МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Содержание

Лекция 1

1.1 Введение

Еще в древней Греции Апполоний Перкский исследовал, что будет происходить, если пересекать плоскостью конус под разными углами. К этому вопросу как и к геометрии, в целом, есть два подхода.

1. Геометрический. Выбирается набор аксиом и на их основе строятся утверждения, леммы, теоремы.

2. Аналитический. Предложил Р. Декарт. Геометрические фигуры описываются с помощью алгебраических структур (множество точек, набор векторов...) и в дальнейшем исследуются с их помощью.

1.2 Геометрическая теория конических сечений

Опр 1. Кониками называются конические сечения, не проходящие через вершину конуса.

Замечание. Коники являются частным случаем квадрик.

Утв 1. В сечениии кругового конуса можно получить эллипс, параболу и гиперболу. Чтобы доказать это утверждение введем понятия эллипса, параболы и гиперболы.

1.2.1 Определения эллипса, параболы и гиперболы

Опр 2. Эллипсом называется геометрическое место точек (ГМТ) таких, что сумма расстояний от них до двух фиксированных точек (называемых фокусами) постоянно.

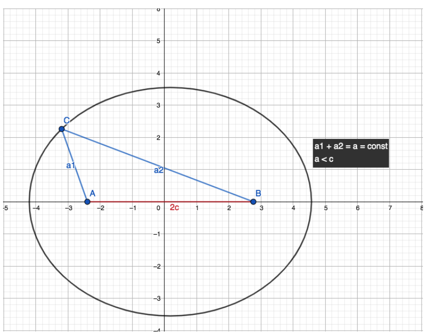


Рис. 1.

Опр 3. Гиперболой называется ГМТ таких, что модуль разности расстояний от них до двух фиксированных точек (называемых фокусами) постоянно.

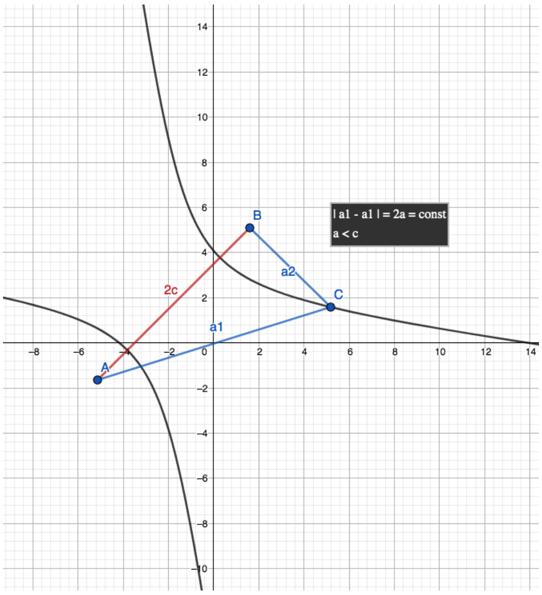


Рис. 2.

Опр 4. Параболой называется ГМТ равноудаленных от фиксированной точки, называемой фокусом и фиксированной прямой, называемой директрисой.

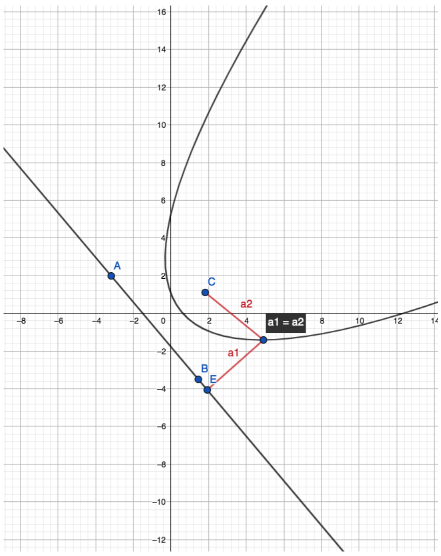


Рис. 3.

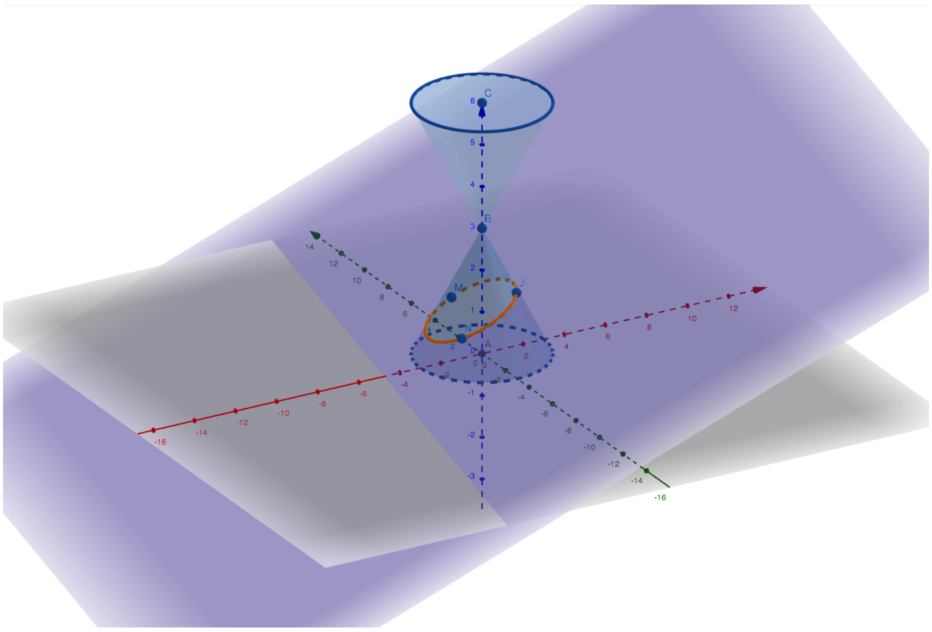


Рис. 4.

1.2.2 Доказательство для эллипса

Доказательство предложено Ж.Данделеном и опирается на свойства вписанных в конус шаров (шары Данделена)

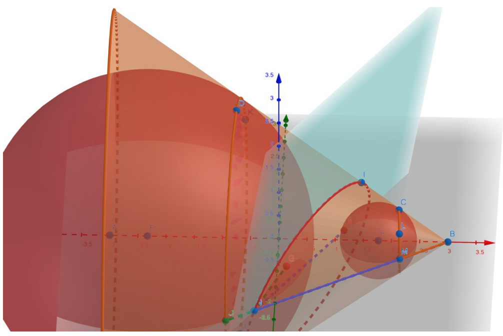
►1. Оба шара вписаны в конус и касаются секущей плоскости. Покажем, что точки касания и будут фокусами эллипса.

2. Отрезок MO постоянной длинны, так как является частью образующей конуса.

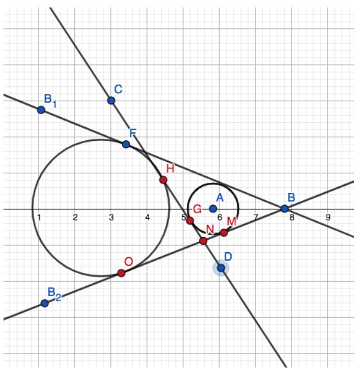
3. $NH = NM$ как касательные к шару из одной точки

4. Аналогично $NO = NG$

5. Из 2. – 4. $\implies ON + NM \implies const \implies NG + NH = const\ \forall N$ на пересечении эллипса и конуса. Значит сечение называется эллипсом по определению. ◄



а)



б)

Рис. 5.

1.2.3 Доказательство для параболы

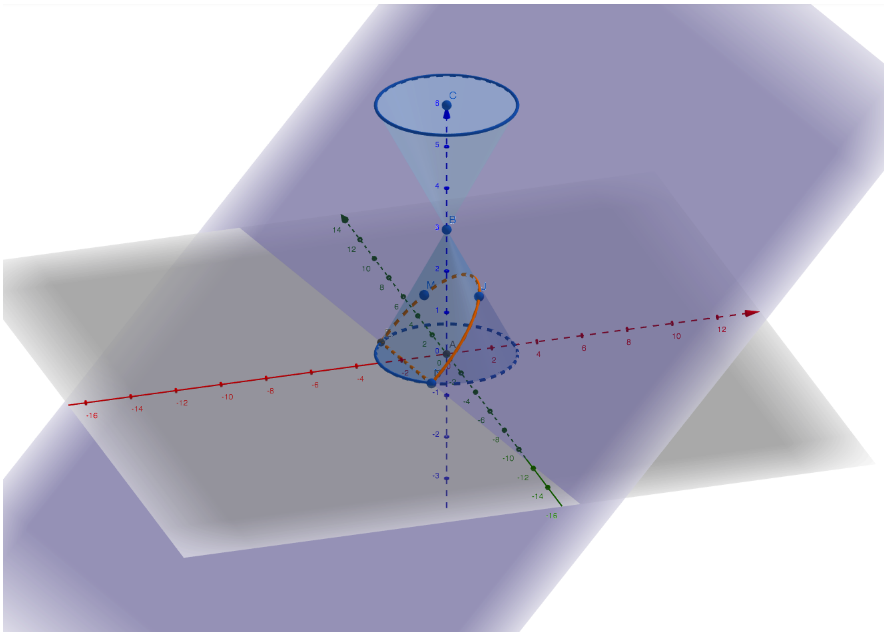


Рис. 6.

► 1. Шар вписан в конус и касается секущей плоскости E в точке F.

2. Плоскость K содержит окружность, по которой касаются шар и конус.

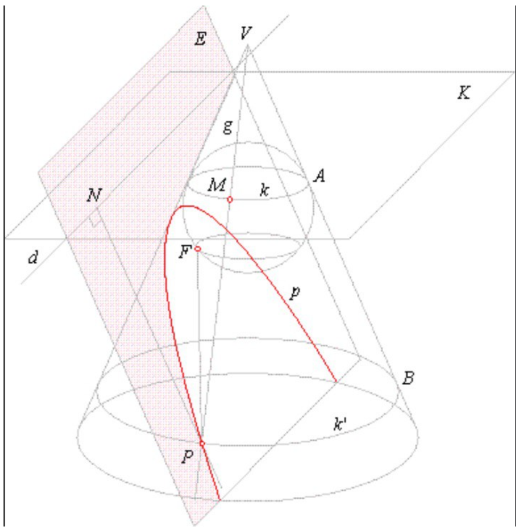


Рис. 7.

3. Плоскость $\cap E = d$. Покажем, что d– директриса, F – фокус.

4. Пусть P любая точка на параболе, $PM = PF$как касательные из одной точки к шару. PN нормаль к прямой d.

5. Получаем, что из P опущены два отрезка к плоскости K (PM и PN) под одним и

тем же углом, из чего следует, что эти отрезки равны.
6. Итак, имеем: $PN = PF = PM = const$ (как отрезок образующей конуса)
7. Значит сечение является параболой по определению. ◀

1.2.4 Оптические свойства коников и их следствие

1. У любого эллипса луч света, выпущенный из одного фокуса, отразится и попадет в другой фокус.

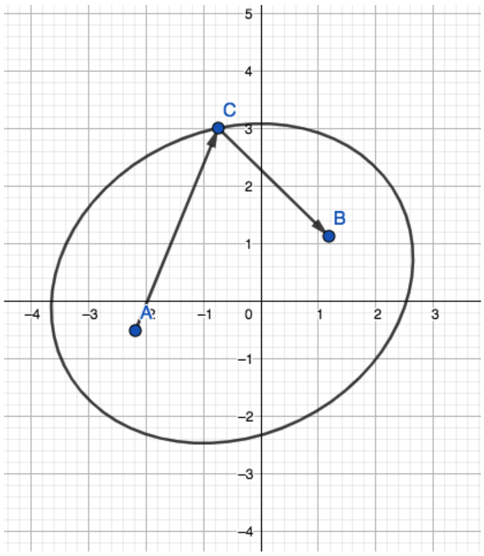


Рис. 8.

2. У любой гиперболы луч света, выпущенный из одного фокуса, отразится и пойдет так, как если бы он вышел из другого фокуса.

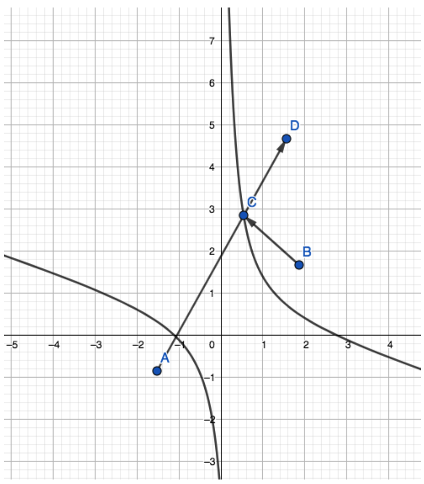


Рис. 9.

3. У любой параболы луч света, выпущенный из фокуса, отразится и пойдет перпендикулярно директрисе.

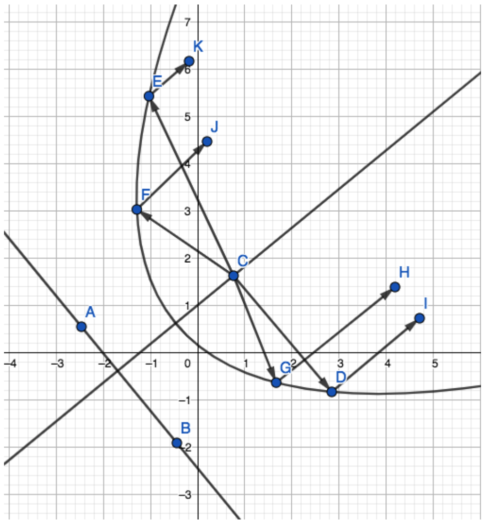


Рис. 10.

Опр 5. Две коники с одинаковыми фокусами называются конфакальными.

Следствие из свойств Конфакальные эллипс и гипербола ортогональны друг другу и образуют ортогональную эллиптическую систему координат (аналогично декартовой и полярной).

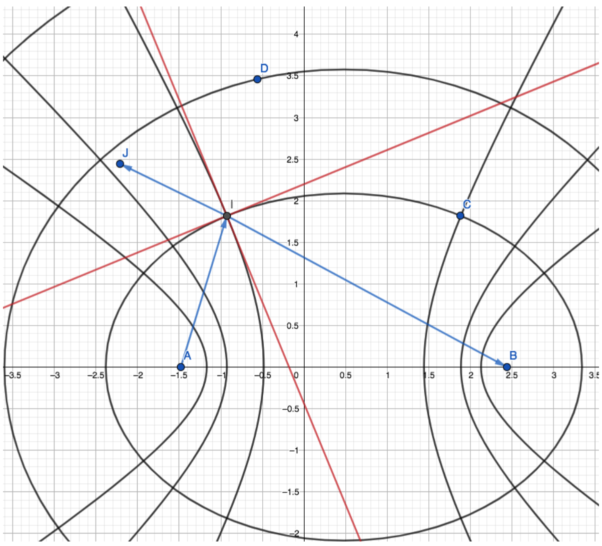


Рис. 11.

Лекция 2

2.1 Доказательство оптических свойств коника

2.1.1 Эллипс

Опр 1. Касательной прямой называется прямая, имеющая с коникой ровно одну точку и не параллельная оси (в случае параболы) и не параллельная ассимптотам (в случае гиперболы).

Вспомогательная задача: Дана прямая L, A и B $\notin$ L $\wedge$ X $\in$ L. Найти min(AX + XB).

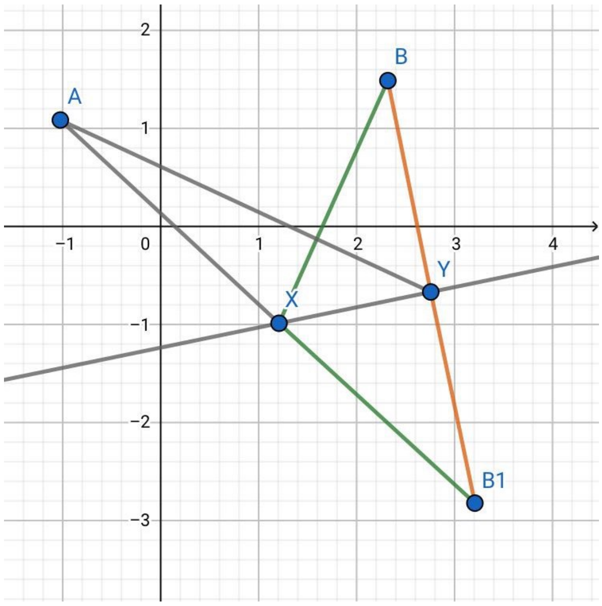


Рис. 12.

Решение:

1. B^1 симметрична точки B относительно прямой L.
2. Покажем, что min(AX + XB) достигается при X = AB^1 $\cap$ L.
3. Пусть Y $\neq$ X $\wedge$ Y $\in$ L $\implies$ |BY| = |B^1Y| (из равенства соответствующих треугольников) $\implies$ |AY| + |BY| = |AY| + |B^1Y| > |AX| + |BX| (по неравенству треугольника) $\implies$ X – точка, в которой достигается min(AX + XB).
4. Из вышенаписанного следует, что луч света, выпущенный из A отразится в X и пойдет в B (по кратчайшему расстоянию). Иными словами $\angle$(AX, L) = $\angle$(BX, L).

Замечания:

1. Если Y внутри эллипса, то |YF_1| + |YF_2| < 2a
2. Если Y вне эллипса, то |YF_1| + |YF_2| > 2a

Доказательство оптического свойства эллипса

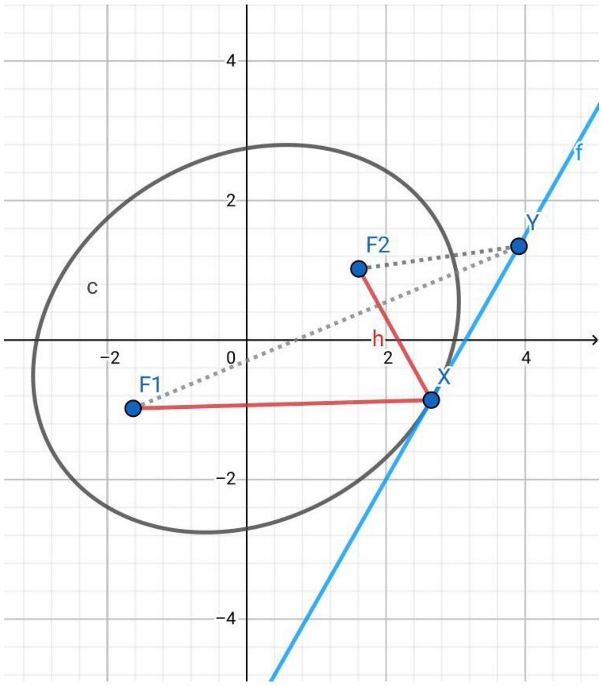


Рис. 13.

1. Пусть X – точка касания прямой L и эллипса. Пусть Y $\neq$ X $\wedge$ Y $\in$ L
$\implies$ $|YF_1| + |YF_2| > |XF_1| + |XF_2| = 2a \implies |XF_1| + |XF_2| \to \min$
2. Угол падения равен углу отражения □

2.1.2 Парабола

1. Пусть F – фокус, d – директриса, P – парабола, p – ось, Y $\in$ d $\wedge$ XY $\perp$ d
2. $l \perp YF \wedge \rho(F,l) = \rho(Y,l) \implies X \in l$ (так как в равнобедренном треугольнике медиана совпадает с высотой)
3. Докажем, что l – касательная. $l \nparallel p$ так как иначе $YF \parallel d \wedge Y \in d$?!

4. Пусть $l \cap P = X_1 \neq X$. Пусть $X_1Y_1 \perp d \wedge Y_1 \in d$.
5. $|X_1Y_1| = |X_1F|$ по свойству параболы. С другой стороны $X_1 \in l \implies |X_1F| = |X_1Y|$ так как X_1 лежит на срединном перпендикуляре $|X_1Y| = |X_1Y_1|$
$\implies Y = Y_1 \implies l \cap P = X$ и других точек нет так как перпендикуляр восстановленный из директрисы однозначно определяет точку на параболе.
6. $\triangle FXH = \triangle YXH$ как равнобедренные прямые $\angle YXH = \angle HXF = \angle\alpha$ (как углы при биссектрисе и вертикальные). Имеем: угол падения равен углу отражения □

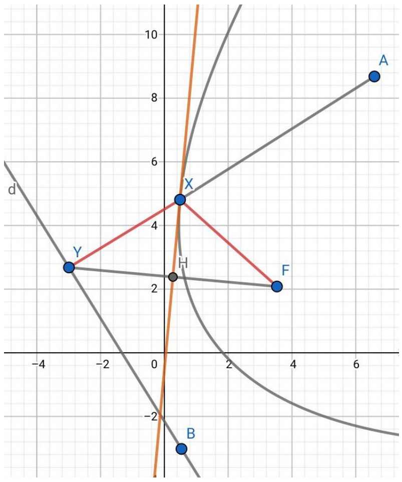


Рис. 14.

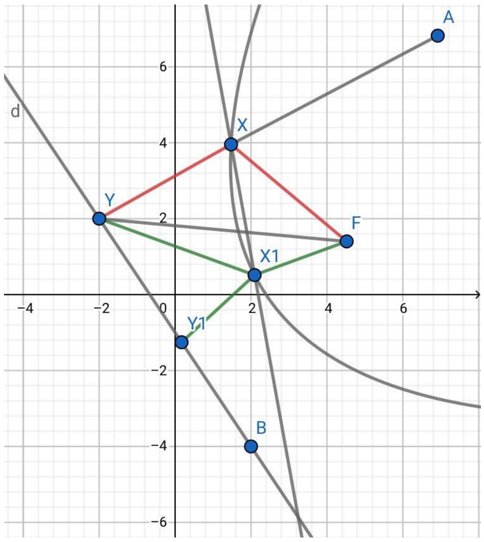


Рис. 15.

2.2 Ортогональные системы координат

2.2.1 Конфакальные коники

Опр 2. Угол под которым пересекаются кривые есть угол между касательными к ним, проведенными в точке пересечения.

Утв 1. Конфакальные эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.

Доказательство

1. $2\alpha + 2\beta = \pi \implies \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Утв 2. Параболы с общим фокусом и осью либо не пересекаются, либо пересекаются

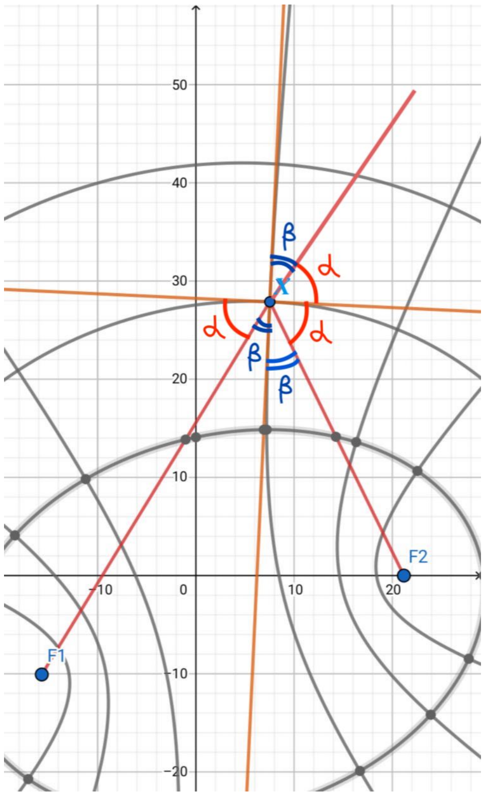


Рис. 16.

под прямым углом.

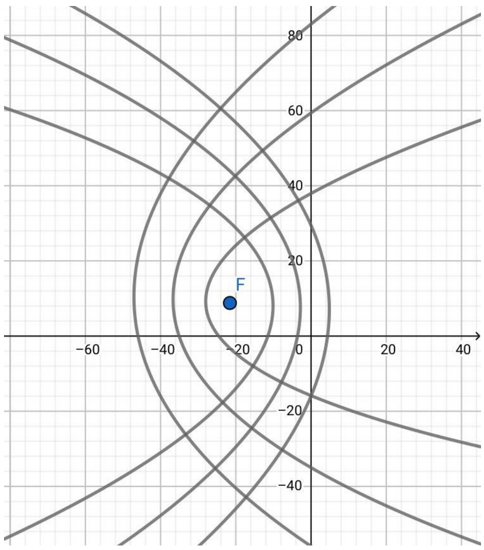
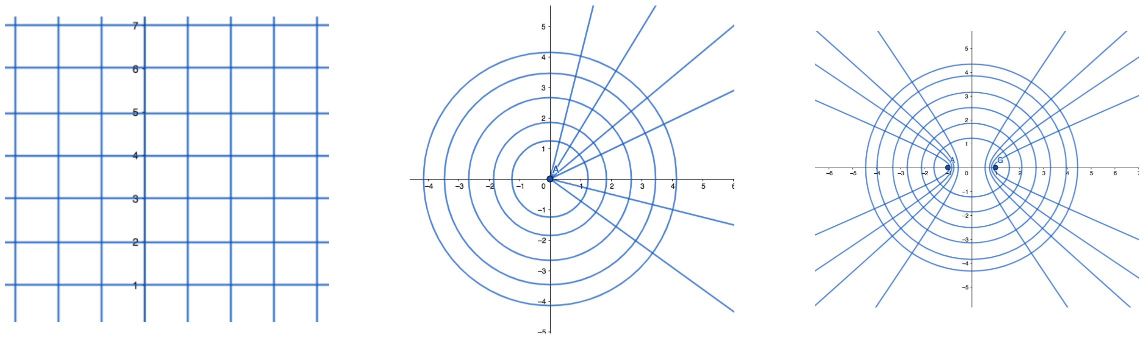


Рис. 17.

2.2.2 Ортогональные системы координат

В заданной системе координат по паре чисел можно построить точку. Координаты могут быть определены не на всем множестве точек (в полярных координатах не определена точка начала координат). Если фиксировать одну координату и менять другую, то будем получать координатные линии.

1. В декартовой системе координатные кривые ортогональны и образуют сетку (a)
2. В полярной системе координатные кривые ортогональны и образуют радиально-кольцевую систему (b)
3. В эллиптической системе координатные кривые ортогональны (Утв 1.) и образуют картину (c)



(a) (b) (c)

Рис. 18.

2.3 Аналитический подход Декарта

Опр 3. Эллипсом называется множество точек, координаты которых в некоторой ортогональной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b$. $(*)$

Вывод из геометрического определения алгебраического

1. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$
$\implies \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
$\implies (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$
$\implies a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$
$\implies a^2 \times ((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$
$\implies a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$

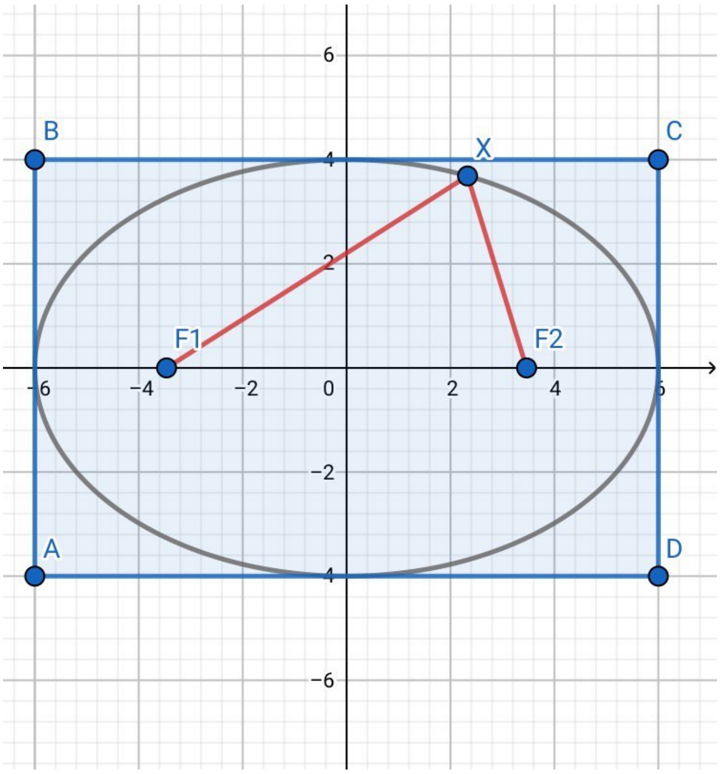


Рис. 19.

$\implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$
2. Получим уравнение $(*)$ для $b = \sqrt{a^2 - c^2}, b > 0$ т.к. $a > c$ (из геометрического определения) и $b \leq a$
3. Это обозначает, что точки, лежащие на эллипсе в выбранной системе координат удовлетворяют полученному уравнению $(*)$ для $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Докажем теперь, что все точки, удовлетворяющие этому уравнению, лежат на эллипсе.

Вывод из алгебраического определения геометрического

1. $\rho(X, F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = |\frac{c}{a}x + a| = a + ex$

2. $\rho(X, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = |\frac{c}{a}x - a| = a - ex$

3. $\rho(X, F_1) + \rho(X, F_2) = a + ex + a - ex = 2a = const$ ($e = \frac{c}{a}$ – эксцентреситет)

Лекция 3

3.1 Свойства коники

3.1.1 Свойства эллипса

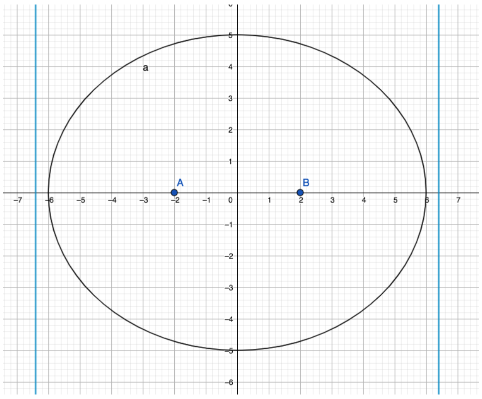


Рис. 20.

Свойства

1. $e = \frac{c}{a}$ – эксцентреситет
2. Если e = 0, то получим окружность.
3. Для эллипса $e \in (0; 1)$

$x = \pm\frac{a}{e}$ – директрисы (у окружности их нет)

$p = \frac{b^2}{a}$ – факальный параметр

3.1.2 Свойства гиперболы и ее аналитика

Опр 1. Гиперболой называется множество точек, координаты которых в некоторой ортогональной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$. (∗)

Ассимптоты: $y = \pm\frac{b}{a}x$
Фокусы: $F_{12} = (\mp c; 0), c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Вывод из алгебраического определения геометрического

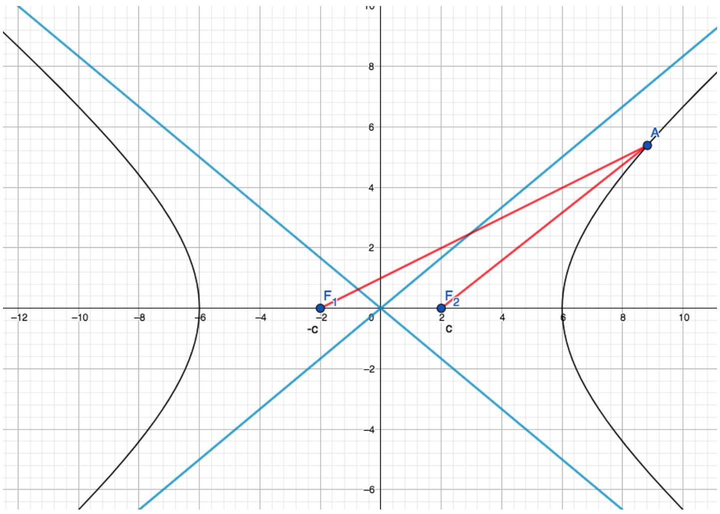


Рис. 21.

1. $AF_1 = \sqrt{(x+c)^+ y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} = |a + \frac{c}{a}x|$

2.
$$AF_1 = |a + \frac{c}{a}x| = \begin{cases} a + \frac{c}{a}x & \text{, правая ветвь} \\ -a - \frac{c}{a}x & \text{, левая ветвь} \end{cases}$$

3. Аналогично
$$AF_2 = |a + \frac{c}{a}x| = \begin{cases} -a + \frac{c}{a}x & \text{, правая ветвь} \\ a - \frac{c}{a}x & \text{, левая ветвь} \end{cases}$$

4. Правая ветвь: $|AF_1 - AF_2| = |2a| = 2a$
5. Левая ветвь: $|AF_1 - AF_2| = |-2a| = 2a$
6: Если (x, y) удовлетворяет $(*)$, то это точка гиперболы с фокусами F_1, F_2 и $|AF_1 - AF_2| = 2a$

Вывод из геометрического определения алгебраического

1. Пусть $F_1F_2 = 2c$, выберем середину в качестве начала координат.
2. $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}|$ – вывести $(*)\square$ самостоятельно.

Утв 1. Аналитическое и геометрическое определение гиперболы эквивалентны.

Свойства

1. $e = \frac{c}{a}$ – эксцентреситет

У гиперболы e > 1.

2. $x = \pm\frac{a}{e}$ – директрисы
3. $p = \frac{b^2}{a}$ – факальный параметр

3.1.3 Свойства параболы и ее аналитика

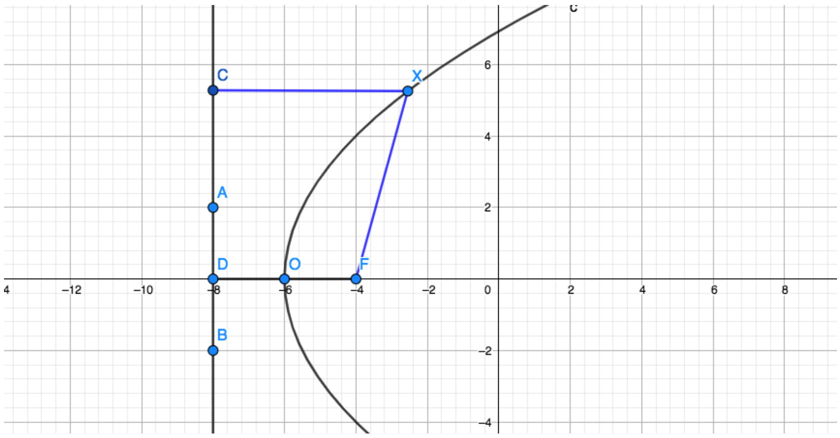


Рис. 22.

Вывод из геометрического определения алгебраического

1. Середина отрезка, опущенного из F перпендикулярно на директрису – начало координат. F = $(\frac{p}{2}; 0)$
2. $|XF| = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$
3. $\rho(X, d) = x + \frac{p}{2}$
4. $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$
$\implies (x-\frac{p}{2})^2 + y^2 = (x+\frac{p}{2})^2$
$\implies x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$
$\implies y^2 = 2px$
5. Значит точки параболы удовлетворяют этому уравнению.

Опр 2. Параболой называется множество точек, координаты которых в некоторой ортогональной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению
$y^2 = 2px$. $(*)$

Вывод из алгебраического определения геометрического

$|XF| = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+2px} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2} = |x+\frac{p}{2}| = x+\frac{p}{2} = \rho(X,d)\square$

Утв 2. Аналитическое и геометрическое определение параболы эквивалентны.

Свойства

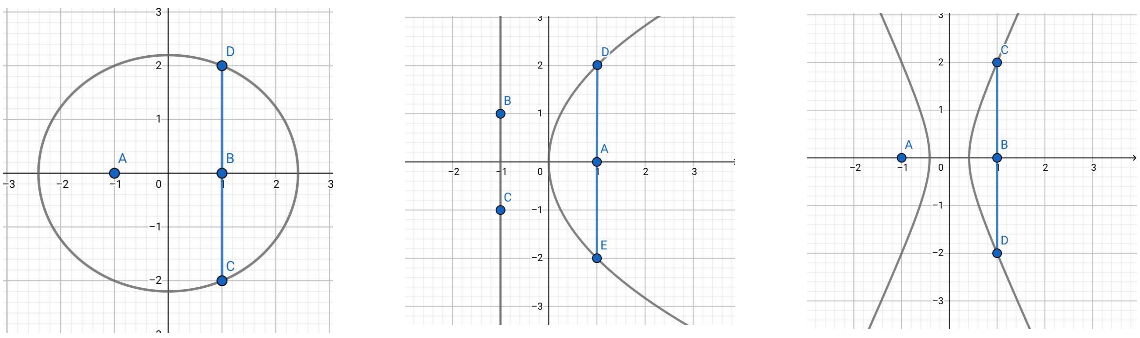
1. $F(\frac{p}{2};0)$ – фокус
2. $x=-\frac{p}{2}$ – директриса
3. p – факальный параметр
4. e = 1

3.1.4 Характеристические числа коники

1. Факальный параметр

Опр 3. Факальной хордой называется отрезок, проведенный из фокуса к веткам и нормальный главной оси коники.

Утв 3. Для любой коники факальный параметри равен половине длины факальной хорды.



(a) (b) (c)

Рис. 23.

Парабола: $y^2 = 2p\times\frac{p}{2} = p^2 \implies D=(\frac{p}{2};p) \implies \rho(D,(\frac{p}{2};0)) = p\square$

Эллипс: $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y^2 = b^2-\frac{b^2c^2}{a^2} \implies y^2 = b^2(\frac{a^2-c^2}{a^2}) \implies y^2=\frac{b^4}{a^2} \implies y = \frac{b^2}{a} \implies D=(c;\frac{b^2}{a}) \implies \rho(D,(c;0)) = \frac{b^2}{a}\square$

2. Директориальное свойство коники

Парабола: $\frac{\rho(X,F)}{\rho(X,d)} = 1 = e$

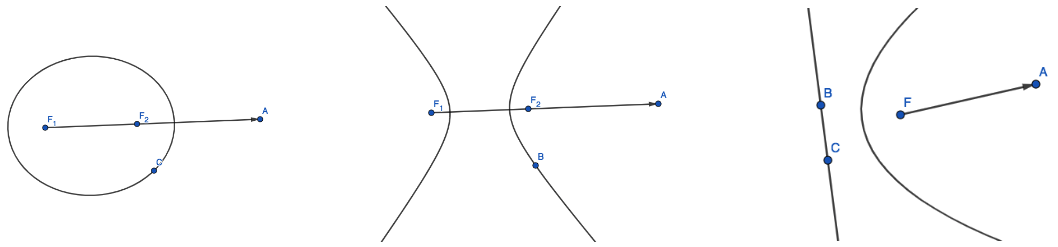
Эллипс: $\frac{\rho(X,F_1)}{\rho(X,d_1)} = \frac{a+\frac{c}{a}x}{\rho(X,d_1)} = \frac{a+ex}{\rho(X,d_1)} = \frac{a+ex}{x+\frac{a}{e}} = \frac{a+ex}{x+\frac{a}{e}} = \frac{a+ex}{\frac{1}{e}(a+ex)} = e$

3.1.5 Уравнение коники в полярных координатах

Полярная система координах Задается точкой (полюсом) и лучом, который из нее выходит (полярной осью). Первая координата – $\rho = |OA| > 0$. Вторая координата – $\angle\phi$ угол между отрезком |OA| и положительно направленной осью.

Замечания:

1. У полюса не определен $\angle\phi$
2. $\angle\phi$ определен с точностью до 2π



(a) (b) (c)

Рис. 24.

Эллипс: полюс – F_1, полярная ось через F_2 (a)
Гипербола: полюс – F_1, полярная ось через F_2 (b)
Парабола: полюс – F, полярная ось вдоль оси параболы (c)

Утв 3. В полярных координатах, выбранных указанным способом кравнения эллипса, параболы и правой ветви гиперболы будет иметь вид:

$\rho = \frac{p}{1-e\cos\phi}$

и уравнение левой ветви гиперболы будет иметь вид:

$\rho = \frac{p}{1+e\cos\phi}$

Доказательство (используем директориальное свойство) (*Рис. 25*)

1. Рассмотрим эллипс. $X = (\rho, \phi)$
2. $|XF_1| = r; \rho(F_1, d) = \frac{a}{e} - c$
3. $\rho(X, d) = \frac{a}{e} - + \cos\phi$
4. $\frac{|XF_1|}{\rho(X,d)} = e \iff \frac{r}{\frac{a}{e} - + \cos\phi} = e \implies r = a - ec + er\cos\phi \implies r = \frac{a-ec}{1-e\cos\phi} \implies r = \frac{a-ec}{1-e\cos\phi} \implies r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\phi} \implies r = \frac{p}{1-e\cos\phi}\square$

Упр* Вывести директориальное свойство коники через шары Данделена.

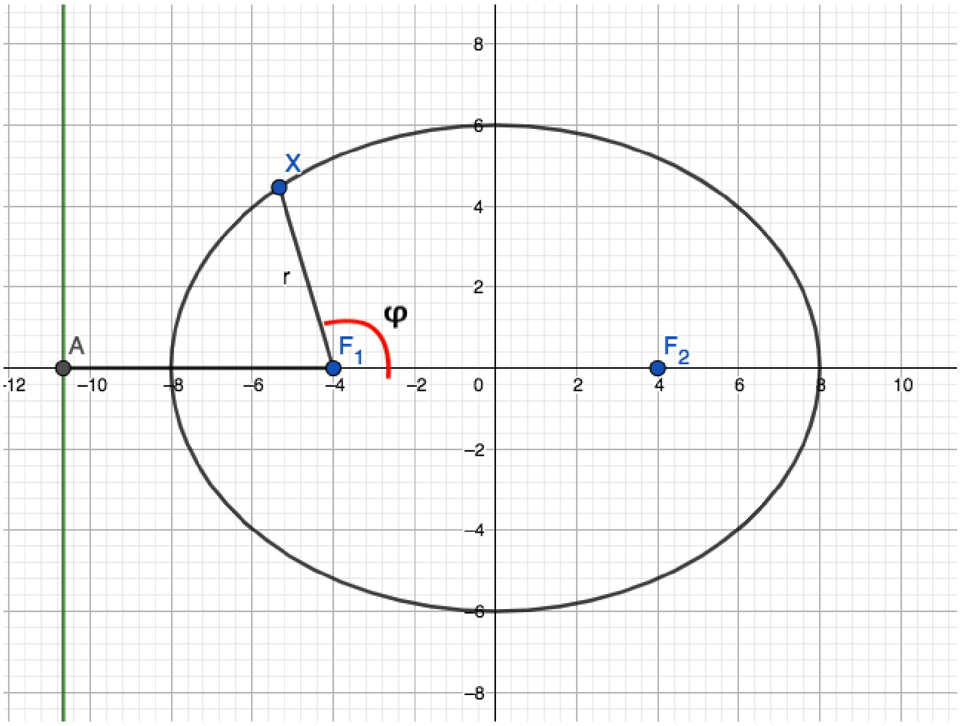


Рис. 25.

Лекция 4

4.1 Векторная алгебра

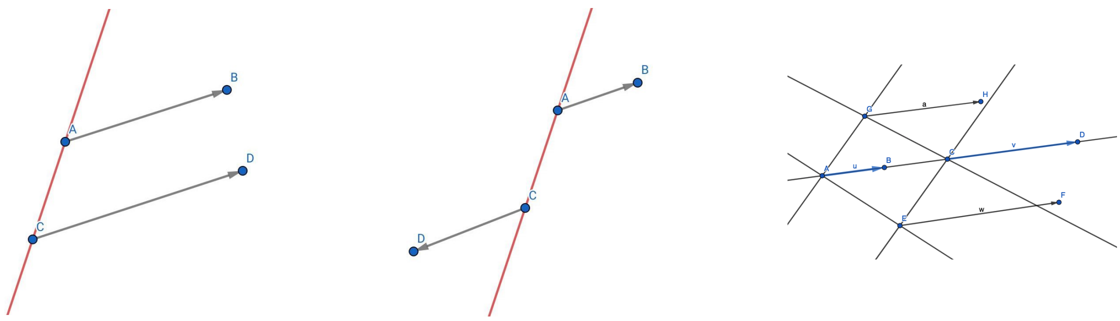
4.1.1 Понятие вектора в двумерном пространстве

Опр 1. Направленным отрезком называется упорядоченныя пара точек - [AB].

Опр 2. [AB] и [CD] коллинеарны (параллельны), если прямые AB и CD параллельны или совпадают.

Опр 3. Длиной направленного отрезка AB называется длина соответствующего отрезка AB.

Опр 4. Если [AB] и [CD] коллинеарны и не лежат на одной прямой, то [AB] и [CD] сонаправлены, если B и D лежат по одну сторону от прямой AC (a) и противоположно направлены, если B и D лежат по разные стороны от прямой AC (b).
Если [AB] и [CD] коллинеарны и лежат на одной прямой, то [AB] и [CD] сонаправлены, если они сонаправлены с направленным отрезком, не лежащим на прямой AB (c).



(a) (b) (c)

Рис. 26.

Доказательство

1. Пусть [AB] и [CD] сонаправлены с [EF], не лежащим на прямой AB.
2. Пусть [AB] и [GH] сонаправлены и [GH] не лежит на одной прямой с [AB], тогда докажем, что [CD] и [GH] сонаправлены
3. AB и CD лежат на одной прямой, $EF \| AB \| GH$. B и F лежат по одну сторону от AE. D и F лежат по одну сторону от EC. D и H лежат по одну сторону от AG. Доказать, что H и D лежат по одну сторону от GC. – Упр

Опр 5. [AB] $\sim$ [CD] если они
1. Сонаправлены
2. Коллинеарны
3. Равной длины

Опр 6. Вектор – класс эквивалентности относительно Опр 5. эквивалентности

Особый случай. Класс эквивалентности [AA] называется нулевым вектором
1. [AA] коллинеарен любому направленному отрезку
2. Сонаправленность у [AA] не определена
3. [AA] $\sim$ [BB] $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$

Обозначение векторов: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ - класс эквивалентности AB.

Опр 7. Два вектора коллинеарны, если их предстваители коллинеарны. ($\overrightarrow{0}$ коллинеарен любому вектору)

4.1.2 Понятие вектора в трехмерном пространстве

В $\mathbb{R}^3$ [AB] - направленный отрезок.
Коллинеарность определяется аналогично

Опр 8. Коллинеарные направленные отрезки [AB] и [CB] сонаправлены, если после параллельного переноса, переводящего C в A, образ D и B лежат на прямой AB по одну сторону от A (если вектора лежат на одной прямой, то перенесем один из них на параллельную прямую и затем применим Опр. 8)

Опр 9. Определение коллинеарности сохраняется из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$

Опр 10. Три вектора компланарны, если их представители параллельны одной плоскости.

4.1.3 Операции с векторами

1. Умножение на число: $\overrightarrow{a}$ – вектор $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda\overrightarrow{a} = \begin{cases} \overrightarrow{0}, \text{если } \lambda = 0 \vee \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \\ \lambda\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}, \text{если } \lambda > 0 \\ \lambda\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{a}, \text{если } \lambda < 0 \end{cases}$$

2. Сложение: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ – векторы, [AB] – представитель $\overrightarrow{a}$,[BC] – представитель $\overrightarrow{b}$. Тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ определен как класс [AC]
Нужно проверить независимость от выбора представителя – Упр

Опр 11. $-\overrightarrow{a} := (-1) \times \overrightarrow{a}$

Свойства сложения и умножения
1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ – коммутативность сложения
2. $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ – ассоциативность сложения
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$ – нейтральный элемент по сложению
4. $\overrightarrow{a} + (-1) \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ – существования обратного элементы по сложению
5. $(\alpha\beta)\overrightarrow{a} = \alpha(\beta\overrightarrow{a}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – ассоциативность умножения
6. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность умножения относительно сложения
7. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\alpha = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность сложения относительно умножения
8. $1 \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ – нейтральный элемент по умножению

Опр 12. Линейной комбинацией векторов $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$ называется $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{a_k},\ (\lambda_i \in \mathbb{R})$

Опр 13. Линейная комбинация векторов $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$ назвается тривиальной, если $\lambda_i = 0\ \forall i \in (\overline{1, 2, \ldots, k})$ и нетривиальной в противном случае

Опр 14. Система векторов $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$ назвается линейно зависимой $\iff \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \ \Big| \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_k \neq 0 \ \Big| \ \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = 0$

Опр 15. Система векторов $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$ назвается линейно независимой, $\iff \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k\ \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$

Утв 1. Вектора $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ линейно зависимы $\iff \overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$

Доказательство ($\Longrightarrow$)
$\lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{b} = 0 \implies \overrightarrow{a} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\overrightarrow{b}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$
Без ограничения общности пусть $\lambda_2 \neq 0)\square$
Доказательство ($\Longleftarrow$)
Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны, тогда рассмотрим 4 случая:
a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \implies 1 \times \overrightarrow{a} + 0 \times \overrightarrow{b} = 0 \implies \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линейно зависимы $\square$
b) $\overrightarrow{a} = 0, \overrightarrow{b} \neq 0 \implies 1 \times \overrightarrow{a} + 0 \times \overrightarrow{b} = 0 \implies \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линейно зависимы $\square$

c) $\overrightarrow{a} \neq 0,\, \overrightarrow{b} = 0 \implies 0 \times \overrightarrow{a} + 1 \times \overrightarrow{b} = 0 \implies \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линейно зависимы $\square$

d) $\overrightarrow{a} \neq 0,\, \overrightarrow{b} \neq 0 \implies$ возьмем точку А и отложим от нее представителей $\implies$

$\overrightarrow{a} = \frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}$ если сонаправлены

$\overrightarrow{a} = -\frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}$ если не сонаправлены

$\implies |\overrightarrow{b}| \times \overrightarrow{a} \mp |\overrightarrow{a}| \times \overrightarrow{b} = 0 \implies \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линейно зависимы $\square$

<u>Утв 2.</u> Вектора $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ линейно зависимы $\iff \exists \pi \;\Big|\; \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \pi$

Лекция 5

5.1 Линейная зависимость и независимость

Лемма 1. Если среди векторов $v_1, \dots, v_n$ есть $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимая подсистема, то и система $v_1, \dots, v_n$ линейно зависима.

Доказательство

1. Пусть $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$, где $\exists \alpha_i \neq 0$
2. Запишем следующую линейную комбинацию:

$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + 0 \times v_{k+1} + \cdots + 0 \times v_n = 0$ где $\exists \alpha_i \neq 0$ $\square$

Лемма 2. Если среди векторов $v_1, \dots, v_n$ есть $\overrightarrow{0}$ то система $v_1, \dots, v_n$ линейно зависима.

Доказательство

Запишем следующую линейную комбинацию:

$0 \times v_1 + \cdots + \alpha \times \overrightarrow{0} + \ldots + 0 \times v_n = 0$ где $\alpha \neq 0$ $\square$

Утв 1. Вектора a и b линейно зависимы $\iff$ они коллинеарны.

Утв 2. Три вектора линейно зависимы $\iff$ они компланарны.

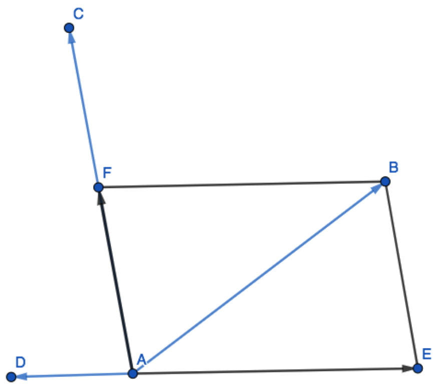


Рис. 27.

Доказательство

$(\Longrightarrow)$

1. Из условия линейной зависимости $\Longrightarrow$ $\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AD} + \lambda_3 \overrightarrow{AC} = 0$, где какой-либо из $\lambda_{1,2,3} \neq 0$ Без ограничения общности положим $\lambda_1 \neq 0$ и $\overrightarrow{AB} = \mu_1 \overrightarrow{AD} + \mu_2 \overrightarrow{AC}$ 2.

$\overrightarrow{AB}$ есть диагональ параллелограмма, натянутого на векторы $\mu_1\overrightarrow{AD}$ и $\mu_2\overrightarrow{AC}$, которые соответственно коллинеарны векторам $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$, значит $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$ лежат в плоскости того же параллелограмма $\square$.

$(\Longleftarrow)$
(a) Пусть какая-то пара коллинеарна $\Longrightarrow$ Утв 1. $\Longrightarrow$ они линейно зависимы $\Longrightarrow$ Лемма 1. $\Longrightarrow$ все три так же линейно зависимы.
(b) Пусть никакая пара не коллинеарна
1. Пусть $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ компланарны $\Longrightarrow$ они лежат в одной плоскости.
2. Тогда выразим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \mu_1\overrightarrow{AD} + \mu_2\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 1 \times \overrightarrow{AB} - \mu_1\overrightarrow{AD} - \mu_2\overrightarrow{AC} = 0$
$\square$

<u>Утв 3.</u> $\forall$ 4 вектора в $\mathbb{R}^3$ линейно зависимы.
<u>Доказательство</u>
1. Пусть a, b, c компланарны $\Longrightarrow$ Утв 2. $\Longrightarrow$ линейно зависимы $\Longrightarrow$ Лемма 1. $\Longrightarrow$ a, b, c, d – линейно зависимы.
2. Пусть a, b, c не компланарны

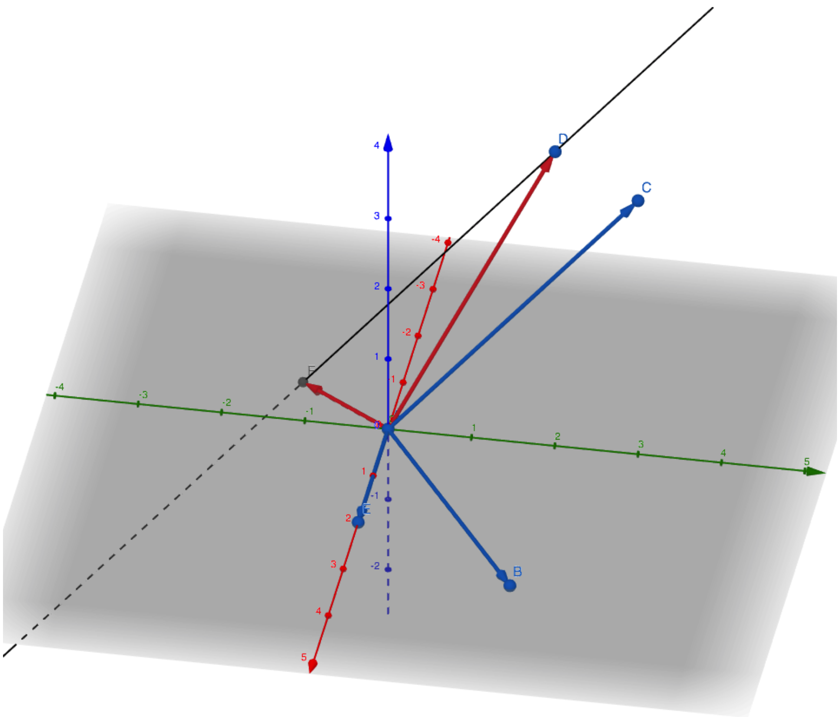


Рис. 28.

1. Проведем через точку D прямую, параллельную $\overrightarrow{AC}$, она пересечет плоскость, порожденную $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ в точке F.
2. $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AE}$ из Утв 2. 3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \gamma\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AE} + \gamma\overrightarrow{AC}$ $\square$

5.2 Базис

Опр 1. Базисом в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, и $\mathbb{R}^3$ пространстве называется упорядоченный набор из 1, 2, 3 независимых векторов соответственно.

Утв 4. Любой вектор может быть единственным образом записан в виде линейной комбинации базисных векторов.

Доказательство $\mathbb{R}^3$

1. e_1, e_2, e_3 - базисные векторы.
2. По Утв 3. e_1, e_2, e_3 и a линейно зависимы $\implies \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 a = 0$
3. Если $\lambda_4 = 0$ то e_1, e_2, e_3 линейно зависимы, что противоречит определению базиса $\implies a = -\frac{\lambda_1}{\lambda_4} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4} e_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} e_3$
4. Пусть $a = -\mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 - \mu_3 e_3$, где $\mu_{1,2,3} \neq \frac{\lambda_{1,2,3}}{\lambda_4} \implies a = -\mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 - \mu_3 e_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_4} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4} e_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} e_3 \implies (\mu_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_4}) e_1 + (\mu_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4}) e_2 + (\mu_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4}) e_3 = 0$, (где коэффиценты ненулевые), что противоречит определению базиса $\implies$ разложение единственно $\square$

Опр 2. e_1, e_2, e_3 – базис, $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ – вектор. Числа a_1, a_2, a_3 при e_1, e_2, e_3 называются координатами (компонентами) а.

Опр 3. Если векторы базиса попарно ортогональны, то такой базис называется ортогональным.

Опр 4. Если векторы базиса попарно ортогональны и единичной длины то такой базис называется ортонормированным (обозначается о/н).

5.3 Связь координат с операциями

Утв 5. Пусть e_1, e_2, e_3 – базис $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$.
Тогда $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$; $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Доказательство

1. $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \implies$
$a + b = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = (a_1 + b_1) e_1 + (a_2 + b_2) e_2 + (a_3 + b_3) e_3 \implies$
$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2. $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \implies \lambda a = \lambda a_1 e_1 + \lambda a_2 e_2 + \lambda a_3 e_3 \implies a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ $\square$

5.4 Точки и векторы. Афинное пространство

Опр 5. A – точка, $\overrightarrow{AB}$ – представитель класса эквивалентности a. A + $\overrightarrow{AB}$ = B.

Опр 6. A, B – точки, A - B = $\overrightarrow{BA}$.

Свойство $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BA}$ = $\overrightarrow{AC}$

Опр 7. Афинное пространство – множество точек, объединенное с векторным пространством.

Опр 8. Репером называется базис и точка (начало координат) в афинном пространстве.

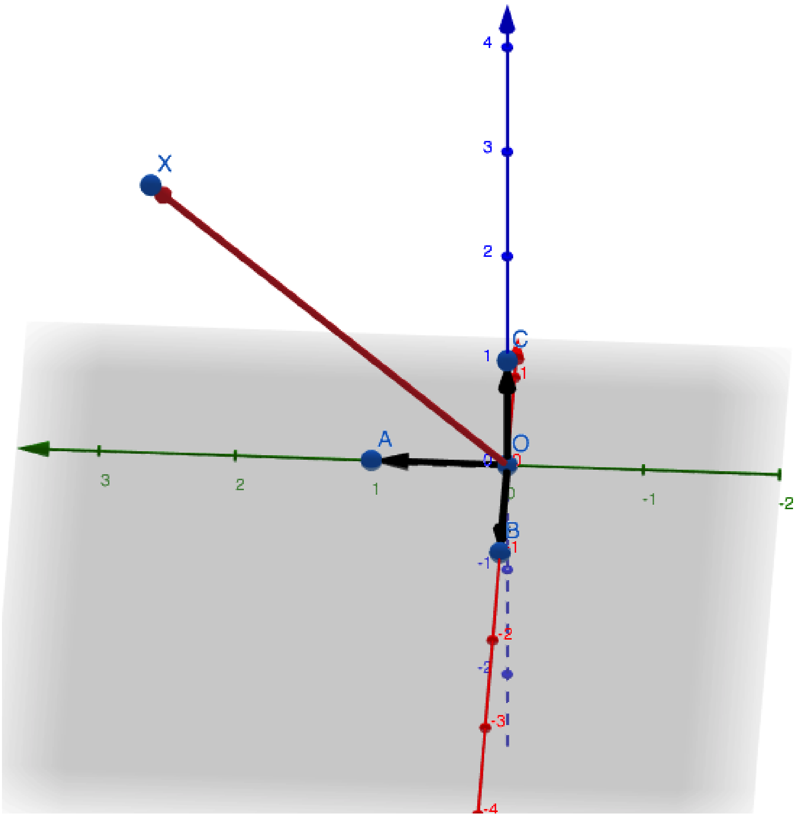


Рис. 29.

Тогда у точки X вектор $\overrightarrow{OX}$ раскладывается по базису e_1, e_2, e_3,
где $e_1 = \overrightarrow{OA}, e_1 = \overrightarrow{OB}, e_3 = \overrightarrow{OC}$.

Опр 9. Координаты вектора $\overrightarrow{OX}$ в базисе e_1, e_2, e_3 называются координатами точки X в системе координат, определенной репером {O, e_1, e_2, e_3}.

Опр 10. Система координат называется ортогональной если соответствующий базис ортонормированный.

5.5 Деление отрезка в заданном отношении

Опр 11. Точка $X \in AB$ делит отрезок АВ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$, если $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{\lambda}{\mu}$.

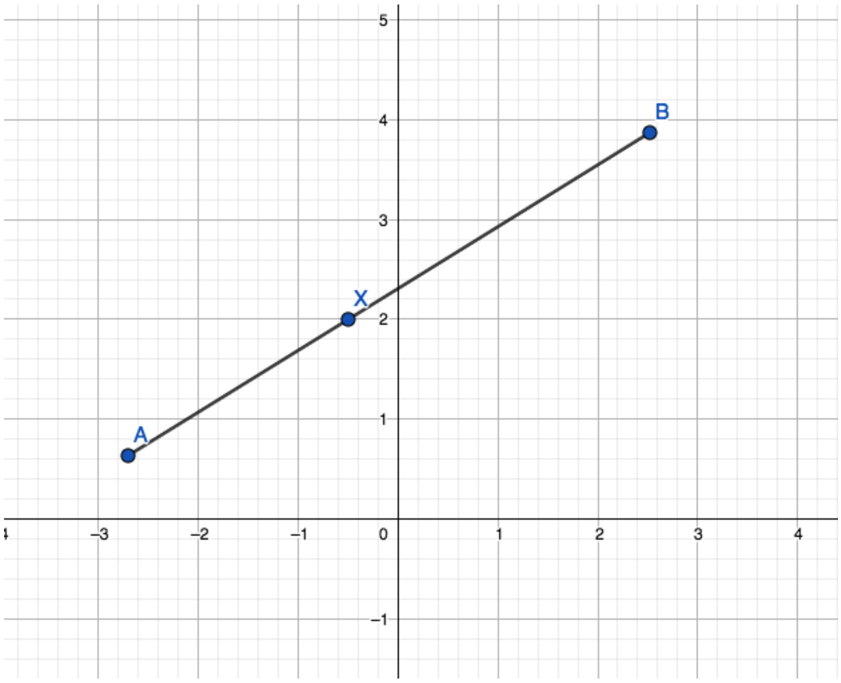


Рис. 30.

Пусть А имеет координаты (a_1, a_2, a_3) и В имеет координаты (b_1, b_2, b_3) в некоторой, не обязательно прямоугольной, системе координат.

1. $X = (x_1, x_2, x_3) \implies$
   $\overrightarrow{AX} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3)$
   $\overrightarrow{XB} = (x_1 - b_1, x_2 - b_2, x_3 - b_3)$
2. $\mu\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB} \implies \forall i \; \mu(x_i - a_i) = \lambda(b_i - x_i) \implies x_i = \frac{\mu a_i + \lambda b_i}{\mu + \lambda}$

Утв 5. Если X делит АВ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$ то $\forall i \; x_i = \frac{\mu \; a_i + \lambda b_i}{\mu + \lambda} (*)$

Замечание Можно по формуле $(*)$ определить деление отрезка в любом отношении $\frac{\lambda}{\mu}$ при условии $\mu + \lambda \neq 0$.

5.6 Скалярное произведение

Опр 12. Скалярное произведение векторов a и b есть число $(a, b) = |a| \times |b| \times \cos(\phi(a, b))$, где $\phi(a, b)$ – угол между векторами a и b.

Утв 6. Если (e_1, e_2) – ортонормарованный базис и вектор $a = a_1e_1 + a_2e_2$, то $a = a\cos(\phi)e_1 + a\cos(\phi)e_2$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. (a, b) = (b, a) – симметричность, из определения очевидно
2. (a + b, c) = (a, c) + (b, c)
3. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$
4. $(a, a) = a^2$

Свойства 2 и 3 означают линейность функции скалярное произведение

Доказательства

1. $(a, b) = |a| \times |b| \times \cos(\phi(a, b)) = |b| \times |a| \times \cos(\phi(b, a)) = (b, a)\square$
2. Если c = 0 $\implies 0 = 0$

   $c \neq 0$. Выберем ортонормированный базис, такой, что первый вектор $e_1 = \frac{c}{|c|} \implies$ $(a + b, c) = (a + b, |c|e_1) = |c|(a + b, e_1) =$ (по Утв. 6) $= |c| \times (a_1 + b_1) \times \cos(\phi(a, b) =$ $|c| \times (ae_1 + be_1) \times \cos(\phi(a, b) = a|c|e_1 \times \cos(\phi(a, b) + b|c|e_1 \times \cos(\phi(a, b) =$ $ac \times \cos(\phi(a, b) + bc \times \cos(\phi(a, b) = (a, c) + (b, c)\ \square$
3. Рассмотрим случаи:
   (a) $\lambda = 0 \implies 0 = 0$
   (b) $\lambda > 0 \implies |\lambda a| = \lambda|a|, \phi(\lambda a, b) = \phi(a, b) \implies$
   $(\lambda a, b) = \lambda|a| \times |b| \times \cos(\phi(a, b)) = \lambda(a, b)$
   (c) $\lambda < 0 \implies |\lambda a| = |\lambda||a| = -\lambda|a|, \phi(\lambda a, b) = \pi - \phi(a, b) \implies$
   $(\lambda a, b) = -\lambda|a| \times |b| \times (-\cos(\phi(a, b))) = \lambda(a, b)\ \square$
4. $(a, a) = |a| \times |a| \times \cos(\phi(a, a)) = |a| \times |a| \times 1 = a^2\square$

Утв 7. Свойства 1, 2, 3, 4 определяют скалярное произведение однозначно

Доказательство

$(a+b)^2 = (4) = (a+b, a+b) = (2) = (a, a+b)+(b, a+b) = (1) = (a+b, a)+(a+b, b) = (2) = (a, a) + (b, a) + (a, b) + (b, b) = (1, 4) = a^2 + 2(a, b) + b^2 \implies (a, b) = \frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$

Выразили скалярное произведение через длину.

Зададим скалярное произведение следующими аксиомами:

1. Симметричность
2. Линейность
3. $(a, a) >= 0$ и $(a, a) = 0 \iff a = 0$

Тогда $|a| = \sqrt{(a, a)}, \cos(\phi) = \frac{(a,b)}{|a||b|}$

Лекция 6

6.1 Скалярное произведение

Опр 1. (геометрическое) Скалярным произведением двух векторов a и b в прямоугольной декартовой системе координат называется величина $(a, b) = |a| \times |b| \times \cos\phi$, где ϕ – угол между векторами.

Опр 2. (аналитическое для $\mathbb{R}^2$)
Пусть (e_1, e_2) – ортонормированный базис.
$a = (a^1, a^2)$ в базисе e_1, e_2
$b = (b^1, b^2)$ в базисе e_1, e_2
$(a, b) = (a^1e_1 + a^2e_2, b^1e_1 + b^2e_2) = (a^1e_1, b^1e_1 + b^2e_2) + (a^2e_2, b^1e_1 + b^2e_2) =$
$= a^1(e_1, b^1e_1 + b^2e_2) + a^2(e_2, b^1e_1 + b^2e_2) = a^1(b^1e_1 + b^2e_2, e_1) + a^2(b^1e_1 + b^2e_2, e_2) =$
$= a^1(b^1e_1, e_1) + a^1(b^2e_2, e_1) + a^2(b^1e_1, e_2) + a^2(b^2e_2, e_2) =$
$= a^1b^1(e_1, e_1) + a^1b^2(e_2, e_1) + a^2b^1(e_1, e_2) + a^2b^2(e_2, e_2) = a^1b^1 + a^2b^2$

Опр 3. (аналитическое для $\mathbb{R}^3$)
Пусть (e_1, e_2, e_3) – ортонормированный базис.
$a = (a^1, a^2, a^3)$ в базисе (e_1, e_2, e_3)
$b = (b^1, b^2, b^3)$ в базисе (e_1, e_2, e_3)

Аналогично Опр 2. получим $(a, b) = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$

Утв 1. [$\mathbb{R}^3$]
В ортонормированном базисе $(e_1, e_2[, e_3])$ скалярное произведение равно
$(a, b) = a^1b^1 + a^2b^2[+a^3b^3]$
$a = (a^1, a^2[, a^3])$
$b = (b^1, b^2[, b^3])$

Следствие 1.
Длиной (мерой) $\mu(a)$ называется $\nu(a) = \sqrt{(a, a)}$

Следствие 2. [$\mathbb{R}^3$]
Косинусом угла между двумя векторами в ортонормированном базисе $(e_1, e_2[, e_3])$
называется

$$\cos\phi = \frac{a^1b^1 + a^2b^2[+a^3b^3]}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2[+(a^3)^2]} \times \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2[+(b^3)^2]}}$$

$a = (a^1, a^2[, a^3])$ $b = (b^1, b^2[, b^3])$

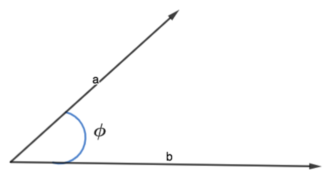


Рис. 31.

6.2 Ориентированная площадь

Пусть дан параллелограмм, порожденный векторами a и b.

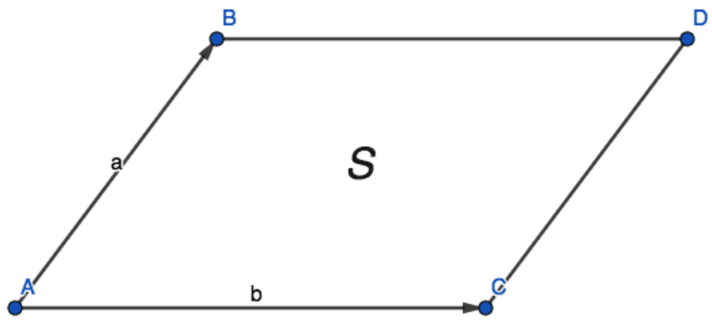


Рис. 32.

$$S = |a||b|\sin\phi = |a||b|\sqrt{1-\cos\phi^2} = |a||b|\sqrt{1-\frac{(a,b)^2}{|a|^2|b|^2}} = \sqrt{|a|^2|b|^2-(a,b)^2} =$$

$$= \sqrt{[(a^1)^2+(a^2)^2][(b^1)^2+(b^2)^2]-[a^1b^1+a^2b^2]^2} =$$

$$= [(a^1)^2(b^1)^2+(a^1)^2(b^2)^2+(a^2)^2(b^1)^2+(a^2)^2(b^2)^2-(a^1b^1)^2-2a^1b^1a^2b^2-(a^2b^2)^2]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= [(a^1b^2)^2-2a^1b^1a^2b^2+(a^2b^1)^2]^{\frac{1}{2}} = [(a^1b^2-a^2b^1)^2]^{\frac{1}{2}} = \pm(a^1b^2-a^2b^1) = \pm\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$$

Утв 2.
Площадь S параллелограмма, натянутого на вектора a и b равна

$$S = \pm\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$$

где $a = (a^1, a^2)$, $b = (b^1, b^2)$ в ортонормированном базисе.

Опр 4. Ориентированная площадь <a, b> векторов a и b есть число

$$< a, b >= \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$$

где $a = (a^1, a^2)$, $b = (b^1, b^2)$ в ортонормированном базисе (e_1, e_2)

Утв 3.
Ориентированная площадь оюладает следующими свойствами:

Свойства
1. $< b, a >= - < a, b >$
2. $< a + b, c >=< a, c > + < b, c >$
3. $< \overrightarrow{a}, \lambda \overrightarrow{b} >= \lambda < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} >$
4. $< a, a >= 0$

Опр 5. Пара неколлинеарных векторов a и b на плоскости положительно (отрицательно) ориентирована относительно базиса (e_1, e_2), если ориентированная площадь $< a, b >$ положительна (отрицательна).
Замечание 1. Определение корректно так как для неколлинеарных векторов $S \neq 0$.
Замечание 2. a и b неколлинеарны $\iff$ a и b образуют базис.
Замечание 3. Мы определяем положительную и отрицательную ориентацию базиса a и b относительно базиса (e_1, e_2).

Утв 4.
Базис a и b положительно (отрицательно) ориентирован относительно базиса (e_1, e_2) $\iff$ его можно непрерывно деформировать в (e_1, e_2) $((e_1, -e_2))$
Замечание Что такое непрерывная деформация
Пусть $a(t), b(t)$ – семейство векторов, непрерывно зависящих от t, тогда
1. $a^1(t), a^2(t), b^1(t), b^2(t)$ – непрерывные функции
2. $a(0) = a$
$b(0) = b$
$a(1) = e_1$
$b(1) = \pm e_2$
3. $\forall t \in [0; 1]$ $a(t), b(t)$ – базис

Доказательство ($\Longleftarrow$)
(Положительная ориентация)

Пусть существует описанная деформация. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 =< e_1, e_2 >> 0$

$$f(t) =< a(t), b(t) >= \begin{vmatrix} a^1(t) & a^2(t) \\ b^1(t) & b^2(t) \end{vmatrix} = a^1(t)b^2(t) - a^2(t)b^1(t)$$

$f(t)$– непрерывная функция.
Тогда $f(1) =< e_1, e_2 >= 1 > 0$
1. Хотим доказать, что $< a, b >> 0$.
2. Предположим $< a, b >= f(0) =< a(0), b(0) >= f(0) < 0$
3. По теореме Вейштрасса о промежуточном значении $\exists t_0 \in (0; 1) f(t_0) = 0 \implies <$

$a(t_0), b(t_0) >= 0 \implies a(t_0), b(t_0)$ – линейно зависимы, то есть не образуют базис ?! $\implies < a, b >> 0$, то есть <a, b> положительно ориентирована относительно (e_1, e_2).

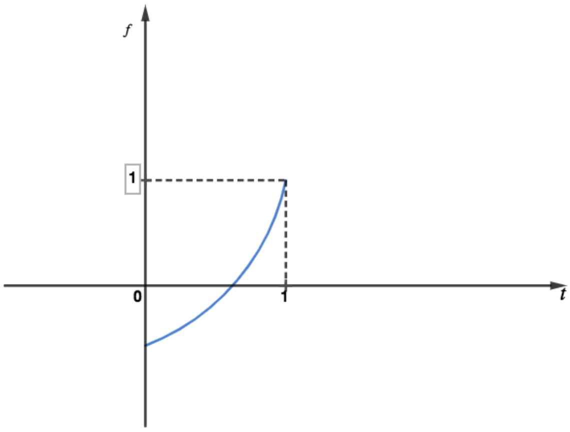


Рис. 33.

(Отрицательная ориентация)

Пусть существует описанная деформация. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 =< e_1, -e_2 >< 0$

Тогда $f(1) =< e_1, -e_2 >= -1 < 0$
1. Хотим доказать, что $< a, b >< 0$.
2. Предположим $< a, b >= f(0) =< a(0), b(0) >= f(0) > 0$
3. По теореме Вейштрасса о промежуточном значении $\exists t_0 \in (0;1) f(t_0) = 0 \implies < a(t_0), b(t_0) >= 0 \implies a(t_0), b(t_0)$ – линейно зависимы, то есть не образуют базис ?! $\implies < a, b >< 0$, то есть <a, b> отрицательно ориентирована относительно $(e_1, -e_2)$.

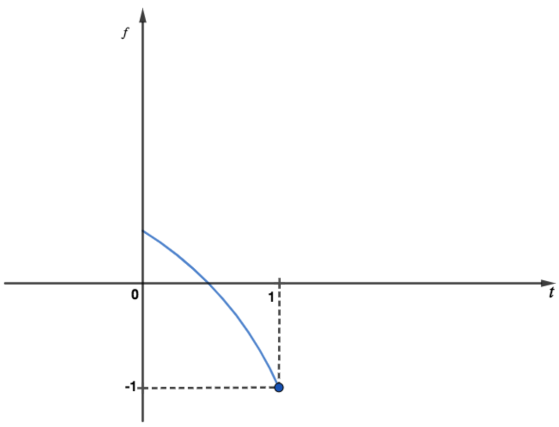


Рис. 34.

$(\Longrightarrow)$

Опишем функцию f, переводящую положительно ориентированный, относительно (e_1, e_2), базис (a, b) в (e_1, e_2), а отрицательно ориентированный, относительно (e_1, e_2), базис (a, b) в $(e_1, -e_2)$, тем самым показажем, что она существует.

1. $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ a и b деформируются в $\dfrac{a}{|a|}$ и $\dfrac{b}{|b|}$

$a(t) = \left(2\left(\frac{1}{|a|} - 1\right)t + 1\right)a, t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

$b(t) = \left(2\left(\frac{1}{|b|} - 1\right)t + 1\right)b, t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

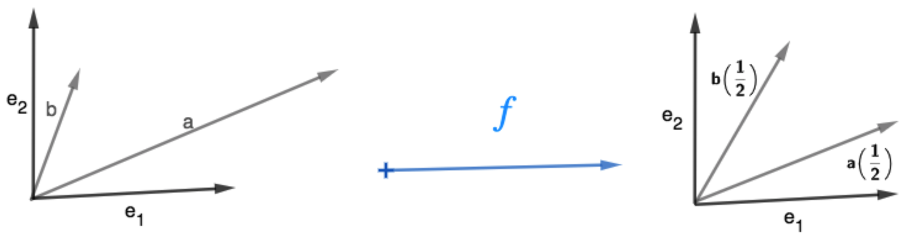


Рис. 35.

2. $t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ делаем вращение, переводящее $\dfrac{a}{|a|}$ в e_1

$a\left(\dfrac{3}{4}\right) = e_1$ куда перейдет $b\left(\dfrac{1}{2}\right)$? Точно знаем, что вращение сохраняет норму – $\left|b\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|b\left(\dfrac{3}{4}\right)\right|$.

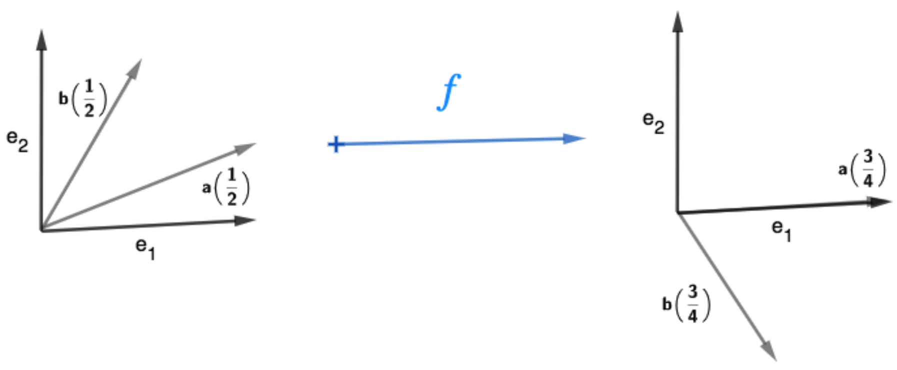


Рис. 36.

3. $t \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ повернем $b\left(\dfrac{3}{4}\right)$ так, чтобы он стал ортогонален e_1, причем $\forall t \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ $b(t) \neq e_1$ (два возможных случая показаны на Рис. 37.).

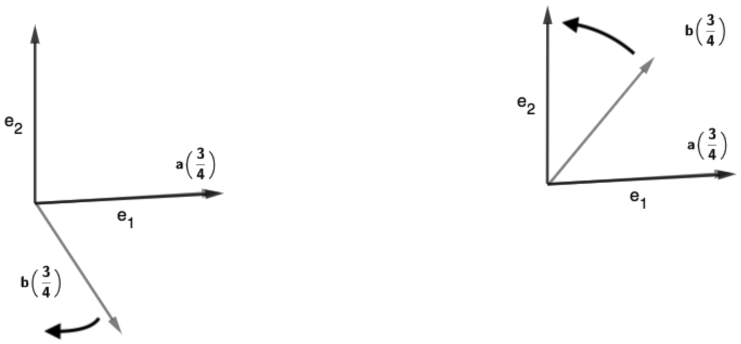


Рис. 37.

В результате получим, ято a(0) перейдет в a(1) = e_1, b(0) перейдет в $b(1) = \pm e_2$. Описали отображение в явном виде $\implies \square$

Итак, отношение ориентации (относительно выбранной упорядоченной пары векторов – базиса (e_1, e_2))! разбивает все пары векторов на два непересекающихся класса – положительно и отрицательно ориентированных векторов, относительно (e_1, e_2). Отношение ориентации (относительно выбранной упорядоченной пары векторов – базиса (e_1, e_2))! есть отношение эквивалентности.

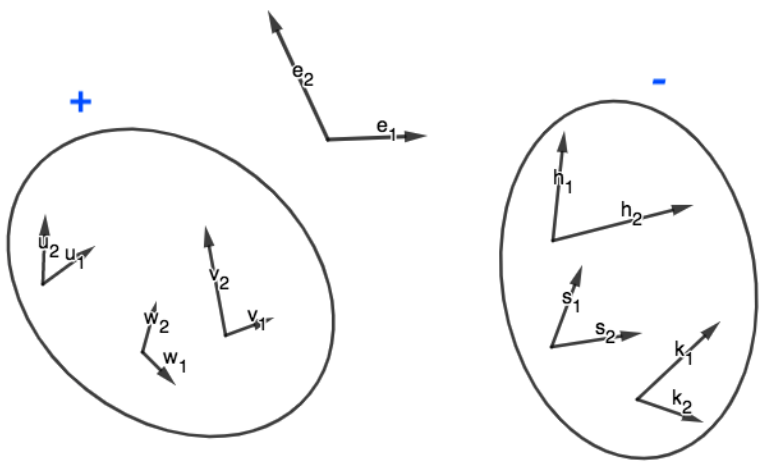


Рис. 38.

Опр 6. Ориентация плоскости есть выбор одной из двух групп (компонент связанности) базисов и объявления, всех векторов этой группы положительно ориентированными.

Лекция 7

7.1 Ориентированная площадь

7.1.1 Не ортонормированный базис

Рассмотрим случай, когда базис (e_1, e_2) не ортонормированный базис.
Тогда $a = a^1e_1 + a^2e_2, b = b^1e_1 + b^2e_2$

$$< a, b >= a^1b^2 < e_1, e_2 > +a^2b^1 < e_2, e_1 >= a^1b^2 < e_1, e_2 > -a^2b^1 < e_1, e_2 >= \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \times < e_1, e_2 >$$

7.1.2 Знак угла

Если выбран положительно ориентированный базис, то можем назвать направление вразения от первого вектора ко второму положительным, а от второго к первому - отрицательным.
В плоскости у углов нету знака, в ориентированной плоскости у углов появляется знак.
Если ориентированная площадь двух векторов положительная, то угол между ними положительный.
Если ориентированная площадь двух векторов отрицательная, то угол между ними отрицательный.

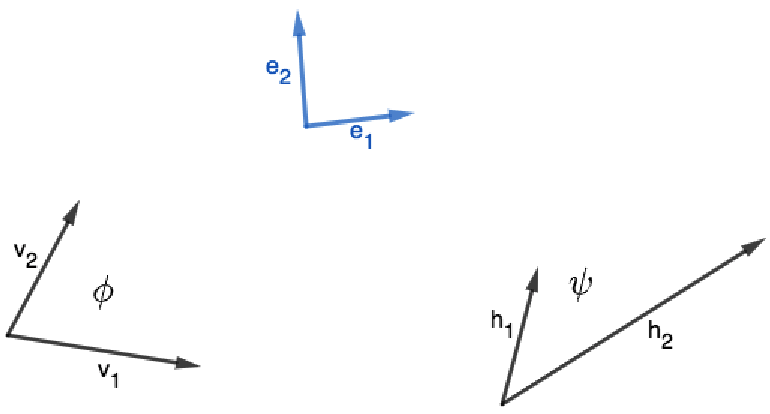


Рис. 39.

На рисунке ϕ имеет знак $+$, ψ имеет знак $-$.

7.2 Ориентированный объем

(e_1, e_2, e_3) – базис, вектора a, b, c – некомпланарные. В базисе (e_1, e_2, e_3)
$a = (a^1, a^2, a^3)$
$b = (b^1, b^2, b^3)$
$c = (c^1, c^2, c^3)$

Опр 1. Базис (a, b, c) положительно (отрицательно) ориентирован относительно базиса (e_1, e_2, e_3), если

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} > 0 (< 0)$$

Опр 2. Базис (a, b, c) положительно (отрицательно) ориентирован относительно базиса $(e_1, e_2, e_3) \iff$ его можно непрерывно деформировать в (e_1, e_2, e_3) $((e_1, e_2, -e_3))$. Доказательство аналогично доказательству для $\mathbb{R}^2$

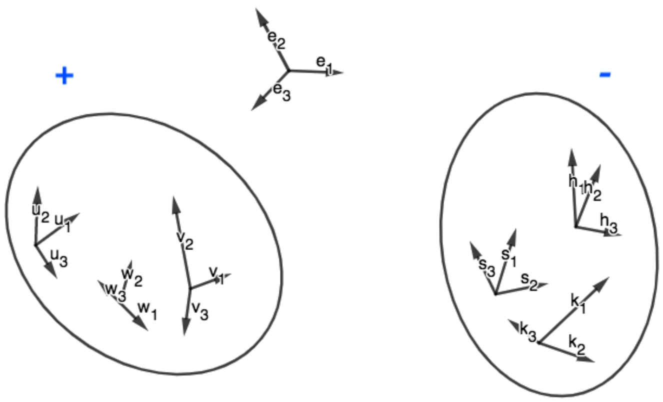


Рис. 40.

Все базисы в $\mathbb{R}^3$ делятся на две компоненты связанности базисов положительно ориентированных относительно заданного и отрицательно ориентированных относительно заданного. Ориентация пространства есть выбор одной из двух групп и объявления всех ее элементов положительно ориентированными.

7.3 Векторное произведение

Опр 3. Векторным произведением [a, b] двух векторов a и b называется вектор c, такой, что:

1. $c \perp a \wedge c \perp b$
2. |c| = площади параллелограмма, натянутого на вектора a и b
3. (a, b, c) – положительно ориентированный базис (кроме (a, b) = 0)

(на рисунке $a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AC}, c = \overrightarrow{AH}$)

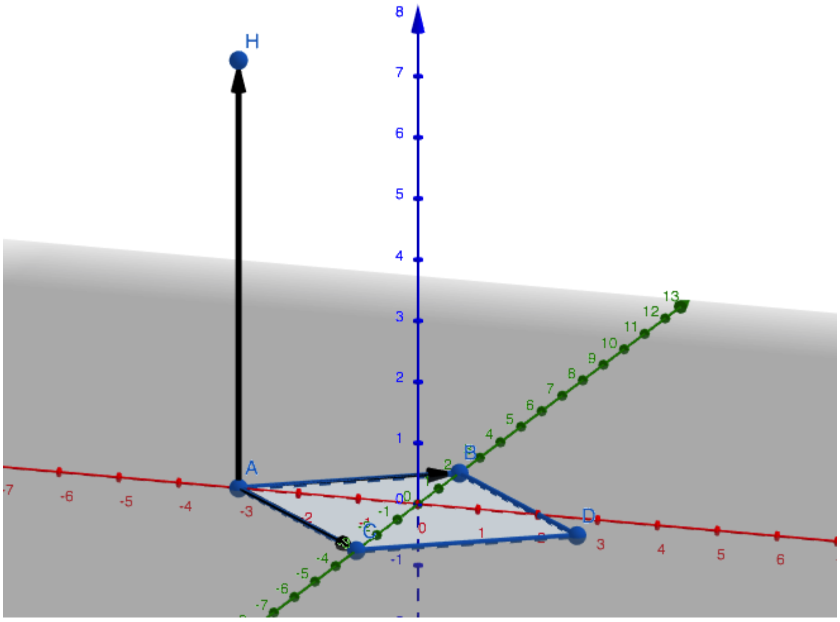


Рис. 41.

1. $[e_1, e_2] = e_3$ так как e_1, e_2 образуют квадрат площади 1, $e_3 \perp e_1 \wedge e_3 \perp e_2$, $(e_1; e_2; e_3)$ – положительно ориентированная тройка.

2. $[e_3, e_1] = e_2$ так как e_3, e_1 образуют квадрат площади 1, $e_2 \perp e_1 \wedge e_2 \perp e_3$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0 \implies (e_3; e_1; e_2)$$

– положительно ориентированная тройка.

3. $[e_1, e_3] = -e_2$ так как e_3, e_1 образуют квадрат площади 1, $e_2 \perp e_1 \wedge e_2 \perp e_3$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \implies (e_1; e_3; e_2)$$

– отрицательно ориентированная тройка.

7.4 Смешанное произведение

7.4.1 Смешанное произведение и объем параллелепипеда

Опр 4. Смешанным произведением <a, b, c> векторов a, b, c называется число ([a, b], c)

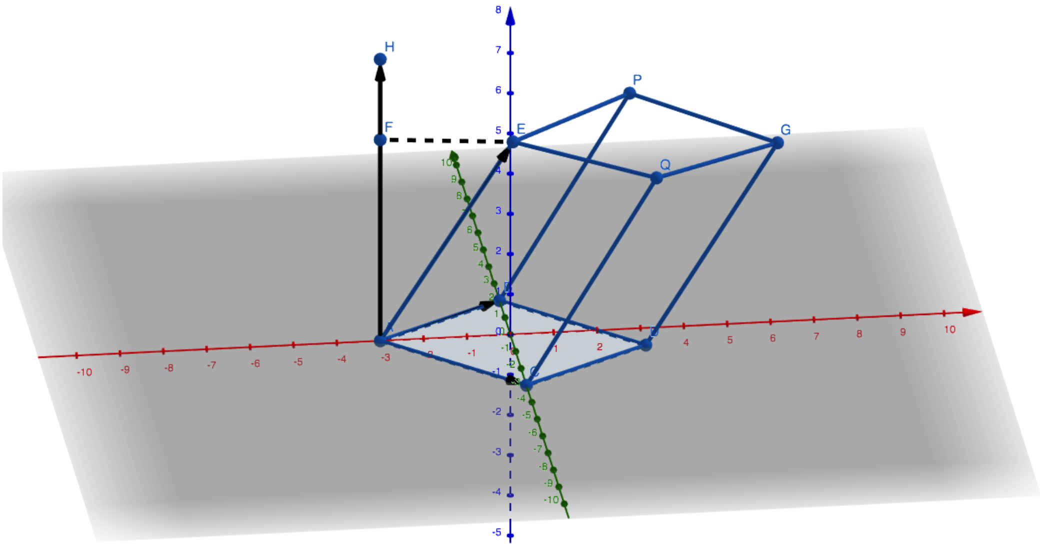


Рис. 42.

Утв 1.
Объем параллелепипеда, натянутого на вектора a, b, c равен абсолютной величине их смешанного произведения.

Доказательство

1. Площадь основания равна [a, b] = $|\overrightarrow{AH}|$
2. ([a, b], c) = $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE})$ = $S \times |AE| \times \cos\phi$ = $(\phi = \angle EAF)$ = $S \times |\overrightarrow{AF}| = Sh\square$

Опр 5. Ориентированный объем $\pi(a, b, c)$ параллелепипеда, порожденного a, b, c определяется так:

1. $|\pi(a, b, c)|$ = объем параллелепипеда, порожденного a, b, c
2. $\pi(a, b, c) > 0$, если тройка (a; b; c) положительно ориентирована
   $\pi(a, b, c) < 0$, если тройка (a; b; c) отрицательно ориентирована

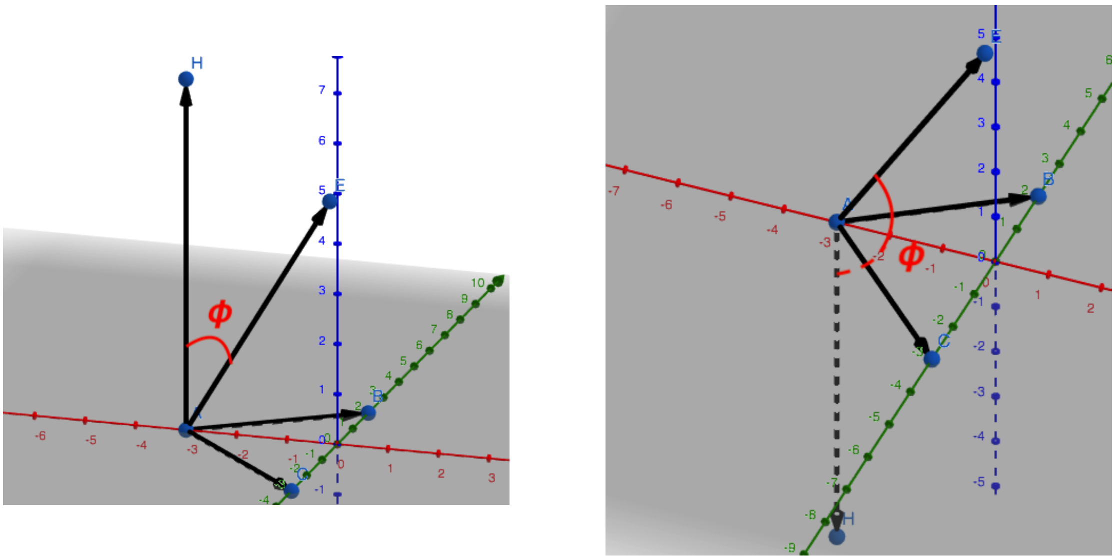
Теорема 1.
$\pi(a, b, c)$ = <a, b, c>

Доказательство

Из Утв. 1. $\implies$ $|\pi(a, b, c)| = | < a, b, c > |$, докажем, что они совпадают по знаку.

1. (Рис. 43. (a))Пусть тройка (a; b; c) положительно ориентирована. Тогда [a, b] направлен вверх (на рисунке), так как (a; b; [a, b]) должен деформироваться в ортонормированный базис $(e_1; e_2; e_3)$, [a, b] ни в какой момент не должна пересечь плоскость, порожденную a и b. $\phi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \implies \cos(\phi) > 0 \implies < a, b, c >> 0$, так как скалярное произведение есть произведение модулей на косинус.
А $\pi(a, b, c) > 0$, так как в этом случае рассматриваем положительно ориентированную тройку $\implies < a, b, c >= \pi(a, b, c)$

2. (Рис. 43. (b))Пусть теперь тройка (a; b; c) отрицательно ориентирована. Тогда [a, b] направлен вниз (на рисунке), так как (a; b; [a, b]) должен деформироваться в ортонормированный базис $(e_1; e_2; -e_3)$, [a, b] ни в какой момент не должна пересечь плоскость, порожденную a и b. $\phi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \implies \cos(\pi - \phi) = -\cos(\phi) < 0 \implies < a, b, c >< 0$
А $\pi(a, b, c) < 0 \implies < a, b, c >= \pi(a, b, c)\square$



(a) (b)

Рис. 43.

7.4.2 Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение коссимметрично: $< a, b, c >= - < b, a, c >=< b, c, a >= - < c, b, a >$ ... – при перестановке аргументов меняет знак.
2. Смешанное произведение полилинейно: $< a_1 + a_2, b, c >=< a_1, b, c > + < a_2, b, c >$
$< \lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} >= \lambda < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} >$

Доказательство

1. По Теореме 1 $< a, b, c >= \pi(a, b, c)$, знак $\pi(a, b, c)$ зависит от ориентации тройки (a; b; c), а она меняется на противоположную при перестановке двух векторов местами $\Longrightarrow < a, b, c >$ кососимметрично.
2. Так как <a, b, c> = ([a, b], c) – линейно по третьему аргументу и <a, b, c> – кососимметрична, то <a, b, c> линейна и по первому аргументу.
$< a_1 + a_2, b, c >=< b, c, a_1 + a_2 >=< b, c, a_1 > + < b, c, a_2 >=< a_1, b, c > + < a_2, b, c >$
$\square$

7.5 Свойства векторного произведения

1. $[a, b] = -[b, a]$ – кососимметричность
2. $[a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]$ – линейность
3. $[\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$

Доказательство

1. Следует из определения (чтобы тройка была положительно ориентированной)
2. Пусть $d = [a_1 + a_2, b] - [a_1, b] - [a_2, b]$. Докажем, что d = 0.
(d, d) = $([a_1 + a_2, b], d) - ([a_1, b], d) - ([a_2, b], d)$ по свойству линейности скалярного произведения. $(d, d) = ([a_1 + a_2, b], d) - < a_1 + a_2, b, c >= 0$(по свойству линейности смешанного произведения) $\Longrightarrow d^2 = 0 \Longrightarrow d = 0 \Longrightarrow [a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]\square$
3. Из определения:
   (a) $\lambda > 0$ – очевидно, просто удлиняем один вектор, ориентация не меняется, площадь по формуле увеличивается.
   (b) $\lambda = 0 \Longrightarrow 0 = 0$
   (c) $\lambda < 0 \Longrightarrow (\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, [a, b])$ ориентирована отрицательно $\Longrightarrow [\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = [-|\lambda| \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] =$ (случай (a)) $= |\lambda|[-\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] =$ (так как тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, [-a, b])$ отрицательно ориентирована) $= -|\lambda|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = -\lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$

7.6 Вычисление

7.6.1 Векторное произведение

Пусть $(e_1; e_2; e_3)$ – положительно ориентированный ортонормированный базис. Тогда в этом базисе
$a = (a^1, a^2, a^3)$
$b = (b^1, b^2, b^3)$
Вычислим векторное произведение через координаты.

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= [a^1e_1+a^2e_2+a^3e_3, b^1e_1+b^2e_2+b^3e_3] = \\
&= a^1b^1\underbrace{[e_1,e_1]}_{=0}+a^1b^2\underbrace{[e_1,e_2]}_{=e_3}+a^1b^3\underbrace{[e_1,e_3]}_{=-e_2}+ \\
&+a^2b^1\underbrace{[e_2,e_1]}_{=-e_3}+a^2b^2\underbrace{[e_2,e_2]}_{=0}+a^2b^3\underbrace{[e_2,e_3]}_{=e_1}+ \\
&+a^3b^1\underbrace{[e_3,e_1]}_{=e_2}+a^3b^2\underbrace{[e_3,e_2]}_{=-e_1}+a^3b^3\underbrace{[e_3,e_3]}_{=0} \implies
\end{aligned}
$$

$$\implies [a,b] = e_1\times(a^2b^3-a^3b^2) - e_2\times(a^1b^3-a^3b^1)+e_3\times(a^1b^2-a^2b^1) \implies$$

$$\implies [a,b] = e_1\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3\end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3\end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix}$$

(символическая запись, так как в матрице находятся и векторы и числа)

Утв 2.
В пространстве площадь параллелограмма, порожденного векторами a и b

$$S = \mu([a,b]) = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2\end{vmatrix}^2}$$

7.6.2 Смешанное произведение

Пусть $(e_1; e_2; e_3)$ – положительно ориентированный ортонормированный базис. Тогда в этом базисе $a = (a^1, a^2, a^3)$, $b = (b^1, b^2, b^3)$, $c = (c^1, c^2, c^3)$
$< a, b, c >= ([a, b], c)$ есть произведение соответствующих координат. Координаты $[a, b]$ известны из формулы для векторного произведения. Получим:

$$([a,b],c) = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3\end{vmatrix}c^1 - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3\end{vmatrix}c^2 + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2\end{vmatrix}c^3 = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}$$

7.7 Тождества

7.7.1 Бац - цаб

Утв 3.
$[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$
Доказательство
1. Выберем ортонормированный базис, ориентированный так, что: $e_1 || c \implies c =$

$(c^1;0;0), e_2$ в плоскости $bc \implies b=(b^1;b^2;0), e_3$ дополняет e_1 и $e_2 \implies e_3=[e_1,e_2]$
2.

$$[b,c]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b^1 & b^2 & 0 \\ c^1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -c^1b^2e_3$$

3.

$$[a,[b,c]]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & -c^1b^2 \end{vmatrix} = -a^2b^2c^1e_1-(-a^1b^2c^1)e_2+0\times e_3$$

4. $b(a,c)-c(a,b)=(b^1;b^2;0)a^1c^1-(c^1;0;0)\times(a^1b^1+a^2b^2)=(-a^2b^2c^1;a^1b^2c^1;0)=[a,[b,c]]\square$

7.7.2 Якоби

Утв 4.
$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$
Доказательство
$[a,[b,c]]=b(a,c)-c(a,b)$
$[b,[c,a]]=c(b,a)-a(b,c)$
$[c,[a,b]]=a(c,d)-b(c,a)$
$b(a,c)-c(a,b)+c(b,a)-a(b,c)+a(c,d)-b(c,a)=0\square$

Лекция 8

8.1 Алгебра Ли

Сопоставим вектору $a = (s^1; a^2; a^3)$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{pmatrix} = -A^T$$

так как матрица кососимметрична. Тогда $[a, b] = [A, B]$, где $[A, B]$ – коммутатор матриц A и B.

Опр 1. Линейное пространство с определенной на нем кососимметричной, билинейной бинарной операцией [,], удовлетворяющей тождеству Якоби называется Алгеброй Ли.

8.2 Алгебраические кривые

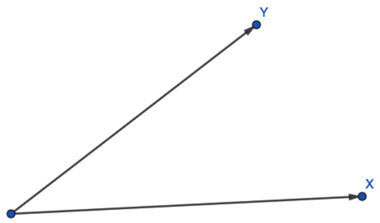


Рис. 44.

Работаем в произвольной афинной системе координат (базис не обязательно ортонормирован).

Опр 2. Алгебраическая кривая степени d – множество точек, удовлетворяющих $F(x, y) = 0$, где F – многочлен степени d.

Способы задания кривой

1. Неявное – $F(x, y) = 0$, например $x^2 + y^2 = 1$
2. Параметрическое:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

3. Параметризация рациональными функциями, например окружность можно задать:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

Замечания

1. Не всякая кривая алгебраическая, например $y - \sin x = 0$ имеет бесконечно много точек пересечения $(\pi k, 0)$. Но если $F(x, y)$ – многочлен, то и $F(x, 0)$ – многочлен, значит он имеет корней не больше чем его степень, или это тождественный 0.

2. Не у всякой алгебраической кривой есть рациональная параметризация, например

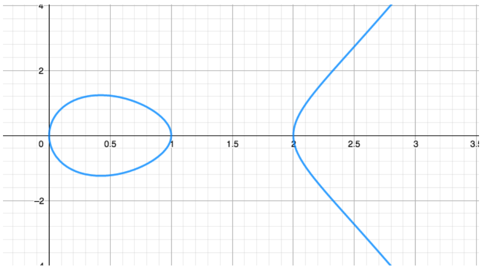


Рис. 45.

$y^2 = 4x(x-1)(x-2)$ – эллиптическая кривая. (следует из топологии)

3. Нет взаимно-однозначного соответствия между кривой и уравнением. Разные уравнения задают одну и ту же кривую.

8.3 Прямые в плоскости

r_0 – фиксированная точка, $\overrightarrow{v}$ – направляющий вектор. Произвольная точка $r = r_0 + t\overrightarrow{v} \implies r(t) = r_0 + t\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} = (v^1; v^2), r = (x; y) \implies$

$$\begin{cases} x = x_0 + tv^1 \\ y = y_0 + tv^2 \end{cases}$$

Утв 1.
$r \in l \iff r = r_0 + t\overrightarrow{v}, r_0 \in l, \overrightarrow{v} || l$

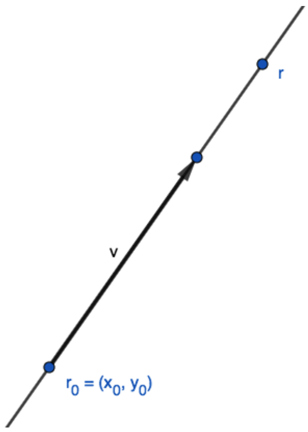


Рис. 46.

Опр 3. r_0 называется начальной точкой, $\overrightarrow{v}$ называется направляющим вектором

$t = \dfrac{x - x_0}{v^1} = \dfrac{y - y_0}{v^2} (*)$ – каноническое уравнение прямой

Замечания 1. r_0 и $\overrightarrow{v}$ не единствены
2. v^1 и v^2 могут обращаться в 0 (но не оба). Формально запись $t = \dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{v^2}$ верная, например
$r_0 = (1; 0), v = (0; 2) \implies \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-0}{2} \implies 2(x-1) = 0 \implies x = 1$

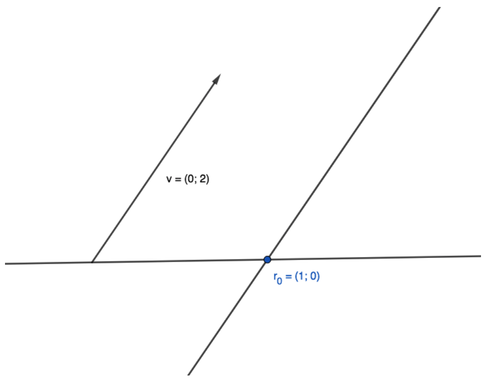


Рис. 47.

$$(*) \implies \underbrace{v^2}_{\text{A}} x \underbrace{-v^1}_{\text{B}} y + \underbrace{v^1 y_0 - v^2 x_0}_{\text{C}} = 0 \implies Ax + By + C = 0$$

– общее уравнение прямой ($A^2 + b^2 \neq 0$).

Утв 2.
Точки, удовлетворяющие $Ax + By + C = 0, A^2 + b^2 \neq 0$ образуют прямую.

Доказательство
Без ограничения общности

$$A \neq 0 \text{ (случай } B \neq 0 \text{ аналогичен) } x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0 \implies \begin{cases} x = -\frac{C}{A} - \frac{B}{A}t \\ y = t \end{cases}$$

– прямая так как это параметрическое уравнение прямой. Начальная точка $\left(\frac{C}{A}; 0\right)$, направляющий вектор $\left(\frac{B}{A}; 1\right)\square$

Утв 3.
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задают одну и ту же прямую

$$\iff \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \end{cases}$$

Доказательство
$(\impliedby)$
$F(x_0, y_0) = 0 \iff \lambda F(x_0, y_0) = 0$
$(\implies)$
Пусть $()x_i, y_i)$ – точки, удовлетворяющие обоим уравнениям

$$\implies \begin{cases} A_1x_i + B_1y_i + C_1 = 0 \\ A_2x_i + B_2y_i + C_2 = 0 \end{cases} \quad \forall i \implies$$

есть бесконечно много решений? значит $(A_2; B_2; C_2) = \lambda(A_1; B_1; C_1)\square$

Количество решений:

$$\left(\begin{smallmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\text{– бесконечно много } \left(\begin{smallmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{smallmatrix}\right)\text{– одно } \left(\begin{smallmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right)\text{– не существует}$$

Замечание
Уравнения $x = 0, x(x^2 + y^2 + 1) = 0$ задают одну и ту же кривую, но не являются пропорциональными. Изложенное выше утверждение справделиво только для линейных уравнений.

Пусть l задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и

$$P, Q \in l \;\; P = (P^1; P^2) \;\; Q = (Q^1; Q^2) \implies \begin{cases} AP^1 + BP^2 + C = 0 \\ AQ^1 + BQ^2 + C = 0 \end{cases}$$

$$\implies A(P^1 - Q^1) + B(P^2 - Q^2) = 0 \; v = (v^1; v^2) \implies Av^1 + Bv^2 = 0$$

Утв 4.
$v \parallel l = Ax + By + C = 0 \iff v = (v^1; v^2) Av^1 + Bv^2 = 0$

8.3.1 Взаимное расположение прямых

Утв 5.
Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

1. Пересекаются $\iff (A_1; B_1) \neq \lambda(A_2; B_2)$ то есть $rk\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2$

2. Параллельны $\iff \begin{cases} (A_1; B_1) = \lambda(A_2; B_2) \\ (A_1; B_1; C_1) \neq \lambda(A_2; B_2; C_2) \end{cases}$,то есть $\begin{cases} rk\left(\begin{smallmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{smallmatrix}\right) = 1 \\ rk\left(\begin{smallmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{smallmatrix}\right) = 2 \end{cases}$

3. Совпадают $\iff (A_1; B_1) \neq \lambda(A_2; B_2)$ то есть $rk\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$

8.4 Полуплоскости

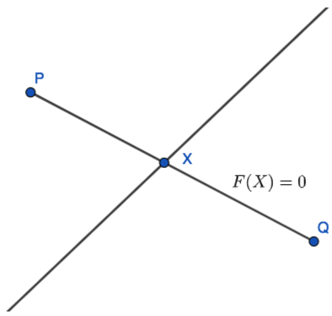


Рис. 48.

Опр 4. Точки $P, Q \notin l$ лежат в разных полуплоскостях, если отрезок PQ пересекает l

$X = (X^1; X^2), P = (P^1; P^2), Q = (Q^1; Q^2), \lambda > 0, \mu > 0, X \in PQ$

$$X^1 = \frac{\lambda P^1 + \mu Q^1}{\lambda + \mu}$$

$$X^2 = \frac{\lambda P^2 + \mu Q^2}{\lambda + \mu}$$

Утв 6.

P, Q лежат в разных полуплоскостях $\iff F(P) \times F(Q) < 0$

Доказательство

$(\implies)$

$X \in l \implies F(X) = 0 \implies A(\dfrac{\lambda P^1 + \mu Q^1}{\lambda + \mu}) + B(\dfrac{\lambda P^2 + \mu Q^2}{\lambda + \mu}) + C = 0 \implies \lambda(AP^1 + BP^2 + C) + \mu(AQ^1 + BQ^2 + C) = 0 \implies F(P) \times F(Q) < 0, (\lambda, \mu > 0)$ $(\impliedby)$ Пусть $F(P), F(Q)$ имеют разный знак. Пусть $F(P) > 0, F(Q) < 0 \implies \lambda = -F(Q) > 0, \mu = F(P) > 0 \implies \lambda F(P) + \mu F(Q) = 0$ По определению $F(X) = 0 \implies P, Q$ лежат в разных получлоскостях $\square$

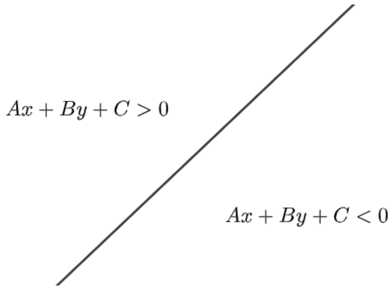


Рис. 49.

Замечание

Выбор $Ax + By + C = 0$ определяет положительную и отрицательную полуплоскокть. Если домножить на -1, то знак поменяется.

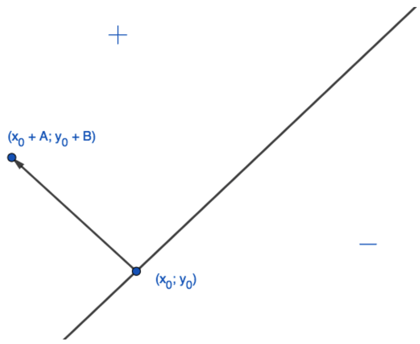


Рис. 50.

Утв 7.

Если от произвольной точки прямой $Ax + By + C = 0$ отложить вектор $(A; B)$, то его конец будет в положительной полуплоскости

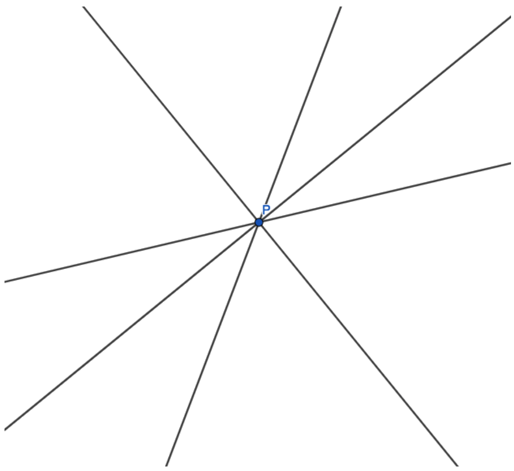
Доказательство

$F(x_0 + A, y_0 + B) = A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 > 0\square$

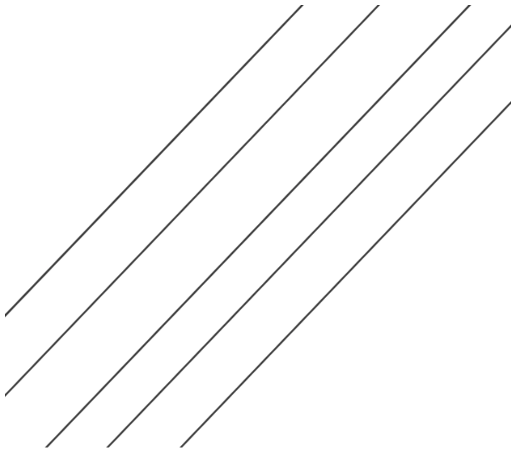
8.5 Пучки прямых

Опр 5. Пучок прямых на плоскости:

1. Собственный пучок – множество прямых, проходящих через одну точку. (a)
2. Несобственный пучок – множество прямых параллельных какой-либо прямой (с точки зрения проективной геометрии есть только собственный пучки, так как параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке) (b)



(a)



(b)

Рис. 51.

Лекция 9

9.1 Пучки прямых

Теорема 1.

$F_1 : A_1x + B_1y + C_1$

$F_2 : A_2x + B_2y + C_2$

$l_1 : F_1 = 0, l_2 : F_2 = 0$ – уравнения двух различных прямых, принадлежащих одному пучку.

$L \in$ пучку $\iff L : \alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2)(*)$

Доказательство

Собственный пучок ($\Longrightarrow$)

1. Пусть $l \in$ собственному пучку. $l_1 \cap l_2 = P_0, P \in l, P \neq P_0$

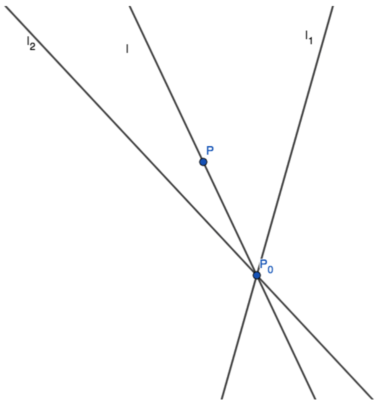


Рис. 52.

2. $0 = F_2(P)F_1(X) - F_1(P)F_2(X) = F(X)$ – линейное уравнение, определяет прямую на плоскости.

3. $F(P) = F_2(P)F_1(P) - F_1(P)F_2(P) = 0$

$F(P_0) = F_2(P)F_1(P_0) - F_1(P)F_2(P_0) = 0$

4. F не тождественный 0 так как если предположить обратное $F \equiv 0 \implies \exists$ нетривиальная линейная комбинация F_1 и F_2, такая, что $\alpha F_1 + \beta F_2 \equiv 0 \implies F_2 = -\frac{\alpha}{\beta}F_1$, что противоречит тому что $F_1 \cap F_2 = P_0$

5. Из 3 $\implies l : F$ l имеет уравнение $(*)$ с коэффицентами $\alpha = F_2(P), \beta = -F_1(P)$

Несобственный пучок ($\Longrightarrow$)

1. $P \in l, 0 = F_2(P)F_1(X) - F_1(P)F_2(X) = F(X)$

2. F не тождественный 0 так как если предположить обратное $F \equiv 0 \implies F_1$ пропорционально $F_2 \implies l_1 = l_2$ – противоречие

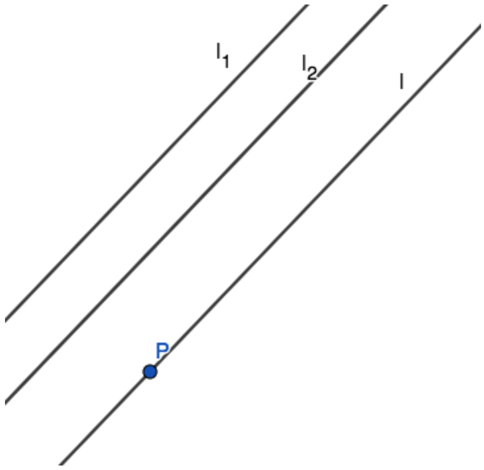


Рис. 53.

3. $F = 0$ задает прямую $F(P) = F_2(P)F_1(P) - F_1(P)F_2(P) = 0 \implies P \in l$
4. $l_1 || l_2 \implies A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1 \implies$

$$F = \underbrace{(F_2(P)A_1 - F_1(P)A_1\lambda)x}_{\text{A}} + \underbrace{(F_2(P)B_1 - F_1(P)B_1\lambda)y}_{\text{B}} + F_2(P)C_1 - F_1(P)C_2$$

5. $A = A_1(F_2(P) - \lambda F_1(P))$
$B = B_1(F_2(P) - \lambda F_1(P)) \implies \dfrac{A}{B} = \dfrac{A_1}{B_1} \implies F = 0 || l_1 || l_2, F = 0$ совпадает с l

Собственный пучок ($\Longleftarrow$)

1.

$$l = \underbrace{\alpha F_1 + \beta F_2}_{\text{F}} = 0$$

2. $F(P_0) = \alpha F_1(P_0) + \beta F_2(P_0) = 0 \implies P_o \in l$

Несобственный пучок ($\Longleftarrow$)

1. $\alpha F_1 + \beta F_2 = 0$
2. $l_1 || l_2 \implies A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$
3. $F = 0 = (\alpha A_1 + \beta A_1)x + (\alpha B_1 + \beta \lambda B_1)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0$
4. $A = A_1(F_2(P) - \lambda F_1(P))$
$B = B_1(F_2(P) - \lambda F_1(P)) \implies \dfrac{A}{B} = \dfrac{A_1}{B_1} \implies l || l_1 || l_2 \square$

Следствия

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0, A_3x + B_3y + C_3 = 0 \in$ одному пучку

$\iff$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

($\implies$ очевидно из определения, $\impliedby$ по теореме)

9.2 Прямоугольная система координат

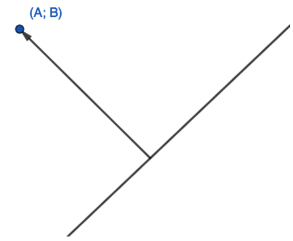


Рис. 54.

Утв. 1.

Вектор $(A; B)$ ортогонялен прямой $Ax + By + C = 0(*)$

$(\alpha; \beta)$ параллелен $(*)$ $\iff$ $A\alpha + B\beta = 0$, что в прямоугольной системе координат является скалярным произведением, и, поэтому $(\alpha; \beta) \perp (A; B) \implies (A; B) \perp Ax + By + C = 0 \square$

9.2.1 Расстояние от точки до прямой

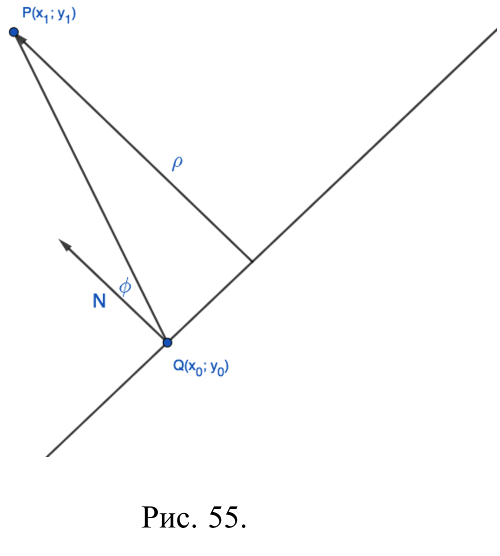


Рис. 55.

1. $l : Ax + By + C = 0$
2. $Q \in l \implies Ax_0 + By_0 + C = 0$
3. $OP = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$
4. $\rho = |OP||\cos\phi| \implies \rho = |OP| \times \dfrac{|(OP, N)|}{|OP||N|} = \dfrac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + (-Ax_0 - By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Утв. 2.

Расстояние ρ от $P(x_1; x_2)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ равно $\rho = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Опр. 1.

Уравнение вида $\pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x \pm \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y \pm \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ называется нормализованным.

9.2.2 Угол между прямыми

Опр. 2. Углом между прямыми называется наименьший из углов, образованных этими прямыми.

$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$ Посчитаем косинус угла между ними. Рассмотрим два случая.

(1) Угол ϕ между нормалями острый $\implies$ он и является углом между прямыми $\implies$ $\cos\phi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

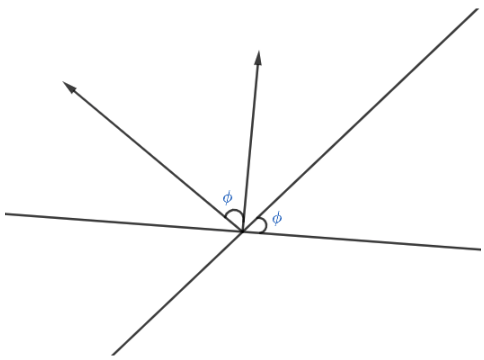


Рис. 56.

(2) Угол ϕ между нормалями тупой $\implies$ углом между прямыми является угол $\pi - \phi$ $\implies \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi = -\dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

Имеем, что в общем случае $\cos\phi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

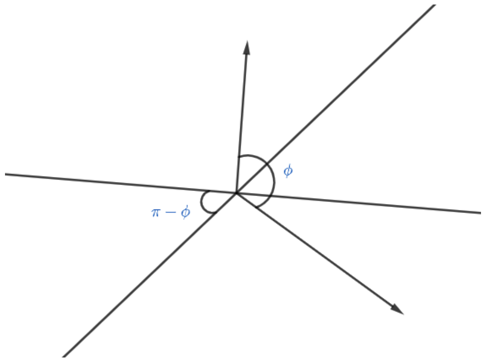


Рис. 57.

9.3 Плоскости в пространстве

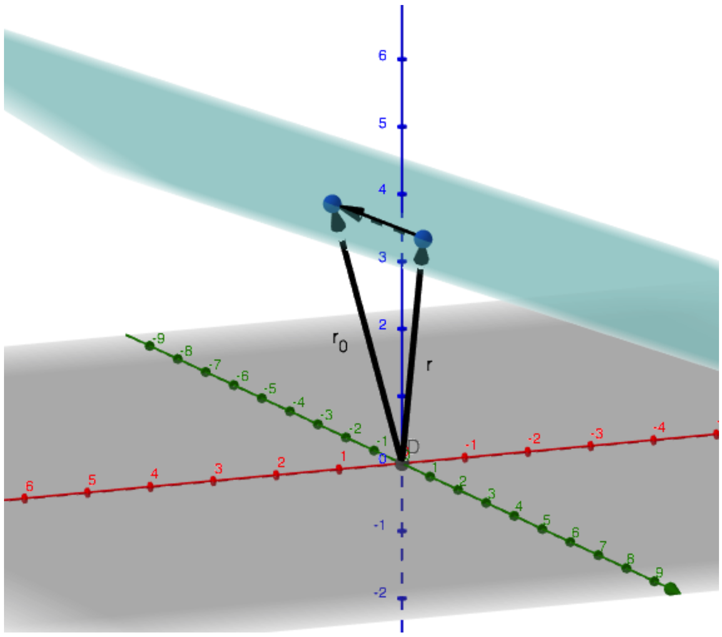


Рис. 58.

Составим параметрическое уравнение плоскости в пространстве.
$a, b || \pi$ a, b – линейно-независимы.
r_0 – радиус вектор фиксированной точки в π
r – радиус вектор произвольной точки в π
$\implies r - r_0 || \pi \implies r - r_0$ компланарен a и b. $r - r_0 = \alpha a + \beta b$

Утв. 3.
Если a и $b || \pi$ и линейно независимы, то $r = r_0 + \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – параметрическое уравнение плоскости. Наоборот $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $r = r_0 + \alpha a + \beta b \in \pi$

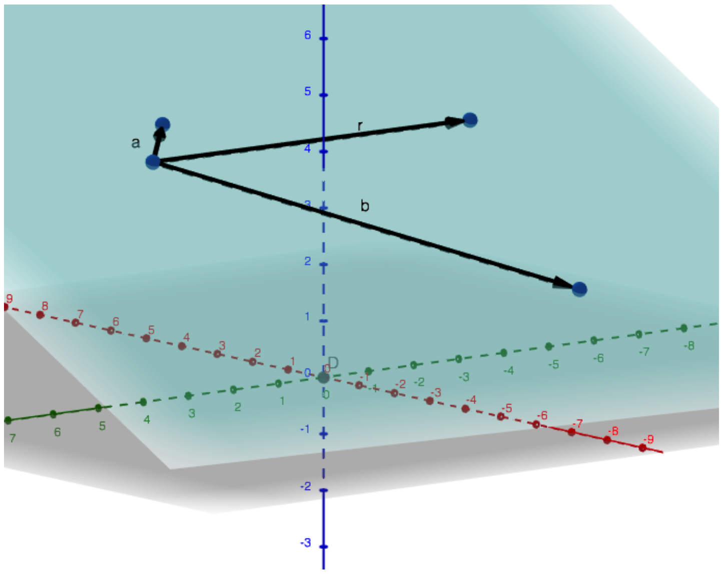


Рис. 59.

$r_0(x_0; y_0; z_0)$ $a(a_1; a_2; a_3)$ $b(b_1; b_2; b_3)$ $r(x; y; z)$

$r - r_0 = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ компланарен a и b

$$\implies (r - r_0, a, b) = 0 \implies \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (x - x_0)\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{A}} - (y - y_0)\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{B}} + (z - z_0)\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{\text{C}}$$

$D = Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Утв. 4.
$(x; y; z) \in \pi \implies$ они удовлетворяют линейному уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$ пусть $(x; y; z)(A \neq 0)$ удовлетворяет ему. Возьмем $a = (-B; A; 0), b = (0; -C; B), r_0 = (\frac{-D}{A}; 0; 0)$

$$\begin{vmatrix} x + \frac{-D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ 0 & -C & B \end{vmatrix} = AB\left(x + \frac{-D}{A}\right) + B^2y + BCz = B(Ax + By + Cz + D) = 0$$

Утв. 5.
$(x; y; z)$ удовлетворяют линейному уравнению $\implies$ они лежат в плоскости.

Опр. 3. Общим уравнением плоскости называется $Ax + By + Cz + D$

Утв. 6.
Вектор $(\alpha; \beta; \gamma)$ параллелен плоскости $\iff A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

Доказательство

1. $P = (p_1; p_2; p_3), Q = (q_1; q_2; q_3)$
2. $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D - (Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D) = A(p_1 - q_1) + B(p_2 - q_2) + C(p_3 - q_3) = 0 \implies PQ = (\alpha; \beta; \gamma)\square$

Лекция 10

10.1 Разрешимость системы линейных алгебраических уравнений

Опр. 1.

Рангом матрицы называется количество ее линейно - независимых строк (или столбцов) Если матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

то $rgA = k$.

10.1.1 Однородная система уравнений

$$Ax = 0, x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$rgM =$ количество зависимых переменных.

$n - rgM =$ количество свободных переменных. (можем выбирать какие хотим, так как при перемножении матриц они умножатся на нули)

Решение выражается через них и зависит от них линейно.

Если переменовать переменные так, чтобы матрица из трапециевидной перешла в треугольную, то решение выражается через $x^{k+1}, \dots, x^n$

то есть $x = x^{k+1}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \dots + x^n\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$n - rgM$-мерная плоскость в n-мерном пространстве.

Утв. 1.

$Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n$ общее решение имеет вид: $x = c_1t_1 + \dots + c_{n-k}t_{n-k}$,

где $k = rgM, t_1, \dots, t_{n-k} \in \mathbb{R}$

Если $rgM = n$, то 0 решений

10.1.2 Неоднородная система уравнений

$Ax = b$

Утв. 2.

Пусть x_0 – некоторое решение $Ax = b$ Тогда любое решение $Ax = b$ имеет вид $x_0 + x_1$,

где x_1 – решение $Ax = 0$.
Доказательство$(\implies)$
x_0 – решение $Ax = b$, x_1 – решение $Ax = 0$
$A(x_0 + x_1) = Ax_0 + Ax_1 = b$, то есть $x_0 + x_1$ – решение $Ax = b$
$(\impliedby)$
Пусть x_0 и x_2 два решения $Ax = b$
$A(x_2 - x_0) = Ax_2 - Ax_0 = b - b = 0$
то есть $x_1 = x_2 - x_0$ - решение $Ax_2 = 0$, $x_2 = x_0 + x_1\square$

Следствие
Если в $Ax = b$ есть решение x_0, то общее решение имеет вид $x_0 + c_1t_1 + \dots + c_{n-k}t_{n-k}$, где $k = rgM, t_1, \dots, t_{n-k} \in \mathbb{R}$
Решение: $n - rgM$-мерная плоскость в n-мерном пространстве, проходящая через x_0.

10.1.3 Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

$$(A|b) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)}_{rgM = rg\,(A|b),\ \text{решение есть}}$$

$$(A|b) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)}_{1 + rgM = rg\,(A|b),\ \text{решений нет}}$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

Так как минимальная размерность измерения матрицы – 2, то $rgM = 1$ или $rgM = 2$ рассмотрим возможные случаи:
1) $rgM = 1, rg\,(A|b) = 1$ $x_0 = c_1t_1 + c_2t_2$ задает одну и ту же плоскость
2) $rgM = 1, rg\,(A|b) = 2$ решений нет, уравнение задает параллельные плоскости
3) $rgM = 2, rg\,(A|b) = 2$ $x_0 = c_1t$ задает прямую пересечения двух плоскостей

Утв. 3.
1. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ задают одну и ту же плоскость

$\iff (A_1; B_1; C_1; D_1) \equiv (A_2; B_2; C_2; D_2)(1)$
2. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ задают параллельные плоскости $\iff (A_1; B_1; C_1) \equiv (A_2; B_2; C_2) \wedge \neg(1)$
3. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ пересекаются по прямой $\iff (A_1; B_1; C_1) \equiv (A_2; B_2; C_2)$

10.2 Полупространства

Опр. 1.

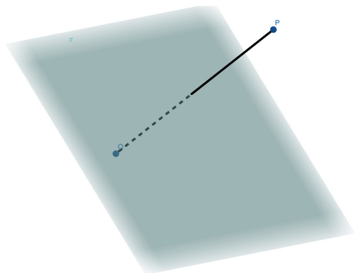


Рис. 60.

P и Q в одном полупространстве, если отрезок PQ не пересекает плоскость π и в разных полупространствах, если пересекает.

$$\pi : \underbrace{Ax + By + Cz + D = 0}_{F}$$

Утв. 4.
P и Q лежат в одном полупространстве $\iff F(P) \times F(Q) > 0$ и в разных полу-

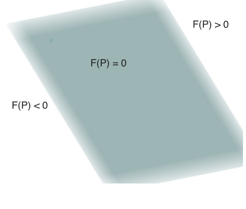


Рис. 61.

пространствах $\iff F(P) \times F(Q) < 0$. Доказательство аналогично плоскому случаю (найти точку $X : F(X) = 0$)

10.3 Пучок плоскостей

Опр. 2.

Собственный пучок плоскостей – множество плоскостей, содержащих данную пря-

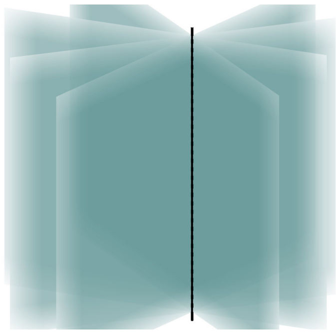


Рис. 62.

мую (базисная прямая собственного пучка)

Опр. 3.

Несобственный пучок плоскостей – множество плоскостей, параллельных данной

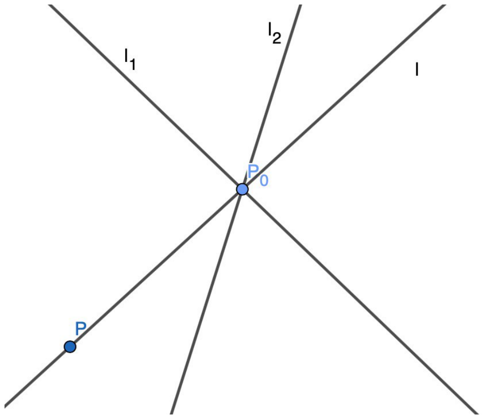
Рис. 63.

плоскости

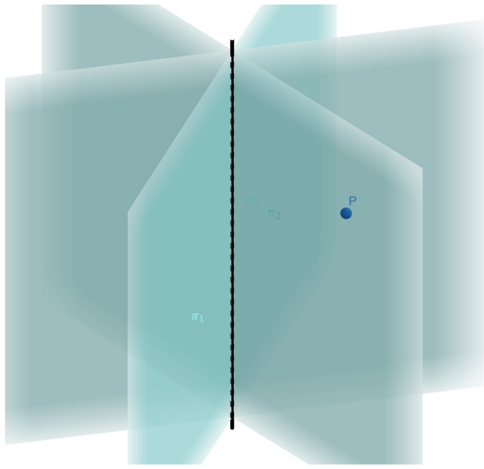
Утв. 5.

Пусть $F_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1, F_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$ – две плоскости некоторого пучка. Тогда любая плоскость этого пучка задается уравнением $\alpha F_1 + \beta F_2 = 0$ Доказательство

Аналогично плоскому случаю. Плоскость однозначно задается прямой и точкой на ней не лежащей. Рассмотрим уравнение плоскости $F_2(P)F_1(X) - F_1(P)F_2(X) = 0$. Для любой точки на базисной прямой это выражение верно и для точки P, не лежащей на этой прямой выражение так же верно. Значит это уравнение задает плоскость π в виде $\alpha F_1 + \beta F_2 = 0\square$



Плоский случай



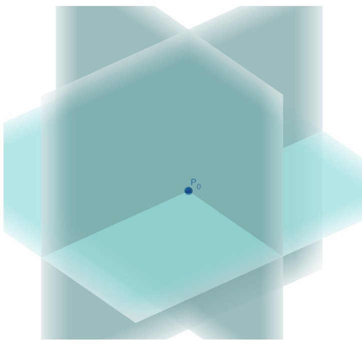
Пространство

Рис. 64.

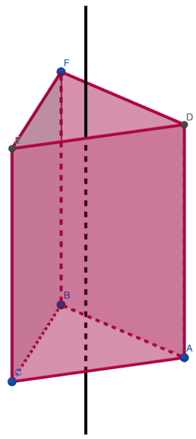
10.4 Связки плоскостей

Опр. 4.
Собственная связка плоскостей – множество плоскостей, проходящих через фиксированную точку

Опр. 5.
Несобственная связка плоскостей – множество плоскостей, параллельных данной прямой



Собственная



Несобственна

Рис. 65.

Утв. 6.

Пусть $F_i = A_ix + B_iy + C_iz + D_i, i = \overline{1,3},\ F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ – три различные плоскости одной связки, не принадлежащие одному пучку. Тогда любая плоскость π этой связки задается уравнением $\alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 = 0$

Доказательство (собственная связка $\Longleftarrow$)

$F_i(P_0) = 0, \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 = 0$

1. Это выражение не тождественный 0, так как иначе $(A_1; B_1; C_1; D_1), (A_2; B_2; C_2; D_2), (A_3; B_3; C_3; D_3)$ линейно зависимы $\implies$ один из векторов выражается линейной комбинацией двух других $\implies$ $F_3 = \lambda F_1 + \mu F_2$ (без ограничения общности) $\implies$ три плоскости принадлежат одному пучку?! 2. Из 1 $\implies$ $\alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 = 0$ задает плоскость. Рассмотрим $\alpha F_1(P_0) + \beta F_2(P_0) + \gamma F_3(P_0) = 0$. Она проходит через точку P_0 и $\in$ связке.

($\Longrightarrow$) Выберем в $\pi P_1, P_2$ так, чтобы $P_0, P_1, P_2 \notin l$

Найдем $(\alpha; \beta; \gamma)$:

$$\begin{cases} \alpha F_1(P_1) + \beta F_2(P_1) + \gamma F_3(P_1) = 0 \\ \alpha F_1(P_2) + \beta F_2(P_2) + \gamma F_3(P_2) = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (\alpha; \beta; \gamma) \perp (F_1(P_1); F_2(P_1); F_3(P_1)) = W_1 \\ (\alpha; \beta; \gamma) \perp (F_1(P_2); F_2(P_2); F_3(P_2)) = W_2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \alpha = \begin{vmatrix} F_2(P_1) & F_3(P_1) \\ F_2(P_2) & F_3(P_2) \end{vmatrix}, \beta = \begin{vmatrix} F_1(P_1) & F_3(P_1) \\ F_1(P_2) & F_3(P_2) \end{vmatrix}, \gamma = \begin{vmatrix} F_2(P_1) & F_2(P_1) \\ F_2(P_2) & F_2(P_2) \end{vmatrix}$$

Пусть $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Это возможно, если $W_1 || W_2$ или $W_1 = 0$ или $W_2 = 0$

Пусть $W_{1,2} = 0 \implies P_{1,2} \in \pi_1, |pi_2, \pi_3$, что проииворечит условию связки.

Путсь $W_1 || W_2 \implies \lambda W_1 + \mu W - 2 = 0 \xrightarrow{?} \pi_1, \pi_2, \pi_3$ из пучка $\implies (\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0), \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 = 0$ задает плоскость.

$(\alpha; \beta; \gamma)$ выбраны так, что точки $P_{0,1,2} \in \pi : \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 \square$

Лекция 11

11.1 Связки плоскостей

Теорема. 1.

Пусть $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, i = \overline{1,3}$ – три плоскости одной связки, не лежащие в одном пучке, тогда любая плоскость этой связки выражается как $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0(*)$

Доказательство (Собственная ($\Longleftarrow$))

Точка $P_0(x_0; y_0; z_0) \in$ всем плоскостям.

$\forall i A_ix_0 + B_iy_0 + C_iz_0 + D_i = 0 \implies \alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$ – верно. $(*)$ описывает плоскость так как π_i не из одного пучка $\implies$ $(*)$ описывает плоскость π', $P_0 \in \pi'$. Она $\in$ связке.

Собственная ($\Longrightarrow$)

$P_0 \in \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi$, где $\pi = Ax + By + Cz + D = 0$

$$x_0 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B \end{pmatrix} + z_0 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D \end{pmatrix} = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \text{ столбцы линейно зависимы } \implies rgM < 4$$

Так как ранг матрицы по строкам равен рангу по столбцам, то строки матрицы л.з. $\lambda_1(A_1; B_1; C_1; D_1) + \lambda_2(A_2; B_2; C_2; D_2) + \lambda_3(A_3; B_3; C_3; D_3) + \lambda(A; B; C; D) = 0$, если $\lambda = 0$, то строки 1, 2, 3 л.з. $\implies$ три первые плоскости в одном пучке $\implies ?! \implies$ $\lambda \neq 0$

$$(A; B; C; D) = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\alpha}(A_1; B_1; C_1; D_1) \underbrace{-\frac{\lambda_2}{\lambda}}_{\beta}(A_2; B_2; C_2; D_2) \underbrace{-\frac{\lambda_3}{\lambda}}_{\gamma}(A_3; B_3; C_3; D_3)$$

и получим $(*)$

Несобственная связка

Модифицируем доказательство, заменив точку на направляющий вектор прямой $v = (v_1; v_2; v_3)$.

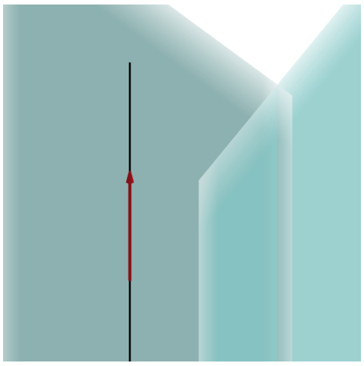


Рис. 66.

Далее запишем соотношение $v_1\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A\end{pmatrix}+v_2\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B\end{pmatrix}+v_3\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D\end{pmatrix}=0$, которое следует из того что этот вектор параллелен каждой из плоскостей и будем рассуждать аналогично. □

11.2 Нормаль, расстояния, углы

Нормаль

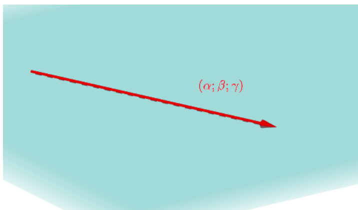


Рис. 67.

$\pi : Ax+By+Cz+D=0, (\alpha;\beta;\gamma)||\pi \iff A\alpha+B\beta+C\gamma=0$
$\underset{\text{Прямоугольная СО}}{\Longleftrightarrow} (A;B;C)\perp(\alpha;\beta;\gamma)$

Утв. 2.
$n=(A;B;C)$ ортогонален $Ax+By+Cz+D=0$

Расстояние
$Ax+By+Cz+D=0$
$QP(x_0-x;y_0-y;z_0-z)$

$$\rho = |QP| \times |\cos\phi| = |QP| \times \frac{|(N, QP)|}{|N| \times |QP|} = \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{|N|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

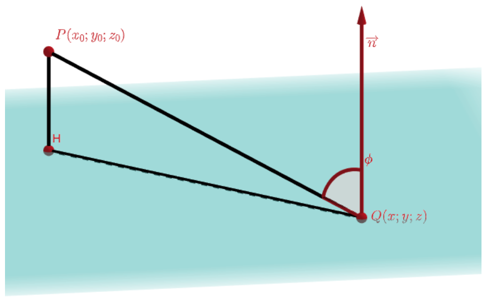


Рис. 68.

Утв. 3.

Расстояние от точки $P(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Угол

$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$

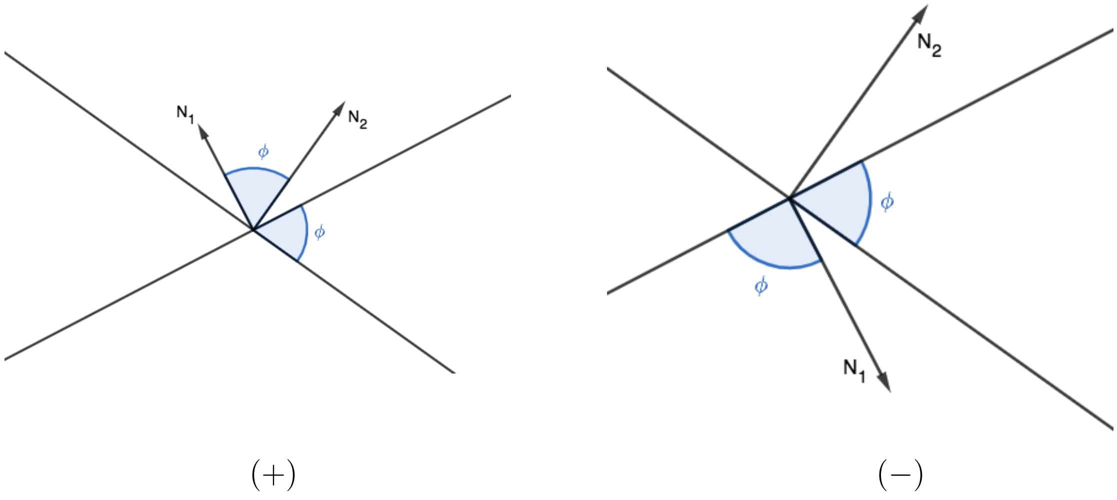


Рис. 69.

Утв. 4.

Угол между плоскостями $A_ix_0 + B_iy_0 + C_iz_0 + D_i = 0, i = 1, 2$ находится по формуле:

$$\cos\phi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \times \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

11.3 Прямые в пространстве

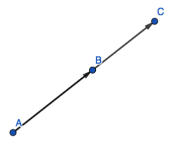


Рис. 70.

Параметрическое уравнение

$v = AB, \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}, C = A + t\overrightarrow{AB} = A + tv$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, (\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$$

Каноническое уравнение $t = \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$

$\begin{cases} \beta(x - x_0) = \alpha(y - y_0) \\ \gamma(y - y_0) = \beta(z - z_0) \end{cases}$, – две плоскости, прямая задается как прямая их пересечения.

$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$, $(*)$ задает прямую, если $(A_1; B_1; C_1) \nsim (A_2; B_2; C_2)$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \implies A_1 \underbrace{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}_{\alpha} + B_1 \underbrace{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}_{\beta} + A_1 \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}_{\gamma} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \implies A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$$

$(\alpha; \beta; \gamma) || \pi_1 \wedge (\alpha; \beta; \gamma) || \pi_2$ – это направляющий вектор прямой пересечения.

Утв. 5.

У прямой заданной как пересечение двух плоскостей $(*)$ направляющий вектор $(\alpha;\beta;\gamma)$, $\alpha = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \beta = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \gamma = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$

Работает в произвольной СО, но в прямоугольной можно считать что это координаты результата векторного произведения.

11.4 Метрические вопросы прмых в пространстве

11.4.1 Угол между прямыми

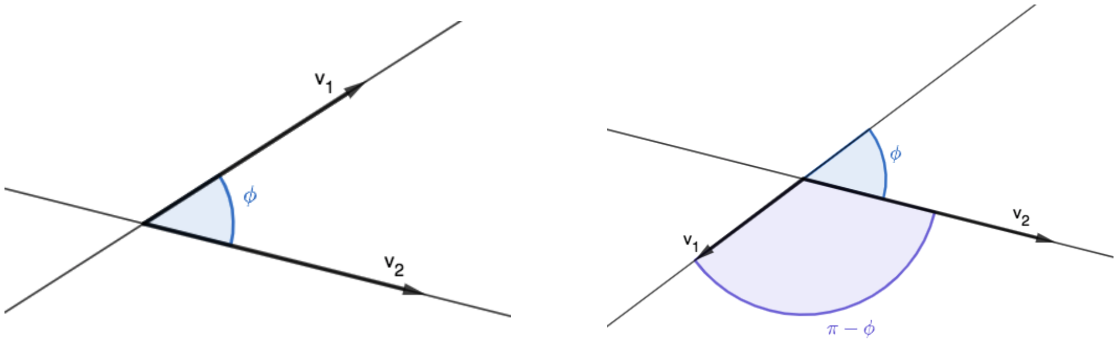


Рис. 71.

$$\cos\phi = \frac{(v_1, v_2)}{|v_1| \times |v_2|} \qquad \cos\phi = -\frac{(v_1, v_2)}{|v_1| \times |v_2|}$$

$$\cos\phi = \frac{|(v_1, v_2)|}{|v_1| \times |v_2|}$$

Утв. 6.

Угол между прямыми:

$$\begin{cases} x = x_1 + t\alpha_1 \\ y = y_1 + t\beta_1 \\ z = z_1 + t\gamma_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_2 + t\alpha_2 \\ y = y_2 + t\beta_2 \\ z = z_2 + t\gamma_2 \end{cases}$$

вычисляется по формуле $cos\phi = \dfrac{|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \times \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$

11.4.2 Угол между прямымой и плоскостью

$$\sin\phi = \frac{(n, v)}{|n| \times |v|}$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} + \phi) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - (-\phi)) = \sin(-\phi) = -\sin\phi = -\frac{(n, v)}{|n| \times |v|}$$

$$\sin\phi = \frac{|(n, v)|}{|n| \times |v|}$$

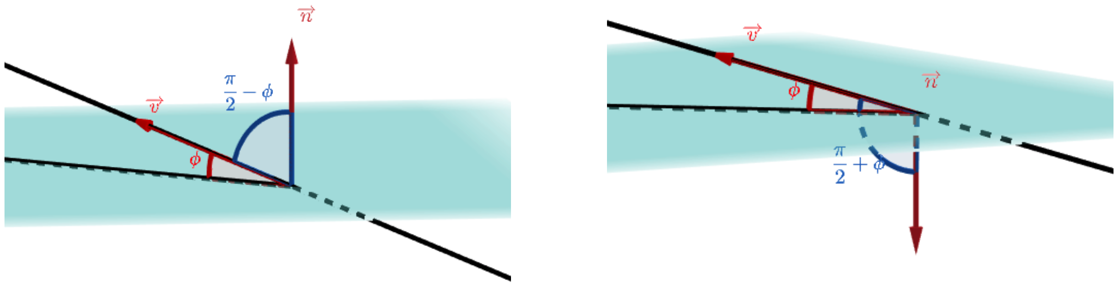


Рис. 72.

Утв. 7.
Угол между плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$ вычисляется по формуле:

$$\sin\phi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \times \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

11.4.3 Расстояние от точки до прямой

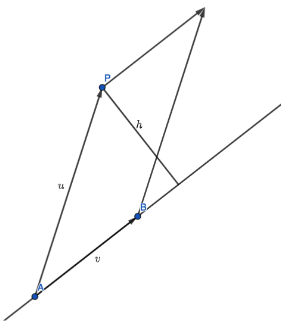


Рис. 73.

$S = |v| \times h$
$S = |[AP, v]|$
$h = \dfrac{|[AP, v]|}{|v|}$

Утв. 8.

Расстояние от точки $P(x_0; y_0; z_0)$ до прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \quad \text{вычисляется по формуле:}$$

$$\rho = \frac{\left|\left(\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\right)\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

11.4.4 Расстояние между скрещивающимися прямыми

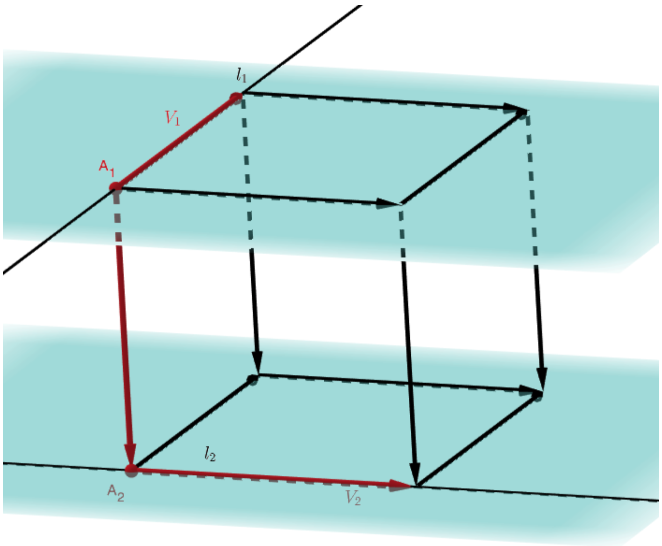


Рис. 74.

$\pi_1 \supset l_1, \pi_1 || l_2$
$\pi_2 \supset l_2, \pi_2 || l_1$

Рассмотрим параллелепипед порожденный A_1A_2, v_1, v_2
$V = | < A_1A_2, v_1, v_2 > |$
$V = S \times h = |[v_1, v_2]| \times h$
$h = \dfrac{| < A_1A_2, v_1, v_2 > |}{|[v_1, v_2]|}$

Утв. 9.

Расстояние между прямыми $\begin{cases} x = x_1 + t\alpha_1 \\ y = y_1 + t\beta_1 \\ z = z_1 + t\gamma_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_2 + t\alpha_2 \\ y = y_2 + t\beta_2 \\ z = z_2 + t\gamma_2 \end{cases}$ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{\left| det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}}$$

11.5 Замена координат

СО задается точкой и направляющими векторами (репером). e_1, e_2, e_3 – старый базис, e'_1, e'_2, e'_3 – новый базис.
$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3$
$e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3$
$e'_2 = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3$

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

Опр. 1. Матрица С назывется матрицей перехода из старого базиса e_1, e_2, e_3 к новому базису e'_1, e'_2, e'_3

Связь координат вектора в старом и новом базисе
У v координаты $(x; y; z)$ в e_1, e_2, e_3. $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$
У v координаты $(x'; y'; z')$ в e'_1, e'_2, e'_3.
$v = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 =$
$= x'(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3) + y'(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3) + z'(c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3) =$
$(c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z')e_1 +$
$(c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z')e_2 +$
$(c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z')e_3$

$$x' = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
$$y' = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z'$$
$$z' = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'$$

Утв. 10.

Старые координаты вектора выражаются через новые по формуле $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Лекция 12

12.1 Переход в новый базис

e_1, e_2, e_3 – старый базис, e_1', e_2', e_3' – новый базис.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от старого базиса e_1, e_2, e_3 к новому базису e_1', e_2', e_3'

В столбцах матрицы C стоят координаты новых базисных векторов в старом базизе: $e_1' = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3$

x, y, z – координаты вектора в старом базисе
x', y', z' – координаты вектора в новом базисе

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Утв. 1. Матрица C – невырождена

Доказательство

Так как e_1', e_2', e_3' – базис, то столбцы матрицы C линейно-независимы $\implies rgC = 3 \implies detC \neq 0$

12.1.1 Преобразование координат точки

Запишем координаты произвольной точки в новом базисе. Для этого нужен репер.
O, e_1, e_2, e_3 – старый репер
O', e_1', e_2', e_3' – новый репер
x, y, z – старые координаты M это координаты $\overrightarrow{OM}$ в старом базисе
x', y', z' – новые координаты M это координаты $\overrightarrow{O'M}$ в новом базисе

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'}$$

Утв. 2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

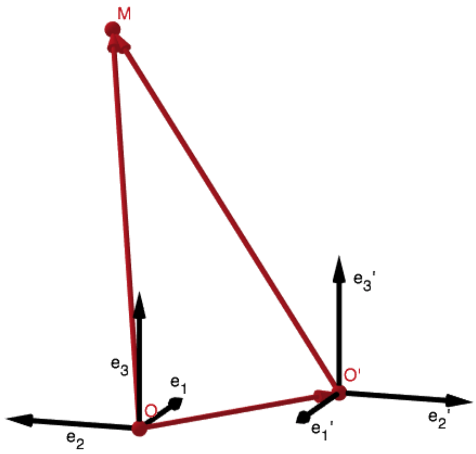


Рис. 75.

Где $(x;y;z)$ – старые координаты M в репере O, e_1, e_2, e_3, $(x';y';z')$ – новые координаты M в репере O', e_1', e_2', e_3', $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты O в репере O, e_1, e_2, e_3

12.2 Переход от ортонормированного базиса к ортонормированному базису

e_1, e_2, e_3 – старый ОН базис, e_1', e_2', e_3' – новый ОН базис.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$CC^T = \left(\begin{array}{c|c|c} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 & c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} & \dots \\ \hline \dots & c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 & \dots \\ \hline \dots & \dots & c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 \end{array}\right)$$

$$C^TC = \begin{pmatrix} (e_1', e_1') & (e_1', e_2') & (e_1', e_3') \\ (e_2', e_1') & (e_2', e_2') & (e_2', e_3') \\ (e_3', e_1') & (e_3', e_2') & (e_3', e_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Получили, что если переходим от ОН к ОН, то $CC^T = E$, где C – матрица перехода. Теперь рассмотрим e_1, e_2, e_3 – старый ОН базис, e_1', e_2', e_3' – новый какой-то базис и пусть матрица перехода C удовлетворяет $C^TC = E$.

$$\implies \begin{cases} (e_1', e_1') = (e_2', e_2') = (e_3', e_3') = 1 \implies \text{длина каждого } 1 \\ (e_1', e_2') = (e_1', e_3') = (e_2', e_3') = 0 \implies \text{попарно ортогональны} \end{cases} \implies$$

$\implies e_1', e_2', e_3' - -$ ОН базис

Опр. 1. Матрица C называется ортогональной, если $C^T C = E$

Утв. 3.

Пусть e_1, e_2, e_3 – ОН базис, а C матрица перехода к базису e_1', e_2', e_3', тогда новый базис e_1', e_2', e_3' – ОН $\iff$ C – ортогональнаа.

$C^T C = E \implies C^{-1} = C^T (CC^T = E)$

12.3 Ортогональная, специальная ортогональная, общая линейная группы

12.3.1 Ортогональная и специальная ортогональная группы

Проверим выполняется ли определение группы для ортогональных матриц:

1. A, B – ортогональные $\implies (AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T EB = B^T B = E$
2. $A^{-1} = A^T \implies (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^T = A^T A = E$

(наличие E и ассоциативность очевидны)

Утв. 4.

Ортогональные матрицы порядка n образуют группу (ортогональная группа) $O(n)$ относительно перемножения матриц.

$O(2)$ – группа ортогональных матриц 2×2

$O(3)$ – группа ортогональных матриц 3×3

A – ортогональна $\implies A^T A = E \implies \det(A^T A) = \det E \implies \det A^T \times \det A = 1 \implies \det A \times \det A = 1$

Утв. 5. A – ортогональна $\implies \det A = \pm 1$

Проверим выполнение определение группы для ортогональных матриц с $\det = 1$:

1. A, B – ортогональные $\det A = \det B = 1 \implies AB$ ортогональная
2. $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$

(наличие E и ассоциативность очевидны)

Ортогональные матрицы порядка n образуют группу (специальную ортогональную группу) $SO(n) = \{A \in O(n) | \det A = 1\}$

12.3.2 Общая линейная группа

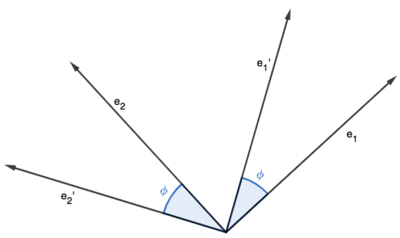
e_1, e_2, e_3, e_1', e_2', e_3', e_1'', e_2'', e_3'' – произвольные базисы
C – матрица перехода от e_1, e_2, e_3 к e_1', e_2', e_3'
C' – матрица перехода от e_1', e_2', e_3' к e_1'', e_2'', e_3''

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = CC' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, A = CC'$$

Утв. 4.
При последовательных заменах базиса матрицы замены перемножаются
Будет ли матрица A – матрицей перехода (то есть невырожденной матрицей)?
$GL(n) = \{A^{n\times n} | \det A \neq 0\}$ – общая линейная группа (невырожденные матрицы)
Проверим выполняется ли определение группы:
1. $\det(AB) = \det A \times \det B$
2. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
(наличие E и ассоциативность очевидны)

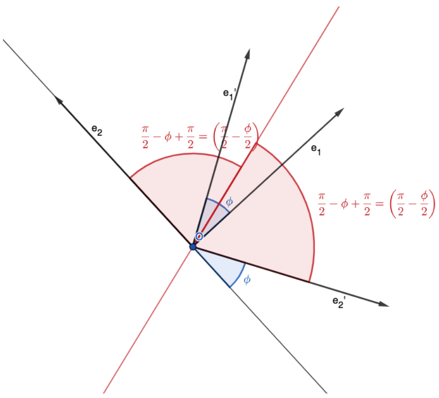
Утв. 5. $GL(n)$ – группа

12.4 Как устроена ортогогональная и специальная ортогональная группы



$$e_1' = \cos(\phi)e_1 + \sin(\phi)e_2$$
$$e_1' = -\sin(\phi)e_1 + \cos(\phi)e_2$$

$C = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$, $\det C = 1$ – описывает поворот на угол ϕ



$$e_1' = \cos(\phi)e_1 + \sin(\phi)e_2$$
$$e_1' = \sin(\phi)e_1 - \cos(\phi)e_2$$

$C = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}$, $\det C = -1$ – описывает отражение относительно биссектрисы угла $\angle(e_1, e_1')$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \right\}$$
$$O(2) = SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \right\}$$

12.5 Как устроена общая линейная группа

e_1, e_2, e_3, e_1', e_2', e_3' – одинаково ориентированные, ортонормированные базисы. (одинаковая ориентация нужна чтобы один из другого можно было получить непрерывным поворотом, если бы рассматривали произвольно ориентированные базисы, то пришлось бы описывать группу $O(3)$, в которой есть отражение, а это очень сложно)

$\pi(e_1, e_2)$ – плоскость порожденные e_1 и e_2

$\pi(e_1', e_2')$ – плоскость порожденные e_1' и e_2'

$\pi(e_1, e_2) \cap \pi(e_1', e_2') = l$ – линия узлов

α – угол от e_1 до линии узлов, отсчитываемый от e_1 в сторону e_2. α – угол прецессии

β – угол между e_3 и e_3'. β – угол нутации

γ – угол между линией узлов и e_1'. γ – угол собственного вращения

α, β, γ – углы Эйлера

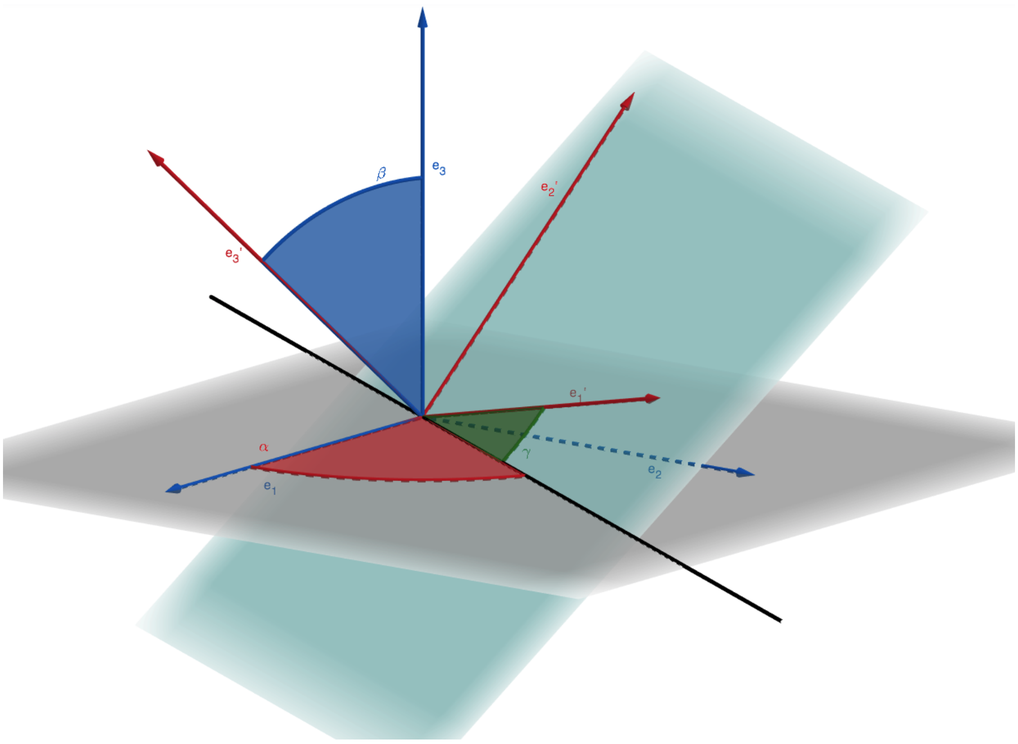


Рис. 76.

Переход от старого базиса к новому опишем как преобразование, записанное как композиция трех вращений.

1. Поворот вокруг оси e_3 на угол α, чтобы e_1 лег на линию узлов

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Поворот вокруг линии узлов на угол β, чтобы e_3 перешел в e_3' (поворот вокруг оси x так как линия узлов совпала с e_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

После этого $e_1 \perp e_2$ лежат в одной плоскости $\pi(e_1', e_2')$ и третий поворот автоматически переведет e_2 в e_2' так как базисы одинаково ориентированы, а ориентация и условие ортогональности однозначно задают третий вектор по двум построенным.

3. Поворот вокруг оси e_3 (z)на угол γ, пока линия узлов не повернется в e_1'

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Полное преобразование запишется как композиция преобразований:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\gamma\sin\alpha - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \hline \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha + \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\gamma\sin\beta \\ \hline \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{array}\right)$$

Итак:

$$SO(3) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\gamma\sin\alpha - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \hline \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha + \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\gamma\sin\beta \\ \hline \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{array}\right) \right\}$$

Лекция 13

13.1 Цилиндрические и сферические координаты в пространстве

Декартовы определяются базисом и точкой. Для цилиндрических и сферических нужны:

1. Ориентированная плоскость π – экваториальная плоскость
2. Точка O в плоскости π – полюс
3. Луч Ox – полярная ось
4. Ось $Oz \perp \pi$ – зенитная ось

M – произвольная точка, M' – основание перпендикуляра, опущенного из M на π
M'' – основание перпендикуляра, опущенного из M на зенитную ось

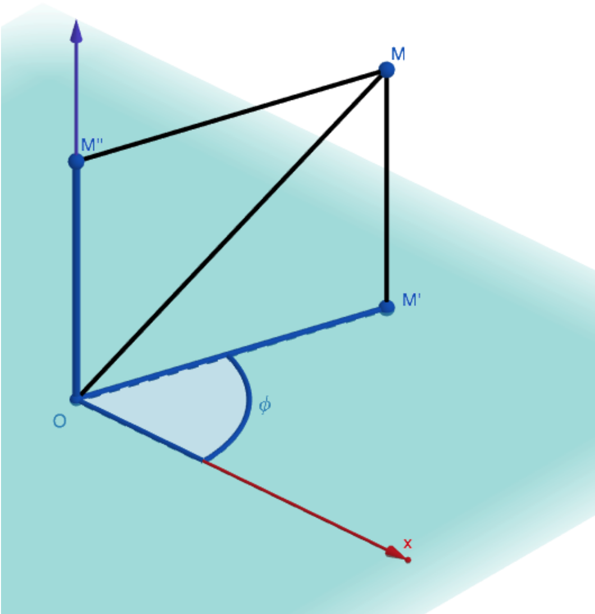


Рис. 77.

Цилиндрические координаты

Опишем координаты точки тремя числами:

$$\begin{cases} 1. r = |OM'| \\ 2. \phi - \text{ угол от полярной оси до } |OM'|, \text{ отсчитываемый в положительном направлении} \end{cases}$$

(полярные координаты точки M' в π)

3. z – координата M'' на оси Oz

У точек зенитной оси $z = 0, \phi$ не определен.

Ограничения: $(r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$

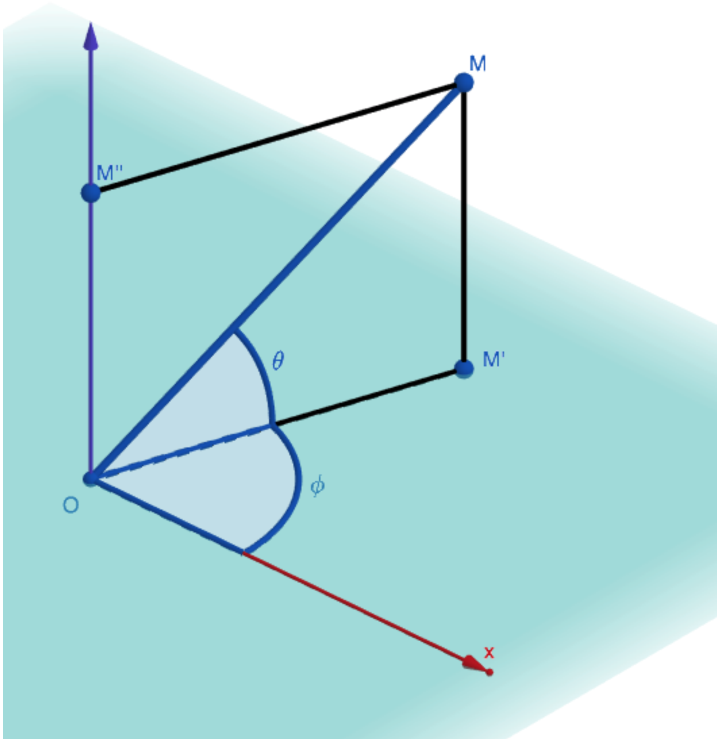


Рис. 78.

Сферические координаты

Опишем координаты точки тремя числами:

1. $r = |OM|$
2. ϕ – угол от полярной оси до $|OM'|$, отсчитываемый в положительном направлении

3. θ – угол от OM' до OM, положительный, если точка с той же с ороны куда направлен Oz и отрицательный иначе.

В географии: ϕ – долгота, θ – широта

В астрономии: ϕ – прямое восхождение, θ – склонение

У точек зенитной оси не определен ϕ, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, у точки $Or = 0, \phi, \theta$ не определены

Ограничения: $(r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

Формулы перехода

Пусть e_1, e_2 – ортонормированный базис в плоскости π, $e_3 || Oz$, $|e_3| = 1$

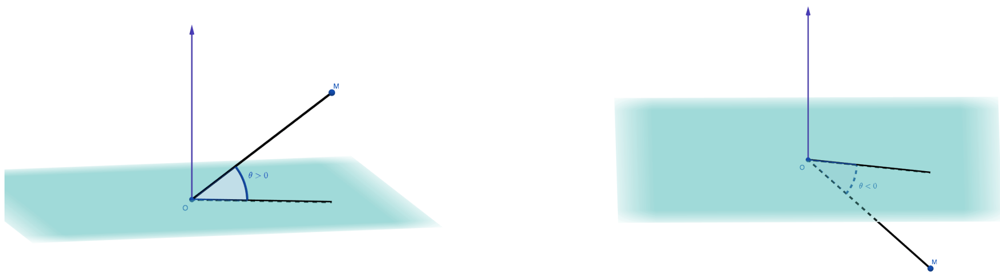


Рис. 79.

Получим прямоугольную декартову систему координат O, e_1, e_2, e_3

Цилиндрические $\to$ декартовы:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

Декартовы $\to$ цилиндрические:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \begin{cases} \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

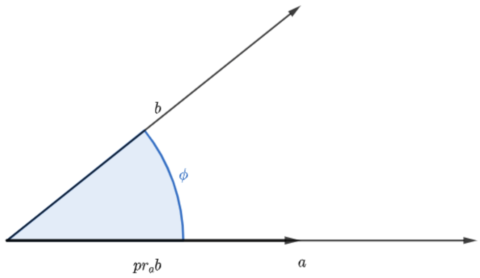
Сферические $\to$ декартовы:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\cos\theta\sin\phi \\ z = r\sin\phi \end{cases}$$

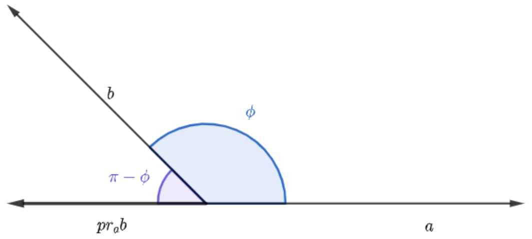
Декартовы $\to$ сферические:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \sin\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \begin{cases} \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \end{cases}$$

13.2 Проекция вектора на другой вектор



$$pr_a b = |b|\cos\phi \times \frac{a}{|a|} =$$
$$= \frac{|a||b|\cos\phi}{a^2} \times a = \frac{(a,b)}{(a,a)} a$$



$$pr_a b = -|b|\cos(\pi-\phi)\times\frac{a}{|a|} =$$
$$= \frac{|a||b|\cos\phi}{a^2}\times a = \frac{(a,b)}{(a,a)}a$$

Утв. 1. $pr_a b = \dfrac{(a,b)}{(a,a)}a$

13.3 Положение 4 плоскостей в зависимости от ранга расширенной матрицы

$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ – четыре плоскости, $\pi_i : A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 + D_i = 0$

$$rk\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 - & \text{совпадающие плоскости} \\ 2 - & \text{пучок плоскостей} \\ 3 - & \text{связка плоскостей} \\ 4 - & \text{общее положение (нет общей точки)} \end{cases}$$

13.4 Кривые второго порядка

$$F(x,y) = \underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная часть}} + \underbrace{2a_1x + 2a_2y + a_0}_{\text{линейная часть}}$$

Опр. 1. Кривая второго порядка – множество точек, которое в некоторой системе координат задается уравнением $F(x,y)=0$, где F – многочлен второй степени

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$F'(x',y') = 0, F'(x',y') = F(x(x',y'), y(x',y')) = F(c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, c_{21}x' + c_{22}y' + y_0)$

Ясно, что $\deg F' \leq \deg F = 2$

С другой стороны:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

$F(x,y) = F'(x'(x,y), y'(x,y))$

$2 = \deg F \leq \deg F'$

Утв. 2. $\deg F' = \deg F = 2$

Если $\deg = 1 \implies F = 0$ и $G = 0$ задают одну и ту же прямую $\iff F = \lambda G$
С $\deg = 2$ это не так, например $x^2 + y^2 = 0$ и $x^2 + 2y^2 = 0$ задают одно и тоже ГМТ, но $F \neq \lambda G$

Опр. 2. Квадрика – класс эквивалентности уравнений второй степени $F = 0$ относительно пропорциональности. То есть $F = 0 \sim G = 0 \iff G = \lambda F$

Квадрика однозначно задает кривую второго порядка, но кривая второго порядка вообще говоря неоднозначно задает квадрику. В будующем докажем, что если кривая второго порядка содержит более одной точки, то ей соответствует одна квадрика. Если рассматривать многочлен F над полем $\mathbb{C}$, то соответствие однозначно в обе стороны.

13.4.1 Теорема о классификации квадрик

Рассмотрим квадрику, заданную в прямоугольной системе координат уравнением $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{a_{11}}\tilde{x}^2 + 2\tilde{a_{12}}\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{a_{22}}\tilde{y}^2 + 2\tilde{a_1}\tilde{x} + 2\tilde{a_2}\tilde{y} + \tilde{a_0}$
Тогда существует некоторая прямоугольная система координат, в которой уравнение квадрики будет иметь один из следующих видов

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (a \geq b > 0)$ – эллипс
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1, (a \geq b > 0)$ – мнимый эллипс
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, (a \geq b > 0)$ – пара пересекающихся мнимых прямых
   $(x^2 + k^2y^2 = 0, (k \geq 1))$
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$ – гипербола
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, (a \geq b > 0)$ – пара пересекающихся прямых
   $(x^2 - k^2y^2 = 0, (k \geq 1))$
6. $y^2 = 2px, (p > 0)$ – парабола
7. $y^2 - a^2 = 0, (a > 0)$ – пара параллельных прямых
8. $y^2 + a^2 = 0, (a > 0)$ – пара мнимых параллельных прямых

9. $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых

Лемма. 1. Поворотом осей можно избавиться от коэффициентов при xy

► $\tilde{x} = \cos\phi\tilde{\tilde{x}} - \sin\phi\tilde{\tilde{y}}\tilde{y} = \sin\phi\tilde{\tilde{x}} + \cos\phi\tilde{\tilde{y}}$

$\tilde{\tilde{F}}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}) =$

$\tilde{a_{11}}(\cos\phi\tilde{\tilde{x}} - \sin\phi\tilde{\tilde{y}})^2 + 2\tilde{a_{12}}(\cos\phi\tilde{\tilde{x}} - \sin\phi\tilde{\tilde{y}})(\sin\phi\tilde{\tilde{x}} + \cos\phi\tilde{\tilde{y}}) + \tilde{a_{22}}(\sin\phi\tilde{\tilde{x}} + \cos\phi\tilde{\tilde{y}})^2 +$
$+ 2\tilde{a_1}(\cos\phi\tilde{\tilde{x}} - \sin\phi\tilde{\tilde{y}}) + 2\tilde{a_2}(\sin\phi\tilde{\tilde{x}} + \cos\phi\tilde{\tilde{y}}) + \tilde{a_0}$

Коэффциент при xy это:

$2\tilde{\tilde{a_{12}}} = -2\tilde{a_{11}}\cos\phi\sin\phi + 2\tilde{a_{12}}(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2\tilde{a_{22}}\cos\phi\sin\phi =$
$= -\tilde{a_{11}}\sin 2\phi + 2\tilde{a_{12}}\cos 2\phi + \tilde{a_{22}}\sin 2\phi = (a_{22} - a_{11})\sin 2\phi + 2\tilde{a_{12}}\cos 2\phi$

$\tilde{\tilde{a_{12}}} = 0 \iff \dfrac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \dfrac{\tilde{a_{22}} - \tilde{a_{11}}}{\tilde{a_{12}}}$

(если $\tilde{a_{12}} = 0$, то поворот делать не нужно, коэффциент при xy и так $= 0$)

Если сделать поворот на $\phi = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{\tilde{a_{22}} - \tilde{a_{11}}}{\tilde{a_{12}}}$, то $\tilde{\tilde{a_{12}}} = 0$ ◄

Выделением полного квадрата можем избавиться от линейной части:

$x^2 + \alpha x = \left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 - \dfrac{\alpha^2}{4}, \quad x' = x + \dfrac{\alpha}{2}, \quad x^2 + \alpha x \to (x')^2 - \dfrac{\alpha^2}{4}$

Доказательство теоремы

► Лемма 1 $\to$ избавились от xy

Возможные квадратичные части $\lambda x^2 + \mu y^2 + \dots$

1.$\lambda\mu > 0$

2.$\lambda\mu < 0$

3.$\lambda\mu = 0$

Случай 1

При необходимости умножим на (-1) чтобы $\lambda, \mu > 0$

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + b_1 x + b_2 y + c = \lambda\left(\lambda^2 + \frac{b_1}{\lambda}x\right) + \mu\left(\mu^2 + \frac{b_2}{\mu}x\right) + c =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + 2\frac{b_1}{2\lambda}x + \left(\frac{b_1}{2\lambda}\right)^2\right) + \mu\left(\mu^2 + 2\frac{b_2}{2\mu}x + \left(\frac{b_2}{2\mu}\right)^2\right) + \underbrace{c - \lambda\left(\frac{b_1}{2\lambda}\right)^2 - \mu\left(\frac{b_2}{2\mu}\right)^2}_{c'}$$

$x' = x + \dfrac{b_1}{2\lambda}$ и $y' = y + \dfrac{b_2}{2\mu} \to \lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + c'$

$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = -c'$

(a) $-c' > 0$ – эллипс (если $\mu < \lambda$ сделаем замену $x'' = y'$ и $y'' = x'$),

тогда $\dfrac{(x')^2}{a^2} + \dfrac{(y')^2}{b^2} = 1$, где $a = \sqrt{\dfrac{-c'}{\lambda}}, a = \sqrt{\dfrac{-c'}{\mu}}$

(b) $-c' < 0$ – мнимый эллипс $\dfrac{(x')^2}{a^2} + \dfrac{(y')^2}{b^2} = -1$, где $a = \sqrt{\dfrac{c'}{\lambda}}, b = \sqrt{\dfrac{c'}{\mu}}$

(c) $c' = 0$ – пара пересекающихся мнимых прямых
$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = 0 \iff \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, где $a = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}, b = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$

Случай 2
$\lambda x^2 + \mu y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0$ выделяем полный квадрат и делаем сдвиг.
Приходим к : $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = c'$
(a) $c' = 0$ При необходимости умножим на (-1) чтобы $\lambda > 0, \mu < 0$
$\implies \lambda(x')^2 - |\mu|(y')^2 = 0$ – пара пересекающихся прямых
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, где $a = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}, b = \dfrac{1}{\sqrt{-\mu}}$

(b) $c' \neq 0 \implies \lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = c'$ (можно считать, что $c' > 0$, при необходимости домножим на (-1)) также если $\lambda < 0, \mu > 0$, то обменяем x и y местами ($x' = y, y' = x$), поэтому можем считать что ($\lambda > 0, \mu < 0$)
$\dfrac{x^2}{\frac{c'}{\lambda}} - \dfrac{y^2}{\frac{c'}{-\mu}} = 1 \iff \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = \sqrt{\dfrac{c'}{\lambda}}, b = \sqrt{\dfrac{-c'}{\mu}}$ – гипербола

Случай 3
$\lambda\mu = 0 (\lambda = \mu = 0)$ невозможен так как уравнение второй степени. Можно считать что $\lambda = 0$ (при необходимости обменяем местами оси)
$\mu y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0$ выделяя полный квадрат с y можно сдвигом избавиться от члена с y
$\mu y^2 + 2b_1 x + c = 0$
(a) $b_1 \neq 0$

$$\mu \underbrace{y^2}_{y'} + 2b_1 \underbrace{\left(x + \frac{c}{2b_1}\right)}_{x'} = 0 \to \mu(y')^2 + 2b_1 x' = 0 \to (y')^2 = 2px' (p > 0)$$

при $p < 0$ изменим направление оси $x' (x'' = -x')$ – парабола
(b) $b_1 = 0 \to \mu y^2 + c = 0 \to y^2 + \dfrac{c}{\mu} = 0$

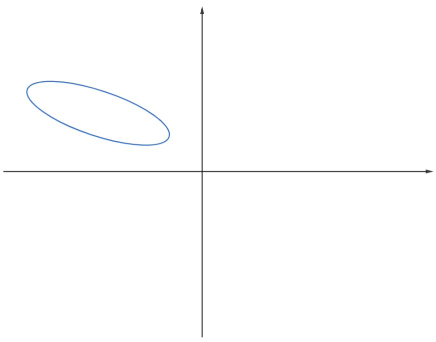
(b') $\dfrac{c}{\mu} > 0 \to y^2 + a^2 = 0, a = \sqrt{\dfrac{c}{\mu}}$ – пара мнимых параллельных прямых

(b'') $\dfrac{c}{\mu} < 0 \to y^2 - a^2 = 0, a = \sqrt{\dfrac{-c}{\mu}}$ – пара параллельных прямых

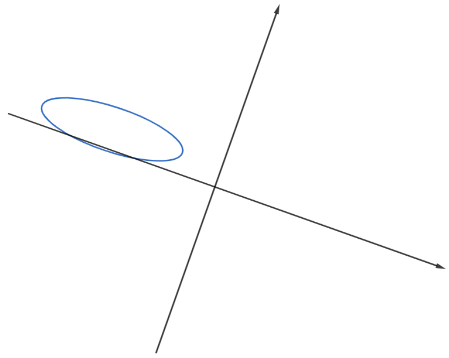
(b''') $\dfrac{c}{\mu} = 0 \to y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых ◄

13.4.2 Следствие из теоремы и геометрическая интерпретация

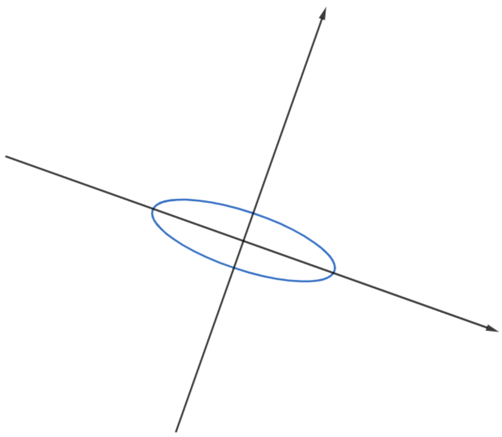
Следствие Квадрики задают следующие геометрические кривые второго порядка: эллипс, парабола, гипербола, пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых, пара совпадающих прямых, точка, $\emptyset$ (их восемь, так как $\emptyset$ задают два разных класса – две квадрики)



1



2



3

Рис. 80.

Лекция 14

14.1 Ортогональный инвариант

14.1.1 Определение и матрицы коэффициентов

Опр. 1. Функция $J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$ называется ортогональным инвариантом, если она не меняется при ортогональной замене координат.
$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$
$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = [$ ортогональное преобразование $] = F(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})) =$
$= \tilde{a_{11}}\tilde{x}^2 + 2\tilde{a_{12}}\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{a_{22}}\tilde{y}^2 + 2\tilde{a_1}\tilde{x} + 2\tilde{a_2}\tilde{y} + \tilde{a_0}$
$J(\tilde{a_{11}}, \tilde{a_{12}}, \tilde{a_{22}}, \tilde{a_1}, \tilde{a_2}, \tilde{a_0}) = J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$
Замечание: мы не требуем чтобы $J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0) = J(\lambda a_{11}, \lambda a_{12}, \lambda a_{22}, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_0)$

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
$= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ – квадратичная часть

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = F(x, y)$$

14.1.2 Инварианты

Опр. 2. След матрицы – сумма ее диагональных элементов.

$$tr \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Инварианты
1. $S = trQ = a_{11} + a_{22}$ $(\deg S = 1)$
2. $\delta = \det Q = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ $(\deg \delta = 2)$
3. $\Delta = \det A$ $(\deg \Delta = 3)$

Если уравнение квадрики умножить на λ то:
$S(\lambda a_{11}, \dots) = \lambda S(a_{11}, \dots)$
$\delta(\lambda a_{11}, \dots) = \lambda^2 \delta(a_{11}, \dots)$
$\Delta(\lambda a_{11}, \dots) = \lambda^3 \Delta(a_{11}, \dots)$

Чтобы понять инварианты ли это относительно ортогональных преобразований – поймем, что происходит при преобразованиях с метрицами A и Q

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & x_0 \\ & & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\text{D}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix} (*) \to F = \underbrace{\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}}_{(*)^T} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \to \tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & 1 \end{pmatrix} \underbrace{D^T A D}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Утв. 1. При заменах координат $\tilde{A} = D^T A D$
Как преобразуется квадратичная часть:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{\tilde{Q}}} & \tilde{a_1} \\ & & \tilde{a_2} \\ \hline \tilde{a_1} & \tilde{a_2} & \tilde{a_0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C^T}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline x_0 & y_0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{Q}} & a_1 \\ & & a_2 \\ \hline a_1 & a_2 & a_0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & x_0 \\ & & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C^T Q}} & * \\ & & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & x_0 \\ & & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C^T Q C}} & * \\ & & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Утв. 2. При заменах координат $\tilde{Q} = C^T Q C$

Утв. 3. δ – Ортогональный инвариант

► $\delta(\tilde{a_{11}}, \tilde{a_{12}}, \dots) = \det(C^T Q C) = \det C^T \times \det Q \times \det C = \underbrace{(\det C)^2}_{(\pm 1)^2 = 1} \times \det Q = \det Q$

$= \delta(a_{11}, a_{12}, \dots)$ ◄

Утв. 3. Δ – Ортогональный инвариант
► $\det D = \det C \times 1 = \det C$
$\delta(\tilde{a_{11}}, \tilde{a_{12}}, \dots) = \det \tilde{A} = \det(D^T A D) = \det D^T \times \det A \times \det D = (\det D)^2 \det A = (\det C)^2 \det A = \det A = \Delta(a_{11}, a_{12}, \dots)$ ◄

Опр. 3. Характеристическим многочленом матрицы $B^{n \times n}$ называется $\det(B - \lambda E)$
Чтобы доказать, что S ортогональный инвариант, рассмотрим:
$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$
$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda^2 - S\lambda + \delta$ – ортогональные инварианы это коэффициенты в характеристическом многочлене.

$\det(\tilde{Q} - \lambda E) = \det(C^T QC - \lambda E) = \det(C^T QC - \lambda CC^T) = \det[C^T(Q - \lambda E)C] = \det C^T \times \det C \times \det(Q - \lambda E) = \det(Q - \lambda E)$

Утв. 4. Характеристический многочлен Q не меняется при ортогональных заменах координат, $\implies$ его коэффициенты S и δ – ортогональные инварианты $\implies$
$\implies$ S – ортогональный инвариант.

		$S\Delta$	δ	Δ
A	1. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	< 0	> 0	$\neq 0$
	2. Мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	> 0	> 0	$\neq 0$
	3. Пара пересекающихся мнимых прямых $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$		> 0	0
	4. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$		< 0	$\neq 0$
	5. Пара пересекающихся прямых $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$		< 0	0
B	6. Парабола $y^2 = 2px$		0	$\neq 0$
C	7. Пара параллельных прямых $y^2 - a^2 = 0$		0	0
	8. Пара мнимых параллельных прямых $y^2 + a^2 = 0$		0	0
	9. Пара совпадающих прямых $y^2 = 0$		0	0

A : $\quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tau \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ – все имеют такой вид.

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

B : $\quad \lambda_2 y^2 + 2b_1 x \quad \lambda_2, b_1 \neq 0$ – все имеют такой вид.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C : $\quad \lambda_2^2 y^2 + \tau \quad$ – все имеют такой вид.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

Утв. 4.

Если $\delta > 0, \quad \Delta \neq 0, \quad S\Delta < 0$, то эллипс

$\delta > 0, \quad \Delta \neq 0, \quad S\Delta > 0$, то мнимый эллипс

$\delta > 0, \quad \Delta = 0$, пара мнимых пересекающихся прямых

$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0$, гипербола

$\delta < 0, \quad \Delta = 0$, пара пересекающихся прямых

$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0$, парабола

$\delta = \Delta = 0$, либо параллельные, либо мнимые параллельные, либо совпадающие, чтобы это понять нужен полуинвариант K, который не изменяется, если $\delta = \Delta = 0$.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы A

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \underbrace{(a_{11} + a_{22} + a_0)}_{trA} \lambda^2 - \left(\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}}_{K} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\delta} \right) \lambda + \det A$$

$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} \qquad \det(\tilde{A} - \lambda E) = \det(D^T A D - \lambda E)$– D не ортогональна.

Утв. 5. При поворотах характеристический многочлен A сохраняется

► $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ [нет смещения, не работаем с переносом СК] $\implies D = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies$

$$D^T D = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C^T} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C^T C} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = ED = D$$

$\det(\tilde{A} - \lambda E) = \det(D^T A D - \lambda E) = \det(D^T A D - \lambda D^T D) = \det[D^T (A - \lambda E) D] = \det D^T \times \det D \times \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$ ◄

Лекция 15

15.1 Полуинвариант K

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda^3+\underbrace{(a_{11}+a_{22}+a_0)}_{trA}\lambda^2-\left(\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}}_{K}+\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\delta}\right)\lambda+\Delta$$

Опр. 1. $K=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$

Утв. 1. При поворотах и отражениях число K сохраняется.

► Характерестический многочлен матрицы A сохраняется $\implies$ каждый его коэффициенты сохраняются $\implies$ $K+\delta$ соханяется, а так как δ сохраняется, то и K сохраняется при поворотах и отражениях ◄

При сдвигах число K вообще говоря не сохраняется.

Утв. 2. Если $\delta=\Delta=0$, то при сдвигах число K сохраняется.

► Так как K сохраняется при поворотах, можно считать что мы уже сделали нужный поворот, после которого $a_{12}=0$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\ \delta=a_{11}a_{22},\quad \delta=0\implies a_{11}=0\vee a_{22}=0$$

Без ограничения общности считаем, что $a_{11}=0\wedge a_{22}\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\ \Delta=-a_1^2a_{22},\quad \Delta=0\wedge a_{22}\neq 0\implies a_1=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\ F(x,y)=a_{22}y^2+2a_2y+a_0\implies K=0+a_{22}a_0-a_2^2$$

Делаем сдвиг: $x=\tilde{x}+x_0,\quad y=\tilde{y}+y_0$

$\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y})=a_{22}(\tilde{y}+y_0)^2+2a_2(\tilde{y}+y_0)+a_0=a_{22}\tilde{y}^2+(2a_{22}y_0+2a_2)\tilde{y}+(a_{22}y_0^2+2a_2y_0+a_0)$

$\tilde{a_{22}}=a_{22},\quad \tilde{a_2}=a_{22}y_0+a_2,\quad \tilde{a_0}=a_{22}y_0^2+2a_2y_0+a_0$

$\tilde{K}=\tilde{a_{22}}\tilde{a_0}-\tilde{a_2}^2=a_{22}(a_{22}y_0^2+2a_2y_0+a_0)-(a_{22}y_0+a_2)^2=$

$=\cancel{a_{22}^2y^2}+\cancel{2a_{22}a_2y_0}+a_{22}a_0-\cancel{a_{22}^2y^2}-\cancel{2a_{22}a_2y_0}+a_2^2=a_{22}a_0+a_2^2=K$ ◄

Утв. 3. Для квадрик с $\delta = \Delta = 0$ величина K является инвариантом (поэтому и говорят, что K – полуинвариант).
K сохраняет знак при умножении, потому что K – многочлен второй степени, соответственно различаем $K = 0, K < 0, K > 0$
7. $y^2 - a^2 = 0 \quad K = -a^2(< 0)$
8. $y^2 + a^2 = 0 \quad K = a^2(> 0)$
9. $y^2 = 0 \quad K = 0$

Теорема Необходимые и достаточные условия принадлежности квадрики к одному из 9 типов.

1.	Эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta < 0$
2.	Мнимый эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta > 0$
3.	Пара пересекающихся мнимых прямых	$\delta > 0$	$\Delta = 0$
4.	Гипербола	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$
5.	Пара пересекающихся прямых	$\delta < 0$	$\Delta = 0$
6.	Парабола	$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$
7.	Пара параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K < 0$
8.	Пара мнимых параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K > 0$
9.	Пара совпадающих прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K = 0$

- $\boxed{\delta.}$
  - $\boxed{\neq 0 \implies \mathbf{A}.}$
    - $\boxed{\delta > 0 \implies 1|2|3.}$
      - $\boxed{\Delta = 0 \implies \mathbf{3}}$
      - $\boxed{\Delta \neq 0 \implies 1|2.}$
        - $\boxed{S\Delta < 0 \implies \mathbf{1}}$
        - $\boxed{S\Delta > 0 \implies \mathbf{2}}$
    - $\boxed{\delta < 0 \implies 4|5.}$
      - $\boxed{\Delta = 0 \implies \mathbf{5}}$
      - $\boxed{\Delta \neq 0 \implies \mathbf{4}}$
  - $\boxed{= 0 \implies \mathbf{B}|\mathbf{C}.}$
    - $\boxed{\Delta \neq 0 \implies \mathbf{6}}$
    - $\boxed{\Delta = 0 \implies 7|8|9.}$
      - $\boxed{K < 0 \implies \mathbf{7}}$
      - $\boxed{K > 0 \implies \mathbf{8}}$
      - $\boxed{K = 0 \implies \mathbf{9}}$

15.2 Распадающиеся кривые

$F(x, y) = 0$ – алгебраическая кривая

Опр. 2. F распадающаяся, если $F = F_1 \times F_2, \deg F_1 > 0 \wedge \deg F_2 > 0$

Тогда $F = 0 \iff \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases}$

Утв. 4. Если алгебаическая кривая $F(x, y) = 0$ содержит прямую $Ax + By + C = 0$, то она распадается на $F(x, y) = F_1(x, y)(Ax + By + C)$

► $f(x, y) = Ax + By + C$

Разделим $F(x, y)$ на $f(x, y)$ с остатком как многочлен от x ($A \neq 0$, если не так, то $B \neq 0$ и рассматриваем по y)

$F(x, y) = F_1(x, y)f(x, y) + r(x, y)$

Пусть $r \not\equiv 0 \implies \exists y_0 \big| r(y_0) \neq 0$ найдем $x_0 \big| f(x_0, y_0) = 0: \quad x_0 = -\dfrac{By_0 + C}{A}$

$(x_0; y_0)$ лежит на прямой $\implies \begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ f(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

$F(x_0, y_0) = F_1(x_0, y_0)f(x_0, y_0) + r(y_0) \implies 0 = r(x_0, y_0) \implies$ противоречие с тем что $r \not\equiv 0$ Поэтому $F(x, y) = F_1(x, y)f(x, y) = F_1(x, y)(Ax + By + C)$ ◄

Случай квадрик $F(x, y) = (A_1x + B_1y + C_1)(Ax + By + C)$ Как разложить квадрику, если это возможно?

$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 =$

$= a_{11}(x - x_1)(x - x_2), x_{1,2} = \dfrac{* \pm \sqrt{\text{квадратный трехчлен от } y}}{2*}$

$D = a_{11}\Delta$, видно, что корень извдечется, так как $\Delta = 0$ в распадающихся квадриках.

15.3 Симметрические многочлены

Опр. 3. Симметрические многочлены – многочлены не меняющиеся при перестановке переменных.

Например: $\lambda_1 + \lambda_2$

Теорема Любой симметрический многочлен выражается через элементарные.

Например: $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2$

J – ортогональный инвариант. Типы квадрик $[1-5]$ приводятся к $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \tau \implies J(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$

Так как J – ортогональный инвариант, то он не должен меняться при отражении осей (перестановке переменных) $\implies$ он симметрический $\implies$ J выражается через сим-

метрические многочлены: $J(\lambda_1, \lambda_2, \tau) = \rho\left(S, \delta, \dfrac{\Delta}{\delta}\right)$.
Этот факт показывает полноту системы ортогональных инвариантов (S, δ, Δ)

Утв. 5. Любой ортогональный инвариант является многочленом от (S, δ, Δ)

15.4 Теорема единственности для кривых второго порядка

Квадрика однозначно задает кривую второго порядка, но не все кривые второго порядка однозначно задают квадрику.

Опр. 4. Содержательная кривая – кривая, содержащая более одной точки.

Содержательные	Не распадающиеся (коники)	1. Эллипс 2. Парабола 3. Гипербола
	Распадающиеся	4. Пара пересекающихся прямых 5. Пара параллельных прямых 6. Пара совпадающих прямых
Не содержательные		7. Точка 8. Пустое множество

Теорема (О единственности для кривых второго порядка.)
Через 5 точек, среди которых никакие 4 не лежат на одной прямой, можно провести единственную квадрику.
$P_i = (x_i; y_i), i = \overline{1,5} \implies \exists F(x, y)\big|\forall i \in \{1 \ldots 5\}$
$F(x_i, y_i) = 0 \land \forall i \in \{1 \ldots 5\} \quad G(x_i, y_i) = 0 \iff G = \lambda F$
► $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$

$$\begin{cases} F(x_1, y_1) = 0 \\ \ldots \\ F(x_5, y_5) = 0 \end{cases} \quad (*) \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_1x_1 + 2a_2y_1 + a_0 = 0 \\ \ldots \\ a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2a_1x_5 + 2a_2y_5 + a_0 = 0 \end{cases}$$

$x_1, y_1, \ldots, x_5, y_5$ – числа
$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$ – неизвестные
Система из 5 линейных однородных уравнений на 6 переменных $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \implies$ всегда есть нетривиальное решение. Могут ли быть два непропорциональных нетривиальных решения?
Да, $\iff rg < 5$. То есть все решения пропорциональны $\iff$ строки в $(*)$ линейно независимы. Докажем что это выполняется. Пусть это не так, тогда без ограничения

общности положим, что 5-я строка является линейной комбинацией остальных. Это значит, что любая квадрика, проходящая через точки P_1, P_2, P_3, P_4 проходит и через P_5. Для завершения доказательства нужно получить противоречие, то есть предъявить квадрику, проходящую через P_1, P_2, P_3, P_4 и не проходящую через P_5.
1. Если P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, тогда m – прямая, проходящая через P_4, но

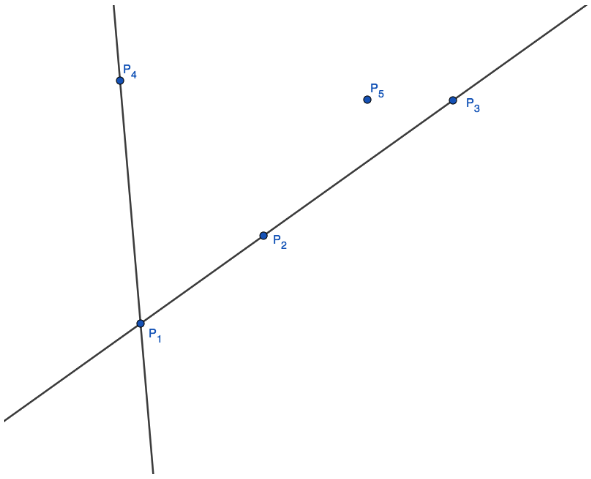


Рис. 81.

не проходящую через P_5. $l \cup m$ – искомая квадрика.

2. Если никакие P_1, P_2, P_3, P_4 не лежат на одной прямой, тогда рассмотрим две квад-

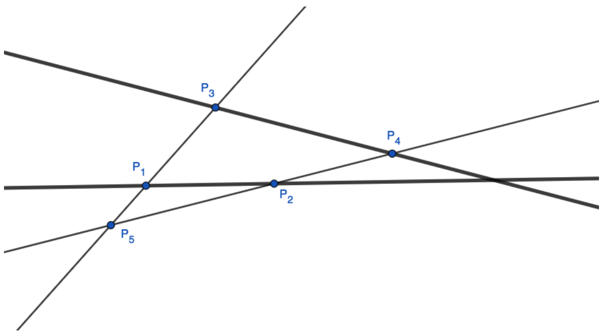


Рис. 82.

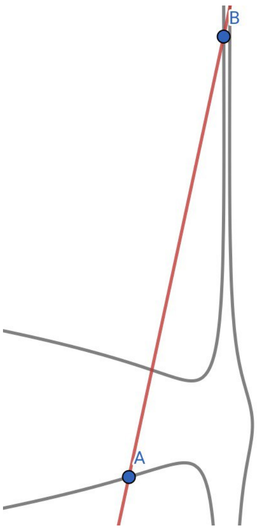
рики: $P_1P_2 \cup P_3P_4$ и $P_1P_3 \cup P_2P_4$ они пересекаются только по точкам $P_1, P_2, P_3, P_4 \implies P_5$ не принадлежит хотя бы одной из них, возьмем ее как искомую.◄

Лекция 16

16.1 Единственность содержательной кривой второго порядка

Утв. 1. Содержательная кривая второго порядка задается единственным с точностью до пропорциональности уравнением второго порядка.
Квадрика $\longrightarrow$ геометрическая кривая второго порядка
Квадрика $\longleftrightarrow$ содержательная геометрическая кривая второго порядка
► Невырожденные кривые второго порядка: **эллипс**, **парабола**, **гипербола**, **пара параллельных прямых**, **пара пересекающихся прямых**, **пара совпадающих прямых**. Для первых пяти можем найти 5 точек не лежащих на одной прямой $\implies$ по теореме о единственности квадрики утвердление верно. Рассмотрим пару совпадающих прямых $Ax + By + C = 0$. Пусть она задается двумя уравнениями $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ второго поряка. Квадрика распадается $\implies$ $F_1 = (Ax + By + C)(A_1x + B_1y + C_1)$
$F_2 = (Ax + By + C)(A_2x + B_2y + C_2)$. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ задает прямую, а так как $F_1 = 0$ задает совпадающие прямые, то $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та же прямая что и $Ax + By + C = 0 \implies (A_1x + B_1y + C_1) = \lambda_1(Ax + By + C)$.
Аналогично $(A_2x + B_2y + C_2) = \lambda_2(Ax + By + C)$
$F_1 = \lambda_1(Ax + By + C)^2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_2(Ax + By + C)^2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}F_2$◄

16.2 Пересечение прямых с квадрикой



$F(x, y) = 0$ – алгебраическая кривая степени $k(\deg F(x, y) = k)$. Сколько точек пересечения с прямой может быть? Прямая: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ тогда $F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = 0$ звдает точки пересечения. Это многочлен по t степени не выше $k \implies$ у него не более k нулей или это тождественный 0

Утв. 2. Прямыя либо содержится в кривой, либо имеет с ней $\leq k$ точек пересечения

16.3 Теорема Паскаля

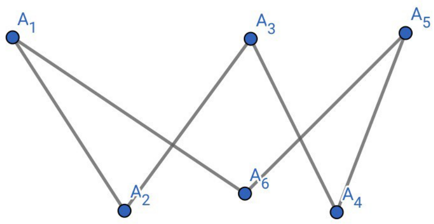


Рис. 83.

Опр. 1. Шестивершинник – упорядоченный набор из шести различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_6$

Опр. 2. Стороны шестивершинника $(A_1A_2, A_4A_5); (A_2A_3, A_5A_6); (A_3A_4, A_6A_1)$ противоположны (+3 к индексам)

Опр. 3. Шестивершинник $A_1, \ldots, A_6$ вписан в квадрику $F(x, y) = 0$, если $A_1, \ldots, A_6$ принадлежат ей $(F(A_1) = \cdots = F(A_6) = 0)$

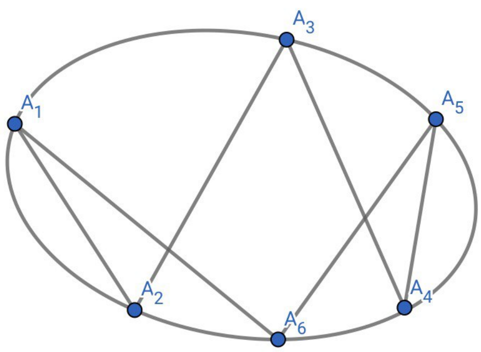


Рис. 84.

Теорема Паскаля.

Если шестивершинник вписан в квадрику, то точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой. $ABCDEF$ - шестивершинник, $P_1 = (AB) \cap (DE)$, $P_2 = (BC) \cap (EF)$, $P_3 = (AF) \cap (CD)$

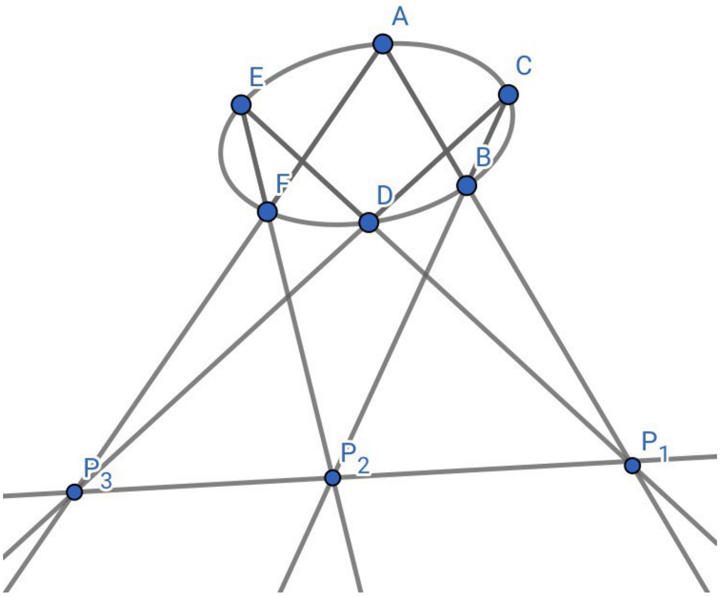
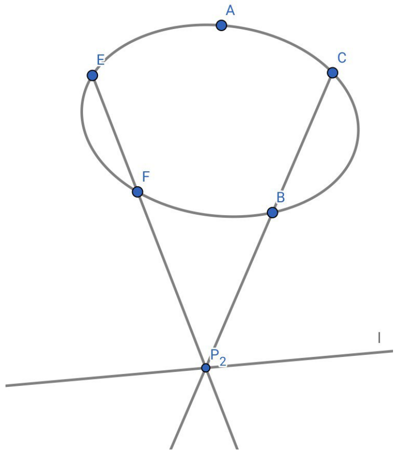


Рис. 85.

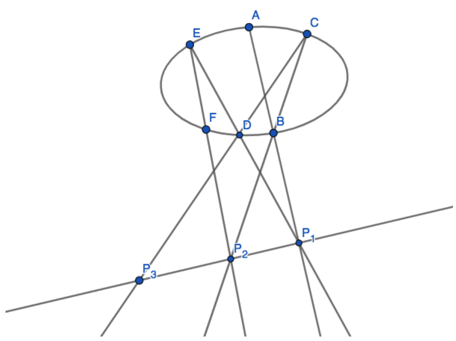
Обратная Теорема Паскаля.
Пусть точки пересечения противоположных сторон шестивершинника лежат на одной прямой и ни какие три его вершины не лежат на одной прямой. Тогда его вершины лежат на некоторой квадрике и она единственна.

Замечание 1. Как строить квадрику по пяти точкам?

1. $P_2 = (BC) \cap (EF)$
2. Проведем произвольную прямую l через P_2
3. $P_1 = l \cap (AB)$



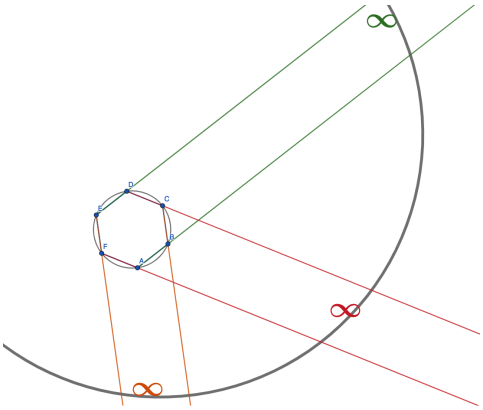
3



4

4. Проведем EP_1 и CP_3. Пусть они пересекаются в точке D. Тогда по обратной теореме Паскаля D лежит на той же квадрике что и $ABCEF$. Проводя различные прямые l будем получать новые точки квадрики.

Замечание 2. Если пара противоположных сторон параллельна, то все верно с точки зрения проективной геометрии: эта пара пересекается в бесконечно удаленной точке. Если все пары пересекаются в бесконечно удаленной точке, то они лежат на бесконечно удаленной прямой.



Так же теорема Паскаля верна для пары пересекающихся прямых при условии что точки поочередно лежат на разных прямых (теорема Паппа).

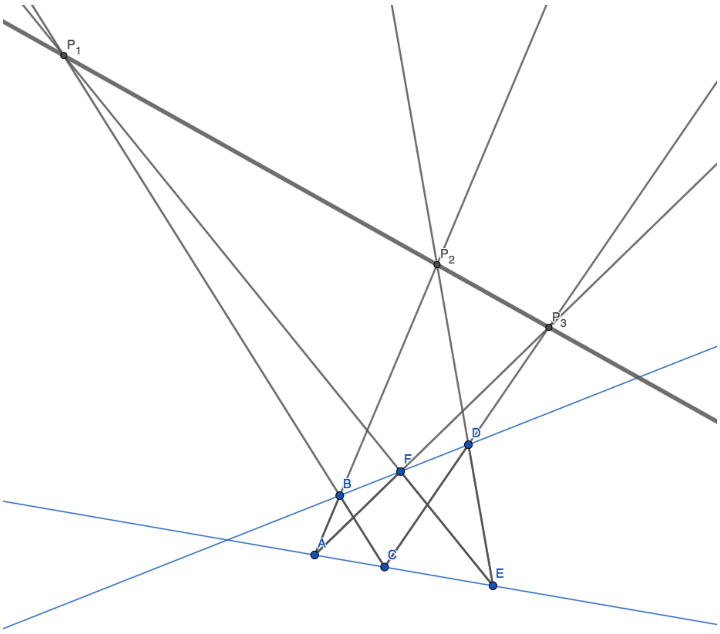


Рис. 86.

Замечание 3. Теорема Паскаля верна если две соседние точки совпали. Тогда вместо соответствующей стороны нужно брать касательную к квадрике в этой точке (Рис. 87.).

Геометрическое построение касательной к квадрике:

1. Есть квадрика и точка A на ней.
2. Берем произвольные точки $BCDE$ и $F = A$ на квадрике.

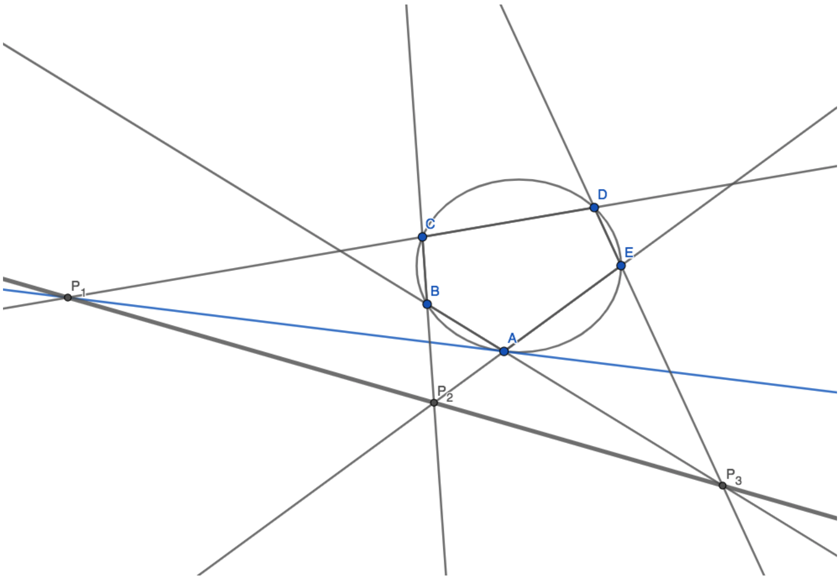


Рис. 87.

3. $P_1 = (AB) \cap (DE), P_2 = (BC) \cap (EF) = (EA)$
4. Проводим $l = (P_1 P_2)$
5. $P_3 = l \cap (CD)$
6. Прямая $P_3 A$ – касательная к квадрике в точке A

► Рассмотрим кубику $F(x,y) = a_{111}x^3 + a_{112}x^2y + a_{122}xy^2 + a_{222}y^3 + a_{011}x^2 + a_{012}xy + a_{022}y^2 + a_{001}x + a_{002}y + a_{000}$ Кубика задается 10-ю коэффициентами $a_{111}, \ldots, a_{000}$. Найдем кубики, проходящие через $A, B, C, D, E, F, P_1, P_2$

$$\begin{cases} F(A) = 0 \\ \vdots \\ F(P_1) = 0 \\ F(P_2) = 0 \end{cases} \quad (*) \text{ – 8 линейных однородных уравнений на 10 неизвестных } a_{111}, \ldots, a_{000}.$$

Если все уравнения линейно независимы, то пространство решений двумерно, то есть $\exists$ две квадрики $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ такие что любое решение $F = 0$ имеет вид $F = \alpha F_1 + \beta F_2$. То есть множество решений это пучок кубик.

Пусть уравнения линейно зависимы. Тогда какое-то из них линейная комбинация остальных.

1. Пусть $F(P_1) = \alpha_1 F(A) + \cdots + \alpha_6 F(P_2) \implies$ любая кубика проходит через точки $A, \ldots, F, P_2$.

Рассмотрим распадающуюся кубику $Q \cup l$, $l \in P_2$, $l \notin P_1$ тогда она проходит через $A, \ldots, F, P_2$, но не проходит через P_1. Случай $F(P_2) = \alpha_1 F(A) + \cdots + \alpha_6 F(P_1)$ аналогичен.

2. Пусть теперь $F(A) = \alpha_2 F(B) + \cdots + \alpha_6 F(F) + \beta_1 F(P_1) + \beta_2 F(P_2) \implies \forall$ кубика,

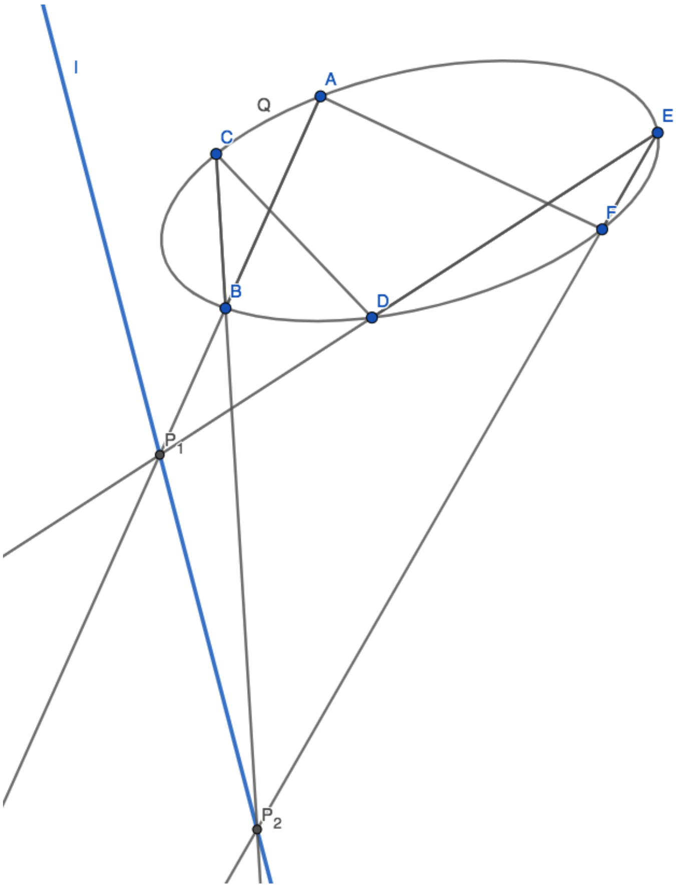


Рис. 88.

проходящая через точки $B, \ldots, F, P_1, P_2$ проходит и через A.

Рассмотрим кубику $(ED) \cap (EF) \cap (BC)$. Она проходит через $B, \ldots, F, P_1, P_2$, но так как никакие три точки не лежат на одной прямой не проходит через A. Случаи $B, \ldots, F$ аналогичны

3. (Паппа) На первой прямой лежат A, C, E, на второй лежат B, D, F. Тогда A тоже не лежит на $(ED) \cap (EF) \cap (BC)$ так как не лежит ни на одной из этих прямых.

Получили противоречие $\implies$ в $(*)$ все уравнения линейно независимы $\implies$ общее решение имеет вид $\alpha F_1 + \beta F_2$ где F_1 и F_2 – два линейно независимых решения $(F_1 \neq \lambda F_2)$

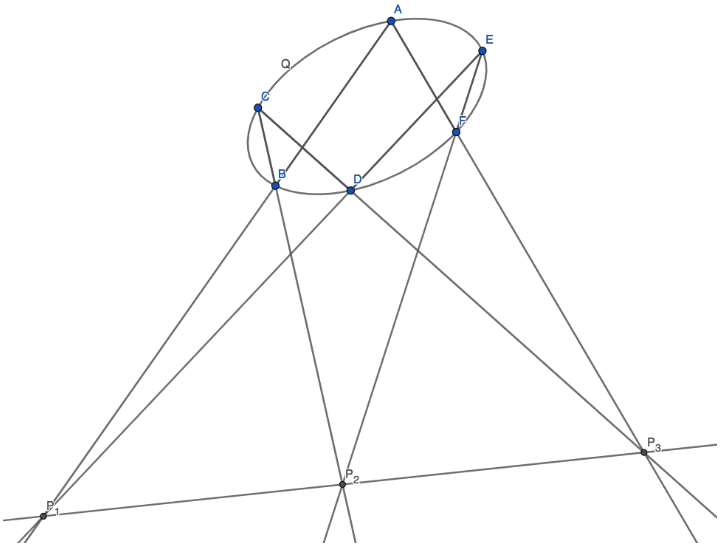


Рис. 89.

$F_1 = 0 : (AB) \cup (EF) \cup (CD)$ на этой кубике лежат $A, \ldots, F, P_1, P_2 \implies$ это решение
$F_2 = 0 : (ED) \cup (CB) \cup (AF)$ на этой кубике лежат $A, \ldots, F, P_1, P_2 \implies$ это решение
F_1 и F_2 не пропорциональны так как иначе задают одно и то же множество решений. $F = 0 : (Q = 0) \cup (P_1P_2)$ эта кубика проходит через $A, \ldots, F, P_1, P_2 \implies F = \alpha F_1 + \beta F_2$. $P_3 \in (CD) \implies F(P_3) = 0.P_3 \in (AF) \implies F_2(P_3) = 0 \implies F(P_3) = 0$, но $P_3 \notin Q \implies P_3 \in (P_1P_2)$ ◄

Лекция 17

17.1 Обратная Теорема Паскаля

Обратная Теорема Паскаля.

Пусть $ABCDEF$ – шестивершинник, такой что точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой и ни одна тройка из $ABCDEF$ не лежит на одной прямой. Тогда $ABCDEF$ лежат на некоторой квадрике и она единственна.

► Рассмотрим две кубики: $F_1 = 0 : (AB) \cup (EF) \cup (CD)$ на ней лежат P_1, P_2, P_3 и

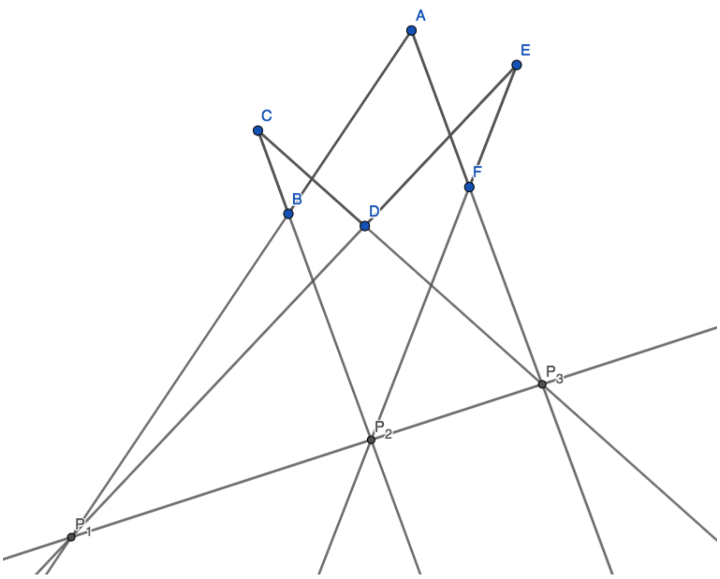


Рис. 90.

$F_2 = 0 : (ED) \cup (CB) \cup (AF)$

Рассмотрим пучок кубик $F = \alpha F_1 + \beta F_2$ любая кубика этого пучка проходит через $A, \ldots, F, P_1, P_2, P_3$

P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой. Выберем на этой прямой четвертую точку R, отличную от всех уже имеющихся. Рассмотрим уравнение $\alpha F_1(R) + \beta F_2(R) = 0$ У него всегда есть ненулевое решение $(\alpha; \beta)$. Тогда кубика $F = 0$ пересекает P_1P_2 в четырех точках $\implies$ прямая содержится в кубике

$$F = 0 \implies F = Q \underbrace{(Ax + By + C)}_{\text{уравнение } (P_1P_2)}$$

$F(A) = 0 \implies A \in (P_1P_2) \implies Q(A) = 0$. Аналогично для $B, \ldots, F \implies A, \ldots, F$ лежат на квадрике $Q = 0$ ◄

17.2 Пересечения прямых с квадриками, ассимптотические и неассимптотические направления

$F = 0$ квадрика $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$, $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ произвольная прямая.

Корни $F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$ отвечают точкам пересечения.

$a_{11}(x_0+\alpha t)^2 + 2a_{12}(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t) + a_{22}(y_0+\beta t)^2 + 2a_1(x_0+\alpha t) + 2a_2(y_0+\beta t) + a_0 = 0$

$$\underbrace{(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)}_{F_2(\alpha,\beta)} t^2 + \underbrace{(2a_{11}x_0\alpha + 2a_{12}(x_0\beta + y_0\alpha) + 2a_{22}y_0\beta + 2a_1\alpha + 2a_2\beta)}_{F_1(\alpha,\beta)} t + F(x_0, y_0)$$

$F_2(\alpha, \beta)t^2 + F_1(\alpha, \beta)t + F(x_0, y_0) = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = F_2(\alpha, \beta)$$

<u>Опр. 1.</u> Направленеие $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ называется ассимптотическим, если $F_2(\alpha, \beta) = 0$ и неассимптотическим, если $F_2(\alpha, \beta) \neq 0$

<u>Утв. 1.</u> Свойство направления быть ассимптотическим не зависит от выбора аффинной системы координат.

►

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

– преобразование координат точки при аффинной замене координат, тогда координаты вектора $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$

$F_2(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \end{pmatrix} C^T Q C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \end{pmatrix} Q' \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = F_2'(\alpha', \beta')$◄

$F_2(\alpha, \beta) = 0 \iff a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$ Пусть $a_{11} \neq 0$ тогда $\beta \neq 0$ (так как иначе $a_{11}\alpha^2 = 0 \implies \alpha = 0$) тогда разделим на β^2: $a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a22 = 0$

$t = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) \implies a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a22 = 0$

$\dfrac{D}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\delta$

$t_{1,2} = \dfrac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{11}}$

$\delta < 0 \implies$ два ассимптотических направления
$\delta = 0 \implies$ одно ассимптотическое направление
$\delta > 0 \implies$ нет ассимптотических направлений

Для предположения что $a_{22} \neq 0$ результат будет тем же.
Если $a_{11} = a_{22} = 0$ то $2a_{12}\alpha\beta = 0 \implies \alpha = 0 \vee \beta = 0 \implies (0;\beta) \vee (\alpha; 0)$

$\delta < 0$ квадрика гиперболического типа
$\delta = 0$ квадрика параболического типа
$\delta > 0$ квадрика эллиптического типа

Утв. 2. У квадрик гиперболического типа 2 ассимптотических направления, у квадрик параболического типа 1 ассимптотическое направление, у квадрик эллиптического типе нет ассимптотических направлений.
$\boxed{\delta < 0}$

4. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \implies \dfrac{\alpha^2}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{b^2} = 0 \implies \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -b\end{pmatrix}$ ассимптотические направления – направления ассимптот.

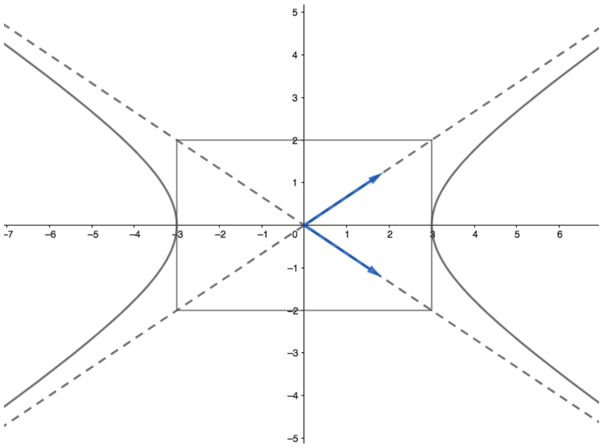


Рис. 91.

5. Пара пересекающихся прямых $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix}$ ассимптотические направления – направляющие векторы прямых.

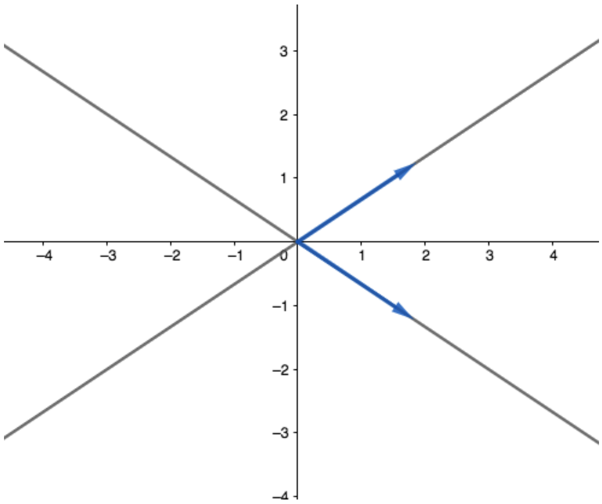


Рис. 92.

$\boxed{\delta = 0}$

6. Парабола $y^2 = 2px \implies \beta^2 = 0 \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ ассимптотическое направление – направление оси параболы

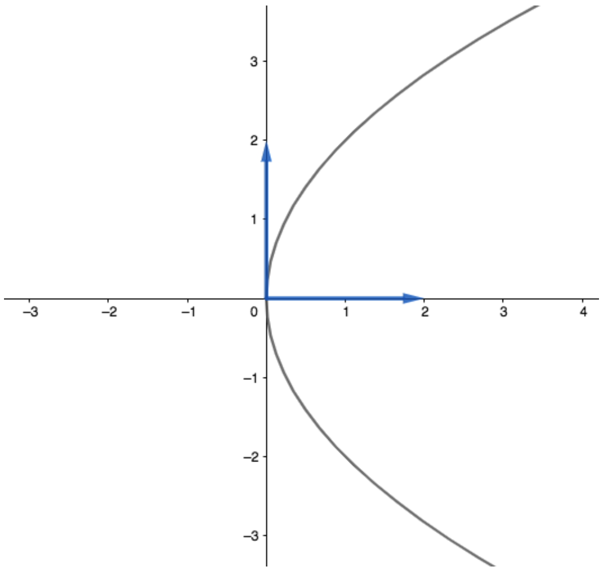


Рис. 93.

7. Пара параллельных прямых $y^2 - a^2 = 0 \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ ассимптотическое направление – направление прямой

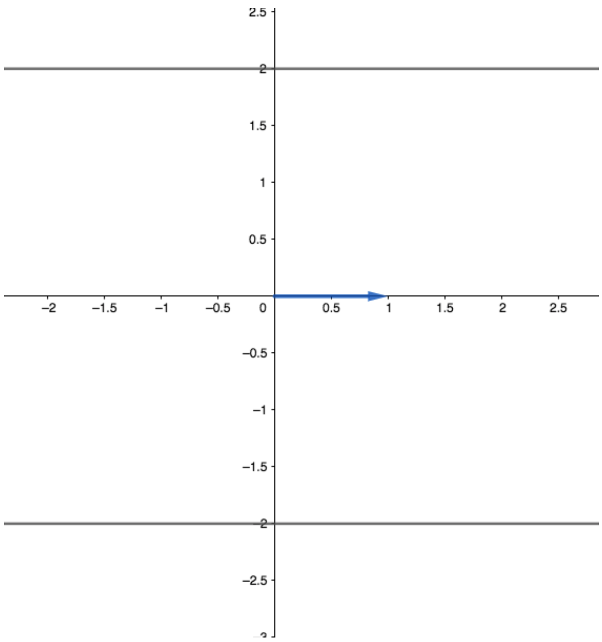


Рис. 94.

9. Пара совпадающих прямых $y^2 = 0 \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$
ассимптотическое направление – направление прямой

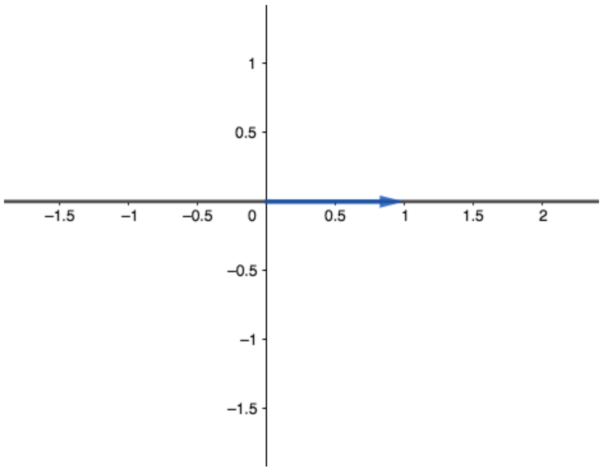


Рис. 95.

$F_2(\alpha, \beta)t^2 + F_1(\alpha, \beta)t + F(x_0, y_0) = 0$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ не ассимптотическое $\implies$ $F_2(\alpha, \beta) \neq 0$ $\implies$ либо 2 решения (возможно совпадающие), либо ни одного.

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ ассимптотическое $\implies$ $F_1(\alpha, \beta)t + F(x_0, y_0) = 0$

$F_1(\alpha, \beta) \neq 0 \implies$ ровно одно решение

$F_1(\alpha, \beta) = 0 \implies$ либо нет решений (при $F(x_0, y_0) \neq 0$),
либо ∞ решений (при $F(x_0, y_0) = 0$)

Утв. 3. Прямая неассимптотического направления пересекает квадрику в двух (возможно совпадающих) точках или не пересекает вообще. Прямая ассимптотического направления либо пересекает в одной точке, либо не пересекает, либо содержится в квадрике.

Лекция 18

18.1 Середины хорд квадрики

Утв. 1. Для данного неассимптотического направления есть прямые, пересекающие квадрику в двух точках.

Рис. 96.

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$ неассимптотическое направление.

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ произвольная прямая, такая, что $(x_0; y_0)$ – середина хорды.

$F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = 0 \implies F_2(\alpha, \beta)t^2 + F_1(x_0, y_0, \alpha, \beta)t + F(x_0, y_0) = 0$ у него есть два корня t_1 и t_2.

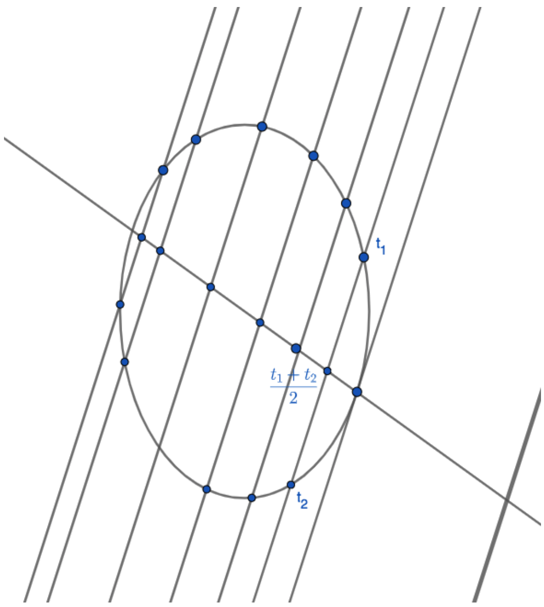


Рис. 97.

$(x_0; y_0)$ отвечает $t = 0$ потому что мы выбрали такую параметризацию

$(x_0;y_0)$ отвечает $\dfrac{t_1+t_2}{2}$ потому что середина хорды

Получаем, что $t_1+t_2=0$ перепишем уравнение в виде $t^2+\dfrac{F_1}{F_2}t+\dfrac{F(x_0,y_0)}{F_2}=0$ тогда из теоремы Виетта $\implies t_1+t_2=-\dfrac{F_1}{F_2}=0 \implies F_1=0$

$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$

$F_1(x_0,y_0,\alpha,\beta)=2a_{11}x_0\alpha+2a_{12}(x_0\beta+y_0\alpha)+2a_{22}y_0\beta+2a_1\alpha+2a_2\beta=$

$=2\left[\alpha(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+\beta(a_{22}y_0+a_{12}x_0+a_2)\right]$

$(x_0;y_0)$ – середина хорды $\implies \alpha(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+\beta(a_{22}y_0+a_{12}x_0+a_2)=0(*)$

В обратную сторону: пусть $(*)$ выполнена $\implies F_1=0$

$\implies F_2t^2+F(x_0,y_0)=0 \implies t_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{-F(x_0,y_0)}{F_2}} \implies 0=\dfrac{t_1+t_2}{2} \implies (x_0;y_0)$ – середина хорды.

Утв. 2. Середины хорд неассимптотического направления $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$ лежат на прямой $\alpha(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+\beta(a_{22}y_0+a_{12}x_0+a_2)=0$

► Уже доказали, что середины хорд удовлетворяют $(*)$. Нужно доказать, что это прямая. Приведем в канонический вид: $(\alpha a_{11}+\beta a_{12})x+(\alpha a_{12}+\beta a_{22})y+(\alpha a_1+\beta a_2)=0$

Пуст это не прямая, то есть $\begin{cases}\alpha a_{11}+\beta a_{12}=0\\ \alpha a_{12}+\beta a_{22}=0\end{cases}$ Тогда умножим первое на α второе на β и сложим. Получим $a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0 \implies \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$ ассимптотическое. Противоречие. ◄

Опр. 1. Эта прямая называется диаметром, сопряженным неассимптотическому направлению $(\alpha;\beta)$

18.2 Центры квадрики

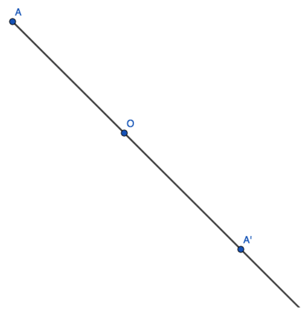


Рис. 98.

A' симметрична точке A относительно O или A' получена симметрией относительно O. Кривая Ω центрально симметрична относительно O, если $A \in \Omega \implies A' \in \Omega$. O – центр симметрии Ω. Центров у Ω может быть много.

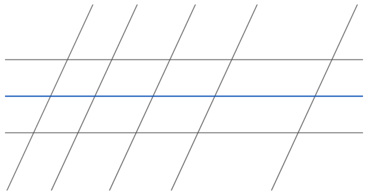


Рис. 99.

<u>Утв. 3.</u> Центр квадрики является серединой хорды, через него проходящей (из соображения симметрии) $\implies$ центр лежит на диаметре, сопряженном неассимптотическому направлению.

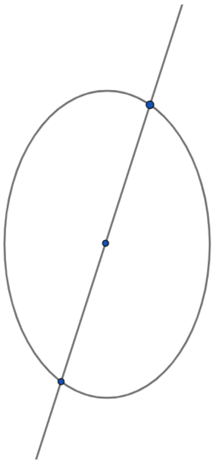


Рис. 100.

<u>Утв. 4.</u> Центр квадрпики лежит на пересечении любых двух диаметров. (Если центр есть, то это выполняется, если центра нет, то ничего сказать не можем) (Рис. 96.).

Центр квадрики удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 \underbrace{(a_{11}x + a_{12}y + a_1)}_{A} + \beta_1 \underbrace{(a_{12}x + a_{22}y + a_2)}_{B} = 0 \\ \alpha_2 \underbrace{(a_{11}x + a_{12}y + a_1)}_{A} + \beta_2 \underbrace{(a_{12}x + a_{22}y + a_2)}_{B} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

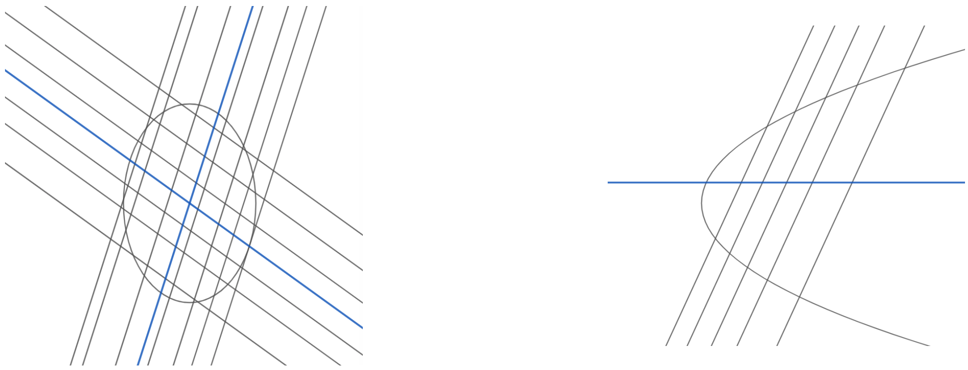


Рис. 101.

$$\begin{cases}\alpha_1 A + \beta_1 B = 0\\ \alpha_2 A + \beta_2 B = 0\end{cases} \implies B\underbrace{(\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1)}_{-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} \neq 0}(\text{так как } (\alpha_1;\beta_1) \not\parallel (\alpha_2;\beta_2)) \implies B = 0 \implies A = 0$$

То есть $(1) \iff \begin{cases}A = 0\\ B = 0\end{cases} \iff \begin{cases}a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0\\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0\end{cases} \quad (2)$

$\delta = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}$

$\delta \neq 0 \implies$ решение единственно

$\delta = 0 \implies (a)\ (a_{11}; a_{12}; a_1) \sim (a_{12}; a_{22}; a_2) \implies$ прямая решений

$\qquad\qquad (b)\ (a_{11}; a_{12}; a_1) \nsim (a_{12}; a_{22}; a_2) \implies$ нет решений

<u>Утв. 5.</u> Центр квадрики в точности решение системы (2)

► Уже доказали, что если точка – центр, от она решение. В обратную сторону: пусть $(x_0; y_0)$ – решение (2). Сделаем сдвиг, переносящий начало координат в $(x_0; y_0)$

$x = \tilde{x} + x_0$

$y = \tilde{y} + y_0$

$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$

$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = a_{11}(\tilde{x}+x_0)^2 + 2a_{12}(\tilde{x}+x_0)(\tilde{y}+y_0) + a_{22}(\tilde{y}+y_0)^2 + 2a_1(\tilde{x}+x_0) + 2a_2(\tilde{y}+y_0) + a_0 =$

$= a_{11}\tilde{x}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\tilde{y} + a_{22}\tilde{y}^2 + \cancel{(2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + a_1)\tilde{x}} + \cancel{(2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_2)\tilde{y}} + F(x_0, y_0) =$

$a_{11}\tilde{x}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\tilde{y} + a_{22}\tilde{y}^2 + F(x_0, y_0)$

$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{F}(-\tilde{x}, -\tilde{y})$ то есть квадрика симметрична относительно $\tilde{x} = 0, \quad \tilde{y} = 0 \iff$

$x = x_0 \quad y = y_0$ ◄

1. 1 центр, $\delta \neq 0$

2. геометрически ничего не значит

3. 1 центр, $\delta \neq 0$

4. 1 центр, $\delta \neq 0$

5. 1 центр, $\delta \neq 0$

6. нет центров, $y^2 - 2px = 0 \implies \begin{cases} -2p = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

7. прямая центров, $y^2 - a^2 = 0 \implies \begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

8. геометрически ничего не значит

9. прямая центров

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_2$$

Уравнение центра можно записать как: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$

18.3 Сопряженные диаметры

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0 \iff \left(\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \beta\frac{\partial F}{\partial y} = 0\right)$$

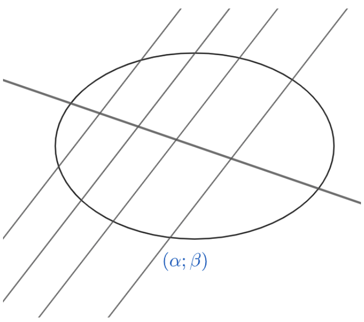


Рис. 102.

$$Ax + By + C = 0 \implies \begin{cases} A = a_{11}\alpha + a_{12}\beta \\ B = a_{12}\alpha + a_{22}\beta \end{cases}$$

Это прямая, путь ее направляющий вектор – $(\alpha^*; \beta^*) \implies \begin{cases} \alpha^* = -B \\ \beta^* = A \end{cases} \implies$

$\implies \alpha^* A + \beta^* B = 0 \implies \alpha^*(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) + \beta^*(a_{12}\alpha + a_{22}\beta) = 0$

Утв. 6. Если $(\alpha^*; \beta^*)$ – направляющий вектор диаметра, сопряженного неассимптотическому направлению $(\alpha; \beta)$, то верно $\alpha^*(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) + \beta^*(a_{12}\alpha + a_{22}\beta) = 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Если $(\alpha; \beta)$ неассимптотическое, то $(\alpha^*; \beta^*)$ может быть ассимптотическим. Например $y^2 - 2px = 0 \quad (1; 0)$ – ассимптотическое. $(\alpha; \beta) \neq (1; 0) \quad \beta^*\beta = 0 \implies \beta^* 0 \implies (\alpha^*; \beta^*) \parallel (1; 0) \implies$ любому $(\alpha; \beta) \neq (1; 0)$ сопряжено $(1; 0)$

Путь $(\alpha^*; \beta^*)$ не ассимптотическое, тогда сопряженное к нему направление – $(\alpha; \beta)$. Два таких диаметра называются сопряженными.

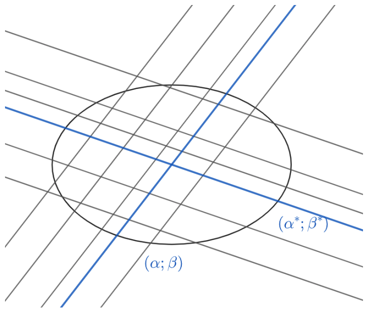


Рис. 103.

Для окружности любые два перпендикулярных диаметра сопряженные так как $x^2 + y^2 - 1 = 0 \implies \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 0 \implies (\alpha; \beta) \perp (\alpha^*; \beta^*)$

Для эллипса есть только два сопряженных ортогональных диаметра, это его оси.

Лекция 19

19.1 Количество центров квадрики

$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$

$(\alpha;\beta)$ не ассимптотическое $\iff$ $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0$ значит у нее либо 0 точек пересечения, либо 1, либо эта прямая содержится в квадрике.

$\delta > 0$ ассимптотических направдений нет, $\delta = 0$ одно ассимптотическое направление, $\delta < 0$ два ассимптотических направления.

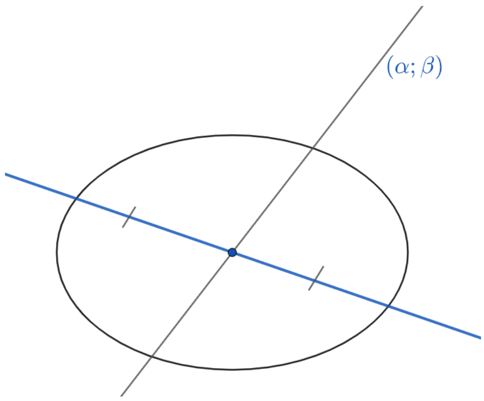


Рис. 104.

$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$

1. Центр лежит на диаметре, сопряженном неассимптотическому направлению.

2. Диаметр, сопряженный неассимптотическому направлению проходит через все центры.

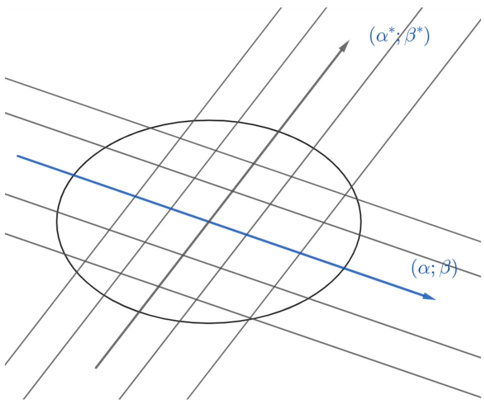


Рис. 105.

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases}$ Если центр есть, то он удовлетворяет этому уравнению.

$\delta \neq 0 \implies$ центр один
$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0 \implies$ нет центров
$\delta = 0, \quad \Delta = 0 \implies$ прямая центров
$(\alpha^*; \beta^*)$ может быть ассимптотическим:
$(\alpha^*; \beta^*)$ может быть не ассимптотическим:
$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \to$ транспонируем $\to \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

<u>Утв. 1.</u> Если квадрика имеет только один центр, то $(\alpha^*; \beta^*)$ тоже не ассимптотическое.

► $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$ Только один центр $\iff \det Q = \delta \neq 0$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = 0$ Пусть $(\alpha^*; \beta^*)$ ассимптотическое

$$\implies \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*; a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*)$

$$\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \underbrace{(a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*)}_{A} x + \underbrace{(a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*)}_{B} y = 0$$

Одно линейное однородное уравнение на две неизвестных $Ax + By + C = 0$
(a) $A^2 + B^2 \neq 0 \implies$ все решения пропорциональны $\implies (\alpha; \beta) = \lambda(\alpha^*; \beta^*) \implies (\alpha; \beta)$ тоже ассимптотическое ?!
(b) $A^2 + B^2 = 0 \implies \begin{cases} a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^* = 0 \\ a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^* = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = 0,$
$\det Q \neq 0 \implies (\alpha^*; \beta^*) = (0; 0)$?!◄

19.2 Оси симметрии квадрик

Опр. 1. l – оси симметрии кривой Γ, если отражение относительно этой прямой переводит Γ в себя.

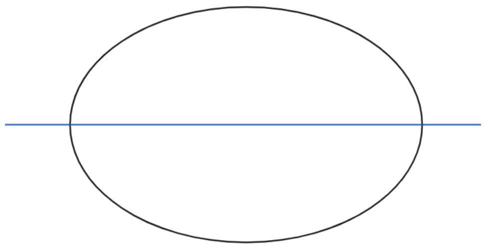


Рис. 106.

Утв. 2. Если направление ортогональное оси симметрии неассимптотическое, то эта ось симметрии – сопряженный к этому направлению диаметр.

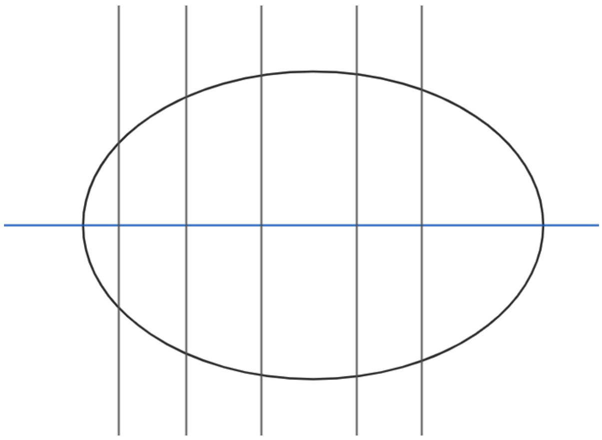


Рис. 107.

Утв. 3. Если на ортогональной к оси симметрии прямой ассимптотического направления m есть точка квадрики, то:

$P \in m, \quad P \notin l \implies \exists$ симметричная относительно l точка P' на $m \implies m$ пересекает квадрику более чем в одной точке $\implies m$ лежит в распадающейся квадрике.
Пусть квадрика – $m \cup m'$

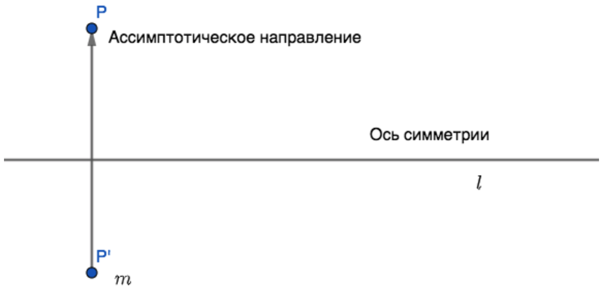
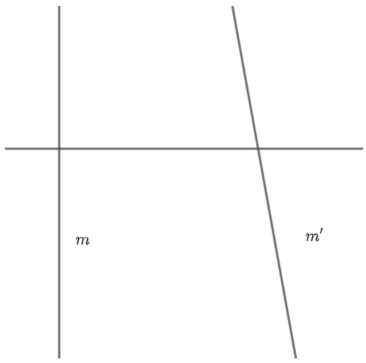
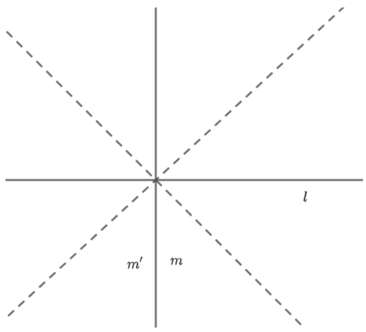


Рис. 108.

Пусть все прямые, ортогональные оси симметрии, пересекают квадрику по менее чем двум точкам и их направления ассимптотические. тогда все точки квадрики $\in l \implies$ это пара совпадающих прямых.



(a) $m' \perp l \implies$ пара параллельных прямых



(b) $m' = l \implies$ пара ортогональных пересекающихся прямых

Рис. 109.

<u>Утв. 4.</u> Если направление, ортогональное оси симметрии ассимптотическое, то квадрика может быть одной из $(*) = \{$пара параллельных прямых, пара совпадающих прямых, пара ортогональных пересекающихся прямых$\}$.

<u>Опр. 2.</u> Главное направление – неассимптотическое направление, такое, что сопряженный диаметр (главный диаметр) ему ортогонален.

<u>Теорема. 1.</u>

1. Главный диаметр является осью симметрии квадрики
2. Для содержательных квадрик (кроме $(*)$) ось симметрии квадрики является главным

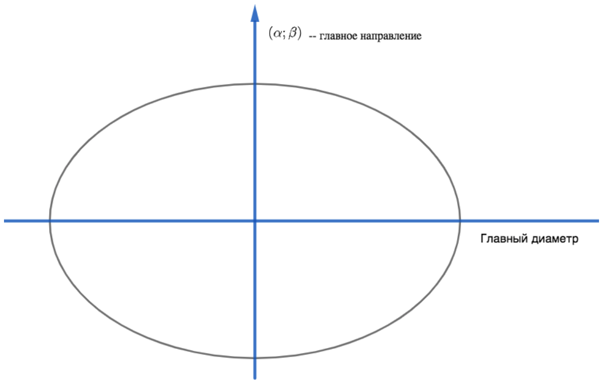


Рис. 110.

диаметром.

► 1.

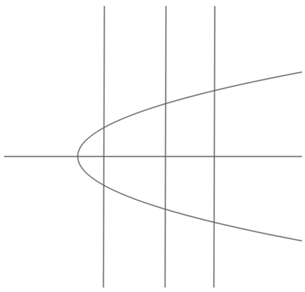


Рис. 111.

Если есть какая-то точка квадрики, то $\exists$ симметричная ей так как направление неассимптотическое $\Longrightarrow$ сопряженный к нему диаметр главный $\Longrightarrow$ это ось симметрии.

2. Следует из **Утв. 4.** и **Утв. 3.** ◄

19.2.1 Как искать главное направление

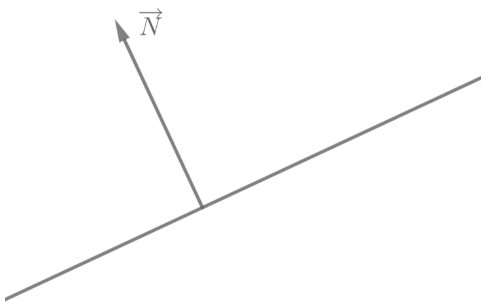


Рис. 112.

$(\alpha;\beta)$ главное направление, оно не ассимптотическое $\Longrightarrow$ есть сопряженный ему

диаметр
$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$
$N = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta; a_{12}\alpha + a_{22}\beta)$. Диаметр главный $\implies$ он $\perp(\alpha;\beta) \iff N \parallel (\alpha;\beta)$
$\implies N = \lambda(\alpha;\beta), \lambda \neq 0 \iff \begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = \lambda\alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = \lambda\beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$A - n \times n$ матрица. Вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ называется собственным вектором матрицы A с собственным числом λ, если $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$

$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda E)v = 0$ – однородная система из n уравнения на n неизвестных.

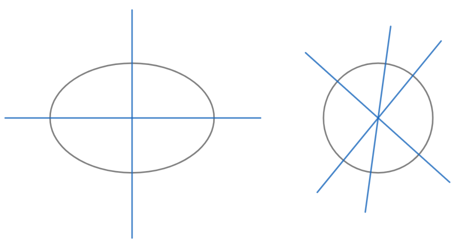
<u>Утв. 5.</u> λ – собственное число для вектора $\iff$ λ – корень уравнения n-й степени $\det(A - \lambda E)$

<u>Утв. 6.</u> $(\alpha;\beta)$ – главное направление квадрики $\iff$ $(\alpha;\beta)$ – собственный вектор матрицы Q с собственным числом $\lambda \neq 0$

λ - корень $\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$
$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \iff \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$

<u>Замечание</u> $\lambda = 0 \implies Q\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ – это одно из ассимптотических направлений, но могут быть еще другие.
$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0, \quad D = S^2 - 4\delta$

• Эллипс: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0 \implies$ 2 главных направления (кроме окружности, у нее $\lambda_1 = \lambda_2 \implies Q = \lambda_1 E$ – любое направление – главное).



• Гипербола $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (так как $\delta < 0$) – два главных направления.

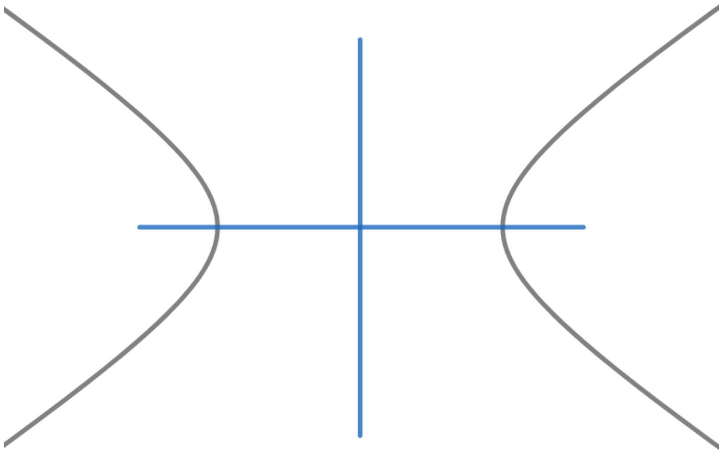


Рис. 113.

• Парабола $\delta = 0 \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0 \implies$ одно главное направление.

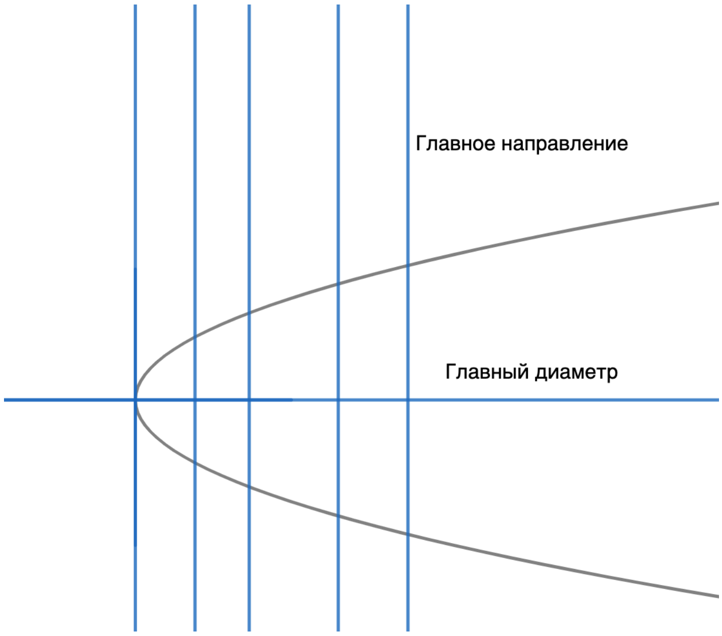


Рис. 114.

• Пара пересекающихся прямых. Если они ортогональны, то есть еще две оси симметрии, которые не являются главными диаметрами.

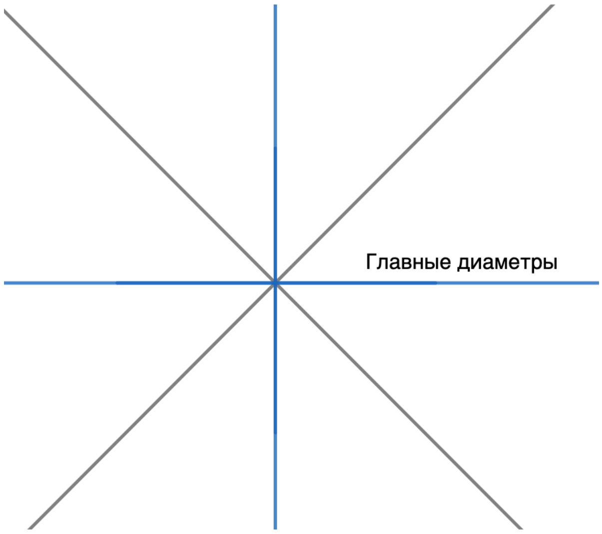


Рис. 115.

• Пара параллельных прямых. $y^2 - a^2 = 0 \implies Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \implies$ одно главное направление – $(0; 1)$

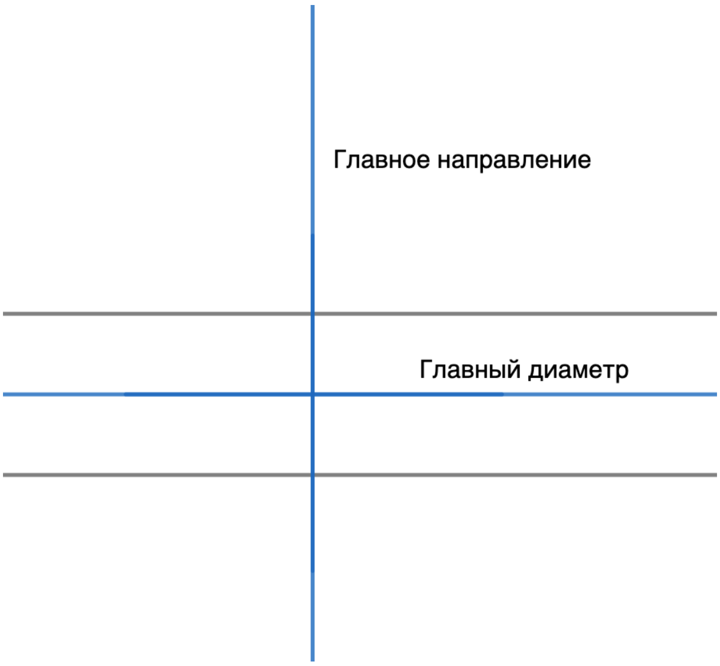


Рис. 116.

• Пара совпадающих прямых: $y^2 = 0 \implies Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \implies$ одно главное направление – $(0;1)$. Но так же есть ∞ осей симметрии, не являющихся главными диаметрами.

Рис. 117.

19.3 Алгоритм приведения квадрики к каноническому виду

1. Ищем центр: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$

Центр есть $(x_0; y_0)$	Центра нет $\implies$ это парабола
2. Делаем сдвиг, переводя начало координат в центр $\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$	**2.** Ищем у нее ассимптотические направления: $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 \implies \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \implies Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ имеет решение
3. Ищем главные направления: $\det(Q - \lambda E) = 0$, λ_1 – корень $\implies$ ищем главное направление $(\alpha; \beta)$. $(Q - \lambda E) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то это окружность и ее просто нужно отнормировать. Если нет, поворачиваем оси так, чтобы $\begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \end{cases}$ (Возможно еще придется обменять оси.)	**3.** Сделаем поворот, чтобы $\begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \end{cases}$ Получим $y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0$ **4.** Ось является сопряженным диаметром $\implies -\beta F_x + \alpha F_y = 0 \implies -\beta(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \alpha(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0 \implies$ вершина параболы – решение $\begin{cases} -\beta F_x + \alpha F_y = 0 \\ F = 0 \end{cases}$ Пусть это точка $(x_0; y_0) \implies$ сделаем сдвиг $\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$. Может получиться, что ветви смотрят в другую сторону, тогда заменим $\tilde{x} = -x$

Лекция 20

20.1 Касательные к квадрикам

Опр. 1. Для алгебраической кривой $F(x,y)=0$ точка $(x_0;y_0)$ особая, если $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)=0 \end{cases}$

Следствие Для квадрик особые точки – центры, лежащие на них.

- Эллипс – нет особых точек
- Гипербола – нет особых точек
- Пара пересекающихся прямых – одна особая точка.
- Парабола – нет особых точек
- Пара параллельных прямых – нет особых точек
- Пара мнимых прямых – нет особых точек
- Пара совпадающих прямых – каждая точка особая

Опр. 2. Касательной к квадрике в неособой точке называется прямая, имеющая с квадрикой одну двойную точку пересечения или лежащая в этой квадрике .

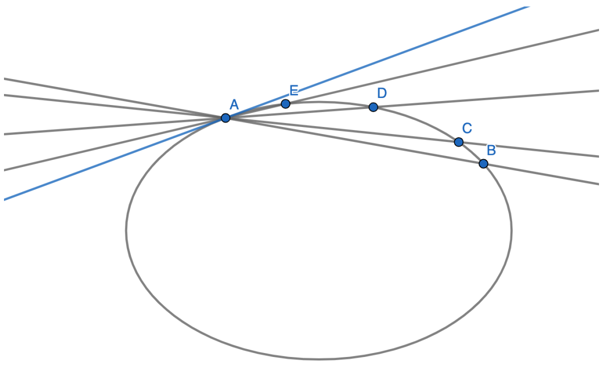


Рис. 118.

Одна двойная точка пересечения у $F(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)=0 \implies$ корни $t_1=t_2$

Утв. 1. Касательная к квадрике в неособой точке $(x_0;y_0)$ задается уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)(y-y_0)=0.$$

Эквивалентные формулы

1. $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$

$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{22}y_0 + a_{12}x_0 + a_2)(y - y_0) = 0$

2. $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

► $a_{11}x_0x + a_{12}x_0y + a_1x_0 + a_{12}y_0x + a_{22}y_0y + a_2y_0 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$

$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{22}y_0 + a_{12}x_0 + a_2)y + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0 = 0 \quad (1)$

$(x_0; y_0)$ на $F \implies F(x_0; y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 = 0 \implies$

$(1) \sim (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{22}y_0 + a_{12}x_0 + a_2)y - a_{11}x_0^2 - 2a_{12}x_0y_0 - a_{22}y_0^2 - a_1x_0 - a_2y_0 =$

$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x - (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x_0 + (a_{22}y_0 + a_{12}x_0 + a_2)y - (a_{22}y_0 + a_{12}x_0 + a_2)y_0 =$

$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{22}y_0 + a_{12}x_0 + a_2)(y - y_0) = 0$ ◄

► $F(x,y) = 0, \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \implies$

$$F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = F_2(\alpha,\beta)t^2 + F_1(x_0, y_0, \alpha, \beta)t + \underbrace{F(x_0, y_0)}_{=0}$$

1. $F_2(\alpha,\beta) = 0 \implies F_1(x_0, y_0, \alpha, \beta) = 0$ Если $F_1 \not\equiv 0 \implies$ одно решение. Если $F_1 \equiv 0 \implies 0 = 0 \implies \infty$ решений $\implies$ прямая лежит в квадрике $\implies$ она касательная.

2. $F_2(\alpha,\beta) \neq 0 \implies F_2t^2 + F_1t = 0$ Если $F_1 \not\equiv 0 \implies$ два корня: $t_1 = 0$ и $t_2 = \dfrac{-F_1}{F_2} \implies$ не касательная. Если $F_1 \equiv 0 \implies t^2 = 0 \implies$ один двойной корень и это касательная.

В обоих случаях прямая – касательная $\iff F_1(x_0, y_0, \alpha, \beta) = 0 \iff$

$2\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + 2\beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = \alpha\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0) + \beta\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0)$

$$F_1 = 0 \iff \begin{cases} \alpha = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0) \\ \\ \beta = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0) \end{cases}$$

$\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} \implies \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0) = 0$ ◄

Если $(x_0; y_0)$ – особая, то $F(x_0, y_0, \alpha, \beta) \equiv 0 \quad \forall \alpha, \beta$

Опр. 3. В особой точке любая прямая – касательная.

20.2 Полярное соответствие

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (*) \quad \text{и} \quad (x_0; y_0) \text{ не центр}$$

Если $(x_0; y_0)$ лежит на квадрике, то это просто уравнение касательной к квадрике в этой точке.

Если $(x_0; y_0)$ не лежит на квадрике, то это какая-то прямая.

Опр. 4. Прямая $(*)$ называется полярой точки $(x_0; y_0)$. Точка $(x_0; y_0)$ называется полюсом прямой $(*)$

Полярное соответствие: **полюс** $\longleftrightarrow$ **поляра**

Утв. 2. Точка P лежит на поляре точки $Q \iff$ точка Q лежит на поляре точки P

► $P(x_0; y_0) \quad Q(x_1; y_1)$

Поляра P : $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad Q \in$ поляре $\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$

Поляра Q : $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad P \in$ поляре $\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$

$(1) = (2)^T \implies (1) \sim (2)$ ◄

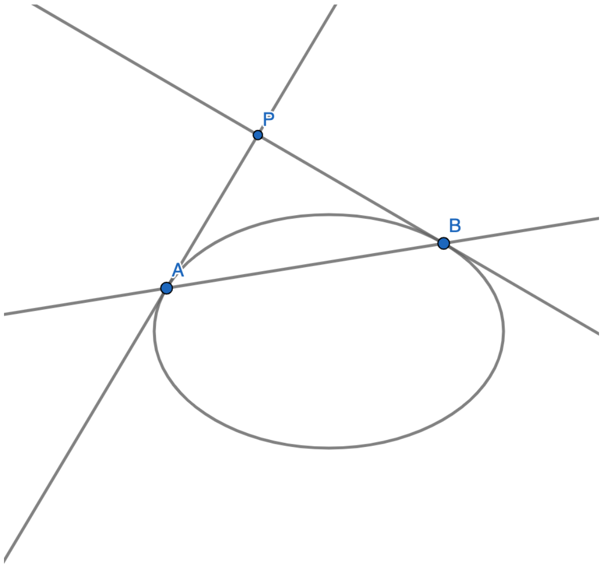


Рис. 119.

Утв. 3. Пусть из P проведены две касательные к квадрике, точки A и B – точки касания, тогда AB – поляра точки P

► AP– поляра точки $A \iff A$ лежит на поляре P

BP– поляра точки $B \iff B$ лежит на поляре P

$\implies AB$ – поляра P ◄

Что делать если из точки нельзы провести две касательные? (Тогда она внутри квадрики, но не является центром)

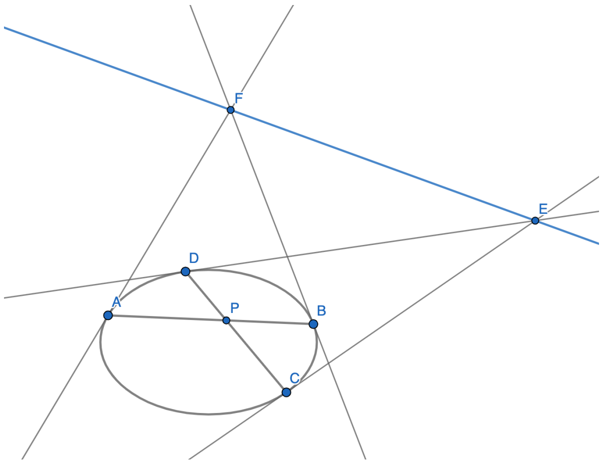


Рис. 120.

Утв. 4. Проведем из точки P две хорды AB и CD. В точках пересечения построим касательные. Пусть E точка пересечения касательных в C и D, F точка пересечения касательных в A и B, тогда EF – поляра точки P.

► F – полюс AB, E – полюс CD

P лежит на AB – поляра $F \iff F$ лежит на поляре P

P лежит на CB – поляра $E \iff E$ лежит на поляре P

$\implies EF$ – поляра P ◄

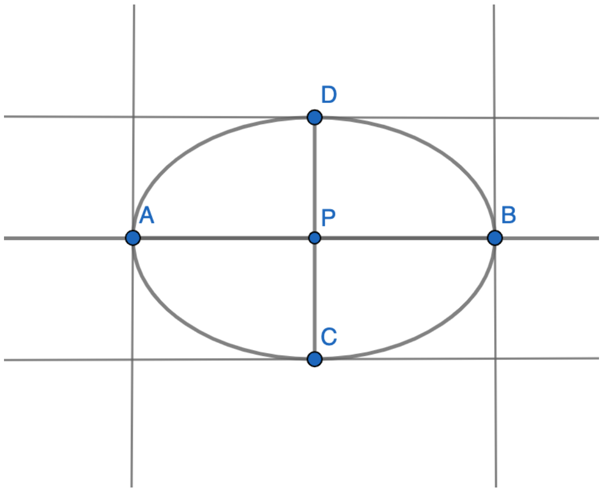


Рис. 121.

Если касательные не пересекаются, то AB – сопряженный диаметр. Если есть еще одна хорда, у которой касательные не пересекаются, то P – центр, чего не может быть.

Замечание Поляра центра – бесконечно удаленная прямая. Полюс прямой, проходящей через центр – находится на бесконечно удаленной прямой.

Лекция 21

21.1 Поляритет

1. P лежит на квадрике $\implies$ поляра $=$ касательная

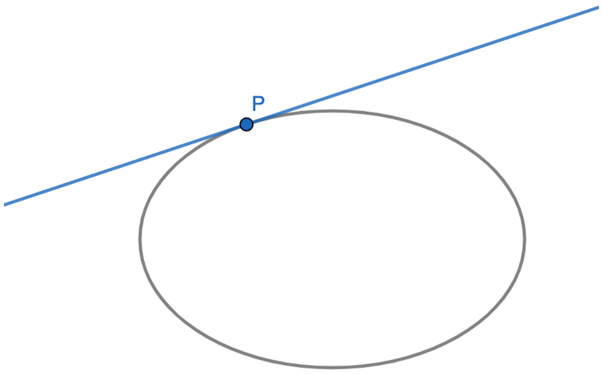


Рис. 122.

2. Можно провести две касательные $\implies$ $AB =$ поляра

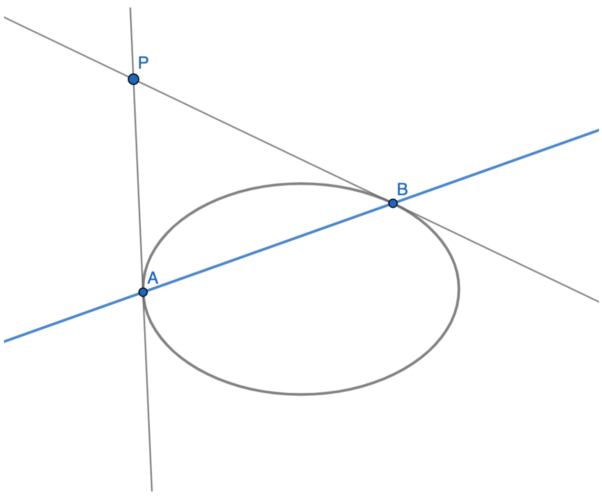


Рис. 123.

3. Нальзя провести две касательные $\implies$ $EF =$ поляра

Поляра точки не зависит от выбора системы координат.
P лежит на поляре Q $\implies$ Q лежит на поляре P

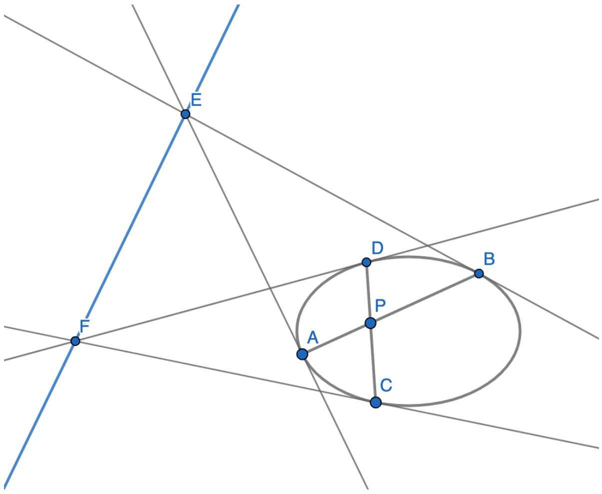


Рис. 124.

Двойственность заключается в том, что если n точек лежат на поляре, то n поляр проходят через одну точку.

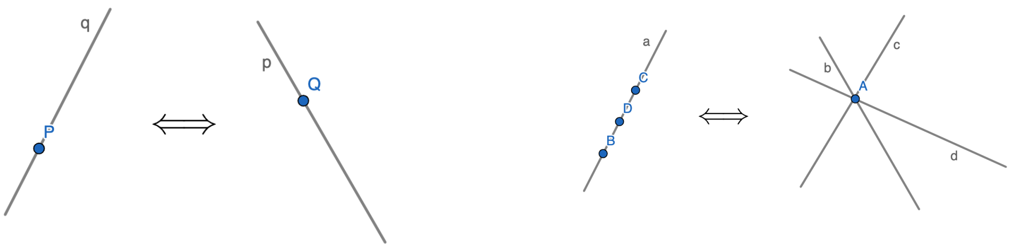


Рис. 125.

Пусть у прямой два полюса $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Два уравнения задают одну и ту же прямую $\iff$ они пропорциональны $\iff$ $(x_1;y_1;1)A = \lambda(x_2;y_2;1)A$

Квадрика не распадается $\implies$ $\det A = \Delta \neq 0 \implies (x_1;y_1;1)AA^{-1} = \lambda(x_2;y_2;1)AA^{-1} \implies$

$$(x_1;y_1;1) = \lambda(x_2;y_2;1), \quad 1 = \lambda \implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Утв. 1. У прямой не более одного полюса

Как искать полюс?

1. Если прямая пересекает квадрику в одной сдвоенной точке, то точка касания – полюс
2. Если прямая пересекает квадрику в двух точках, то точка пересечения касательных, построенных в этих точках – полюс
3. Если прямая не пересекает квадрику, то берем на ней две любые точки, проводим через них касательные к квадрике, соединяем попарно точки касания, точка пересечения отрезков – полюс

Теорема Брианшона

Если шестиугольник описан вокруг нераспадающейся квадрики, то его главные диагонали пересекаются в одной точке.

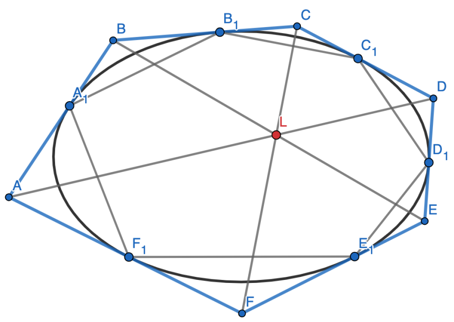
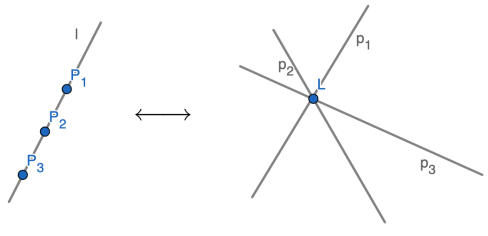


Рис. 126.

► Точки касания $A_1, \ldots, F_1$ сторон шестиугольника $ABCDEF$ являются вершинами вписанного шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
По теореме Паскаля точки $P_1 = A_1B_1 \cap D_1E_1, \quad P_2 = B_1C_1 \cap E_1F_1, \quad P_3 = C_1D_1 \cap F_1A_1$ лежат на одной прямой l



Поляры $p_1, \quad p_2, \quad p_3$ точек $P_1, \quad P_2, \quad P_3$ проходят через одну точку (это полюс прямой $l = (P_1P_2P_3)$)

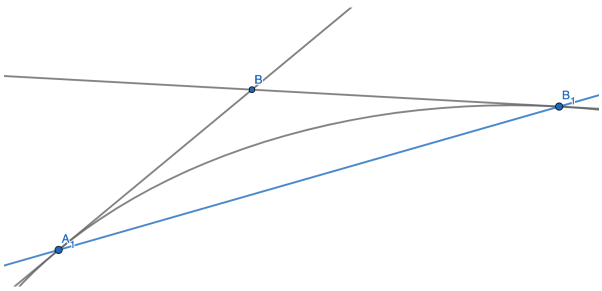


Рис. 127.

A_1B_1 – поляра B, аналогично D_1E_1 – поляра E

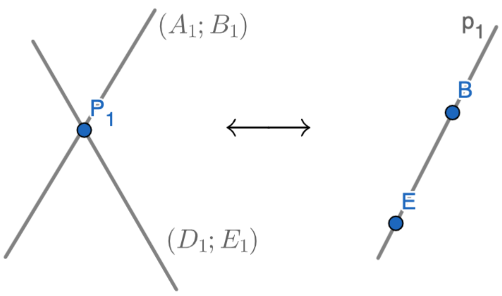


Рис. 128.

Прямая $P_1 = (BE)$. Аналогично $P_2 = (CF), \quad P_3 = (AD)$
Тогда $P_1, \quad P_2, \quad P_3$ проходят через $L \iff$ главные диагонали $BE, \quad CF, \quad AD$ пересекаются в этой же точке ◄

Теорема 1.
Если AB и CD – две хорды квадрики, пересекающиеся в точке P, то (EF), проходящая через $E = (AD) \cap (BC)$ и $F = (AC) \cap (BD)$ является полярой P.

► $F(x, y) = 0$
$Ox : y = 0 \implies A = (x_1; 0) \quad B = (x_2; 0)$, где x_1 и x_2 – корни $a_{11}x^2 + 2a_1x + a_0 = 0$
аналогично

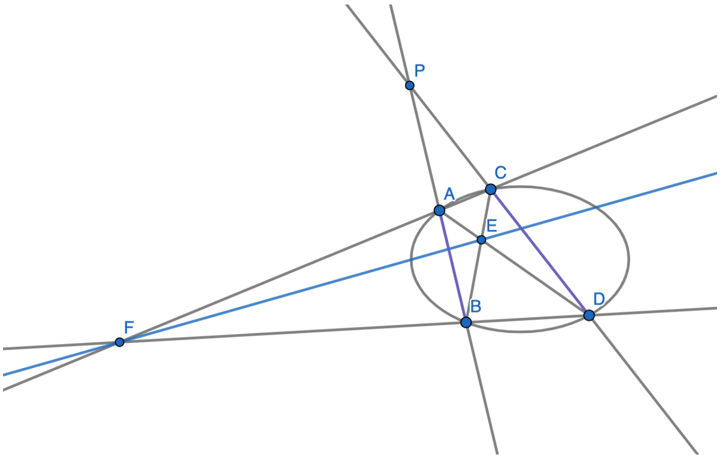


Рис. 129.

$Oy : x = 0 \implies C = (0; y_1) \quad D = (0; y_2)$, где y_1 и y_2 – корни $a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = 0$

$$\begin{cases} (AD) : \dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_2} = 1 \\ (BC) : \dfrac{x}{x_2} + \dfrac{y}{y_1} = 1 \end{cases} \implies E = \begin{cases} \dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_2} = 1 \\ \dfrac{x}{x_2} + \dfrac{y}{y_1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (AC) : \dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1} = 1 \\ (BD) : \dfrac{x}{x_2} + \dfrac{y}{y_2} = 1 \end{cases} \implies F = \begin{cases} \dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1} = 1 \\ \dfrac{x}{x_2} + \dfrac{y}{y_2} = 1 \end{cases}$$

$$(EF) : \frac{x}{x_1} + \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} + \frac{y}{y_2} = 2$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}x + \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2}y = 2 \implies \text{по теореме Виетта } \frac{\frac{-2a_1}{a_{11}}}{\frac{a_0}{a_{11}}}x + \frac{\frac{-2a_2}{a_{22}}}{\frac{a_0}{a_{22}}}y = 2$$

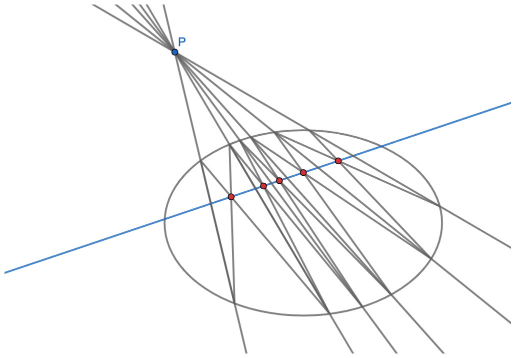
$$a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

Ищем поляру P:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

Верно, так как мы и получили выше.◀

Следствие Точки пересечения диагоналей, проведенных через точки пересечения хорд, проведенных к квадрике из одной точки, лежат на одной прямой.



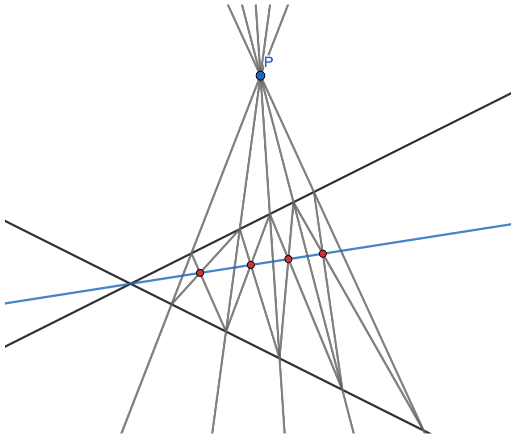


Рис. 130.

21.2 Аффинные преобразования и изометрии

Опр. 1. Преобразование – взаимно однозначное отображение (биекция)

Опр. 2. Преобразование f называется аффинным, если существует две аффинные системы координат $\{O, e_1, e_2\}$ и $\{O', e_1', e_2'\}$, такие, что координаты $f(P)$ в $\{O', e_1', e_2'\}$ равны координам P в $\{O, e_1, e_2\}$. (В пространстве добавляется третий вектор)

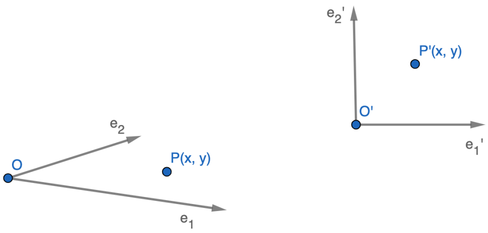


Рис. 131.

P имеет координаты $(x; y)$в $\{O, e_1, e_2\}$, $P' = f(P)$ имеет координаты $(x; y)$ в $\{O', e_1', e_2'\}$
Найдем координаты $(\tilde{x}; \tilde{y})$ точки P' в $\{O, e_1, e_2\}$ (= координаты OP' в $\{O, e_1, e_2\}$)
$OP' = OO' + O'P'$ Пусть $OO' = x_0e_1 + y_0e_2, \quad O'P' = xe_1' + ye_2'$

$$\begin{cases} e_1' = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 \\ e_2' = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad O'P' = x(c_{11}e_1 + c_{21}e_2) + y(c_{12}e_1 + c_{22}e_2)$$

$$OP' = x_0e_1 + y_0e_2 + x(c_{11}e_1 + c_{21}e_2) + y(c_{12}e_1 + c_{22}e_2) =$$
$$= \underbrace{(c_{11}x + c_{12}y + x_0)}_{\tilde{x}}e_1 + \underbrace{(c_{21}x + c_{22}y + y_0)}_{\tilde{y}}e_2$$

Сравним с заменой координат:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

Видим, что замена координат и преобразования эквивалентные понятия.

При преобразованиях векторы преобразуются следующим образом:

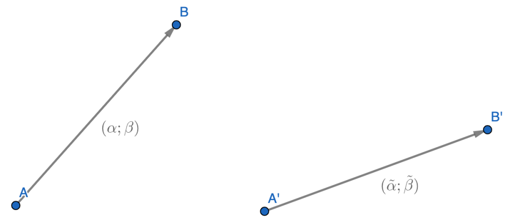


Рис. 132.

$$\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Утв. 1. При аффинных преобразованиях:

1. Прямые переходят в прямые (плоскости в плоскости), с сохранением параллельности

2. Сохраняется отношение длин отрезков на параллеьных прямых

►

1. $A\tilde{x} + B\tilde{y} + \hat{C} = 0$

$$\begin{cases}\tilde{x} = c_{11}x + c_{12}y + x_0\\ \tilde{y} = c_{21}x + c_{22}y + y_0\end{cases}$$ при подстановке линейное уравнение, значит это прямая

$$\begin{pmatrix}A & B & \hat{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ 1\end{pmatrix} = 0 \qquad (1) \qquad \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ 1\end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & x_0\\ & & y_0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)}_{\Omega}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\text{для преобразования } (1) \sim \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B & \hat{C}\end{pmatrix}\Omega\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix} = 0$$

У параллельной прямой $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B & \check{C}\end{pmatrix}\Omega\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix} = 0$

В трехмерном случае утверждение аналогично

2. $C\begin{pmatrix}\lambda\alpha\\ \lambda\beta\end{pmatrix} = \lambda C\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \implies$ пропорциональные векторы переходят в пропорциональные.◄

21.2.1 Изометрии

Опр. 3. Аффинное преобразование f называется изометрией, если оно сохраняет расстояние $\forall P, Q \quad d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$

Примеры:

1. Сдвиг

2. Поворот

3. Скользящая симметрия

$$\begin{cases}\tilde{x} = x + a\\ \tilde{y} = -y\end{cases}$$

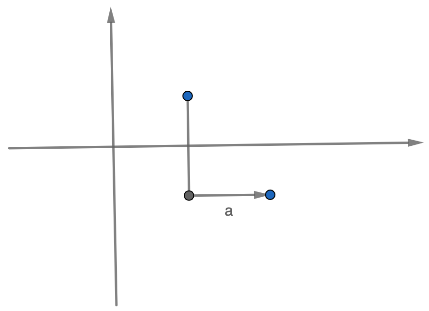
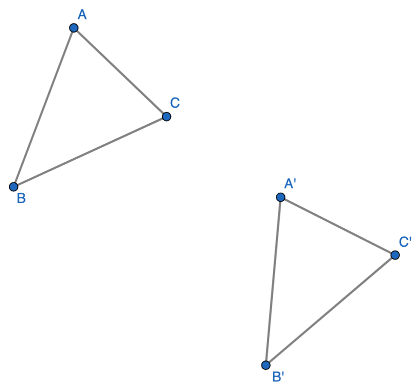


Рис. 133.

Утв. 2. Изометрия сохраняет углы

► Два треугольника равны по трем сторонам $\implies$ соответствующие углы равны.◄



Лекция 22

22.1 Аффинные преобразования

Аффинные преобразования $\longleftrightarrow$ аффинные замены координат.
Есть аффинное преобразование $\Longrightarrow$ есть две системы координат $\{O, e_1, e_2\}$ и $\{O', e_1', e_2'\}$ $\Longrightarrow$ можем построить аффинную замену координат.
Есть аффинная замена координат $\Longrightarrow$ можем определить преобразование f точки P как $f(P) = P'$, где у P' такие же координаты как и у P.

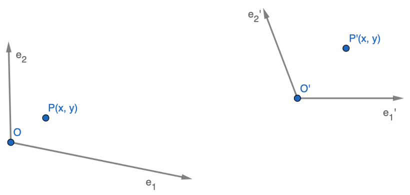


Рис. 134.

<u>Утв. 1.</u> Пусть f – изометрия, тогда две системы координат, задающиеся f можно выбрать прямоугольными.

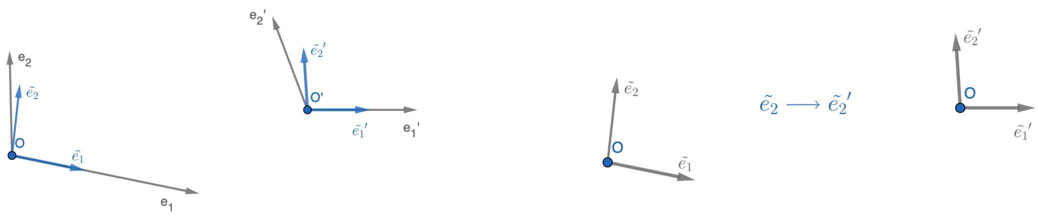


Рис. 135.

$\tilde{e}_1 = \dfrac{e_1}{|e_1|}$ переходит в $\tilde{e_1'} = \dfrac{e_1'}{|e_1'|}$ $\quad |\tilde{e}_1| = 1 = |\tilde{e_1'}|$
$|\tilde{e}_2| = 1, \quad \tilde{e}_2 \perp \tilde{e}_1, \quad |\tilde{e_2'}| = 1, \quad \tilde{e_2'} \perp \tilde{e_1'}$
$\tilde{e}_2 \longrightarrow \tilde{e_2'}$
f задается этими двумя прямоугольными системами координат (так как сохраняются длины векторов и угол между ними).

<u>Следствие</u> У изометрии f при выборе ортонормированных базисов $\{O, e_1, e_2\}$ и $\{O', e_1', e_2'\}$ в формуле $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ матрица C – ортогональна.

Утв. 2. Пусть есть аффинное преобразование, такое, что два базиса $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1', e_2'\}$ ортонормированы, тогда f – изометрия.

▶

Рис. 136.

$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ – подсчитано в $\{O', e_1', e_2'\}$

$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ – подсчитано в $\{O, e_1, e_2\}$

Они равны $\implies$ f изометрия по определению. ◀

22.1.1 Теорема Шаля

Теорема Шаля.

Изометрия плоскости является одной из следующих преобразований:

1. Сдвиг

2. Вращение вокруг точки

3. Скользящая симметрия

▶ Рассмотрим две прямоугольные системы координат, задающие изометрию: $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ где C ортогональна.

1. $C = E \implies$ сдвиг на вектор $(x_0; y_0)$

2. $\det C = 1, \quad C \neq E$. Было доказано, что $C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \phi \neq 2\pi k$

Есть ли при таком преобразоании неподвижные точки $P = f(P)$?

$$\begin{cases} x = \cos\phi x - \sin\phi y + x_0 \\ y = \sin\phi x + \cos\phi y + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\cos\phi - 1)x - \sin\phi y = -x_0 \\ \sin\phi x + (\cos\phi - 1)y = -y_0 \end{cases}$$

Система из двух линейных уравнений на две неизвестные x и y. Определитель левой части: $(\cos\phi - 1)^2 + \sin\phi = \cos^2\phi - 2\cos\phi + 1 + \sin^2\phi = 2 - 2\cos\phi$

$2 - 2\cos\phi = 0 \implies \cos\phi = 1 \iff \phi = 2\pi k$, но по условию $\phi \neq 2\pi k \implies \det \neq 0 \implies$ есть единственная неподвижная точка $(x_1; y_1)$

Выберем новые координаты так, чтобы $(x_1; y_1)$ стала началом.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x'} \\ \tilde{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= C\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{C\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\text{Образ } (x_1; y_1) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} \tilde{x'} = \cos\phi x' - \sin\phi y' \\ \tilde{y'} = \sin\phi x' + \cos\phi y' \end{cases}$ то есть это поворот на угол ϕ, вокруг неподвижной точки

3. $\det C = -1 \implies C = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$

В скользящей симметрии может не быть неподвижных точек, но всегда есть неподвижный вектор, давайте его искать.

$\begin{cases} \alpha = \cos\phi\alpha + \sin\phi\beta \\ \beta = \sin\phi\alpha - \cos\phi\beta \end{cases}$, $(\alpha;\beta)$ – неподвижная.

$\begin{cases} (\cos\phi - 1)\alpha + \sin\phi\beta = 0 \\ \sin\phi\alpha - (\cos\phi + 1)\beta = 0 \end{cases}$

Определитель матрицы левой части: $-(\cos\phi - 1)(\cos\phi + 1) - \sin^2\phi =$
$= 1 - \cos^2\phi - \sin^2\phi = 0 \implies$ матрица вырождена, но не равна $0 \implies \exists$ ненулевое решение $(\alpha_0;\beta_0)$ и оно единственно с точностью до пропорциональности.

Выберем новый базис (преобразование сохраняет его):

$\left\{ e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}(\alpha_0;\beta_0), e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}(-\beta_0;\alpha_0) \right\}$ $e_1 \perp e_2 \implies$

e_2 переходит в вектор, ортогональный e_1, это $\pm e_2$. Если $\{e_1', e_2'\} \longrightarrow \{e_1', e_2'\}$ то $\det C = 1 \implies$ в новых координатах $\{O', e_1', e_2'\}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x'} \\ \tilde{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} \tilde{x'} = x' + a \\ \tilde{y'} = -y' + b \end{cases}$, $-\dfrac{b}{2} + b = \dfrac{b}{2}$ сделаем сдвиг

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \dfrac{b}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{x}'' = x' + a = x'' + a \\ \tilde{y}'' = \tilde{y}' - \dfrac{b}{2} - -y' + b - \dfrac{b}{2} = -y' + \dfrac{b}{2} = -y'' \end{cases}$$

То есть $\begin{cases} \tilde{x}'' = x'' + a \\ \tilde{y}'' = -y'' \end{cases}$

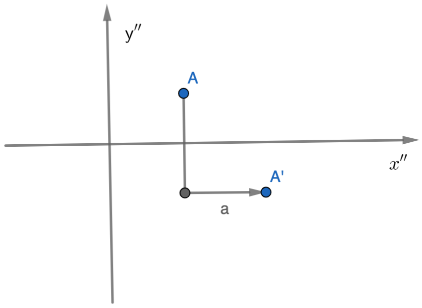


Рис. 137.

Отражение относительно оси Ox и сдвиг на вектор $(a; 0) \parallel Ox$ – это скользящая симметрия. ◀

22.1.2 Случай пространства

Теорема 1.
Изометрия пространства является одним из следующих видов преобразваний:
1. Сдвиг

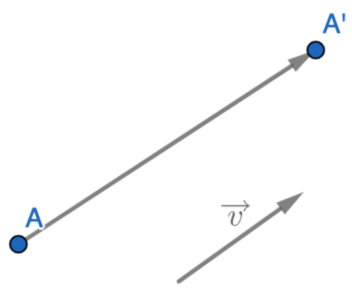


Рис. 138.

2. Винтовое вращение вокруг прямой. Поворот в плоскости, перпендикулярной прямой и сдвиг на вектор, параллельный этой прямой.

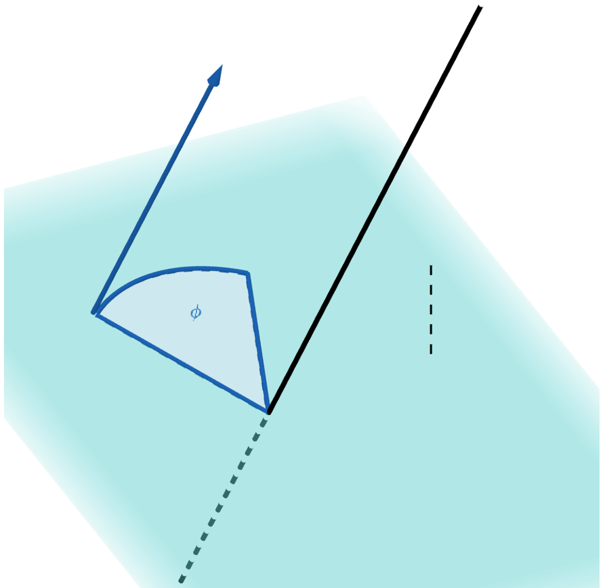


Рис. 139.

3. Скользящая симметрия относительно плоскости. Отражение относительно плоскости и сдвиг на вектор, параллельный этой плоскости.

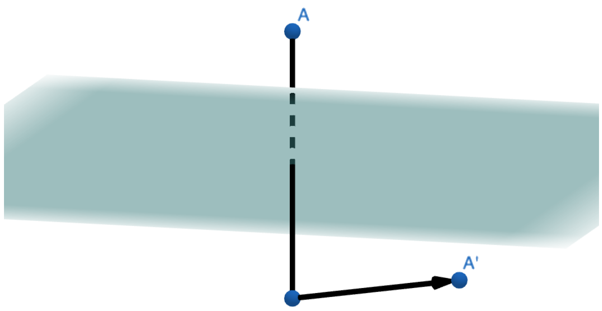


Рис. 140.

4. Зеркальное вразение. Вращение на ϕ вокруг заданной прямой и отражение относительно плоскости, перпендикулярной этой прямой.

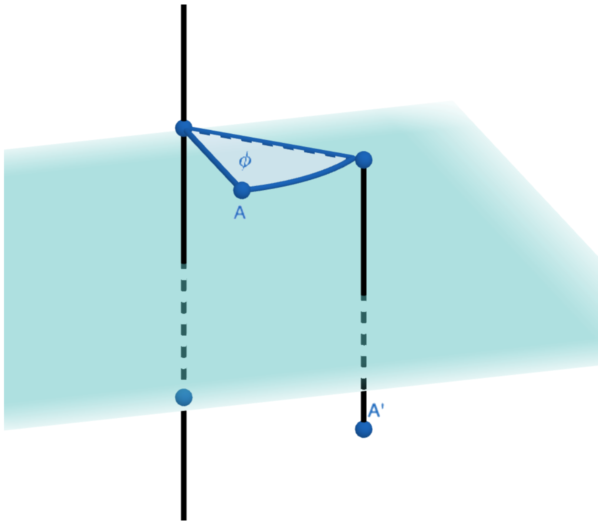


Рис. 141.

22.1.3 Действие аффинных преобразований на кривые

$$F(x,0)=0, \begin{cases} \tilde{x}=c_{11}x+c_{12}y+x_0 \\ \tilde{y}=c_{21}x+c_{22}y+y_0 \end{cases}$$

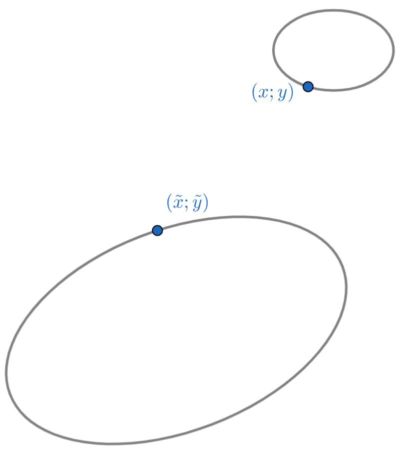


Рис. 142.

$\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y})=0$. Найдем обратное преобразование.

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\longrightarrow C\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}-C^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

Если изометрия, то C – ортогональна $\implies C^{-1}=C^T$

$$\begin{cases} x = c'_{11}\tilde{x} + c'_{12}\tilde{y} + x'_0 \\ y = c'_{21}\tilde{x} + c'_{22}\tilde{y} + y'_0 \end{cases} \qquad F(c'_{11}\tilde{x} + c'_{12}\tilde{y} + x'_0, c'_{21}\tilde{x} + c'_{22}\tilde{y} + y'_0) = 0$$

Образ кривой задается как $F(c'_{11}x + c'_{12}y + x'_0, c'_{21}x + c'_{22}y + y'_0) = 0$

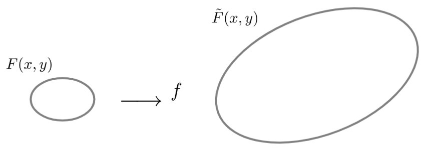


Рис. 143.

22.1.4 Действие группы на множестве

M – множество, $G = \{f_\alpha : M \to M\}$ – группа преобразований M
$a, b \in M \quad a \sim b \iff b = f_\alpha(a)$
Чтобы это отношение было отношением эквавалентности нужно:
1. $a \sim a \implies id \in G$
2. $a \sim b \implies b \sim a \implies b = f_\alpha(a) \iff a = f\beta(b) \implies f_\alpha \in G \iff f_\alpha^{-1} \in G$
3. $a \sim b, \quad b \sim c \implies a \sim c; \quad b = f_\alpha(a), \quad c = f_\beta(b) \implies c = f_\beta f_\alpha(a)$
$\implies f_\alpha, f_\beta \in G \implies f_\alpha \circ f_\beta \in G$

Утв. 3. $a, b \in M \quad a \sim b \iff b = f_\alpha(a)$ – отношение эквивалентности $\iff G$ – группа относительно композиции преобразований.

Лекция 23

23.1 Аффинные преобразования кривых

Аффинные преобразования $\supset$ изометрии.

$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ – действие на точках $\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ – действие на векторах

$F(x, y) = 0$ Уравнение образа кривой в $\{O', e_1', e_2'\}$ такое же как и у кривой в $\{O, e_1, e_2\}$

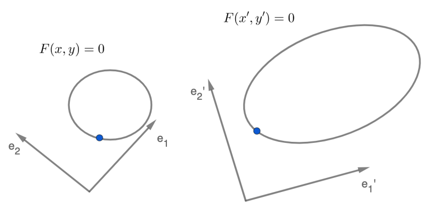


Рис. 144.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{F(x,y)=0} = C^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \text{ т.к. } \tilde{x} \text{ образ, то } \tilde{F}(x, y) = 0 \iff \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$$

Пример

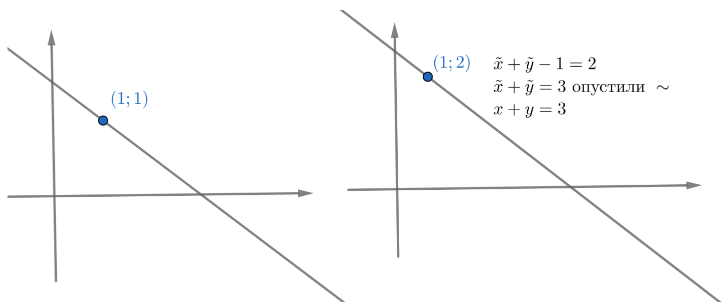


Рис. 145.

Сделаем сдвиг: $\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tilde{x} \\ y = \tilde{y} - 1 \end{cases}$

23.2 Действие группы преобразований на множестве кривых

Кривая второго порядка при преобразовании переходит в кривую второго порядка $\Longrightarrow$ в частности есть действие группы на квадриках.

Опр. 1. Квадрики $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ аффинно эквивалентны, если есть аффинное преобразование, переводящее первую квадрику во вторую.

Опр. 2. Квадрики $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ метрически эквивалентны, если есть изометрия, переводящее первую квадрику во вторую.

Изометрии – подмножество аффинных преобразований $\Longrightarrow$ их меньше $\Longrightarrow$ классов эквивалентности у них больше.

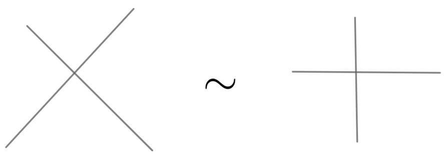


Рис. 146.

Аффинно эквивалентны, но не метрически эквивалентны.

Теорема. 1. Две квадрики метрически эквивалентны $\Longleftrightarrow$ у них одинаковый канонический вид.

►

$\boxed{\Longleftarrow}$

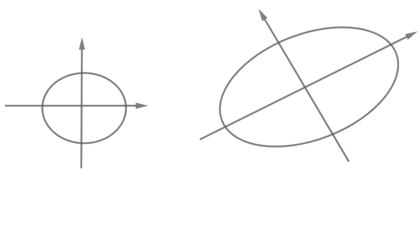
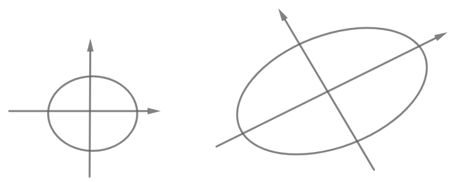


Рис. 147.

Рассмотрим изометрию, которая переводит каноническую систему координат первой в каноническую систему координат второй. Уравнение образа первой квадрики в новой системе координат совпадает с уравнением в старой системе координат (= канонический вид первой). С другой стороны оно совпадает с уравнением второй квадрики так как их канонические виды однаковые $\Longrightarrow$ первая переходит во вторую.

(1)



(2)

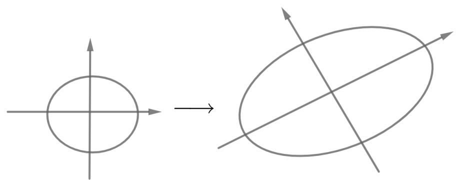


Рис. 148. (3)

$\boxed{\Longrightarrow}$

Пусть $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ метрически эквивалентны $\Longrightarrow$ есть изометрия

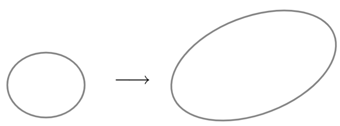


Рис. 149.

У каждой из них есть каноническая система координат.

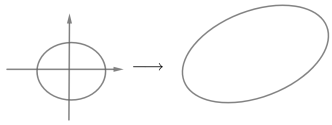


Рис. 150.

Найдем образ канонической системы координат первой квадрики при рассматриваемой изометрии.

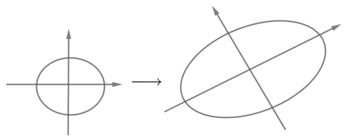


Рис. 151.

Образ первой квадрики имеет в новой системе координат то же уравнение что и в старой. То есть каноническое уравнение. А образ совпадает со второй квадрикой. Значит вторая квадрика имеет то же каноническое уравнение.◄

Утв. 1. Две квадрики аффинно эквивалентны $\iff$ у них одинаковое название. То есть каждая квадрика аффинно эквивалентна одной из следующих квадрик:
1. $x^2+y^2=1$ – эллипс.
2. $x^2+y^2=-1$ – мнимый эллипс.
3. $x^2+y^2=0$ – пара мнимых пересекающихся прямых.
4. $x^2-y^2=1$ – гипербола.
5. $x^2-y^2=0$ – пара пересекающихся прямых.
6. $y^2=2x$ – парабола.
7. $y^2=1$ – пара параллельных прямых.
8. $y^2=-1$ – пара мнимых параллельных прямых.
9. $y^2=0$ – пара совпадающих прямых.
и они аффинно неэквивалентны друг другу.

►Изометрией любую квадрику можно привести к каноническому виду, а дальше масштабированием осей можно привести в один из описываемых типов.
Пример: эллипс $\to \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \to \tilde{x}=\dfrac{x}{a},\quad \tilde{y}=\dfrac{y}{b}$ (аффинное) $\to \tilde{x}^2+\tilde{y}^2=1$
Дальше нужно доказать, что нет аффинных преобразований, переводящих типы $1\dots 9$ друг в друга.
$\emptyset$: Мнимый эллипс и пара мнимых параллельных прямых. У мнимого эллипса нет ассимптот, а у пары мнимых параллельных прямых есть $\implies$ они не переходят друг в друга.
•: Единственный тип – пара мнимых пересекающихся прямых.
Содержательные квадрики: Делятся на коники и распадающиеся (это сохраняется при аффинном преобразовании). Коники разделяются количеством ассимптотических направлений (эллипс: 0, парабола: 1, гипербола: 2) $\implies$ они аффинно неэквивалентны.

Распадающиеся разделяются свойством параллельности. ◄

23.3 Эрланкенская программа Клейна

В плоскости мы можем рассматривать различные геометрии.

Плоскость + аффинные преобразования = аффинная геометрия	**Плоскость + изометрии = метрическая геометрия**
Нет расстояний.	Сохраняются расстояния.
Нет углов.	Сохраняются углы.
Сохраняется параллельность и отношения длин отрезков на параллельных прямых.	Сохраняется параллельность и отношения длин отрезков на параллельных прямых.
Есть понятие центра (так как сопряженный диаметр определяется параллельными прямыми и отношением длин хорд $\implies$ диаметр переходит в диаметр $\implies$ центр переходит в центр).	Есть понятие центра.
Понятия фокуса нет.	Фокус переходит в фокус

Эрланкенская программа Феликса Клейна: Геометрия есть множество точек, с определенной на нем группой преобразований.

23.4 Поверхности второго порядка

Опр. 3. Поверхностью второго порядка называется множество точек, которое задается уравнением второго порядка
$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0$

Опр. 4. Квадрика – класс эквивалентности уравнений второго порядка относительно умножения на ненулевую константу. $F_1 = 0$ и $\lambda F_1 = 0, \quad \lambda \neq 0$ одна и та же квадрика.

Теорема. 2. Для любой квадрики есть прямоугольная система координат, в которой квадрика имеет один из следующих видов:

A	**1.**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$(a \geq b \geq c > 0)$	Эллипсоид
	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	$(a \geq b \geq c > 0)$	Мнимый эллипсоид
	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$(a \geq b > 0, c > 0)$	Однополостный гиперболоид
	4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$(a \geq b > 0, c > 0)$	Двуполостный гиперболоид
	5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$(a \geq b > 0, c > 0)$	Конус
	6.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	$(a \geq b \geq c > 0)$	Мнимый конус
B	**7.**	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$	$(p \geq q > 0)$	Эллиптический параболоид
	8.	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$	$(p \geq q > 0)$	Гиперболический параболоид
C	**9.**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(a \geq b > 0)$	Эллиптический цилиндр
	10.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	$(a \geq b > 0)$	Мнимый эллиптический цилиндр
	11.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$(a \geq b > 0)$	Две мнимые пересекающиеся плоскости
	12.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$(a, b > 0)$	Гиперболический цилиндр
	13.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		Две пересекающиеся плоскости
D	**14.**	$y^2=2px$	$(p > 0)$	Параболический цилиндр
E	**15.**	$y^2=a^2$	$(a > 0)$	Две параллельные плоскости
	16.	$y^2=-a^2$	$(a > 0)$	Две мнимые параллельные плоскости
	17.	$y^2=0$		Пара совпадающих плоскостей

Лемма. 1. Для квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ существует прямоугольная система координат, в которой эта форма имеет вид $\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2$, причем:

1. λ_i – корни характеристического многочлена матрицы $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

то есть λ_i – корни $\det(Q - \lambda E) = 0$

2. Направляющие векторы v_i координатных осей удовлетворяют уравнению $(Q - \lambda_i E)v_i = 0 \iff v_i$ – собственные векторы.

Доказательство в курсе линейной алгебры. (Следует из того что $\forall$ симметричную матрицу Q можно привести к диагональному виду ортогональной конгруэнцией. Или можно рассмотреть единичную сферу, найти на ней точку, в которой квадрика принимает наибольшее значение и расположить ось Oz через эту точку)

► Пользуемся Леммой. Получим $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0$

$\boxed{\text{A}}$ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, тогда надо выделить полный квадрат.

$$\lambda_1\left(x^2 + 2\frac{a_1}{\lambda_1}x + \left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2\right) - \lambda_1\left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2 +$$
$$\lambda_2\left(y^2 + 2\frac{a_2}{\lambda_2}y + \left(\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^2\right) - \lambda_2\left(\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^2 +$$
$$\lambda_3\left(z^2 + 2\frac{a_3}{\lambda_1}z + \left(\frac{a_3}{\lambda_3}\right)^2\right) - \lambda_3\left(\frac{a_3}{\lambda_3}\right)^2 =$$

$$= \lambda_1\underbrace{\left(x + \frac{a_1}{\lambda_1}\right)}_{\tilde{x}}^2 + \lambda_2\underbrace{\left(y + \frac{a_2}{\lambda_2}\right)}_{\tilde{y}}^2 + \lambda_3\underbrace{\left(z + \frac{a_3}{\lambda_3}\right)}_{\tilde{z}}^2 + \tau = \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2 + \tau = 0$$

$\tau = 0 \implies$ Если все λ_i одного знака, то **6. Мнимый конус** (с точностью до переименования осей, чтобы выполнялось $a \geq b \geq c > 0$)

Если два λ_i одного знака, третий другого, то **5. Конус**

$\tau \neq 0 \implies \dfrac{\lambda_1}{-\tau}\tilde{x}^2 + \dfrac{\lambda_2}{-\tau}\tilde{y}^2 + \dfrac{\lambda_3}{-\tau}\tilde{z}^2 = 1 \implies$

Если $\dfrac{\lambda_i}{-\tau} > 0$, то **1. Эллипсоид**, если $\dfrac{\lambda_i}{-\tau} < 0$, то **2. Мнимый эллипсоид**.

Если же $\dfrac{\lambda_i}{-\tau}$ разных знаков, то **3. Однополостный гиперболоид**, если $(++-)$ и **4. Двухполостный гиперболоид**, если $(--+)$

$\boxed{\text{B}}$ $\lambda_1\lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad b_3 \neq 0$. Можем убить линейные члены при x и y:

$$\lambda_1\left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2a_3z + \tau_0 + \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$$

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2}_{\tilde{x}} + \lambda_2 \underbrace{\left(y+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2}_{\tilde{y}} + 2a_3 \underbrace{\left(z+\frac{\tau}{2a_3}\right)}_{\tilde{z}} = 0$$

$$\lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2 + 2a_3\tilde{z} = 0$$

В зависимости от знаков$\lambda_1, \lambda_2, a_3$ получим:

7. Эллиптический параболоид, если $\dfrac{\lambda_1}{2a_3}, \dfrac{\lambda_2}{2a_3}$ одного знака

8. Гиперболический параболоид, если $\dfrac{\lambda_1}{2a_3}, \dfrac{\lambda_2}{2a_3}$ разных знаков

$\boxed{\mathbf{C}}$ $\lambda_1\lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad a_3 = 0$

$$\lambda_1\left(x+\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y+\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^2 + \tau = 0 \longrightarrow \lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2 + \tau = 0$$

В зависимости от знаков $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ получим:

9. Эллиптический цилиндр, если λ_1, λ_2 одного знака, τ другого.

10. Мнимый эллиптический цилиндр, если $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ одного знака.

11. Две мнимыепересекающиеся плоскости, если λ_1, λ_2 одного знака, $\tau = 0$.

12. Гиперболический цилиндр, если λ_2, τ одного знака, λ_1 другого.

13. Две пересекающиеся плоскости, если λ_1, λ_2 разных знаков, $\tau = 0$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тогда хотя бы одно из чисел $b_2, b_3 \neq 0$

$$\lambda_1\left(x+\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2a_2y + 2a_3z + \tau \to \lambda_1\left(x+\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\sqrt{a_2^2+a_3^2}\left(\underbrace{\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+a_3^2}}}_{\alpha} y + \underbrace{\frac{a_3}{\sqrt{a_2^2+a_3^2}}}_{\beta} z\right) + \tau$$

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \implies \exists\phi : \cos\phi = \alpha, \quad -\sin\phi = \beta$

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x+\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2}_{\tilde{x}} + 2\sqrt{a_2^2+a_3^2}\underbrace{(\cos\phi y - \sin\phi z)}_{\tilde{y}} + \tau \quad \tilde{z} = \sin\phi y + \cos\phi z$$

Поворот в плоскости + сдвиг, это винтовое вращение $\implies$ новая система координат прямоугольная.

$\lambda_1\tilde{x}^2 + 2\sqrt{a_2^2+a_3^2}\tilde{y}^2 + \tau$ – сдвинем, чтобы избавиться от τ

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + 2\sqrt{a_2^2+a_3^2}\left(\tilde{y} + \frac{\tau}{2\sqrt{a_2^2+a_3^2}}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \left(\tilde{y} + \dfrac{\tau}{2\sqrt{a_2^2 + a_3^2}}\right) \\ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{x} \\ \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} \end{cases} \longrightarrow \lambda_1 \tilde{\tilde{y}}^2 = -2\sqrt{a_2^2 + a_3^2}\tilde{\tilde{x}}$$

приводится к **14. Параболоид**

$\boxed{\mathbf{E}}$ $\lambda_1 \neq 0, \quad a_2 = a_3 = 0$

$$\lambda_1 \left(x + \frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2 + \tau \longrightarrow \begin{cases} \tilde{y} = \left(x + \dfrac{a_1}{\lambda_1}\right) \\ \tilde{x} = y \\ \tilde{z} = z \end{cases}$$

$\lambda_1 \tilde{y}^2 + \tau = 0$ В зависимости от знака τ получим:

15. Две параллельные плоскости, если $\tau < 0$

16. Две мнимые параллельные плоскости, если $\tau > 0$

17. Две совпадающие плоскости, если $\tau = 0$ ◄

Лекция 24

24.1 Метрическая классификация и инварианты поверхностей

Опр. 1. Две поверхности второго порядка метрически эквивалентны, если они приводятся друг в друга изометрией $\implies$ две поверхности второго порядка метрически эквивалентны $\iff$ у них одинаковое каноническое уравнение.

Инварианты

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

Можно доказать по аналогии, что ортогональными инвариантами будут характеристический многочлен Q и $\det A$

24.2 Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \geq b \geq c > 0)$$

$|x| \leq a; |y| \leq b; |z| \leq c \implies$ эллипсоид ограничен (параллелепипедом со сторонами a, b, c)

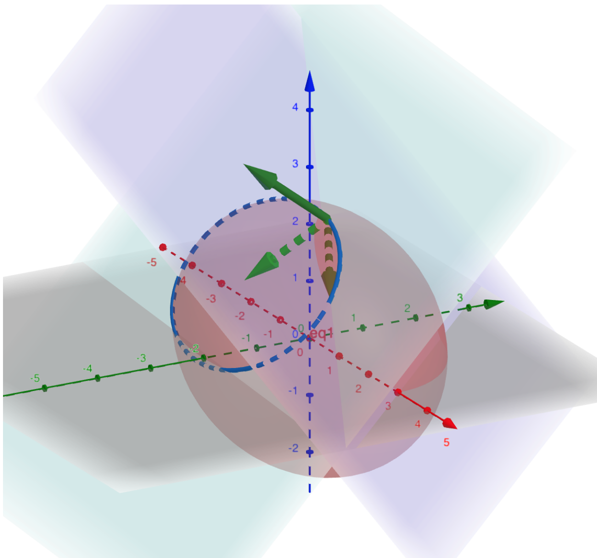


Рис. 152.

Лемма. 1. Сечение поверхности второго порядка плоскостью – кривая второго порядка.

► Выберем прямоугольную систему координат, такую, что $Oz \perp \pi$

Сечение: $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies F(x,y,0)$ – кривая второго порядка ◄

Следствие Плоские сечения эллипсоида – эллипсы, точки или $\emptyset$

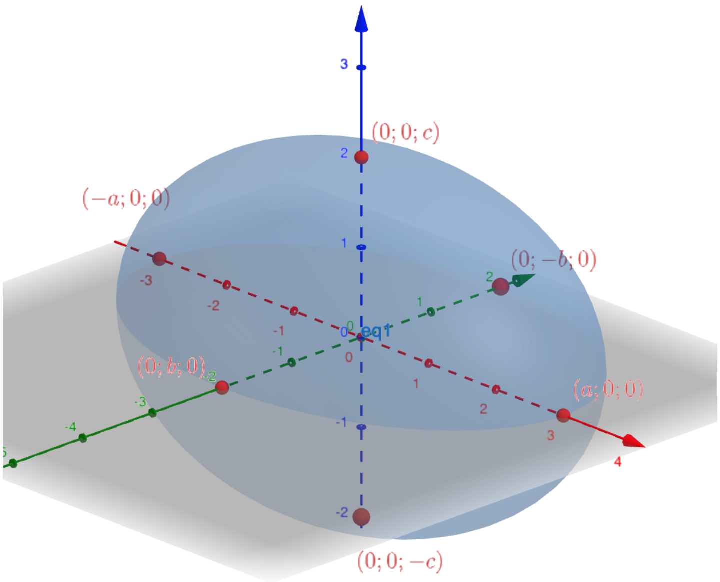


Рис. 153.

У эллипса шесть вершин. Если две полуоси равны $(a = b \vee b = c)$, то это эллипсоид вращения, а если $a = b = c$, то это сфера.

Фокусов у эллипсоида в общем случае нет, есть только у эллипсоида вращения.

Теорема Штрауде

Рассмотрим $\dfrac{x^2}{a^2-\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2-\lambda} + \dfrac{z^2}{c^2-\lambda} = 1$ при $\lambda = b^2$ и $\lambda = c^2$

$\lambda = c^2 \implies$ в оси Oxy лежит эллипс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-c^2} + \dfrac{y^2}{b^2-c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ – факальный эллипс

$\lambda = b^2 \implies$ в оси Oxz лежит гипербола $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-b^2} + \dfrac{z^2}{c^2-b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ – факальная гипербола

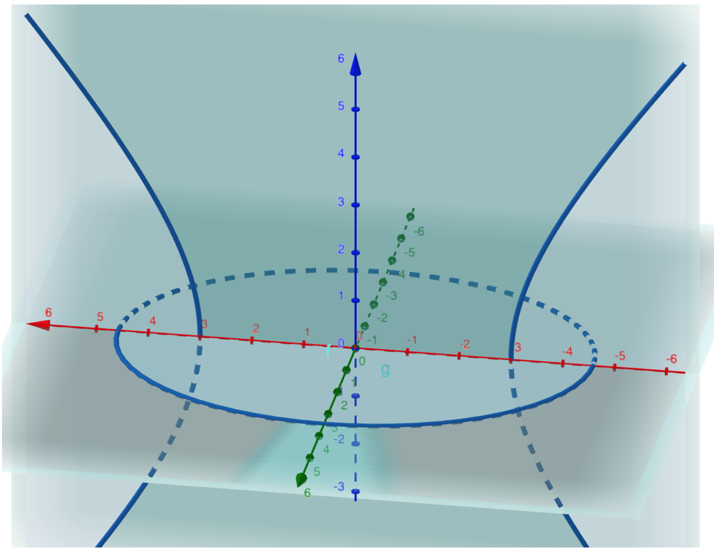


Рис. 154.

Геометрическое описание: эллипсоида: эллипс и гипербола в ортогональных плоскостях, такие, что вершины эллипса – фокусы гиперболы, вершины гиперболы – фокусы эллипса.

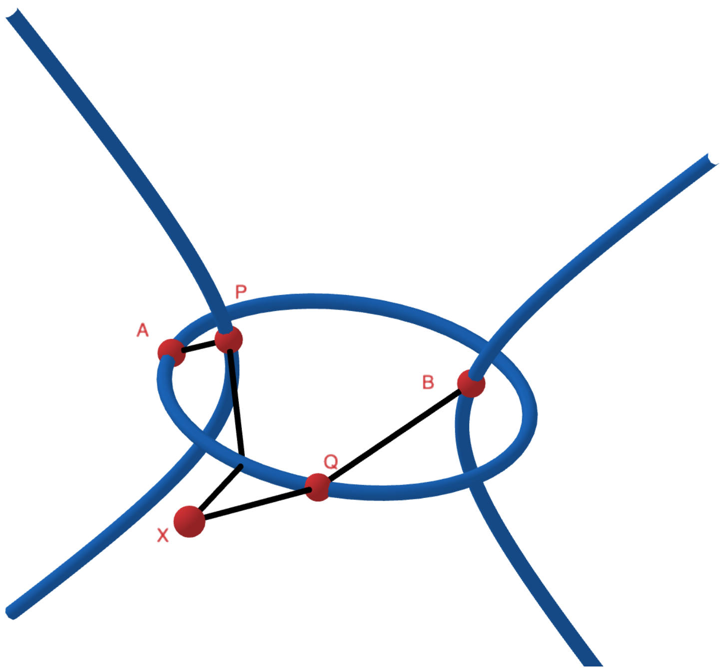


Рис. 155.

Нить привязана в A и B. P – скользит по гиперболе, Q по эллипсу. X описывает четверть эллипсоида (переднюю нижнюю на рисунке).

24.3 Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

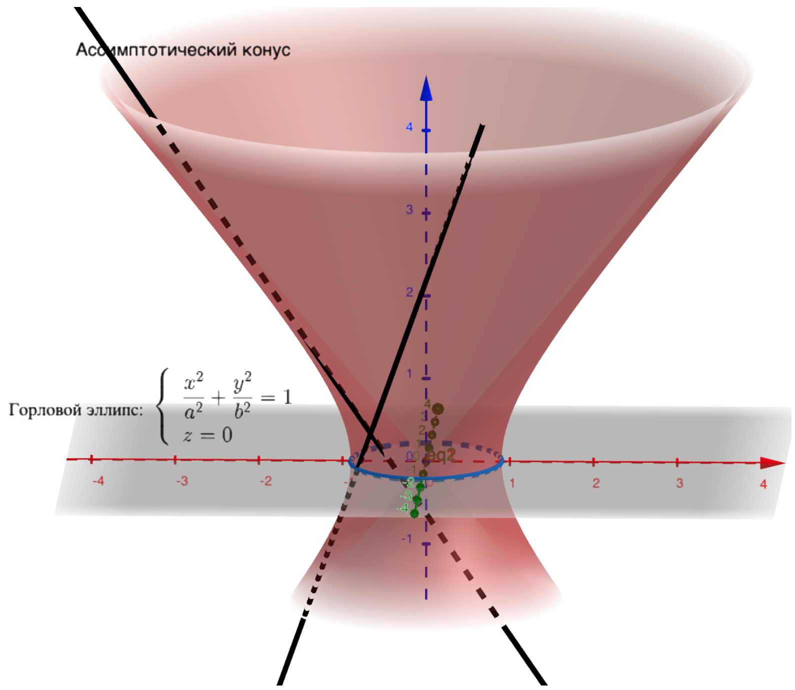


Рис. 156.

Есть вписанный конус (ассимптотический конус).

Утв. 1. При $z \to \pm\infty$ однополостный гиперболоид бриближается к ассимптотическому конусу.

Шуховская башня – система из однополостных гиперболоидов. (Рис. 152. (1)). Смотровая башня в Дании – однополостный гиперболоид. (Рис. 152. (2)).

Теорема. 1.

1. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямые, лежащие на этом гиперболоиде.

2. Эти прямые образуют два семейства. Две прямые из одного семейства скрещиваются. Две прямые из разных семейств или пересекаются или параллельны.

Эти прямые называются прямолинейными образующими.

► Сделав аффинное преобразование, можно свести к случаю однополостного гперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1 \iff x^2 - z^2 = 1 - y^2 (*)$

$(x + z)(x - z) = (1 - y)(1 + y)$

(1)

(2)

Рис. 157.

Рассмотрим два семейства:

1. $\begin{cases} \lambda(x+z) = \mu(1-y) \\ \mu(x-z) = \lambda(1+y) \end{cases}$ $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$ – две $\nparallel$ плоскости $\implies$ задают прямую

Если точка лежит на прямой, то точка удовлетворяет $(*)$ (перемножим уравнения системы)

1. $\begin{cases} \lambda(x+z) = \mu(1+y) \\ \mu(x-z) = \lambda(1-y) \end{cases}$

Есть ли прямые этих семейств, проходящие через точку $P(x_0;y_0;z_0)$ на гиперболоиде?

$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{(1-y_0)}{(x_0+z_0)} \\ \\ \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{(x_0-z_0)}{(1+y_0)} \end{cases}$ $(1-y_0)$ и $(1+y_0)$ одновременно $\neq 0 \implies$ хотя бы в одном из отношений справа не $\dfrac{0}{0} \implies$ из него можно определить отношение $\dfrac{\lambda}{\mu}$

Оба соотношения определяют одно и то же $\dfrac{\lambda}{\mu}$ в силу $\dfrac{(1-y_0)}{(x_0+z_0)} = \dfrac{(x_0-z_0)}{(1+y_0)}$

Поэтому для точки P на однополостном гиперболойде $\exists$ прямая **1** семейства (аналогично **2**), через нее проходящая.◄

Лекция 25

Первая часть лекции не была отснята

25.1 Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

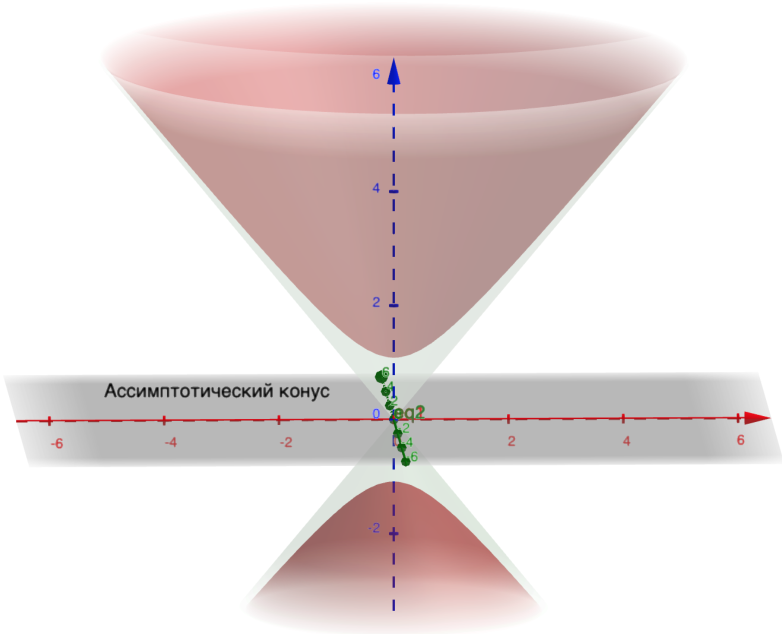


Рис. 158.

Утв. 1. У двуполостного гиперболоида нет прямолинейных образующих.

У двуполостного гиперболоида есть ассимптотический конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

25.2 Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,q>0$$

Нет прямолинейных образующих. $p=q \implies$ параболоид вращения. Тогда есть фокус в точке $\left(0;0;\frac{p}{2}\right)$

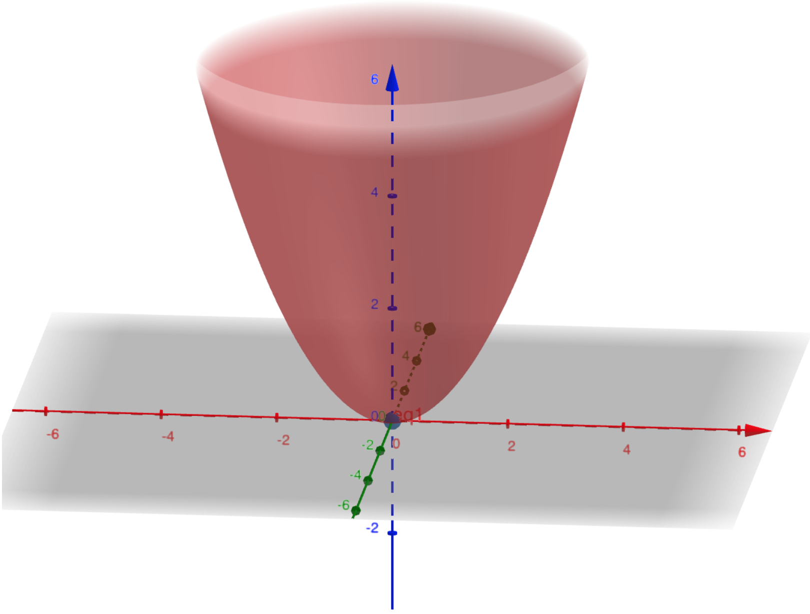


Рис. 159.

25.3 Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$$

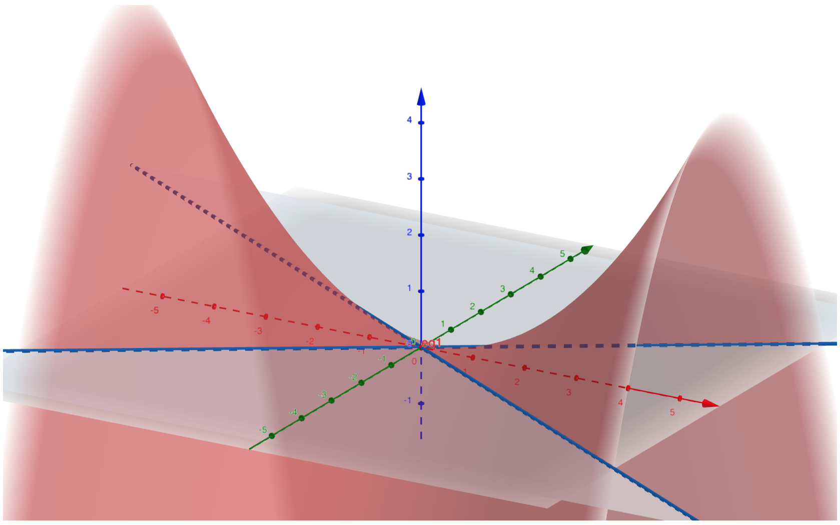


Рис. 160.

Теорема. 1. Через каждую точку гиперболического параболоида проходят ровно две прямолинейные образующие. Они составляют два семейства. Две прямые одного семейства скрещиваются и параллельны одной плоскости. Две прясые разных семейств пересекаются.

► $P(x_0; y_0; z_0)$ лежит на гиперболическом параболоиде. Прямая, через нее проходящая:

$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$ Точки пересечения с $F(x, y, z) = 0 : F(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma) = 0$

$F_2t^2 + F_1t + F_0 = 0(*)$ аналогично случаю кривых $F_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Опр. 1. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ – ассимптотическое направление, если $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$

Утв. 2. Направляющий вектор прямолинейной образующей – это ассимптотическое направление.

► Прямолинейная образующая $\Longrightarrow$ у $(*)$ $\forall t$ – рашение $\Longrightarrow$ $F_2 = F_1 = F_0 = 0 \Longrightarrow$ $0 = F_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ◄

Ассимптотическое направление: $\dfrac{\alpha^2}{p} - \dfrac{\beta^2}{q} = 0 \iff \left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{p}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{q}}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{p}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{q}}\right) = 0$

Поэтому любая прямолинейная образующая параллельна одной из плоскостей
$\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \quad \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$

Рассмотрим два семейства:

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = k_1 \\ k_1\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = k_1 \\ k_1\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \end{cases}$

Плоскости расположены вертикально $\Longrightarrow$ если вектор $\in$ обеим, то он параллелен оси Oz $\Longrightarrow$ два семейства не пересекаются.

Все прямые из первого семейства параллельны одной плоскости $\Longrightarrow$ они либо параллельны, либо скрещиваются.

$n_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{q}}, 0\right), \quad n_2 = \left(\frac{k_1}{\sqrt{p}}, -\frac{k_1}{\sqrt{q}}, -2\right)$

Направляющие вектор прямой из первого семейства: $\left(\sqrt{p}; \sqrt{q}; k_1\right) = v$

Для разных k_1 направляющие векторы не параллельны $\implies$ прямые скрещиваются.

Для второго семейства рассуждения аналогичны.

Пусть $l_1 \in$ первому семейству, $l_2 \in$ второму. Тогда их проекции на плоскость $z = 0$:

$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = k_1, \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = k_2 \implies$ у них есть общая точка $(x_0; y_0)$.

Возьмем $z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q}\right) \implies (x_0; y_0; z_0) \in$ обеим прямым, значит l_1 и l_2 пересекаются.◄

Лекция 26

26.1 Конус

Опр. 1. Конус с вершиной O над кривой Γ это объединение прямых, проходящих через O, и точки Γ.

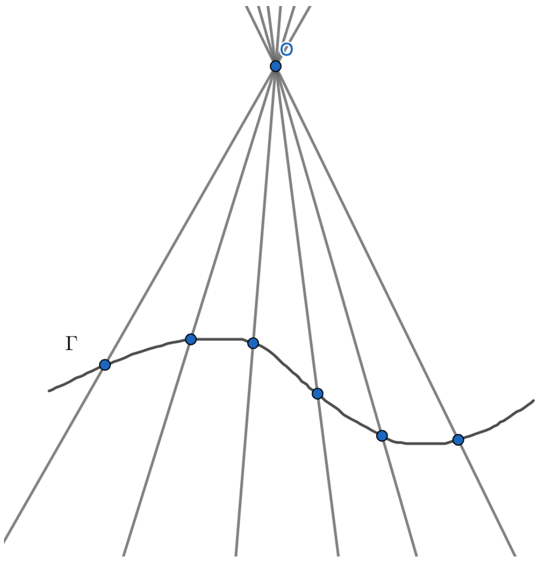


Рис. 161.

Утв. 1. Конус над эллипсом это конус второго порядка.

► Выберем такую систему координат, что $O = (0;0;0)$, а эллипс лежит в плоскости $z = h$.

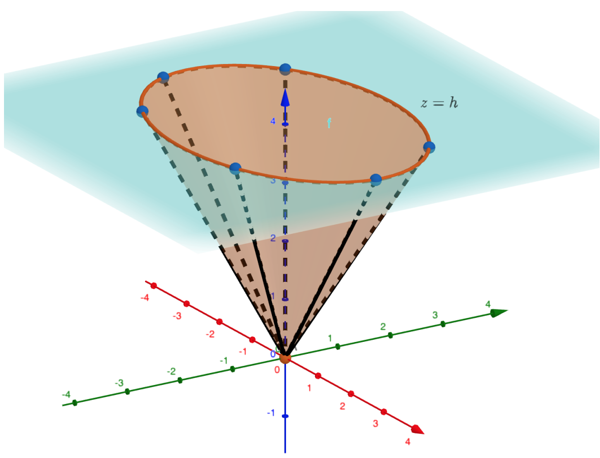


Рис. 162.

$$\begin{cases} F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \\ z = h \end{cases}$$

Уравнение круга: $\Phi(x,y,z) = 0 \quad (*)$
$\Phi(x,y,z) = F\left(\frac{x}{z}h, \frac{y}{z}h\right), \quad z = h \implies \Phi(x,y,h) = F(x,y)$
Вместе с точкой должна соержаться прямая: $F(x_0,y_0) = 0 \quad (x_0;y_0;h) \in$ эллипсу; $(\lambda x_0; \lambda y_0; \lambda z_0)$ – прямая, проходящая через O и эллипс.
$\Phi(\lambda x_0 \lambda y_0 \lambda z_0) = F\left(\frac{\lambda x_0}{\lambda h}h, \frac{\lambda y_0}{\lambda h}h\right) = F(x_0,y_0) = 0 \implies$ любая точка прямой l лежит а поверхности $(*)$

$$\Phi(x,y,z) = F\left(\frac{x}{z}h, \frac{y}{z}h\right) =$$
$$= a_{11}\left(\frac{x}{z}h\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{x}{z}h\right)\left(\frac{y}{z}h\right) + a_{22}\left(\frac{y}{z}h\right)^2 + 2a_1\left(\frac{x}{z}h\right) + 2a_2\left(\frac{y}{z}h\right) + a_0 =$$
$$= \frac{1}{z^2}\left[\underbrace{h^2a_{11}x^2 + 2a_{12}xyh^2 + h^2a_{22}y^2 + 2a_1xhz + 2a_2hyz + a_0z^2}_{\tilde{\Phi}(x,y,z)}\right]$$

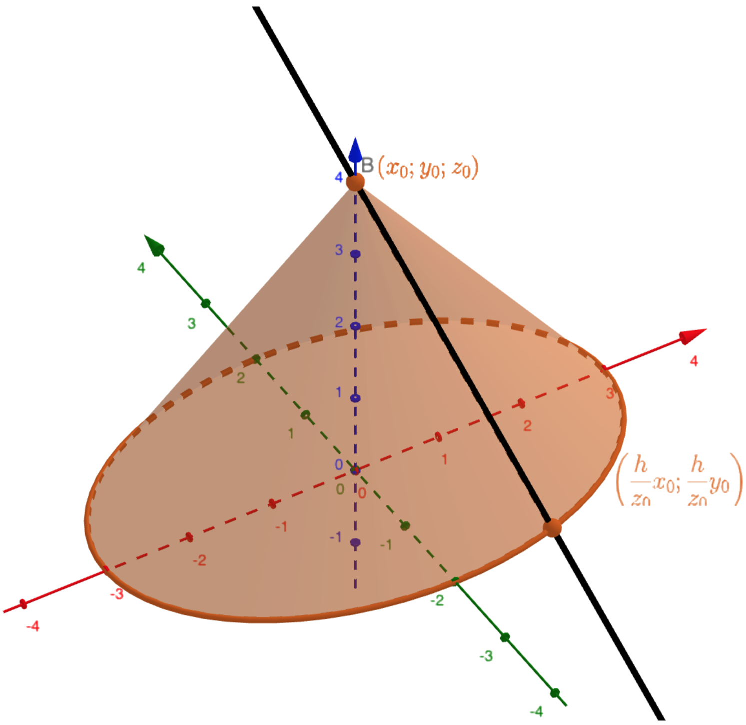


Рис. 163.

Вне $z = 0 \quad \Phi(x,y,z) = 0 \iff \tilde{\Phi}(x,y,z) = 0$
$\tilde{\Phi}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2\tilde{\Phi}(x,y,z) \implies$ если $(x_0;y_0;z_0)$ удовлетворяет $\tilde{\Phi}(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = 0$,

то тогда и вся прямая $(tx_0; ty_0; tz_0)$ лежит на поверхности так как
$\tilde{\Phi}(tx_0, ty_0, tz_0) = t^2\tilde{\Phi}(x_0, y_0, z_0) = 0$

Теперь докажем, что других точек на поверхности нет. Найдем пересечения с $z = h$

$t = \dfrac{h}{z_0}$

$\tilde{\Phi}\left(\frac{h}{z_0}x_0, \frac{h}{z_0}y_0, h\right) = h^2\Phi\left(\frac{h}{z_0}x_0, \frac{h}{z_0}y_0, h\right) = h^2F\left(\dfrac{\frac{h}{z_0}x_0}{h}h, \dfrac{\frac{h}{z_0}y_0}{h}h\right) = h^2F\left(\frac{h}{z_0}x_0, \frac{h}{z_0}y_0\right) \implies$
$\left(\frac{h}{z_0}x_0, \frac{h}{z_0}y_0\right)$ лежит на эллипсе.

$\tilde{\Phi}(x, y, z)$ – однородный многочлен второго порядка $\implies$ после приведения к главным осям получим $\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2 = 0$
Предположим, что $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \implies \lambda_3 = 0 \implies \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 = 0$

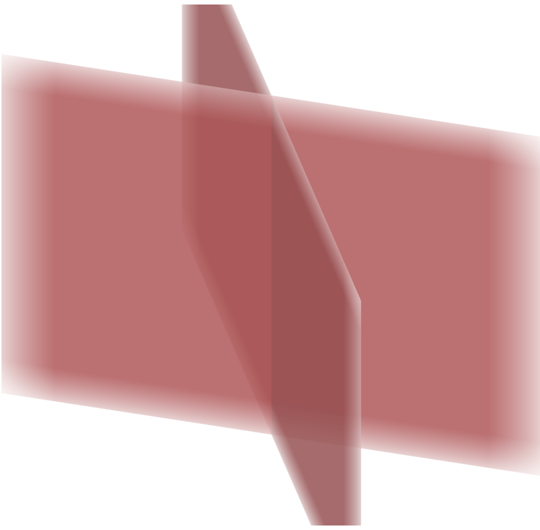


Рис. 164.

Плоскости не являются конусом ни над каким эллипсом $\implies$ противоречие $\implies$ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0 \implies$ это конус ◀

26.2 Цилиндры

Эллипстиеский цилиндр: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

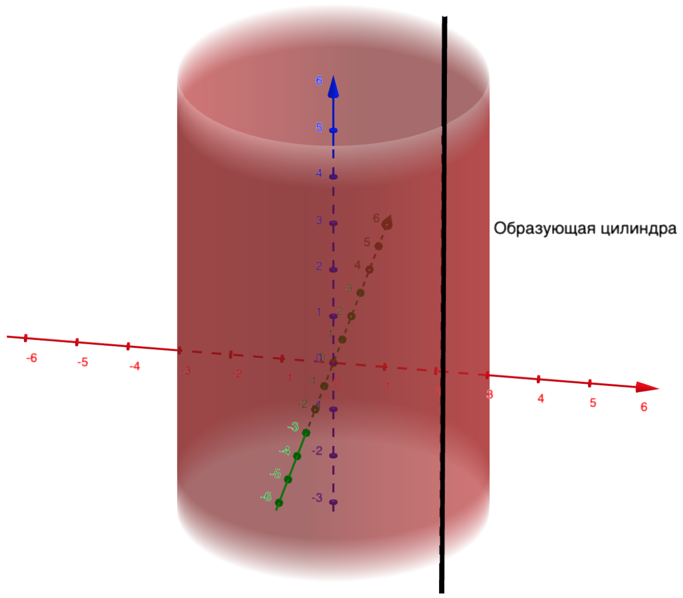


Рис. 165.

Параболический цилиндр: $y^2 = 2px$

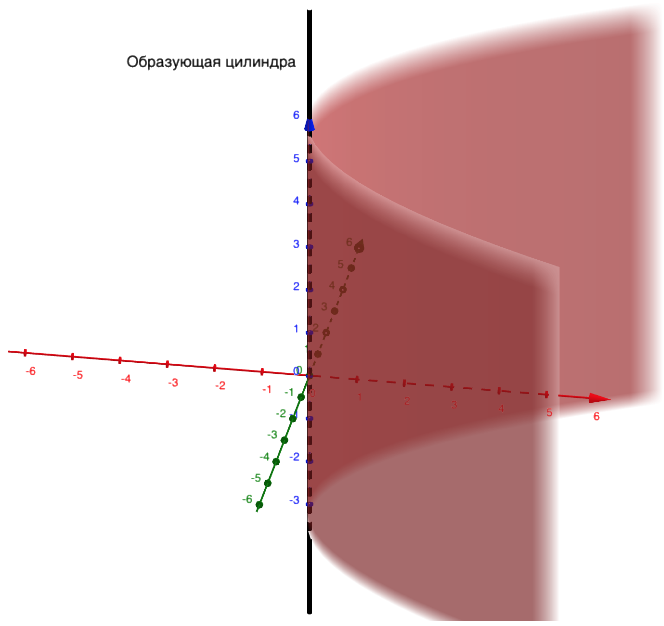


Рис. 166.

Гиперболическийцилиндр: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

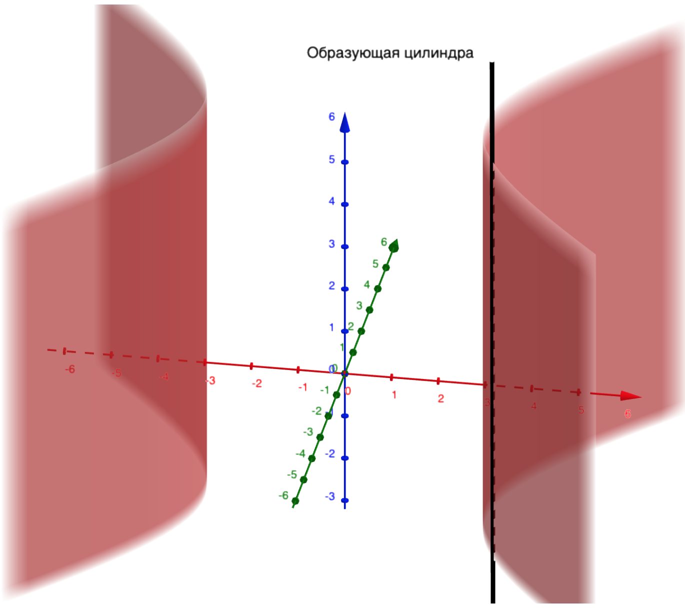


Рис. 167.

Утв. 2. На цилиндрах нет прямолинейных образующих, кроме образующих.
► Путсь есть такие прямолинейные образующие, спроецируем на плоскость Oxy, тогда эта образующая перейдет в прямую, лежащую на конике, а таких нет. ◄

26.3 Ассимптотические направления и главные диаметры поверхностей второго порядка

$F(x, y, z) = 0$ – поверхность второго порядка.

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \quad F(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma) = 0 \iff F_2t^2 + F_1t + F_0 = 0$$

Утв. 3. $\begin{cases} F_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ F_1 = \alpha \dfrac{\partial F}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial F}{\partial y} + \gamma \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ F_0 = F(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$ ► Доказательство аналогично плоскому случаю. ◄

Опр. 2. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ – ассимптотическое направление, если $F_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0$

Утв. 4. Свойство направления быть ассимптотическим не зависит от выбора координат. ► Доказательство аналогично плоскому случаю. ◄

Утв. 5. Прямая неассимптотического направления пересекает поверхность либо в 0, либо в 2 возможно совпадающих точках.

► Доказательство аналогично плоскому случаю. ◄

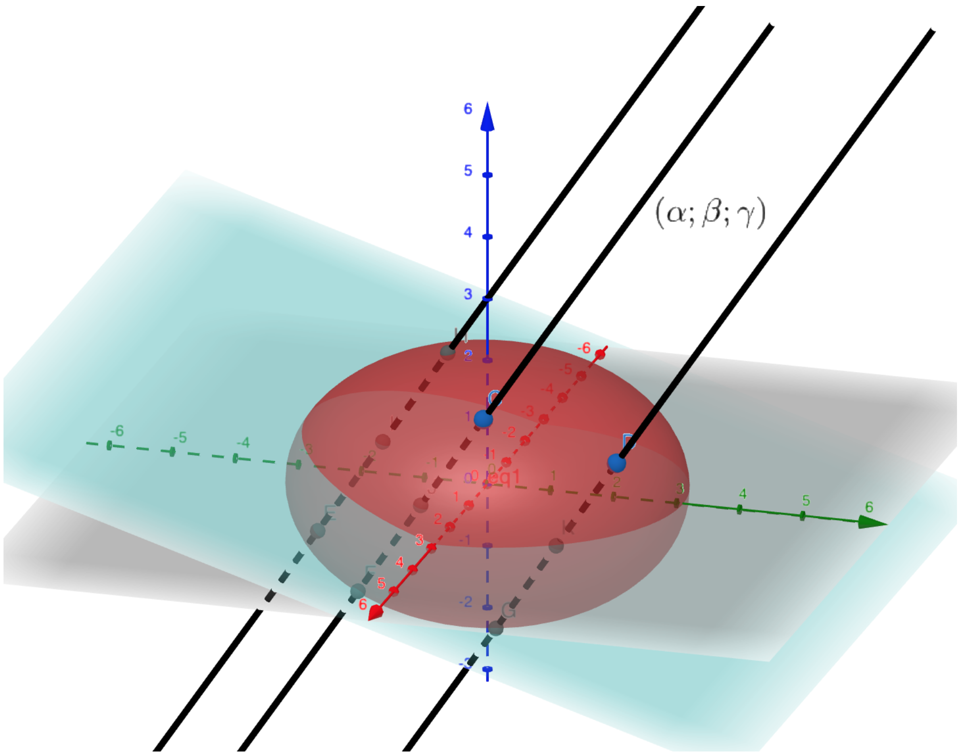


Рис. 168.

Утв. 6. Середина хорд неассимптотического направления лежат на плоскости

$\alpha \dfrac{\partial F}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial F}{\partial y} + \gamma \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$ ► Доказательство аналогично плоскому случаю. ◄

Опр. 3. Эта плоскость называется диаметральной плоскостью, сопряженной направлению $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$

Утв. 7. Центры – в точности решения системы $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$

► Доказательство аналогично плоскому случаю. ◄

Опр. 4. Если неассимптотическое направление ортогонально своей диаметрально сопряженной плоскости, то это направление называется главным, а плоскость – главной диаметральной плоскостью.

Утв. 8.

1. Главные диаметральные плоскости = плоскости симметрии.

2. $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ – главное направление $\iff Q\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix} = \lambda\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}$ то есть $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ – собственный вектор матрицы Q с собственным числом $\lambda \neq 0$

► Доказательство аналогично плоскому случаю. ◄

Теорема 1.

У симметричной матрицы Q 3 вещественных собственных числа, и если два собственных числа не равны, то соответственные собственный векторы ортогональны.

26.4 Алгоритм нахождения канонического вида

1. Ищем центр и видим, что центр$(x_0; y_0; z_0)$ есть

2. Делаем замену $\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \\ z = \tilde{z} + z_0 \end{cases}$.

После этого нет линейных членов, так как теперь центр – это $(0; 0; 0)$ и квадрика в каноническом виде.

1. Ищем центр и центра нет

2. Ищем собственные числа и собственные векторы.

3. Получаем ортонормированный базис $\{e_1; e_2; e_3\}$из собственных векторов.

4. Поворачиваем систему координат так, чтобы оси шли вдоль $\{e_1; e_2; e_3\}$. Матрица перехода $C = \Big([e_1] \quad [e_2], [e_3]\Big)$. После этого квадратичная часть диагональная.

5. Избавляемся от линейных членов сдвигом с помощью пыделения полного квадрата и квадрика в каноническом виде.

26.5 Метрическая и аффинная класификации поверхностей

Опр. 5. Две поверхности метрически (аффинно) эквивалентны, если есть изометрия (аффинное преобразование) переводящее одну в другую.

Теорема 2.
Две поверхности метрически эквивалентны $\iff$ у них одинаковый канонический вид.

► $\boxed{\Longrightarrow}$

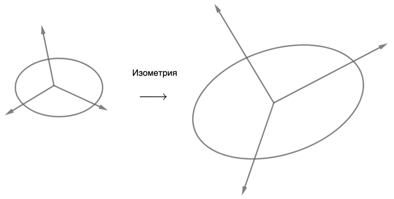


Рис. 169.

Нужно взять образ канонической системы координат первой поверхности при изометрии. Новая система координат каноническая для второй поверхности и она в ней имеет такой же канонический вид, как и первая в своей канон. системе к-т.

$\boxed{\Longleftarrow}$

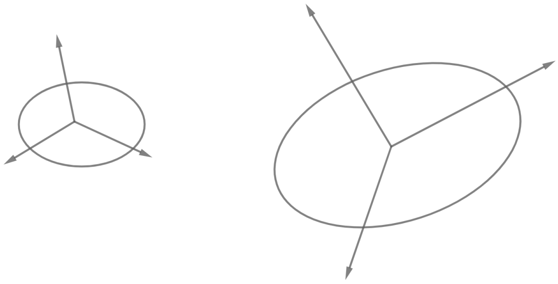


Рис. 170.

Возьмем для каждой поверхности ее каноническую систему координат $\Longleftrightarrow$ зададим изометрию этими двумя системами координат.
Так как у обеих поверхностей в соответствующих базисах одно уравнение изометрия переводит первую во вторую.◄

Теорема 3.
Две поверхности аффинно эквивалентны $\Longleftrightarrow$ у них одно и то же название.

► $\boxed{\Longleftarrow}$
Пусть одно название $\Longrightarrow$ растяжением осей можно одну перевести в другую. Например $\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}+\dfrac{z^2}{c_1^2}=1 \to \begin{array}{c} x=a_1\tilde{x} \\ y=b_1\tilde{y} \\ z=c_1\tilde{z} \end{array} \to \tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=1$

$\boxed{\Longrightarrow}$
Для каждого типа надо найти характеристики, сохраняющиеся при аффинном преобразовании и отличающие его от других типов.
1. Эллипсоид – единственная содержательная ограниченная поверхность.
2. Мнимый эллипсоид – $\emptyset$, но без ассимптотических направлений.
3. Однополостный гиперболоид – один центр и два семейства прямолинейных образующих.
4. Двуполостный гиперболоид – неограниченная поверхность с одним центром и без прямолинейных образующих.
5. Конус – неограниченная поверхность с одним центром и одним семейством прямолинейных образующих. Его центр лежит на нем же.
6. Мнимый конус – единственная точка.

7. Эллиптический параболоид – неограниченная поверхность без центра и прямолинейных образующих.

8. Гиперболический параболоид – поверхность без центра, но с двумя семействами прямолинейных образующих.

9. Эллиптический цилиндр – поверхность с осью центров и одним ассимптотическим направлением.

10. Мнимый эллиптический цилиндр – $\emptyset$, но есть одно ассимптотическое направление.

12. Гиперболический цилиндр – поверхность с осью центров и двумя плоскостями из ассимптотических направлений.

14. Параболический цилиндр – поверхность без центров и одним семейством прямолинейных образующих.

(Поверхности, содержащие плоскости различаются между собой геометрически.)◄

Лекция 27

27.1 Метод Лагранжа

Суть метода в выделении полных квадратов.

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$

1. Выбрать переменную, у которой есть квадрат $a_{ii} \neq 0$. Если это возможно, то выделить полный квадрат, содержащий все вхождения этой переменной.

$$\left(\sqrt{a_{11}}x\right)^2 + 2\sqrt{a_{11}}x\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}y + 2\sqrt{a_{11}}x\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}z + 2\sqrt{a_{11}}x\frac{a_1}{\sqrt{a_{11}}} + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2 + \frac{a_{13}^2}{a_{11}}z^2 + \frac{a_1^2}{a_{11}} +$$

$$+2\frac{a_{11}a_{12}}{a_{11}}yz + a\frac{a_1a_{12}}{a_{11}}y + 2\frac{a_1a_{13}}{a_{11}}z \to \text{полный квадрат} \to \left(\sqrt{a_{11}}x + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}y + \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}z + \frac{a_1}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2 -$$

$$-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2 + \frac{a_{13}^2}{a_{11}}z - \frac{a_1^2}{a_{11}} - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}yz - 2\frac{a_1a_{12}}{a_{11}}y - a\frac{a_1a_{13}}{a_{11}} - a_{22}y^2 - a_{33}z^2 - 2a_{23}yz - 2a_2x +$$

$$+ 2a_3z + a_0 = 0 \implies \begin{cases} x' = \sqrt{a_{11}}x + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}y + \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}z + \frac{a_1}{\sqrt{a_{11}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \implies$$

$$\implies (x')^2 + b_{22}(y')^2 + b_{33}(z')^2 + 2b_{23}y'z' + 2b_2y' + 2b_3z' + b_0 = 0 \quad (1)$$

1.a Если нет переменной с квадратом например $xy + 2x + 7 = 0$. Тогда так как квадратичная часть $\neq 0$, то есть ненулевое слагаемое с xy или xz или yz.

$$xy : \begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases} \implies (x')^2 - (y')^2 \text{ и применим выделение полного квадрата.}$$

2. Выберем из y' и z' переменную с b_i у которой $b_{ii} \neq 0$ и выделим полный квадрат. Получим $\pm(x'')^2 \pm (y'')^2 + c_{33}(z'')^2 + 2c_1z'' + c_0 = 0$.

2.a Нет квадратов на шаге **2**.

Если в (1) $\quad b_{22} = b_{33} = 0$, но $b_{23} \neq 0$, то делаем замену $\begin{cases} y' = y'' + z'' \\ z' = y'' - z'' \end{cases}$ и далее выделяем полный квадрат.

Если же $b_{22} = b_{33} = b_{23} = 0$, то $(x')^2 + 2b_2y' + 2b_3z' + b_0 = 0$

$$\iff (x')^2 = 2\left(-b_2y' - b_3z' + \frac{b_0}{2}\right) \implies \begin{cases} y'' = x' \\ x'' = -b_2y' - b_3z' + \frac{b_0}{2} \\ z'' = z' \end{cases} \implies (y'')^2 = 2x''$$

(если $b_2 = b_3 = 0$, то $(x')^2 + b_0 = 0 \implies \begin{cases} (x'')^2 + 1 = 0 \\ (x'')^2 - 1 = 0 \end{cases}$)

3. Снова выделяем полный квадрат.

3.a Если $c_{33} = 0 \implies \pm (x'')^2 \pm (y'')^2 = 2(-c_1 z'' - c_0)$

$$c_1 \neq 0 : \begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = y'' \\ z''' = -c_1 z'' - c_0 \end{cases} \implies \pm (x''')^2 \pm (y''')^2 = 2z'''$$

$c_1 = 0 : \pm (x'')^2 \pm (y'')^2 = 2c_0$

27.2 Касательные

Опр. 1. Точка поверхности $P(x_0; y_0; z_0)$ особая, если $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) = 0 \end{cases}$ – просто центр, лежащий на поверхности.

Опр. 2. Путсь P лежит на поверхности. Прямая – касательная к поверхности в точ-

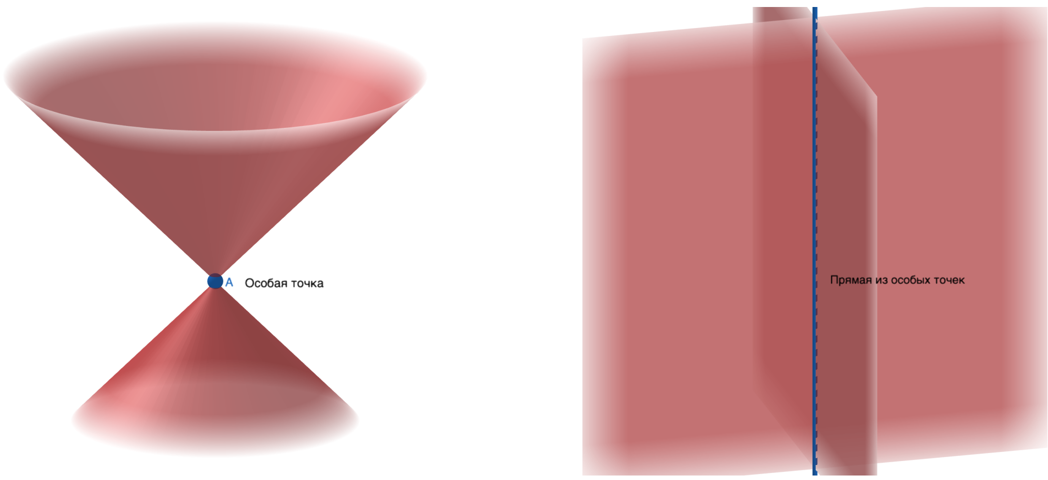


Рис. 171.

ке P, если она имеет с поверхностью одну точку пересечения P кратности 2 или если она лежит на поверхности.

Пусть $P(x_0; y_0; z_0)$ неособая. $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$ – произвольная прямая через точку P.

$F(x, y, z) = 0 \implies F(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma) = 0 \implies F_2t^2 + F_1t + F_0 = 0$ где:

$$\begin{cases} F_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ \\ F_1 = 2\left(\alpha \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0) + \beta \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) + \gamma \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0)\right) \\ \\ F_0 = F(x_0; y_0; z_0) = 0 \text{ так как } P \text{ на поверхности.} \end{cases}$$

Пусть прямая – касательная $\implies F_2t^2 + F_1t + F_0 = 0$.
Если один корень кратности 2, то $F_2 \neq 0, \quad F_1 = 0$.
Если любое t – корень, то $F_2 = F_1 = 0$.
В обоих случаях $F_1 = 0$

С другой стороны: если $F_1 = 0$, то либо корень кратности 2 $(F_2 \neq 0)$ или любой t – корень $(F_2 = 0)$.
То есть прямая – касательная $\iff F_1 = 0 \iff$
$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0) & \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) & \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) \end{pmatrix} = N \neq 0$ так как точка P – не особая.

<u>Утв. 1.</u> Касательные прямые, в точности лежащие в плоскости

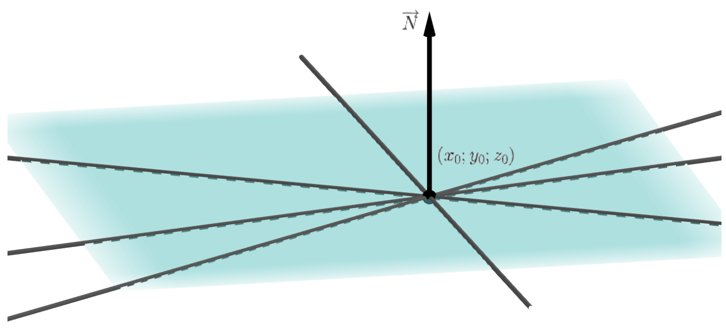


Рис. 172.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)+\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=0 \quad (*)$ – прямые через $(x_0;y_0;z_0)$.
►

Любая прямая, проходящая через точку $(x_0;y_0;z_0)$ ортогонально N лежит в плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ где $(A;B;C)=N$ ◄

Опр. 3. Плоскость $(*)$ называется касательной плоскостью в точке P.

Утв. 2. $(*) \iff \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\\ 1\end{pmatrix}$

Теорема. 1.
Любое аффинное преобразование является композицией изометрии и трех растяжений вдоль трех ортогональных осей.
► Возьмем сферу. Преобразуем ее в эллипсоид. Это аффинное преобразование.

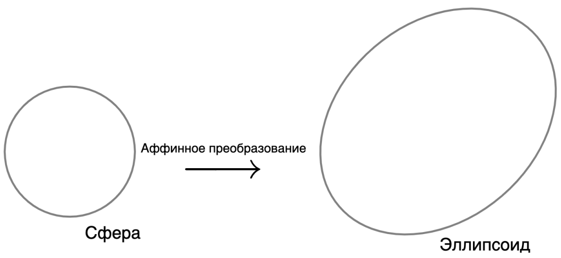
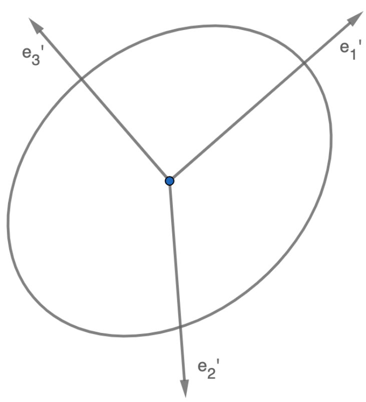


Рис. 173.

Приведем эллипсоид к каноническому виду.



Возьмем прообраз на сфере получившейся канонической системы координат эллипсоида.

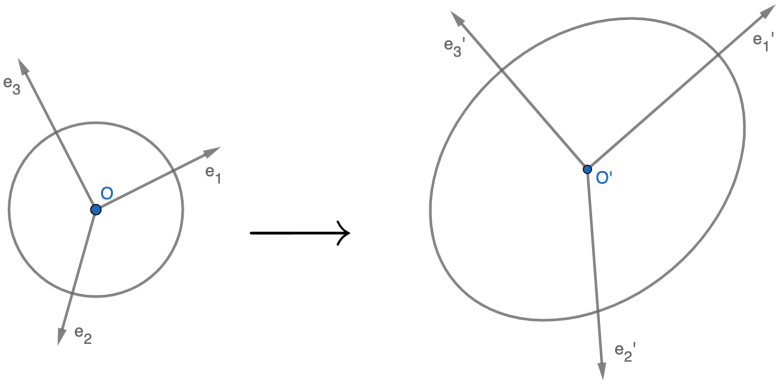


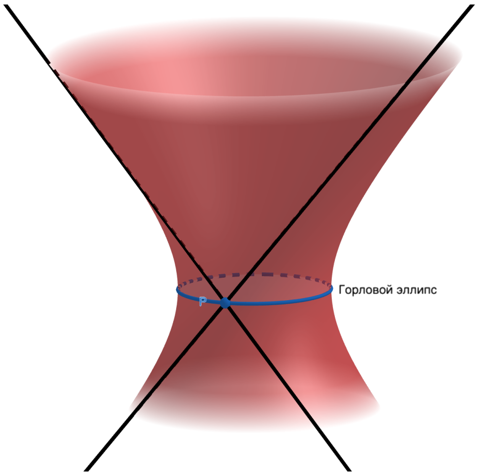
Рис. 174.

Так как при аффинных преобразованиях сохраняется деление отрезка пополам и параллельность, то диаметральные плоскости сферы, сопряженные какому-то направлению перейдут в диаметральные плоскости эллипсоида, сопряженные тому же направлению.
e_1' – главное направление, перпендикулярное сопряженным диаметральным плоскостям $\implies e_1' \perp O'e_1'e_3'$.
С другой стороны e_1' и $O'e_1'e_3'$ перейдут в e_1 и Oe_1e_3.
Так как у сферы любое направление главное, то $e_1 \perp Oe_1e_3$.
Аналогично получится с e_2 и e_3
Поэтому $\{O', e_1', e_2', e_3'\}$ ортонормированный репер, а $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ ортогональный (не обязательно нормированный). Если его нормировать растяжением $\tilde{e_i} = \dfrac{e_i}{|e_i|}$, то преобразование $\{O', e_1', e_2', e_3'\}$ в ортонормированный репер $\{\tilde{O}, \tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \tilde{e_3}\}$ – изометрия. Значит аффинное преобразование в пространстве $=$ изометрия $+$ растяжение вдоль трех ортогональных осей.◄

27.3 Теорема Брианшона (второе доказательство)

► **1.** Возьмем P на горловом эллипсе и проведем через нее прямолинейные образующие.

2. Сделаем ортогональную проекцию на $z = 0$.
Обе прямолинейные образующие перейдут в одну и ту же касательную. (Рис. 170.)



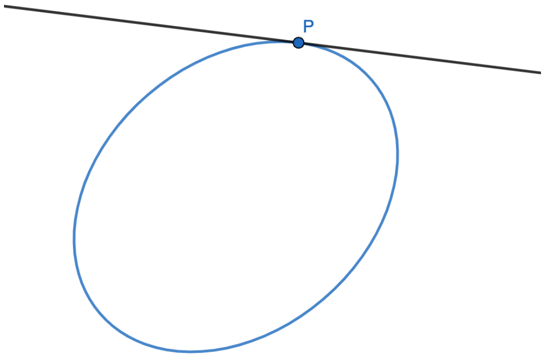


Рис. 175.

3. A' – одна из точек, проецирующихся в A. Аналогично с остальными.
Две прямолинейные образующие из A' (точка НЕ на нашем горловом эллипсе) проецируются в две касательные, выходящие из A. Аналогично с остальными.

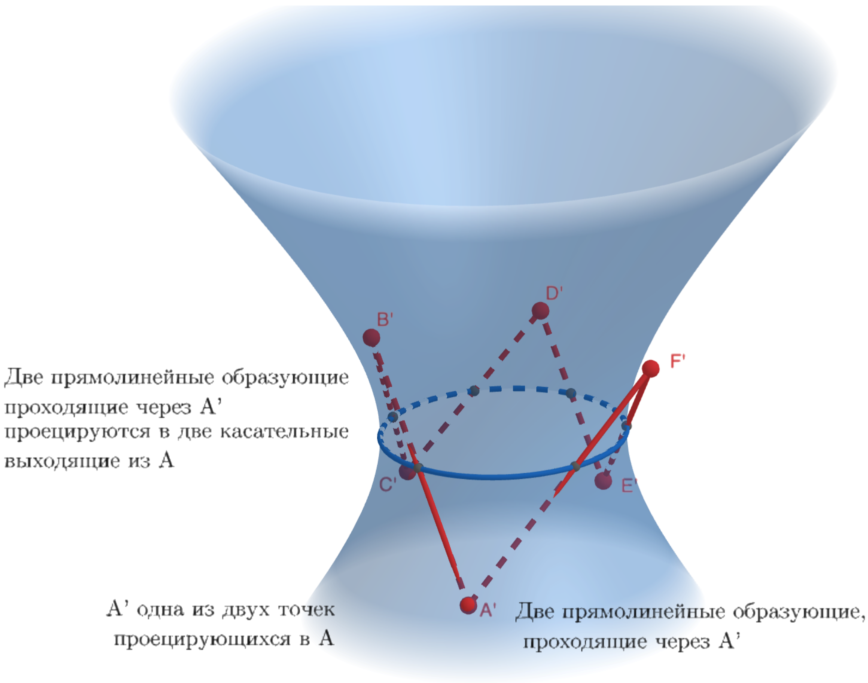


Рис. 176.

Семейство **1:** $A'B', C'D', E'F'$
Семейство **2:** $B'C', D'E', A'F'$
AD – диагональ. В нее проецируется $A'D'$

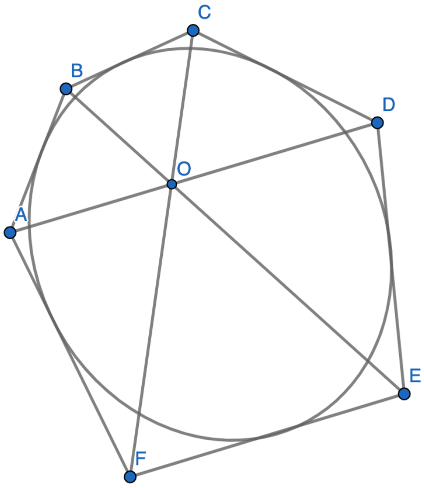


Рис. 177.

$$\begin{cases} A'B' \in \text{ семейству } \mathbf{1} \\ D'E' \in \text{ семейству } \mathbf{2} \end{cases} \implies \text{они лежат в одной плоскости } A'B'D'E'$$

$$\begin{cases} C'D' \in \text{ семейству } \mathbf{1} \\ F'A' \in \text{ семейству } \mathbf{2} \end{cases} \implies \text{они лежат в одной плоскости } F'A'C'D'$$

$A'D'$ – пересечение плоскостей.
Аналогично $A'B'D'E' \cap B'C'E'F' = B'E' \quad B'C'E'F' \cap F'A'C'D' = C'F'$

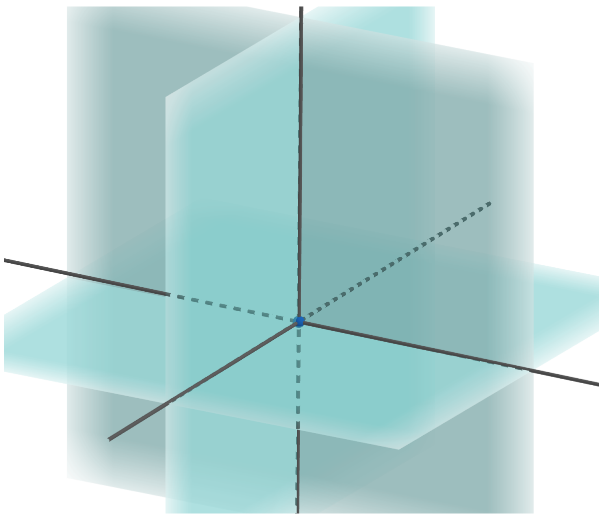


Рис. 178.

Три плоскости пересекаются в одной точке $\implies$ три прямые их попарных пересечений пересекаются в этой же точке.
$O' = A'B'D'E' \cap B'C'E'F' \cap F'A'C'D' \implies A'D' \cap B'E' \cap C'F' = O' \implies$
$\implies O$ – проекция O' ◄

Лекция 28

28.1 Элементы проективной геометрии

В аффинной геометрии:

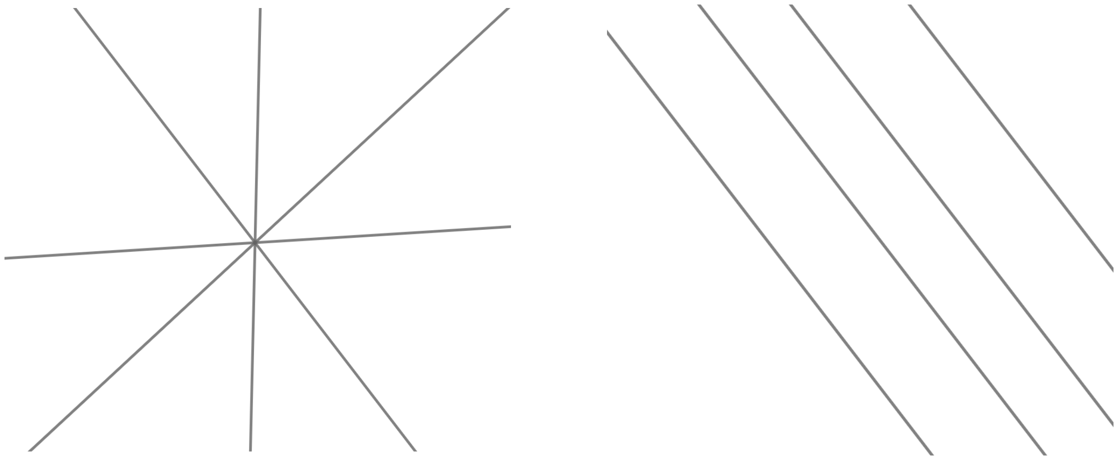
А1: Через две несовпадающие точки проходит одна прямая.

Хочется чтобы выполнялось

А2: Любые две прямые пересекаются в одной точке.

Для этого есть несколько подходов:

1: Пополним аффинную плоскость: Для каждого несобственного пучка добавим несоб-



Собственный пучок прямых   Несобственный пучок прямых

Рис. 179.

ственную точку, в которой прямые этого пучка пересекаются. Несобственные точки образуют несобственную прямую.

2: Возьмем π в $\mathbb{R}^3$ $\quad A \in \pi \implies A \neq 0 \implies$ сопоставим $A \leftrightarrow OA \quad O \in OA$

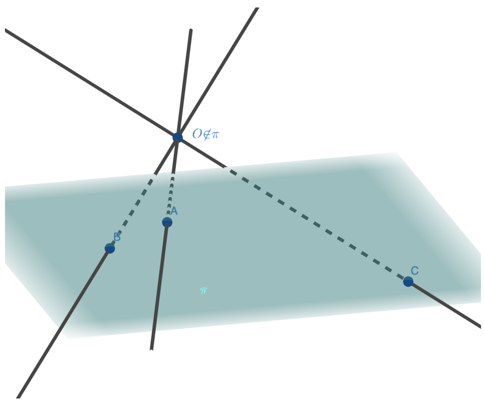


Рис. 180.

Отображение $\pi \longrightarrow$ связка прямых, проходящих через O. Это инъекция.

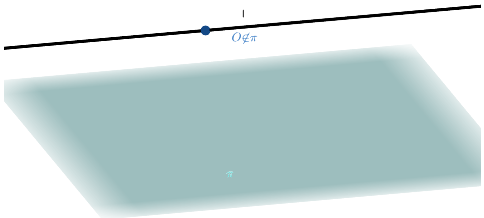


Рис. 181.

Если $A \in l \parallel \pi \implies$ ей не соответствует прямая.

Опр. 1. Проективная плоскость – связка прямых, проходящих через фиксированную точку O пространства. Точка проективной плоскости – прямая этой связки.

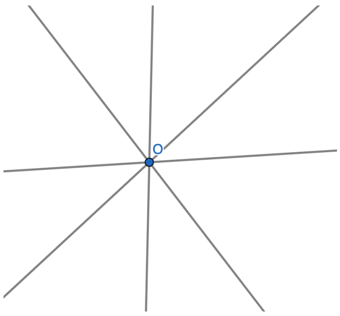


Рис. 182.

Все точки проективной плоскости равноправны. **Выберем** $\pi \not\ni O$ $O \in \pi' \parallel \pi$ прямым связки из π' не соответствуют точки π.

Прямые связки из π' – бесконечно удаленные точки (определяются выбором π).
Выбор определяет разделение точек проективной плоскости на точки из π и бесконечно удаленные.

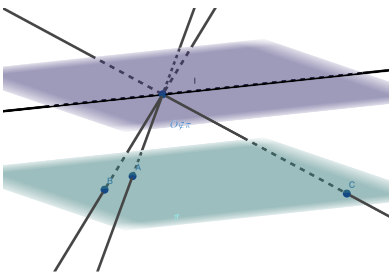


Рис. 183.

Проективная плоскость: Все точки равноправны.

Проективная плоскость с выбранной аффинной картой:
Есть точки аффинной плоскости и бесконечно удаленные точки.

$l \subset \pi$ Точкам прямой $l \subset \pi$ соответствуют прямые связки прямых, проходящих через

O, лежащие в плоскости, которая проходит через O и l.

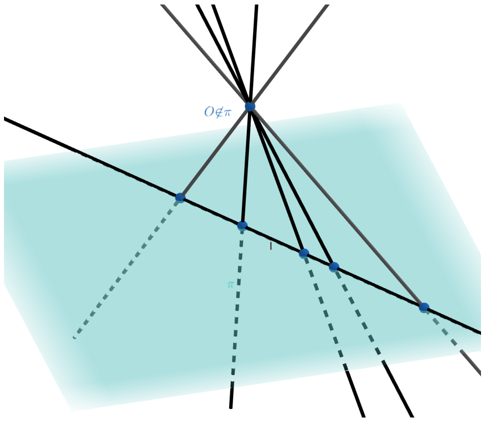


Рис. 184.

Опр. 2. Прямая проективной плоскости – плоскость, проходящая через O.
Множество всех прямых на проективной плоскости = связка плоскостей, проходящих через O.

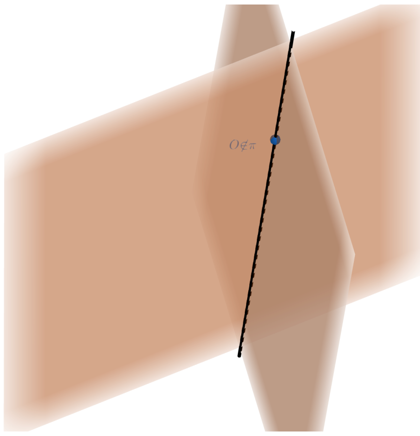


Рис. 185.

Две плоскости этой связки пересекаются по прямой, проходящей через O.
Эта прямая – точка проективной плоскости, на пересечении двух проективных прямых.

$l_1 \leftrightarrow \pi_1 \quad l_1 \cap l_2 \leftrightarrow \pi_1 \cap \pi_2$
$l_1 \leftrightarrow \pi_1$
В связке плоскостей, проходящих через O, есть единственная плоскость, не пересекающая π

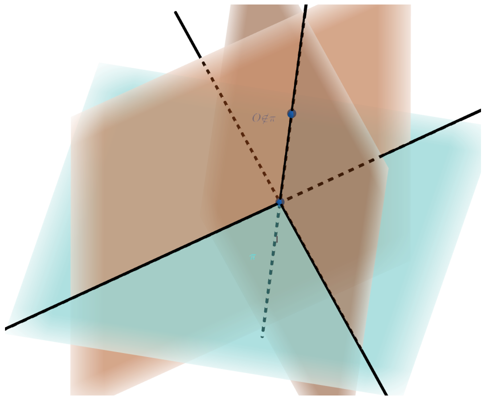


Рис. 186.

$\pi' \parallel \pi$ – несобственная = бесконечно удаленная прямая.

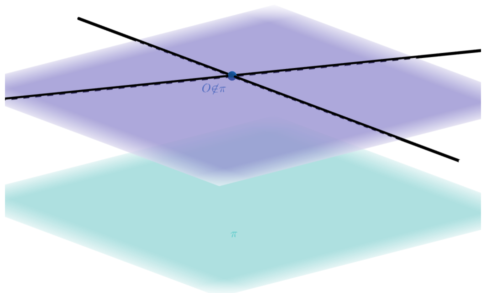


Рис. 187.

В ней лежат проходящие через точку O прямые, которые не пересекают π – несобственные = бесконечно удаленные точки.

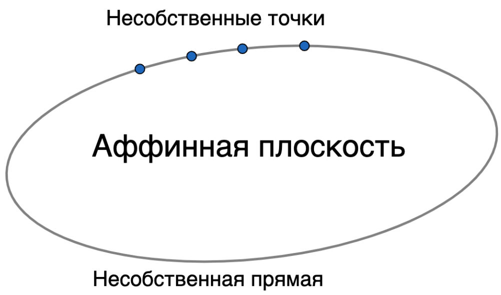


Рис. 188.

Если выберем плоскость, то:

A1: Через две несовпадающие точки проходит единственная прямая.

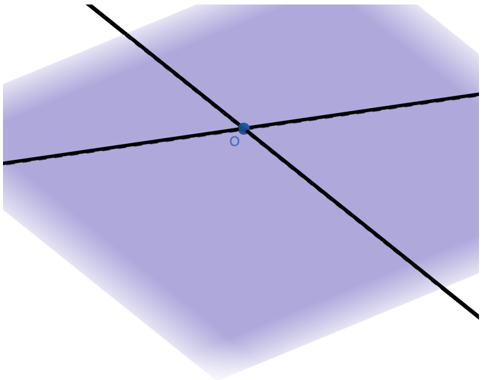


Рис. 189.

Через две несовпадающие прямые, пересекающиеся в O проходит единственная плоскость, проходящая через O

A2: Две несовпадающие прямые пересекаются в единственной точке.

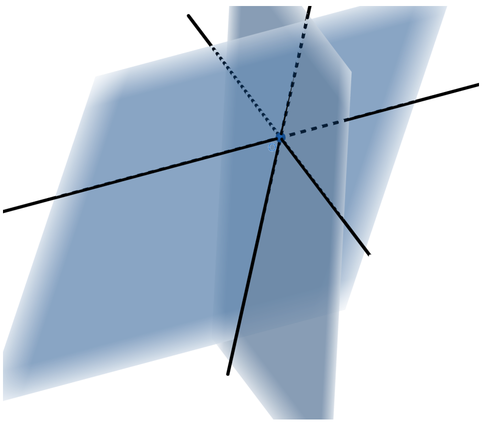


Рис. 190.

Две несовпадающие плоскости, проходящие через точку O пересекаются по единственной прямой, проходящей через точку O.

Если $(l_1 \parallel l_2) \in \pi, \quad l = \pi_1 \cap \pi_2 \implies l \parallel \pi \implies l$ – бесконечно удаленная прямая $\implies l_1 \cap l_2 =$ бесконечно удаленная точка.

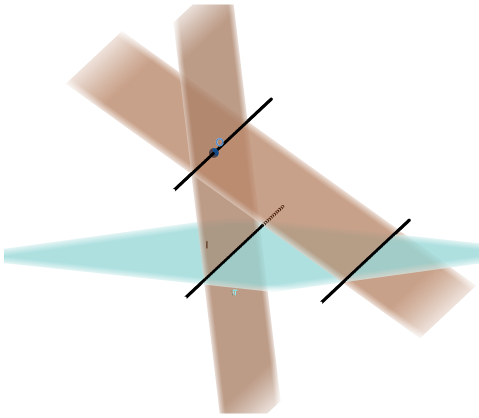


Рис. 191.

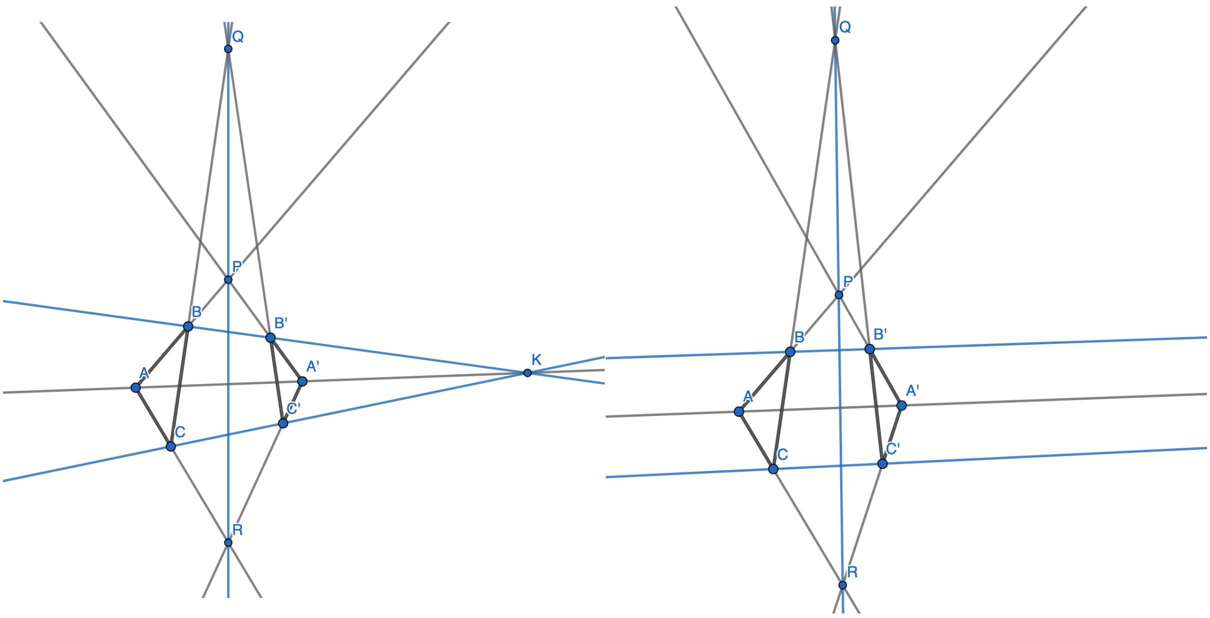
28.2 Теорема Дезарга

Теорема (Дезарг)

Пусть на проективной плоскости даны два треугольника ABC и $A'B'C'$ таких, что у них вершины и стороны не совпадают. Тогда $AA' \cap BB' \cap CC' \iff$ точки пересечения соответствующих сторон $AB \cap A'B'$; $BC \cap B'C'$; $AC \cap A'C'$ лежат на одной прямой. (1)

Замечание: Если $K = AA' \cap BB' \cap CC'$ на бесконечности, теорема значит, что эти прямые параллельны. (2)

► $K = AA' \cap BB' \cap CC'$; $P = AB \cap A'B'$; $Q = BC \cap B'C'$; $R = AC \cap A'C'$



(1) (2)

Рис. 192.

Будем обозначать как a направляющий вектор прямой, проходящей через A.
a, a', k – компланарны $A = A' \implies a$ и a' не коллинеарны $\implies$ они образуют базис $\implies k = \alpha a + \beta a'$

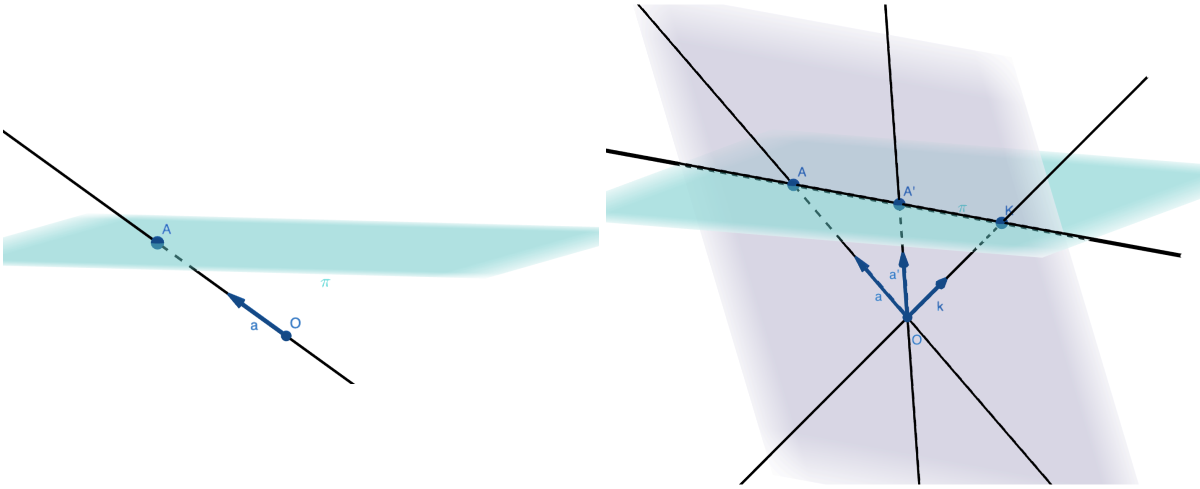


Рис. 193.

$\boxed{\Longrightarrow}$

$$AA' \cap BB' \cap CC' = K \implies \begin{cases} k = \alpha a + \beta a' & (1) \\ k = \gamma b + \delta b' & (2) \\ k = \epsilon c + \eta c' & (3) \end{cases}$$

(1) и $(2) \implies \alpha a + \beta a' = \gamma b + \delta b'$
$\alpha a - \gamma b = -\beta a' + \delta b' = \lambda p$ так как $P = AB \cap A'B'$
Аналогично $\alpha a - \epsilon c = -\beta a' + \eta c' = \mu r$
$\gamma b - \epsilon c = -\delta b' + \eta c' = \nu q$
Надо доказать, что P, Q, R лежат на одной прямой. Это значит, что их векторы компланарны $\implies \exists$ их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.
$\lambda p - \mu r + \nu q = \cancel{\alpha a} - \cancel{\gamma b} - \cancel{\alpha a} + \cancel{\epsilon c} + \cancel{\gamma b} - \cancel{\epsilon c} = 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Выводится из проективной двойственности и из доказательства необходимости. ◀

28.3 Проективная прямая

Соответствие между точкой на прямой и прямой из пучка прямых, проходящих через O. Есть одна бесконечно удаленная точка.

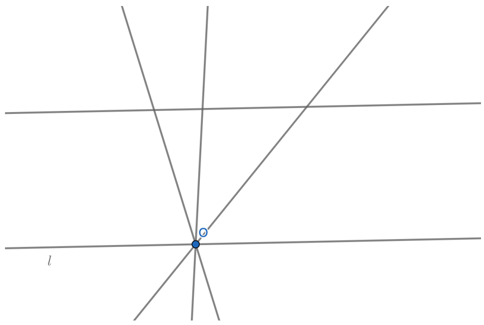


Рис. 194.

Каждая прямая пополняется своей бесконечно удаленной точкой на ней лежащей.

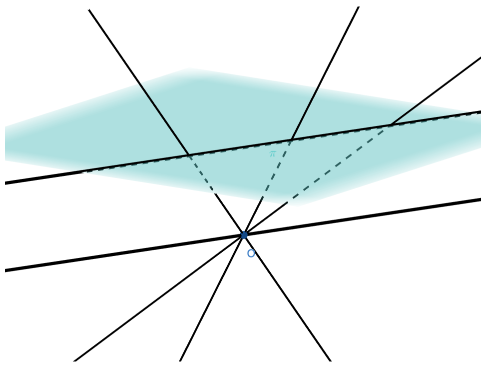


Рис. 195.

$l \parallel l_1 \parallel l_2$ – бесконечно удаленная точка и на l_1 и на l_2 = точка их пересечения.

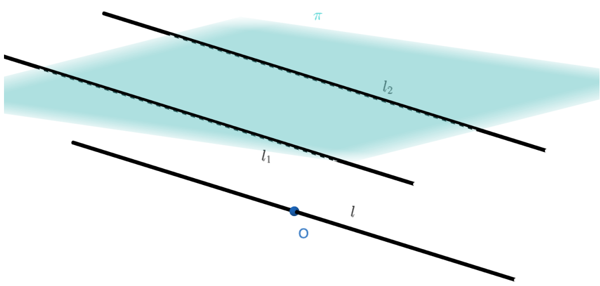


Рис. 196.

28.4 Координаты на проективной плоскости

Нужно взять базис $\{e_1, e_2, e_3\} \leftrightarrow \{O, e_1, e_2, e_3\}$

$\begin{cases} v = (x^1; x^2; x^3) \quad v \neq 0 \\ \lambda v = (\lambda x^1; \lambda x^2; \lambda x^3) \end{cases}$ Определяют одну и ту же прямую.

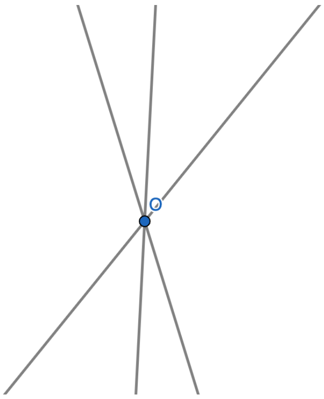


Рис. 197.

Ставим в соответствие прямой $\leftrightarrow$ координаты $(\lambda x^1; \lambda x^2; \lambda x^3)$ с точностью до пропорциональности.

То, что две тройки пропорциональны есть отношение эквивалентности.

Будем обозначать $[x^1 : x^2 : x^3] = \{\, \lambda(x^1; x^2; x^3) |\, \lambda \neq 0\}$ – однородные координаты точки в проективной плоскости.

Например: $[1 : 2 : 3] = [2 : 4 : 6]$

Однородные координаты не являются координатами так как они не взаимно однозначны.

Поймем как устроено соответствие прямые $\leftrightarrow$ плоскости в пространстве:

$Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + D = 0, \quad D = 0$. Плоскость в пространстве из связки плоскостей, проходящих через точку O = прямая проективной плоскости.

Точка $[x_0^1 : x_0^2 : x_0^3]$ лежит на прямой $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = 0 \iff Ax_0^1 + Bx_0^2 + Cx_0^3 = 0$

Точки в плоскости описываются вектором $\implies l \in \pi$

$[x_0^1 : x_0^2 : x_0^3] = [\lambda x_0^1 : \lambda x_0^2 : \lambda x_0^3]$

$Ax_0^1 + Bx_0^2 + Cx_0^3 = 0 \iff A\lambda x_0^1 + B\lambda x_0^2 + C\lambda x_0^3 = 0$

$(x^1; x^2; x^3)$ координаты точки с точностью до пропорциональности.

$Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = 0 \quad (A; B; C)$

Прямая $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = 0 \leftrightarrow [A : B : C]$ точка двойственного пространства.

Опр. 3. Точка и прямая инцидентны если точка лежит на этой прямой.

Лекция 29

Проективная плоскость – связка прямых в пространстве.

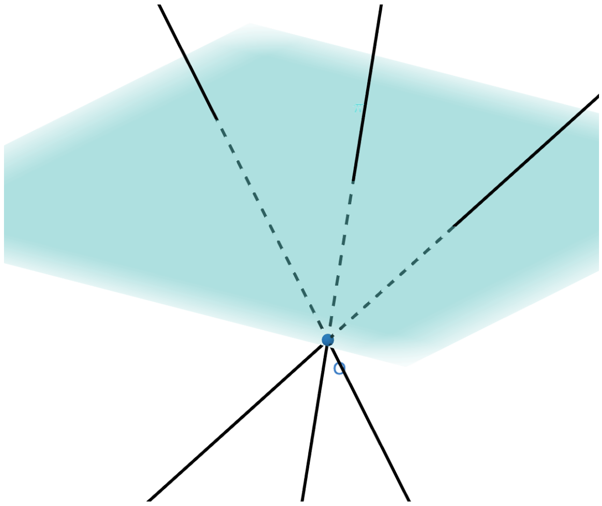


Рис. 198.

Проективная прямая – пучок прямых в плоскости.
Все точки проективной плоскости эквивалентны. Если выберем плоскость, то между точками появляется разница. То же самое происходит с прямыми.

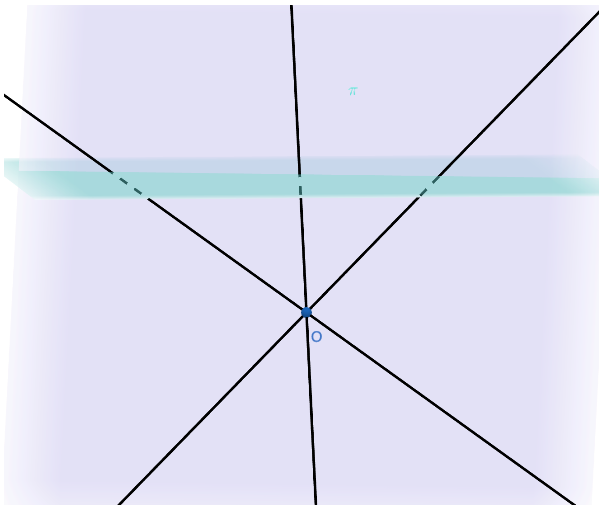


Рис. 199.

Разделение точек на собственные и несобственные **свое** для каждой аффинной карты.
Опр. 1. Аффинно проективная плоскость (прямая) – проективная плоскость (прямая) с выбором аффинной карты.

29.1 Проективная плоскость

Выберем базис $\{e_1, e_2, e_3\}$. Точка проективной плоскости (прямой) задается своим направляющим вектором с точностью до пропорцилнальности.
точка $\leftrightarrow v = (x^1; x^2; x^3)$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$

Есть два условия: $\begin{cases} v \neq 0 \\ v \sim \lambda v \quad (\lambda \neq 0) \text{ так как } v \text{ и } \lambda v \text{ определяют одну } l \end{cases}$

Точке соответствует набор $[x^1 : x^2 : x^3]$ чисел с точностью до пропорциональности. $[x^1 : x^2 : x^3] = [\lambda x^1 : \lambda x^2 : \lambda x^3] \lambda \neq 0$

Это называется однородными координатами точки.
На проективной прямой аналогично $[x^1 : x^2]$ в $\{e_1, e_2\}$

29.2 Другой способ задания координат

Зададим координаты так, что $E_1 = [1 : 0], \quad E_2 = [0 : 1], \quad E = [1 : 1]$
$e_1 = \lambda a, \quad e_2 = \mu b, \quad e_1 + e_2 = \nu c, \quad \lambda a + \mu b = \nu c$

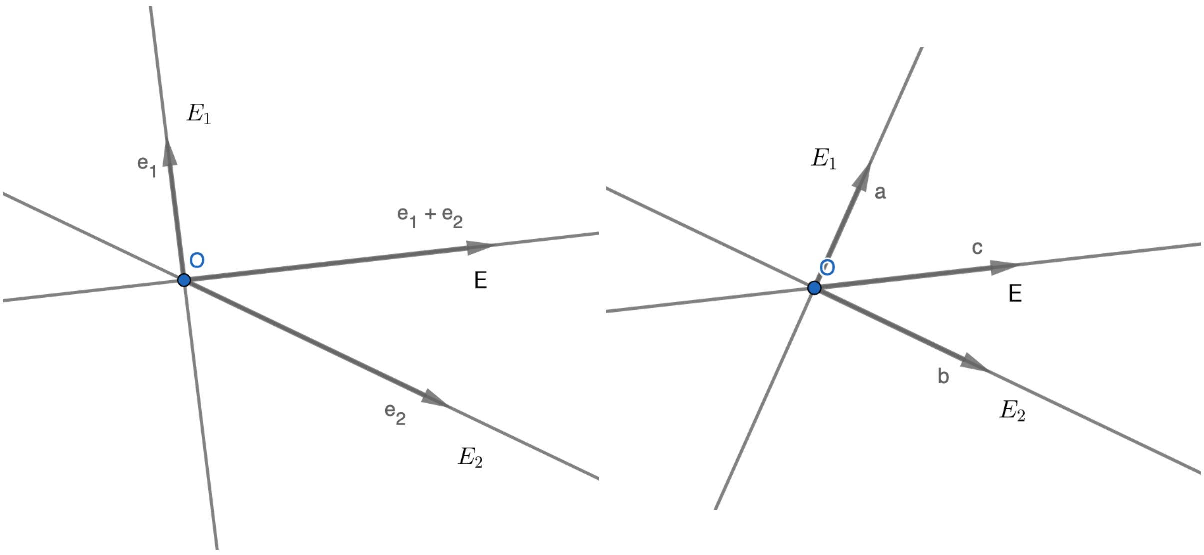


Рис. 200.

λ и μ определены с точностью до пропорциональности $\implies e_1 = \lambda a, e_2 = \lambda b$ определены с точностью до пропорциональности
В случае плоскости надо выбрать 4 точки E_1, E_2, E_3, E

$$\begin{cases} E_1 = [1 : 0 : 0] \\ E_2 = [0 : 1 : 0] \\ E_3 = [: 0 : 1] \\ E = [1 : 1 : 1] \end{cases}$$

Это определяет базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ с точностью до пропорциональности, то есть однозначно определяют однородные координаты.

29.3 Квадрики в проективной геометрии

$[x^1 : x^2 : x^3]$ – точка. $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = 0$ – прямая. Это ненулевое однородное уравнение.

$F(x^1, x^2, x^3) = 0$

1. $\deg F = 2$

2. F – однородное $F(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3) = \lambda^2 F(x^1, x^2, x^3)$

Опр. 2. Проективная квадрика – полиномиальное однородное уравнение второй степени с точностью до пропорциональности.

$$F(x^1, x^2, x^3) = a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 =$$
$$= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Выберем удобную аффинную карту. $O' = (0; 0; 1)$ $\pi \ni O'$ и $\pi \parallel (e_1, e_2)$

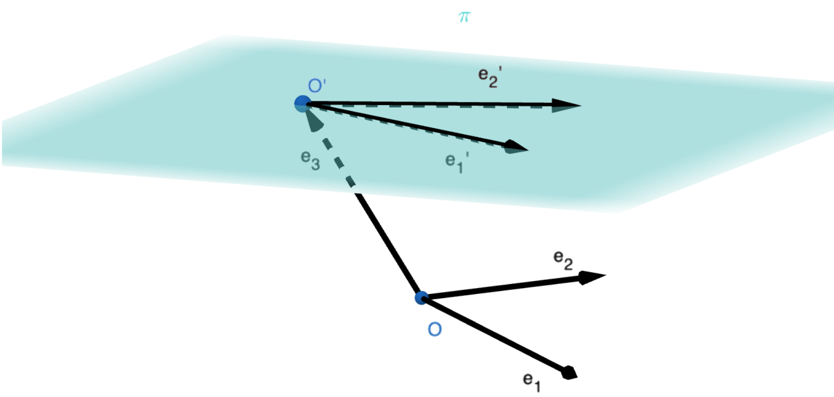


Рис. 201.

Получим что π задается как $x^3 = 1$

Выберем в π удобный репер $\{O', e_1, e_2\}$. Пусть точки плоскости π имеют координаты x и y в этом репере. Тогда точка P имеет координаты $(x; y) \implies O'P = xe_1 + ye_2 \implies OP = O'P + OO' = xe_1 + ye_2 + e_3 \implies P$ имеет однородные координаты $[x : y : 1] \longleftarrow (x; y)$.

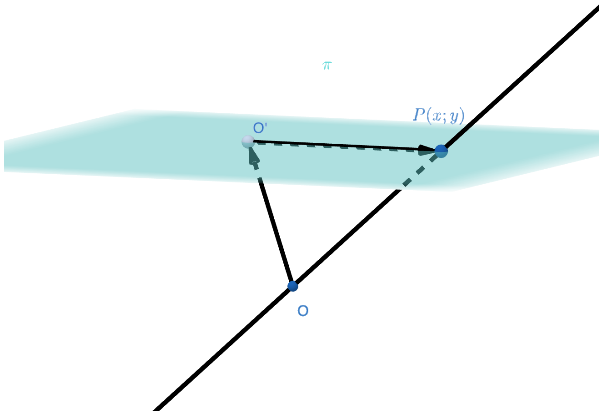


Рис. 202.

В другую сторону:

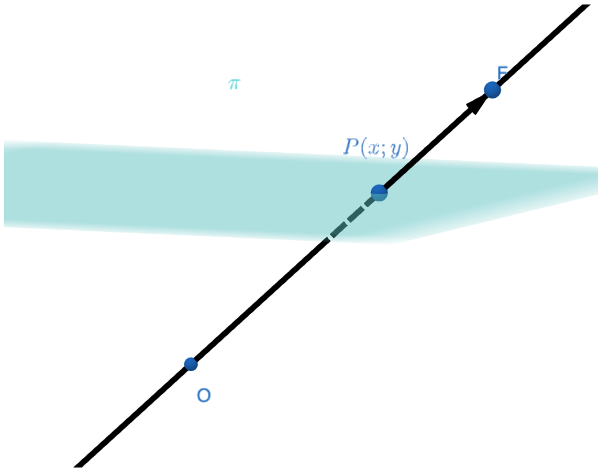


Рис. 203.

$(x^1, x^2, x^3 \neq 0) \sim \left(\dfrac{x^1}{x^3}; \dfrac{x^2}{x^3}; 1\right) = P\left(\dfrac{x^1}{x^3}; \dfrac{x^2}{x^3}\right)$ в π

$[x^1 : x^2 : x^3] \longrightarrow \left(\dfrac{x^1}{x^3}; \dfrac{x^2}{x^3}\right)$

В **этой** аффинной карте простые формулы пересчета между проективными однородными координатами и аффинными координатами в плоскости π

Пусть есть проективная квадрика
$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y$$

Мы нашли аффинную часть проективной квадрики:

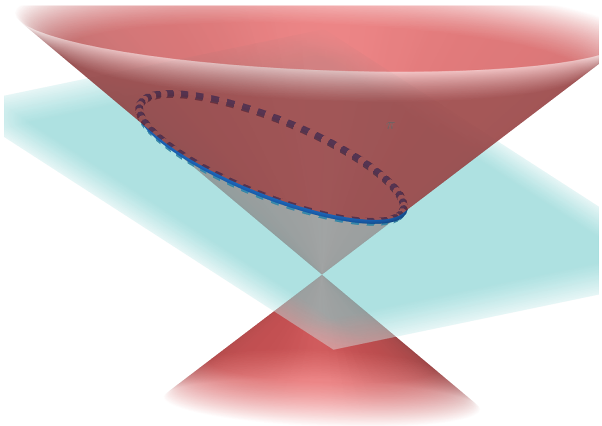


Рис. 204.

Обратная операция – проективизация аффинной квадрики:

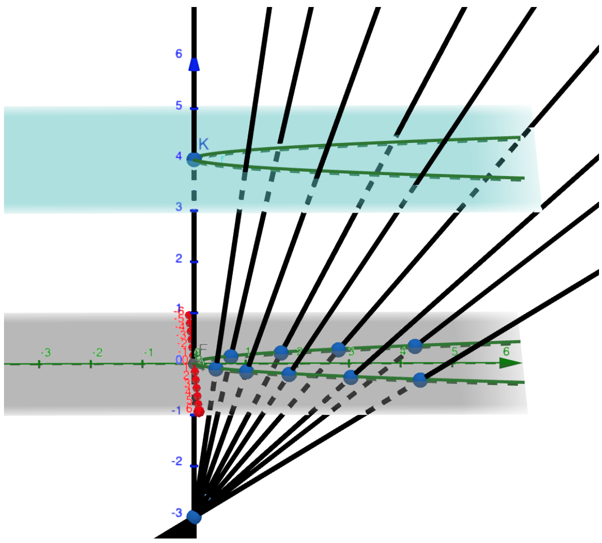


Рис. 205.

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \to$

$$\to a_{11}\left(\frac{x^1}{x^3}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{x^1}{x^3}\frac{x^2}{x^3}\right) + a_{22}\left(\frac{x^2}{x^3}\right)^2 + 2a_1\frac{x^1}{x^3} + 2a_2\frac{x^2}{x^3} + a_0 = 0 \quad \times (x^3)^2$$

$a_{11}(x^1)^2+2a_{12}x^1x^2+a_{22}(x^2)^2+2a_1x^1x^3+2a_2x^2x^3+a_0(x^3)^2 = 0$ – проективная квадрика.

Аффинная	**Проективная**
a_{11}	a_{11}
a_{22}	a_{22}
a_{12}	a_{12}
a_1	a_{13}
a_2	a_{23}
a_0	a_{33}
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Возьмем проективную квадрику $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = 0$ и выберем аффинную карту так, чтобы

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = 1 \end{cases} \implies x^2 + y^2 - 1 = 0$$ – получился аффинный эллипс.

Выберем теперь другую аффинную карту:

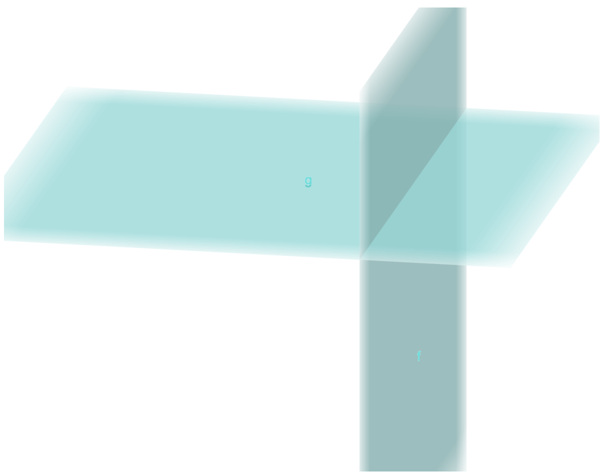


Рис. 206.

$(\tilde{x};\tilde{y}) \to (x;y;1)$

$(x^1;x^2;x^3) \sim \left(\frac{x^1}{x^2};1;\frac{x^3}{x^2}\right) \to \left(\frac{x^1}{x^2};\frac{x^3}{x^2}\right)$

$\tilde{x}^2 + 1 - \tilde{y}^2 = 0$ – получилась аффинная гипербола.

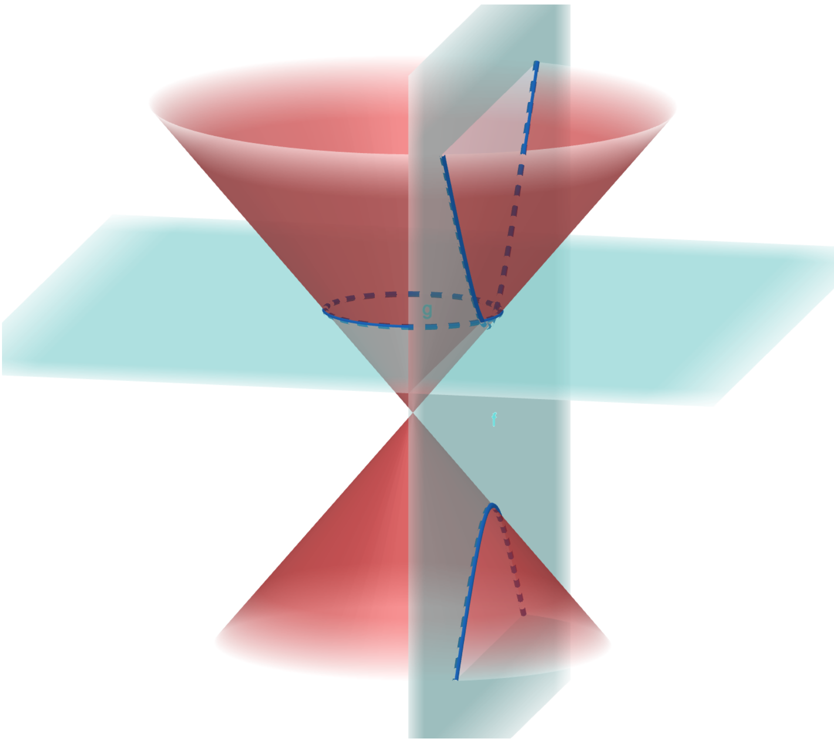


Рис. 207.

Эллипс и гиперболу можно перевести друг в друга проективным преобразованием.

Аффинная квадрика:

$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$– Уравнение касательной или поляры.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x^1}{x^3} \\ y = \dfrac{x^2}{x^3} \end{cases} \qquad [x^1 : x^2 : x^3] \to [x_0^1 : x_0^2 : x_0^3]$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x^1}{x^3} & \dfrac{x^2}{x^3} & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \dfrac{x^1}{x^3} \\ \dfrac{x^2}{x^3} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} -$$

Уравнение касательной или поляры в проективных координатах.

29.4 Сопряженные диаметры

Уравнение $\alpha\dfrac{\partial F}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \iff \alpha(2a_{11}x+2a_{12}y+2a_1)+\beta(2a_{12}x+2a_{22}y+2a_2)=0$

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$ так как $\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a_0\end{pmatrix}=$
$=(\alpha a_{11}+\beta a_{12};\alpha a_{12}+\beta a_{22};\alpha a_1+\beta a_2)$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=x(\alpha a_{11}+\beta a_{12})+y(\alpha a_{12}+\beta a_{22})+(\alpha a_1+\beta a_2)$$

В проективном виде: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=0$

Утв. 1. Диаметр, сопряженный направлению $(\alpha;\beta)$ – это поляра $(\alpha:\beta:0)$, лежащая на бесконечно удаленной прямой.

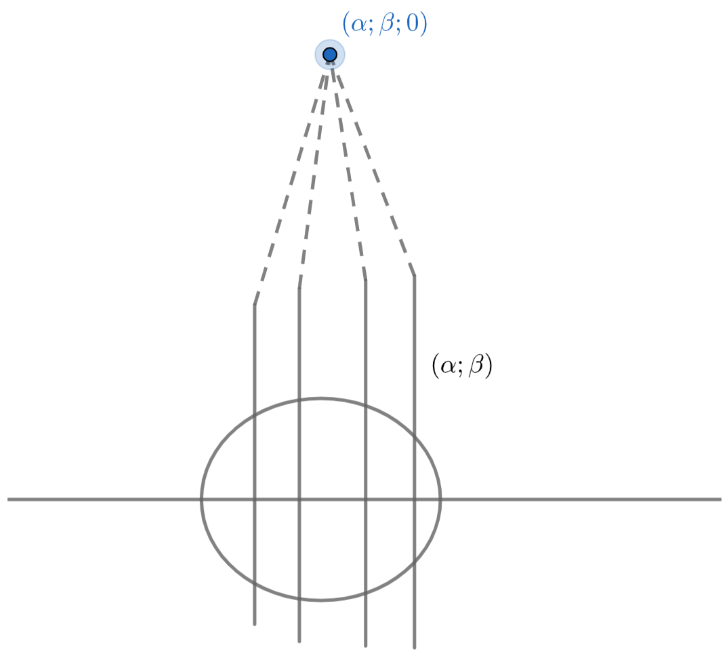


Рис. 208.

Два диаметра пересекаются в центре.

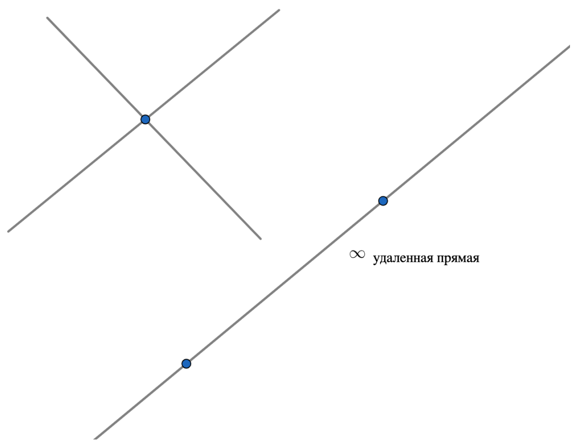


Рис. 209.

Центр лежит на диаметрах (= полярах) бесконечно удаленных точек $\iff$ бесконечно удаленные точки лежат на поляре центра (= бесконечно удаленной прямой).

Утв. 2. Поляра центра – бесконечно удаленная прямая.

Утв. 3. Полюса прямых, проходящих через центр лежат на бесконечно удаленной прямой.

29.5 Квадрики в аффинном и проективном виде

В проективной геометрии полярное соответствие полное. То есть нет исключений: у каждой точки есть поляра, у каждой прямой есть полюс.

Рассмтрим квадрику: $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^3 = 0$
Полярное соответствие для этой квадрики:
$$\begin{pmatrix} x_0^1 = A & x_0^2 = B & x_0^3 = C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0$$
$Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = 0$ – это проективная двойственность.
<u>Эллипс:</u> $x^2 + y^2 = 1$ проецируем $(x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^3)^2$
Найдем пересечение с бесконечно удаленной прямой: $x^3 = 0 \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ – нет точек пересечения.
<u>Гипербола:</u> $x^2 - y^2 = 1$ проецируем $(x^1)^2 - (x^2)^2 = (x^3)^2$
Найдем пересечение с бесконечно удаленной прямой: $x^3 = 0 \quad (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ – есть два решения.

$$[x^1 : x^2 : 0] = \begin{cases} [1 : 1 : 0] \\ [1 : -1 : 0] \end{cases}$$

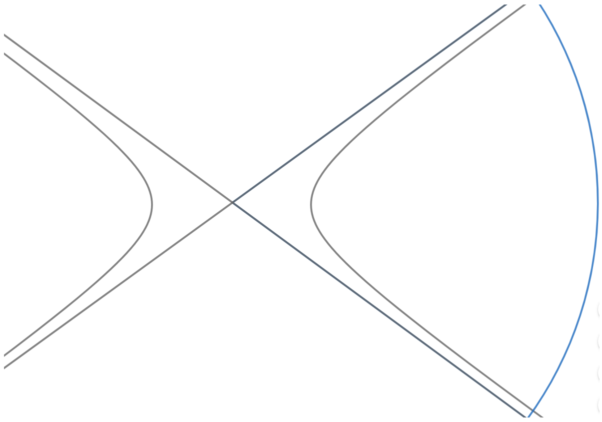


Рис. 210.

Парабола: $y^2 = 2px$ проецируем $(x^2)^2 = 2x^1x^2$

Найдем пересечение с бесконечно удаленной прямой: $x^3 = 0 \quad (x^2)^2 = 0$ – одна точка пересечения $[1 : 0 : 0]$.

Касательная в этой точке задается как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \implies x^3 = 0$$

Парабола касается бесконечно удаленной прямой.

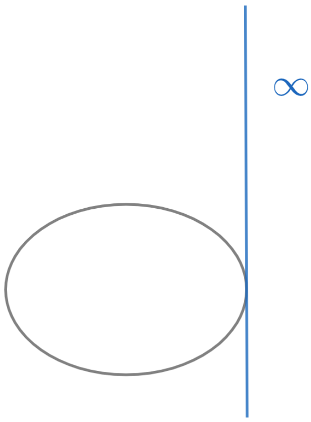


Рис. 211.

Между эллипсом, параболой и гиперболой нет разницы с проективной точки зрения. Это один и тот же овал, по разному взаимодействующий с бесконечно удаленной прямой.

Лекция 30

30.1 Проективные преобразования

Опр. 1. Проективное преобразование плоскости (прямой) – это преобразование, порожденное сохраняющим точку O аффинным преобразованием пространства (плоскости)

Проективное преобразование сохраняет точку O $\implies$ сохраняет прямую, проходящую через O

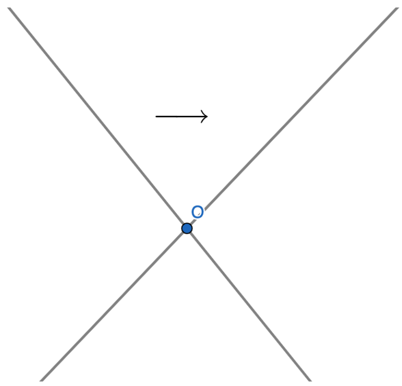


Рис. 212.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$ Нет сдвига $\implies$ это проективное преобразование.

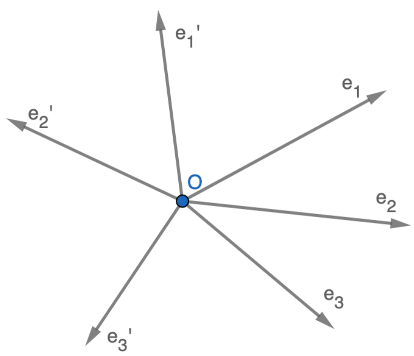


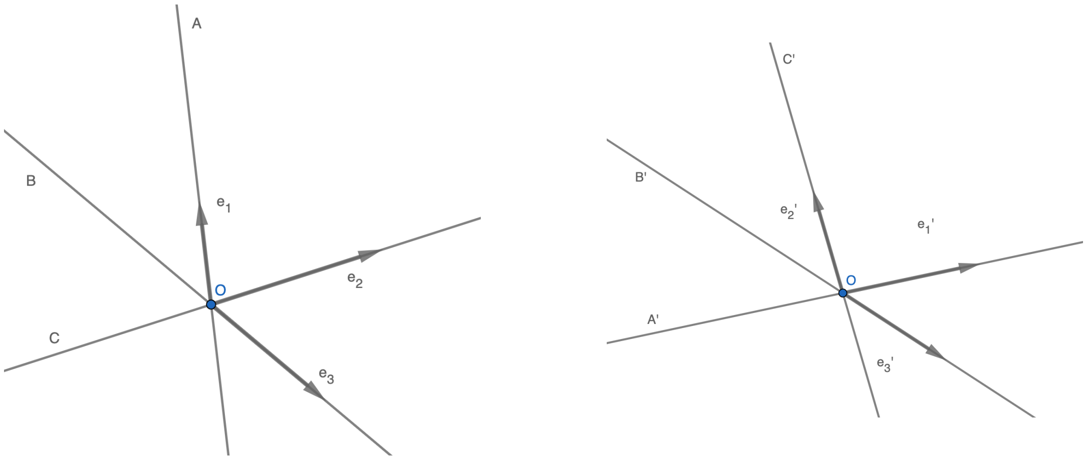
Рис. 213.

$C \longrightarrow \lambda C \implies [\tilde{x}^1 : \tilde{x}^2 : \tilde{x}^3] \longrightarrow [\lambda\tilde{x}^1 : \lambda\tilde{x}^2 : \lambda\tilde{x}^3] = [\tilde{x}^1 : \tilde{x}^2 : \tilde{x}^3]$

Утв. 1. C и $\lambda C, \lambda \neq 0$ определяют одно и то же проективное преобразование.

Утв. 2. Для любых двух прямых в проективной плоскости есть проективное преобразование, переводящее первую во вторую.

Утв. 3. Пусть A, B, C не лежат на одной прямой. A', B', C' не лежат на одной прямой $\implies \exists$ проективное преобразование переводящее A в A', B в B, C в C'
► Эти три прямые не лежат в одной плоскости, тогда $\{e_1; e_2; e_3\}$ – базис. (1)



(1) (2)

Рис. 214.

То же верно для A', B', C' (2). Тогда преобразование, определенное $\{O; e_1; e_2; e_3\}$ и $\{O'; e_1'; e_2'; e_3'\}$ – искомое.◄

$E_1 = (1; 0; 0), E_2 = (0; 1; 0), E_3 = (0; 0; 1), E = (1; 1; 1)$ Никакие три из них не лежат на одной прямой.

Утв. 4. Для четырех точек A, B, C, D и A', B', C', D' таких, что в каждой четверке никакие три не лежат на одной прямой $\exists$ проективное преобразование, переводящее A в A', B в B, C в C', D в D'.

►

$A \to E_1$ $B \to E_2$ $C \to E_3$ $D \to E$ для какой-то прямоугольной системы координат $\exists\{O; e_1; e_2; e_3\}$.

Аналогично: $A' \to E_1'$ $B' \to E_2'$ $C' \to E_3'$ $D' \to E'$ для какой-то прямоугольной системы координат $\exists\{O; e_1'; e_2'; e_3'\}$.

Берем аффинное преобразование, заданное этими реперами.◄

Когда есть репер $\{O; e_1; e_2; e_3\}$, то есть очень удобная аффинная карта.

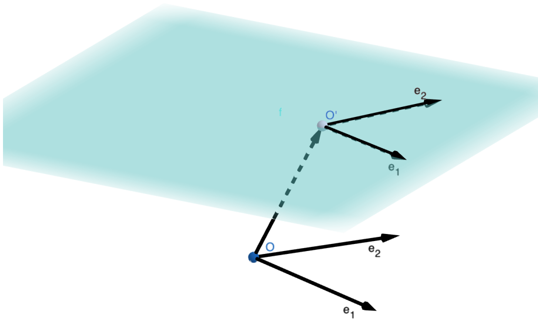


Рис. 215.

$(x^1; x^2; x^3) \longrightarrow \left(\dfrac{x^1}{x^3}; \dfrac{x^2}{x^3}\right) \quad | \, (x, y) \longrightarrow (x : y : 1)$

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_3} = \frac{c_{11}x^1 + c_{12}x^2 + c_{13}x^3}{c_{31}x^1 + c_{32}x^2 + c_{33}x^3} = \frac{c_{11}\frac{x^1}{x^3} + c_{12}\frac{x^2}{x^3} + c_{13}}{c_{31}\frac{x^1}{x^3} + c_{32}\frac{x^2}{x^3} + c_{33}} = \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}$$

Утв. 3. В аффинных координатах в проективно-аффинной плоскости проективное преобразование имеет вид:

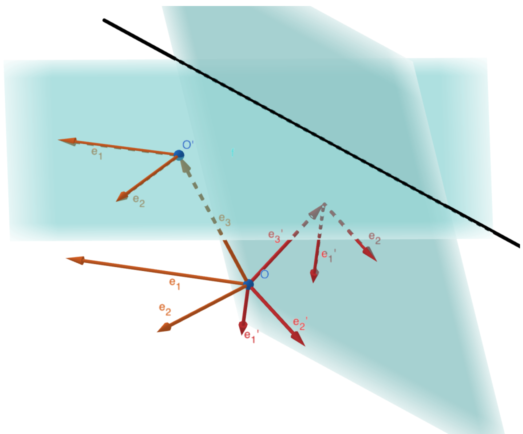
$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \\ \tilde{y} = \dfrac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{23}} \end{cases}$$

Для проективной прямой: $\tilde{x} = \dfrac{c_{11}x + c_{12}}{c_{21}x + c_{22}}$

Утв. 4. Аффинные преобразования плоскости (прямой) – частный вид проективных.

30.2 Центральная проекция

O – центральная проекция



В живописи:

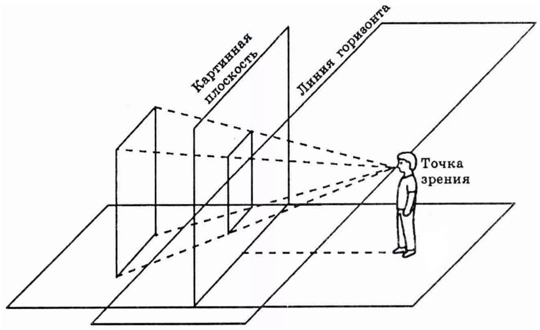


Рис. 216.

На холсте точки получены центральной проекцией:

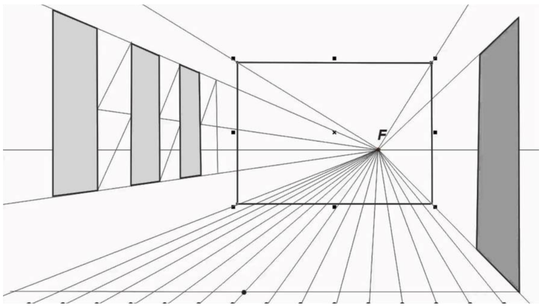


Рис. 217.

Когда появляются две точки схода?

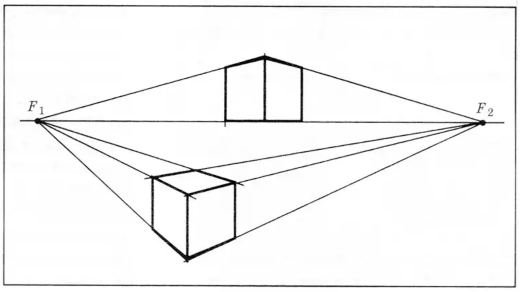


Рис. 218.

30.3 Двойное отношение четырех точек

Четыре различные точки на аффинной прямой:
Будем обозначать $(A_1A_2A_3A_4) = \dfrac{A_1A_2}{A_2A_3} : \dfrac{A_1A_4}{A_3A_4} = \dfrac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \dfrac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$

Опр. 2. $(A_1A_2A_3A_4)$ – двойное отношение различных четырех точек.

Утв. 5.
1. $(A_3A_4A_1A_2) = (A_1A_2A_3A_4)$
2. $(A_1A_2A_4A_3) = \dfrac{1}{(A_1A_2A_3A_4)}$
Доопределим для случая $A_4 = \infty$: $(A_1A_2A_3\infty) = \dfrac{a_1A_3}{A_2A_3} = \dfrac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$

Утв. 6. В проективных координатах $(y : z)$ $\quad x = \frac{y}{z}$ двойное отношение имеет вид

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_4 \\ z_1 & z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_2 & y_4 \\ z_2 & z_4 \end{vmatrix}}$$

►
1. Не меняется при замене $(y_i : z_i)$ на $(\lambda y_i : \lambda z_i)$
2. Для точек, отличных от бесконечно удаленных заменим $x = \frac{1}{z}$

$$\frac{\begin{vmatrix} \frac{y_1}{z_1} & \frac{y_3}{z_3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{y_2}{z_2} & \frac{y_3}{z_3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \frac{y_1}{z_1} & \frac{y_4}{z_4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{y_2}{z_2} & \frac{y_4}{z_4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2} = (A_1A_2A_3A_4)$$

3. Если $A_4 = \infty = (1 : 0)$

$$\frac{\begin{vmatrix} \frac{y_1}{z_1} & \frac{y_3}{z_3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{y_2}{z_2} & \frac{y_3}{z_3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \frac{y_1}{z_1} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{y_2}{z_2} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{-1}{-1} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} = (A_1A_2A_3\infty)$$ ◄

Утв. 2. Двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях прямой.

► $\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \tilde{y}_3 \\ \tilde{z}_1 & \tilde{z}_3 \end{vmatrix} = \det C \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \implies (\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4) = (A_1A_2A_3A_4)$
так как $\det C$ сохраняется. ◄
Проективное преобразование плоскости сохраняет двойное отношение.

$$(A_1A_2A_3A_4) = (A_1'A_2'A_3'A_4') = (\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4)$$

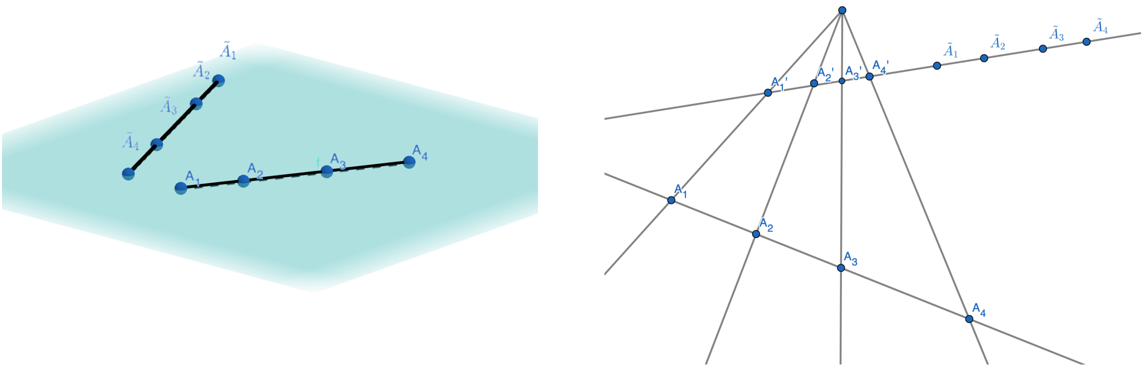


Рис. 219.

30.4 Полный четырехсторонник

Опр. 1. Четверка точек A_1, A_2, A_3, A_4 гармоническая, если $(A_1A_2A_3A_4) = -1$. То же самое говорят как: A_3 гармонически сопряжена A_4 относительно A_1A_2.

Опр. 2. Полный четырехсторонник – четыре прямые, такие, что никакие три не принадлежат одному пучку.

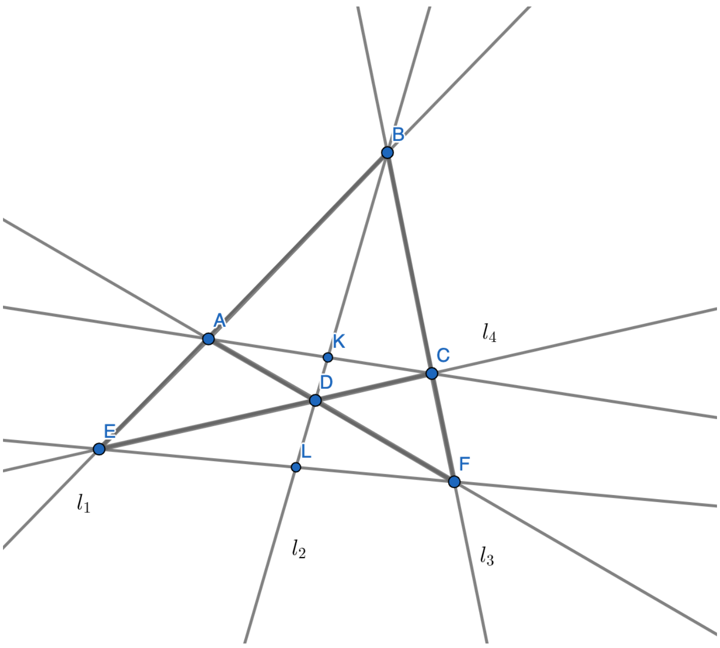


Рис. 220.

Вершины – A, B, C, D, E, F

$$\begin{cases} A = l_1 \cap l_3 \\ C = l_2 \cap l_4 \end{cases} \implies \text{диагональ } AC$$

$$\begin{cases} E = l_1 \cap l_4 \\ F = l_2 \cap l_3 \end{cases} \implies \text{диагональ } EF$$

$$\begin{cases} B = l_1 \cap l_2 \\ D = l_3 \cap l_4 \end{cases} \implies \text{диагональ } BD$$

Теорема. 1.

Точки пересечения произвольной диагонали с двумя другими диагоналями гармонически сопряжены относительно соответствующих вершин.

K гармонически сопряжена L относительно $BD \quad (BDKL) = -1$

► Возьмем аффинную карту, в которой EF – бесконечно удаленная прямая $\implies$ $l_1 \cap l_4 = E$, которая лежит на бесконечно удаленной прямой. То есть в аффинной карте $l_1 \parallel l_4$

Аналогично $l_2 \parallel l_3 = F$, которая лежит на бесконечно удаленной прямой. То есть в аффинной карте $l_1 \parallel l_4$

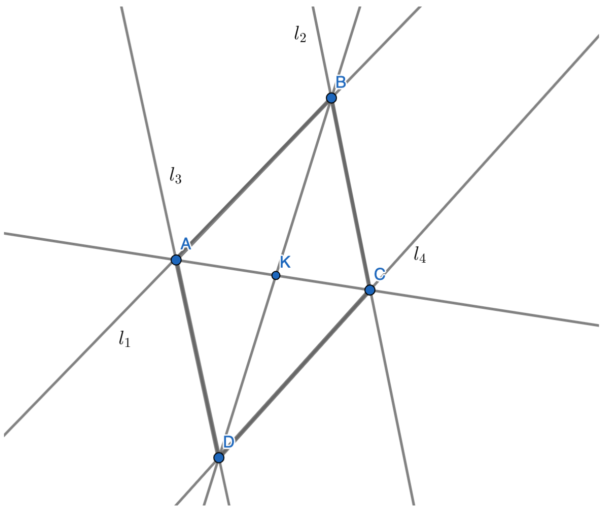


Рис. 221.

$(BDKL) = \dfrac{BK}{DK} = -1$ так как $ABCD$ – параллелограмм и K делит DB пополам ◄

Лекция 31

31.1 Проективное преобразование плоскости

Утв. 1. Двойное отношение четырех точек сохраняется при центральной симметрии.

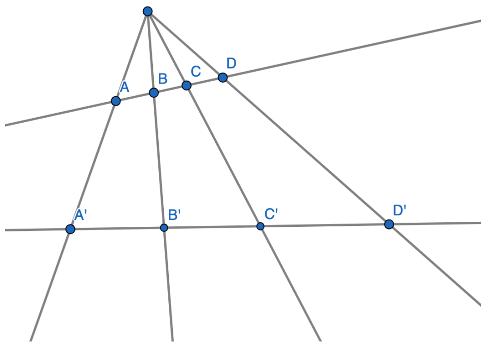


Рис. 222.

►

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}h|AC| = \frac{1}{2}|OA||OC|\sin\angle AOC$$

$$(ABCD) = \frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|}$$

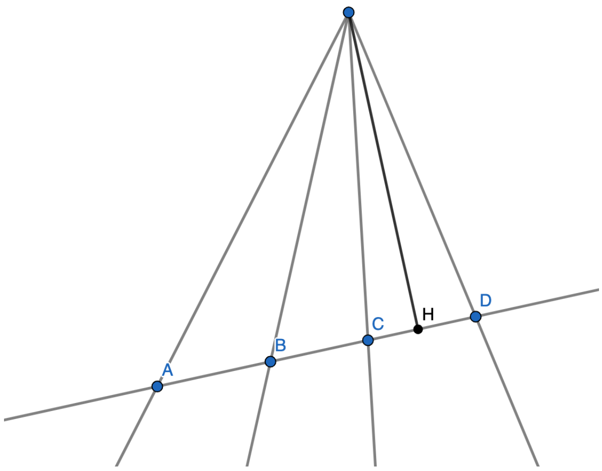
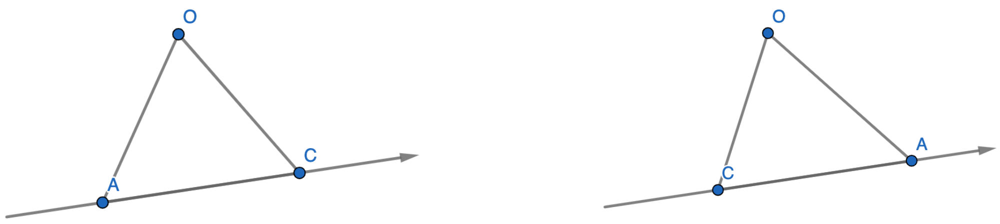


Рис. 223.

$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{\frac{1}{2}h|AC|}{\frac{1}{2}h|BC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \times \frac{S_{AOD}}{S_{BOD}} = \frac{\cancel{|OA|}\cancel{|OC|}\sin\angle AOC}{\cancel{|OB|}\cancel{|OC|}\sin\angle BOC} \times \frac{\cancel{|OB|}\cancel{|OD|}\sin\angle BOD}{\cancel{|OA|}\cancel{|OD|}\sin\angle AOD} =$$

$$= \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC} \times \frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle AOD} = \frac{\sin\angle A'OC'}{\sin\angle B'OC'} \times \frac{\sin\angle B'OD'}{\sin\angle A'OD'} = (A'B'C'D')$$

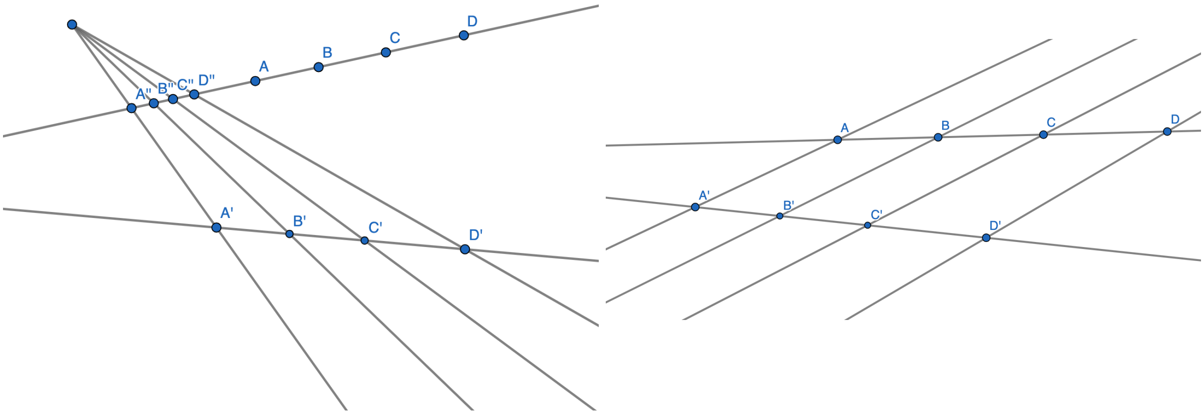
Чтобы учесть знак будем говорить:



$|AC| > 0 \quad \angle AOC > 0$ $\qquad$ $|AC| < 0 \quad \angle AOC < 0$

Рис. 224.

Тогда формулы выше не изменятся.◄



(1) $\qquad$ (2)

Рис. 225.

$(ABCD) = (A''B''C''D'') = (A'B'C'D')$

Особый случай: O лежит на бесконечно удаленной прямой.

Центральная проекция с помощью семейства параллельных прямых. Тогда утверждение есть следствие теоремы Фалеса (2).

31.2 Проективная классификация квадрик

Теорема. 1.

Проективным преобразованием квадрика приводится к одному и только одному из следующих типов:

1. Овал: $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$

2. Мнимый овал: $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$

3. Пара различных прямых: $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$

4. Пара мнимых различных прямых: $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$

5. Пара совпадающих прямых: $(x^1)^2 = 0$

► $a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$

Применяем метод Лагранжа. Приходим к одному из следующих типов:

A: $\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_1(x^1)^2 = 0 \quad \lambda_i = \pm 1$

B: $\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_1(x^1)^2 = 0 \quad \lambda_i = \pm 1$

C: $\lambda_1(x^1)^2 = 0 \quad \lambda_i = \pm 1$

Тогда:

A: Если λ_i разных знаков, то приводится к виду $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ – **Овал**

Если λ_i одного знака, то приводится к виду $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ – **Мнимый овал**

B: Если λ_i разных знаков, то приводится к виду $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ – **Пара различных прямых**

Если λ_i одного знака, то приводится к виду $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ – **Пара мнимых различных прямых**

C: Приводится к виду $(x^1)^2 = 0$– **Пара совпадающих прямых**

Осталось доказать, что разные типы не переходят друг в друга. Для этого выделем в каждом типе инвариантное свойство.

1. Не $\emptyset$ и никакие три точки не лежат на одной прямой.

2. $\emptyset$

3. Пара прямых

4. Одна точка

5. Одна прямая ◄

31.3 Рациональная параметризация коник

Выберем $O \in \Gamma$ и $l \not\ni O$

Если $l' \ni O$ не касательная, то $l' \cap \Gamma = \{O; P\}$

Если $l' \ni O \quad l' \parallel l$, то $l' \cap l = \{P'\}$

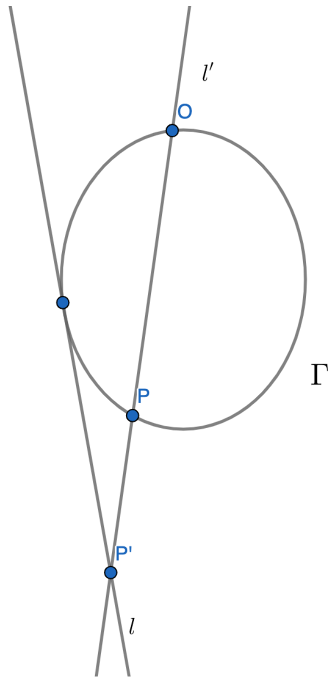


Рис. 226.

За исключением двух прямых $P' \longrightarrow P$
Особый случай: если l' – касательная, то $O' \longrightarrow O$

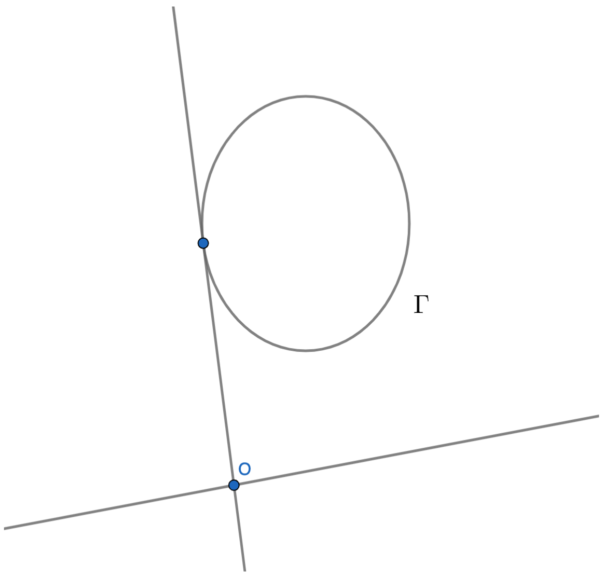


Рис. 227.

Если $l' \parallel l$:

$P' = A + tv \quad P'(t) = A + tv \longrightarrow P(t)$

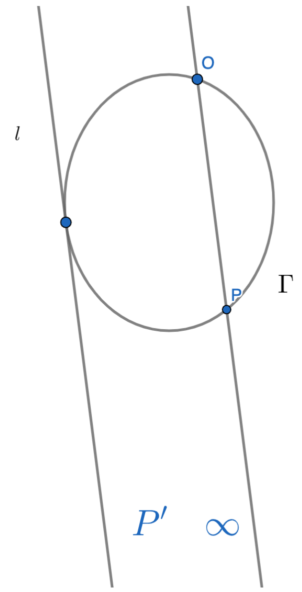


Рис. 228.

$\Gamma : F(x, y) = 0$
$O : (x_0; y_0), \quad F(x_0, y_0) = 0$
$A : (x_0; y_0), \quad v : (\alpha; \beta)$
$P'(t) = (x_0 + t\alpha; y_0 + t\beta)$

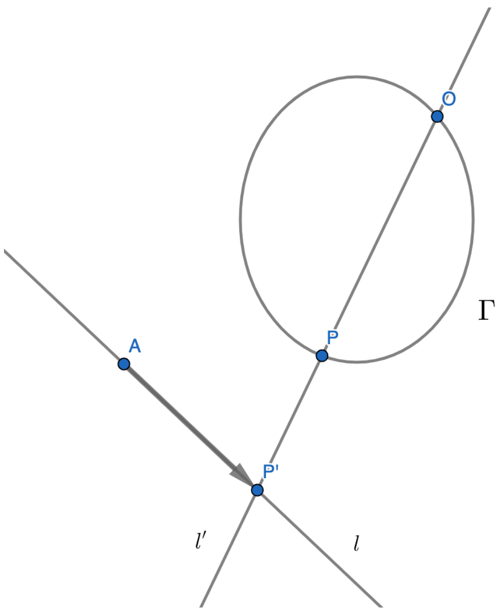


Рис. 229.

Параметрическое уравнение l'

$O + S \times OP'$
$(x_0 + S(x_1 - x_0 + t\alpha); y_0 + S(y_1 - y_0 + t\beta)) \quad (*)$
P – точка пересечения $l' = OP'$ с Γ
$F(x_0 + S(x_1 - x_0 + t\alpha), y_0 + S(y_1 - y_0 + t\beta)) = 0$ – квадратное уравнение и по S и по t
O – одна из двух точке пересечения $\implies$ $S = O$ – один из корней уравнения $\implies$ уравнение имеет вид $AS^2 + BS = 0$, где A и B многочлены от t степени не выше второй.
Второй корень: $S_2 = -\dfrac{B(t)}{A(t)}$. Подставим в $(*)$ и получим точку P.

$$P = \left(x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}(x_1 - x_0 + t\alpha); y_0 - \frac{B(t)}{A(t)}(y_1 - y_0 + t\beta)\right)$$

Координаты точки – рациональные функции от t, причем $\deg_t A \leq 2, \quad \deg_t B \leq 1 \implies$

$$P(t): \begin{cases} x(t) = \dfrac{C(t)}{D(t)} \\ \\ y(t) = \dfrac{E(t)}{F(t)} \end{cases} \qquad \deg(C, D, E, F) \leq 2$$

Пример:

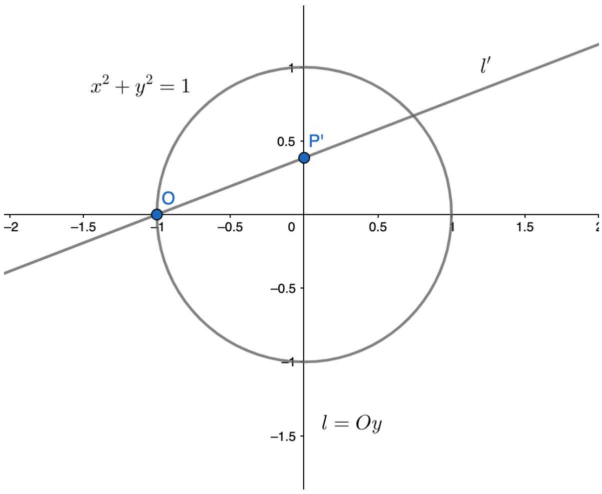


Рис. 230.

$$P'(0, t) = \underbrace{(0; 0)}_{A} + t\underbrace{(0; 1)}_{v}$$

$$l' : (-1; 0) + S(1; t) = (-1 + S; St)$$

Подставляем в $F(x,y)=0$:

$$(-1+S)^2+(St)^2=1 \iff \cancel{1}-2S+S^2+S^2t^2=\cancel{1} \iff \underbrace{(1+t^2)}_{A}S^2\underbrace{-2}_{B}S=0$$

$S_1=0 \quad S_2=\dfrac{2}{1+t^2}$

$$P:\begin{cases} x=-1+S_2=-1+\dfrac{2}{1+t^2}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=S_2t=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$$ – рациональная параметризация.

$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \quad y=\sqrt{ax^2+bx+c} \implies$ есть квадрика

$y^2=ax^2+bx+c \implies$ есть рациональная параметризация $\begin{cases} x=P(t)\\ y=Q(t)\end{cases} \implies$

$\int R(P(t),Q(t))P'(t)dt$

31.4 Двойное отношение четырех точек на конике

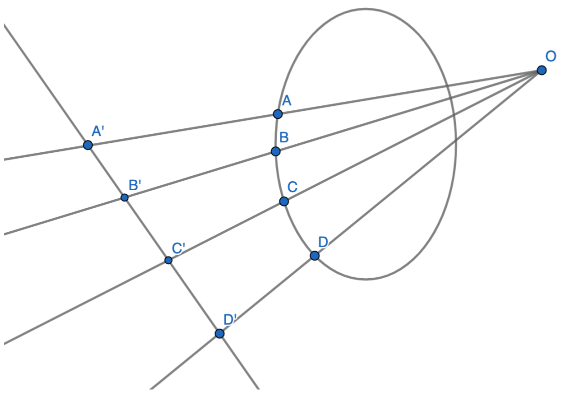


Рис. 231.

По определению $(ABCD)=(A'B'C'D')$. Надо проверить что такое соотношение не зависит от O и l.

1. Независимость от l очевидно следует из свойств центральной проекции.

2. Не меняется при проективных преобразованиях. Приведем проективным преобразованием к окружности.

Независимость от O следует из равенства вписанных в окружность углов, опирающихся на одну хорду $\implies (A_1B_1C_1D_1)=(A_1'B_1'C_1'D_1')$

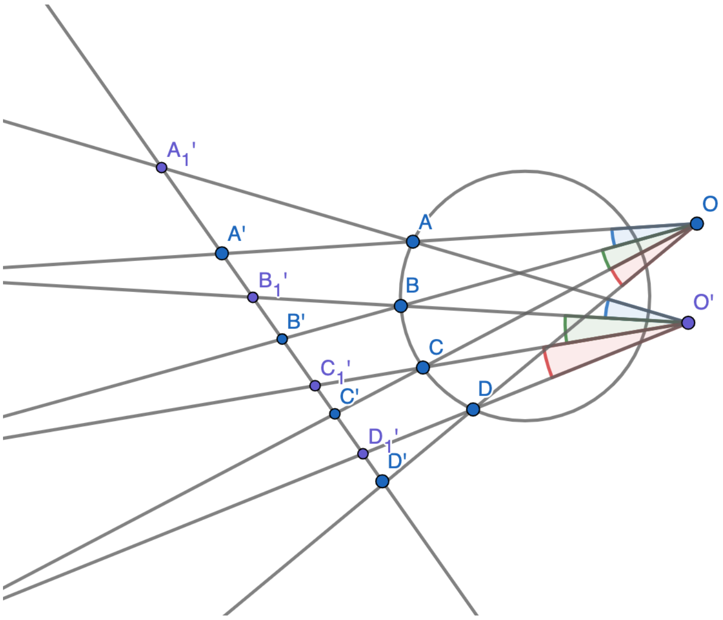


Рис. 232.

Утв. 2. Двойное отношение четырех точек на конике сохраняется при проективных преобразованиях.

Квадрика задается матричным уравнением $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0$

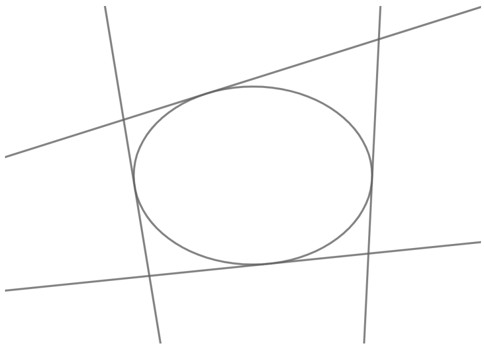


Рис. 233.

Как описать множество касательных к данной квадрике? Касательная в точке $(x_0^1; x_0^2; x_0^3)$ имеет уравнение $\begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0$

$$\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 = 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \end{pmatrix} A$$

Утв. 3. $(\alpha : \beta : \gamma)$ удовлетворяет уравнению $\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix} EAE^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = 0$

► $\begin{pmatrix}x_0^1 & x_0^2 & x_0^3\end{pmatrix} AA^{-1}A^T \begin{pmatrix}x_0^1\\ x_0^2\\ x_0^3\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}x_0^1 & x_0^2 & x_0^3\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x_0^1\\ x_0^2\\ x_0^3\end{pmatrix} = 0$ ◄

То есть точки, отвечающие касательным при проективной двойственности лежат на квадрике с матрицей A^{-1} – это называется двойственная квадрика.
Γ – квадрика; Γ^* – двойственная квадрика

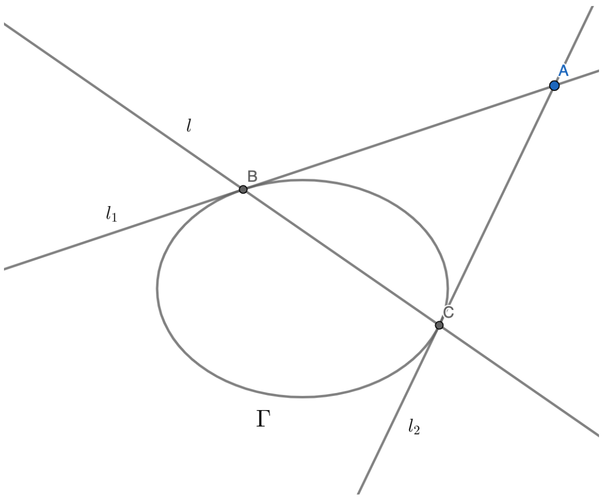


Рис. 234.

Двойственность:

$A \to a \qquad l \to L$

$B \to b \qquad l_1 \to L_1$

$C \to c \qquad l_2 \to L_2$

$\Gamma \to \Gamma^*$

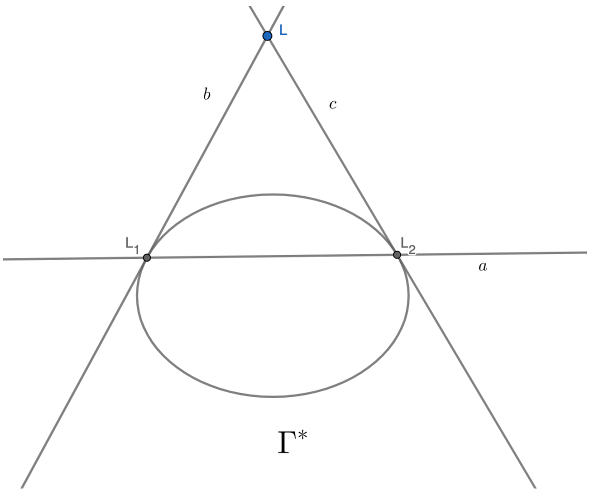


Рис. 235.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ