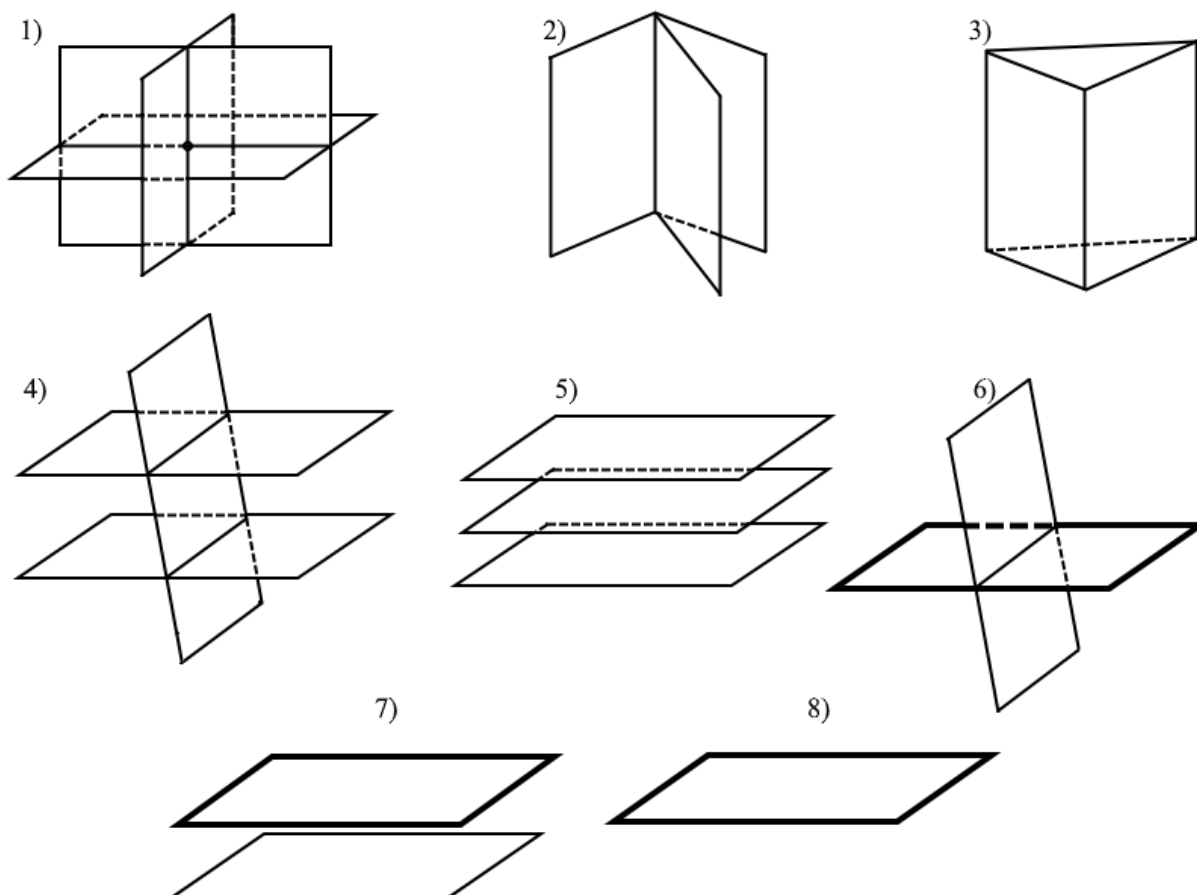


Рис. 10.4. Взаимное расположение трех плоскостей

Уравнения плоскостей π_1 , π_2 и π_3 попарно не пропорциональны, значит, среди них нет совпадающих плоскостей. Линейные части уравнений плоскостей π_1 , π_2 и π_3 также попарно не пропорциональны, значит, среди них нет параллельных. Значит, возможны только случаи 1), 2) и 3). Случаи 2) и 3) иллюстрируют собственный и несобственный пучок плоскостей. И в том, и в другом случае одна из плоскостей должна быть линейной комбинацией двух других, значит, матрица, составленная из коэффициентов уравнений данных плоскостей, должна иметь ранг 2.

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & 8 & -33 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Таким образом, это не пучок, значит, это случай 1) – все три плоскости имеют

единственную общую точку.

Ответ: имеют единственную общую точку.

Задача 395 п.1. Составить уравнение плоскости, содержащей линию пересечения плоскостей π_1 и π_2 и проходящей через точку M :

$$\pi_1: x + y - z - 1 = 0, \pi_2: 2x - 3y - 3z - 2 = 0, M = (1, 0, -2).$$

Решение.

Искомая плоскость лежит в одном пучке с π_1 и π_2 , поэтому ее уравнение – линейная комбинация уравнений π_1 и π_2 :

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(2x - 3y - 3z - 2) = 0$$

Найдем λ и μ из условия, что M лежит в этой плоскости: координаты точки M должны удовлетворять вышеприведенному уравнению. Получаем

$$\lambda(1 + 0 + 2 - 1) + \mu(2 - 0 + 6 - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 3\mu = 0$$

Выберем $\lambda = 3, \mu = -1$, получим

$$3(x + y - z - 1) - (2x - 3y - 3z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 6y - 1 = 0$$

Ответ: $x + 6y - 1 = 0$.

Задача 409. Даны точки $A = (1, 3, -1), B = (5, 3, 1)$ и плоскость $\pi: x - 4y + 2z - 7 = 0$.

Установить, пересекает ли данная плоскость отрезок AB , его продолжение за точку A или за точку B .

Решение.

Метод решения аналогичен задачам про взаимное расположение отрезка и прямой, которые мы решали на предыдущих семинарах.

	$x - 4y + 2z - 7$
A	$1 - 12 - 2 - 7 = -20 < 0$
B	$5 - 12 + 2 - 7 = -12 < 0$

Значит, π пересекает продолжение AB за точку B .

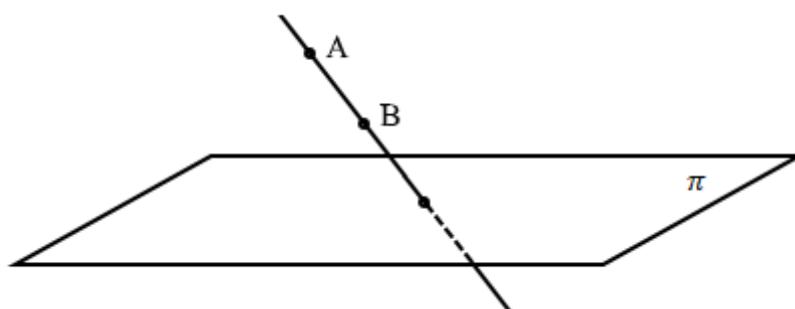


Рис. 10.5. К задаче 409

Ответ: π пересекает продолжение AB за точку B .

Семинар 11. Составление уравнений прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Метрические задачи в пространстве.

Способы задания прямой в пространстве:

1) Через точку и направляющий вектор

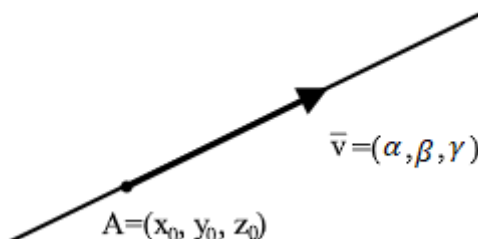


Рис. 11.1. Задание прямой с помощью точки и направляющего вектора

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} - \text{параметрическое уравнение прямой}$$

Выражая t из уравнений и приравнявая полученные выражения, можно получить:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} - \text{каноническое уравнение прямой}$$

Также прямую можно задавать как пересечение двух плоскостей:

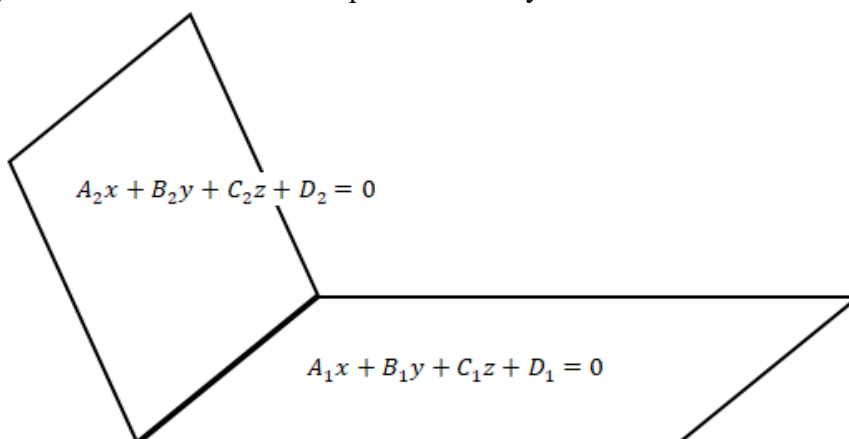


Рис. 11.2. Задание прямой с помощью пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Задача 364. Найти направляющий вектор линии пересечения плоскостей

$$\pi_1: x - y + 2z - 1 = 0 \text{ и } \pi_2: 2x + 3y - z + 5 = 0.$$

Решение.

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Можно найти два частных решения системы A и B и взять вектор $\overrightarrow{AB}$. Если мы в прямоугольной системе координат, то направляющий вектор $\vec{v}$ линии пересечения плоскостей будет ортогонален векторам нормалей к этим плоскостям:

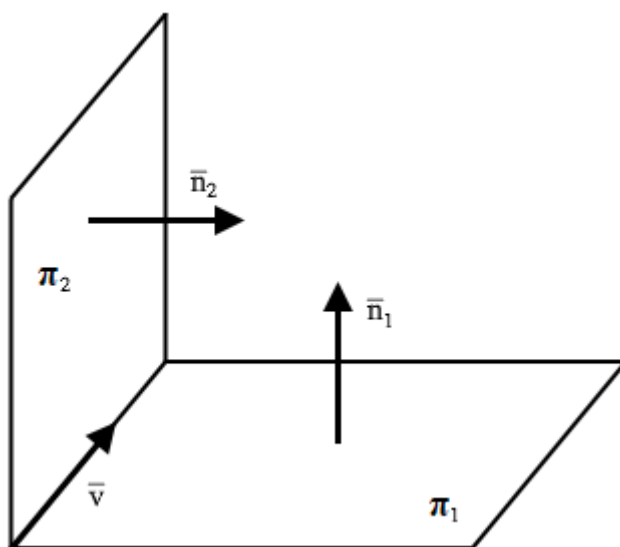


Рис. 11.3. К задаче 364

Поэтому можно взять $\vec{v} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

$\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{n}_2 = (2, 3, -1)$. Получаем

$$\vec{v} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = 5(-1, 1, 1).$$

Ответ: $(-1, 1, 1)$.

Задача 365. Найти параметрические уравнения линии пересечения плоскости

$2x - y + 3z - 4 = 0$ с координатной плоскостью Oxy .

Решение.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$$

Пусть $x = t$, тогда $y = -4 + 2t$. Получаем

$$\begin{cases} x = t \\ y = -4 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = t \\ y = -4 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

Задача 368 п.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

$M = (1, 0, -1)$, и содержащую прямую $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$.

Решение.

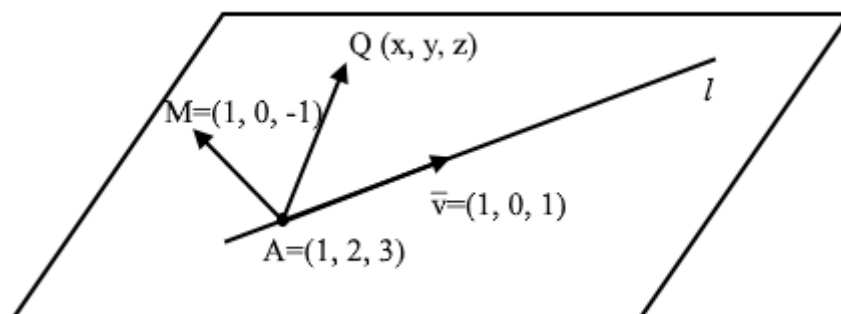


Рис. 11.4. К задаче 368 п.1

Из канонического вида уравнения прямой l видно, что она проходит через точку $A = (1, 2, 3)$, с направляющим вектором $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Пусть $Q = (x, y, z)$ – произвольная точка в искомой плоскости. Тогда $\overrightarrow{AQ} = (x - 1, y - 2, z - 3)$ компланарен $\overrightarrow{AM} = (0, -2, -4)$ и $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Это равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) - 4(y-2) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z - 2 = 0$$

Ответ: $x + 2y - z - 2 = 0$.

Возможны 3 варианта взаимного расположения прямой и плоскости:

- прямая пересекает плоскость
- прямая параллельна плоскости
- прямая лежит в плоскости

Задача 380 п.1. Установить лежит ли прямая l в плоскости P , параллельна плоскости P или пересекает ее. В последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$l: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+1}{7}$$

$$P: 7x + 2y - z + 7 = 0$$

Решение.

Перейдем к параметрическому виду задания прямой:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 7t \\ z = -1 + 7t \end{cases}$$

Теперь найдем точку пересечения, подставив параметрические выражения для x, y, z в уравнение плоскости:

$$7(1 - t) + 2(-2 + 7t) - (-1 + 7t) + 7 = 0 \Leftrightarrow 11 = 0$$

Решений нет, значит, прямая l и плоскость P параллельны.

Ответ: параллельны.

Возможны 4 варианта взаимного расположения двух прямых в пространстве:

- прямые параллельны
- прямые пересекаются
- прямые скрещиваются
- прямые совпадают

Задача 381 п.1. Установить взаимное расположение двух прямых:

$$l_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Решение.

Направляющий вектор l_1 : $\vec{v}_1 = (2, 1, 4)$; направляющий вектор l_2 : $\vec{v}_2 = (3, -2, 1)$. Так как векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ неколлинеарны, то прямые l_1 и l_2 либо пересекаются, либо скрещиваются. Попробуем найти точку пересечения. Распространенная ошибка нахождения координат точки пересечения – это приравнивание параметрических выражений для x, y, z и нахождение t . Так делать нельзя, потому что параметры t в уравнении первой и второй прямой независимы друг от друга. Чтобы избежать путаницы, вместо t в уравнении второй прямой напомним s :

$$l_2: \begin{cases} x = 6 + 3s \\ y = -1 - 2s \\ z = -2 + s \end{cases}$$

приравнявая,

получаем

систему:

$$\begin{cases} 2t = 6 + 3s \\ 7 + t = -1 - 2s \\ 3 + 4t = -2 + s \end{cases}$$

если данная система не имеет решений, то прямые скрещиваются, а если имеет, то прямые пересекаются:

$$\begin{cases} 2t = 6 + 3s \\ 7 + t = -1 - 2s \\ 3 + 4t = -2 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3s + 2t = 6 \\ 2s + t = -8 \\ -s + 4t = -5 \end{cases}$$

данная система решений не имеет, значит, прямые l_1 и l_2 скрещиваются.

Ответ: скрещиваются.

Задача 416. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, 3, -1)$ и перпендикулярной вектору $(1, -3, -1)$.

Решение.

Так как в ортогональной системе координат для плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вектор (A, B, C) – вектор нормали, то коэффициентами уравнения искомой плоскости можно выбрать $A = 1, B = -3, C = -1$. Коэффициент D находим, подставляя координаты точки $(2, 3, -1)$ в уравнение плоскости: получаем $D = 6$.

Ответ: $x - 3y - z + 6 = 0$.

Задача 424. В пучке, определенном плоскостями $\pi_1: 3x - y + z - 2 = 0$ и $\pi_2: x + y - 6z - 1 = 0$ найти плоскости, перпендикулярные данным.

Решение.

Уравнение произвольной плоскости π из пучка – линейная комбинация уравнений плоскостей π_1 и π_2 :

$$\lambda(3x - y + z - 2) + \mu(x + y - 6z - 1) = 0$$

Тогда $\pi_1 \perp \pi \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}$ – нормали к плоскостям π_1 и π соответственно.

$\vec{n}_1 = (3, -1, 1)$. Найдем $\vec{n}$: запишем уравнение π в виде

$$(3\lambda + \mu)x + (-\lambda + \mu)y + (\lambda - 6\mu)z - 2\lambda - \mu = 0$$

Тогда $\vec{n} = (3\lambda + \mu, -\lambda + \mu, \lambda - 6\mu)$.

$\vec{n}_1 \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}) = 0$. Получаем

$$3(3\lambda + \mu) - (-\lambda + \mu) + (\lambda - 6\mu) = 0 \Leftrightarrow 11\lambda - 4\mu = 0$$

Возьмем $\lambda = 4, \mu = 11$, получим уравнение π :

$$4(3x - y + z - 2) + 11(x + y - 6z - 1) = 0 \Leftrightarrow 23x + 7y - 62z - 19 = 0$$

Случай, когда $\pi_2 \perp \pi$ рассматривается аналогично.

Ответ: $23x + 7y - 62z - 19 = 0$.

Задача 427. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P = (1, -1, 2)$ на прямую $l: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и расстояние от P до прямой l .

Решение.

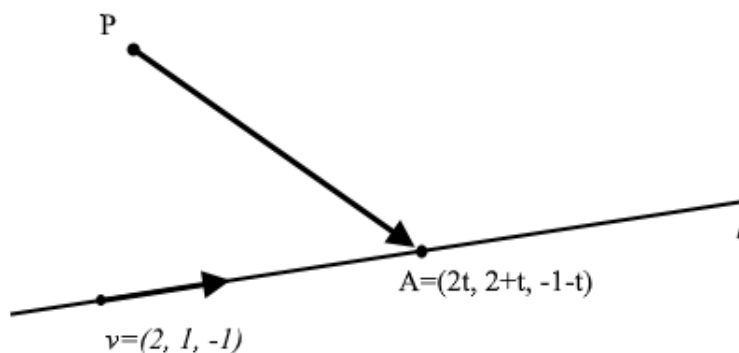


Рис. 11.5. К задаче 427

Рассмотрим произвольную точку A на прямой l . Так как уравнение l в параметрическом

виде записывается как $l: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$, то координаты $A = (2t, 2 + t, -1 - t)$ и

$$\overrightarrow{PA} = (2t - 1, t + 3, -t - 3).$$

Координаты направляющего вектора прямой l : $\vec{v} = (2, 1, -1)$.

PA – перпендикуляр к $l \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\overrightarrow{PA}, \vec{v}) = 0$. Получаем

$$(\overrightarrow{PA}, \vec{v}) = 2(2t - 1) + (t + 3) - (-t - 3) = 0 \Leftrightarrow 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Тогда $\overrightarrow{PA} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ и $|\overrightarrow{PA}| = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Задача 430. Найти расстояние от точки $(1, -1, 0)$ до прямой $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$.

Решение.

Воспользуемся общей формулой: расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до прямой

$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u}|}$$

где $\vec{u} = (a, \beta, \gamma)$, $\vec{v} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$.

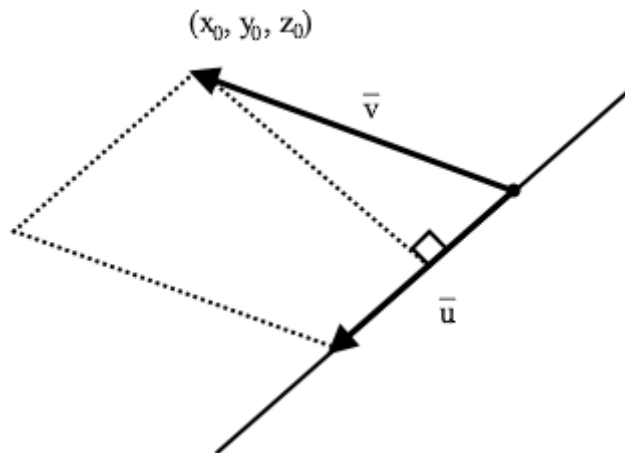


Рис. 11.6. К задаче 430

В нашем случае $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$, $(x_1, y_1, z_1) = (2, -1, 0)$. Тогда

$$\vec{v} = (-1, 0, 0) \text{ и } [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2, -1).$$

Получаем

$$\rho = \frac{|\vec{u}, \vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(0, -2, -1)|}{|(1, -1, 2)|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Угол между плоскостями находим как угол между нормальными к этим плоскостям.

Если угол между прямой и плоскостью равен φ , то угол между нормалью к плоскости и направляющим вектором прямой равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Задача 431. Найти точку, симметричную точке $(1, 3, -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

Решение.

Вектор нормали к плоскости имеет вид $\vec{n} = (3, 1, -2)$. Тогда уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $3x + y - 2z = 0$ и проходящей через точку

$$M = (1, 3, -4) \text{ имеет вид } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 2t \end{cases}.$$

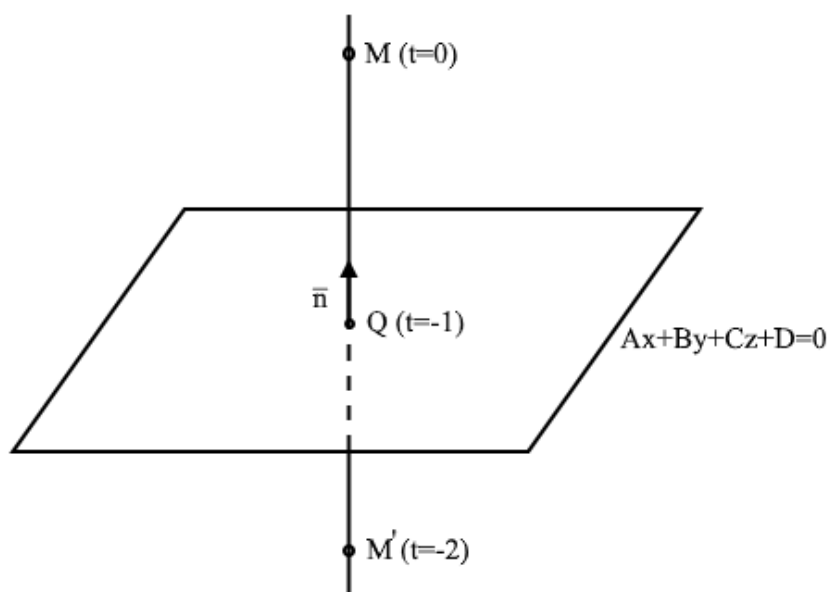


Рис. 11.7. К задаче 431

Найдем координаты Q – точки пересечения этой прямой и плоскости $3x + y - 2z = 0$:

$$3(1 + 3t) + (3 + t) - 2(-4 - 2t) = 0 \Leftrightarrow 14t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Так как точке M соответствует значение параметра $t = 0$, то симметричной ей точке M' соответствует значение параметра $t = -2$, то есть, $M' = (-5, 1, 0)$.

Ответ: $(-5, 1, 0)$.

Семинар 12. Аффинная и ортогональная замены координат.

Для простоты выведем формулу для замены координат при переходе от старого базиса к новому в двумерном случае (в трехмерном случае рассуждения аналогичные).

Пусть есть старый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и новый базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, причем векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса как

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2\end{aligned}$$

Тогда, если в старом базисе вектор $\vec{v}$ имел координаты (x, y) (то есть, имело место равенство $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$), а в новом базисе имеет координаты (x', y') (то есть, выполняется $\vec{v} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$), то старые координаты выражаются через новые следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что координаты старых векторов в новом базисе в матрице перехода записаны **по столбцам!**

В аффинном случае (старый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, начало координат в т. O , новый базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, начало координат в точке O') справедлива формула:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

где (x_0, y_0) – координаты точки O' в старом базисе.

Задача 478. Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые оси Ox' и Oy' прямые $x - 3y + 2 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$ соответственно, а за единичную точку новой системы – точку $(2, 3)$.
Решение.

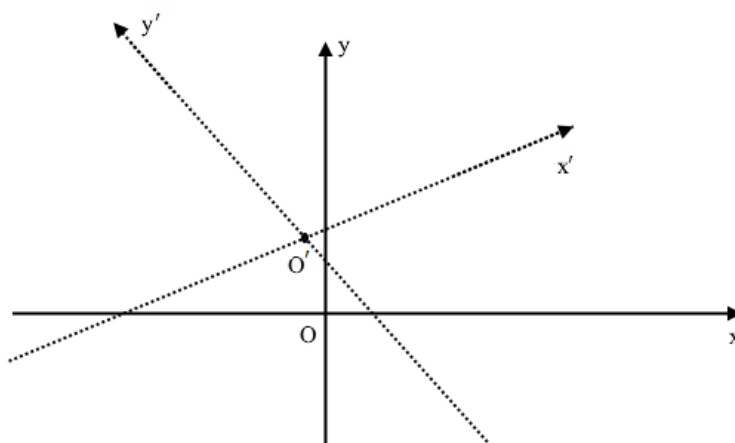


Рис. 12.1. К задаче 478

O' - точка пересечения осей Ox' и Oy' , ее координаты – решение системы

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Решая ее, получаем $x = -\frac{1}{11}$, $y = \frac{7}{11}$ – координаты O' в старой системе координат.

Найдем направляющие векторы новых осей.

Ось $O'x'$ задается уравнением $x - 3y + 2 = 0$, точки $A_1 = (-2, 0)$ и $A_2 = (0, \frac{2}{3})$ лежат на $O'x'$, в качестве направляющего вектора можно взять $\overrightarrow{A_1A_2} = (2, \frac{2}{3})$. Полученный вектор будет параллелен $\overrightarrow{e'_1}$, можно записать, что $\overrightarrow{e'_1} = \lambda (2, \frac{2}{3})$.

Ось $O'y'$ задается уравнением $3x + 2y - 1 = 0$, точки $B_1 = (0, \frac{1}{2})$ и $B_2 = (\frac{1}{3}, 0)$ лежат на $O'y'$, в качестве направляющего вектора можно взять $\overrightarrow{B_1B_2} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$. Полученный вектор будет параллелен $\overrightarrow{e'_2}$, можно записать, что $\overrightarrow{e'_2} = \mu (\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$.

Найдем λ и μ используя то, что $(2, 3)$ – единичная точка новой системы. В новой системе координат $Ox'y'$ она имеет координаты $(1, 1)$, то есть,

$$(2, 3) = O' + \overrightarrow{e'_1} + \overrightarrow{e'_2} \Leftrightarrow (2, 3) = (-\frac{1}{11}, \frac{7}{11}) + \lambda (2, \frac{2}{3}) + \mu (\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2 = -\frac{1}{11} + 2\lambda + \frac{1}{3}\mu \\ 3 = \frac{7}{11} + \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{2}\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 66\lambda + 11\mu = 69 \\ 44\lambda - 33\mu = 156 \end{cases}$$

Решая ее, получаем $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{30}{11}$. Тогда

$$\overrightarrow{e'_1} = \lambda (2, \frac{2}{3}) = \frac{3}{2} (2, \frac{2}{3}) = (3, 1)$$

$$\overrightarrow{e'_2} = \mu (\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = -\frac{30}{11} (\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = (-\frac{10}{11}, \frac{15}{11})$$

Получаем замену координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10/11 \\ 1 & 15/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/11 \\ 7/11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10/11 \\ 1 & 15/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/11 \\ 7/11 \end{pmatrix}$.

Задача 488. Новая прямоугольная система координат плоскости получена из старой переносом начала в точку $O'(4, -3)$ и поворотом на угол α таким, что $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Найти новые координаты точки M , зная ее старые координаты $(5, 10)$.

Решение.

Нам известны (x_0, y_0) – координаты точки O' в старом базисе: $x_0 = 4$, $y_0 = -3$. Найдем координаты новых базисных векторов в старом базисе:

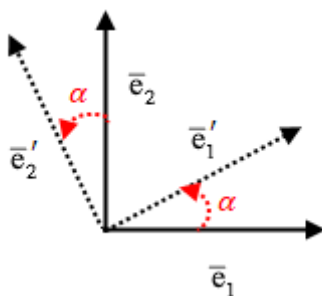


Рис. 12.2. К задаче 488

Из рисунка 12.2 ясны координаты новых базисных векторов:
 $\vec{e}'_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{e}'_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. Тогда матрица перехода выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Выражая новые координаты через старые, получим:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Так как матрица перехода A ортогональна, имеем $A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Старые координаты точки $M = (5, 10)$, значит, ее новые координаты:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(7, -11)$.

Семинар 13. Преобразование уравнений при замене координат. Цилиндрические и сферические координаты. Составление уравнений кривых второго порядка.

Задача 492. В пространстве даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Координаты (x, y, z) и (x', y', z') произвольной точки M относительно этих двух систем связаны между собой следующими формулами перехода:

$$\begin{aligned}x &= x' + 2y' - z' + 1 \\y &= y' + 2z' - 2 \\z &= -y' - z' + 1\end{aligned}$$

- 1) Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой.
- 2) Выразить координаты (x', y', z') через координаты (x, y, z) .
- 3) Какие координаты в системе координат $Oxyz$ имеет единичная точка E' системы координат $O'x'y'z'$?
- 4) Написать уравнение координатных плоскостей $O'y'z'$, $O'x'z'$ и $O'x'y'$ в системе координат $Oxyz$.
- 5) Написать уравнение плоскости $x - 2y + 3z + 1 = 0$ в системе координат $O'x'y'z'$.
- 6) Написать уравнение прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2}$ в системе координат $O'x'y'z'$.

Решение.

- 1) Имеем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

То есть, в первой системе координат $O' = (1, -2, 1)$, $e'_1 = (1, 0, 0)$, $e'_2 = (2, 1, -1)$, $e'_3 = (-1, 2, -1)$.

- 2) Для этого достаточно найти матрицу, обратную к $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right)$$

Итак, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ – искомая обратная матрица. Тогда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Также можно записать:

$$x' = x - 1/3y + 5/3z$$

$$y' = 1/3y - 2/3z$$

$$z' = 1/3y + 1/3z + 1$$

4) Плоскость $O'y'z'$ задается уравнением $x' = 0$. Из пункта 2) получаем уравнение в старых координатах: $x - 1/3y + 5/3z = 0$. Аналогично $O'x'z'$ задается уравнением $y' = 0$, откуда уравнение в старых координатах $1/3y \pm 2/3z = 0$.

Аналогично $O'x'y'$ задается уравнением $z' = 0$, откуда уравнение в старых координатах $1/3y + 1/3z + 1 = 0$.

5) В уравнение плоскости в старых координатах $x - 2y + 3z + 1 = 0$ подставляем замену

$$x = x' + 2y' - z' + 1$$

$$y = y' + 2z' - 2$$

$$z = -y' - z' + 1$$

Получим

$$x' + 2y' - z' + 1 - 2(y' + 2z' - 2) + 3(-y' - z' + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x' - 3y' - 8z' + 9 = 0$$

6) Запишем уравнение прямой в старых координатах в виде пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} -3(x - 2) = y + 2 \\ 2(y + 2) = -3z \end{cases}$$

Подставляем

замену

$$x = x' + 2y' - z' + 1$$

$$y = y' + 2z' - 2$$

$$z = -y' - z' + 1$$

Получим

$$\begin{cases} -3(x' + 2y' - z' + 1 - 2) = y' + 2z' - 2 + 2 \\ 2(y' + 2z' - 2 + 2) = -3(-y' - z' + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x' - 7y' + z' + 6 = 0 \\ -y' + z' + 3 = 0 \end{cases}$$

Задача 58а. Найти сферические координаты точки по ее прямоугольным координатам:

$A(-8, -4, 1)$.

Решение.

Сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

В географических терминах φ – долгота, θ – широта. В астрономических терминах φ – прямое восхождение, θ – склонение.

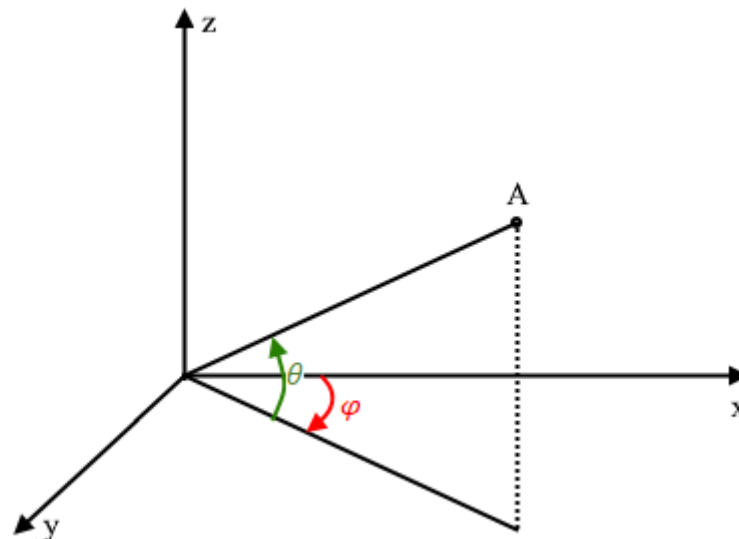


Рис. 13.1. Сферические координаты

Заметим, что $r = |OA| = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9$.

Проекция A на плоскость Oxy : $A' = (-8, -4, 0)$. Задача превращается в плоскую:

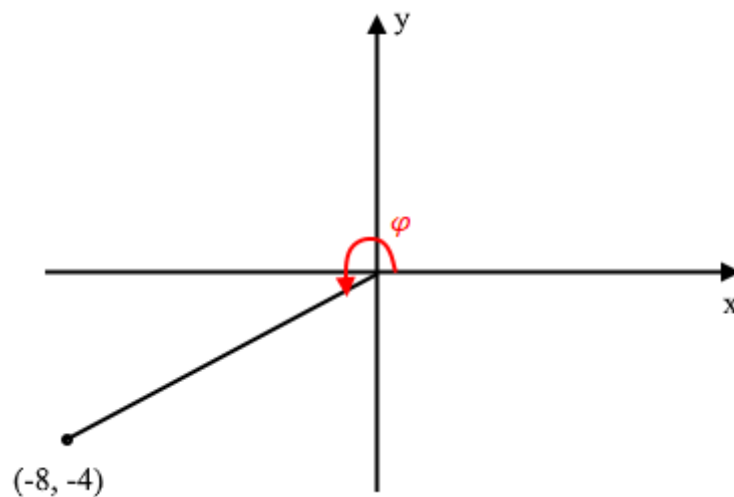


Рис. 13.2. К задаче 58а

Имеем

$$\sin \varphi = -4 / \sqrt{80} = -1 / \sqrt{5}$$

$$\cos \varphi = -8 / \sqrt{80} = -2 / \sqrt{5}$$

откуда $\varphi = -\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Найдем θ :

$\vec{OA} = (-8, -4, 1)$, $\vec{OA'} = (-8, -4, 0)$. Тогда

$$\cos \theta = \frac{(\vec{OA}, \vec{OA'})}{|\vec{OA'}| \cdot |\vec{OA}|} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Так как $z > 0 \Rightarrow \theta > 0 \Rightarrow \theta = \arccos \frac{4\sqrt{5}}{9}$.

Ответ: $A(9, -\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}, \arccos \frac{4\sqrt{5}}{9})$.

Задача 62а. Найти цилиндрические координаты точки по ее прямоугольным координатам: $A(3, -4, 5)$.

Решение.

Цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

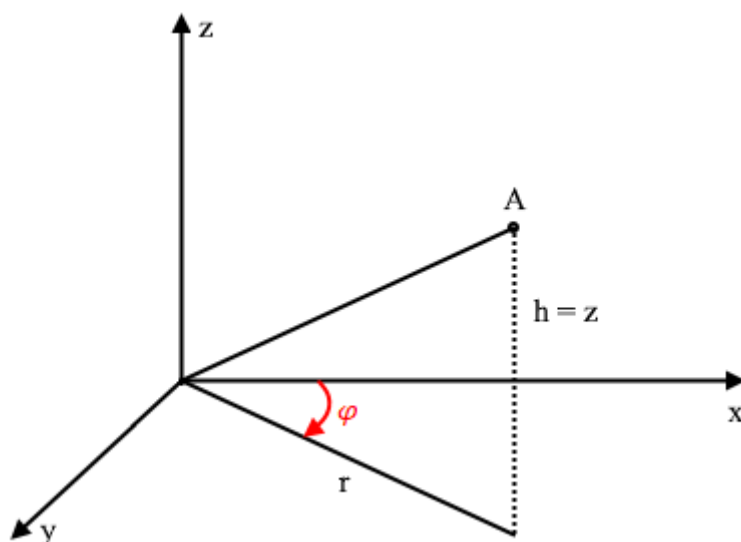


Рис. 13.3. Цилиндрические координаты

В нашем случае $h = z = 5$.

Проекция A на плоскость Oxy : $A' = (3, -4, 0)$. Задача превращается в плоскую:

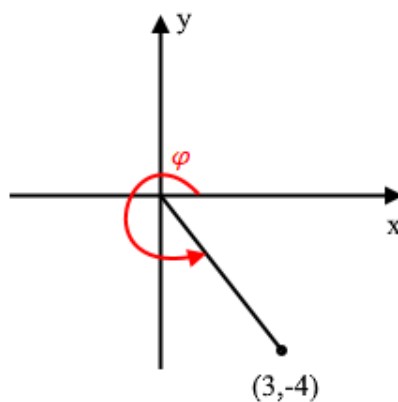


Рис. 13.4. К задаче 62а

Осталось найти полярные координаты точки A' в плоскости Oxy .

Имеем $r = \sqrt{16 + 9} = 5$. Тогда

$$\sin \varphi = -4 / 5$$

$$\cos \varphi = 3 / 5$$

откуда $\varphi = -\arccos \frac{3}{5}$.

Ответ: $A(5, -\arccos \frac{3}{5}, 5)$.

Задача 512. Написать уравнение параболы, зная ее фокус $F(-1, -2)$ и директрису $x - y + 8 = 0$.

Решение.

Напоминание: $(y')^2 = 2px'$ - уравнение параболы в канонических координатах.

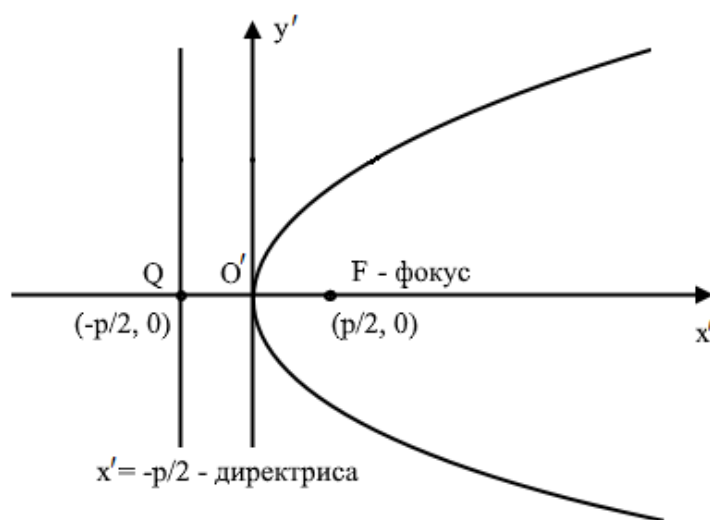


Рис. 13.5. Парабола в канонических координатах

Найдем ось симметрии параболы ($O'x'$): она проходит через фокус $F(-1, -2)$ и перпендикулярна директрисе. Пусть Q – основание перпендикуляра, опущенного из фокуса F на директрису (см. рис. 12.8). Вектор $\vec{n} = (1, -1)$ ортогонален направляющему вектору директрисы $(1, 1)$, поэтому уравнение перпендикуляра (оси симметрии параболы) запишется в параметрическом виде как

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Координаты Q ищем как решение системы

$$\begin{cases} x - y + 8 = 0 \\ x = -1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Подставляя второе и третье уравнение системы в первое, получаем $-1 + t - (2 - t) + 8 = 0$

откуда $t = -\frac{5}{2}$, значит, $x = -\frac{7}{2}$, $y = \frac{9}{2}$.

Таким образом, $Q = (-\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$.

O' – середина $QF \Rightarrow O' = (\frac{-\frac{7}{2}-1}{2}, \frac{\frac{9}{2}+2}{2}) = (-\frac{9}{4}, \frac{13}{4})$.

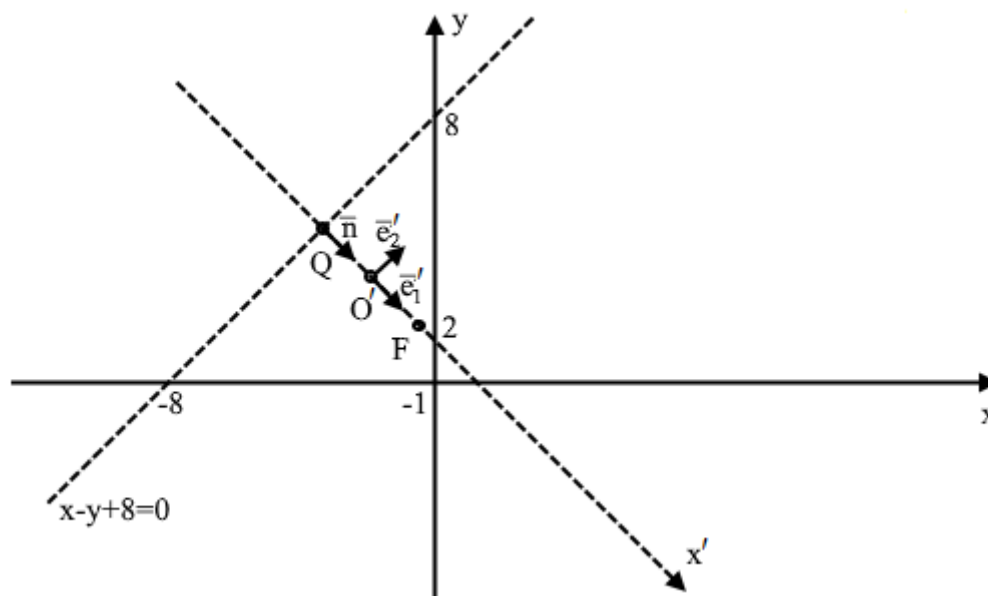


Рис. 13.6. К задаче 512

Найдем векторы канонического базиса: $\vec{e}_1' \parallel \vec{n}$, поэтому $\vec{e}_1' = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Вектор $\vec{e}_2'$ должен сохранять ориентацию исходного базиса, быть единичной длины и ортогональным $\vec{e}_1'$. Несложно видеть, что $\vec{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Получаем замену координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/4 \\ 13/4 \end{pmatrix}$$

p – расстояние между фокусом и директрисой, $p = |\overrightarrow{QF}| = |(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})| = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Значит, в канонической (штрихованной) системе координат уравнение параболы имеет вид

$$(y')^2 = 5\sqrt{2}x'$$

Для того, чтобы записать это уравнение в исходной системе координат, выразим новые координаты через старые. Так как замена координат была ортогональной, то матрица перехода $C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ортогональна и $C^{-1} = C^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Получаем

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9/4 \\ 13/4 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11/2\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} + 11/2\sqrt{2} \\ y' &= x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Подставим полученную замену в каноническое уравнение параболы $(y')^2 = 5\sqrt{2}x'$, получим

$$(x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2})^2 = 5\sqrt{2}(x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} + 11/2\sqrt{2})$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем

$$x^2 + y^2 + 2xy - 12x + 8y - 54 = 0$$

Ответ: $x^2 + y^2 + 2xy - 12x + 8y - 54 = 0$.

Семинар 14. Приведение квадрик к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Часть 1.

Алгоритм приведения квадрики к каноническому виду ортогональными преобразованиями:

Квадрика

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

1) Находим (если он существует) центр симметрии квадрики (x_0, y_0) из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

2) Если центр (x_0, y_0) существует, то сдвигаем в него начало координат при помощи замены

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

После сдвига квадратичная часть остается прежней, линейная часть обнуляется.

3) Находим корни характеристического многочлена квадратичной части

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Характеристический многочлен

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

4) Находим собственные векторы квадратичной части:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = 0$$

нормируя полученные решения, находим

$$e_i'' = \frac{(x_i, y_i)}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$$

Замечание: если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $e_1'' \perp e_2''$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$ – это окружность, в качестве e_1'' выбираем произвольный вектор единичной длины, в качестве e_2'' выбираем произвольный единичный вектор, ортогональный e_1'' .

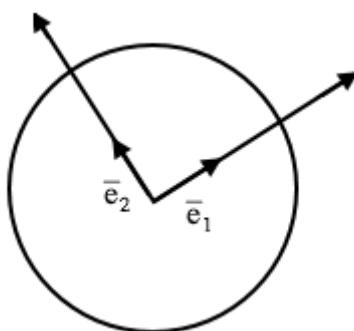


Рис. 14.1. Случай окружности: $\lambda_1 = \lambda_2$

5) “Доработка напильником” – при необходимости перенумеровываем оси, в случае

параболы может понадобиться сдвиг – приводим уравнение квадрики к каноническому виду.

Задача 540 п.1. Определить канонический вид и каноническую систему координат линии второго порядка: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

Решение.

1) Найдем координаты центра:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 4y - 32 = 0 \\ 4x + 16y - 56 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ x + 4y = 14 \end{cases}$$

решая систему, получаем $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ – координаты центра;

2) Сдвинем начало координат в центр при помощи замены

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$$

получим

$$5(x' + 2)^2 + 4(x' + 2)(y' + 3) + 8(y' + 3)^2 - 32(x' + 2) - 56(y' + 3) + 80 = 0$$

после упрощений

$$5(x')^2 + 4x'y' + 8(y')^2 - 36 = 0$$

3) Найдем главные направления:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

решая получившееся уравнение, получаем $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$;

4) Найдем собственные вектора и нормируем их:

$$\lambda_1 = 9: \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - y_1 = 0$$

Возьмем $x_1 = 1$, $y_1 = 2$. Нормируем: $e_1'' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = 4: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 + 2y_2 = 0$$

Возьмем $x_2 = -2, y_2 = 1$. Нормируем: $e_2'' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Получаем замену

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x' = 1/\sqrt{5}x'' - 2/\sqrt{5}y'' \\ y' = 2/\sqrt{5}x'' + 1/\sqrt{5}y'' \end{cases}$$

Подставим в уравнение квадратики:

$$5(1/\sqrt{5}x'' - 2/\sqrt{5}y'')^2 + 4(1/\sqrt{5}x'' - 2/\sqrt{5}y'')(2/\sqrt{5}x'' + 1/\sqrt{5}y'') + 8(2/\sqrt{5}x'' + 1/\sqrt{5}y'')^2 - 36 = 0$$

после упрощений

$$9(x'')^2 + 4(y'')^2 - 36 = 0$$

Обратите внимание, что коэффициенты при $(x'')^2$ и $(y'')^2$ равны λ_1 и λ_2 , найденным ранее.

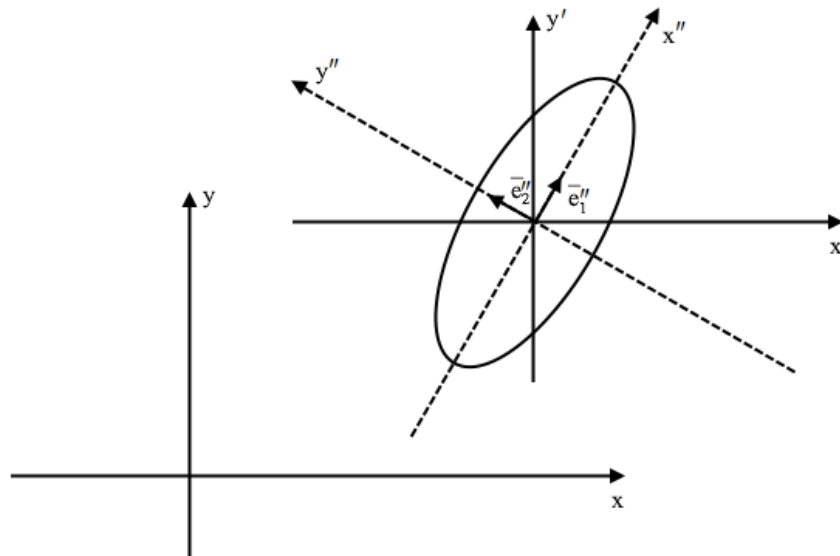


Рис. 14.2. Геометрический смысл приведения квадратики к каноническому виду

5) "Доработка напильником":

$$9(x'')^2 + 4(y'')^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1 - \text{эллипс}$$

В каноническом виде большая полуось должна совпадать с осью Ox , поэтому поменяем оси местами, сделав замену

$$\begin{cases} x'' = y''' \\ y'' = x''' \end{cases}$$

получим $\left(\frac{x'''}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'''}{2}\right)^2 = 1$ - эллипс с полуосями $a = 3$ и $b = 2$.

Также укажем главные элементы рассматриваемой квадррики в исходных координатах:

Оси $O'''x'''y'''$: центр $(0, 0)$, большая ось $(1, 0)$, малая ось $(0, 1)$.

Оси $O''x''y''$: центр $(0, 0)$, большая ось $(0, 1)$, малая ось $(1, 0)$.

Оси $O'x'y'$: делаем замену $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$, получаем центр $(0, 0)$,

большая ось $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, малая ось $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Оси Oxy : делаем замену $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$, получаем центр $(2, 3)$, большая ось $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, малая ось $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Ответ: эллипс $\left(\frac{x'''}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'''}{2}\right)^2 = 1$.

Семинар 15. Приведение квадрик к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Часть 2. Ортогональные инварианты линий 2-го порядка.

Задача 540 п.8. Определить канонический вид и каноническую систему координат линии второго порядка: $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

Решение.

1) Найдем координаты центра:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 8 = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

система несовместна, отсюда заключаем, что центра данная квадрика не имеет;

2) Данный пункт пропускаем по причине отсутствия центра;

3) Найдем главные направления:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

решая получившееся уравнение, получаем $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$;

4) Найдем собственные вектора и нормируем их:

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_1 + y_1 = 0$$

Возьмем $x_1 = 1, y_1 = 1$. Нормируем: $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 + y_2 = 0$$

Возьмем $x_2 = -1, y_2 = 1$. Нормируем: $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Получаем замену

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt{2}x' - 1/\sqrt{2}y' \\ y = 1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y' \end{cases}$$

Подставим в уравнение квадррики:

$$(1/\sqrt{2}x' - 1/\sqrt{2}y')^2 + 2(1/\sqrt{2}x' - 1/\sqrt{2}y')(1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y') + (1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y')^2 - 8(1/\sqrt{2}x' - 1/\sqrt{2}y') + 4 = 0$$

Квадратичная часть: $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 2(x')^2$. После упрощений получаем

$$2(x')^2 - 4\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' + 4 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 - 2\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$$

5) ”Доработка напильником”:

Поменяем оси местами, сделав замену

$$\begin{cases} x' = y'' \\ y' = x'' \end{cases}$$

получим

$$(y'')^2 - 2\sqrt{2}y'' + 2\sqrt{2}x'' + 2 = 0$$

Выделим полный квадрат:

$$(y'' - \sqrt{2})^2 = -2\sqrt{2}x''$$

и сделаем замену

$$\begin{cases} x''' = -x'' \\ y''' = y'' - \sqrt{2} \end{cases}$$

получим каноническое уравнение параболы ($p = \sqrt{2}$):

$$(y''')^2 = 2\sqrt{2}x'''$$

Также укажем главные элементы рассматриваемой квадррики в исходных координатах:

Оси $O'''x'''y'''$: вершина $(0, 0)$, главная ось $(1, 0)$.

Оси $O''x''y''$: вершина $(0, \sqrt{2})$, главная ось $(-1, 0)$.

Оси $O'x'y'$: вершина $(\sqrt{2}, 0)$, главная ось $(0, -1)$.

Оси Oxy : делаем замену $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, получаем вершину $(1, 1)$,

главная ось $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Ответ: парабола $(y''')^2 = 2\sqrt{2}x'''$.

Ортогональные инварианты линий второго порядка

Линия второго порядка

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

Ортогональные инварианты:

$$\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} = S = I_1$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta = I_2$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \Delta = I_3$$

Если уравнение линии второго порядка умножить на λ , то I_i умножится на λ^i .

Задача 542 п.1. Составить каноническое уравнение линии, если заданы ее инварианты:

$$I_1 = 0, I_2 = -25, I_3 = 125.$$

Решение.

Вначале определим тип квадрики:

$I_2 \neq 0 \Rightarrow$ квадратичная часть невырождена.

$I_3 \neq 0 \Rightarrow$ квадрика невырождена.

$I_2 < 0 \Rightarrow$ данная квадрика является гиперболой.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Умножим на λ , получим

$$\frac{\lambda x^2}{a^2} - \frac{\lambda y^2}{b^2} - \lambda = 0$$

Ортогональные инварианты:

$$I_1 = \lambda \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right), \quad I_2 = -\frac{\lambda^2}{a^2 b^2}, \quad I_3 = \frac{\lambda^3}{a^2 b^2}.$$

Тогда

$$\lambda = -\frac{I_3}{I_2} = \frac{125}{25} = 5$$

получаем

$$I_1: 0 = \lambda \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \Rightarrow a^2 = b^2 - \text{равносторонняя гипербола.}$$

$$I_2: -25 = -\frac{25}{a^4} \Rightarrow |a| = 1, |b| = 1$$

Линия второго порядка – равносторонняя гипербола с полуосями, равными 1. Ее

каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$$

Ответ: $x^2 - y^2 = 1$.

Алгоритм составления канонического уравнения линии второго порядка по ее ортогональным инвариантам:

- 1) По инвариантам определяем тип линии
- 2) Пишем каноническое уравнение линии, умножаем его на λ , затем по инвариантам находим λ , после чего вычисляем необходимые параметры в записи канонического уравнения линии (для эллипса и гиперболы – полуоси a и b , для параболы – фокальный параметр p)

Замечание: обратите внимание, что таким образом мы получаем только каноническое уравнение линии второго порядка, без замены координат, к нему приводящей.

Семинар 16. Ортогональные инварианты линий второго порядка.

Пучки и связки линий второго порядка. Часть 1.

Задача 543. Доказать, что условия $I_1^2 = 4I_2$, $I_1I_3 < 0$ необходимы и достаточны для того, чтобы уравнение кривой второго порядка определяло действительную окружность.

Решение.

Необходимость.

Пусть $I_1^2 = 4I_2$, $I_1I_3 < 0$. Тогда

1) $I_1I_3 < 0 \Rightarrow I_1 \neq 0 \Rightarrow I_2 = \frac{I_1^2}{4} > 0$. Отсюда следует, что наша кривая – эллипс

(действительный, если $I_3 < 0$ или мнимый, если $I_3 > 0$) или пара мнимых пересекающихся прямых (если $I_3 = 0$).

2) Так как $I_1I_3 < 0$, то наша кривая – действительный эллипс. Значит, можно выбрать ортогональную систему координат, в которой его уравнение будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Умножим на λ , получим

$$\frac{\lambda x^2}{a^2} - \frac{\lambda y^2}{b^2} - \lambda = 0$$

Ортогональные инварианты:

$$I_1 = \lambda \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad I_2 = \frac{\lambda^2}{a^2 b^2}, \quad I_3 = -\frac{\lambda^3}{a^2 b^2}.$$

$$3) I_1^2 = 4I_2 \Leftrightarrow \lambda^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = 4 \frac{\lambda^2}{a^2 b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

Таким образом, уравнение квадрики имеет вид $x^2 + y^2 = a^2$ – это окружность.

Достаточность.

Пусть кривая второго порядка – действительная окружность. Значит, можно выбрать ортогональную систему координат, в которой ее уравнение будет иметь вид

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ортогональные инварианты:

$$I_1 = 2, \quad I_2 = 1, \quad I_3 = -r^2.$$

Выполнено условие $I_1^2 = 4I_2$, $I_1I_3 < 0$.

На лекциях была теорема о том, что квадрика полностью определяется 5-ю точками, через которые она проходит, если никакие 4 из них не лежат на одной прямой.

Действительно, квадрика $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ задается 6-ю коэффициентами, определенными с точностью до пропорциональности, поэтому для их определения достаточно системы из 5 уравнений, при условии, что эта система невырождена (что и означает, что никакие 4 точки, определяющие эту систему, не лежат на одной прямой).

Однако, при решении задач такой прямолинейный способ нахождения квадрики практически не применяется. Удобнее использовать понятие пучка кривых второго порядка.

Задача 643. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через пять точек $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,-5)$, $(-5,2)$.

Решение.

Если решать задачу “в лоб”, подставляя координаты точек в уравнение квадрики, то мы получим систему из 5 уравнений, решая которую легко ошибиться. Решим задачу с помощью понятия пучка кривых второго порядка.

Пучок кривых второго порядка

Пусть есть две квадрики $F = 0$ и $G = 0$. Рассмотрим все квадрики, имеющие вид $\lambda F + \mu G = 0$ – пучок кривых второго порядка (по аналогии с пучком прямых, при этом $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$). Если точка P принадлежит обеим квадрикам F и G , то она принадлежит любой квадрике пучка ($F(P) = 0$, $G(P) = 0 \Rightarrow \lambda F(P) + \mu F(P) = 0$).

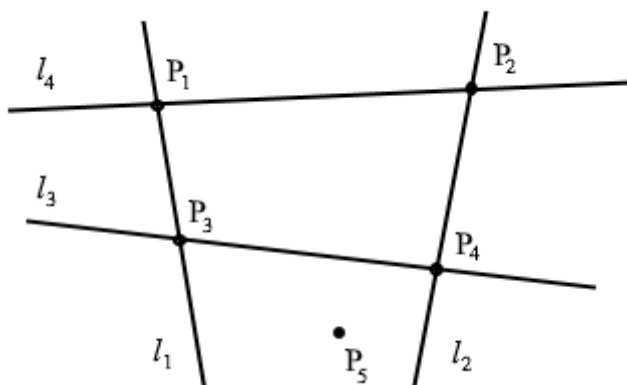


Рис. 16.1. К задаче 643

В качестве первой квадрики рассмотрим $F = 0$: $l_1 \cup l_2$.

В качестве второй квадрики рассмотрим $G = 0$: $l_3 \cup l_4$.

Так $F = 0$ и $G = 0$ проходят через точки P_1, P_2, P_3, P_4 , то и $\lambda F + \mu G = 0$ также проходит через точки P_1, P_2, P_3, P_4 .

Найдем такие λ_0 и μ_0 , что $\lambda_0 F(P_5) + \mu_0 G(P_5) = 0$. Тогда $\lambda_0 F + \mu_0 G = 0$ проходит через все пять точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 .

$$P_1 = (0,0), P_2 = (0,1), P_3 = (1,0), P_4 = (2,-5), P_5 = (-5,2)$$

$$l_1 = (P_1 P_3): \text{прямая } y = 0;$$

$$l_2 = (P_2 P_4): \text{пусть } l_2 \text{ задается уравнением } Ax + By + C = 0. \text{ Примем } C = 1, \text{ подставляя}$$

$$\text{в уравнение прямой координаты } P_2 \text{ и } P_4 \text{ получим систему } \begin{cases} B + 1 = 0 \\ 2A + 5B + 2 = 0 \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$B = -1, A = 2. \text{ Получаем уравнение } l_2: 2x - y + 1 = 0.$$

Тогда

$$F = 0: l_1 \cup l_2 \Leftrightarrow y(2x - y + 1) = 0.$$

$l_3 = (P_3P_4)$: пусть l_3 задается уравнением $Ax + By + C = 0$. Примем $C = 1$, подставляя в уравнение прямой координаты P_3 и P_4 получим систему $\begin{cases} A + 1 = 0 \\ 2A + 5B + 1 = 0 \end{cases}$, откуда $A = -1, B = 1/5$. Получаем уравнение l_3 : $5x - y - 5 = 0$;
 $l_4 = (P_1P_2)$: прямая $x = 0$.

Тогда

$$G = 0: \quad l_3 \cup l_4 \Leftrightarrow x(5x - y - 5) = 0.$$

Уравнение пучка $\lambda F + \mu G = 0$:

$$\lambda y(2x - y + 1) + \mu x(5x - y - 5) = 0$$

Условие прохождения через P_5 :

$$2\lambda(-10 - 2 + 1) - 5\mu(-25 - 2 - 5) = 0 \Leftrightarrow 11\lambda - 80\mu = 0$$

Выберем $\lambda_0 = 80, \mu_0 = 11$, получим уравнение квадрики

$$80y(2x - y + 1) + 11x(5x - y - 5) = 0 \Leftrightarrow 55x^2 + 149xy - 80y^2 - 55x + 80y = 0$$

Ответ: $55x^2 + 149xy - 80y^2 - 55x + 80y = 0$.

Семинар 17. Ортогональные инварианты линий второго порядка.

Пучки и связки линий второго порядка. Часть 2.

Задача 637. Составить уравнение линии второго порядка, которая касается прямых $x - 1 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ в точках $(1,0)$ и $(0,2)$ и проходит через точку $(0,0)$.

Решение.

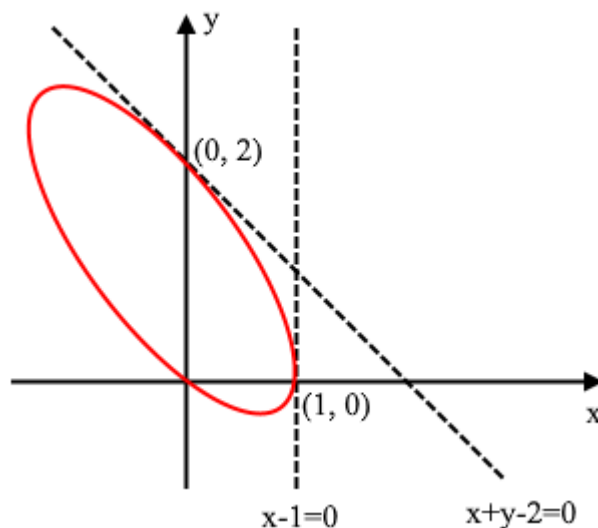


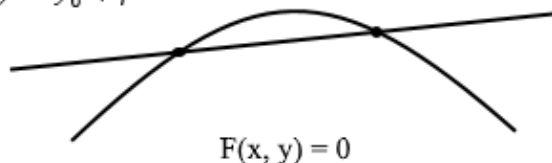
Рис. 17.1. К задаче 637

Имеем 5 условий:

- 1) Прохождение через точку $(0,0)$;
- 2) Прохождение через точку $(1,0)$;
- 3) Прохождение через точку $(0,2)$;
- 4) Касание прямой $x - 1 = 0$ в точке $(1,0)$;
- 5) Касание прямой $x + y - 2 = 0$ в точке $(0,2)$.

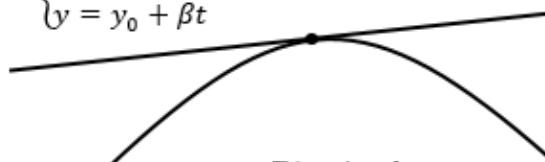
Как выразить условие касания квадрики прямой?

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$



$$F(x, y) = 0$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$



$$F(x, y) = 0$$

рис. 17.2. Пересечение и касание прямой квадрики

Точки пересечения прямой и квадрики мы ищем, подставляя параметрические выражения $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ в уравнение квадрики: $F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = 0$ и решая

полученное квадратное уравнение относительно t . Если уравнение имеет корень кратности 2, то прямая касается квадрики.

По аналогии со связкой прямых, выберем квадрики $F = 0, G = 0$ и $H = 0$, каждая из которых удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Тогда

$$\lambda F + \mu G + \kappa H = 0$$

- связка квадриков, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3).

Затем λ, μ, κ найдем из условий 4) и 5).

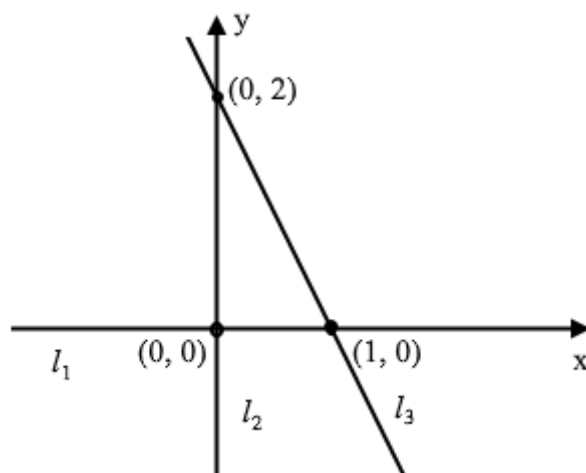


Рис. 17.3. Прямые, с помощью которых находим F, G и H

Выберем

$$F = 0: l_1 \cup l_2,$$

$$G = 0: l_1 \cup l_3,$$

$$H = 0: l_2 \cup l_3.$$

l_1 : прямая $y = 0$, l_2 : прямая $x = 0$, l_3 : прямая $2x + y - 2 = 0$. Тогда

$$F = 0: xy = 0,$$

$$G = 0: y(2x + y - 2) = 0,$$

$$H = 0: x(2x + y - 2) = 0.$$

Уравнение связки:

$$\lambda xy + \mu y(2x + y - 2) + \kappa x(2x + y - 2) = 0$$

Запишем условия касания:

4) касание прямой $x - 1 = 0$ в точке $(1, 0)$ – запишем уравнение прямой в

параметрическом виде: $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$. Точке $(1, 0)$ отвечает значение $t = 0$, значит, $t = 0$

должно быть корнем кратности 2 квадратного уравнения, которое получается после

подстановки в уравнение связки значений $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$:

$$\lambda t + \mu t(2 + t - 2) + \kappa(2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow \mu t^2 + (\lambda + \kappa)t = 0$$

То есть, должно выполняться

$$\lambda + \kappa = 0$$

5) касание прямой $x + y - 2 = 0$ в точке $(0,2)$ – запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}$. Точке $(0,2)$ отвечает значение $t = 0$, значит, $t = 0$ должно быть корнем кратности 2 квадратного уравнения, которое получается после подстановки в уравнение связки значений $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \lambda t(2 - t) + \mu(2 - t)(2t + 2 - t - 2) + \kappa t(2t + 2 - t - 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\kappa - \lambda - \mu)t^2 + 2(\lambda + \mu)t &= 0 \end{aligned}$$

То есть, должно выполняться

$$\lambda + \mu = 0$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \lambda + \kappa = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

Выберем $\lambda = 1$, тогда $\mu = \kappa = -1$. Получаем уравнение связки:

$$xy - y(2x + y - 2) - x(2x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$$

Ответ: $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$.

Заметим, что задачу 637 можно было решать, используя понятие пучка линий второго порядка, так как условие касание квадрики прямой – линейно.

В самом деле, пусть квадрика $F = 0$ касается прямой $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ в точке (x_0, y_0) . Это значит, что уравнение $F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = 0$ имеет $t = 0$ корнем кратности 2.

Пусть то же верно для квадрики $G = 0$. Тогда уравнение

$$\lambda F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) + \mu G(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = 0$$

также имеет $t = 0$ корнем кратности 2.

То есть, если квадрики $F = 0$ и $G = 0$ обе касаются прямой $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ в точке

(x_0, y_0) , то любая квадрика из пучка $\lambda F + \mu G = 0$ также будет касаться прямой $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ в точке (x_0, y_0) .

Поэтому, если F и G удовлетворяют условиям 1), 2), 3), 4) задачи 637, то осталось лишь найти λ_0 и μ_0 , такие, что $\lambda_0 F + \mu_0 G = 0$ удовлетворяет условию 5).

Выберем в качестве $F = 0$: $l_1 \cup l_2$ (см. рис. 17.4). F удовлетворяет условиям 1), 2), 3), 4).

l_1 : прямая $y = 0$, l_2 : прямая $2x + y - 2 = 0$. Тогда $F = y(2x + y - 2)$.

Проблема в том, что в качестве $G = 0$ нужно выбрать эллипс, проходящий через точки $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,2)$ и касающийся прямой $x - 1 = 0$ (см. рис. 17.4). Задача нахождения уравнения этого эллипса достаточно трудоемкая, хоть и выполнимая. Именно поэтому мы выбрали способ решения, использующий связку линий второго порядка, а не пучок.

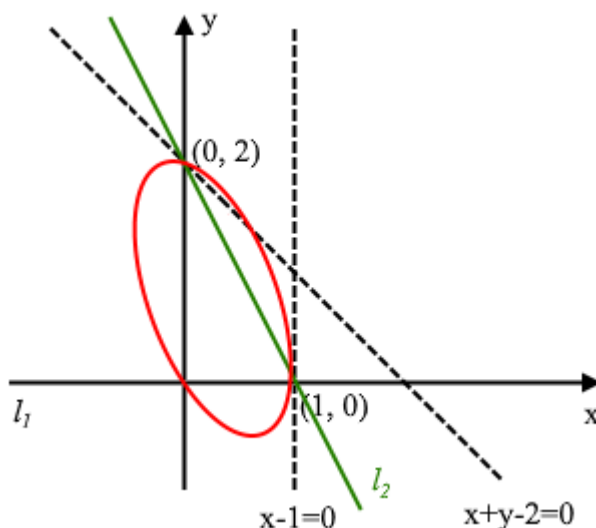


Рис. 17.4 Второй способ решения задачи 637

Задача 622. Не находя точки пересечения окружностей $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 18 = 0$ и $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 36 = 0$ составить уравнение их общей хорды.
Решение.

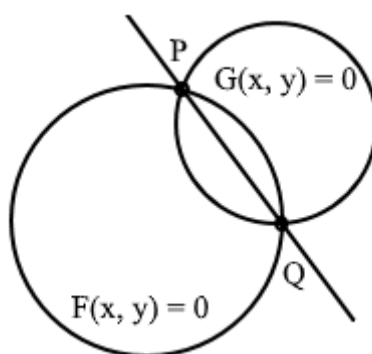


Рис. 17.5. К задаче 622

Все квадррики (в том числе и вырожденная – общая хорда, уравнение которой мы ищем), проходящие через точки P и Q , принадлежат пучку $\lambda F + \mu G = 0$.

Воспользуемся тем, что общая хорда – это вырожденная квадррика, значит, ее инварианты $I_2 = I_3 = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda F + \mu G = 0 &\Leftrightarrow \lambda((x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 18) + \mu((x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 36) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda + \mu)x^2 + (\lambda + \mu)y^2 + (-2\lambda + 6\mu)x + (4\lambda - 2\mu)y - 13\lambda - 26\mu = 0\end{aligned}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \lambda + \mu & 0 \\ 0 & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda + \mu)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\mu$$

Выберем $\lambda = 1 \Rightarrow \mu = -1$. Подставляя найденные значения λ и μ в уравнение пучка, получаем уравнение общей хорды: $8x - 6y - 13 = 0$.

Ответ: $8x - 6y - 13 = 0$.

Семинар 18. Диаметры, взаимно сопряженные и асимптотические направления линий второго порядка.

Асимптотическое направление (α, β) – такое направление, что прямая с направляющим вектором (α, β) имеет с линией второго порядка ровно одну общую точку (касательные не считаются, считаем, что в точке касания присутствуют две общие точки, слившиеся в одну).

Пример – парабола, асимптотическое направление соответствует направляющему вектору оси симметрии (см. рис. 18.1)

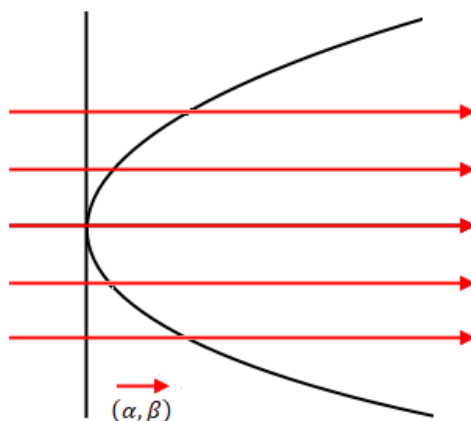


Рис. 18.1. Асимптотическое направление

Неасимптотическое направление (α, β) – направление, не являющееся асимптотическим. Прямые с направляющим вектором, соответствующим неасимптотическому направлению (α, β) , либо не пересекают линию второго порядка, либо имеют с ней две общие точки.

Диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению (α, β) – прямая, содержащая центры хорд, высекаемых на линии второго порядка прямыми с направляющим вектором (α, β) .

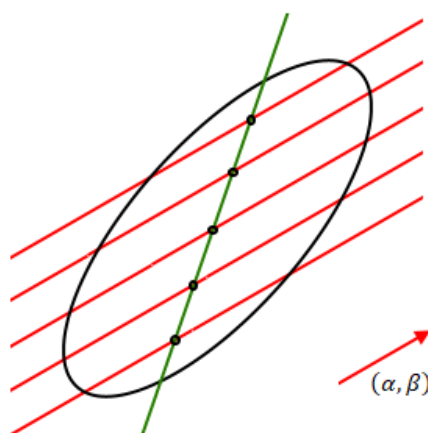


Рис. 18.2 Зеленым выделен диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению

Формула для нахождения сопряженного диаметра:

$$(\alpha, \beta, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Сопряженные диаметры, соответствующие разным неасимптотическим направлениям, пересекаются в центре линии второго порядка (если он есть) – см. рис. 18.3.

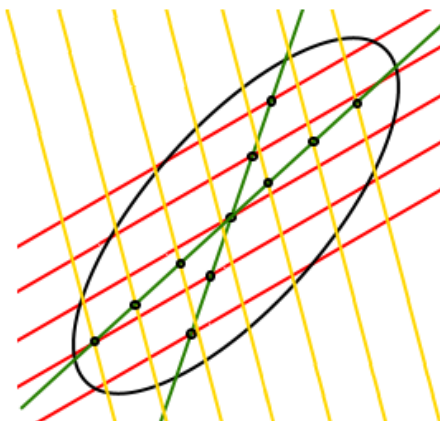


Рис. 18.3. Сопряженные диаметры (выделены зеленым) пересекаются в центре эллипса

Задача 589. Составить уравнение прямой, проходящей через середины хорд

$2x - y + 7 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Решение.

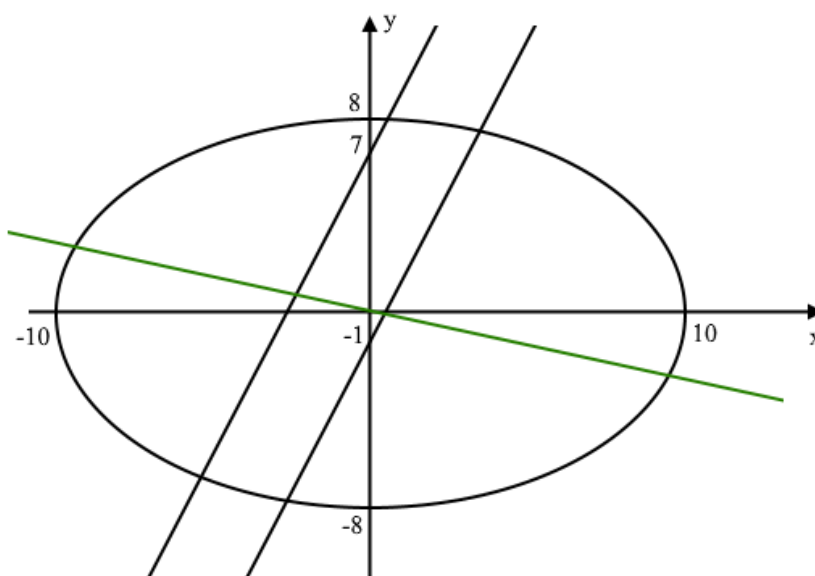


Рис. 18.4. К задаче 589

Заметим, что хорды имеют направляющий вектор $(1, 2)$. Тогда прямая, проходящая через их середины – диаметр, сопряженный направлению $(1, 2)$. Воспользуемся формулой для нахождения сопряженного диаметра:

$$(1, 2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{100} + \frac{y}{32} = 0 \Leftrightarrow 8x + 25y = 0$$

Ответ: $8x + 25y = 0$.

Задача 591. Написать уравнение диаметра кривой второго порядка

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0,$$

проходящего через середину хорды, отсекаемой этой кривой на прямой $x - 2y - 1 = 0$.

Решение.

$(2, 1)$ – направляющий вектор прямой $x - 2y - 1 = 0$. Воспользуемся формулой для нахождения сопряженного диаметра:

$$(2, 1, 0) \begin{pmatrix} 5 & -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y - 4 = 0$$

Ответ: $7x - 4y - 4 = 0$.

Задача 592. Найти такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая точкой $(3, 1)$ делится пополам.

Решение.

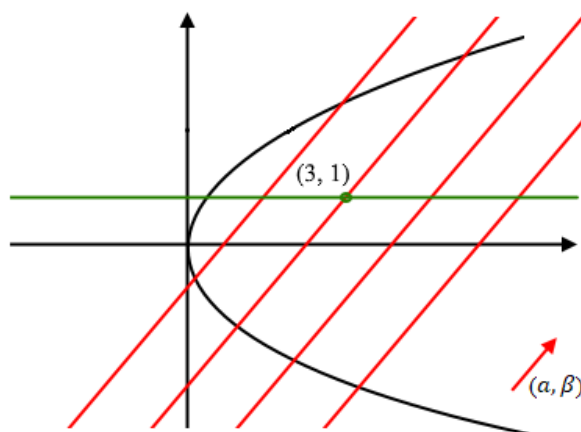


Рис. 18.5. К задаче 592

Найдем диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению (α, β) – у параболы он всегда будет параллелен главной оси:

$$(\alpha, \beta, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta y - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow y = 2 \frac{\alpha}{\beta}$$

Для диаметра, проходящего через точку $(3, 1)$ должно выполняться $1 = 2 \frac{\alpha}{\beta}$.

Возьмем $\alpha = 1$, тогда $\beta = 2$ – получим $(1, 2)$ – направление, которому сопряжен диаметр, проходящий через точку $(3, 1)$.

Осталось найти уравнение хорды, проходящей через точку $(3, 1)$ с направляющим вектором $(1, 2)$:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$$

Ответ: $2x - y - 5 = 0$.

Задача 595. Найти общий диаметр двух кривых: $x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y = 0$ и $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$.

Решение.

Найдем диаметр первой квадрики, сопряженный направлению (α_1, β_1) :

$$(\alpha_1, \beta_1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)x + (-\alpha_1 - \beta_1)y + (-\alpha_1 - \beta_1) = 0$$

Найдем диаметр первой квадрики, сопряженный направлению (α_2, β_2) :

$$(\alpha_2, \beta_2, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_2 - \beta_2)x + (-\alpha_2 + \beta_2)y + (-\alpha_2 - \beta_2) = 0$$

Так как диаметр общий, то полученные уравнения диаметров должны быть пропорциональны. Значит, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = \lambda(\alpha_2 - \beta_2) \\ -\alpha_1 - \beta_1 = \lambda(-\alpha_2 + \beta_2) \\ -\alpha_1 - \beta_1 = \lambda(-\alpha_2 - \beta_2) \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения системы, получаем $\beta_1 = 0$. Подставляя в уравнение для диаметра первой квадрики, получим

$$\alpha_1 x - \alpha_1 y - \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

Ответ: $x - y - 1 = 0$.

Задача 599 п.1. Найти оси симметрии: $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 3 = 0$. Система координат прямоугольная.

Решение.

Находим корни характеристического многочлена квадратичной части:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

решая получившееся уравнение, получаем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$.

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + y_1 = 0$$

Возьмем $x_1 = 1$, $y_1 = -1$. Получим $(1, -1)$ – направление первой оси симметрии.

$$\lambda_2 = 9: \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_2 + y_2 = 0$$

Возьмем $x_2 = 1$, $y_2 = 1$. Получим $(1, 1)$ – направление второй оси симметрии.

Оси симметрии проходят через центр, найдем центр:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 8y - 18 = 0 \\ 8x + 10y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}$$

решая систему, получаем $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ – координаты центра.

Теперь несложно написать уравнения осей симметрии:

первая ось: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$;

вторая ось: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x - y = 0$.

Ответ: $x + y - 2 = 0$ и $x - y = 0$.

Рассуждения, которые мы использовали для решения задачи 599 п.1 хороши для линий второго порядка, у которых есть центр. В случае параболы ищем направление, соответствующее ненулевому собственному значению, а затем диаметр, сопряженный этому направлению.

Задача 599 п.5. Найти оси симметрии: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$. Система координат прямоугольная.

Решение.

Находим корни характеристического многочлена квадратичной части:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$$

решая получившееся уравнение, получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

Ищем направление, соответствующее ненулевому собственному значению $\lambda_2 = 5$:

$$\lambda_2 = 5: \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 0$$

Возьмем $x_2 = -1$, $y_2 = 2$. Получим $(-1, 2)$ – направление, соответствующее $\lambda_2 = 5$.

Найдем диаметр, сопряженный этому направлению:

$$(-1, 2, 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5/2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -5/2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 1 = 0$$

Ответ: $2x - 4y - 1 = 0$.

Итак, если оба собственных значения отличны от нуля, то оба соответствующих им собственных направления будут главными – они будут ортогональны, также будут ортогональны и сопряженные к ним диаметры. Поэтому при нахождении осей симметрии проще всего найти центр и провести прямые, направляющими векторами которых будут собственные направления – это и будут оси симметрии (они же оси координат в канонической системе координат).

Если же одно из собственных значений равно нулю, то для ненулевого собственного значения соответствующее ему собственное направление будет главным, а сопряженный к нему диаметр будет осью симметрии.

Семинар 19. Приведение квадрик к каноническому виду.

Задача 541. В прямоугольной системе координат кривая второго порядка задана уравнением:

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

- 1) Привести заданное уравнение к каноническому виду.
- 2) Найти связь старых координат x и y с новыми x' и y' (каноническими).
- 3) Найти координаты центра, вершин и фокусов этой гиперболы относительно начальной системы координат.
- 4) Составить уравнения директрис, асимптот и касательных в вершинах этой гиперболы в начальной системе координат.

Решение.

- 1) Приведем заданное уравнение к каноническому виду.

- 1.1) Найдем координаты центра:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 12 = 0 \\ 6x + 16y - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 3x + 8y = 13 \end{cases}$$

решая систему, получаем $x_0 = -1, y_0 = 2$ – координаты центра.

- 1.2) Сдвиг начала координат

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tilde{x} - 1 \\ y = \tilde{y} + 2 \end{cases}$$

Подставим в уравнение квадрики:

$$6(\tilde{x} - 1)(\tilde{y} + 2) + 8(\tilde{y} + 2)^2 - 12(\tilde{x} - 1) - 26(\tilde{y} + 2) + 11 = 0 \Leftrightarrow 6\tilde{x}\tilde{y} + 8\tilde{y}^2 - 9 = 0$$

- 1.3) Найдем главные направления:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

решая получившееся уравнение, получаем $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1$;

- 1.4) Найдем собственные вектора и нормируем их:

$$\lambda_1 = 9: \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - y_1 = 0$$

Возьмем $x_1 = 1, y_1 = 3$. Нормируем: $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = -1: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 + 3y_2 = 0$$

Возьмем $x_2 = -3, y_2 = 1$. Нормируем: $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Получаем замену

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} \tilde{x} = 1/\sqrt{10}x' - 3/\sqrt{10}y' \\ \tilde{y} = 3/\sqrt{10}x' + 1/\sqrt{10}y' \end{cases}$$

Подставим в уравнение квадратики:

$$6(1/\sqrt{10}x' - 3/\sqrt{10}y')(3/\sqrt{10}x' + 1/\sqrt{10}y') + 8(3/\sqrt{10}x' + 1/\sqrt{10}y')^2 - 9 = 0$$

Квадратичная часть: $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 9(x')^2 - (y')^2$. После упрощений получаем

$$9(x')^2 - (y')^2 - 9 = 0$$

Каноническое уравнение:

$$\frac{(x')^2}{1^2} - \frac{(y')^2}{3^2} = 1$$

Итак, это – гипербола с действительной полуосью $a = 1$ и мнимой полуосью $b = 3$.

2) Найдем связь старых координат x и y с новыми x' и y' (каноническими).

Связь старых координат x и y с новыми x' и y' (каноническими):

$$\begin{cases} x = \tilde{x} - 1 = 1/\sqrt{10}x' - 3/\sqrt{10}y' - 1 \\ y = \tilde{y} + 2 = 3/\sqrt{10}x' + 1/\sqrt{10}y' + 2 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3) Найти координаты вершин и фокусов этой гиперболы относительно начальной системы координат.

Вершины гиперболы:

В канонической системе координат $O'x'y'$ вершины гиперболы имеют координаты $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$. Сделаем замену:

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt{10}x' - 3/\sqrt{10}y' - 1 \\ y = 3/\sqrt{10}x' + 1/\sqrt{10}y' + 2 \end{cases}$$

Получим координаты вершин в исходной системе координат: $A(1/\sqrt{10} - 1, 3/\sqrt{10} + 2)$ и $B(-1/\sqrt{10} - 1, -3/\sqrt{10} + 2)$

Фокусы гиперболы:

В канонической системе координат $O'x'y'$ фокусы гиперболы имеют координаты $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Сделаем замену:

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt{10}x' - 3/\sqrt{10}y' - 1 \\ y = 3/\sqrt{10}x' + 1/\sqrt{10}y' + 2 \end{cases}$$

Получим координаты фокусов в исходной системе координат:

$$F_1 = (0, 5) \text{ и } F_2 = (-2, -1).$$

4) Составим уравнения директрис, асимптот и касательных в вершинах этой гиперболы в начальной системе координат.

Для нахождения уравнений директрис, асимптот и касательных в вершинах необходимо найти формулы перехода от $O'x'y'$ к Oxy :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Так как замена координат была ортогональной, то матрица перехода

$$C = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ортогональна и } C^{-1} = C^T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Получаем}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= x/\sqrt{10} + 3y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10} \\ y' &= -3x/\sqrt{10} + y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10} \end{aligned}$$

Директрисы гиперболы:

В канонической системе координат $O'x'y'$ директрисы гиперболы имеют уравнения

$$x' = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

После замены координат получим уравнения директрис в исходной системе координат:

$$x/\sqrt{10} + 3y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

уравнение первой директрисы: $x + 3y - 6 = 0$,

уравнение второй директрисы: $x + 3y - 4 = 0$.

Асимптоты гиперболы:

При стремлении x' и y' к бесконечности гипербола бесконечно близко приближается к своим асимптотам, уравнения которых можно увидеть из разложения

$$9(x')^2 - (y')^2 = 0 \Leftrightarrow (3x' + y')(3x' - y') = 0$$

Уравнение первой асимптоты: $3x' + y' = 0$. После замены координат получим уравнение асимптоты в исходной системе координат:

$$3(x/\sqrt{10} + 3y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10}) + (-3x/\sqrt{10} + y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10}) = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0$$

Уравнение второй асимптоты: $3x' - y' = 0$. После замены координат получим уравнение асимптоты в исходной системе координат:

$$3(x/\sqrt{10} + 3y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10}) - (-3x/\sqrt{10} + y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10}) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 5 = 0$$

Касательные в вершинах:

В канонической системе координат $O'x'y'$ касательные в вершинах имеют уравнения $x' = \pm 1$

После замены координат получим уравнения касательных в исходной системе координат:

$$x/\sqrt{10} + 3y/\sqrt{10} - 5/\sqrt{10} = \pm 1$$

уравнение первой касательной: $x + 3y - 5 + \sqrt{10} = 0$,

уравнение второй касательной: $x + 3y - 5 - \sqrt{10} = 0$.

Ответ: 1) $\frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{9} = 1$, 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 3) центр $O'(-1, 2)$, вершины $(1/\sqrt{10} - 1, 3/\sqrt{10} + 2)$ и $(-1/\sqrt{10} - 1, -3/\sqrt{10} + 2)$, фокусы $(0, 5)$ и $(-2, -1)$, 4) уравнения директрис $x + 3y - 6 = 0$ и $x + 3y - 4 = 0$, уравнения асимптот $y - 2 = 0$ и $3x + 4y - 5 = 0$, уравнения касательных в вершинах $x + 3y - 5 + \sqrt{10} = 0$ и $x + 3y - 5 - \sqrt{10} = 0$.

Семинар 20. Касательные к линии второго порядка. Поляритет.

Задача 561. Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$$

проведенные из точки $(12, -3)$.

Решение.

Уравнение касательной к линии второго порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

или

$$(x_0, y_0, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

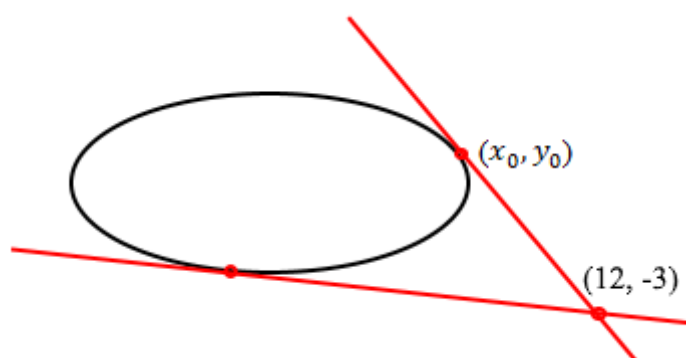


Рис. 20.1. К задаче 561

Касательная в точке (x_0, y_0) :

$$(x_0, y_0, 1) \begin{pmatrix} 1/32 & 0 & 0 \\ 0 & 1/18 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{32}x + \frac{y_0}{18}y - 1 = 0$$

Составим систему уравнений на (x_0, y_0) :

а) точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе:

$$\frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{18} = 1$$

б) касательная проходит через точку $(12, -3)$:

$$12 \frac{x_0}{32} - 3 \frac{y_0}{18} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x_0 - \frac{1}{6}y_0 = 1$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{18} = 1 \\ \frac{3}{8}x_0 - \frac{1}{6}y_0 = 1 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы $y_0 = \frac{9}{4}x_0 - 6$ и подставим в первое уравнение:

$$\frac{1}{32}x_0^2 + \frac{1}{18}\left(\frac{9}{4}x_0 - 6\right)^2 = 1$$

После упрощений получим

$$5x_0^2 - 24x_0 + 16 = 0$$

Корни: $x_{01} = 4 \Rightarrow y_{01} = \frac{9}{4}x_{01} - 6 = 3$ и $x_{02} = \frac{4}{5} \Rightarrow y_{02} = \frac{9}{4}x_{02} - 6 = -\frac{21}{5}$.

Получили координаты точек касания: $(4, 3)$ и $\left(\frac{4}{5}, -\frac{21}{5}\right)$.

Первая касательная:

$$\frac{1}{8}x + \frac{1}{6}y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 24 = 0$$

Вторая касательная:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{32}x - \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{18}y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - 28y - 120 = 0$$

Ответ: $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x - 28y - 120 = 0$.

Задача 576. Составить уравнение общих касательных к эллипсам

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ и } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

План решения.

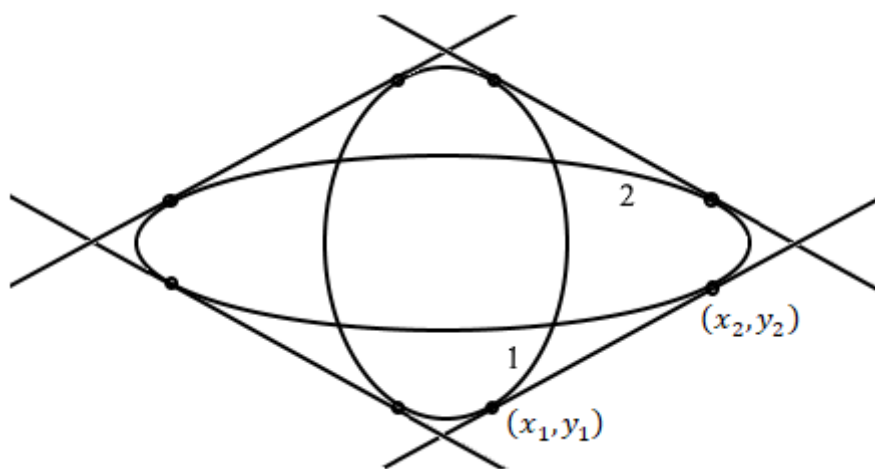


Рис. 20.2. К задаче 576

Касательная к первому эллипсу в точке (x_1, y_1) :

$$(x_1, y_1, 1) \begin{pmatrix} 1/45 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{45}x + \frac{y_1}{9}y - 1 = 0$$

Касательная ко второму эллипсу в точке (x_2, y_2) :

$$(x_2, y_2, 1) \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/18 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2}{9}x + \frac{y_2}{18}y - 1 = 0$$

Оба уравнения касательных задают одну и ту же прямую, значит, эти уравнения пропорциональны. Так как свободные члены в уравнениях прямых совпадают, то и остальные коэффициенты также равны. Получаем условия:

$$\frac{x_1}{45} = \frac{x_2}{9} \Leftrightarrow 5x_1 = x_2$$

$$\frac{y_1}{9} = \frac{y_2}{18} \Leftrightarrow 2y_1 = y_2$$

Условия принадлежности точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) эллипсам 1 и 2 соответственно:

$$\frac{x_1^2}{45} + \frac{y_1^2}{9} = 1$$

$$\frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{18} = 1$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{45} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \\ \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{18} = 1 \\ 5x_1 = x_2 \\ 2y_1 = y_2 \end{cases}$$

Выражая x_2 и y_2 из третьего и четвертого уравнения системы и подставляя во второе уравнение, получим линейную систему относительно x_1^2 и y_1^2 :

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{45} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \\ \frac{25x_1^2}{9} + \frac{2y_1^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Решая ее, находим x_1 и y_1 , а затем x_2 и y_2 .

Поляритет (полярное соответствие)

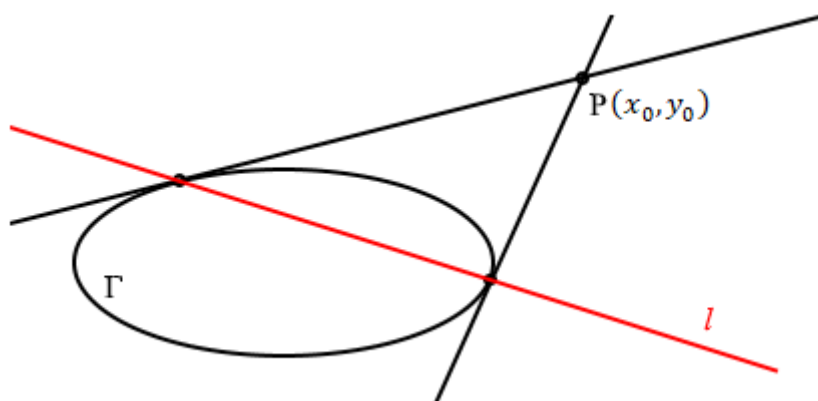


Рис. 20.3 Поляра точки

Γ – квадрика, l – поляра P , P – полюс l .

Если $P \in \Gamma$, то ее поляра – касательная к Γ в точке P .

Уравнение поляры точки (x_0, y_0) совпадает с уравнением касательной:

$$(x_0, y_0, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Для любой точки, кроме центра квадрики, существует поляр. Также для любой прямой, кроме проходящих через центр квадрики, существует полюс.

Пусть даны две точки P и Q , p – поляр P и q – поляр Q . Тогда $P \in q \Leftrightarrow Q \in p$. То есть, если одна точка лежит на поляре второй, то вторая лежит на поляре первой. Это свойство дает ответ, как геометрически строить полярю точки, которая лежит внутри квадрики:

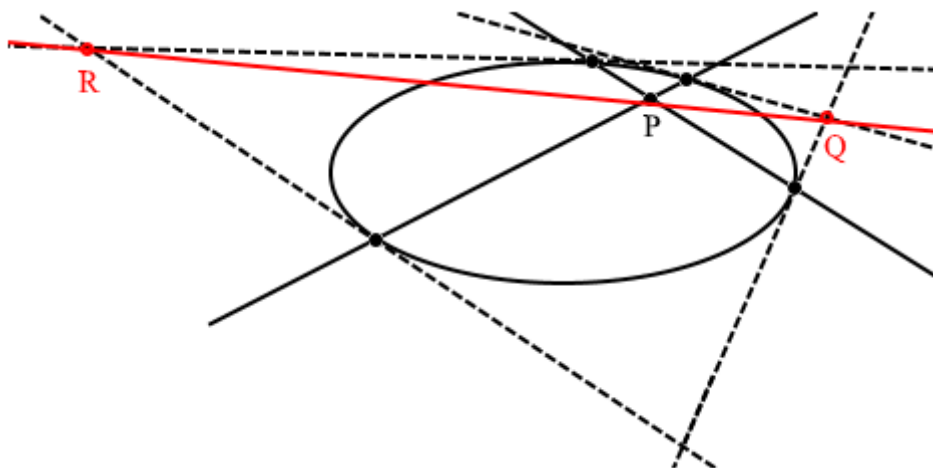


Рис. 20.4. Построение полярю точки

Нужно взять две прямых, проходящих через точку, затем построить касательные в точках пересечения этих прямых с квадратикой – полярю будет проходить через точки пересечения касательных: пусть $P \in$ поляр Q , $P \in$ поляр R , тогда Q и R лежат на поляре P , то есть, QR – поляр P .

Задача 980 п.1. Найти полярю точки $A(-4, 2)$ относительно линии второго порядка

$$F(x, y) = 6x^2 - 5xy - 4y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$$

Решение.

$$(-4, 2, 1) \begin{pmatrix} 6 & -5/2 & 3/2 \\ -5/2 & -4 & 1 \\ 3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 55x - 6y + 10 = 0$$

Ответ: $55x - 6y + 10 = 0$.

Задача 982 п.1. Найти полюс прямой $l: 3x - y + 6 = 0$ относительно линии второго порядка

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$$

Решение.

Уравнение полярю точки (x_0, y_0) относительно $F(x, y)$:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x_0 - y_0 + 1)x + (-x_0 + y_0 - 3)y + (x_0 - 3y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Если (x_0, y_0) – полюс прямой l , то полученное уравнение пропорционально уравнению прямой l : $3x - y + 6 = 0$, то есть, имеет место система:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 3\lambda \\ -x_0 + y_0 - 3 = -\lambda \\ x_0 - 3y_0 = 6\lambda \end{cases}$$

Складывая первое уравнение системы со вторым, получаем

$$-2 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Подставляя полученное значение λ в первое и третье уравнения системы, получаем:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = -4 \\ x_0 - 3y_0 = -6 \end{cases}$$

откуда $x_0 = -3, y_0 = 1$.

Ответ: $P(-3, 1)$.

Семинар 21. Поляритет. Аффинные преобразования плоскости.

Две точки называются полярно сопряженными, если каждая из них лежит на поляре другой.

Две прямые называются полярно сопряженными, если каждая из них содержит полюс другой.

Задача 984. На прямой $x + 5y - 18 = 0$ найти точку, полярно сопряженную с точкой $(-5, 4)$ относительно линии второго порядка $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$.

Решение.

Найдем полярю точки $(-5, 4)$ относительно квадрики $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$:

$$(-5, 4, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 22 = 0$$

Искомая точка лежит на этой поляре и на прямой $x + 5y - 18 = 0$, то есть, это – точка пересечения прямых:

$$\begin{cases} x + 5y - 18 = 0 \\ x - 3y + 22 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x = -7, y = 5$.

Ответ: $(-7, 5)$.

Задача 983. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 1)$ и полярно сопряженной с прямой $4x - y + 30 = 0$ относительно линии второго порядка

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0.$$

Решение.

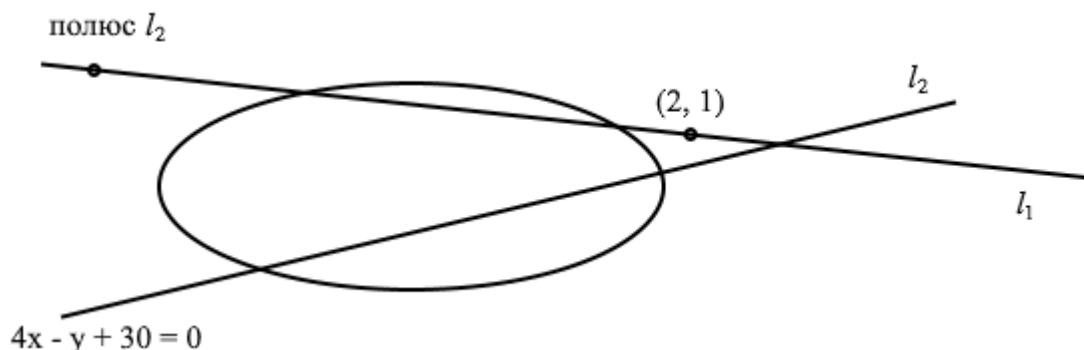


Рис. 21.1. К задаче 983

Уравнение поляры точки (x_0, y_0) относительно $F(x, y)$:

$$(x_0, y_0, 1) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ -3 & 9 & 7 \\ -6 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 3y_0 - 6)x + (-3x_0 + 9y_0 + 7)y + (-6x_0 + 7y_0 - 7) = 0$$

Если (x_0, y_0) – полюс прямой $4x - y + 30 = 0$, то полученное уравнение пропорционально $4x - y + 30 = 0$, то есть, имеет место система:

$$\begin{cases} x_0 - 3y_0 - 6 = 4\lambda \\ -3x_0 + 9y_0 + 7 = -\lambda \\ -6x_0 + 7y_0 - 7 = 30\lambda \end{cases}$$

Решая ее, получаем $x_0 = 5, y_0 = 1, \lambda = -1$.

Итак, $(5, 1)$ – полюс прямой $4x - y + 30 = 0$. Тогда искомая прямая проходит через точки $(2, 1)$ и $(5, 1)$, ее уравнение $y = 1$.

Ответ: $y = 1$.

Задача 812. Даны два аффинных преобразования:

$$\begin{aligned} f: \quad x' &= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}, \quad y' = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{29}{5}; \\ g: \quad x' &= x - y + 4, \quad y' = -x + 2y + 5. \end{aligned}$$

Найти преобразование f^{-1} , обратное к f , и композиции $f^{-1} \circ g$ и $g \circ f^{-1}$.

Решение.

Обратите внимание: x' и y' не означают замену системы координат. Это новые координаты точки (x, y) в той же самой системе координат.

Найдем f^{-1} : при этом преобразовании точка с координатами (x', y') переходит в (x, y) .

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5} = x' \\ \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{29}{5} = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5x' + 2 \\ 3x - 2y = 5y' - 29 \end{cases}$$

Складывая первое уравнение с удвоенным вторым, получаем

$$5x = 10x' + 4 + 5y' - 29 \Leftrightarrow x = 2x' + y' - 5$$

Тогда $y = -x + 5x' + 2 = -(2x' + y' - 5) + 5x' + 2 = 3x' - y' + 7$

Так как при записи аффинных преобразований принято всегда точку с координатами (x, y) переводить в точку с координатами (x', y') , переименуем координаты:

$$(x, y) \mapsto (x', y').$$

Получим:

$$f^{-1}: \begin{cases} x' = 2x + y - 5 \\ y' = 3x - y + 7 \end{cases}$$

Проверка: найдем $f \circ f^{-1}(0, 0)$.

$$f(0, 0) = (-2/5, 29/5).$$

$$f \circ f^{-1}(0, 0) = f^{-1}(-2/5, 29/5) = (0, 0) - \text{верно.}$$

Обратите внимание: при композиции произвольных преобразований $f \circ g$ сначала выполняется преобразование f , а затем преобразование g .

Найдем $f^{-1} \circ g$:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ g(x, y) &= g(2x + y - 5, 3x - y + 7) = \\ &= (2x + y - 5 - (3x - y + 7) + 4, -(2x + y - 5) + 2(3x - y + 7) + 5) = \\ &= (-x + 2y - 8, 4x - 3y + 24) \end{aligned}$$

Итак,

$$f^{-1} \circ g: \begin{cases} x' = -x + 2y - 8 \\ y' = 4x - 3y + 24 \end{cases}$$

Найдем $g \circ f^{-1}$:

$$g \circ f^{-1}(x, y) = f^{-1}(x - y + 4, -x + 2y + 5) =$$

$$= (2(x - y + 4) + (-x + 2y + 5) - 5, 3(x - y + 4) - (-x + 2y + 5) + 7) = \\ = (x + 8, 4x - 5y + 14)$$

Итак,

$$g \circ f^{-1}: \begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = 4x - 5y + 14 \end{cases}$$

Ответ:

$$f^{-1}: \begin{cases} x' = 2x + y - 5 \\ y' = 3x - y + 7 \end{cases}, \quad f^{-1} \circ g: \begin{cases} x' = -x + 2y - 8 \\ y' = 4x - 3y + 24 \end{cases}, \quad g \circ f^{-1}: \begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = 4x - 5y + 14 \end{cases}.$$

Задача 814. Составить формулы аффинного преобразования, переводящего точки $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ в точки $(1, 3)$, $(-2, 1)$, $(0, 0)$ соответственно.

Решение.

Пусть искомое преобразование

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

Запишем условия перехода точек:

$$(2, 0) \mapsto (1, 3): \begin{cases} 1 = 2a + c \\ 3 = 2d + f \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$(0, 3) \mapsto (-2, 1): \begin{cases} -2 = 3b + c \\ 1 = 3e + f \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

$$(1, 2) \mapsto (0, 0): \begin{cases} 0 = a + 2b + c \\ 0 = d + 2e + f \end{cases} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Уравнения (1), (3), (5) содержат только неизвестные a, b, c , уравнения (2), (4), (6) содержат только неизвестные d, e, f . Получаем две системы:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 3b + c = -2 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2d + f = 3 \\ 3e + f = 1 \\ d + 2e + f = 0 \end{cases},$$

решая которые, получаем $a = 3, b = 1, c = -5, d = -5, e = -4, f = 13$.

Искомое преобразование:

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 5 \\ y' = -5x - 4y + 13 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x' = 3x + y - 5 \\ y' = -5x - 4y + 13 \end{cases}$.

Задача 818. Найти аффинное преобразование, при котором прямые $10x - 4y - 1 = 0$ и $3x - 3y + 7 = 0$ переходят в прямые $x - 2y + 3 = 0$ и $x - y - 6 = 0$ соответственно, а точка $(1, -2)$ переходит в $(0, 10)$.

Решение.

Пусть искомое преобразование

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

Запишем условия перехода:

$$(1, -2) \mapsto (0, 10): \begin{cases} 0 = a - 2b + c \\ 10 = d - 2e + f \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Прямая $10x - 4y - 1 = 0$ переходит в прямую $x - 2y + 3 = 0$:
оба уравнения задают одну и ту же прямую, поэтому

$$10x - 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 3 = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} x' - 2y' + 3 = 0 &\Leftrightarrow (ax + by + c) - 2(dx + ey + f) + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a - 2d)x + (b - 2e)y + c - 2f + 3 = 0 \end{aligned}$$

полученное уравнение пропорционально $10x - 4y - 1 = 0$, то есть, имеет место система:

$$\begin{cases} a - 2d = 10\lambda & (3) \\ b - 2e = -4\lambda & (4) \\ c - 2f + 3 = -\lambda & (5) \end{cases}$$

Прямая $3x - 3y + 7 = 0$ переходит в прямую $x - y - 6 = 0$:
оба уравнения задают одну и ту же прямую, поэтому

$$3x - 3y + 7 = 0 \Leftrightarrow x' - y' - 6 = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} x' - y' - 6 = 0 &\Leftrightarrow (ax + by + c) - (dx + ey + f) - 6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a - d)x + (b - e)y + c - f - 6 = 0 \end{aligned}$$

полученное уравнение пропорционально $3x - 3y + 7 = 0$, то есть, имеет место система:

$$\begin{cases} a - d = 3\mu & (6) \\ b - e = -3\mu & (7) \\ c - f - 6 = 7\mu & (8) \end{cases}$$

Уравнения (1) – (8) задают систему из 8 уравнений с 8 неизвестными, решая которую, получаем $a = 4, b = 2, c = 0, d = 7, e = -1, f = 1, \lambda = -1, \mu = -1$.

Искомое преобразование:

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 7x - y + 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 7x - y + 1 \end{cases}$.

Семинар 22. Изометрические преобразования.

Теорема Шаля. Изометрии плоскости имеют один из следующих типов:

- 1) Параллельный перенос (сдвиг)
- 2) Поворот
- 3) Скользящая симметрия – композиция отражения относительно некоторой оси и параллельного переноса вдоль этой оси

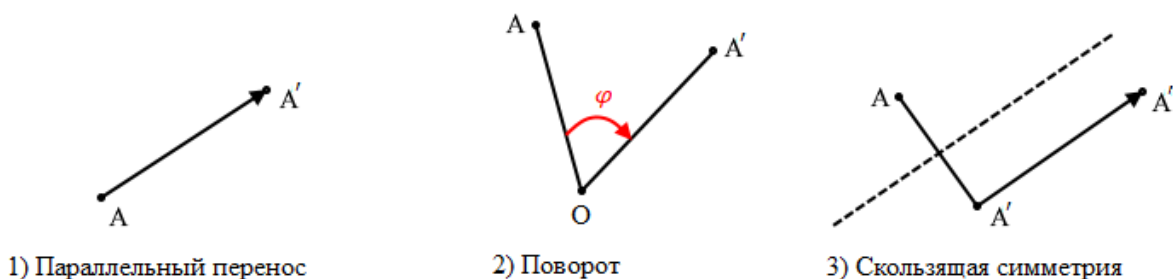


Рис. 22.1. Изометрии плоскости

Задача 891. Найти изометрическое преобразование, сохраняющее ориентацию и переводящее точку $(0, 2)$ в точку $(1, \sqrt{3})$, а точку $(1, \sqrt{3})$ в точку $(2, 2)$. Найти угол поворота и неподвижную точку этого преобразования.

Решение.

Из условия задачи следует, что искомое преобразование – поворот. Найдем неподвижную точку:

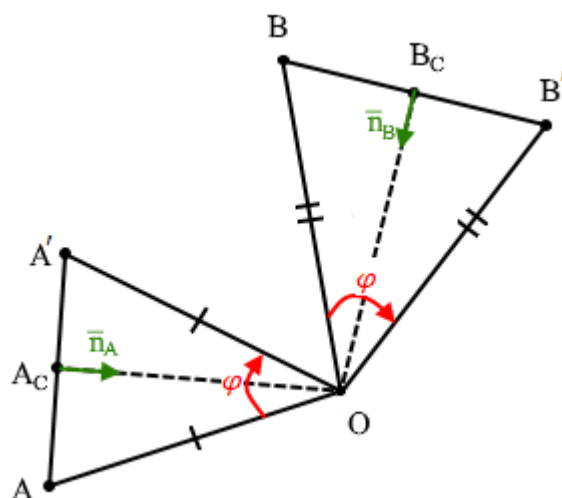


Рис. 22.2. К задаче 891

Треугольники OAA' и OBV' – равнобедренные, поэтому O лежит на серединных перпендикулярах, проведенных к сторонам AA' и BB' , то есть, O – точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам AA' и BB' .

$$A = (0, 2) \mapsto A' = (1, \sqrt{3}), \overline{AA'} = (1, \sqrt{3} - 2).$$

$$\text{Точка } A_c \text{ – середина } AA', \quad A_c = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right).$$

$$B = (1, \sqrt{3}) \mapsto B' = (2, 2), \overrightarrow{BB'} = (1, 2 - \sqrt{3}).$$

$$\text{Точка } B_C - \text{середина } BB', \quad B_C = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right).$$

В качестве направляющих векторов $\vec{n}_A$ и $\vec{n}_B$ серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам AA' и BB' , возьмем векторы, ортогональные AA' и BB' :

$$\vec{n}_A = (2 - \sqrt{3}, 1)$$

$$\vec{n}_B = (\sqrt{3} - 2, 1)$$

Тогда уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к AA' :

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}+2}{2}}{1} \Leftrightarrow x = (2 - \sqrt{3})y$$

уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к BB' :

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{\sqrt{3} - 2} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}+2}{2}}{1} \Leftrightarrow x = (\sqrt{3} - 2)y + 2$$

Точка O – точка пересечения этих серединных перпендикуляров:

$$\begin{cases} x = (2 - \sqrt{3})y \\ x = (\sqrt{3} - 2)y + 2 \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$O = (1, 2 + \sqrt{3}) - \text{неподвижная точка.}$$

Найдем угол поворота:

Пусть φ – угол между OA и OA' . Имеем:

$$\overrightarrow{OA} = (-1, -\sqrt{3}), \quad |\overrightarrow{OA}| = 2$$

$$\overrightarrow{OA'} = (0, -2), \quad |\overrightarrow{OA'}| = 2$$

Тогда

$$\cos \varphi = \frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OA'}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{S_{or}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OA'}|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OA'}|} = \frac{1}{2}$$

Получаем

$$\varphi = \frac{\pi}{6} - \text{угол поворота.}$$

Итак, искомое преобразование – поворот на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг точки $O = (1, 2 + \sqrt{3})$.

Напишем формулу преобразования координат.

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота на угол } \frac{\pi}{6}.$$

Пусть произвольная точка $A(x, y)$ перешла в точку $A'(x', y')$.

Координаты $A' =$ координаты $\overrightarrow{QA'}$.

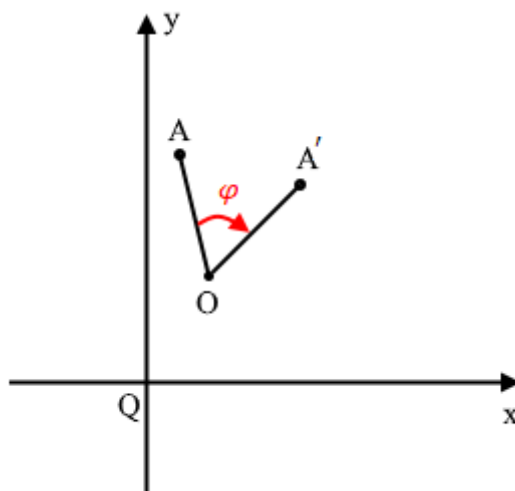


Рис. 22.3. Иллюстрация к преобразованию координат

$$\overrightarrow{QA'} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{QO} + c \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{QO} + c \cdot (\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QO})$$

Получаем

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}/2x - 1/2y + 2 \\ y' = 1/2x + \sqrt{3}/2y \end{cases}$$

Ответ: угол поворота $\frac{\pi}{6}$, неподвижная точка $O = (1, 2 + \sqrt{3})$, $\begin{cases} x' = \sqrt{3}/2x - 1/2y + 2 \\ y' = 1/2x + \sqrt{3}/2y \end{cases}$.

Классификация изометрий пространства.

Изометрии пространства имеют один из следующих типов:

- 1) Параллельный перенос (сдвиг)
- 2) Винтовое вращение – композиция вращения относительно некоторой оси и параллельного переноса вдоль этой оси
- 3) Скользящая симметрия – композиция отражения относительно некоторой плоскости и параллельного переноса на вектор, параллельный этой плоскости
- 4) Зеркальное вращение – композиция поворота относительно некоторой оси и зеркального отражения относительно некоторой плоскости, ортогональной этой оси

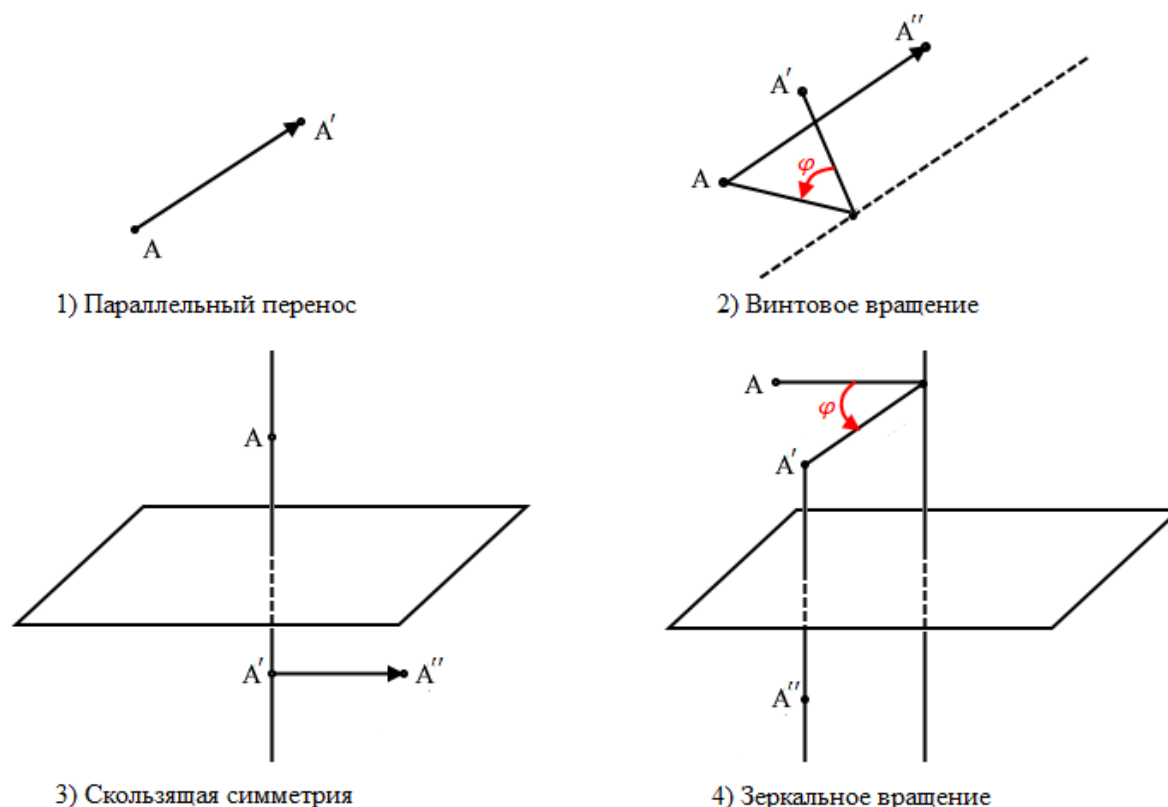


Рис. 22.4. Изометрии пространства

Задача 901 п.1. Выяснить геометрический смысл и найти канонический вид изометрического преобразования пространства:

$$x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z + 3, \quad y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{20}{25}z - 4, \quad z' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5$$

Решение.

Сразу видно, что это не сдвиг (сдвиг имеет вид $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \\ z' = z + z_0 \end{cases}$). При решении подобных

задач нужно обращать внимание на определитель матрицы преобразования и неподвижные точки преобразования.

Винтовое вращение: определитель = 1 (винтовое вращение сохраняет ориентацию), неподвижные точки либо отсутствуют, либо составляют целую прямую (ось вращения, если вектор переноса нулевой).

Скольльзящая симметрия: определитель = -1 (скользящая симметрия меняет ориентацию), неподвижные точки либо отсутствуют, либо составляют целую плоскость (плоскость, относительно которой производится отражение, если вектор переноса нулевой).

Зеркальное вращение: определитель $= -1$ (зеркальное вращение меняет ориентацию), неподвижная точка либо одна (точка пересечения оси вращения и плоскости, относительно которой производится отражение), либо составляют целую плоскость (если угол поворота нулевой).

Найдем определитель матрицы преобразования:

$$\begin{vmatrix} 16/25 & 12/25 & 15/25 \\ 12/25 & 9/25 & -20/25 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^5} \begin{vmatrix} 16 & 12 & 15 \\ 12 & 9 & -20 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^4} \begin{vmatrix} 16 & 12 & 3 \\ 12 & 9 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{5^4} (-3 \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 12 & -4 \end{vmatrix}) = \frac{1}{5^4} (-3 \cdot (-75) - 4 \cdot (-100)) = 1$$

Данное преобразование сохраняет ориентацию, значит, это – винтовое вращение.

Попытаемся найти неподвижные точки (если вектор переноса нулевой, то сразу найдем уравнение оси вращения):

$$\begin{cases} x = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z + 3 \\ y = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{20}{25}z - 4 \\ z = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y + 5z = -25 \\ 3x - 4y - 5z = 25 \\ 3x - 4y + 5z = 25 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 5 & -25 \\ 3 & -4 & -5 & 25 \\ 3 & -4 & -5 & 25 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Получаем

$\begin{cases} 3x - 4y - 25 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ – уравнение прямой, состоящей из неподвижных точек (ось вращения). Вокруг этой прямой происходит поворот на угол φ без сдвига. Найдем φ .

Каноническое уравнение оси вращения:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-0}{0}$$

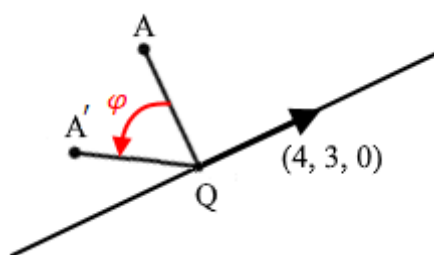


Рис. 22.5. К задаче 901 п.1

Угол вращения – это угол между $\overrightarrow{QA}$ и $\overrightarrow{QA'}$. В качестве $\overrightarrow{QA}$ выбираем любой вектор, ортогональный направляющему вектору $(4, 3, 0)$ оси вращения, например,

$$\overrightarrow{QA} = \frac{1}{5}(3, -4, 0)$$

Тогда

$$\overrightarrow{QA'} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 16/25 & 12/25 & 15/25 \\ 12/25 & 9/25 & -20/25 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$\cos \varphi = \frac{(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QA'})}{|\overrightarrow{QA}| \cdot |\overrightarrow{QA'}|} = 0$$

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QA'}|}{|\overrightarrow{QA}| \cdot |\overrightarrow{QA'}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3/5 & -4/5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|\overrightarrow{QA}| \cdot |\overrightarrow{QA'}|} = 1$$

Таким образом, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и канонический вид данного преобразования

$$\begin{cases} \tilde{x}' = -\tilde{y} \\ \tilde{y}' = \tilde{x} \\ \tilde{z}' = z \end{cases}$$

Ответ: поворот на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ вокруг оси $\frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-0}{0}$, канонический вид $\begin{cases} \tilde{x}' = -\tilde{y} \\ \tilde{y}' = \tilde{x} \\ \tilde{z}' = z \end{cases}$.

Семинар 23. Аффинные типы плоских квадрик. Составление уравнений поверхностей. Простейшие свойства поверхностей второго порядка.

Задача 558 п.1 и п.3. Методом Лагранжа определить аффинный тип следующих кривых второго порядка:

1) $2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y - 1 = 0$;

3) $2xy - 4y^2 + 6x + 6y + 1 = 0$.

Решение.

Пункт 1.

Выделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} & \left((\sqrt{2}x)^2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}xy + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}y\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}x + \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}y \right) - \\ & - \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}y\right)^2 - \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}y + 4y^2 + 2y - 1 = \\ & = \left(\sqrt{2}x + \frac{3}{2\sqrt{2}}y - \frac{5}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{33}{8} = \\ & = \left(\sqrt{2}x + \frac{3}{2\sqrt{2}}y - \frac{5}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}} \right)^2 - 7 \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\sqrt{2}x + \frac{3}{2\sqrt{2}}y - \frac{5}{2\sqrt{2}} \right) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение эллипса:

$$(x')^2 + (y')^2 = 1$$

Пункт 3.

Выделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} & - \left((2y)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{x}{2}y + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{2} \right) + \\ & + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{2} + 6x + 1 = - \left(2y - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}x + \frac{13}{4} = \\ & = - \left(2y - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{15}{2} \right)^2 - 53 \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{53}} \left(\frac{x}{2} + \frac{15}{2} \right) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{53}} \left(2y - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right) \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение гиперболы:

$$(x')^2 - (y')^2 = 1$$

Ответ: 1) эллипс, 3) гипербола.

Если в уравнении кривой второго порядка нет слагаемых с x^2 и y^2 , то делаем замену

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases}$$

Например:

$$xy + 6x - y + 2 = 0$$

делаем замену

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases}$$

получаем уравнение

$$(x')^2 - (y')^2 + 5x' + 7y' + 2 = 0$$

и далее действуем, как в рассмотренных примерах.

Задача 649. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность

$$x^2 + y^2 = 11, \quad z = 0$$

и касающейся плоскости $x + y + z - 5 = 0$.

Решение.

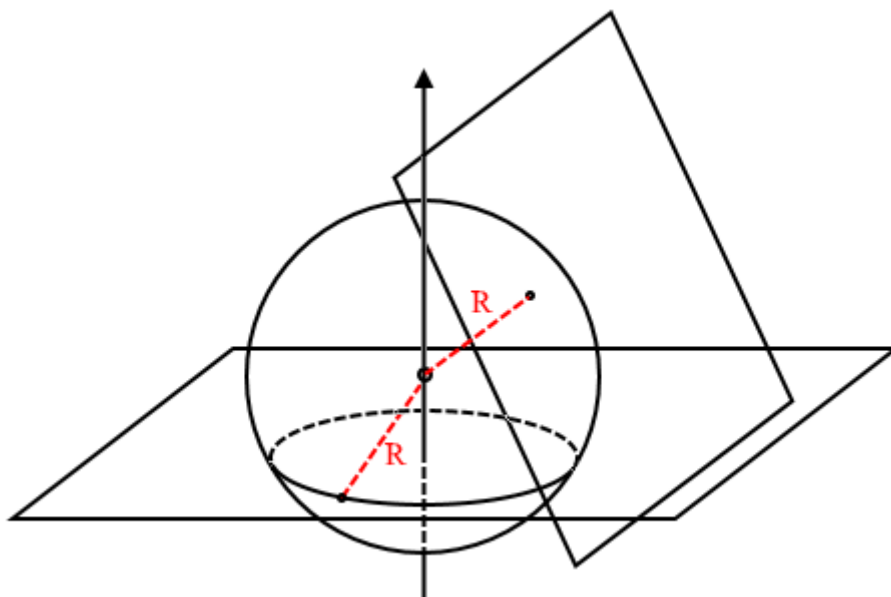


Рис. 23.1. К задаче 649

Из соображений симметрии, координаты центра сферы имеют вид $(0,0,h)$. С одной стороны, радиус сферы R – это расстояние от центра сферы до любой ее точки, например, точки $(\sqrt{11}, 0, 0)$:

$$R = \rho((0,0,h), (\sqrt{11}, 0, 0)) = \sqrt{11 + h^2}$$

С другой стороны, R – это расстояние от центра сферы до плоскости $x + y + z - 5 = 0$:

$$R = \rho((0,0,h), x+y+z-5=0) = \frac{|h-5|}{\sqrt{3}}$$

Получаем уравнение:

$$\sqrt{11+h^2} = \frac{|h-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3(11+h^2) = (h-5)^2 \Leftrightarrow h^2 + 5h + 4 = 0$$

Корни: $h_1 = -4$, $h_2 = -1$.

Получаем два варианта расположения центра сферы:

1) Центр $(0,0,-4)$. Тогда $R = \sqrt{11+16} = 3\sqrt{3}$ и уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 27$$

2) Центр $(0,0,-1)$. Тогда $R = \sqrt{11+1} = 2\sqrt{3}$ и уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 12$$

Ответ: $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 27$ и $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 12$.

Задача 698. По какой линии пересекаются эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0,$$

и сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2pz ?$$

Решение.

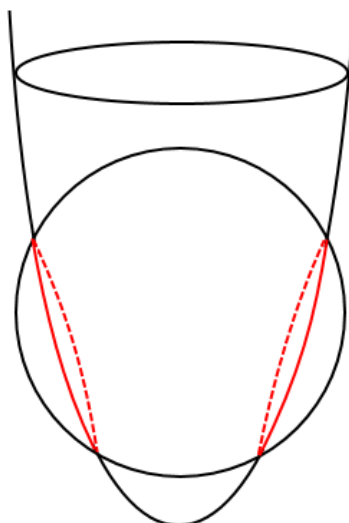


Рис. 23.2. К задаче 698

Координаты линии пересечения удовлетворяют уравнениям обеих поверхностей:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2pz \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение системы из первого, помноженного на p , получим:

$$\left(\frac{q}{p} - 1\right)y^2 - z^2 = 0$$

или

$$\left(z - \sqrt{\frac{p}{q} - 1}\right)\left(z + \sqrt{\frac{p}{q} - 1}\right) = 0$$

Таким образом, линия пересечения лежит на плоскостях $z - \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$ и

$z + \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$. Но пересечение сферы и плоскости – это окружность, поэтому линия пересечения состоит из (возможно, части) окружностей, получаемых пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$ этими плоскостями.

Верно и в другую сторону: пусть точка (x, y, z) лежит на окружностях, получаемых пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$ плоскостями $z - \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$ и $z + \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$.

Тогда координаты этой точки удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \left(\frac{q}{p} - 1\right)y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2pz \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение системы из первого, помноженного на p , получим:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

то есть, точка (x, y, z) лежит на гиперboloиде $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

Таким образом, все точки пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$ плоскостями $z - \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$ и $z + \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$ принадлежат искомой линии.

Ответ: по окружностям, являющимися пересечениями сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$ плоскостями $z - \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$ и $z + \sqrt{\frac{p}{q} - 1} = 0$.

Семинар 24. Приведение поверхностей к каноническому виду. Часть 1.

Задача 718 п.6. Определить вид поверхности, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

Решение.

1) Найдем координаты центра:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 14y - 6 = 0 \\ 12y - 4x - 4z - 24 = 0 \\ 10z - 4y + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 7y = 6 \\ -x + 3y - z = 6 \\ -2y + 5z = -9 \end{cases}$$

решая систему, получаем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$ – координаты центра;

2) Сдвинем начало координат в центр при помощи замены

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 2 \\ z = z' - 1 \end{cases}$$

получим

$$7(x')^2 + 6(y')^2 + 5(z')^2 - 4x'y' - 4y'z' - 6 = 0$$

3) Найдем главные направления:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7 - \lambda) \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7 - \lambda)((6 - \lambda)(5 - \lambda) - 4) + 2(-2(5 - \lambda)) = \\ &= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0 \end{aligned}$$

Т.к. коэффициент при λ^3 по модулю равен 1, то ищем целые корни среди целых делителей свободного члена, т.е. 162. Проверка показывает, что $\lambda_1 = 3$ – корень. Разделим $-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0$ на $\lambda - 3$, получим

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0 = (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 15\lambda - 64)$$

Решая уравнение $-\lambda^2 + 15\lambda - 64 = 0$, получаем $\lambda_2 = 9, \lambda_3 = 6$;

4) Найдем собственные вектора и нормируем их:

$$\lambda_1 = 3: \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

Возьмем $z_1 = 2$, тогда $x_1 = 1, y_1 = 2$. Нормируем: $e_1'' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = 9: \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

Возьмем $z_2 = 1$, тогда $x_2 = 2, y_2 = -2$. Нормируем: $e_2'' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_3 = 6: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0$$

Возьмем $z_3 = -2$, тогда $x_3 = 2, y_3 = 1$. Нормируем: $e_3'' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Получаем замену

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

После подстановки в уравнение квадрики получаем:

$$3(x'')^2 + 9(y'')^2 + 6(z'')^2 - 6 = 0$$

Обратите внимание, что коэффициенты при $(x'')^2, (y'')^2$ и $(z'')^2$ равны λ_1, λ_2 и λ_3 , найденным ранее.

5) "Доработка напильником":

$$3(x'')^2 + 9(y'')^2 + 6(z'')^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x''}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y''}{\sqrt{2/3}}\right)^2 + \left(\frac{z''}{1}\right)^2 = 1 - \text{эллипсоид}$$

Поменяем оси Oy'' и Oz'' местами, сделав замену

$$\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = z''' \\ z'' = y''' \end{cases}$$

получим

$$\left(\frac{x'''}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'''}{1}\right)^2 + \left(\frac{z'''}{\sqrt{2/3}}\right)^2 = 1$$

- каноническое уравнение эллипсоида.

Ответ: эллипсоид $\left(\frac{x'''}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'''}{1}\right)^2 + \left(\frac{z'''}{\sqrt{2/3}}\right)^2 = 1$ с центром $(1, 2, -1)$ и направлениями главных осей $e_1''' = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$; $e_2''' = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$; $e_3''' = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$.

В приведенной выше задаче все корни λ_i характеристического многочлена были разными. При приведении поверхности к каноническому виду могут возникнуть следующие случаи:

1) Если у поверхности есть центр.

а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ – сфера. В этом случае в качестве главных осей выбираем любые взаимно ортогональные и единичной длины e_1, e_2, e_3 , сохраняющие ориентацию.

б) $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ – эллипсоид, у которого две оси равны. В этом случае находим e_1 , соответствующий λ_1 , а при нахождении e_2 и e_3 получим систему, состоящую из одного уравнения, то есть, с двумерным пространством решений. В этом пространстве решений выбираем произвольный e_2 единичной длины и ортогональный e_1 , а e_3 находим из равенства $e_3 = [e_1, e_2]$

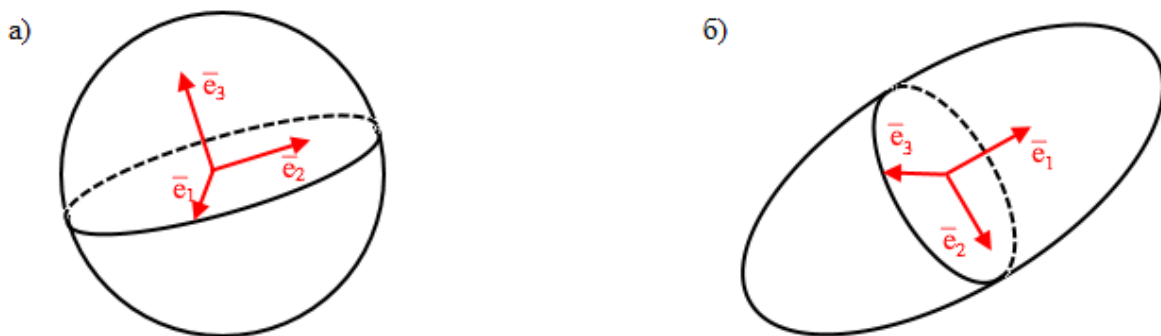


Рис. 24.1. Случай а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ и б) $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$

2) Если у поверхности нет центра.

В этом случае пропускаем шаг 2). На шаге 4) система имеет бесконечно много решений – это значит, что целая прямая (ось симметрии) состоит из центров (например,

в случае эллиптического цилиндра). Тогда в качестве центра выбираем произвольную точку на этой прямой.

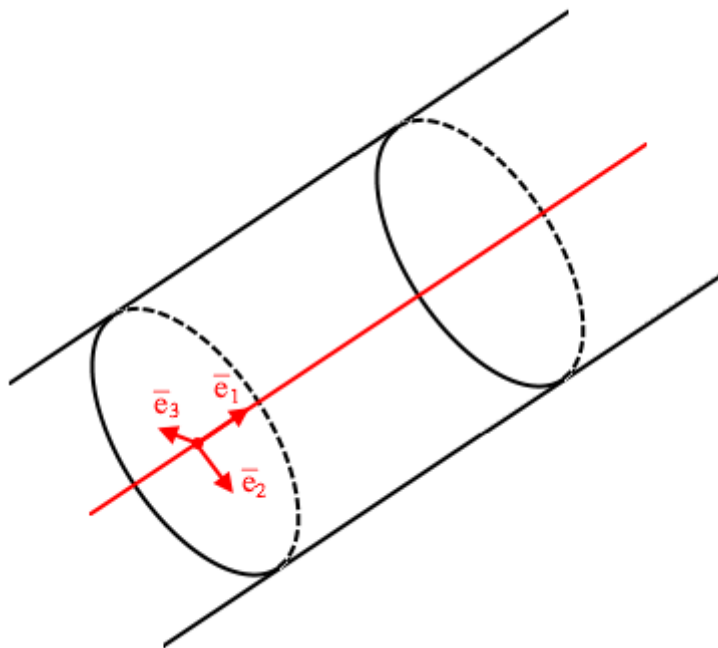


Рис. 24.2 Эллиптический цилиндр

Подробнее см. семинар 28.

Семинар 25. Прямолинейные образующие. Плоские сечения поверхностей второго порядка.

Задача 750. Найти угол φ между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

проходящими через точку $(1, 4, 8)$, беря на этих образующих лучи, направленные от данной точки к горловому эллипсу.

Решение.

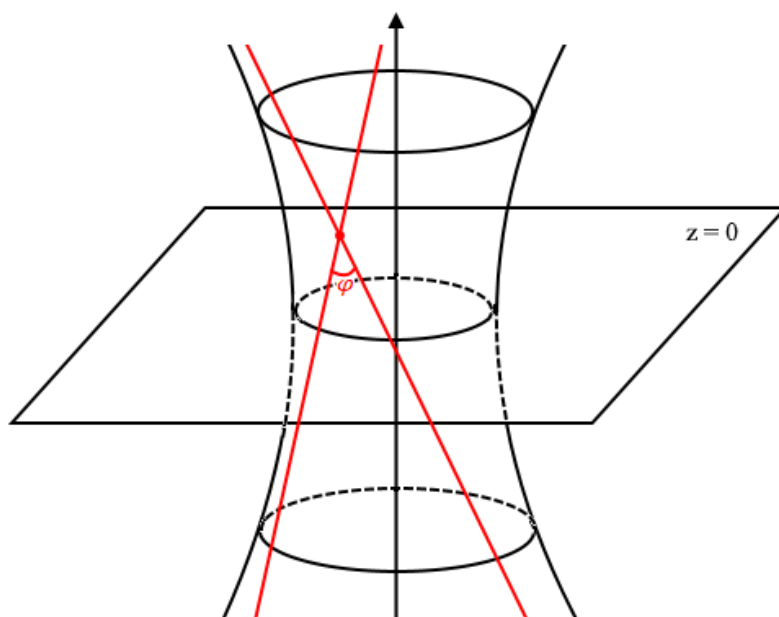


Рис. 25.1. К задаче 750

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 4, 8)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = 4 + \beta t \\ z = 8 + \gamma t \end{cases}$$

Подставим параметрические выражения для x, y, z в уравнение гиперболоида:

$$(1 + \alpha t)^2 + (4 + \beta t)^2 - \frac{(8 + \gamma t)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\gamma^2}{4})t^2 + (2\alpha + 8\beta - 4\gamma)t = 0$$

Если прямая – образующая, то должно получиться тождество, то есть, выполняется:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\gamma^2}{4} = 0 \\ 2\alpha + 8\beta - 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha^2 + 4\beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

так как у однополостного гиперболоида нет прямолинейных образующих, лежащих в горизонтальной плоскости, то $\gamma \neq 0$. Значит, в качестве γ можно выбрать любое ненулевое число. Выберем $\gamma = -2$ (чтобы направляющие вектора лучей были направлены к горловому эллипсу). Получим

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \\ \alpha = -4 - 4\beta \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение системы в первое, получаем

$$(-4 - 4\beta)^2 + \beta^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 17\beta^2 + 32\beta + 15 = 0$$

Корни: $\beta_1 = -1, \beta_2 = -\frac{17}{15}$.

Тогда $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{8}{15}$ и направляющие вектора лучей:

$$\vec{v}_1 = (0, -1, -2), \vec{v}_2 = (-8, -15, -34)$$

Угол между ними:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{83}{85}$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{83}{85}$.

Задача 780. По какой линии плоскость $x + y - z + 3 = 0$ пересекает двуполостной гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -4$?

Решение.

Пересечение плоскости и гиперболоида задается системой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -4 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы $z = x + y + 3$ и подставим в первое уравнение:

$$x^2 + y^2 - (x + y + 3)^2 = -4 \Leftrightarrow 2xy + 6x + 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(y + 3) = \frac{13}{2}$$

Получили уравнение ортогональной проекции кривой пересечения плоскости и гиперболоида на плоскость $z = \text{const}$.

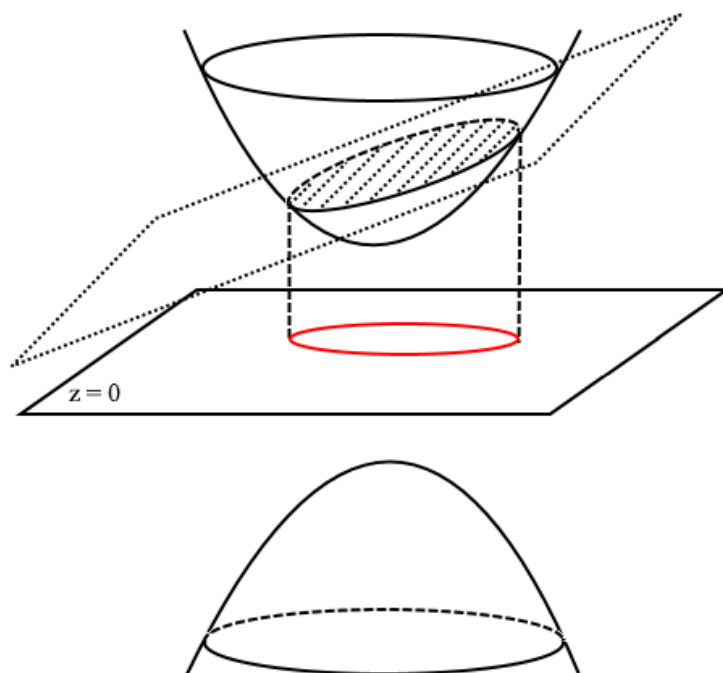


Рис. 25.2. К задаче 780

Сделав замену $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 3 \end{cases}$, получим уравнение

$$x'y' = \frac{13}{2} - \text{гипербола}$$

проекция линии пересечения – гипербола, значит, сама линия пересечения плоскости и гиперboloида – тоже гипербола.

Ответ: по гиперболе.

Задача 792 п.1. Определить вид линии пересечения поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ с плоскостью $x - z + 1 = 0$ и определить расположение линии относительно исходной системы координат.

Решение.

Введем новую ортогональную систему координат, в которой уравнение плоскости $x - z + 1 = 0$ имеет вид $z' = 0$. В качестве нового начала координат возьмем точку $O' = (0, 0, 1)$, принадлежащую плоскости $x - z + 1 = 0$.

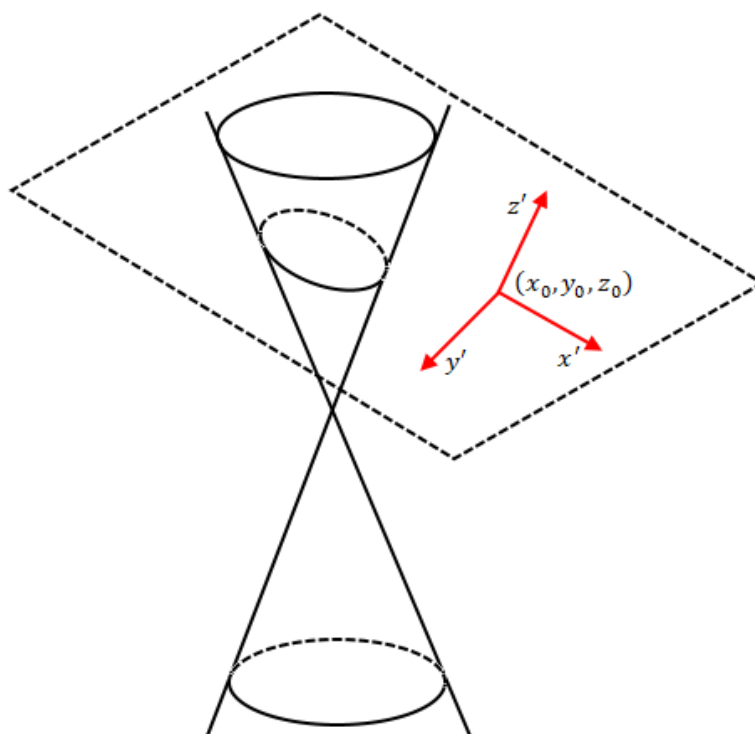


Рис. 25.3. К задаче 792 п.1

Выберем ось $O'z'$: вектор $(1, 0, -1)$ – вектор нормали к плоскости $x - z + 1 = 0$,

поэтому в качестве $\vec{e}_3$ выберем $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ должны дополнять $\vec{e}_3$ до ортогонального базиса.

Выберем вектор $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – он ортогонален $\vec{e}_3$ и лежит в плоскости $x - z + 1 = 0$.

В качестве $\vec{e}_2$ выберем $\vec{e}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.

Замена координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Уравнение конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в системе координат $O'x'y'z'$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)^2 + (x')^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 1\right)^2 = 0$$

Уравнение его сечения плоскостью $z' = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 + (x')^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y' + 1\right)^2 &= 0 \Leftrightarrow (x')^2 - \sqrt{2}y' - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (x')^2 &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

После замены

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z' = z'' \end{cases}$$

уравнение сечения приобретет вид

$$(x'')^2 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}y''$$

Это – парабола с фокальным параметром $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Координаты вершины и направляющего вектора оси симметрии:

$O''x''y''$: вершина $(0, 0, 0)$, направляющий вектор оси симметрии: $(0, 1, 0)$,

$O'x'y'z'$: вершина $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, направляющий вектор оси симметрии: $(0, 1, 0)$,

Oxy : вершина $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, направляющий вектор оси симметрии: $(1, 0, 1)$.

Ответ: парабола с фокальным параметром $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, вершина $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, направляющий вектор оси симметрии: $(1, 0, 1)$.

Семинар 26. Диаметральные плоскости. Ортогональные инварианты поверхностей второго порядка.

Диаметральная плоскость, сопряженная неасимптотическому направлению (α, β, γ) – плоскость, содержащая середины хорд, высекаемых на поверхности второго порядка прямыми с направляющим вектором (α, β, γ) .

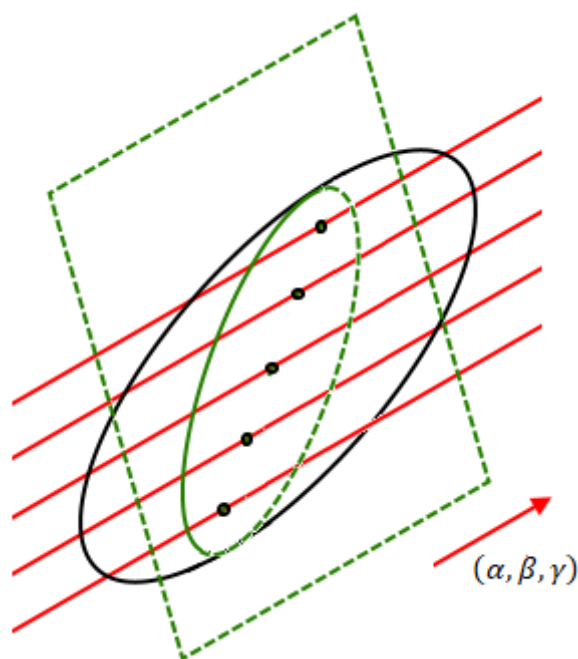


Рис. 18.2 Диаметральная плоскость

Формула для нахождения диаметральной плоскости:

$$(\alpha, \beta, \gamma, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Как видим, ситуация полностью аналогична нахождению сопряженного диаметра у кривых второго порядка.

Задача 765. Даны однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

и плоскость $6x + 4y - 3z - 12 = 0$. Определить направление хорд, которым сопряжена диаметральная плоскость, параллельная данной плоскости.

Решение.

Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной неасимптотическому направлению (α, β, γ) :

$$(\alpha, \beta, \gamma, 0) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}x + \frac{\beta}{9}y - \frac{\gamma}{16}z = 0$$

Так как эта плоскость параллельна плоскости $6x + 4y - 3z - 12 = 0$, то их коэффициенты пропорциональны. Получаем систему (λ – коэффициент пропорциональности):

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{4} = 6\lambda \\ \frac{\beta}{9} = 4\lambda \\ -\frac{\gamma}{16} = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 24\lambda \\ \beta = 36\lambda \\ \gamma = 48\lambda \end{cases}$$

Выберем $\lambda = \frac{1}{12}$, получим направление $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 4)$.

Ответ: $(2, 3, 4)$.

Ортогональные инварианты поверхностей второго порядка

Поверхность второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

Ортогональные инварианты:

$$\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = I_1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = I_2$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = I_3$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} = I_4$$

Если уравнение поверхности второго порядка умножить на λ , то I_i умножится на λ^i .

Задача 723 п.1. Не производя замен координат, составить каноническое уравнение поверхности:

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy + 2xz - 2yz - 6x - 14y + 9 = 0$$

Решение.

Вначале определим, является ли поверхность невырожденной:

$$I_4 = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -7 \\ -7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Итак, поверхность невырожденная, значит, это эллипсоид (действительный или мнимый), или гиперboloид (однополостной или двуполостной). Найдем I_3 :

$$I_3 = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

То есть, это гиперboloид (однополостной или двуполостной). Так как $I_4 = 10 > 0$, то это однополостной гиперboloид. Его каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Умножим на λ :

$$\frac{\lambda}{a^2} x^2 + \frac{\lambda}{b^2} y^2 - \frac{\lambda}{c^2} z^2 - \lambda = 0$$

Инварианты:

$$I_3 = -\frac{\lambda^3}{a^2 b^2 c^2}, \quad I_4 = \frac{\lambda^4}{a^2 b^2 c^2}, \quad \text{откуда} \quad \lambda = -\frac{I_4}{I_3} = -\frac{10}{-10} = 1$$

Тогда

$$I_1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 6, \quad I_2 = \frac{1}{a^2 b^2} - \frac{1}{b^2 c^2} - \frac{1}{a^2 c^2} = 3,$$

$$I_3 = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2} = -10, \quad I_4 = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} = 10$$

Пусть

$$\frac{1}{a^2} = A, \quad \frac{1}{b^2} = B, \quad \frac{1}{c^2} = C$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} ABC = 10 \\ A + B - C = 6 \\ AB - BC - AC = 3 \end{cases}$$

Попытаемся угадать целочисленные решения: 1, 2, 5 – делители 10.

$A = 2, B = 5, C = 1$ подходит, значит, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{5}}, c = 1$. Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{5})^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$$

Ответ: $\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{5})^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$.

Семинар 27. Аффинная классификация квадрик в пространстве.

Касательные плоскости.

Задача 719 п.1, п.10. Определить аффинный тип поверхности с помощью метода Лагранжа:

1) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;

10) $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0$.

Решение.

Пункт 1.

Выделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} & ((2x)^2 + 2 \cdot 2xz + z^2) + 6y^2 + 3z^2 - 8y - 4z + 3 = \\ & = (2x + z)^2 + \left((\sqrt{6}y)^2 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6}y + \left(\frac{4}{\sqrt{6}} \right)^2 \right) - \frac{8}{3} + 3z^2 - 4z + 3 = \\ & = (2x + z)^2 + \left(\sqrt{6}y - \frac{4}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left((\sqrt{3}z)^2 - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}z + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) - 1 = \\ & = (2x + z)^2 + \left(\sqrt{6}y - \frac{4}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\sqrt{3}z - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 - 1 \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = \sqrt{6}y - \frac{4}{\sqrt{6}} \\ z' = \sqrt{3}z - \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение эллипсоида:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$$

Пункт 10.

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \\ z = z' \end{cases}$$

Получим:

$$4(x' + y')(x' - y') + 2(x' + y') + 4(x' - y') - 6z' - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x')^2 - 4(y')^2 + 6x' - 2y' - 6z' - 3 = 0$$

Выделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} & \left((2x')^2 + 2 \cdot 2x' \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right) - \left(\frac{9}{4}\right) - 4(y')^2 - 2y' - 6z' - 3 = \\ & = \left(2x' + \frac{3}{2} \right)^2 - \left((2y')^2 + 2 \cdot 2y' \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) - 6z' - 5 = \\ & = \left(2x' + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(2y' + \frac{1}{2} \right)^2 - 6z' - 5 \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x'' = 2x' + \frac{3}{2} \\ y'' = 2y' + \frac{1}{2} \\ z'' = 3z' - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Получим каноническое уравнение гиперболического параболоида:

$$(x'')^2 + (y'')^2 = 2z''$$

Ответ: 1) эллипсоид, 10) гиперболический параболоид.

Уравнение касательной плоскости к поверхности второго порядка $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

или

$$(x_0, y_0, z_0, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Задача 742. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x - 15}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z - 11}{-1}$$

и касающейся гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z.$$

Решение.

Запишем уравнение прямой в виде пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} x - 15 = 0 \\ y + 2z - 22 = 0 \end{cases}$$

Тогда уравнение произвольной плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x - 15 = 0 \\ y + 2z - 22 = 0 \end{cases}$ – это уравнение плоскости, принадлежащей пучку плоскостей, определяемых плоскостями $x - 15 = 0$ и $y + 2z - 22 = 0$, то есть, имеет вид:

$$\lambda(x - 15) + \mu(y + 2z - 22) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + \mu y + 2\mu z - 15\lambda - 22\mu = 0$$

Уравнение касательной плоскости к гиперболическому параболоиду $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{9}x_0(x - x_0) - \frac{1}{2}y_0(y - y_0) - 2(z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{2}{9}x_0x - \frac{1}{2}y_0y - 2z - \frac{2}{9}x_0^2 + \frac{1}{2}y_0^2 + 2z_0 &= 0 \end{aligned}$$

Эти уравнения должны задавать одну и ту же плоскость, то есть, быть пропорциональными. Так как λ и μ определены с точностью до пропорциональности, можно считать, что коэффициент пропорциональности равен 1. Учитывая, что точка (x_0, y_0, z_0) лежит на параболоиде, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{4} = 2z_0 \\ \frac{2}{9}x_0 = \lambda \\ -\frac{1}{2}y_0 = \mu \\ -2 = 2\mu \\ -\frac{2}{9}x_0^2 + \frac{1}{2}y_0^2 + 2z_0 = -15\lambda - 22\mu \end{cases}$$

Из четвертого уравнения находим $\mu = -1$, тогда из третьего уравнения $y_0 = 2$. Подставляя найденные значения в остальные уравнения системы (а также учитывая, что $-\frac{2}{9}x_0^2 + \frac{1}{2}y_0^2 = -2\left(\frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{4}\right) = -4z_0$), получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{9} - 1 = 2z_0 \\ \frac{2}{9}x_0 = \lambda \\ -2z_0 = -15\lambda + 22 \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы

$$2z_0 = 15\lambda - 22 = \frac{10}{3}x_0 - 22$$

Подставим в первое уравнение системы:

$$\frac{x_0^2}{9} - 1 = \frac{10}{3}x_0 - 22 \Leftrightarrow x_0^2 - 30x_0 + 189 = 0$$

Корни: $x_{01} = 9$, $x_{02} = 21$. Тогда $z_{01} = 9$, $z_{02} = 24$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{14}{3}$.

Получаем уравнения касательных плоскостей:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z - 8 &= 0 \\ 14x - 3y - 6z - 144 &= 0 \end{aligned}$$

Ответ: $2x - y - 2z - 8 = 0$ и $14x - 3y - 6z - 144 = 0$.



Семинар 28. Приведение поверхностей к каноническому виду. Часть 2.

Задача 718 п.1. Определить вид поверхности, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

Решение.

1) Найдем координаты центра:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 8z - 28 = 0 \\ 2y - 4x + 4z + 2 = 0 \\ 8z + 4y - 8x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 7 \\ -2x + y + 2z = -1 \\ -2x + y + 2z = -4 \end{cases}$$

второе и третье уравнения системы несовместны, значит, у поверхности нет центра.

2) Так как центра нет, этот шаг мы пропускаем.

3) Найдем главные направления:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 & -4 \\ -2 & 1 - \lambda & 2 \\ -4 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (4 - \lambda)^2(1 - \lambda) + 16 + 16 - 16(1 - \lambda) - 4(4 - \lambda) - 4(4 - \lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

Получаем $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$;

4) Найдем собственные вектора и нормируем их:

$$\lambda_1 = 9: \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

Возьмем $z_1 = 2$, тогда $x_1 = -2, y_1 = 1$. Нормируем: $e'_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0: \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

Выберем x_2, y_2, z_2 таким образом, чтобы $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Возьмем $z_2 = 1$, тогда $x_2 = 2$, $y_2 = 2$. Нормируем: $e'_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

В качестве e'_3 выберем

$$e'_3 = [e'_1, e'_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Получаем замену

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

После подстановки в уравнение квадрики получаем:

$$9(x')^2 + 30x' - 12y' + 45 = 0$$

Обратите внимание, что коэффициенты при $(x'')^2$, $(y'')^2$ и $(z'')^2$ равны λ_1 , λ_2 и λ_3 , найденным ранее.

5) "Доработка напильником":

$$9(x')^2 + 30x' - 12y' + 45 = 0 \Leftrightarrow \left(x' + \frac{5}{3}\right)^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} \left(y' - \frac{5}{3}\right)$$

Это параболический цилиндр. Сделаем замену

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{5}{3} \\ y'' = y' - \frac{5}{3} \\ z'' = z' \end{cases}$$

получим

$$(y'')^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} x''$$

- каноническое уравнение параболического цилиндра с $p = \frac{2}{3}$.

Ответ: параболический цилиндр $(y'')^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} x''$ с центром $(2, 1, -1)$ и направлениями главных осей $e_1'' = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$; $e_2'' = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$; $e_3'' = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$.

Семинар 29. Проективная плоскость.

Пусть есть некоторая плоскость и точка O , не принадлежащая ей. Тогда каждой точке плоскости соответствует единственная прямая, проходящая через точку O (кроме прямых, параллельных плоскости – будем считать, что им соответствуют бесконечно удаленные точки). Получаем взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости и прямыми, проходящими через точку O (см. рис. 29.1).

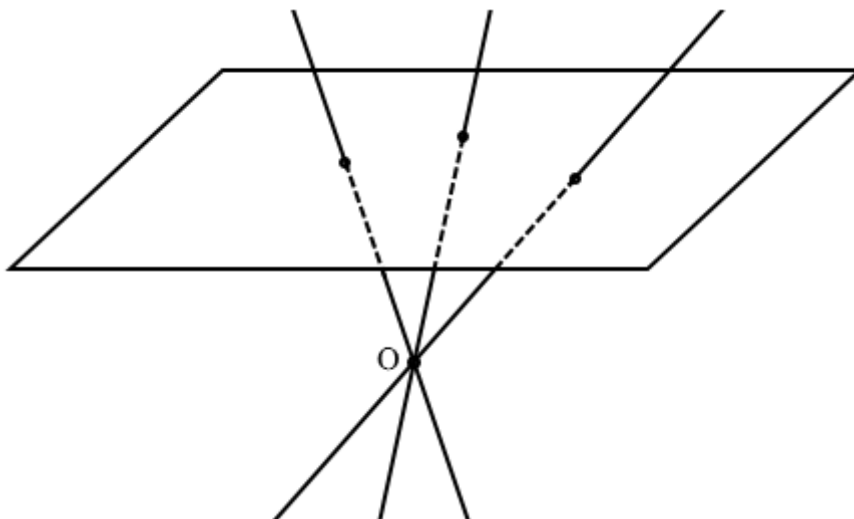


Рис. 29.1. Проективная плоскость

Для того, чтобы описать прямую, проходящую через точку, достаточно задать направляющий вектор. Задав базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, получим взаимно-однозначное соответствие между прямыми, их направляющими векторами и координатами направляющих векторов.

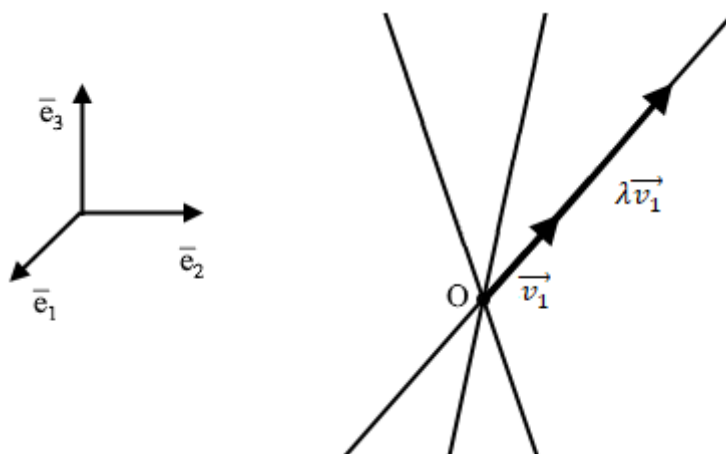


Рис. 29.2. Однородные координаты

Так как направляющий вектор (v^1, v^2, v^3) определен с точностью до пропорциональности, координаты прямой записываем как $(v^1 : v^2 : v^3)$ – однородные

координаты точки на проективной плоскости. Обратите внимание, что однородные координаты зависят от выбора базиса.

Выберем некоторую плоскость, тогда каждой прямой будет отвечать точка на плоскости (прямым, параллельным плоскости, соответствуют бесконечно удаленные точки) – получим аффинную карту проективной плоскости. Соответственно, на плоскости возникают точки $E_1 = (1:0:0)$, $E_2 = (0:1:0)$, $E_3 = (0:0:1)$. Для однозначного определения $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ нужно еще указать точку $E = (1:1:1)$.

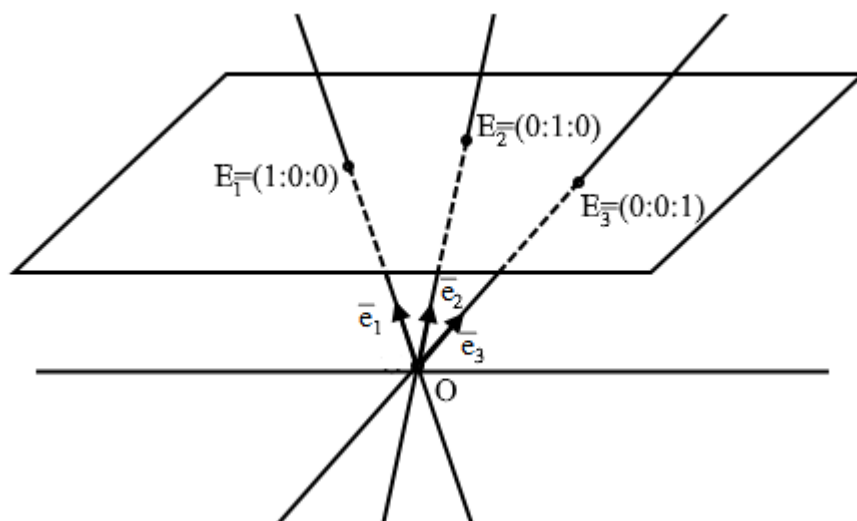


Рис. 29.3

Задача 927. На аффинно-проективной плоскости введена проективная система координат $EE_1E_2E_3$ и аффинная система координат Oxy так, что в системе Oxy прямые E_2E_3 , E_3E_1 , E_1E_2 задаются уравнениями $x - 4 = 0$, $y - 3 = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$ соответственно, а точка E имеет координаты $(3, 2)$. Найти:

- 1) проективные координаты точки M , аффинные координаты которой $(1, 1)$;
- 2) аффинные координаты точки N , проективные координаты которой $(4:3:-6)$;
- 3) проективные координаты несобственной точки Q оси Ox ;
- 4) координаты точки R , проективные координаты которой $(5:5:-7)$, в стандартной проективной системе координат, ассоциированной с системой Oxy .

Решение.

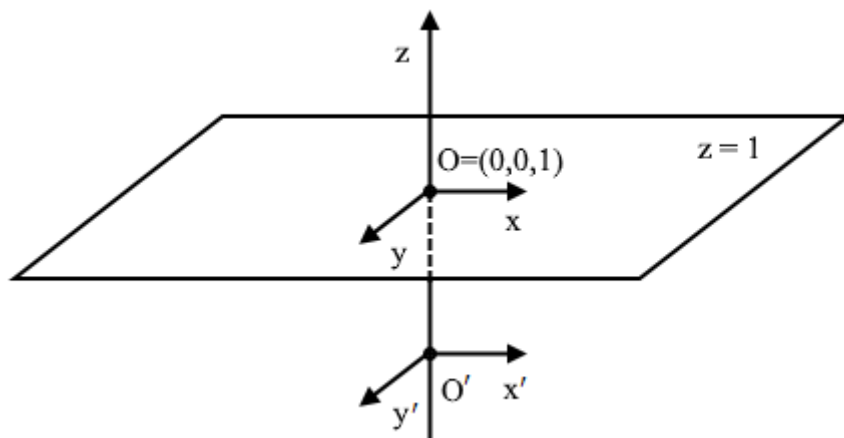


Рис. 29.4. Аффинно-проективная плоскость

Найдем базисные вектора e_1'' , e_2'' , e_3'' проективной системы координат.

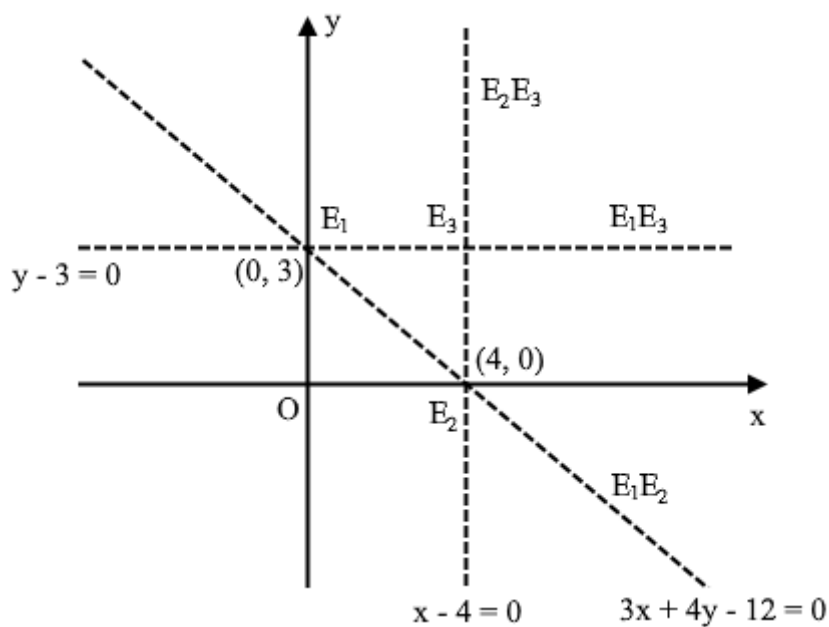


Рис. 29.5. К задаче 927

$$E_1 = E_1E_2 \cap E_1E_3 = (0, 3), E_2 = E_1E_2 \cap E_2E_3 = (4, 0), E_3 = E_1E_3 \cap E_2E_3 = (4, 3).$$

Имеем координаты точек:

	Система координат	
	Oxy	Проективная
E_1	(0, 3)	(1:0:0)
E_2	(4, 0)	(0:1:0)
E_3	(4, 3)	(0:0:1)
E	(3, 2)	(1:1:1)

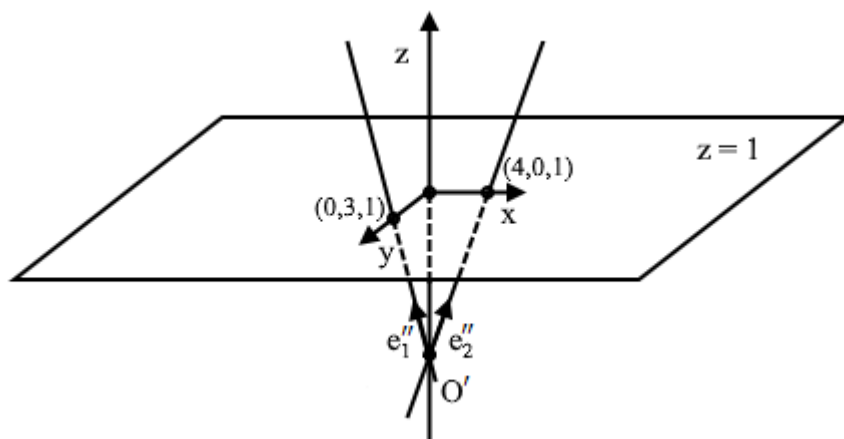


Рис. 29.6. К задаче 927

Получаем $\lambda e_1'' = (0,3,1)$, $\mu e_2'' = (4,0,1)$, $\nu e_3'' = (4,3,1)$, $\alpha(e_1'' + e_2'' + e_3'') = (3,2,1)$ – четыре векторных соотношения, которые можно рассматривать как систему из 12 уравнений на 13 неизвестных. Все векторы можно одновременно масштабировать, значит, можно один из коэффициентов (например, α) положить равным 1. Для удобства введем обозначения $\beta = \frac{1}{\alpha}$, $\gamma = \frac{1}{\mu}$, $\delta = \frac{1}{\nu}$. Получим систему:

$$\begin{cases} e_1'' = \beta(0,3,1) \\ e_2'' = \gamma(4,0,1) \\ e_3'' = \delta(4,3,1) \\ e_1'' + e_2'' + e_3'' = (3,2,1) \end{cases}$$

Складывая первые три уравнения системы и приравнявая к четвертому, получаем:

$$\begin{cases} 4\gamma + 4\delta = 3 \\ 3\beta + 3\delta = 2 \\ \beta + \gamma + \delta = 1 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, $\delta = \frac{5}{12}$, откуда

$$e_1'' = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), e_2'' = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), e_3'' = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{12}\right).$$

1) В Oxy координаты точки $M = (1,1)$, значит, в $Oxyz$ $M = (1,1,1)$. Найдём координаты M в базисе e_1'' , e_2'' , e_3'' . Пусть

$$\alpha e_1'' + \beta e_2'' + \gamma e_3'' = (1,1,1)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\beta + \frac{5}{3}\gamma = 1 \\ \frac{3}{4}\alpha + \frac{5}{4}\gamma = 1 \\ \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{12}\gamma = 1 \end{cases}$$

Откуда $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -1$, то есть, проективные координаты $M = (3:2:-1)$.

2) Проективные координаты $N = (4:3:-6)$.

$$4e_1'' + 3e_2'' - 6e_3'' = 4\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) - 6\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{12}\right) = \left(-6, -\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

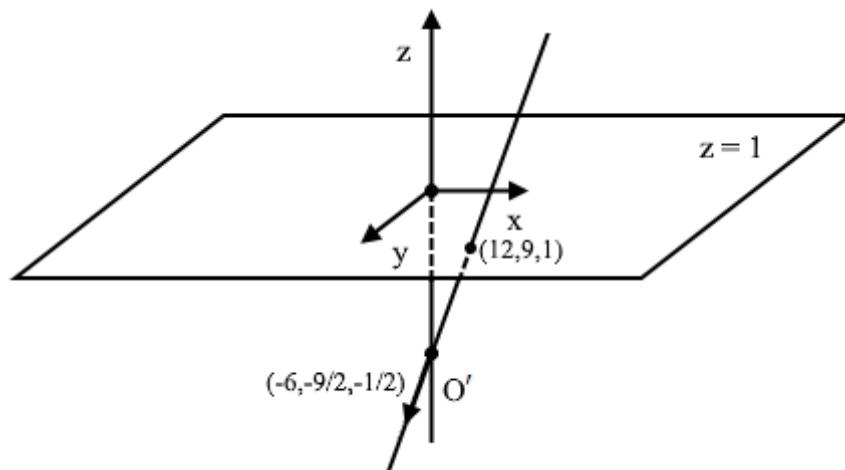


Рис. 29.7. К задаче 927 п.2

Прямая с таким направляющим вектором пересекает плоскость $z = 1$ в точке $(12, 9, 1)$ (умножим координаты вектора на -2). Значит, аффинные координаты точки $N = (12, 9)$.

3) Несобственная точка Q оси Ox отвечает прямой с направляющим вектором $(1, 0, 0)$.

$$\alpha e_1'' + \beta e_2'' + \gamma e_3'' = (1, 0, 0)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\beta + \frac{5}{3}\gamma = 1 \\ \frac{3}{4}\alpha + \frac{5}{4}\gamma = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{12}\gamma = 0 \end{cases}$$

Откуда $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 3/5$, то есть, проективные координаты
 $Q = (-1:0:3/5) = (5:0:-3)$.

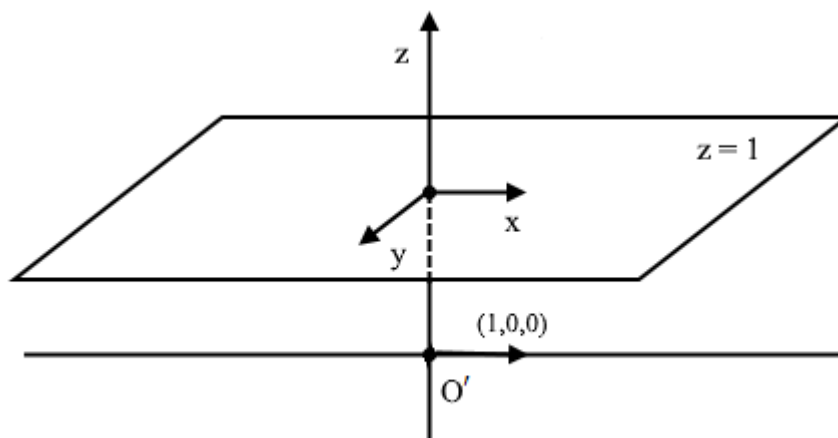


Рис. 29.8. К задаче 927 п.3

4) Точке $R = (5:5:-7)$ отвечает вектор

$$5e_1'' + 5e_2'' - 7e_3'' = 5\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) + 5\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) - 7\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{12}\right) = (-5, -5, 0)$$

Поэтому ее координаты в проективной системе координат, связанной с аффинной, будут $(-5:-5:0) = (1:1:0)$.

Ответ: 1) $M = (3:2:-1)$, 2) $N = (12, 9)$, 3) $Q = (5:0:-3)$, 4) $R = (1:1:0)$.

Задача 936. В проективной системе координат записать уравнение прямой, проходящей через точки $(1:2:-1)$ и $(3:5:-2)$.

Решение.

Пусть уравнение прямой $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} A + 2B - C = 0 \\ 3A + 5B - 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B - C = 0 \end{cases}$$

Пусть $C = -1$, тогда $A = 1, B = -1$. Получаем уравнение прямой:

$$x^1 - x^2 - x^3 = 0$$

Ответ: $x^1 - x^2 - x^3 = 0$.

Семинар 30. Проективная плоскость. Проективная прямая.

Задача 937. В некоторой арифметической модели проективной плоскости даны четыре точки: $A(1:2:3)$, $B(-1:2:2)$, $C(3:1:5)$, $D(2:0:1)$. Найти точку пересечения прямых AB и CD .

Решение.

Пусть AB задается уравнением $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \gamma = 0 \\ 4\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

Пусть $\gamma = -4$, тогда $\alpha = 2$, $\beta = 5$. Получаем уравнение AB : $2x + 5y - 4z = 0$.

Пусть CD задается уравнением $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Получаем систему:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 7\gamma = 0 \end{cases}$$

Пусть $\gamma = -2$, тогда $\alpha = 1$, $\beta = 7$. Получаем уравнение CD : $x + 7y - 2z = 0$.

Пересечение AB и CD :

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 0 \\ x + 7y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Пусть $z = 1$, тогда $x = 2$, $y = 0$. Получаем $(2:0:1)$ – точка пересечения AB и CD .

Ответ: $(2:0:1)$.

Задача 908 п.1. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек A, B, C, D проективной прямой: $A = (3:1)$, $B = (2:5)$, $C = (1:0)$, $D = (-2:1)$.

Решение.

	Координаты	
	Однородные	Неоднородные (x/y)
A	(3:1)	3
B	(2:5)	2/5
C	(1:0)	∞
D	(-2:1)	-2

Замечание: выражения вроде $\frac{\infty+a}{\infty+b}$ понимаем как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+a}{x+b} = 1$.

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{\infty-3}{\infty-2/5} : \frac{-2-3}{-2-2/5} = 1 : \frac{25}{12} = \frac{12}{25}$$

Убедимся, что выбор системы координат не влияет на результаты вычислений.

Возьмем, например, неоднородную систему координат y/x :

	Координаты	
	Однородные	Неоднородные (y/x)
A	(3:1)	1/3
B	(2:5)	5/2
C	(1:0)	0
D	(-2:1)	-1/2

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{0-1/3}{0-5/2} : \frac{-1/2-1/3}{-1/2-5/2} = \frac{2}{15} : \frac{5}{18} = \frac{12}{25}$$

Ответ: $\frac{12}{25}$.

Задача 909. На проективной прямой даны три точки: $A = (1:2)$, $B = (-1:1)$, $C = (3:5)$. Известно, что $(ABCD) = 1/2$. Найти проективные координаты точки D .

Решение.

	Координаты	
	Однородные	Неоднородные (x/y)
A	(1:2)	1/2
B	(-1:1)	-1
C	(3:5)	3/5

$$(ABCD) = \frac{3/5 - 1/2}{3/5 + 1} : \frac{d - 1/2}{d + 1} = \frac{1}{2}$$

Откуда

$$d + 1 = 4(2d - 1) \Leftrightarrow d = \frac{5}{7}$$

В координатах x/y $d = \frac{5}{7}$, значит, в проективных координатах $D = (5:7)$.

Ответ: $D = (5:7)$.

Задача 904. Принимая точки $E_1(-4)$, $E_2(2)$ за фундаментальные точки проективной системы, а точку $E_3(3)$ – за единичную, найти связь между проективными координатами $(x_1:x_2)$ точки M и ее аффинной координатой x .

Решение.

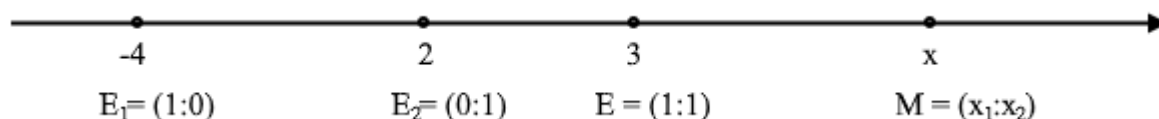


Рис. 30.1. К задаче 904

	Координаты	
	Однородные	Неоднородные (x/y)
E_1	(1:0)	∞
E_2	(0:1)	0
E	(1:1)	1
M	$(x_1:x_2)$	x_1/x_2

В исходной системе координат:

$$(E_1 E_2 E M) = \frac{3+4}{3-2} : \frac{x+4}{x-2} = \frac{7(x-2)}{x+4}$$

В неоднородной системе координат:

$$(E_1 E_2 E M) = \frac{1-\infty}{1-0} : \frac{x_1/x_2 - \infty}{x_1/x_2 - 0} = \frac{1-\infty}{x_1/x_2 - \infty} \cdot \frac{x_1/x_2 - 0}{1-0} = \frac{x_1}{x_2}$$

Так как двойное отношение не зависит от системы координат, получаем

$$\frac{7(x-2)}{x+4} = \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow (x_1 : x_2) = (7(x-2) : (x+4))$$

Ответ: $(x_1 : x_2) = (7(x-2) : (x+4))$.

Задача 931. На плоскости даны точки $A(1, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$, $D(-3, 4)$. Принимая их соответственно за фундаментальные точки E_1, E_2, E_3, E проективной системы координат, найти в ней координаты точек $F(-2, 0)$ и $G(5, 3)$.

Решение.

В однородных координатах координаты точек $A(1:2:1)$, $B(-1:2:1)$, $C(2:3:1)$, $D(-3:4:1)$, $F(-2:0:1)$, $G(5:3:1)$. По сути, нам нужно найти преобразование

плоскости, задаваемое матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, которое переводит точки A, B, C, D

соответственно в точки E_1, E_2, E_3, E . Из условия задачи имеем:

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- матричные уравнения, которые можно рассматривать как систему из 12 линейных

уравнений с 13 неизвестными. Так как матрица $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ определена с

точностью до пропорциональности, можно один из коэффициентов пропорциональности $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – например, δ , положить равным 1. Получим систему из 12 линейных уравнений с 12 неизвестными. Например, из первого матричного

уравнения $C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ получаем систему

$$\begin{cases} a + 2b + c = \alpha \\ d + 2e + f = 0 \\ g + 2h + i = 0 \end{cases}$$

Из второго матричного уравнения $C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ получаем систему

$$\begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ -d + 2e + f = \beta \\ -g + 2h + i = 0 \end{cases}$$

И так далее – получаем 12 уравнений. Отметим, однако, что получившуюся систему нецелесообразно решать методом приведения к ступенчатому виду, так как она естественным образом разбивается на 3 системы из 4 уравнений каждая, содержащие неизвестные: первая – a, b, c, α , вторая – d, e, f, β , третья – g, h, i, γ :

$$\begin{cases} a + 2b + c = \alpha \\ -a + 2b + c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0' \\ -3a + 4b + c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} d + 2e + f = 0 \\ -d + 2e + f = \beta \\ 2d + 3e + f = 0' \\ -3d + 4e + f = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} g + 2h + i = 0 \\ -g + 2h + i = 0 \\ 2g + 3h + i = \gamma \\ -3g + 4h + i = 1 \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем $a = -1/8, b = 3/8, c = -7/8, \alpha = -1/4$;

решая вторую систему, получаем $d = -1/6, e = 1/6, f = -1/6, \beta = 1/3$;

решая третью систему, получаем $g = 0, h = 1/2, i = -1, \gamma = 1/2$.

Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 & -7/8 \\ -1/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Новые проективные координаты $F(-2:0:1)$ в системе E_1, E_2, E_3, E :

$$\begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 & -7/8 \\ -1/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/8 \\ 1/6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Получаем $F(-5/8: 1/6: -1) = (15: -4: 24)$.

Новые проективные координаты $G(5: 3: 1)$ в системе E_1, E_2, E_3, E :

$$\begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 & -7/8 \\ -1/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/8 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Получаем $G(-3/8: -1/2: 1/2) = (3: 4: -4)$.

Ответ: $F(15: -4: 24)$, $G(3: 4: -4)$.

Задача 915. Найти проективное преобразование, переводящее точки A, B, C в точки A', B', C' соответственно: $A = A'(0)$, $B = B'(1)$, $C(2)$, $C'(\infty)$.

Решение.

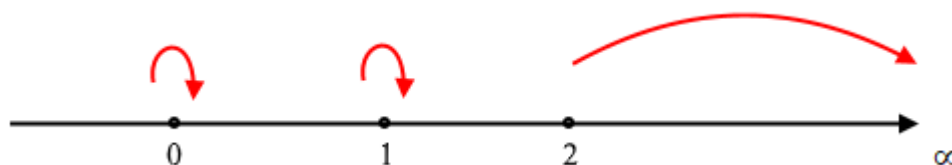


Рис. 30.2. К задаче 915

В однородных координатах координаты точек $A = A' = (0: 1)$, $B = B' = (1: 1)$, $C = (2: 1)$, $C' = (1: 0)$. Пусть матрица преобразования $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По условию

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как матрица $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ определена с точностью до пропорциональности, можно один из коэффициентов пропорциональности λ, μ, ν – например, μ , положить равным 1. Получим систему из 6 линейных уравнений с 6 неизвестными. Как и в предыдущей задаче, она естественным образом разбивается на 2 системы из 3 уравнений каждая, содержащие неизвестные: первая – a, b, ν , вторая – c, d, λ :

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + b = 1 \\ 2a + b = \nu \end{cases}, \quad \begin{cases} d = \lambda \\ c + d = 1 \\ 2c + d = 0 \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем $a = 1, b = 0, v = 2$;
решая вторую систему, получаем $c = -1, d = 2, \lambda = 2$.
Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, преобразование переводит точку x с однородными координатами $(x:1)$ в точку x' с однородными координатами $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x+2 \end{pmatrix}$, то есть, $x' = x/(-x+2)$.
Ответ: $x' = x/(-x+2)$.

Задача 947. В какие точки переходят точки $A(1:2:3), B(2:-1:4), C(-1:0:1)$ при проективном преобразовании

$$(x'_1:x'_2:x'_3) = ((2x_1 - 3x_2 + x_3):(3x_1 - x_2 + 4x_3):(3x_1 - 2x_2 + 5x_3))?$$

Решение.

$$A \mapsto A' = ((2 - 6 + 3):(3 - 2 + 12):(3 - 4 + 15)) = (-1:13:14);$$

$$B \mapsto B' = ((4 + 3 + 4):(6 + 1 + 16):(6 + 2 + 20)) = (11:23:28);$$

$$C \mapsto C' = ((-2 + 1):(-3 + 4):(-3 + 5)) = (-1:1:2).$$

также образы точек удобно искать, записав преобразование в матричном виде, например:

$$A \mapsto A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A'(-1:13:14), B'(11:23:28), C'(-1:1:2)$.

Задача 953. В какие прямые переходят прямые $l_1: x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$,
 $l_2: -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, l_3: 4x_2 - 3x_3 = 0$ при проективном преобразовании
 $(x'_1:x'_2:x'_3) = ((x_1 - 2x_2 + x_3):(4x_1 - 2x_2 + 3x_3):(x_1 - x_2))?$

Решение.

Запишем преобразование в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

и найдем обратное к нему:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -6/5 \end{array}\right)$$

Итак, $C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$. Так как проективное преобразование определено с точностью до пропорциональности, множитель $\frac{1}{5}$ можно опустить и записать

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$l_1: x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$ переходит в

$$l'_1: (-3x'_1 + x'_2 + 4x'_3) + 3(-3x'_1 + x'_2 - x'_3) + 2(2x'_1 + x'_2 - 6x'_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$l'_1: -8x'_1 + 6x'_2 - 11x'_3 = 0$$

$l_2: -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$ переходит в

$$l'_2: -(-3x'_1 + x'_2 + 4x'_3) + 2(-3x'_1 + x'_2 - x'_3) + 5(2x'_1 + x'_2 - 6x'_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$l'_2: 7x'_1 + 6x'_2 - 36x'_3 = 0$$

$l_3: 4x_2 - 3x_3 = 0$ переходит в

$$l'_3: 4(-3x'_1 + x'_2 - x'_3) - 3(2x'_1 + x'_2 - 6x'_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$l'_3: -18x'_1 + x'_2 + 14x'_3 = 0$$

Ответ: $l'_1: -8x'_1 + 6x'_2 - 11x'_3 = 0$, $l'_2: 7x'_1 + 6x'_2 - 36x'_3 = 0$, $l'_3: -18x'_1 + x'_2 + 14x'_3 = 0$.

Семинар 31. Линии второго порядка в проективных координатах.

Задача 956 п.1. Определить проективный класс кривой, пользуясь методом Лагранжа:

$$2x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = 0$$

Решение.

Выделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} & \left((\sqrt{2}x_1)^2 + 2 \cdot \sqrt{2}x_1 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}x_2 + \frac{9}{8}x_2^2 - 2 \cdot \sqrt{2}x_1 \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}x_3 + \frac{25}{8}x_3^2 - 2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}x_2 \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}x_3 \right) \\ & - \frac{9}{8}x_2^2 - \frac{25}{8}x_3^2 + \frac{15}{4}x_2x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = \\ & = \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}x_2 - \frac{5}{2\sqrt{2}}x_3 \right)^2 + \frac{23}{8}x_2^2 + \frac{23}{4}x_2x_3 - \frac{25}{8}x_3^2 = \\ & = \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}x_2 - \frac{5}{2\sqrt{2}}x_3 \right)^2 + \left(\left(\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x_2 \right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x_2 \cdot \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x_3 + \frac{23}{8}x_3^2 \right) - \\ & - \frac{23}{8}x_2^2 - \frac{33}{8}x_3^2 = \\ & = \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}x_2 - \frac{5}{2\sqrt{2}}x_3 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x_2 + \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x_3 \right)^2 - (\sqrt{7}x_3)^2 \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x_1' = \sqrt{2}x_1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}x_2 - \frac{5}{2\sqrt{2}}x_3 \\ x_2' = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x_2 + \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}x_3 \\ x_3' = \sqrt{7}x_3 \end{cases}$$

Получим каноническое вещественного овала:

$$(x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2 = 0$$

Ответ: вещественный овал.

Задача 957 п.1. Найти проективное преобразование, которое переводит окружность $x^2 + y^2 = 1$ в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$.

Решение.

Пусть

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 & \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 & \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{x_3} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

Заметим, что преобразование

$$\begin{cases} x_1 = x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_1' \end{cases}$$

переводит окружность $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ в гиперболу

$$x_3'^2 + x_2'^2 - x_1'^2 = 0 \Leftrightarrow x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = 0, \text{ что и требовалось.}$$

Ответ: $x_1' = x_3, x_2' = x_2, x_3' = x_1$.

Задача 959. Как преобразуется уравнение параболы $y^2 = 4x$, если от декартовых координат (x, y) перейти к проективным $(x_1 : x_2 : x_3)$, принимая $E_1(1, 0)$, $E_2(-1, 2)$, $E_3(-1, -2)$ за фундаментальные точки, начало координат – за единичную точку проективной системы координат?

Решение.

Пусть $(z_1 : z_2 : z_3)$ – проективизация (x, y) , то есть, $(z_1 : z_2 : z_3) = (x : y : 1)$, или

$$x = \frac{z_1}{z_3}, y = \frac{z_2}{z_3}.$$

Уравнение параболы $y^2 = 4x$ преобразуется в $z_2^2 - 4z_1z_3 = 0$.

Нужно найти преобразование координат, задаваемое матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Из условия известно:

	Координаты	
	$x_1 : x_2 : x_3$	$z_1 : z_2 : z_3$
E_1	(1:0:0)	(1:0:1)
E_2	(0:1:0)	(-1:2:1)
E_3	(0:0:1)	(-1:-2:1)
E	(1:1:1)	(0:0:1)

Тогда

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как матрица $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ определена с точностью до пропорциональности,

можно один из коэффициентов пропорциональности $\lambda, \mu, \nu, \kappa$ – например, κ , положить равным 1. Получаем системы:

$$\begin{cases} a = \lambda \\ d = 0, \\ g = \lambda \end{cases}, \quad \begin{cases} b = -\mu \\ e = 2\mu, \\ h = \mu \end{cases}, \quad \begin{cases} c = -\nu \\ f = -2\nu, \\ i = \nu \end{cases}, \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ d + e + f = 0 \\ g + h + i = 1 \end{cases}$$

Заметим, что все элементы матрицы C выражены через λ, μ, ν , поэтому достаточно решить систему

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ d + e + f = 0 \\ g + h + i = 1 \end{cases}$$

подставив в нее выражения для элементов матрицы C через λ, μ, ν . Получим

$$\begin{cases} \lambda - \mu - \nu = 0 \\ 2\mu - 2\nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 1 \end{cases}$$

откуда $\lambda = 1/2, \mu = \nu = 1/4$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как матрица C определена с точностью до пропорциональности, можем записать:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_2^2 - 4z_1z_3 &= (2x_2 - 2x_3)^2 - 4(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= 4(x_2 - x_3)^2 - 4((2x_1)^2 - (x_2 + x_3)^2) = 4(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) \\ &= -8(2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2). \end{aligned}$$

То есть, уравнение параболы $y^2 = 4x$ преобразуется в

$$z_2^2 - 4z_1z_3 = 0 \Leftrightarrow -8(2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

Ответ: $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Задача 962. Найти проективное преобразование, которое переводит эллипс

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

в тот же эллипс, а точки эллипса $A(0, 5)$, $B(-10, 0)$, $C(8, 3)$ – соответственно в точки $A'(0, -5)$, $B'(0, 5)$, $C'(10, 0)$.

Решение.

Пусть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

После такой замены уравнение эллипса должно превратиться в пропорциональное:

$$\frac{x_1^2}{100} + \frac{x_2^2}{25} = x_3^2 \mapsto \frac{(ax'_1 + bx'_2 + cx'_3)^2}{100} + \frac{(dx'_1 + ex'_2 + fx'_3)^2}{25} = (gx'_1 + hx'_2 + ix'_3)^2$$

В уравнении эллипса штрихованные координаты можно заменить на не штрихованные:

$$\frac{x_1^2}{100} + \frac{x_2^2}{25} = x_3^2 \mapsto \frac{(ax_1 + bx_2 + cx_3)^2}{100} + \frac{(dx_1 + ex_2 + fx_3)^2}{25} = (gx_1 + hx_2 + ix_3)^2$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем:

$$\begin{aligned} x_1^2: \quad & \frac{a^2}{100} + \frac{d^2}{25} - g^2 = \frac{\lambda}{100} \\ x_2^2: \quad & \frac{b^2}{100} + \frac{e^2}{25} - h^2 = \frac{\lambda}{25} \\ x_3^2: \quad & \frac{c^2}{100} + \frac{f^2}{25} - i^2 = -\lambda \\ x_1x_2: \quad & 2\frac{ab}{100} + 2\frac{ed}{25} - 2gh = 0 \\ x_1x_3: \quad & 2\frac{ac}{100} + 2\frac{df}{25} - 2gi = 0 \\ x_2x_3: \quad & 2\frac{bc}{100} + 2\frac{ef}{25} - 2hi = 0 \end{aligned}$$

Также добавим условия перехода точек:

$$\begin{aligned} A \mapsto A': \quad \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ B \mapsto B': \quad \nu \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C \mapsto C': \quad \kappa \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Получим нелинейную систему из 15 уравнений на 13 неизвестных. Решать таким путем можно, но сложно и долго. Лучше найти искомое проективное преобразование, используя двойное отношение точек на квадрикe.

Образы трех точек мы знаем, осталось найти образ еще одной: возьмем точку D на эллипсе, пусть, например, $D = (10, 0)$. Далее найдем $[ABCD]$, после чего найдем D' из условия $[ABCD] = [A'B'C'D']$. Наконец, найдем преобразование, переводящее

$$\begin{aligned} A &\mapsto A' \\ B &\mapsto B' \\ C &\mapsto C' \\ D &\mapsto D' \end{aligned}$$



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У