



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ОПТИКА

АЛЕШКЕВИЧ  
ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

---

ФИЗФАК МГУ

---

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

# Содержание

<b>Лекция 1. Электромагнитная теория света.</b>	<b>7</b>
Введение. Общие положения оптики. Свет как электромагнитные волны.	
Оптический диапазон длин волн. . . . .	7
Глава I. Электромагнитная теория света. . . . .	10
Уравнения Максвелла. Материальные уравнения среды. Волновое уравнение.	10
Сферические волны. Плоские волны и их свойства. . . . .	14
<b>Лекция 2. Электромагнитная теория света.</b>	<b>15</b>
Сферические волны. Плоские волны и их свойства. . . . .	15
Монохроматические волны. Комплексная запись волны. . . . .	16
Световые пучки и импульсы. . . . .	17
Интенсивность, мощность, энергия. . . . .	18
Световое давление. . . . .	21
<b>Лекция 3. Электромагнитная теория света. Излучение света.</b>	<b>22</b>
Световое давление. . . . .	22
Лазерный термоядерный синтез. . . . .	22
Поляризация света. . . . .	23
Глава 2. Классическое описание излучения. . . . .	24
Дипольное излучение осциллятора. . . . .	24
Излучение ансамбля атомов. Время корреляции. . . . .	26
Интеграл Фурье. . . . .	27
Спектральная плотность интенсивности. . . . .	28
<b>Лекция 4. Излучение света. Интерференция света.</b>	<b>31</b>
Естественная ширина спектральной линии. . . . .	31
Ударное и доплеровское уширение спектральной линии. . . . .	32
Фазовая модуляция и уширение спектра. . . . .	34
Глава 3. Интерференция света. . . . .	34
<b>Лекция 5. Интерференция света.</b>	<b>35</b>
Двухволновая интерференция. . . . .	35
Интерферометр Майкельсона. . . . .	36
Интерферометр Маха-Цендера. . . . .	36
Связь интерференционных полос с параметрами системы. . . . .	37
<b>Лекция 6. Интерференция света.</b>	<b>40</b>
Спектр и интерференционные картины (опыт Юнга). . . . .	40
Понятие о Фурье-спектроскопии. Измерение малых перемещений. . . . .	41

Пространственная когерентность. Угол и радиус когерентности. Звёздный интерферометр Майкельсона. Функция пространственно-временной корреляции. . . . .	42
<b>Лекция 7. Интерференция света.</b>	<b>45</b>
Методы деления волнового фронта и амплитуды. . . . .	45
Интерференция в пластинках и плёнках. Полосы равного наклона и равной толщины. Оптический клин. Кольца Ньютона. . . . .	45
Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри-Перо. Формула Эйри. . . . .	49
<b>Лекция 8. Дифракция света.</b>	<b>51</b>
Глава 4. Дифракция света. . . . .	51
Принцип Гюйгенса-Френеля. . . . .	53
Зоны Френеля. . . . .	54
Дифракция на круглом отверстии. . . . .	56
Зонная пластинка. Линза. . . . .	57
<b>Лекция 9. Дифракция света.</b>	<b>58</b>
Дифракция светового пучка. . . . .	58
Дифракция на крае экрана. Зоны Шустера. . . . .	58
Интегральная теорема Киргхофа. . . . .	58
Дифракционная формула Френеля-Киргхофа. . . . .	60
Приближения Френеля и Фраунгофера. . . . .	60
<b>Лекция 10. Дифракция света.</b>	<b>64</b>
Дифракционная картина в дальнем поле, как Фурье-образ светового поля на дифракционном экране. . . . .	64
Дифракция на прямоугольном отверстии. . . . .	65
Дифракция на круглом отверстии. . . . .	66
Дифракция гауссовского пучка. . . . .	67
Поле в фокальной плоскости собирающей линзы. . . . .	68
Дифракционные решетки. . . . .	69
<b>Лекция 11. Дифракция света.</b>	<b>70</b>
Дифракционные решетки. . . . .	70
Спектральные характеристики решеток. . . . .	72
Спектральные приборы с пространственным разрешением спектра. . . . .	74
Приборы, формирующие оптическое изображение. . . . .	75
<b>Лекция 12. Дифракция света.</b>	<b>76</b>
Приборы, формирующие оптическое изображение. . . . .	76

Теория Аббе. . . . .	76
Методы наблюдения фазовых объектов. . . . .	78
<b>Лекция 13. Дисперсия. . . . .</b>	<b>80</b>
Глава 5. Дисперсия. . . . .	80
Материальные уравнения среды. Частотная и пространственная дисперсия среды. . . . .	80
Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды. Формула Лоренц- Лоренца. . . . .	86
<b>Лекция 14. Дисперсия. . . . .</b>	<b>88</b>
Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды. Формула Лоренц- Лоренца. . . . .	88
Основы электронной теории дисперсии. . . . .	89
Среды с отрицательным показателем преломления. Явления на границе раз- дела двух сред. . . . .	90
Законы геометрической оптики. . . . .	90
Формулы Френеля. . . . .	92
Физический смысл угла Брюстера. . . . .	94
<b>Лекция 15. Дисперсия. Волны в анизотропных средах. . . . .</b>	<b>95</b>
Просветление оптики. Диэлектрические зеркала. . . . .	95
Металлооптика. Плазменная частота. . . . .	96
Глава 6. Волны в анизотропных средах. . . . .	97
Главные показатели преломления и главные скорости. . . . .	97
Классификация кристаллов. Скорость по нормали и поверхность нормалей. . . . .	99
Распространение плоской монохроматической волны. Луч и нормаль. . . . .	100
<b>Лекция 16. Дисперсия. Волны в анизотропных средах. . . . .</b>	<b>101</b>
Повторение прошлой лекции. . . . .	101
Эллипсоид нормалей. . . . .	104
Уравнение лучевых скоростей. . . . .	104
Двойное лучепреломление. Принцип Гюйгенса. . . . .	104
<b>Лекция 17. Рассеяние света. . . . .</b>	<b>107</b>
Глава 7. Рассеяние света. . . . .	107
Молекулярное рассеяние света. . . . .	107
Рассеяние в газах. Формула Релея. . . . .	109
Рассеяние в жидкостях. Формула Эйнштейна. . . . .	110
Спектральный состав рассеянного света. . . . .	111
Рассеяние в мутных средах. . . . .	112

<b>Лекция 18. Нелинейные оптические эффекты.</b>	<b>114</b>
Глава 8. Элементы квантовой теории излучения света. . . . .	114
Спонтанное излучение. . . . .	114
Вынужденное поглощение. . . . .	116
Вынужденное излучение. . . . .	116
Равновесное тепловое излучение. . . . .	117
Резонансное усиление света. Инверсная заселенность. Лазеры. . . . .	119
<b>Список литературы</b>	<b>123</b>

## Лекция 1

### Введение. Общие положения оптики. Свет как электромагнитные волны. Оптический диапазон длин волн.

Оптика - это учение о свете. Сейчас не возникает сомнений, что свет - это электромагнитные волны. Электромагнитные волны - это волны, которые излучаются атомами, молекулами, конденсированным веществом, элементарными частицами. И эти электромагнитные волны занимают колоссальный спектр электромагнитных волн.

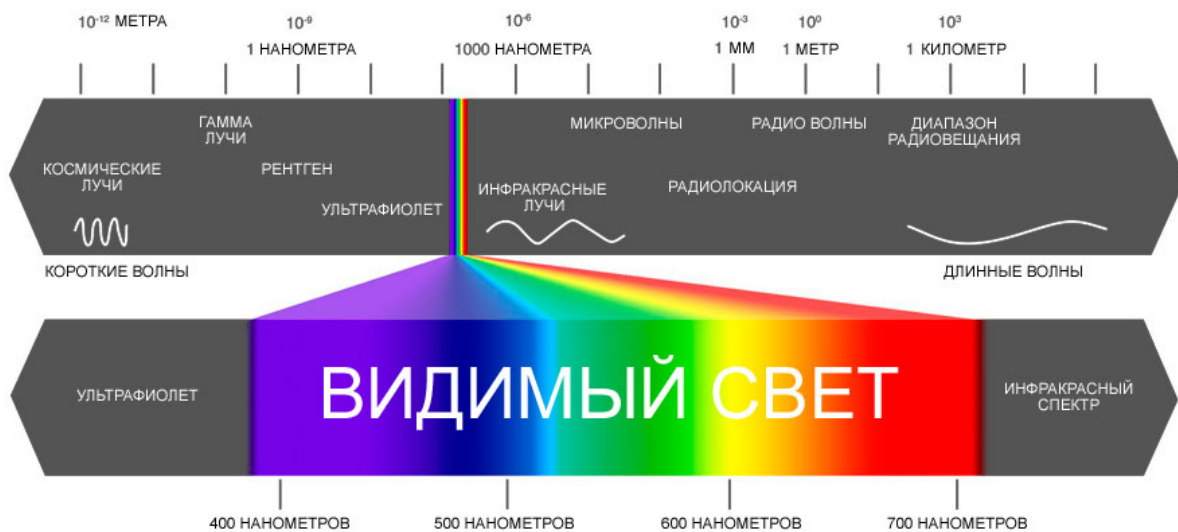


Рис. 1.1: Электромагнитные волны

Спектр электромагнитных волн простирается от радиоволн через микроволновое излучение, инфракрасное излучение, ультрафиолетовое излучение, рентгеновское излучение и гамма излучение. И все это излучение возникает благодаря тому, что есть атомы, молекулы, элементарные частицы, токи и заряды, которые и являются источником электромагнитных волн. К видимому свету мы относим очень узкий диапазон. Длины волн в нем от 400 нанометров до 700 нанометров (если в цветах, то от фиолетового до красного). Все остальное мы не можем увидеть. К оптике можно отнести инфракрасное излучение, видимый диапазон, ультрафиолетовое излучение, рентгеновское излучение и гамма излучение. Почему именно это мы относим к оптике? В основе классификации электромагнитных волн и их принадлежности к оптике лежит идея о том, что в оптике существуют общие методы оперирования с электромагнитными волнами. Эти общие методы базируются на том, что мы умеем создавать направленные пучки электромагнитного излучения и с помощью них можем делать многие вещи, в том числе и формировать оптическое изображение. Если говорить о современных технологиях, которые привели к формированию этих пучков света, мы

будем условно выделять диапазон, относящийся к оптике от микроволнового излучения (длина волны порядка 1 мм) до рентгеновского излучения (длина волны порядка долей ангстрема). Видимый диапазон является очень узкой областью. Это связано со спектром излучения солнца и с тем, что нас окружает атмосфера и озоновый слой Земли. Если мы говорим о спектре солнца: солнце это объект, на котором происходят термоядерные реакции. И поверхность солнца нагрета до температуры порядка до 6000К. Это позволяет солнцу позиционировать себя как объект, который напоминает по своим спектральным характеристикам **абсолютно черное тело**.

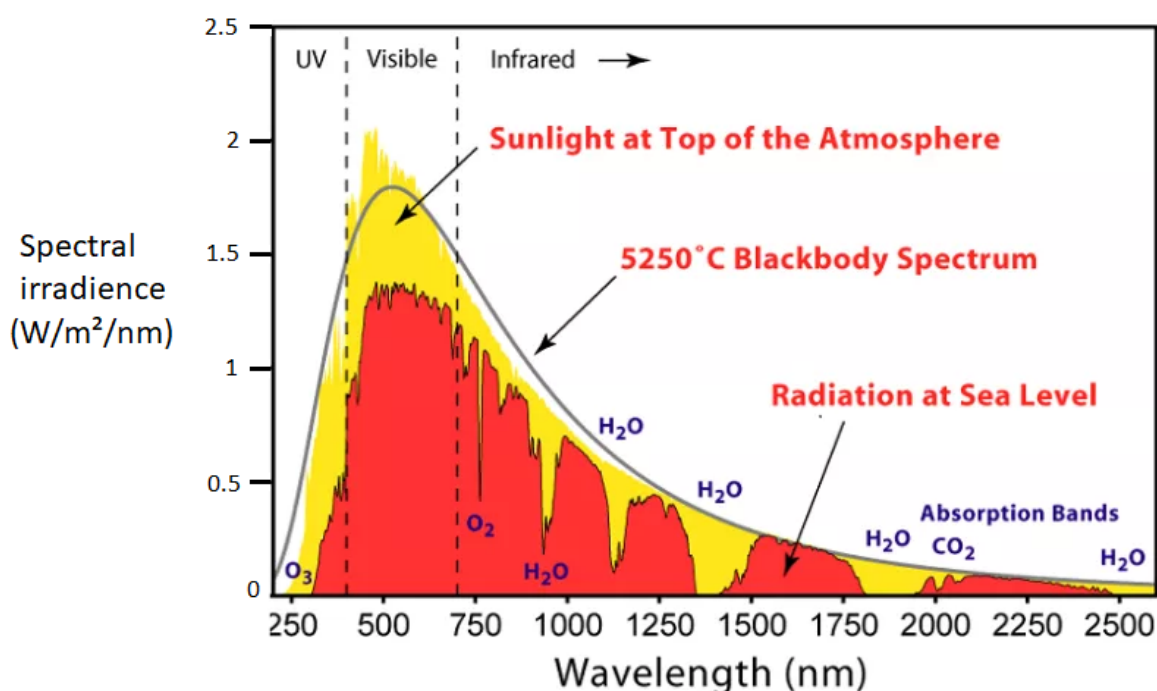


Рис. 1.2: Зависимость интенсивности излучения от длины волны

Если говорить о зависимости интенсивности излучения от длины волны в нанометрах (см. рис.2), то спектр излучения солнца (кривая на графике), который говорит о том, что в спектре присутствуют длины волн короче 250 нанометров и намного длинее, чем 700 нанометров. Однако мы видим лишь от 400 до 700 нанометров. Существует ряд фундаментальных причин, которые привели к формированию узкого спектрального диапазона, характеризующего нашу чувствительность зрительных органов. Прежде всего, есть озоновый слой ( $O_3$ ), который окружает нашу Землю. Он имеет такие полосы поглощения, что все, что короче 270 нанометров поглощается озоновым слоем атмосферы. Тем не менее, существует еще длинное инфракрасное излучение. Если бы Земля была бы абсолютно холодной и человеческая температура была бы близка к температуре 0К и при этом, возможно, была бы жизнь. То тогда мы бы и это видели. Но мы не видим по одной простой причине: Земля сама по

себе является объектом излучения. И она излучает инфракрасные волны. У Земли есть температура около 300К. И тогда эти инфракрасные излучения занимают этот спектральный диапазон. Если говорить, что температура Солнца 6000К и максимум спектра в 500 нанометров. Земля в 20 раз холоднее и максимум спектра смещается (10000 нанометров). Излучение Земли является вредным фоном. Оно не несет никакой информации. Информативным для нас является свет, отраженный от Солнца, падающий на объекты и попадающий к нам в глаза. Издревле считалось, что свет распространяется по прямой линии. Это экспериментальный факт, который был связан с тем, что лучи света (зайчики от зеркала) распространяется прямолинейно. В частности, хорошо известный из механики опыт, который делал Гаусс в начале 19 столетия. Он хотел узнать, является ли наше пространство евклидовым. Для этого он устанавливал на вершинах трех гор световые источники и, соответственно, измерял углы между лучами, предполагая, что лучи идут по прямой линии (рис. 3). Если бы лучи шли по кривой линии, то мы бы все линейки сделали бы тоже кривыми. Тогда, если бы свет шел криволинейно, то и углы не давали в сумме  $180^\circ$ . Однако, в опытах Гаусса было показано, что сумма углов меньше  $180^\circ$ .

## ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЯ

*Эвклидово пространство - безгранично, однородно и изотропно, имеет три измерения.*

$$e^2 = x^2 + y^2 + z^2 = inv$$

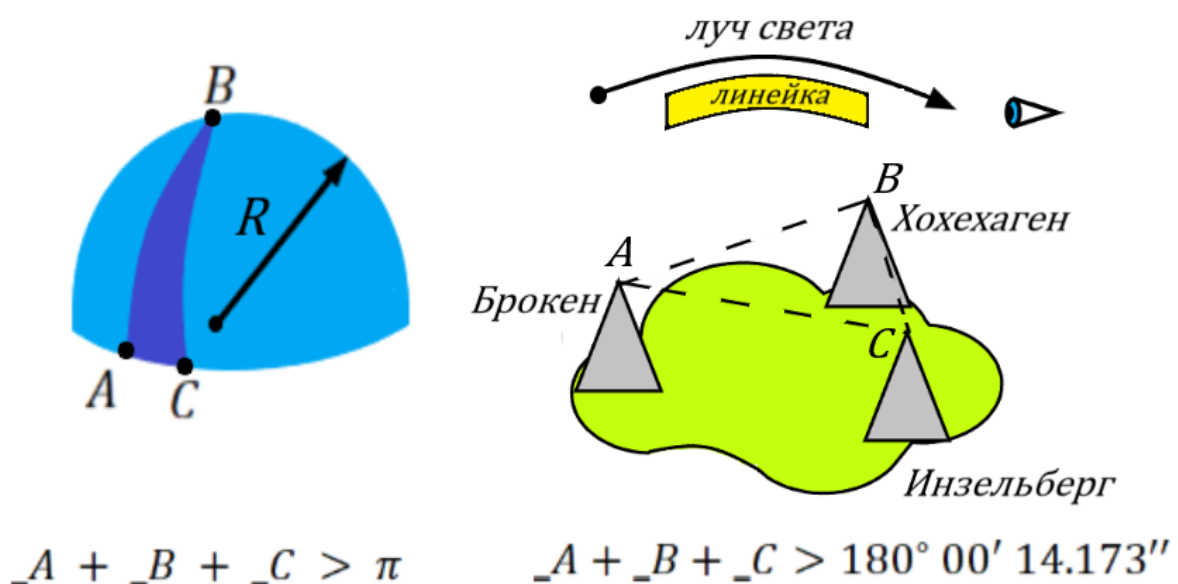


Рис. 1.3: Опыт Гаусса



Свет, как всякая волна, стремится занять все пространство, которое ему доступно. Но если каким-то образом ограничить геометрические характеристики волны, то мы можем заставить свет двигаться прямолинейно. Но свет этому сопротивляется. Сопротивляется этому такими явлениями, как интерференция, дифракция. Поэтому, когда мы будем говорить о распространении света, мы будем использовать представление именно о волне. И только потом выясним в каких случаях волна может распространяться прямолинейно.

Для того, чтобы описать электромагнитную теорию света, можно использовать два подхода: классический и квантовый.

## Глава I. Электромагнитная теория света.

### Уравнения Максвелла. Материальные уравнения среды.

#### Волновое уравнение.

Электромагнитная теория света базируется на уравнениях Максвелла. В 1775 году был открыт закон Кулона. После была сформулирована теорема Гаусса-Остроградского, из которой следовало, что поток вектора индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных в пространстве, окруженной этой поверхностью. В дифференциальном виде теорема Гаусса-Остроградского формулируется как:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Что означает отсутствие истоков линии индукции. То есть, линии индукции всегда замкнуты.

В 1831 году Фарадеем был открыт закон электромагнитной индукции. Из этого закона следовало, что в замкнутом проводнике возникал индукционный ток, но для того, чтобы он возник, необходимо изменение потока через поверхность, которая опирается на этот контур. Закон электромагнитной индукции расширил возможности электростатики. А именно, в электростатике мы писали, что:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Когда мы изучали закон Био-Савара-Лапласа, мы сделали вывод, что в природе отсутствуют магнитные заряды. И тогда мы записали это условие в дифференциальном виде:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Это говорило о том, что линии или силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Поэтому,

если мы совершаем обход по замкнутому контуру, работа силы электростатического поля будет равна нулю.

Но Фарадей показал, что кроме электростатических полей существуют еще и вихревые электрические поля, которые возникают тогда, когда существует изменяющееся магнитное поле. И это изменяющееся магнитное поле характеризуется производной по времени от индукции и ставится знак минус, который гласит о том, что направление ЭДС и индукционного тока подчиняется правилу Ленца.

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

В 1860 году Ганс Христиан Эрстед обнаружил, что ток действует на магнитную стрелку. И это позволило ему сделать вывод, что источником магнитного поля являются токи проводимости:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \text{ (магнитостатика)}$$

Но так было, когда мы рассматривали магнитостатику. Токи не менялись и магнитное поле было постоянным во времени. Максвелл в 1857-1861 годах обратил внимание, что уравнение не полно, так как дивергенция ротора должна всегда равняться нулю, а дивергенция  $\vec{j}$  нулю не равняется. Дивергенция  $\vec{j}$  и закон сохранения заряда гласит о том, что объемная плотность заряда меняется во времени в соответствии с уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

И тогда мы получаем систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{ток смещения}} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \end{cases}$$

В этой системе пять векторных величин и одна скалярная. Если взять дивергенцию от первого и четвертого уравнений, то она равна нулю. Следовательно первое и четвертое уравнения имеют одинаковые дифференциальные следствия. Это говорит о том, что эти уравнения связаны. Аналогично со вторым и третьим уравнениями.

А значит, здесь три независимых векторных уравнения (1,2 и последнее (закон сохранения заряда)).

Недостающие уравнения являются материальными уравнениями среды:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \text{ (закон Ома в дифф. форме)}$$

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}); \vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$$

В оптике мы будем полагать, что среды у нас не магнитные, поэтому:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

где  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left(\frac{\Gamma_n}{\mathcal{M}}\right)$  - магнитная постоянная

Будем считать, что ток пропорционален напряженности поля и закон Ома выполняется. Поэтому уравнение  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  оставляем. Рассмотрим уравнение  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) :$$

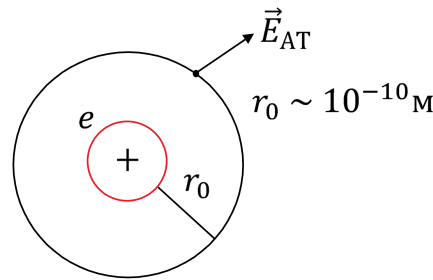


Рис. 1.4: Внутриатомное поле

Где  $\vec{E}_{AT}$  - атомная напряженность,  $r_0$  - радиус первой боровской орбиты,  $e$  - заряд ядра.

$$E_{AT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r_0^2} \approx 10^{11} \frac{B}{\mathcal{M}}$$

Поляризация среды с полем связана формулой:

$$E \ll E_{AT}, \text{ то } \vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E}$$

где  $P$  - поляризация,  $\varkappa$  - поляризуемость.

То есть среда ведет себя линейно.

Источники света (лазеры) позволяют достичь напряженности, которая меньше или порядка  $E_{AT}$ , тогда поляризация света  $P$  является функцией поля  $E$ , которую можно разложить в ряд:

$$P = \varepsilon_0 (\varkappa E + \chi E^2 + \Theta E^3 + \dots)$$

И возникло новое направление в оптике, которое называется **нелинейная оптика**.  
**Волновое уравнение.**

Будем рассматривать распространение света в вакууме, никакой среды нет, поэтому никакой проводимости нет.

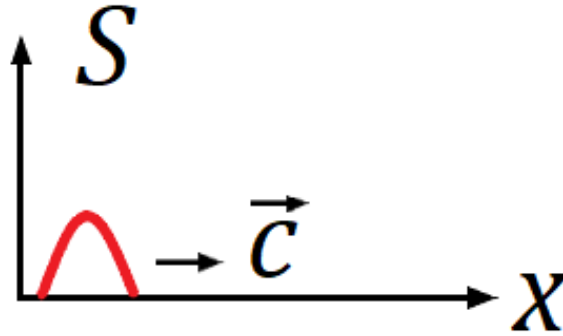


Рис. 1.5: Колебание вдоль струны

Где  $S$  - смещение точек шнура от положения равновесия,  $\vec{c}$  - импульс.

$$S(x, t) = S(t - \frac{x}{c}) - \text{уравнение волны.}$$

Уравнение волны является решением волнового уравнения.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \text{волновое уравнение.}$$

Получим волновое уравнение в трехмерном виде:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = c^2 \Delta S$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа.

Это уравнение характеризует некое «смещение» электромагнитного поля от положения равновесия.

$$S \longrightarrow E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{H}$$

Возьмем от первого уравнения Максвелла операцию ротора:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

В силу третьего уравнения Максвелла мы можем написать, что дивергенция  $\vec{E}$  равна нулю и получим волновое уравнение:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

## Сферические волны. Плоские волны и их свойства.

Волновое уравнение показывает, что электромагнитная волна в вакууме является поперечной волной. Тот факт, что волна поперечная, позволяет говорить о ее поляризации.

Существует две важные модели волн: сферическая волна и плоская волна.

Представьте, что где-то произошла вспышка сверхновой звезды. В результате того, что произошла вспышка (источник света) в окружающем пространстве будут распространяться сферические волны. Существует такое понятие - *волновой фронт* или *поверхность равной фазы*.

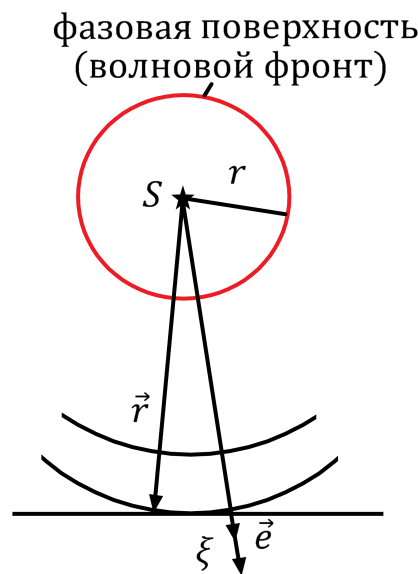


Рис. 1.6: Волновой фронт

$$|\vec{E}(t, \vec{r})| = \frac{\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

$$|\vec{E}(t, \vec{r})| = f\left(t - \frac{\vec{e}\vec{r}}{c}\right) - \text{уравнение для плоской волны}$$

$$\xi = \vec{r}\vec{e}; E(t, \xi) = f\left(t - \frac{\xi}{c}\right)$$

## Лекция 2

### Сферические волны. Плоские волны и их свойства.

Волновое уравнение для напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}$$

Волновое уравнение для напряженности магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{H}$$

Чтобы не писать уравнения для электрического и магнитного полей по отдельности, запишем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f$$

где  $f \rightarrow E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$

При этом скорость распространения электромагнитной волны в вакууме определялось таким соотношением:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Сферическое уравнение волны:

$$f(t, r) = \frac{\phi(t - \frac{r}{c})}{r}$$

Уравнение для плоской волны:

$$f(t, \vec{r}) = f(t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c})$$

Для сферической волны возмущение в фиксированный момент времени одинаково на сферической поверхности. Для плоской волны возмущение в фиксированный момент времени одинаково на плоскости.

Поверхность, где возмущение одинаково, называется волновой поверхностью или фазовым фронтом.

#### Свойства плоских волн:

$$1) \quad \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}(t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}) \qquad \vec{H}(t, \vec{r}) = \vec{H}(t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c})$$

Для связи двух уравнений применим уравнение Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \text{rot} \vec{H} = +\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Введем аргумент  $t' = t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}$

$$-\frac{1}{c}(\vec{e}_x \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'}) = +\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'}$$

$$-\frac{1}{c}(\vec{e}_x \vec{H}) = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H}$$

## Монохроматические волны. Комплексная запись волны.

Гармонические колебания имеют период  $T$ , частоту  $\nu = \frac{1}{T}$ , круговую частоту  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Тогда плоская волна будет иметь вид:

$$f(\vec{r}, t) = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c} \right) \right]$$

Введем некоторые величины:

$k = \frac{\omega}{c}$  - волновое число,  $\vec{k} = k\vec{e}$  - волновой вектор;

Тогда уравнение плоской волны примет вид:

$$f(\vec{r}, t) = A \cos \left[ \omega t - \vec{k}\vec{r} \right] - \text{уравнение плоской монохроматической гармонической волны.}$$

Для сферической волны:

$$f(r, t) = \underbrace{\frac{a}{r}}_{\text{амплитуда}} \cos [\omega t - kr] - \text{уравнение гармонической сферической волны}$$

Гармоническая волна является идеализацией и в природе не существует гармонических или монохроматических волн.

### Комплексная запись волны:

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left( A e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + A e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right)$$

Введем комплексную амплитуду  $\hat{A} = A e^{-i\vec{k}\vec{r}} \rightarrow$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left( \hat{A} e^{i\omega t} + \hat{A}^* e^{-i\omega t} \right)$$

## Световые пучки и импульсы.

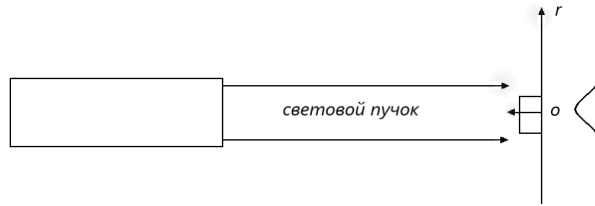


Рис. 2.1: Световой пучок

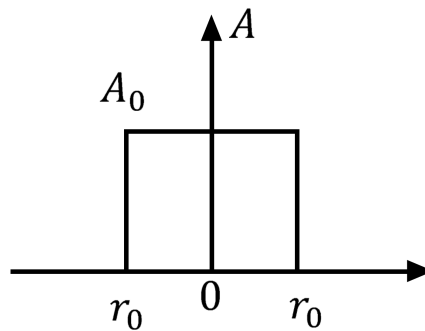


Рис. 2.2: Пучок с прямоугольным профилем амплитуды

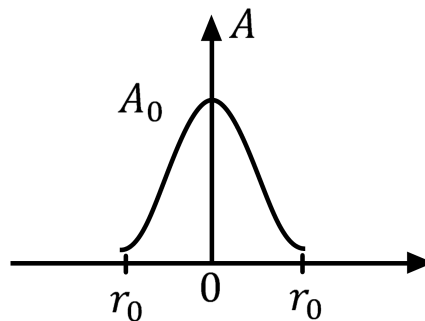


Рис. 2.3: Пучок с плавно спадающей амплитудой (Гауссовский световой пучок)

Для гауссовского светового пучка амплитуда является плавно уменьшающейся функцией от максимальной величины  $A_0$ . Тогда амплитуду гауссовского светового пучка можно записать как:

$$A(r) = A_0 e^{-\frac{r^2}{r_0^2}}$$

Где  $r_0$  - радиус пучка.

Световой пучок никогда не существует бесконечно долго. Поговорим об импульсном излучении. Электромагнитное излучение существует некоторое определенное время.



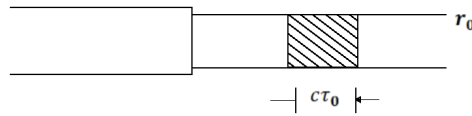


Рис. 2.4: Длина светового импульса

Где  $c$  - скорость света,  $\tau_0$  - длительность светового импульса,  $r_0$  - ширина пучка.

Амплитуда излучения зависит не только от расстояния, но и от времени.

В природе существуют пучки (импульсы). Когда говорят о *пучке*, имеют в виду *пространственные* масштабы излучения. Когда говорят об *импульсе*, имеют в виду *временные* масштабы излучения.

Невозможно получить пучок, размер которого будет меньше, чем длина волны:

$$r_0 \geq \lambda \sim 1 \text{ мкм}$$

Длительность импульса никогда нельзя получить меньше, чем период колебаний:

$$\tau_0 \geq T = \frac{\lambda}{c} \sim 1 \text{ фс (фемтосекунда)}$$

Фемтосекунда - период колебаний. Значит, самый короткий импульс должен содержать хотя бы одну осцилляцию (период).

## Интенсивность, мощность, энергия.

Световые пучки и импульсы переносят энергию. Энергетические характеристики - это интенсивность, мощность и энергия.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} - \text{вектор Пойтинга}$$

$$\vec{S}_z = \vec{E}_x \vec{H}_y \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{см}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] \quad E_x = A \cos(\omega t - kz) \quad H_y = \frac{\sqrt{\epsilon_0} E_x}{\sqrt{\mu_0}} = \epsilon_0 c E_x$$

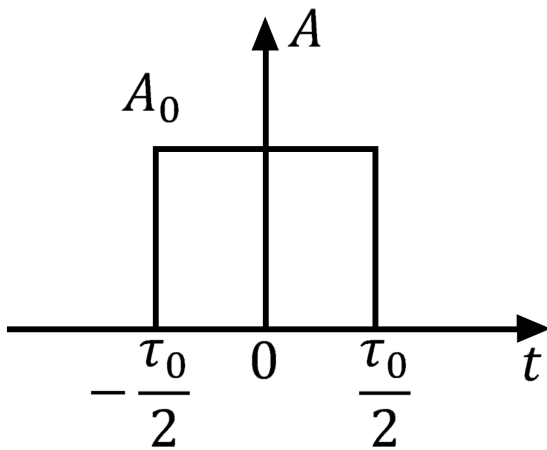
$$S_z = \epsilon_0 c E_x^2 = \epsilon_0 c A^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

Поток энергии определяется квадратом напряженности электрического поля в световой волне.

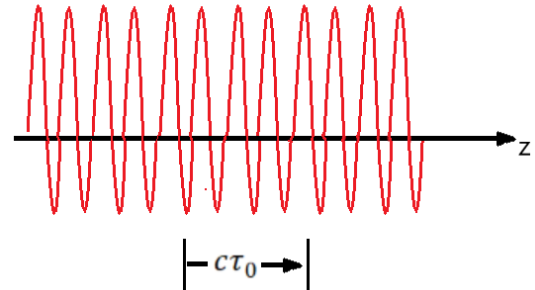
### Интенсивность.

Интенсивность - это среднее значение за период величины  $S_z$ :

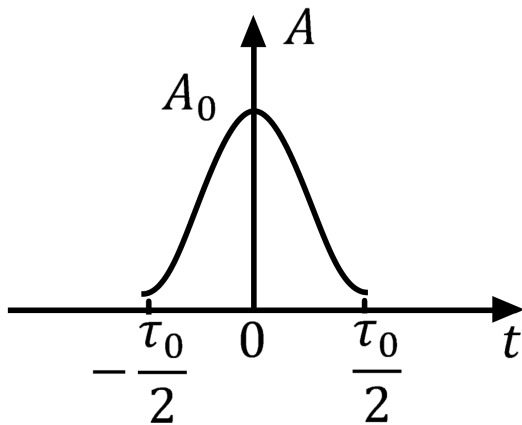
$$I = \frac{1}{T} \int_0^T S_z dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 c A^2 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] - \text{интенсивность}$$



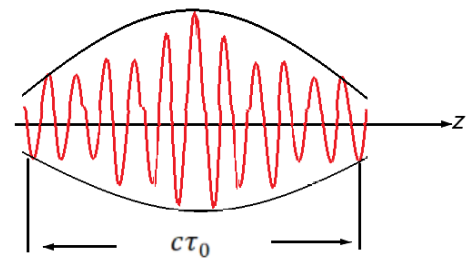
Прямоугольный импульс



Колебания прямоугольного импульса



Гауссовский импульс



Колебания гауссовского импульса

Рис. 2.5: Зависимость амплитуды от времени.

$$I \left[ \frac{Bm}{\text{м}^2} \right] = 3 \cdot 10^{-3} \left( A \left[ \frac{B}{\text{м}} \right] \right)^2 - \text{формула для пересчета}$$

$$I_{\text{солн}} = 1,3 \cdot 10^3 \left[ \frac{Bm}{\text{м}^2} \right] - \text{солнечная постоянная}$$

$$A \sim 10^3 \left[ \frac{B}{\text{м}} \right] - \text{напряженность}$$

### Мощность.

Интенсивность зависит от квадрата амплитуды. Квадрат амплитуды в пучке, как и сама амплитуда имеет либо прямоугольное распределение либо гауссовское. Мощность характеризуется количеством энергии, которая поставляет световой пучок по всему сечению в единицу времени.

$$P = \iint I d\sigma [Bm]$$

Пример:

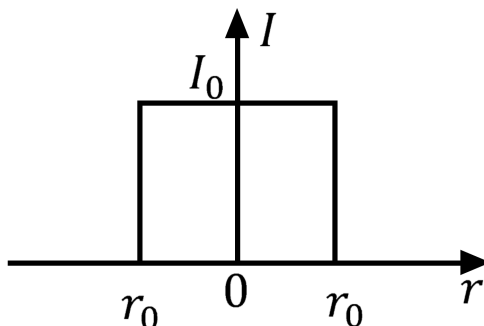


Рис. 2.6: Пучок с прямоугольным распределением интенсивности

$$I_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c A_0^2$$

$$P = I_0 \pi r_0^2$$

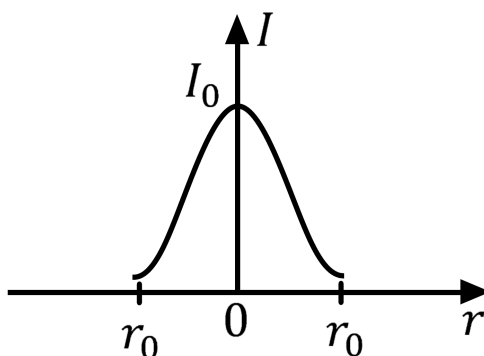


Рис. 2.7: Гауссовское распределение интенсивности

$$I(r) = I_0 e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}$$

$$P = \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr = [\text{подставим } I(r)] = \frac{\pi r_0^2}{2} I_0$$

Энергия.

$$W = \int P(t) dt [Джс]$$

$$W = P_0 \tau_0 = I_0 \pi \varepsilon_0^2 \tau_0$$

$$W \approx I_0 \pi r_0^2 \tau_0$$

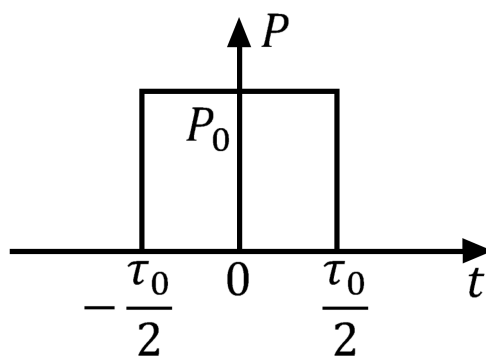


Рис. 2.8: Пучок с прямоугольным профилем интенсивности

## Световое давление.

Электромагнитное воздействие:

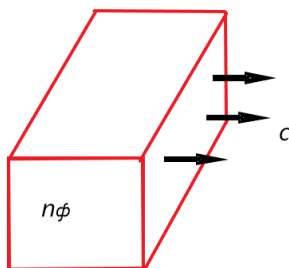


Рис. 2.9: ФОТОНЫ

$$E_{\phi} = h\nu - \text{энергия фотона}$$

$$P_{\phi} = \frac{E_{\phi}}{c} = \frac{h\nu}{c} - \text{импульс фотона}$$

$$I = E_{\phi} n_{\phi} c = h\nu n_{\phi} c - \text{интенсивность фотона}$$

$$p = \frac{n_{\phi} h\nu}{c} = \frac{I}{c} - \text{давление света}$$

Если  $p = \frac{I}{c}$ , то:

$$F = p\sigma = \frac{I}{c}\sigma = \frac{P}{c}$$

Где  $\sigma$  - площадь пластины,  $P$  - мощность.

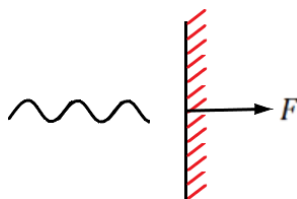


Рис. 2.10: Падение света на пластину

Если свет падает на какую-то зачерненную пластину, то на выходе получим силу  $F$ .

## Лекция 3

### Световое давление.

Пример:

Луч  $He - Ne$  лазера.

$$P = 10 [мВт] = 10^{-2} [Вт]$$

$$F = \frac{10^{-2}}{3 \cdot 10^8} [Па \cdot м^2] \sim \frac{1}{3} \cdot 10^{-10} [Н] :$$

Возьмем небольшой объект в виде шара диаметром  $D$  (рис. 17).

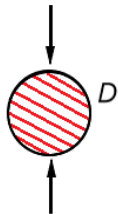


Рис. 3.1

$$D \sim 1 [мкм] = 10^{-6} [м] - \text{диаметр}$$

$$\sigma \sim 10^{-12} [м^2] - \text{сечение}$$

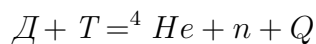
$$m \sim \rho V \sim 10^3 \cdot 10^{-18} [кг] = 10^{-15} [кг] - \text{масса}$$

$$a = \frac{F}{m} \sim \frac{10^{-11}}{10^{-15}} \sim 10^4 \left[ \frac{м}{с^2} \right] - \text{ускорение}$$

### Лазерный термоядерный синтез.

Основная идея термоядерного синтеза:

Два легких элемента: дейтерий  $D$  (тяжелая вода) и тритий  $T$ . При соединении этих элементов высвободится энергия связи  $Q \approx 17,6 [эВ]$ . Но для осуществления этой химической реакции, подобной той, которая происходит на солнце, необходимы высокое давление и высокая температура (рис. 18).



$$Q = 17,6 [эВ]$$

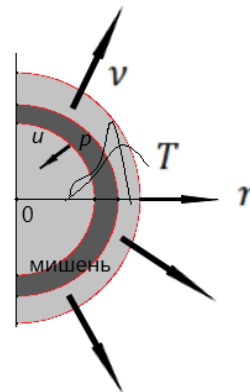


Рис. 3.2

Идея состоит в том, что при кратковременной вспышке света за счет не светового давления, а за счет *светореактивного* давления попытаться сжать вещество этой мишени до температур порядка 10 миллионов градусов Кельвина и до давления в несколько сотен атмосфер.

## Поляризация света.

Поляризация света характеризуется поведением в пространстве вектора напряженности электрического поля.

Единственное ограничение, которое есть, это то, что волна должна быть поперечной.

Если вектор  $\vec{E}$  колеблется в одной плоскости, то свет называется *плоскополяризованным*.

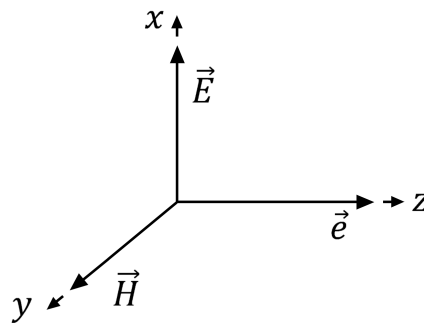


Рис. 3.3: Плоскополяризованный свет

Если вектор  $\vec{E}$  вращается в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{e}$  и конец вектора  $\vec{E}$  описывает кривую, то это будет *эллиптическая поляризация света*.

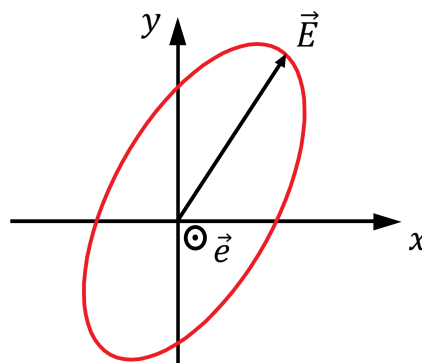


Рис. 3.4: Эллиптическая поляризация света

$$E_x = a_x \cos(\omega t)$$

$$E_y = a_y \cos(\omega t + \Delta\phi)$$

$$0 \leq \Delta\phi \leq 2\pi$$

$\Delta\phi$  — фаза

Если конец вектора  $\vec{E}$  описывает окружность, то говорят о *круговой поляризации света*.

Если вектор  $\vec{E}$  вращается против часовой стрелки, то говорят о *левой* поляризации света.

Если вектор  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелки, то говорят о *правой* поляризации света.

**Правило:**

Если  $\sin \Delta\phi > 0$ , то поляризация *правая*.

Если  $\sin \Delta\phi < 0$ , то поляризация *левая*.

## Глава 2. Классическое описание излучения.

### Дипольное излучение осциллятора.

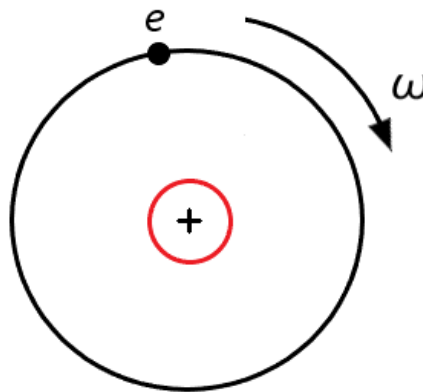


Рис. 3.5: Движение электрона по круговой орбите

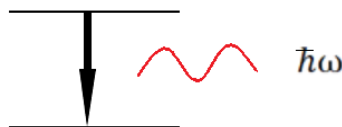
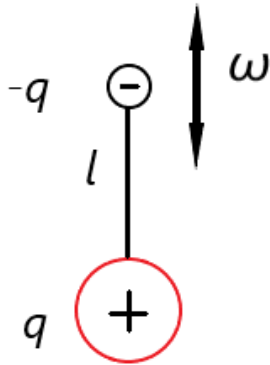


Рис. 3.6: Движение электрона в квантовой теории

В оптике атомы не излучают, если они не находятся в возбужденном состоянии. Атом является простейшей структурой. В классической теории излучение будет только тогда, когда электрон движется с ускорением. Но в реальной жизни, мы видим,

что электрон движется равномерно, он находится на стационарной орбите и никакого излучения нет. Возникает противоречие. В квантовой теории электрон находится на разных орбитах и когда он переходит из одного возбужденного состояния в другое, отсюда излучается квант света с энергией  $\hbar\omega$ .

В классической теории вращение электрона вокруг ядра эквивалентно колебаниям электрона в двух взаимно перпендикулярных направлениях с частотой  $\omega$ . Тогда мы можем говорить о том, что есть **осциллирующий диполь**.



$l = l_0 \cos \omega t$  — изменение расстояния по

гармоническому закону

$P = ql = ql_0 \cos \omega t$  — дипольный момент является гармонической функцией

Рис. 3.7: Колебания электрона

В классической теории предполагается, что осциллирующий диполь излучает электромагнитную волну.

### Осциллирующий дипольный момент.

$$p(t) = ql(t) = p_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$H(t, r) = -\frac{1}{4\pi cr} e \times \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

Чем выше частота колебаний, тем больше напряженность поля.

$$E(t, r) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} e \times H = -\frac{1}{c\varepsilon_0} e \times H$$

$$S = EH = \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \left[ p \left( t - \frac{r}{c} \sin \sigma \right) \right]^2$$

$$\tau = \frac{6\pi m \varepsilon_0 c^3}{e^2 \omega_0^2} \sim 10^{-8} c$$

Где:  $E = ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t$ ;  $T \sim 1\text{фс}$ ;  $\tau \sim 10^{-8} c$ .

$\tau$  - время корреляции излучения.

Атом излучает пуг, потом, в результате столкновения с другими атомами он получает энергию, которую он опять высвечивает в виде пуга магнитных волн. У каждого атома есть свое время затухания. Частоты тоже меняются.



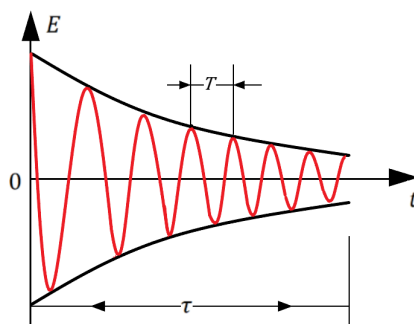


Рис. 3.8: Атом излучает цуг электромагнитных волн

## Излучение ансамбля атомов. Время корреляции.

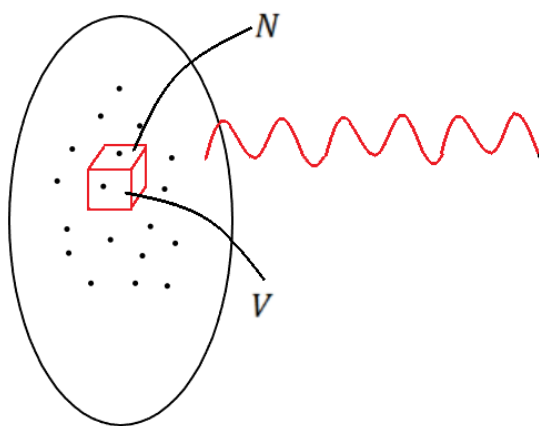


Рис. 3.9: Газоразрядная трубка; атомы, излучающие в точку, со сдвигом фазы

$N = nV$  — кол-во излучающих атомов

$V = \lambda^3 \sim 10^{-18} [\text{м}^3]$  — объем

$n \sim 10^{25} \left[ \frac{1}{\text{м}^3} \right]$  = концентрация

$N \sim 10^7$

Огромное число частиц излучает цуги, поэтому никаких разрывов в цугах мы не видим. Идет непрерывно следующая волна.

$$E = \sum_i E_i = A(t) \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$$

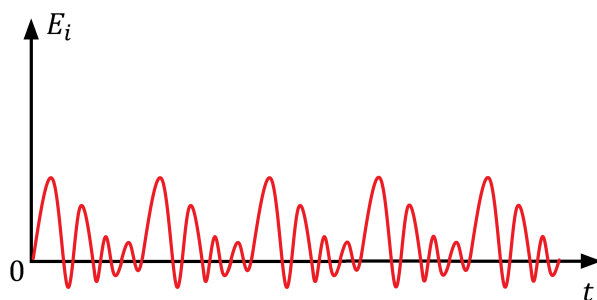


Рис. 3.10: Напряженность поля отдельных цугов

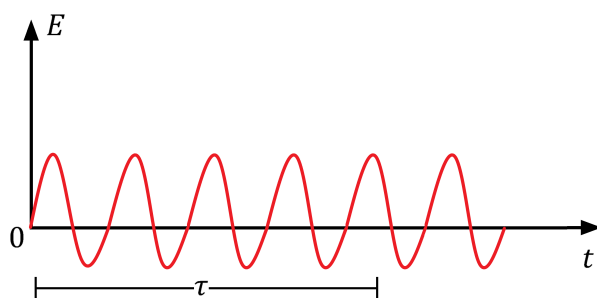


Рис. 3.11: Напряженность поля

## Интеграл Фурье.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos [\omega t - \phi(\omega)] d\omega$$

$a(\omega), b(\omega), f_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$  - **спектральная амплитуда**

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

Если  $f(t)$  - четная, остается  $a(\omega)$

Если  $f(t)$  - нечетная, остается  $b(\omega)$

$$f_0(\omega) = f_0(-\omega)$$

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$$

**Комплексное представление интеграла Фурье:**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega) e^{i(\omega t - \phi)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\hat{f}_0(\omega) = f_0(\omega) e^{-i\phi}$$

Обратное преобразование:

$$\hat{f}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Спектральная плотность пропорциональна величине энергии, переносимая волной, приходящейся на единичный интервал частоты.

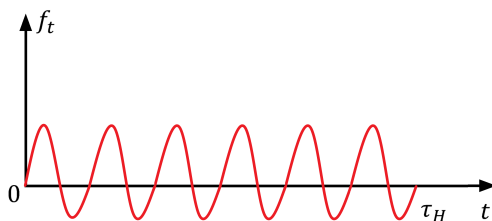
$$|\hat{f}_0(\omega)|^2$$

## Спектральная плотность интенсивности.

$$f \longleftrightarrow E - \text{напряженность}$$

$$I = \langle E \rangle^2 - \text{интенсивность}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}_0(\omega)|^2}{\pi} d\omega - \text{равенство Парсеваля}$$



$\tau_H$  — время наблюдения

Применим равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\tau_H} \int_0^{\tau_H} f_{\tau}^2(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{|f_{0\tau}(\omega)|^2}{\tau_H \pi} d\omega$$

Рис. 3.12: Усеченная зависимость

Если сигнал состоит из набора хаотических и следующих друг за другом цугов (каждый цуг имеет длительность  $\tau$ ), то для набора статистики  $\tau_H \gg \tau$ .

$N_{\text{цугов}} \sim \frac{\tau_H}{\tau}$  — число цугов.

$$I = \lim_{\tau_H} \frac{1}{\tau_H} \int_0^{\tau_H} f_{\tau}^2(t) dt = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

где:

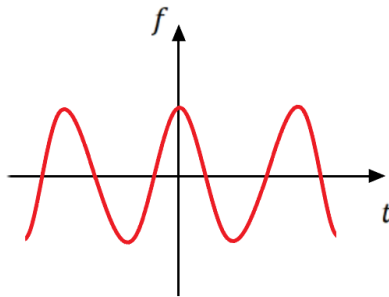
$$S(\omega) = \lim_{\tau_H \rightarrow \infty} \frac{|f_{0\tau}(\omega)|^2}{H\tau_H} - \text{спектральная плотность интенсивности}$$

$$I = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

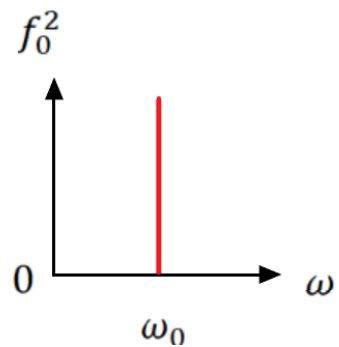
Пример 1:

Монохроматическое излучение.

$$f(t) = a \cos \omega_0 t$$



Временное представление



Спектральное представление

Рис. 3.13: Монохроматическое излучение

$$f_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a \cos \omega_0 t \cos \omega t dt = a\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_0(\omega) \cos \omega t d\omega = a \cos \omega_0 t$$

$f_0(\omega)$  - спектральная амплитуда.

Пример 2:

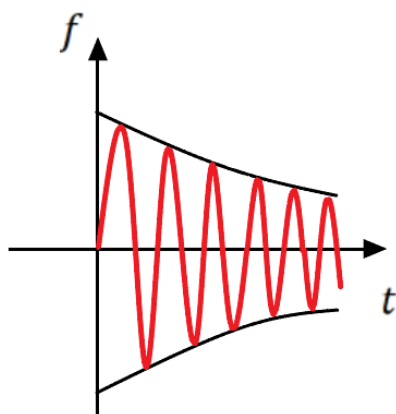
$$\hat{f}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$|\hat{f}_0(\omega)|^2 = \frac{1}{4} a^2 \tau^2 L(\omega)$$

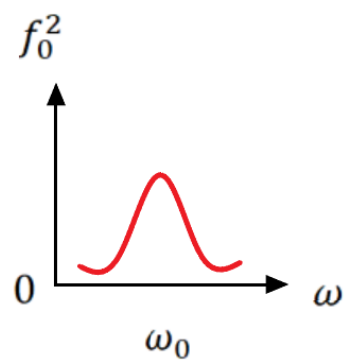
$L(\omega)$  - Лоренцевый контур

$$L(\omega) = \frac{1}{[(\omega_0 - \omega)]^2 + 1}$$

29



Временное представление



Спектральное представление

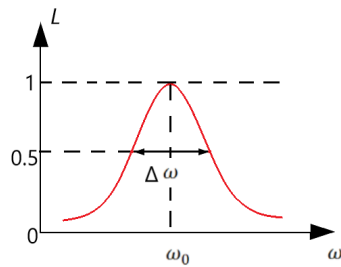
Рис. 3.14: Затухающий цуг

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau}$$

## Лекция 4

### Естественная ширина спектральной линии.

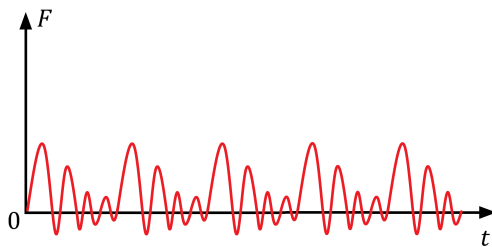
$$\tau \sim 10^{-8} - 10^{-9} \text{ с}$$



$$\frac{1}{\tau^2 \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau}$$

Рис. 4.1: Лоренцевский контур



$$F = \sum_{l=1}^N f(t - t_l)$$

$$F(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t))$$

$$\tau \gg T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Рис. 4.2: Квазигармоническая зависимость

$$\hat{F}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{l=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_l) e^{-i\omega t} dt = \sum_{l=1}^N \hat{f}_0(\omega) e^{-i\omega t_l}$$

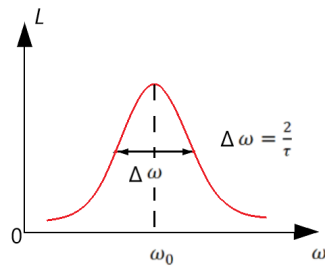
$$N = \frac{\tau_{набл}}{\tau} \gg 1$$

$$|\hat{F}_0(\omega)|^2 = \hat{F}_0(\omega) \hat{F}_0^*(\omega) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |\hat{f}_0(\omega)|^2 e^{-i\omega(t_l - t_m)} = N |\hat{F}_0(\omega)|^2$$

$$S(\omega) = \frac{|\hat{F}_0(\omega)|^2}{\pi \tau_H} = \frac{N |\hat{f}_0(\omega)|^2}{\pi \tau_H} = \frac{|\hat{f}_0(\omega)|^2}{\pi \tau}$$

#### Вывод:

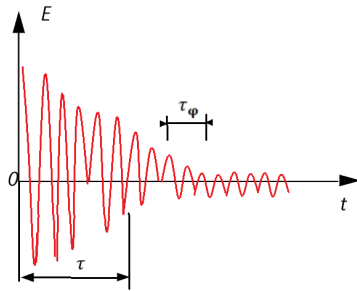
Спектральная плотность излучения, состоящая из совокупности  $N$  цугов, при излучении невзаимодействующих атомов, составляется спектральной плотностью излучения для одного отдельного атома.



$$S(\omega) = \frac{\frac{1}{4}a^2\tau^2 L(\omega)}{\pi\tau} \sim L(\omega)$$

Ввести  $I_0$ .

Рис. 4.3: Лоренцевский контур



При столкновении атомов цуг портится. Если с течением  $\tau$  произошло  $N$  столкновений, то цуг распадается на отдельные субцуги. Спектр излучения должен расширяться с временем  $\tau_\phi$ .

Рис. 4.4: Цуг. Сбивание фазы

## Ударное и доплеровское уширение спектральной линии.

### Ударное столкновение:

При ударном механизме столкновения спектр расширяется.

$$\tau_c \sim 10^{-10} - 10^{-11} \text{ c} \qquad \Delta\omega = \frac{2}{\tau} \sim 10^{10} - 10^{11} \text{ c}^{-3}$$

По прежнему остается лоренцевское время излучения.

$$S(\omega) \sim L(\omega) = \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 \tau_c + 1}$$

$$S(\omega) = I_0 g_L(\omega) = I_0 \frac{2}{\pi} \frac{\Delta\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Delta\omega)^2} - \text{Лоренцевская функция}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_L(\omega) d\omega = 1$$

### Длина когерентности:

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$$

$$\tau_{\text{ког}} = \tau$$

### Доплеровское уширение:

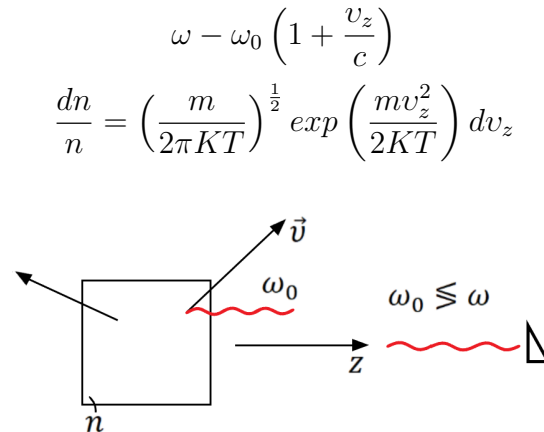


Рис. 4.5: Излучение атома

$$\frac{S(\omega)d\omega}{I_0} = \frac{dn}{n} = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{mv_z^2}{2KT}\right) dv_z$$

$$v_z = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right) c = \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) c$$

$$dv_z = \frac{c}{\omega_0} d\omega$$

$$\frac{S(\omega)d\omega}{I_0} = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{c}{\omega_0} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2 c^2}{2KT\omega_0^2}\right) d\omega$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2KT}{m}} - \text{ширина линии}$$

$$S(\omega)d\omega = I_0 \frac{1}{\Delta\omega\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right) d\omega$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\langle v \rangle}{c} \sim \frac{10^3}{10^8} \sim 10^{-5}$$

$$\omega_0 \sim 10^{16} \frac{1}{c}$$

$$\Delta\omega \sim 10^{-5} \cdot 10^{16} = 10^{11} c^{-1}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2KT}{m}} \approx \omega_0 \frac{\langle v \rangle}{c}$$

**Итог:** Существует два механизма уширения спектральной линии. Оба механизма конкурируют. Ударный (однородный) механизм приводит к сохранению контура линии. Контур спектральной линии остается Лоренцевским. И существует механизм, связанный с эффектом Доплера (неоднородный). Контур линии получается гауссовским. Но ширина линии зависит от температуры.



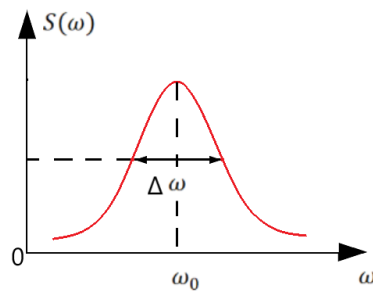


Рис. 4.6: Спектральная линия  $S(\omega)$  имеет гауссовский вид

### Фазовая модуляция и уширение спектра.

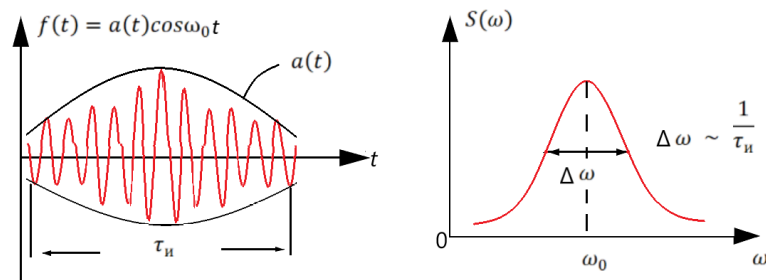


Рис. 4.7: Спектрально-ограниченный импульс

$\tau_n$  — длительность импульса.

Пример спектрально-неограниченного импульса:

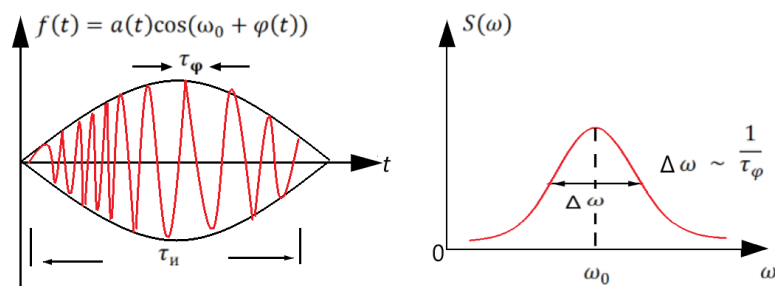


Рис. 4.8: Фазово-модулированный импульс

## Глава 3. Интерференция света.

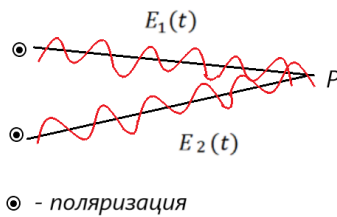
Интерференция света - это явление наложения волн, приводящая к перераспределению энергии в пространстве.

## Лекция 5

### Двухволновая интерференция.

#### Интерференция волн:

- 1) Электромагнитные (радио, свет)
- 2) Упругие
- 3) Поверхностные
- 4) Волны материи (де Бройля)
- 5) Тепловые
- 6) Гравитационные



$$E_{1+2}(t) = E_1(t) + E_2(t)$$

$$\overline{E_{1+2}^2} = \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} + 2\overline{E_1 E_2}$$

Рис. 5.1: Интерференция двух волн

$$\overline{E^2} = \int_0^{\tau_{np}} E^2(t) dt$$

$$\tau_{np} \geq 10^{-12} c$$

$$E_1(t) = a_1(t) \sin[\omega_0 t - k_0 r_1 + \phi_1(t)]$$

$$E_2(t) = a_2(t) \sin[\omega_0 t - k_0 r_2 + \phi_2(t)]$$

$$I_1 = \frac{a_1^2}{2}$$

$$I_2 = \frac{a_2^2}{2}$$

$$[\omega_0 t - k_0 r_1 + \phi_1(t)] = \Phi_1$$

$$[\omega_0 t - k_0 r_2 + \phi_2(t)] = \Phi_2$$

$$\overline{E_1 E_2} = 2a_1 a_2 \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 = 2a_1 a_2 \cos(k_0(r_2 - r_1) + \Phi_1 - \Phi_2) - 2a_1 a_2 \cos(2\omega_0 + \dots)$$

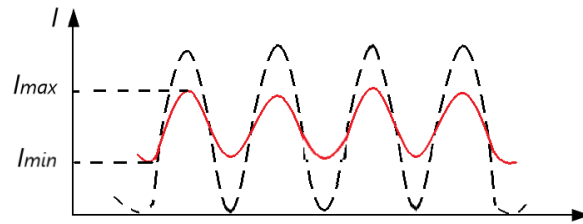


Рис. 5.2: Видность интерференционной картины

$$\overline{E_1 E_2} = 2a_1 a_2 \overline{\sin \Phi_1 \sin \Phi_2} = 2a_1 a_2 \overline{\cos(k_0(r_2 - r_1) + \Phi_1 - \Phi_2)} - 2a_1 a_2 \underbrace{\cos(2\omega_0 + \dots)}_{=0}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k_0(r_2 - r_1) + \Phi_1 - \Phi_2]$$

$\Delta r = r_2 - r_1$  - разность хода лучей.

$$V(\tau) = \frac{I_{\max}(\tau) - I_{\min}(\tau)}{I_{\max}(\tau) + I_{\min}(\tau)}$$

$0 \leq V \leq 1$  - безразмерная величина

Интенсивности *min* и *max* - соседние.

Время задержки:  $\tau = \frac{r_2 - r_1}{c}$

Если  $I_1 = I_2 = I_0$  и  $\Phi_1 - \Phi_2 = 0$ ,  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ,  $k_0 \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda_0} c\tau = 2\pi\nu_0\tau = \omega_0\tau$

То:

$$I = 2I_0 [1 + \cos(\omega_0\tau + \Phi_1 - \Phi_2)] - \text{интенсивность интерференционной картины}$$

## Интерферометр Майкельсона.

Конструктивно состоит из светоделительного зеркала, разделяющего входящий луч на два, которые в свою очередь, отражаются зеркалом обратно. На полупрозрачном зеркале разделённые лучи вновь направляются в одну сторону, чтобы, смешавшись на экране, образовать интерференционную картину (рис. 41).

## Интерферометр Маха-Цендера.

На входе интерферометра находится полупрозрачное зеркало, расщепляющее световой поток на два луча. Они сводятся вместе после отражения от двух непрозрачных зеркал в четвёртом зеркале. Зеркала интерферометра образуют параллелограмм. Для проведения исследований в одно из плеч интерферометра помещают ёмкость с исследуемым газом и компенсаторы (рис. 42).

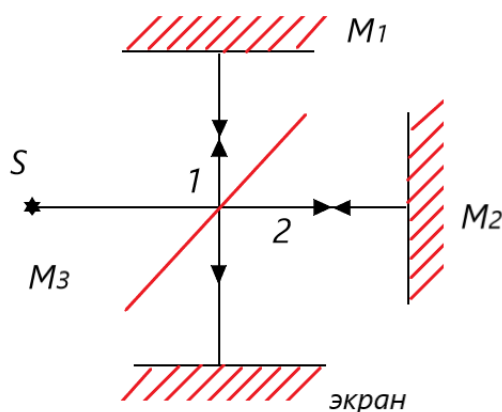


Рис. 5.3: Интерферометр Майкельсона (схема)

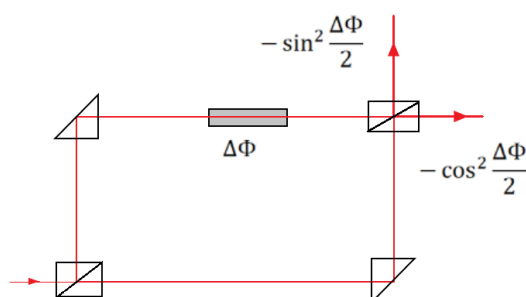


Рис. 5.4: Интерферометр Маха-Цендера (схема)

## Связь интерференционных полос с параметрами системы.

Считаем  $a_1 + a_2 = a = \text{const}$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$I = 2I_0 [1 + \cos(k_0(r_2 - r_1))]$$

Положение максимума:

$$k_0(r_2 - r_1) = 2\pi m$$

где  $m = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$  - порядок интерференционного максимума.

$$I_{\max} = 4I_0$$

При  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$r_2 - r_1 = \lambda_0 m$$

Положение минимума:

$$k_0(r_2 - r_1) = 2\pi m + \pi$$

При  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$r_2 - r_1 = \lambda_0 m + \frac{\lambda_0}{2}$$

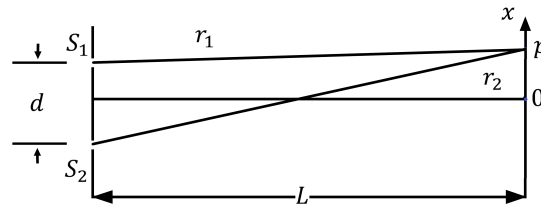


Рис. 5.5: Интерференционные полосы Юнга

$$L \gg x \gg d$$

$$\frac{L}{x} \approx \frac{r_2 - r_1}{d}$$

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi d}{\lambda_0 L} x \right) \right]$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} (r_2 - r_1) = \frac{2\pi d}{\lambda_0 L} x$$

$$\frac{2\pi D}{\lambda_0 L} x_m = 2\pi m$$

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0 L}{d} - \text{расстояние между экстремумами}$$

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda_0}{d} - \text{угловая ширина полосы}$$

$$S(\lambda) = I_0 g(\lambda)$$

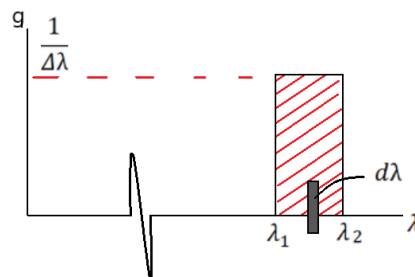


Рис. 5.6: Распределение интенсивности по спектру. Ширина линии

$$I_0 = \int S(\lambda) d\lambda = I_0 g \Delta \lambda$$

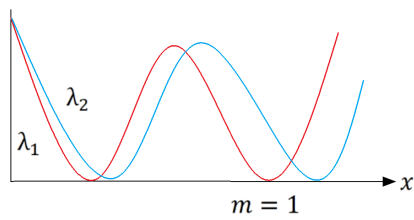


Рис. 5.7: Смазывание

$$dI_0 = Sd\lambda$$

Условие наложения максимумов:

$$m_m \lambda_2 = \lambda_1 (m_{m+1})$$

$(r_2 - r_1)_{max} = m_m \lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}$  - максимальная разность хода.

$$m_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sim \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}$$

$$I(\tau) = 2I_0 = [1 + \cos(\omega\tau)]$$

где  $\tau = \frac{\Delta r}{c}$

$$I_0 \rightarrow dI_0(\tau) = S(\omega)d\omega$$

$$I(\tau) = \int dI(\tau) = 2I_0 + \int_0^\infty S(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

## Лекция 6

### Спектр и интерференционные картины (опыт Юнга).

$l_k = c\tau_k$  — длина когерентности

$$l_k = (r_2 - r_1)_{\max} \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

$$\Delta\lambda = 700 - 400 \text{ нм}$$

$$l_k \sim 2\lambda_0$$

Ширина линии у лазеров:

$$\Delta\nu \sim 10^7 \text{ Гц}$$

$$l_k \sim 30 \text{ м}$$

$$\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$$

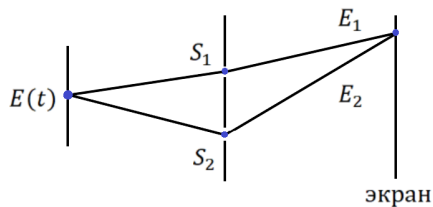


Рис. 6.1: Опыт Юнга

$$E_1(t) = E(t - \Delta t)$$

$$E_2(t) = E(t - \Delta t + \tau)$$

$$I(\tau) = \overline{E_{1+2}^2} = I_0 + I_0 + \overline{2E(t)E(t + \tau)}$$

$B(\tau) = \overline{E(t)E(t + \tau)}$  — функция автокорреляции поля

Если  $\tau = 0$ , то  $B(0) = I_0$

Если  $\tau \rightarrow \infty$ , то  $B(\infty) \rightarrow 0$

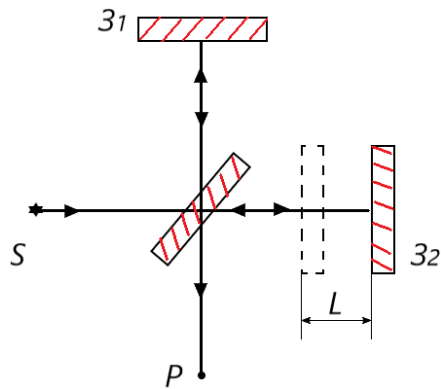
$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \int_0^\infty D(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

$$B(\tau) = 2 \int_0^\infty D(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

Автокорреляционная функция в поле есть Фурье-образ спектра.

$$S(\omega) = I_0 \delta(\omega - \omega_0)$$

$$B(\tau) = I_0 \cos(\omega_0\tau)$$



$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

$$B(\tau) \rightarrow S(\omega)$$

Рис. 6.2: Фурье-спектроскопия

## Понятие о Фурье-спектроскопии. Измерение малых перемещений.

$\Delta\omega$  - разность частот.

Свет от исследуемого источника  $s$  направляется в интерферометр, в одном из плеч которого находится движущееся с постоянной скоростью зеркало  $Z_2$ . Штриховой линией показано его начальное положение, при котором оптические пути обоих лучей одинаковы. Смещению зеркала на расстояние  $L$  соответствует временная задержка  $\tau = \frac{2L}{c}$ . Приемник, находясь в точке  $P$ , будет измерять интерферограмму  $I(\tau)$ , поскольку при движении зеркала полосы будут также перемещаться. Сигнал обрабатывается компьютером, который вычисляет  $S(\omega)$ .

$$\Delta r = 2L \text{ (потому что свет проходит до зеркала и обратно)}$$

где  $L$  - размер смещения зеркала.

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau} \sim \frac{c}{2L}$$

### Измерение малых перемещений.

Есть интерферометр Майкельсона. Используем в качестве источника света лазер. И записываем интерференционную картину, которая имеет гармонический вид. Если мы хотим измерить перемещение, то мы видим, что изменение расстояния на порядка длины волны приводит к тому, что интенсивность меняется от минимума до максимума.

$$\Delta \frac{I}{I_0} = k\Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\Delta I}{I} \sim 0.1 \text{ мкм} 10^{-7-8} = 1 - 10 \text{ фм}$$



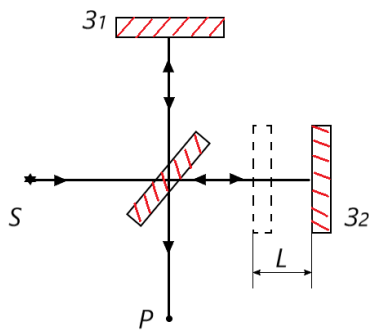


Рис. 6.3: Интерферометр Майкельсона

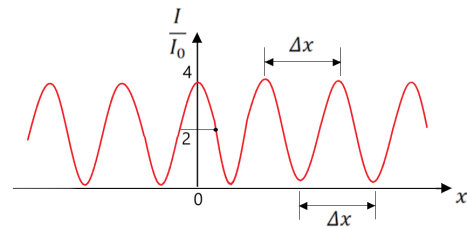


Рис. 6.4: Полосы Юнга

**Пространственная когерентность. Угол и радиус когерентности. Звёздный интерферометр Майкельсона. Функция пространственно-временной корреляции.**

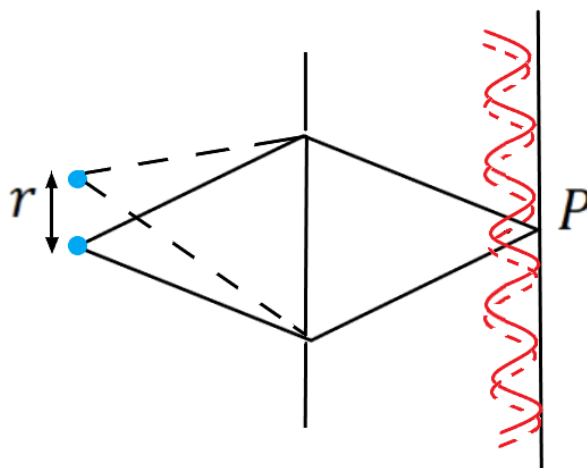


Рис. 6.5: Пространственная когерентность

Отдельные участки источника света возбуждают волны, фазы которых никак не связаны между собой. Поэтому интерференционная картина, возникающая на экране, будет наложением картин, создаваемых каждым из участков в отдельности. Различия в разности хода, а следовательно, и в разности фаз для разных точек протяженного источника приведут к ухудшению видимости интерференционной картины. Если же изменения разностей хода (разностей фаз) так малы, что это приведет к незначительным изменениям интенсивностей, то будет наблюдаться четкая интерференционная картина.

#### **Звёздный интерферометр Майкельсона.**

Имеется удаленный источник света, например, звезда. От нее мы хотим получить интерференцию. Проведем эксперимент с помощью опыта Юнга. Считаем, что ис-

точник удален, а значит лучи идут параллельно. Поставив экран, получим два параллельных пучка. Считаем, что отверстия многим больше длин волн. Но интерференции не будет, так как лучи не пересекаются. Для того, чтобы получить интерференцию, поставим линзу. Тогда эти лучи сойдутся в фокусе линзы. И соответственно в фокусе линзы будет наблюдаться интерференционная картина (рис. 51).

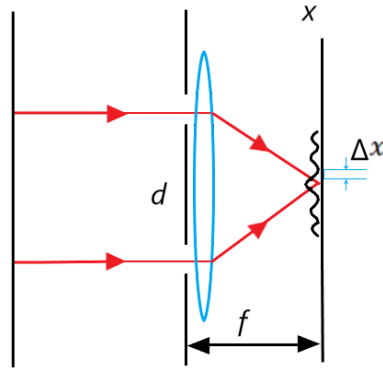


Рис. 6.6: Звёздный интерферометр Майкельсона (схема)

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} - \text{угловая ширина интерференционных полос}$$

где  $d$  - расстояние между отверстиями

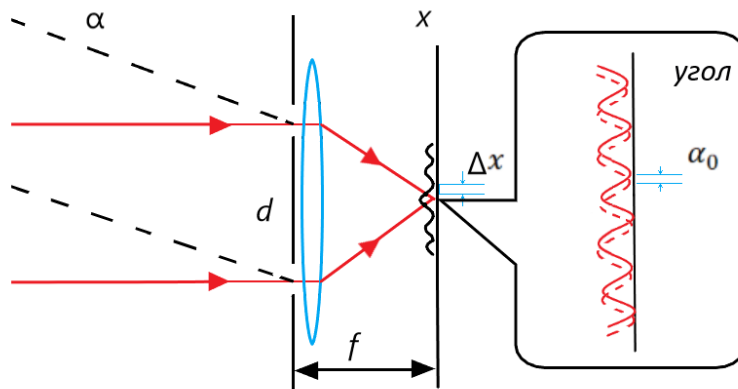


Рис. 6.7: Звёздный интерферометр Майкельсона (схема)

Предположим, есть еще один источник света, направленный под углом, тогда:

$$\Delta x = \alpha f = \frac{\lambda}{d} f$$

где  $f$  - фокусное расстояние линзы

Условие для наложения полос:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{2d}$$

При увеличении  $d$ , на каком-то этапе произойдет смазывание картины. Такое  $d$ , на котором произошло смазывание интерференционной картины, максимумы наложались на минимумы, называют **радиусом пространственной когерентности**.

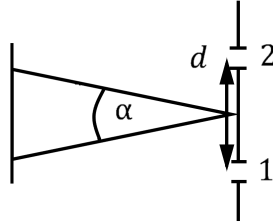


Рис. 6.8: Увеличение радиуса когерентности с удалением от источника света

$$d = \frac{\lambda}{2\alpha} = r_k$$

$r_k$  - радиус когерентности поля

Чем ближе источник света к точечному, тем больше радиус когерентности.

При  $d > r_k$  - волны некогерентны.

При  $d < r_k$  - волны когерентны.

$$r_k = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

$$\alpha = \frac{r}{L}$$

$$r_k = \frac{\lambda L}{2r}$$

**Пространственно-временная когерентность.**

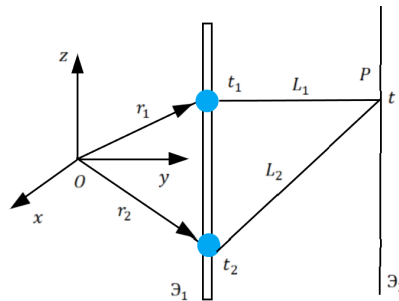


Рис. 6.9: Пространственно-временная когерентность

$$t_1 = t - \frac{L_1}{c}$$

$$t_2 = t - \frac{L_2}{c}$$

$\Gamma = \overline{E(r_1, t_1) \cdot E(r_2, t_2)}$  — функция пространственно-временной корреляции

$$\Gamma = \Gamma(\Delta \vec{r}, \Delta t)$$

где  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ;  $\Delta t = t_1 - t_2$

## Лекция 7

### Методы деления волнового фронта и амплитуды.

Существует две основные схемы интерференции: **деление волнового фронта** и **деление амплитуды**.

#### Деление волнового фронта.

Идея:

Из волнового фронта волны вырезать две области и заставить эти лучи интерферировать.

*Пример:*

- Опыт Юнга
- звездный интерферометр Майкельсона

#### Деление амплитуды.

Идея:

Лазер проходит через делительную пластину на два плеча интерферометра, затем две волны встречаются и интерферируют. Мы видим на экране интерференционную картину и она исчезает при перекрытии одного из лучей.

*Пример:*

- интерферометр Майкельсона
- интерферометр Маха-Цендера
- пластинки, пленки
- интерферометр Фабри-Перо

### Интерференция в пластинках и плёнках. Полосы равного наклона и равной толщины. Оптический клин. Кольца Ньютона.

Есть источник света  $S$ . Есть пластинка, на которой происходит отражение от одной грани, на этой же грани происходит преломление, появляется второй пучок света. Он еще раз преломляется на этой же грани и уходит в точку  $P$ , где они должны встретиться, так как была интерференция (рис. 55).

Будем считать, что источник света далеко, и падают параллельные лучи. Так как лучи параллельные, то интерференцию можно наблюдать в бесконечности, или используя объектив, который сведет эти лучи в одну область (рис. 56).

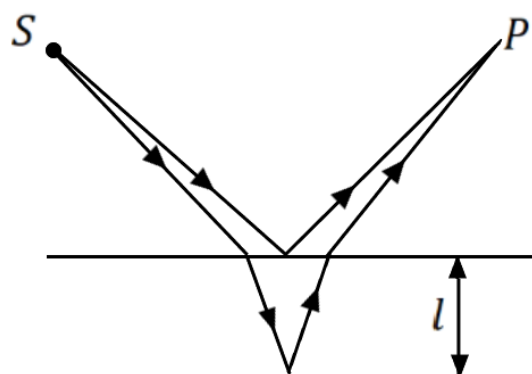


Рис. 7.1: Интерференция в пленках и пластинках

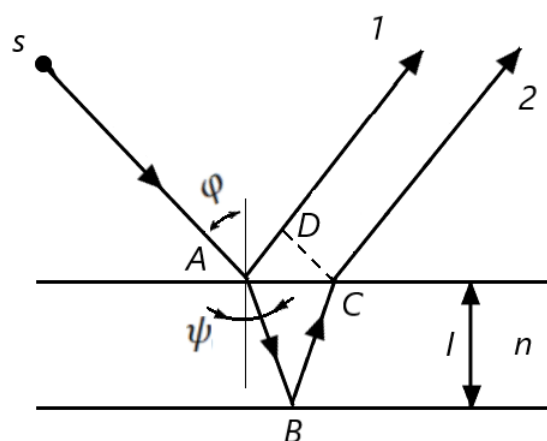


Рис. 7.2: Полосы равного наклона

Разность хода:

$$\Delta r = \Delta = (AB + BC)n - AD + \frac{\lambda_0}{2}$$

В данной модели, при отражении из оптически менее плотной среды от оптически более плотной среды, появляется у отраженной волны сдвиг фаз на  $\pi$ , что эквивалентно  $\frac{\lambda_0}{2}$ .

$$\Delta = \frac{2l}{\cos \psi} n - \frac{2l \sin \psi}{\cos \psi} \sin \phi + \frac{\lambda_0}{2}$$

где  $AB = \frac{l}{\cos \psi}$

По закону Снеллиуса:

$$\sin \phi = n \sin \psi$$

Подставим  $\sin \phi$  в формулу:

$$\Delta = \frac{2ln}{\cos \psi} \cos^2 \psi + \frac{\lambda_0}{2} = 2ln \cos \psi + \frac{\lambda_0}{2}$$

Таким образом, разность хода пропорциональна толщине пластинки, пропорциональна углу преломления косинуса. И в бесконечности мы увидим точку, интенсивность которой будет определяться разностью хода. Разность хода зависит от угла  $\psi$ . Из-за зависимости от угла падения эту интерферограмму называют полосами «равного наклона».

Рассмотрим случай, когда источник света не на бесконечности (лучи не параллельны). Из точки  $s$  выходят два луча. Один дважды преломляется и проходит через точку  $P$ . Второй луч сразу падает в точку  $P$ , где эти два луча встречаются и происходит интерференция. То есть, интерференция происходит на поверхности пленки (рис. 57).

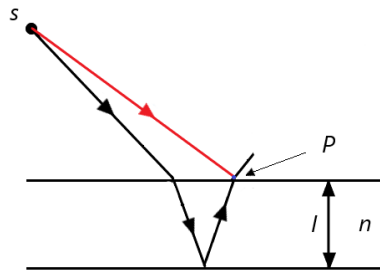


Рис. 7.3: Полосы равной толщины

Разность хода:

$$\Delta = 2ln \cos \psi + \frac{\lambda_0}{2}$$

Условия для максимумов и минимумов:

$$\Delta = 2ln \cos \psi + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$$

Рассмотрим интерференцию на клиновидной пластинке. Если у пластинки есть клин, то интерференция будет зависеть от толщины этого клина. В каждой точке клина мы можем наблюдать полосы «равной толщины». То есть, в зависимости от толщины, мы будем видеть определенную интерференционную картину (рис. 58).

Условия интерференции для клина:

$$l = \alpha x$$

$$\cos \psi \approx 1$$

$$\Delta = 2n\alpha x + \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\Delta = m\lambda_0$$

$$m\lambda + 0 = 2n\alpha x + \frac{\lambda_0}{2}$$

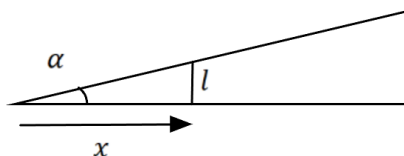


Рис. 7.4: Оптический клин

Условие для максимумов:

$$X_m = \frac{(m - \frac{1}{2})\lambda_0}{2n\alpha}$$

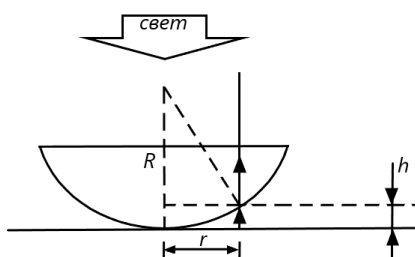


Рис. 7.5: Кольца Ньютона

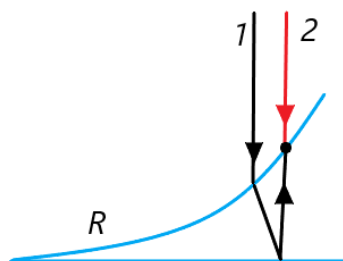


Рис. 7.6: Кольца Ньютона (схема)

Условие для наблюдения интерференции:

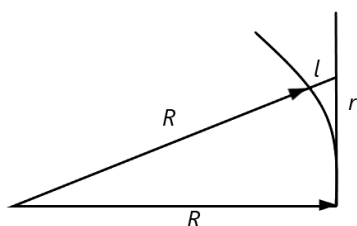


Рис. 7.7: Кольца Ньютона

Разность хода:  $r \ll R$

$$l = \sqrt{R^2 + r^2} - R = R\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}} - R = \frac{r^2}{2R}$$

$$\Delta = 2l + \frac{\lambda_0}{2} = (m + \frac{1}{2})\lambda_0$$

(усл. для появл. темного кольца)

$$\frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}$$

$r_m = \sqrt{mR\lambda_0}$  — радиус кольца, отвечающий за минимум интерференционной картины

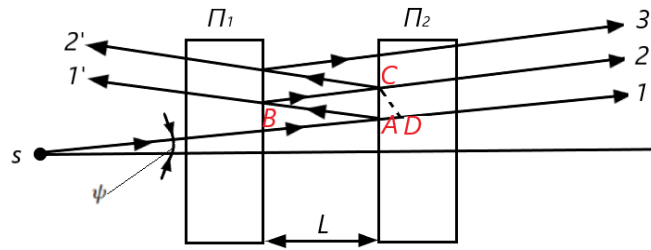


Рис. 7.8: Интерферометр Фабри-Перо

## Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри-Перо. Формула Эйри.

Две пластины с высоким коэффициентом отражения. Пластины строго параллельны. Падает луч света. Луч отражается от одной пластины (часть проходит дальше) к другой. В данном случае, интерференция для каждой точки будет бесконечная (рис. 62).

Разность хода:

$$\Delta = AB + BC - AD = 2L \cos \psi$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} L \cos \psi$$

Используем комплексную форму записи для электрического поля:

$$E_0 = a_0 e^{i\omega t}$$

$$E_r = r E_0$$

$$E_t = t E_0$$

$$E_1 = E_0 t^2$$

$$E_2 = E_0 t r^2 t e^{i\Phi}$$

$$E_3 = E_0 t^2 r^4 e^{i2\Phi}$$

$$E = E_0 t^2 (1 + r^2 e^{i\Phi} + r^4 e^{i2\Phi}) = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\Phi}}$$

Интенсивность есть квадрат амплитуды поля.

$$I = \frac{1}{2} E E^*$$

$$R = r^2$$

$$I_0 = \frac{a_0^2}{2}$$

$$T = t^2$$

$$R + T = 1$$

$$I(\Phi) = I_0 \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\frac{\Phi}{2})} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\frac{\Phi}{2})} \quad (1)$$

### (1) - формула Эйри

Введем величину  $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$  - фактор резкости

Фактор резкости будет отвечать за то, как выглядят пропускания интерферометра.

Разрешающая сила интерферометра (от каждой длины волны будет наблюдаться своя система концентрических колец, так как  $\Phi$  зависит от длины волны).



Ширина полосы пропускания колец интерферометра Фабри-Перо -  $\Delta\Phi$ .

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\Phi}{2})}$$

$$1 = F \sin^2(\frac{\Delta\Phi}{2}) = F \frac{\Delta\Phi^2}{4}$$

$$\Delta\Phi = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \psi$$

$$\delta\Phi = -\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} 2\pi L, \cos \psi \approx 1$$

$$|\delta\Phi| = \Delta\Phi$$

$$\delta\lambda \frac{2\pi}{\lambda_0} L = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

$$\delta\lambda = \frac{2\lambda_0}{L\sqrt{F}}$$

Разрешающая сила интерферометра:

$$\frac{\lambda_0}{\delta\lambda} \sim \frac{1}{\sqrt{F}}$$

## Лекция 8

### Глава 4. Дифракция света.

Если бы существовала плоская волна, то перед нами был бы объект, у которого есть бесконечный фазовый фронт.

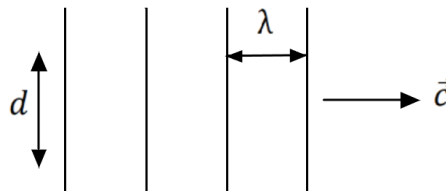


Рис. 8.1: Положения фазового фронта в разные моменты времени

Воспользуемся представлением Гюйгенса:

Распространение волны можно трактовать следующим кинематическим образом. Идет волна. Все точки, до которых дошел волновой фронт, являются источником вторичных волн. Возьмем удаленную точку наблюдения  $P$ . Действие всех вторичных источников подлежит учету интерференции всех вторичных волн источника. Если у нас будет два точных источника, то интерференция, приводящая к взаимному погашению обеих волн, сводится к тому, что разность хода равна целому числу полуволн (рис. 64).

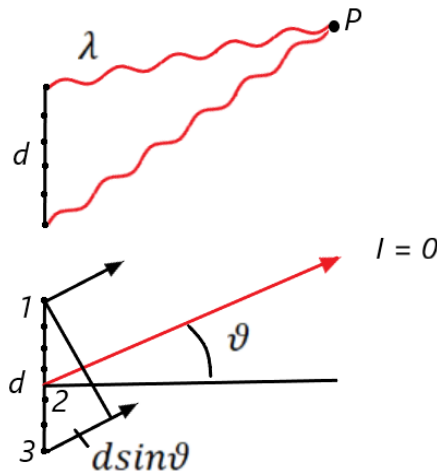


Рис. 8.2

$\theta$  - угол дифракции. Разность хода между волнами от двух источников равна  $d \sin \theta$ . Разность хода между волнами от  $n$  источников. Для того, чтобы источники погасили друг друга, необходимо, чтобы сдвиг фазы колебания в точках 1 и 3 был

равен длине волны. Потому что сдвиг фазы между 1 и 2 точкой - полволны, и тогда эта пара источников друг друга погасит, и так далее (рис. 64).

Оценим угол  $\theta$ :

$$\theta = \sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

Световой пучок или волна, с ограниченным размером волнового фронта  $d$ , пытается уйти под разными углами. Причем граница этой условной тени определяется соотношением  $\frac{\lambda}{d}$ .

Если размер волнового фронта будет уменьшаться, то угол дифракции будет увеличиваться.

Оценим расстояние:

Есть световой пучок. Изначально он распространялся бы прямолинейно, если величина  $d$  была бы очень большой. Но если  $d$  сравнима с длиной волны, то начнется дифракция. Световой пучок постепенно зайдет в область геометрической тени. На каком расстоянии произойдет существенное искривление волнового фронта? Расстояние  $L_0$  - дифракционная длина (рис. 65).

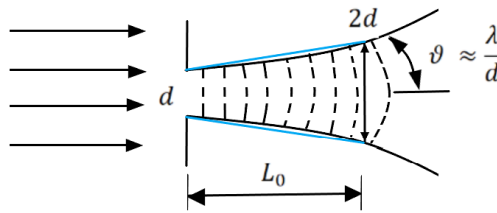


Рис. 8.3

Световые пучки претерпевают сильное искривление светового фронта на расстоянии, которое есть дифракционная длина.

$$2d = d + \theta L_0$$

$$L_0 = \frac{d}{\theta} = \frac{d^2}{\lambda}$$

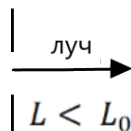


Рис. 8.4

Луч может отражаться, преломляться, но мы не учитываем дифракцию, так как  $L < L_0$  (рис. 66).

Оценка:

$$d = 2\text{мм}, \lambda = 500\text{нм}$$

$$L_0 = \frac{(2 \cdot 10^3)^2}{0,5} \text{мкм} = 8 \cdot 10^6 \text{м.}$$

Оценка (рис. 67):

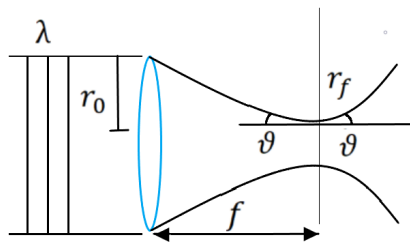


Рис. 8.5

$$\frac{r_0}{f} = \theta = \frac{2\lambda}{2f}$$

$r_f$  - радиус фатального пятна

$$r_f = \frac{\lambda f}{r_0}$$

## Принцип Гюйгенса-Френеля.

Представим, что есть точечный источник света в точке  $P_0$ . Он излучает монохроматическую волну с длиной  $\lambda$ . Все происходит в вакууме. Возмущение в точке  $p$  будет равно:

$$E(p) = \frac{c}{r} e^{i(\omega t - kr)} = A e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{c}{r} e^{-ikr}$$

Интенсивность в точке  $A$  будет равна:

$$I = |A|^2 = \frac{c^2}{r^2}$$

где  $c$  - константа, зависящая от мощности источника.

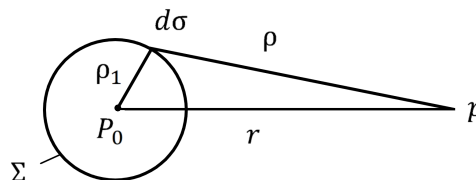


Рис. 8.6

Окружим для простоты сферической поверхностью точку  $P_0$ . На каждом фрагменте этой поверхности  $d\sigma$  (площадь поверхности =  $\Sigma$ ) «помещаются» вторичные источники, которых в природе нет. Если расстояние до фрагмента площади известно, то здесь волна будет равна  $\frac{c}{\rho_1} e^{i(\omega t - k\rho_1)}$ . Вторичный источник «светит» в точку  $p$ , которая удалена на расстоянии  $\rho$ . Результат поля в точке  $p$  есть результат интерференции вторичных источников, которые расселены по поверхности этой сферы (рис. 68).

$$A(p) = \int_{\Sigma} \frac{c}{\rho_1} e^{-ik\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\phi) d\sigma = \frac{c}{r} e^{-ikr} \quad (2)$$

$K(\phi) \sim \frac{1}{\lambda}$  - коэффициент наклона.

## (2) - дифракционный интеграл Френеля.

Пусть в точке  $P_0$  имеется источник света и пусть имеется какой-то экран с отверстием. Наблюдатель находится в точке  $p$ .  $A(p) = ?$ . Часть волнового фронта зажата. Применим дифракционный интеграл Френеля.

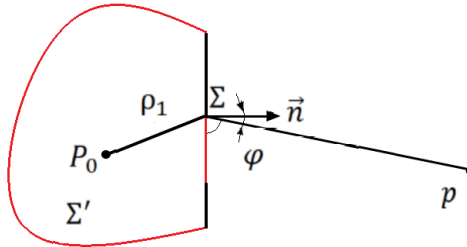


Рис. 8.7: Задача дифракции

Окружим источник  $P_0$  замкнутой поверхностью  $\Sigma'$ . Интересующее нас отверстие -  $\Sigma$ . Воспользуемся представлением вторичных источников. Так как экран непрозрачный, то вклад вторичных источников остается только на непокрытой части экрана (рис. 69).

## Зоны Френеля.

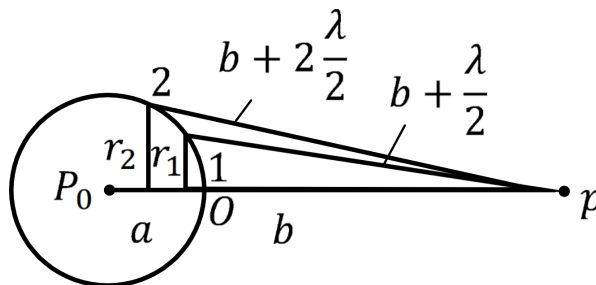


Рис. 8.8: Зоны Френеля

Окружаем точку  $P_0$  сферой с радиусом  $a$ . Вырежем «чашечку» радиуса (внутреннего)  $r_1$ , проведя первый отрезок, длиной  $b + \frac{\lambda}{2}$  в точку 1. Это будет **первой зоной Френеля**. Проведем второй отрезок, длиной  $b + 2\frac{\lambda}{2}$  в точку 2. Это будет кольцо с наружным радиусом  $r_2$  первой зоны Френеля (рис. 70).

Вычисляем радиус первой зоны:

Запишем теорему Пифагора (рис. 71):

$$a^2 - (b - \delta)^2 = r_1^2 = (b + \frac{\lambda}{2})^2 - (b + \delta)^2$$

$$a^2 - a^2 + 2a\delta - \delta^2 = r_1^2 = b^2 + b\lambda + \frac{\lambda^2}{4} - b^2 - 2b\delta - \delta^2$$

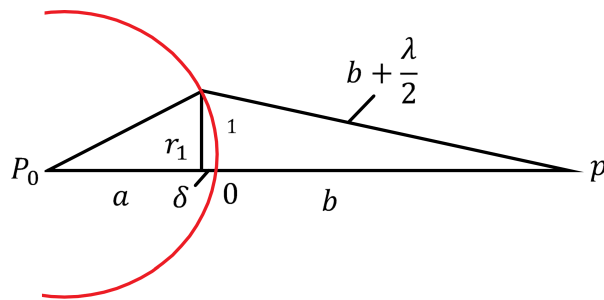


Рис. 8.9

$\delta^2, \frac{\lambda^2}{4}$  - можно пренебречь.

Радиус:

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda$$

Внешний радиус  $r_m$ :

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda$$

Площадь:

$$\sigma_1 = \pi r_1^2$$

Площадь (внешн.):

$$\sigma_m = \pi(r_m^2 - r_{m-1}^2) = \sigma_1$$

### Метод векторной диаграммы.

Есть амплитуда  $A$

$$A = \frac{ce^{-ikr}}{r}$$

Поставим в соответствие вектор (рис. 72).

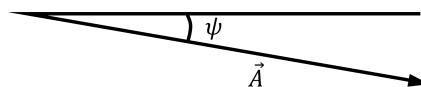


Рис. 8.10

$$|\vec{A}| = \frac{c}{r}$$

$$\psi = kr$$

Тогда:

$$|d\vec{A}| = \frac{c}{s} e^{-ika} d\sigma$$

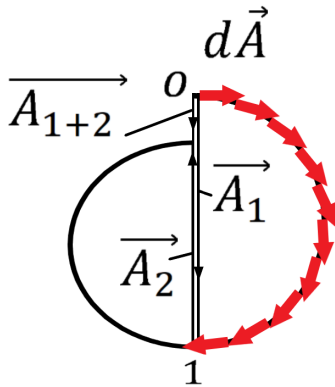


Рис. 8.11: Субзоны спирали

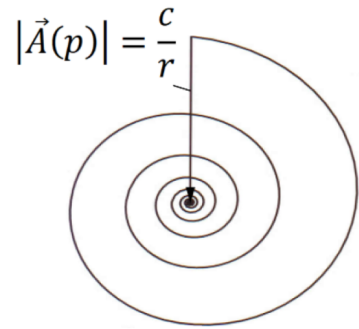


Рис. 8.12: Спираль Френеля

Разобьем первую зону на субзоны. При интегрировании, каждой площадке будет соответствовать свой вектор. Вектор постепенно будет поворачиваться (сдвиг фазы  $= \pi$ ). С каждой зоной радиус окружности будет уменьшаться. В итоге мы получим спираль Френеля (рис. 73).

Амплитуда в точке  $p$  будет зависеть от того сколько открыто или закрыто зон. Радиусы зон известны, значит, можно управлять светом, прикрывая или открывая зоны (рис. 74).

## Дифракция на круглом отверстии.

Есть отверстие  $r_0$ . Падает световой пучок.  $a = \infty$  (рис. 75). Сколько открыто зон Френеля?

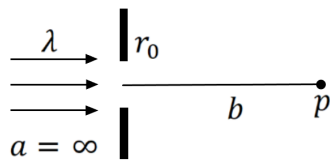


Рис. 8.13: Зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}} =_{a \rightarrow \infty} \sqrt{bm\lambda} = r_0$$

Тогда число зон  $m$  :

$$m = \frac{r_0^2}{\frac{\lambda}{b}}$$

$\frac{r_0^2}{\lambda}$  — дифракционная длина пучка. Если  $b \ll \frac{r_0^2}{\lambda}$ , то число зон, открытых для наблюдателя в точке  $p$ , большое. Если  $b \gg \frac{r_0^2}{\lambda}$ , то число зон, открытых для наблюдателя в точке  $p$ , маленькое и будет открыта всего одна зона.

**Изменение интенсивности как функции расстояния до экрана (рис. 76).**

$L_0$  - дифракционная длина

$I_0$  - интенсивность падающего света

$$A_0 = \frac{c}{r} = |\vec{A}(p)|.$$

Одна зона будет при  $b = L_0$ .

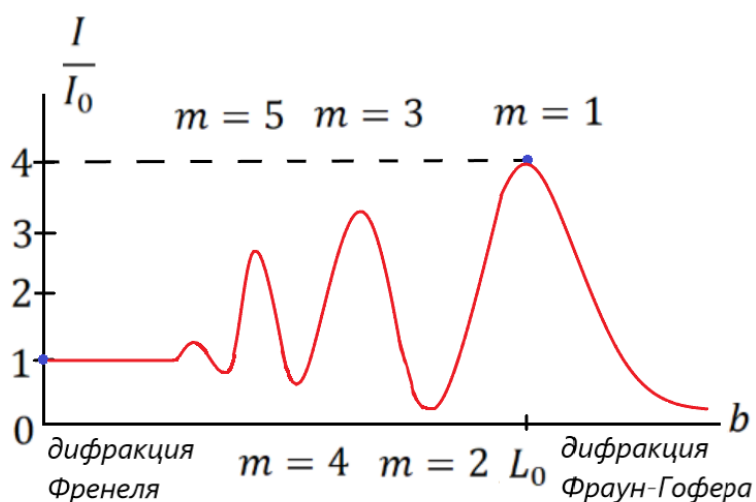


Рис. 8.14: Зоны Френеля

Зон будет много при  $\frac{I}{I_0} \rightarrow 1$

### Зонная пластинка. Линза.

Зонная пластинка открывает все нечетные зоны ( $\vec{A}_1, \vec{A}_3, \dots$ ). Поэтому, если подставить зонную пластинку, то произойдет усиление света во много раз.

$$\vec{A}_m = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_5 + \dots$$



## Лекция 9

### Дифракция светового пучка.

#### Дифракция на крае экрана. Зоны Шустера.

Есть точечный источник в точке  $P_0$ . Есть край экрана и лезвие бритвы. Нужно взять расстояние  $a$ , расстояние  $b$ , а затем перемещаться так, чтобы набег фазы по сравнению с  $b$  был  $b + \frac{\lambda}{2}$ . Эти линии будут «резать» сферическую поверхность на «дольки». Эти «дольки» и будут называться **зонами Шустера**.

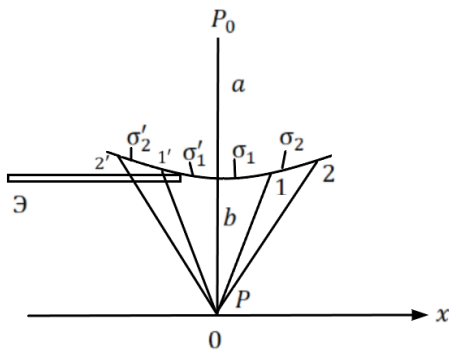


Рис. 9.1: Зоны Шустера

Зоны Шустера обладают площадями  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , но площади этих зон монотонно убывают по мере увеличения номера зоны.

Если пойти вправо, то точка между  $\sigma'_1$  и  $\sigma_1$  переместится в точку  $\sigma_1$ , а точка  $\sigma'_1$  сдвинется вправо. Чем больше уходить вправо, тем меньшее число зон будет перекрывать бритва. И, наоборот, если пойти влево, то все большее количество зон будет перекрываться. В процессе движения будет осцилляция. Эти осцилляции получаются с помощью спирали Корню.

#### Интегральная теорема Киргхофа.

В волне колеблются напряженности электрического и электромагнитного полей. Будем пользоваться скалярным представлением о том, что есть некоторая функция  $U$ :

$$U(x, y, z) = u(x, y, z)e^{i\omega t}$$

$U(x, y, z)$  есть некоторая компонента либо электрического, либо магнитного полей, которая подчинена в своем распространении волновому уравнению. Речь идет о волне, которая распространяется в свободном пространстве и у этой волны есть скорость света в вакууме.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \Delta U$$

$$\boxed{\Delta U + k^2 U = 0} \text{ - уравнение Гельмгольца}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Каждое уравнение при определенных граничных условиях имеет одно единственное решение.

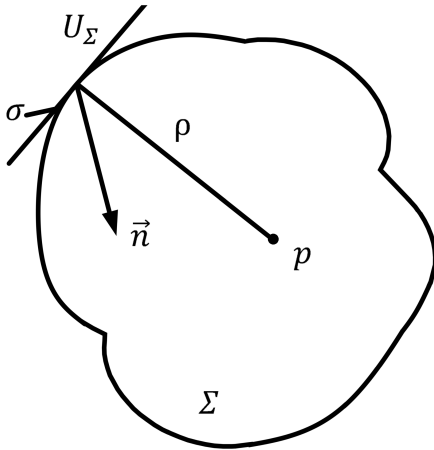


Рис. 9.2

Возьмем замкнутую поверхность  $\Sigma$ . Пусть на поверхности задано возмущение  $U_\Sigma$ . В точке  $p$  на поверхности  $\Sigma$  мы можем записать значение  $U(p)$  в виде интегрального соотношения. Если на поверхности есть возмущение, то оно обязательно, спустя какое-то время прибежит в точку  $p$  (рис. 78).

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ U_\Sigma \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{\partial U_\Sigma}{\partial n} \right] d\sigma$$

### Интегральная теорема Киргофа:

Есть дифракционный экран. Точка наблюдения  $p$ . Возмущение на поверхности  $U_\Sigma$  известно.  $U(p) = ?$  Согласно решению уравнения Гельмгольца, окружим точку  $p$  большой замкнутой поверхностью. Будем вычислять интеграл по всей замкнутой поверхности (рис. 79). Воспользуемся приближенными граничными условиями Киргофа.

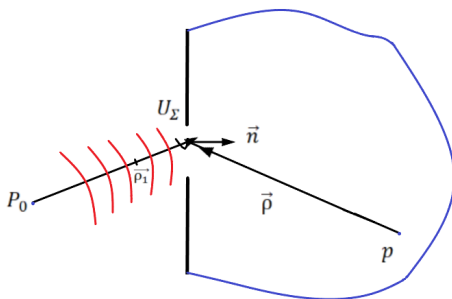


Рис. 9.3

$$U_\Sigma = \frac{c}{\rho_1} e^{-ik\rho_1}$$

Тогда возмущение в точке  $p$ :

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ \frac{ce^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{ce^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \right) \right] d\sigma$$

## Дифракционная формула Френеля-Киргхофа.

Возьмем производную:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{ce^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \cos(\widehat{\vec{n}\vec{\rho}_1}) = - \left( ik + \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{ce^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos \Phi_1 \approx -ik \frac{ce^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos \Phi_2$$

Производная по нормали:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n}\vec{\rho}})}_{-\cos \phi} = \\ &= - \left( ik + \frac{1}{\rho} \right) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (-\cos \phi) \approx ik \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cos \phi \end{aligned}$$

**Дифракционная формула Френеля-Киргхофа:**

$$U(p) = \int_{\Sigma} \frac{ce^{-k\rho_1}}{\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} i \underbrace{\left[ \frac{\cos \phi_1 + \cos \phi}{2\lambda} \right]}_{K(\Phi)} d\sigma$$

где  $K(\phi) = \frac{i}{2\lambda}(1 + \cos \phi)$  - коэффициент наклона.

*Замечание:*

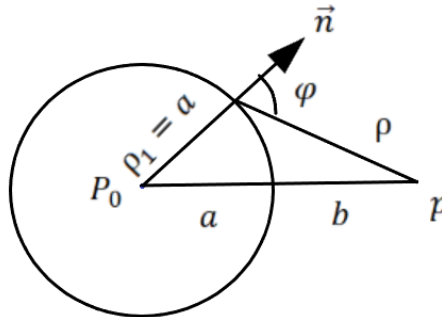


Рис. 9.4

Для того, чтобы проинтегрировать это выражение надо учесть, что  $\rho$ ,  $\rho_1$  и  $\phi$ ,  $\phi_1$  постоянно меняются. Решить его можно с помощью приближения Френеля и Фраунгофера.

## Приближения Френеля и Фраунгофера.

Если зон Френеля много, то задача решается с помощью приближения Френеля. Когда зон  $< 1$ , то задача решается с помощью приближения Фраунгофера.

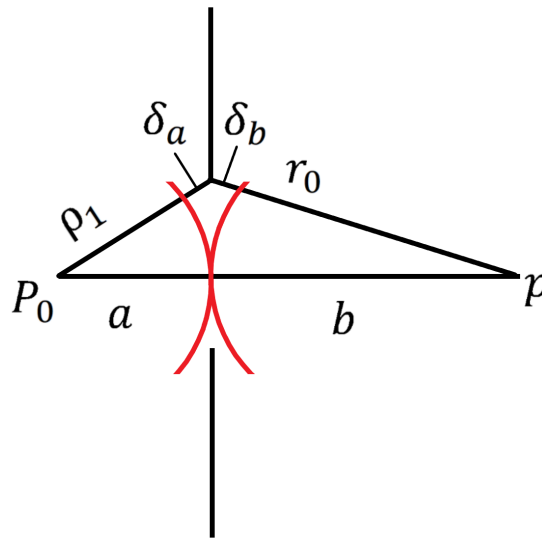


Рис. 9.5: Приближение Фраунгофера

$$\delta_a = \frac{r_0^2}{2a}$$

$\delta_a$  — зазор между сферой радиуса  $a$  и плоскостью

$$\delta_b = \frac{r_0^2}{2b}$$

$\delta_b$  — зазор между сферой радиуса  $b$  и плоскостью

Если зазоры  $\delta_a, \delta_b > \lambda$ , значит, в зазор укладывается много зон Френеля  $\Rightarrow$  приближение Френеля.

Условия приближения Френеля:

- $a \leq \frac{r_0^2}{\lambda}$
- $b \leq \frac{r_0^2}{\lambda}$

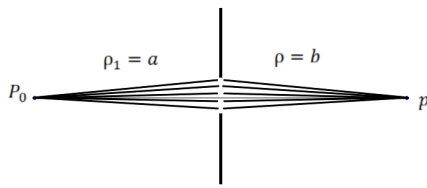
Если зазоры  $\delta_a, \delta_b \ll \lambda \Rightarrow$  приближение Фраунгофера.

Условия приближения Фраунгофера:

- $a \gg \frac{r_0^2}{\lambda}$
- $b \gg \frac{r_0^2}{\lambda}$

$\frac{r_0^2}{\lambda}$  — это расстояние, которое характеризует дифракционную длину по отношению к отверстию. Когда точки  $P_0, p$  уходят на расстояние, большее, чем дифракционная длина, говорят, что эти точки находятся в дальнем поле или в зоне Фраунгофера.

**Общая дифракционная задача для дифракций в дальнем поле.**



$$a \gg \frac{r_0^2}{\lambda}$$

$$K(\phi) = \frac{i}{2\lambda} (\cos 0^\circ + \cos 0^\circ) = \frac{i}{\lambda}$$

Рис. 9.6: Приближение Фраунгофера

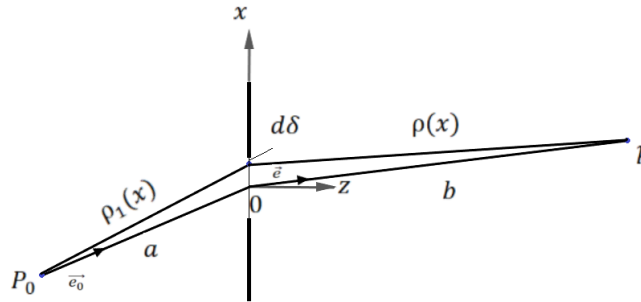


Рис. 9.7: Приближение Фраунгофера

$$\vec{e}_0 = \{\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0\}$$

$$\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

$$\rho_1(x, y) = a + \cos \alpha_0 x + \cos \beta_0 y = a + e_{0x}x + e_{0y}y$$

$$\rho(x, y) = b - \cos \alpha x - \cos \beta y = b - e_x x - e_y y$$

$$K = \frac{i}{2\lambda} (\cos \phi_1 + \cos \phi) \approx \frac{i}{\lambda}$$

$$U(p) = \frac{i}{\lambda} \int_{\Sigma} \frac{ce^{-ik[a+e_{0x}x+e_{0y}y]}}{ab} e^{[b-e_x x-e_y y]} dx dy$$

$$U_{\Sigma}(x, y) = \frac{ce^{[a+e_{0x}x+e_{0y}y]}}{a} \quad (3)$$

(3) - плоская волна.

Амплитуда плоской волны:

$$A = \frac{c}{a}$$

Окончательный ответ:

$$U(p) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \int_{\Sigma} U_{\Sigma}(x, y) e^{i[k_x x + k_y y]} dx dy$$

$k_x, k_y$  задают направление в точку наблюдения.

Где:  $k_x = k e_x, k_y = k e_y, k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$k$  - волновое число

$$U(k_x, k_y) = \int_{\Sigma} U_{\Sigma}(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Тогда:

$$U(p) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} U(k_x, k_y)$$

Интенсивность:

$$I(p) = \frac{|U(p)|^2}{2} = \frac{1}{\lambda^2 b^2} \frac{|U(k_x, k_y)|^2}{2}$$

Можно представить функцию времени (рис. 84) и функцию пространства (рис. 85) как набор синусов.

$f(t)$

$\sin \omega t$



Рис. 9.8: Аналог Фурье-преобразования

$f(x)$

$\sin k_x$



Рис. 9.9: Дифракционная картина от щели

## Лекция 10

**Дифракционная картина в дальнем поле, как Фурье-образ светового поля на дифракционном экране.**

$$k_x = k \cos \alpha$$

$$k_y = k \cos \beta$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

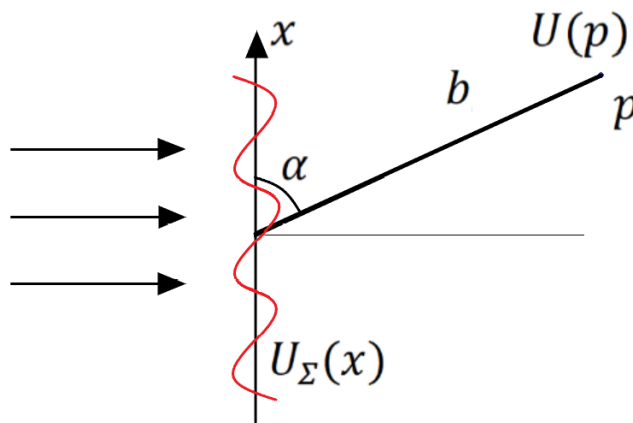


Рис. 10.1: Возмущение на поверхности экрана вдоль одной координаты

$$U_{\Sigma}(x) = \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x$$

Где  $\Lambda$  - параметр, который есть периодичность сигнала в пространстве.

Найдем Фурье-образ:

$$\begin{aligned}
 U_{\Sigma}(k_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x e^{ik_x x} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{i\frac{2\pi}{\Lambda} x} e^{-i\frac{2\pi}{\Lambda} x} \right) e^{ik_x x} dx \sim \delta \left( k_x - \frac{2\pi}{\Lambda} \right) + \delta \left( k_x + \frac{2\pi}{\Lambda} \right)
 \end{aligned}$$

Дифракционная картина в дальнем поле - это есть распределение интенсивности, которая повторяет Фурье-разложение сигнала в плоскости дифракционного экрана. Любое возмущение можно разложить на набор косинусов, и каждый косинус даст два дифракционных максимума (рис. 87).

$$k = k \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha = \pm \frac{2\pi}{\Lambda}$$

$$\boxed{\Lambda \cos \alpha = \pm \lambda}$$

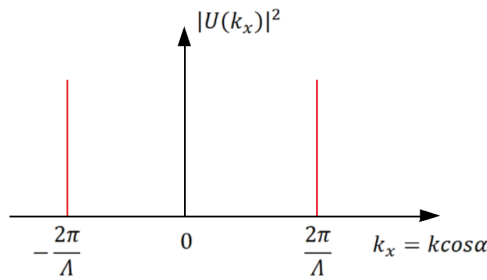
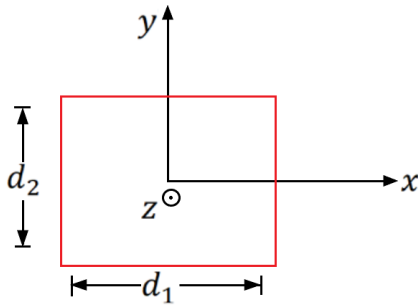


Рис. 10.2

## Дифракция на прямоугольном отверстии.

Падают перпендикулярно плоская волна.



$$U(k_x, k_y) = U_0 \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} e^{ik_x x} dx \int_{-\frac{d_2}{2}}^{\frac{d_2}{2}} e^{ik_y y} dy$$

Рис. 10.3: Прямоугольное отверстие

Интенсивность падающей волны:

$$I_0 = \frac{U_0^2}{2}$$

Интенсивность:

$$I(p) = \frac{1}{\lambda^2 b^2} \frac{|U(k_x, k_y)|^2}{2} = I_0 \frac{(d_1 d_2)^2}{\lambda^2 b^2} \sin^2 c \left( \frac{k_x d_1}{2} \right) \sin^2 c \left( \frac{k_y d_2}{2} \right)$$

Нахождение минимумов:

$$\frac{k_x d_1}{2} = \pi$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda}{d_1}$$

$$\frac{k_y d_2}{2} = \pi$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda}{d_2}$$

$$I(0) = I_0 \frac{(d_1 d_2)^2}{\lambda^2 b^2}$$

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$I_0 d_1 d_2 \approx I(0) d'_1 d'_2$$



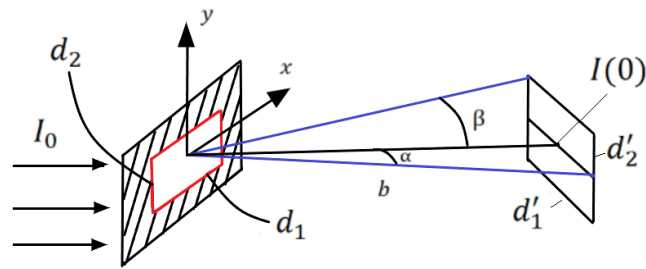


Рис. 10.4: Минимумы

Где  $d'_1 = \cos \alpha b = \frac{\lambda}{d_1} b$ ;  $d'_2 = \cos \beta b = \frac{\lambda}{d_2} b$

$$I(0) = I_0 \frac{d_1 d_2}{d'_1 d'_2} = I_0 \frac{(d_1 d_2)^2}{\lambda^2 b^2}$$

### Дифракция на круглом отверстии.

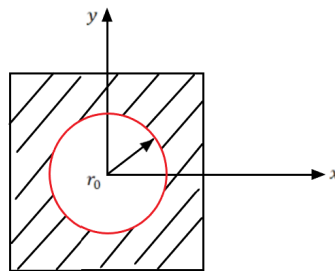


Рис. 10.5: Круглое отверстие

Есть экран с отверстием. Падает свет с интенсивностью  $I_0$ . На большом расстоянии наблюдается дифракционная картина - кольца (рис. 91).

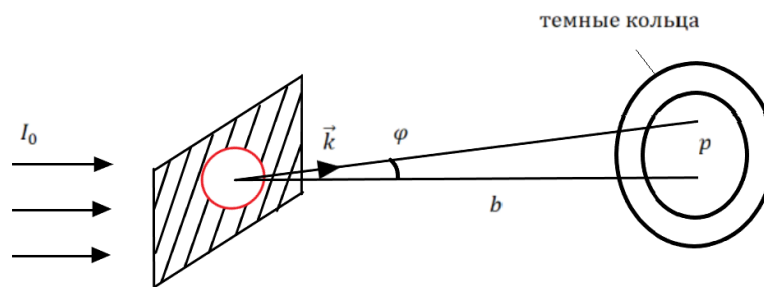


Рис. 10.6

$$k_{\perp} = k \sin \phi$$

$$I(p) = I_0 \frac{(\pi r_0^2)^2}{\lambda^2 b^2} \left[ \frac{2J_1(k_{\perp} r_0)}{k_{\perp} r_0} \right]^2$$

$J_1(\xi)$  - функция Бесселя I порядка.

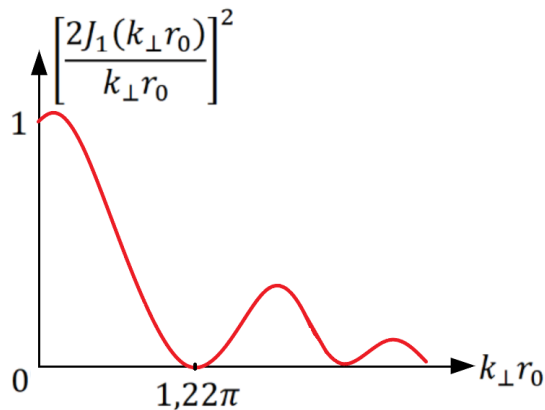


Рис. 10.7

Положение первого темного кольца будет там, где функция Бесселя достигает величины  $1,22\pi$  (рис. 92).

$$k_{\perp} r_0 = 1,22\pi : \frac{2\pi}{\lambda} \sin \phi r_0 = 1,22\pi$$

$$\sin \phi = \frac{0,61\lambda}{r_0}$$

Грубо говоря, темное кольцо позволяет очертить размер области, в которой находится почти вся энергия дифракционной картины. Такая дифракционная картина представляет собой кольцеобразную структуру, и эти кольца называются кольцами Эйри.

**Пример:**

$$\sin \phi = \frac{1}{100}$$

$$d \sin \phi = \lambda$$

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм}$$

$$d \approx 100\lambda \approx 50 \text{ мкм}$$

## Дифракция гауссовского пучка.

Пучок будет описываться по такому закону:

$$I(r) = I_0 e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}$$

$$I(r, b) = \frac{I_0}{f(b)} e^{-\frac{2r^2}{r_0^2 f^2(b)}}$$

$$r_0(b) = r_0 f(b) f(b) = \sqrt{1 + \frac{b^2}{L_0^2}}$$

где  $L_0 = \frac{\pi r_0^2}{\lambda}$  - дифракционная длина

Расширение или ослабление гауссовского пучка определяется функцией  $f(b)$  (рис. 93).

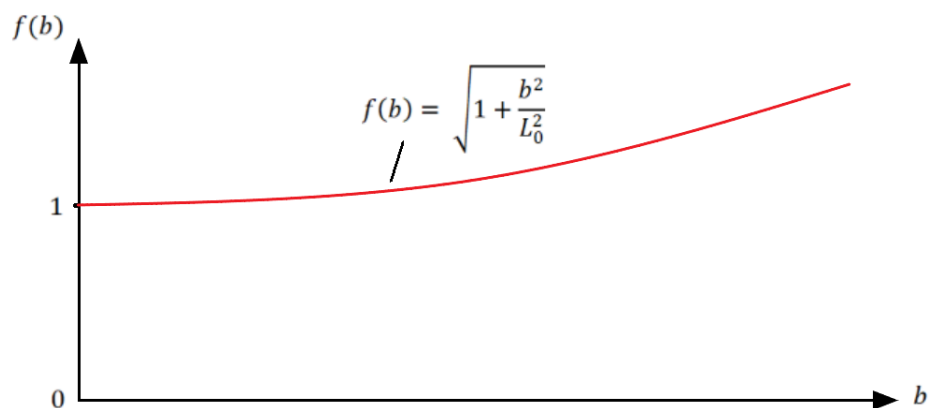


Рис. 10.8

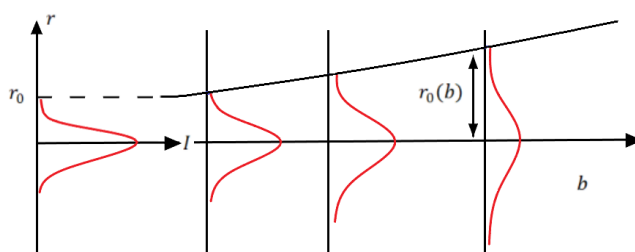


Рис. 10.9: Гауссовский пучок

## Поле в фокальной плоскости собирающей линзы.

Поле в фокальной плоскости конечно. Пятно в фокальной плоскости существует. Фокусное расстояние  $F$  (рис. 95).

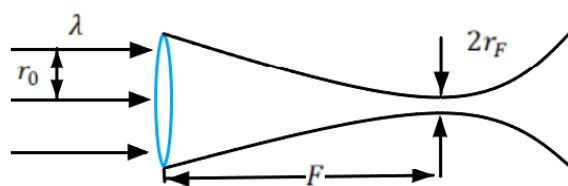


Рис. 10.10: Фокальная плоскость

$$\sin \phi = \frac{0,61\lambda}{r_0}$$

$$r_F = F \sin \phi = \frac{0,61\lambda}{r_0} F$$

Если гауссовский пучок падает на собирающую линзу, то линза фокальной плоскости дает дифракционную картину гауссовского пучка.

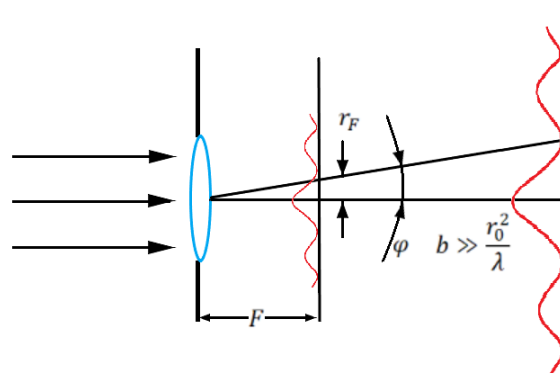


Рис. 10.11: Гауссовское распределение интенсивности в фокальной плоскости

## Дифракционные решетки.

Дифракционная решетка - любое устройство, которое производит периодическую пространственную модуляцию волнового фронта.

$$\frac{1}{d} \left( \frac{\text{штрих}}{\text{мм}} \right) \sim 10^2$$

$d$  - период решетки

$N \gg 1$  - число штрихов

$d > \lambda$

# Лекция 11

## Дифракционные решетки.

$d$  - период решетки

$N \gg 1$  - число штрихов

$d > \lambda$

$$Nd = L_1$$

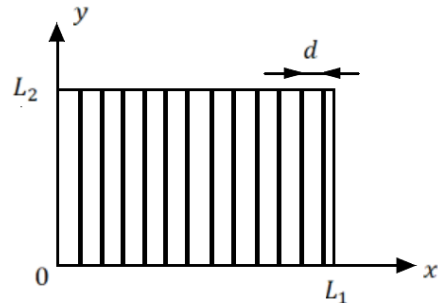


Рис. 11.1: Дифракционная решетка

$$U(x, y) = U_0 e^{-ik e_{0x} x}$$

Решетка обладает некоторой функцией пропускания. Поэтому на входе будет волна  $U(x, y)$ , а на выходе уже  $U_{\Sigma}(x, y)$ . Падающее излучение решеткой промодулировалось.

$t(x)$  - коэффициент пропускания

$$t(x) = \frac{U_{\Sigma}(x, y)}{U(x, y)} = |t(x)| e^{-i\Phi(x)}$$

Коэффициент пропускания является комплексным. Функция  $t(x)$  является периодической:

$$t(x) = t(x + d)$$

### Виды дифракционных решеток:

Амплитудная решетка

$$\Phi(x) = \text{const}$$

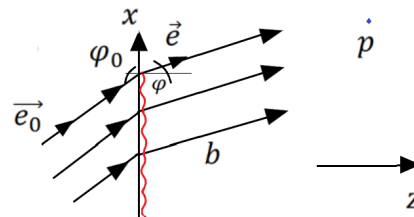
Фазовая решетка

$$|t(x)| = 1$$

Напишем выражение для возмущения  $U(p)$ . Расстояние  $b$  - это расстояние от решетки до точки  $P$ .

$$\sin \phi - \sin \phi_0 = p$$

$$U(p) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} U_{\Sigma}(k_x, k_y) = \frac{i}{\lambda} U_0 \int_0^{L_2} e^{ik(e_y - e_{0y})y} dy \int_0^{L_1} t(x) e^{ik(e_x - e_{0x})x} dx =$$



Дифракционная решетка

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} e_{0y} = 0 & e_y = 0 \\ e_{0x} = \sin \phi_0 & e_x = \sin \phi \end{bmatrix} = \frac{i}{\lambda} U_0 L_2 \left[ \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx + \int_d^{2d} + \dots \int_{(N-1)d}^{Nd} \right] = \\
 &= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} U_0 L_2 \left[ \int_0^d [1 + e^{ikpd} + \dots e^{ikpd(N-1)}] \right] = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} U_0 L_2 \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1 - e^{ikpdN}}{1 - e^{ikpd}}
 \end{aligned}$$

Интенсивность:

$$I(p) = \frac{|U(p)|^2}{2} = \underbrace{\frac{I_0}{\lambda^2 b^2} L_2^2 \left| \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx \right|^2}_{I_1(p)} \underbrace{\left[ \frac{\sin \frac{Nkpd}{2}}{\sin \frac{kpd}{2}} \right]^2}_{H(N, \frac{kpd}{2})}$$

$H(N, \frac{kpd}{2})$  - функция взаимодействия

Главные максимумы:

$$\frac{k p_m d}{2}, \text{ или } dp_m = d(\sin \phi_m \sin \phi_0) = m\lambda$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

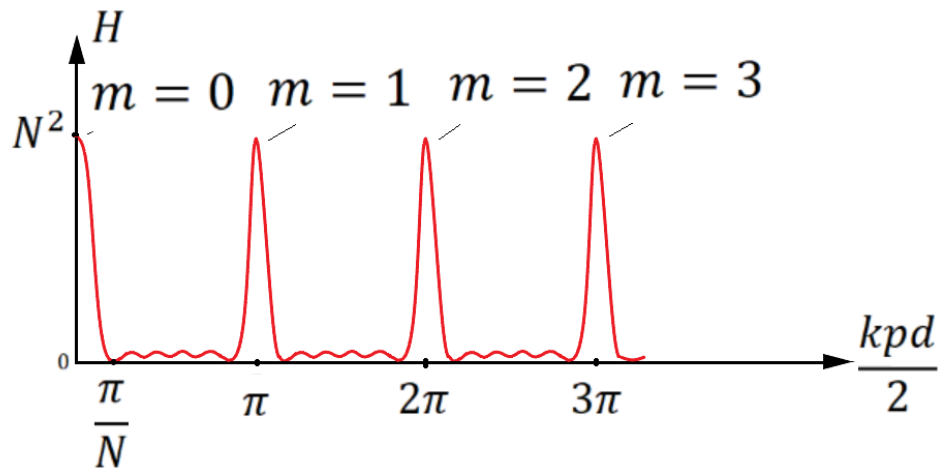


График функции  $H$

$$I_1(p) = \frac{I_0}{\lambda^2 b^2} (L_1 d_1)^2 \sin^2 c \left( \frac{k p d_1}{2} \right)$$

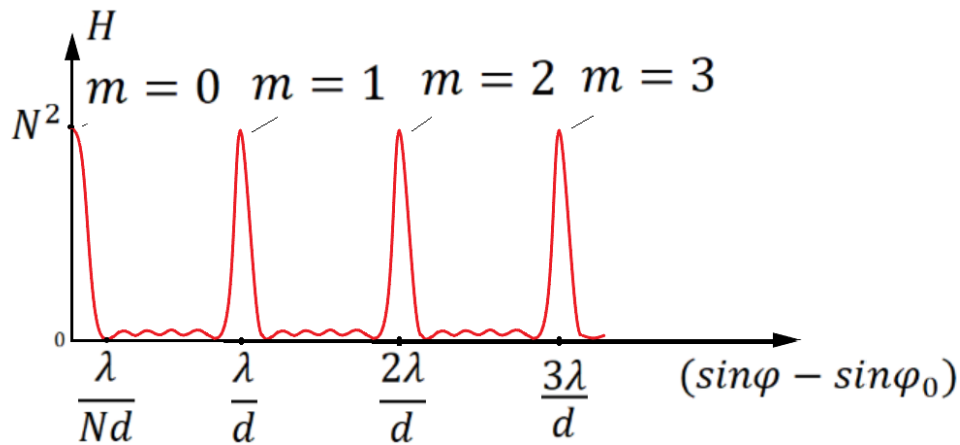


Рис. 11.2: Выражение для угловой координаты всех дифракционных максимумов

## Спектральные характеристики решеток.

### 1) Аппаратная функция

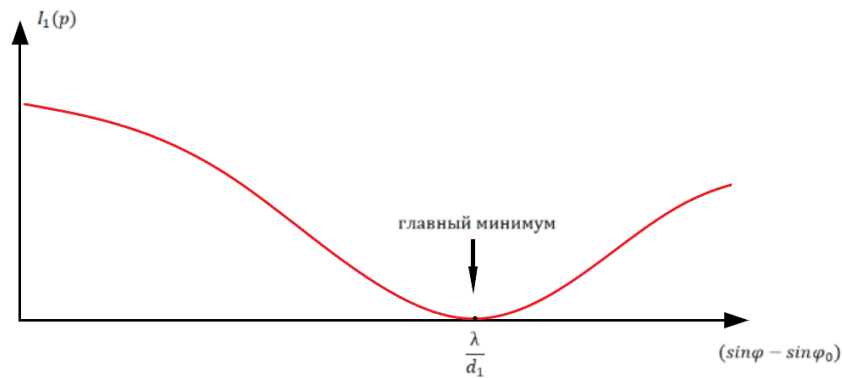


Рис. 11.3: Аппаратная функция

$$(\sin \phi - \sin \phi_0) = \frac{\lambda}{d}$$

### 2) Угловая $D\Phi$ и линейная $Df$ дисперсии.

$$d(\sin \phi_1 - \sin \phi_0) = m\lambda_1$$

$$d(\sin \phi_2 - \sin \phi_0) = m\lambda_2$$

$$D\phi = \frac{\delta\phi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \phi}$$

$$d \cos \phi \delta\phi = m \delta\lambda$$

$$D = D\phi f$$

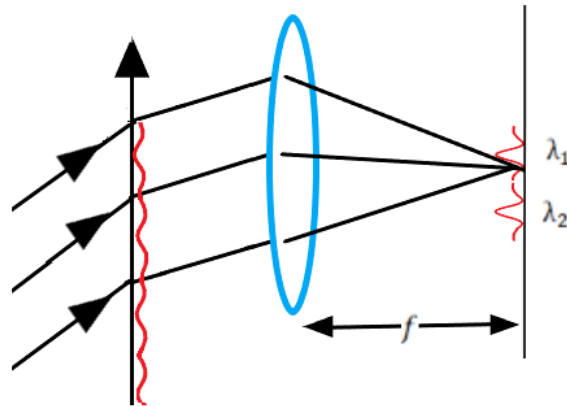


Рис. 11.4

Есть дифракционная решетка. На нее падает свет. Дифрагирующие волны собираются в фокальной плоскости камерного объектива. В результате чего получаются дифракционные максимумы для длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (рис. 100).

### 3) Область свободной дисперсии.

$$d(\sin \phi - \sin \phi_0) = m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$$

$$m\lambda + m\Delta\lambda = m\lambda + \lambda$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

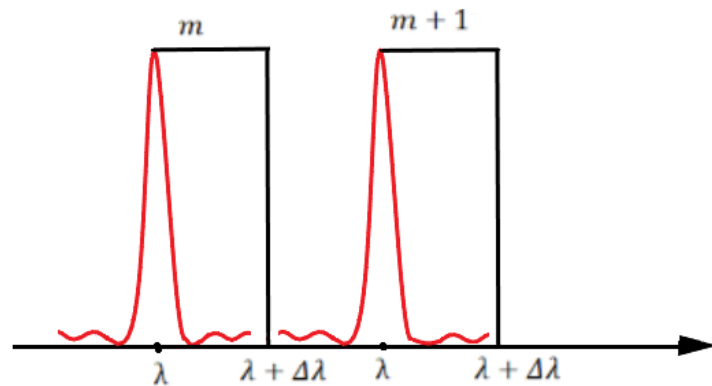


Рис. 11.5: Дифракционные максимумы

### 4) Разрешающая способность (сила).

#### Критерий Рэлея:

Максимумы еще будут различимы, если дополнительный минимум для длины одной волны совпадает с максимумом для следующей длины волны (рис. 102).

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$



$$\sin \phi - \sin \phi_0 = \frac{m\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} = \frac{m(\lambda + \delta\lambda)}{d}$$

$$\frac{\lambda}{Nd} = \frac{m\delta\lambda}{d}$$

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

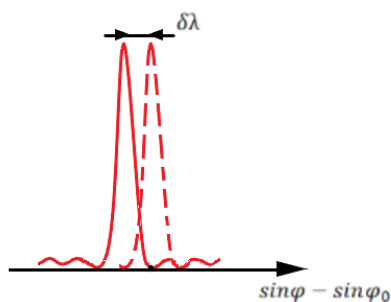


Рис. 11.6

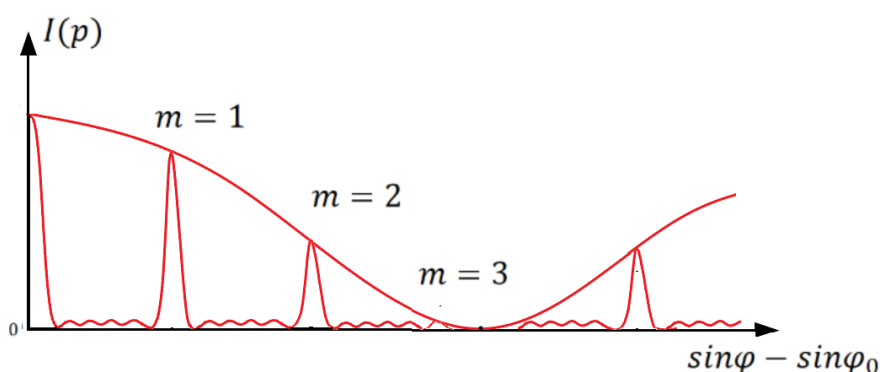


Рис. 11.7: Распыление интенсивности в дифракционной картине

## Спектральные приборы с пространственным разрешением спектра.

Поскольку решетка каждой спектральной компоненте выделяет определенное место на экране, мы можем использовать приборы со спектральным разрешением спектра.

$$R = mN$$

$$\Delta\phi = \frac{s}{f_1}$$

$$\frac{s_{\text{норм}}}{f_1} = \frac{\lambda}{Nd}$$

Коллиматор состоит из входной щели  $s$  и линзы с фокусным расстоянием  $f_1$ . Входная щель помещается в фокальной плоскости коллиматорного объектива (рис. 104).

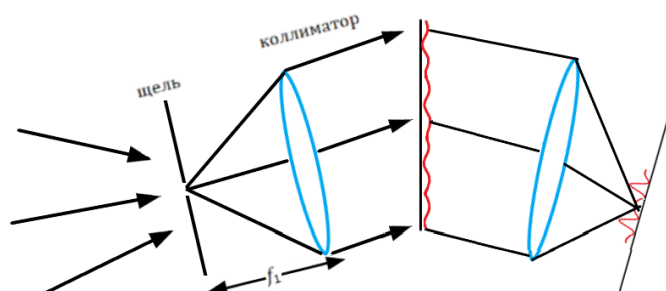


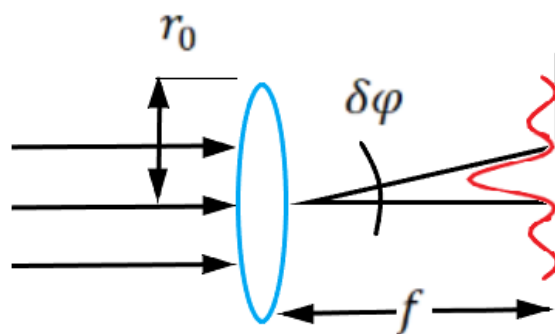
Рис. 11.8: Прибор с пространственным разложением спектра

## Приборы, формирующие оптическое изображение.

### Телескоп

Если свет идет от далекой звезды длиной волны  $\lambda$ , то в фокальной плоскости объектива телескопа образуется дифракционная картина. Она представляет собой кольца Эйри и угловая ширина первого максимума  $\delta\phi$ :

$\delta\phi = \frac{0,61\lambda}{r_0}$ ,  $r_0$  - радиус объектива.



Телескоп

Чем больше объектив, тем меньше пятно.

Оценка:

$$h = 200 \text{ км}$$

$$r_0 = 0,5 \text{ м}$$

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм}$$

$$l_{\min} = h\delta\phi = h \frac{0,61\lambda}{r_0} = 2 \cdot 10^5 \frac{0,61 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{0,5} = 12 \text{ см}$$

Разрешающая способность телескопа:

$$R = \frac{1}{\delta\phi} = \frac{r_0}{0,61\lambda}$$

## Лекция 12

### Приборы, формирующие оптическое изображение.

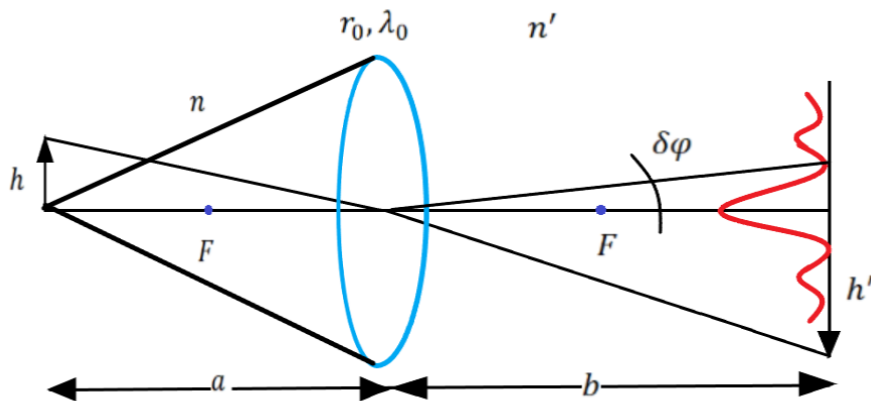
Различают электронный микроскоп и микроскоп, работающий в оптическом диапазоне.

Объектив микроскопа радиуса  $r_0$ , фокальная точка  $F$ . Предположим, есть не когерентное освещение. Тогда, пучок света, идущий от точки (точка находится вблизи фокуса), почти является параллельным пучком. Другими словами, в дальнем поле формируется дифракционная картина, представляющая семейство колец Эйри.

$n, n'$  - показатель преломления.

$$b \gg a$$

$$\delta\phi = \frac{0,61\lambda'}{r_0}$$



Микроскоп

$$h' = \delta\phi b = \frac{0,61\lambda_0}{n'r_0} b$$

### Теория Аббе.

Условие синусов Аббе (1866г):

$$hn \sin \theta = h'n' \sin \theta'$$

$$h' = \delta\phi b = \frac{0,61\lambda_0}{n'r_0} b = \frac{0,61\lambda_0}{n' \sin \theta'}$$

$$hn \sin \theta = h'n' \sin \theta' = 0,61\lambda_0$$

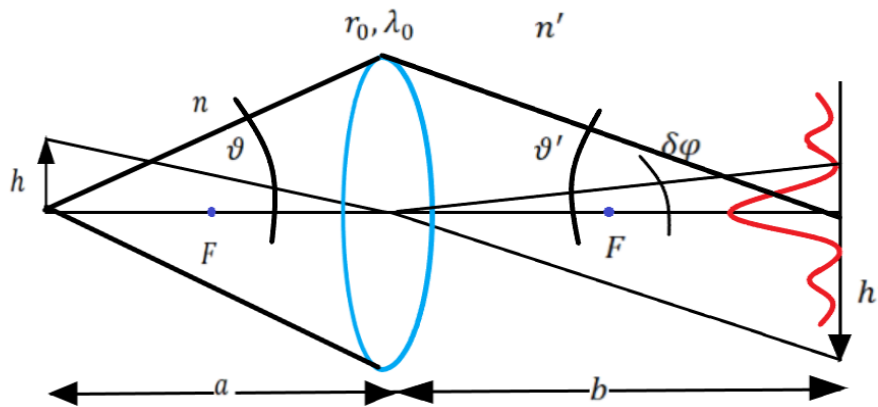


Рис. 12.1: Микроскоп

Выражение для разрешающей способности:

$$h = \frac{0,61\lambda_0}{n \sin \theta}$$

Есть когерентное освещение объекта.

Свет, попадая на решетку, дальше дифрагирует. В фокальной плоскости, которая заменяет дальнее поле, наблюдается система дифракционных максимумов. Дифракционные максимумы образуют угловой спектр. Аббе это назвал первичным изображением.

Первичное изображение есть пространственный Фурье-образ предмета (рис. 106). Для того, чтобы вторичное изображение, являясь увеличенным по отношению к предмету, было тождественно ему, то есть передавало все мелкие детали, должны быть задействованы все дифракционные максимумы. Но линза обладает ограниченными размерами.

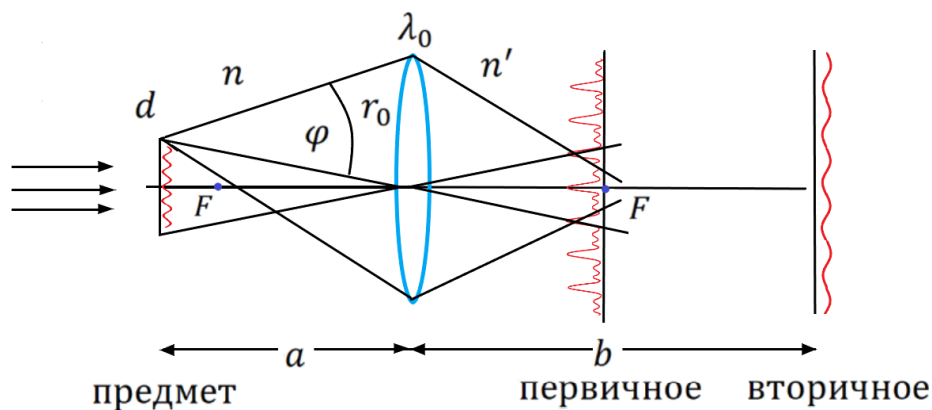


Рис. 12.2

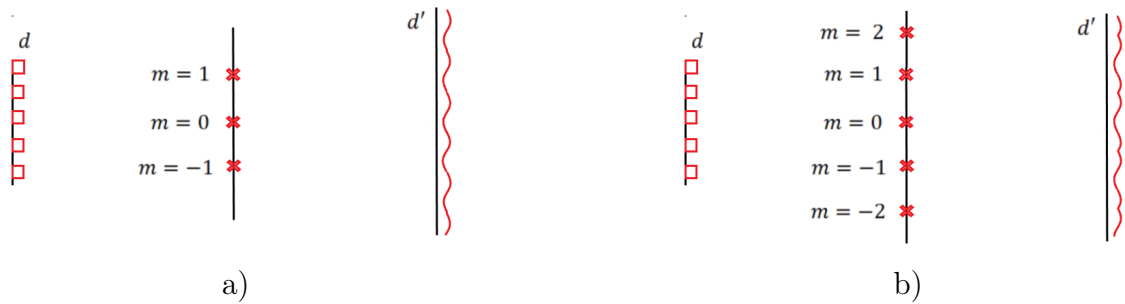


Рис. 12.3: Дифракционные максимумы

Если с помощью линзы «захватить» дифракционные максимумы 1 и -1 порядков, то будет понятно, что вторичное изображение является периодической структурой, но мы не увидим мелких деталей (рис. 107(a)).

Период  $d' = \frac{b}{a}d$

Чем больше максимумов пропустит дифракционная решетка, тем четче вторичное изображение будет с увеличением копировать первичное изображение или предмет (рис. 107(b)).

**Разрешающая способность микроскопа при когерентном освещении:**

Условие, что есть хотя бы 1 дифракционным максимум:

$$d \sin \phi = 1 \cdot \frac{\lambda_0}{n}, m = \pm 1$$

$$d \approx \frac{\lambda_0}{n \sin \phi}$$

$$d = \frac{0,77\lambda_0}{n \sin \theta}$$

При когерентном освещении можно фильтровать угловой спектр.

## Методы наблюдения фазовых объектов.

Фазовые объекты - это объекты, которые модулируют волну в основном по фазе, а не по амплитуде. Можно улучшить качество фазовых объектов с помощью фильтрации углового спектра. Существует два подхода:

### 1) Метод темного поля.

Этот метод основан на удалении дифракционного максимума 0 порядка. Тем самым, убрав подсветку, увеличится контрастность картины.

## 2) Метод фазового контраста.

На максимум нулевого порядка ставится стекляшка, которая повернет фазу волны по отношению к фазе падающей волны на этот максимум на  $90^\circ$ .

## Голография.

Есть сигнальная волна. Это та волна, которую нужно записать и воспроизвести. Есть опорная волна. Эти волны монохроматические и имеют одинаковую длину волны  $\lambda$ . Если пустить одновременно сигнальную волну с опорной, то в результате интерференции на пластинке образуется периодическое изменение интенсивности суммарной волны, что вызовет периодическое почернение фотопластинки. Такая фотопластинка будет называться **голограммой**. Она же будет представлять собой дифракционную решетку.



## Лекция 13

### Глава 5. Дисперсия.

#### Материальные уравнения среды. Частотная и пространственная дисперсия среды.

В отсутствии дисперсии мы привыкли писать простейшее материальное уравнение:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

Но это уравнение является грубым выражением при всех частотах. А на самом деле, нам необходимо использовать следующее уравнение:

$$\vec{D}(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varepsilon(t' \vec{r}') \vec{E}(t - t', \vec{r} - \vec{r}') dt' d\vec{r}'$$

Пояснение:  $0 < t' < \infty$ ;  $-\infty < |\vec{r}'| < \infty$ .

Есть электрическое поле, оно меняется во времени и пространстве. В результате наличия электрического поля, отклик среды определяется некоторой функцией от времени и координат, и этот отклик приводит к возникновению электрической индукции, которая в данный момент времени  $t$  и в данной точке пространства  $r$  зависит не только от поля, а от значения поля в предыдущий момент времени и в других точках пространства. Другими словами - среда обладает памятью.

Если поле меняется, то значение индукции в этот момент зависит от всех предыдущих моментов времени (в том числе от нуля до бесконечности).

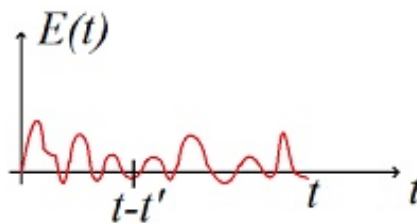


Рис. 13.1: Волна

Как итог накопления во времени происходит временная дисперсия. Зависимость от времени ответственна за временную (частотную) дисперсию, а зависимость от координат ответственна за пространственную дисперсию.

Пусть  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]$  - выражение для плоской монохроматической волны, которая идет в среде дисперсии. То, если подставить  $E$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega, \vec{k}) E_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega, k) \vec{E}$$

Где

$$\varepsilon(\omega, \vec{k}) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varepsilon(t' \vec{r}') \exp[-i(\omega t' - \vec{k} \vec{r}')] dt' d\vec{r}'$$

Из чего видно, что в среде, которая обладает временной и пространственной дисперсией, каждая монохроматическая волна, воздействуя на среду приводит к ее поляризации и возникновению электрической индукции. Но для каждой частотной компоненты существует свое значение электрической проницаемости, так же и для каждого волнового вектора.

Зависимость  $\varepsilon(\omega k)$ , говорит о том, что в среде есть временная и пространственная дисперсия.

Пусть в среде распространяется монохроматическая волна. Это значит, что нам известна её частота, амплитуда, и соответственно для каждой частоты мы знаем  $\varepsilon$ . Так же мы будем считать, что  $\varepsilon$ , во всех уравнениях Максвелла, есть величина постоянная для данной частоты.

**Комплексный показатель преломления.**

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  так как речь идет о монохроматической волне, то  $\varepsilon$  для данной частоты своё.

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}; \quad \sigma = \sigma(\omega)$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}; \quad \text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \text{rot} \vec{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \right)$$

Уравнение, описывающее волну, распространяющуюся в среде и ответственное за поглощение этой волны:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Из чего следует, что если нет проводимости, то и нет поглощения.

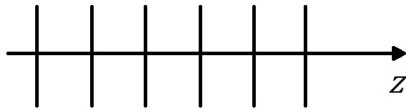
Пусть  $\varepsilon$  и  $\sigma$  для данной частоты известны.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $Z$ .

Дисперсионное соотношение связывает волновое число и частоту волны. Оно имеет следующий вид:

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)$$





$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)]$$

Рис. 13.2: Плоская волна

$(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega})$  - комплексная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon k$

$$\varepsilon k = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$$

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon k} = \frac{\omega}{c}n_k = \frac{\omega}{c}n - i\frac{\omega}{c}\chi$$

Комплексный показатель преломления. Он содержит действительную и мнимую часть.

$$n_k = n - i\chi$$

Смысл показателя преломления в том, что он позволяет найти волновое число, которое зависит от частоты, так как и  $n_k = n - i\chi$  тоже зависит от частоты.

Волновое число  $k$  является комплексным, так как показатель преломления тоже комплексное число.

Подставляем:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{\omega}{c}nz + i\frac{\omega}{c}\chi z \right) \right] = E_0 e^{\frac{\omega}{c}\chi z} \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{\omega}{c}nz \right) \right] = \\ &= E_0 e^{\frac{\omega}{c}\chi z} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{z}{c/n} \right) \right] \end{aligned}$$

В среде, у которой есть потери, вводится комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексный показатель преломления. Мнимая часть  $\chi$  отвечает за поглощение волны, а действительная часть определяет фазовую скорость волны.

Фазовая скорость волны - это есть величина, которая равна отношению скорости света к величине показателя преломления.

Фазовая скорость, где  $n$  зависит от  $\omega$ :

$$v = \frac{c}{n} = v(\omega)$$

Интенсивность:

$$I = |E|^2; I = I_0 e^{-\frac{2\omega}{c}\chi z} = I_0 e^{-\alpha z}$$

где коэффициент поглощения:

$$\alpha = \frac{2\omega}{c}\chi = \alpha(\omega)$$

1) Если волна распространяется в среде, в которой есть потери, то, фенологически, эта среда всегда описывается комплексным показателем преломления;

2) У показателя преломления, как у любого комплексного числа, есть действительная и мнимая часть. Действительная часть  $n$ , мнимая часть  $\chi$ . Действительная часть определяет фазовую скорость монохроматической волны, а величина мнимой определяет коэффициент поглощения волны.

В такой среде, при падении волны с интенсивностью  $I_0$ , по мере проникновения в среду, ее интенсивность убывает по экспоненциальному закону. Эта формула носит название «закон Бугера» или закон «Бугера-Ламберта-Бера». Этот закон говорит о том, что в среде происходит поглощение. Так как  $n$ -функция от  $\omega$  и  $\chi$  тоже функция от  $\omega$ , то мы видим, что в среде селективным образом происходит поглощение и селективным образом распределяется фазовая скорость в зависимости от частоты.

### Групповая скорость, дисперсионное расплывание импульса

Монохроматическая волна - это идеализация, реальная волна является модулированной во времени волной. Типичным примером такой волны является световой импульс. Возникает вопрос о скорости распространения такого импульса. Оказывается, что в диспергирующей среде этот импульс распространяется с некоторой скоростью, которую связывают со скоростью распространения энергии. Эта скорость есть групповая скорость.

Групповая скорость  $U$ :

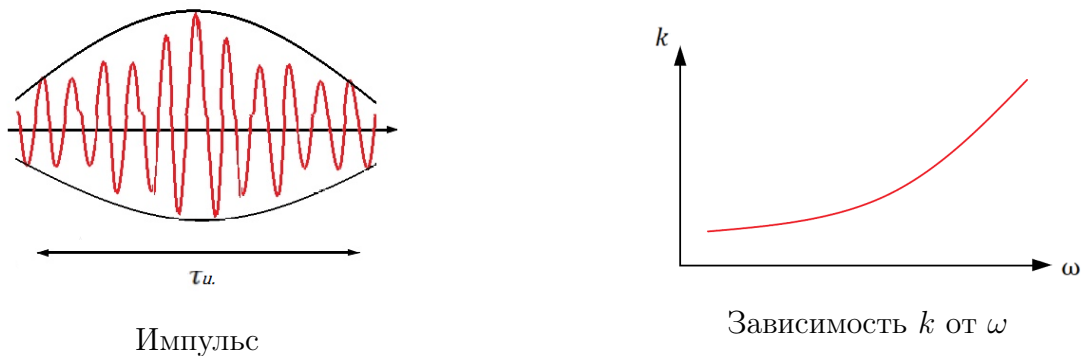


Рис. 13.3: Групповая скорость

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

Спектр импульса состоит из набора частот, в котором есть главная частота и есть некоторая ширина спектра. Это  $\omega$ , которая обратно пропорциональна длительности импульса. Если импульс длинный, то импульс распространяется с одной скоростью.

Для монохроматической волны у нас будет всего одна частота и одно значение волнового числа.

$$K = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)$$

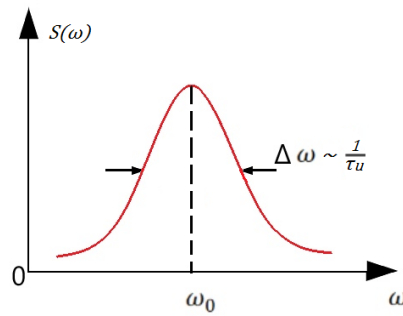


Рис. 13.4: Спектр импульса. Набор частот

Фазовая скорость на частоте  $\omega_0$  -  $v(\omega_0) = \frac{c}{n(\omega_0)} = \frac{\omega_0}{K_0}$

В результате чего, фазовая скорость равна отношению частоты к величине фазового числа.

Чем короче импульс, тем больше ширина спектра. Это значит, что и чем короче импульс тем и менее приемлемо говорить о какой-то одной скорости для монохроматической волны, которую мы ввели как фазовую скорость. Речь идет о групповой скорости.

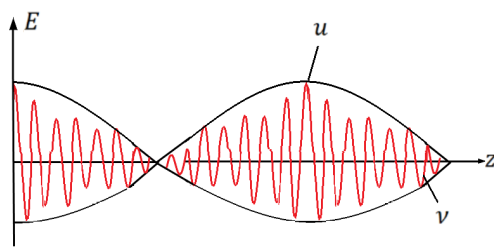
Так как у нас теперь целый спектр частот, то получается, что у одной волны с определенной частотой одна фазовая скорость, соответственно, у второй - другая частота и фазовая скорость. Здесь целый набор, или континуум фазовых скоростей. В результате, все эти гармоники (гармонические волны) будут бежать со своими фазовыми скоростями и этот импульс будет во что-то трансформироваться (хотя на малых расстояниях это не столь заметно), но нам важно понять его скорость.

Рис. 13.5: Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ 

$$K_1 = \frac{\omega_1}{c}n(\omega_1); K_2 = \frac{\omega_2}{c}n(\omega_2)$$

$$E = E_0 \cos[\omega_1 t - K_1 z] + E_0 \cos[\omega_2 t - K_2 z] = 2E_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta K}{2}z\right] \cos[\omega_0 t - K_0 z]$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1; \Delta K = K_2 - K_1; \omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2); K_0 = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$



Импульс

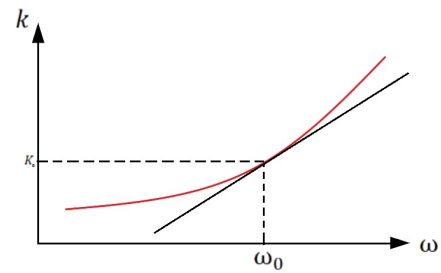
Зависимость  $k$  от  $\omega$ 

Рис. 13.6: Групповая и фазовая скорости волны

Посмотрим, как это выглядит в пространстве:

$$v = \frac{\omega_0}{K_0}; u = \frac{\Delta\omega}{\Delta K}$$

Пакет волн (в данном случае две волны) бежит с групповой скоростью, а именно вершина (групповой максимум)  $\frac{\Delta\omega}{\Delta K}$ , а наполнение этого пакета с фазовой скоростью. Другими словами, если мы будем говорить, что у нас есть импульс, то огибающий импульс бежит с групповой скоростью, а набивка импульса с фазовой скоростью, при этом групповая скорость, меньше фазовой  $u \leq v$ .

Так как фазовая скорость зависит не только от частоты, то приходим к понятию не только дисперсии фазовой скорости, но и дисперсии групповой скорости. В результате дисперсии групповой скорости, импульсы, по мере распространения, начинают расплываться. Что есть дисперсионное расплывание импульса. При этом, чем короче импульс, тем сильнее он подвержен дисперсионному расплыванию. При этом, расплывание импульса происходит на фоне сохранения ширины спектра, поэтому оно неизбежно сопровождается фазовой модуляцией.

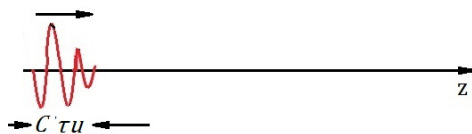


Рис. 13.7: Короткий импульс

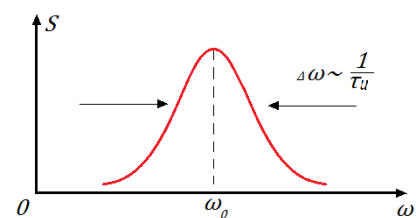


Рис. 13.8: Спектр импульса

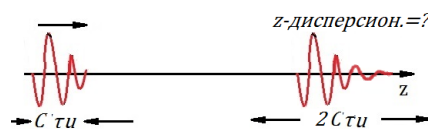


Рис. 13.9: Дисперсионная длина

Возникает дисперсионная длина  $Z$ .

$$U_1 = \frac{\partial \omega}{\partial K}|_{K_1}; U_2 = \frac{\partial \omega}{\partial K}|_{K_2}$$

Когда есть две крайние частоты и два крайних значения групповой частоты, то часть импульса, локализованная вблизи одних частот, будет двигаться с одной групповой скоростью, а другая, соответственно, с другой. Эти части, пройдя дисперсионную длину, должны друг у друга задержаться.

Время задержки между этими двумя частями:

$$\Delta t = \frac{z_{дисп}}{u_1} - \frac{z_{дисп}}{u_2} = \tau_u$$

Время задержки - это величина, которая возрастает с расстоянием  $Z$ . И когда время задержки достигнет длительности импульса, то импульс увеличится вдвое.

$$Z_{дисперс.} = \frac{\tau_u}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}} = \frac{\tau_u}{\frac{\partial K}{\partial \omega} \Big|_{K_1} - \frac{\partial K}{\partial \omega} \Big|_{K_2}} = \frac{\tau_u}{\left| \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \right|} \Delta \omega = \frac{\tau_u^2}{\left| \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \right|}$$

Показатель преломления зависит от частоты, волновое число зависит от частоты и оказывается, что дисперсионное расплывание импульса зависит от второй производной  $K(\omega)$ .

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \leq 0$$

Оценка. Плавленый кварц.

$$\lambda = 1,5 \text{ мкм}; \tau_u \sim 1 \text{ пс} = 10^{-12}; Z_{дисп} \approx 30 \text{ м}$$

Импульс, который идет по волоконному световоду, уже на 30 метрах будет расплываться. Бороться с этим можно, когда  $K_2 < 0$ , то есть, мы специально должны попасть в ту область, где  $K_2 < 0$ . Есть такие понятия: фазовый показатель преломления и групповой.

$$n = \frac{c}{v}; n_g = \frac{c}{u}; K_2 = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial K}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial \omega}$$

Для того, что бы дисперсионная длина была самая большая, необходимо, что бы  $K_2$  стремилось к нулю. Изменение групповой скорости длинной волны характеризуется групповым показателем преломления, Значит, нужно, что бы при изменении частоты или длинны волны, эта величина менялась минимально.

## Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды. Формула Лоренц-Лоренца.

Каждый атом, который состоит из положительного и отрицательного зарядов, в результате действия поля, приобретет дипольный момент. Это будет в том случае, если на атом действует электрическое поле.

Напряженность поля  $E$  и дипольный момент атома связаны простым соотношением:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 a \vec{E}$$

$a$  - поляризуемость атома.

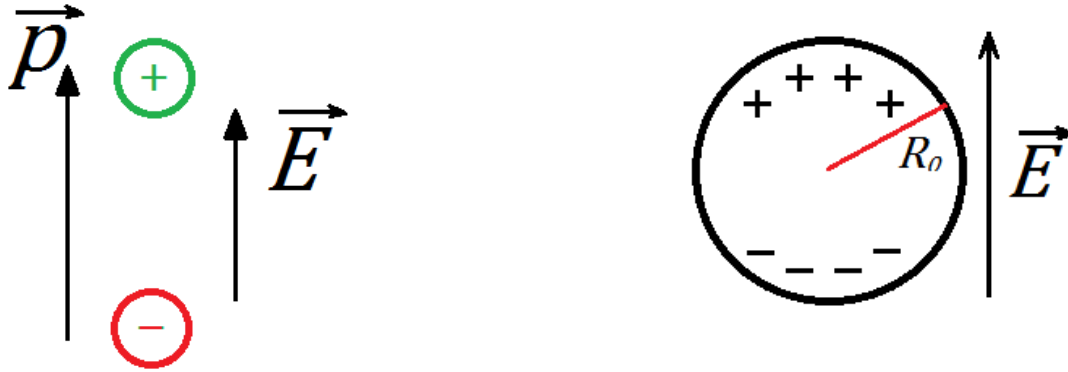


Рис. 13.10: Дипольный момент

Дипольный момент - это  $p = \varepsilon_0 4\pi r_0^3 E$ . Поляризуемость этого шарика  $a = 4\pi r_0^3 \sim 10^{-29} \text{м}^3$ ;  $r_0 = 10^{-10} \text{м}$

В диэлектрике, под действием электрического поля, возникает дипольный момент единицы объема, это есть число молекул единицы объема, умноженная на дипольный момент отдельных молекул.

$$P = Np = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$$

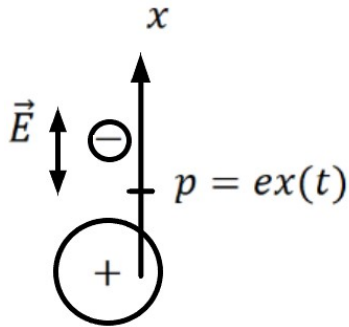
Диэлектрическая проницаемость связана с поляризуемостью формулой Клаузиуса-Моссотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{Na}{3}$$

Эта формула справедлива для газов, жидкостей и кубических кристаллов.

## Лекция 14

### Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды. Формула Лоренц-Лоренца.



Поле  $E$  теперь является полем быстропеременным, оно осциллирует с огромной частотой  $E = E_0 e^{i\omega t}$ . Так как  $\epsilon$  зависит от частоты,  $\epsilon$  зависит от частоты, то речь уже идет о формуле Лоренц-Лоренца.

Рис. 14.1: Модель атома (осциллятор)

$$mx + \Gamma x + kx = eE_0 e^{i\omega t}$$

$$p + 2\delta p + \omega_0^2 p = \frac{e^2 E_0 e^{i\omega t}}{m}$$

$$p = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$\frac{e^2 E_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$p = \epsilon_0 a E_0 e^{i\omega t}$$

$$a = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

Плазменная частота:  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

$$\frac{\epsilon_k - 1}{\epsilon_k + 2} = \frac{1}{3} \omega_p^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

Действительная и мнимая часть диэлектрической проницаемости зависят от частоты. Эта зависимость определяется собственной частотой колебания осциллятора, его затухания и, соответственно, плазменной частотой.

## Основы электронной теории дисперсии.

Дисперсия в газах:

$$\varepsilon + 2 \approx 3; \varepsilon \sim 1$$

$$\varepsilon_k - 1 = n_k^2 - 1 \approx (n_k - 1)(n_k + 1) = 2(n_k - 1); (n_k + 1) \approx 2$$

$$n_k - 1 = \frac{\omega_p^2}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}; n_k = n - i\chi$$

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{2} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

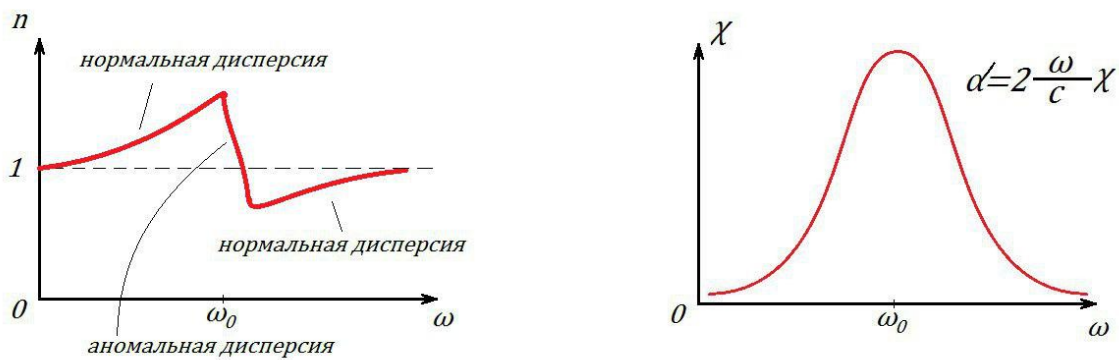


Рис. 14.2: Графики зависимости  $n$  и  $\chi$

Газы излучают и поглощают не одну линию, а много спектральных линий. Нарисуем качественно-реальную ситуацию (рис. 120).

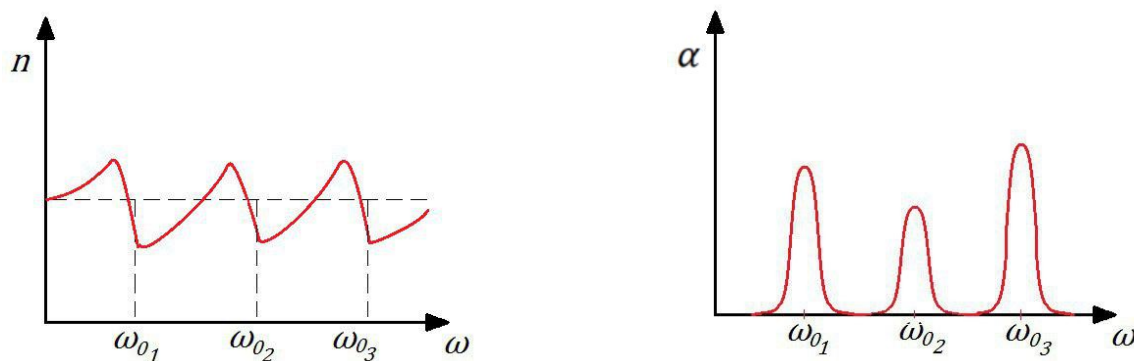


Рис. 14.3



$$K(\omega) = h(\omega) \frac{\omega}{c}; \quad K_2 = \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \leq 0;$$

$$\varepsilon_k - 1 = 2(n_k - 1) = \omega_p^2 \sum_e \frac{1}{\omega_{0e}^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$0 < f_e < 1$  - сила осциллятора. Мы предполагаем, что в атоме, в котором есть один электрон, обладает собственным набором частот колебаний, что с классической точки зрения невозможно. А в квантовой - возможно. Потому что электрон обладает набором энергетических уровней и испускает кванты света, частота которых равна разности энергий энергетических уровней, деленных на постоянную Планка.

Есть классическая формула, она качественно даёт представление о дисперсии, о том, что существует область нормальной, аномальной дисперсии, есть область поглощения. Зная зависимости показателя преломления, можно рассчитывать всякие дисперсионные задачи. В том числе и задачи распространения сверхкоротких импульсов, задачи преломления света и так далее.

## Среды с отрицательным показателем преломления. Явления на границе раздела двух сред.

### Законы геометрической оптики.

Для того, что бы создать среду с отрицательным коэффициентом преломления, необходимо:

- 1) Чтобы было и  $\mu$ , и  $\varepsilon$ ;
- 2) Мы привыкли что  $\mu$ - всегда единица, а нужно, что бы была дисперсия, которая распространялась бы не только на электрические свойства, но и на магнитные, что бы было и  $\mu(\omega)$ ;  $\varepsilon(\omega)$ .

Мы  $\mu$  считали единицей, потому что у нас длина волны намного больше периодичности структуры вещества. Но если создать среду, у которой периодичность будет на порядок меньше длины волны. Эта среда искусственная, она называется - метасреда.

$\mu$  и  $\varepsilon$  связывает дипольный момент вещества  $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$  и соответственно индукция  $B = \mu_0\mu H$ . Значит, нужно создать такую среду, в которой под действием электромагнитного поля создавалось бы поляризация (разделялись заряды в среде) и были какие-то токи, которые создавали индукцию магнитного поля. Эта среда состоит из небольших колебательных контуров (проводники специальной изогнутой формы), отделенных друг от друга на расстояние  $D$ . Тогда  $\mu$ ,  $\varepsilon$  и  $P$  будут зависеть от частоты. Тогда  $n = \sqrt{\varepsilon\mu} < 0$

### Явления на границе двух сред

Рассмотрим две среды. Это два диэлектрика. Будем считать известной действительную часть коэффициента преломления, а мнимая часть  $\chi$  хоть и существует, но она нам не важна, потому что у нас есть граница раздела.

Граница раздела двух сред. Показатели преломления сред  $n_1 n_2$ , речь идет о действительных показателях преломления.

Пусть падает волна. В точку падения луча поместим начало координат, направим сюда ось  $Z$ , а ось  $Y$  перпендикулярна плоскости рисунка. Стало быть нормаль границы раздела и направление падающего луча лежат в плоскости, которая является плоскостью падения. Опыт показывает, что наряду с падающей волной будет существовать отраженная волна и будет существовать преломленная волна.

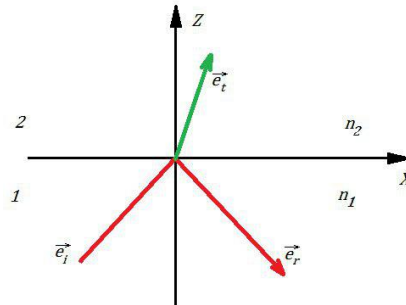


Рис. 14.4: Граница раздела двух диэлектриков

Падающая волна - направление характеризуется  $\vec{e}_i$ .

Отраженная волна - направление распространения характеризуется  $\vec{e}_r$

Преломленная волна -  $\vec{e}_t$

$\vec{A}_i$  направлен в сторону напряженности поля, это амплитуда падающей волны, у отраженной волны есть вектор  $\vec{A}_r$ , соответственно, у преломленной волны есть вектор  $\vec{A}_t$ . Эти векторы перпендикулярны  $\vec{e}$ -векторам.

$$\vec{E}_i = \vec{A}_i \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{r}\vec{e}_i}{v_1} \right) \right]$$

$v_1$  - это  $\frac{c}{n_1}$

$v_2$  - это  $\frac{c}{n_2}$

$$\vec{E}_r = \vec{A}_r \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{r}\vec{e}_r}{v_1} \right) \right]; \vec{E}_t = \vec{A}_t \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{r}\vec{e}_t}{v_2} \right) \right]$$

Будем считать, что падающая волна плоскополяризована и вектор  $\vec{e}$  колеблется.

Поле в первой среде состоит из полей падающей волны и волны отраженной  $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ . Поле во второй среде есть только прошедшая волна  $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$ .

Для того, что бы найти связь между амплитудой и между углами, нужно воспользоваться граничными условиями.

**Граничные условия** На границе раздела двух сред, поле в первой волне (его тангенциальная составляющая) равно тангенциальной составляющей во второй среде  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ . То же самое и напряженность магнитного поля  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ .

$$t - \frac{\vec{r}\vec{e}_i}{v_1} = t - \frac{\vec{r}\vec{e}_r}{v_1} = t - \frac{\vec{r}\vec{e}_t}{v_2}$$

$$\vec{r}\vec{e}_i = r \sin \vartheta_i; \vec{r}\vec{e}_r = r \sin \vartheta_r; \vec{r}\vec{e}_t = r \sin \vartheta_t; \vec{r} \in (x, y)$$

$$\frac{\sin \vartheta_i}{v_1} = \frac{\sin \vartheta_r}{v_1} = \frac{\sin \vartheta_t}{v_2}$$

$$\vartheta_i = \vartheta_r$$

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

### Явление полного внутреннего отражения.

$$n_1 > n_2$$

В результате чего может быть ситуация, когда преломленный луч скользит вдоль границы раздела.  $\sin \vartheta_{отраж} = \frac{n_2}{n_1} < 1$

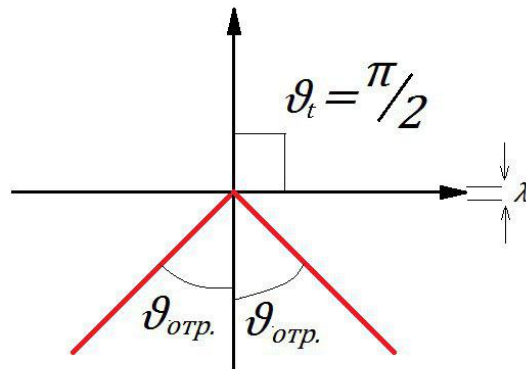


Рис. 14.5: Полное внутреннее отражение

Из граничных условий появляются не только формулы для направления отраженной, преломленной волны, но так же появляется формулы Френеля.

### Формулы Френеля.

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{t\parallel}} = \frac{A_{r\parallel}}{A_{t\parallel}} = -\frac{\tan(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\tan(\vartheta_i + \vartheta_t)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{A_{t\parallel}}{A_{i\parallel}} = \frac{2 \sin \vartheta_t \cos \vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t) \cos(\vartheta_i - \vartheta_t)}$$

$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{t\perp}} = \frac{A_{r\perp}}{A_{t\perp}} = -\frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)}$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{A_{t\perp}}{A_{i\perp}} = \frac{2 \sin \vartheta_t \cos \vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)}$$

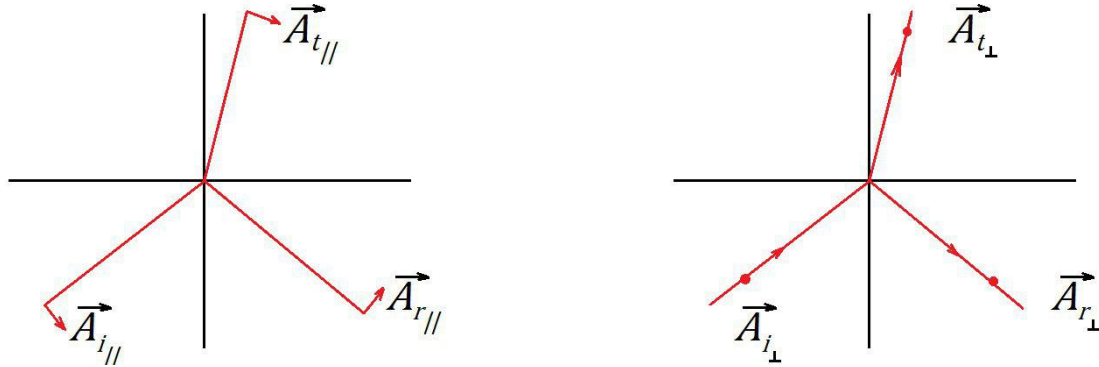


Рис. 14.6: Правило знаков

Физический смысл:

Вместо амплитудных коэффициентов используют энергетические коэффициенты отражения.

$$R_{\parallel} = r_{\parallel}^2; R_{\perp} = r_{\perp}^2; T_{\parallel} = t_{\parallel}^2; T_{\perp} = t_{bot}^2$$

$$\vartheta = 0; R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}; R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}$$

Если свет падает из воздуха в стекло или наоборот, то коэффициент отражения будет один и тот же.

Оценка:

$n_1 = 1$ , а  $n_2 = 1.5$ , то  $R_{\parallel} = R_{\perp} = 0.04 \approx 4\%$ .

При нормальном падении, на границе воздух-стекло отражается ничтожная часть света, которая равна 4%.

**Угол Брюстера**

$$\vartheta_{Br}; r_{\parallel} = 0; \tan(\vartheta_i + \vartheta_t) = \infty$$

$$\vartheta_i + \vartheta_t = \frac{\pi}{2}; \frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \frac{\sin \vartheta_i}{\sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta_i)} = \frac{n_2}{n_1};$$

$\vartheta_i$  - угол Брюстера

$$\vartheta_i = \vartheta_{Br} = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

В отраженном свете, если падение осуществляется под углом Брюстера, нет отраженной компоненты, у которой вектор напряженности лежал бы в плоскости доски. Угол Брюстера это арктангенс, а угол полного отражения это арксинус, арктангенс всегда меньше, чем арксинус. Поэтому понятно, что угол Брюстера лежит левее угла полного отражения.

## Физический смысл угла Брюстера.

Мы знаем, что  $\vartheta_t = \frac{\pi}{2} - \vartheta_i$ .

Если свет падает под углом Брюстера, то отражается он тоже под углом Брюстера. Свет преломляется под углом  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{бр}$ . Между углом отраженной и преломленной волны образуется угол, равный 90 градусов. Но когда там есть прямой угол, то отраженной волны нет, то есть, она формируется за счет того, что осцилляторы (или осциллирующие диполи), которые составляют существо этой среды, осциллируют волны по всем направлениям и сумма всех этих излученных волн приводит к образованию отраженной волны.

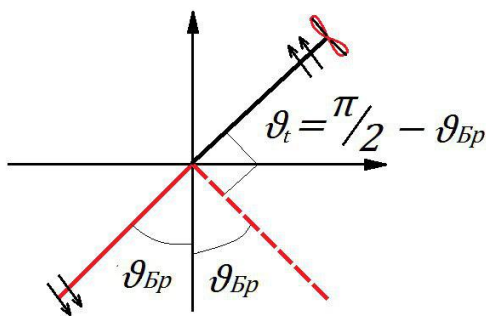


Рис. 14.7: Угол Брюстера

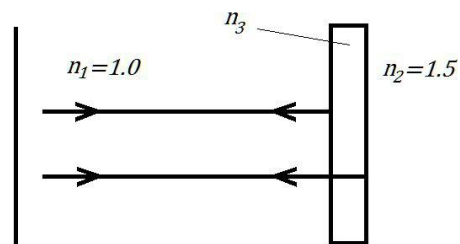


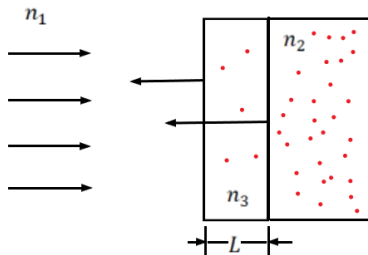
Рис. 14.8

Если свет падает из менее плотной в более плотную среду, то отраженная волна будет в противофазе с падающей. Если наоборот, то отраженная волна будет в фазе с падающей (рис. 125).

## Лекция 15

### Просветление оптики. Диэлектрические зеркала.

Есть среда - кусок стекла. Показатель преломления стекла  $n_2$ . Свет падает из воздуха на стекло. Показатель этой среды  $n_1$ . В результате произойдет отражение света. Коэффициент отражения -  $R$ .



$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

Нанесем на поверхность среды пленку толщины  $L$ . Показатель преломления пленки  $n_3$ . Тогда свет будет отражаться и от первой, и от второй поверхностей.

Рис. 15.1: Просветляющее покрытие.

Пользуясь представлением об интерференции волн, отраженных от обеих поверхностей, для того, чтобы погасить отраженную волну. В результате получим **просветляющее покрытие**.

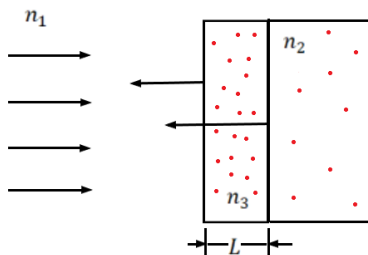
**Просветляющее покрытие:**

$$\left( \frac{n_3 - n_1}{n_3 + n_1} \right)^2 = \left( \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \right)^2 \rightarrow n_3 = \sqrt{n_1 n_2}$$

$$2Ln_3 = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$Ln_3 = \frac{\lambda_0}{4}$$

### Диэлектрическое зеркало.



Среда  $n_3$  должна быть более плотная.

$$n_3 > n_2$$

$$2Ln_3 = \frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2} = \lambda_0$$

Рис. 15.2: Диэлектрическое зеркало.

## Металлооптика. Плазменная частота.

Комплексная диэлектрическая проницаемость:

$$\varepsilon_k = \varepsilon + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$

Воспользуемся формулой Лоренц-Лоренца.

Для металла:

$$\frac{\varepsilon_k - 1}{\varepsilon_k + 2} = \frac{\omega_p^2}{3} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\sigma\omega}$$

$$\omega_0 = 0; \varepsilon_k + 2 \approx 3$$

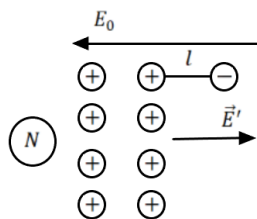
$$\varepsilon_k = 1 + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 + 2i\sigma\omega}$$

Плазменная частота:

$$\omega_p^2 = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

**Смысл плазменной частоты:**

Есть неподвижные заряженные ядра. Есть электроны. Приложено внешнее электрическое поле  $E_0$ . Тогда электроны начнут смещаться вправо на расстояние  $l$ . В результате смещения, возникнет внутреннее поле  $\vec{E}'$ , направленное навстречу внешнему полю (рис. 124).



$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eE_0}{m} t^2$$

$$E = E - E'$$

Рис. 15.3: Электростатика

$$E = E_0 - E' = E_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} t^2 \right) = E_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{2} t^2 \right)$$

$$t_0 \sim \frac{1}{\omega_p}$$

$T_0 > \frac{1}{\omega_p}$  - не проникают в металл.

$\lambda_p = c_1 T_0 = \frac{c}{\omega_p}$  - плазменная длина волны.

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

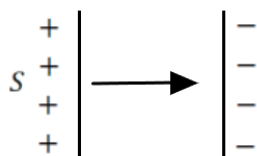


Рис. 15.4: Конденсатор

$$E' = \frac{q'}{S\epsilon_0}$$

$$E = E - E'$$

$$q' = SlNe$$

$$E' = \frac{SlNe}{S\epsilon_0} = \frac{Ne}{\epsilon_0} \frac{eE_0}{m} t^2$$

## Глава 6. Волны в анизотропных средах.

Анизотропные среды - это кристаллы.

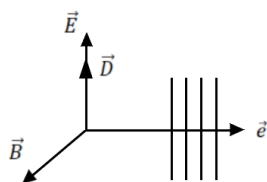


Рис. 15.5: Изотропная среда

$$v = \frac{c}{n}$$

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{D}{\epsilon_0 E}$$

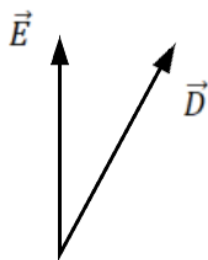


Рис. 15.6: Анизотропная среда

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x$$

$$D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y$$

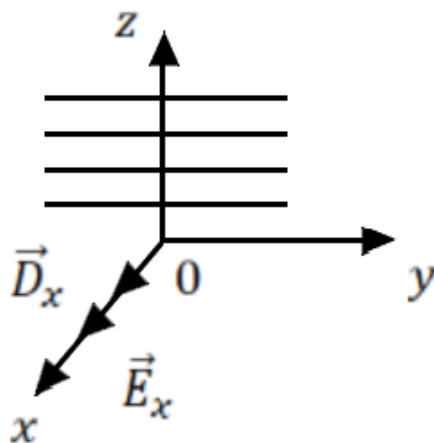
$$D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & & \\ & \epsilon_y & \\ & & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

## Главные показатели преломления и главные скорости.

Частные случаи распространения волны:



Рис. 15.7: Главная скорость  $v_x$  и показатель преломления  $n_x$ 

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x$$

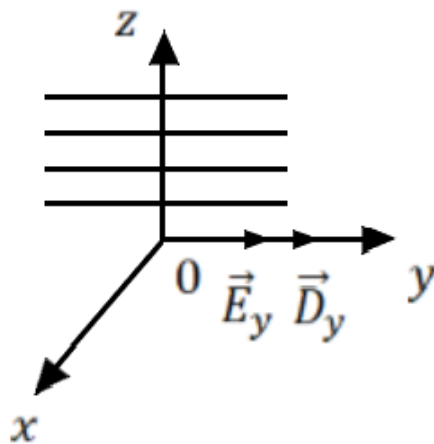
Главный показатель преломления:

$$n_x = \sqrt{\varepsilon_x}$$

Главная скорость:

$$v_x = \frac{c}{n_x}$$

$v_x$  - скорость, идущая вдоль оси  $z$ .

Рис. 15.8: Главная скорость  $v_y$  и показатель преломления  $n_y$ 

$$D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y$$

Главный показатель преломления:

$$n_y = \sqrt{\varepsilon_y}$$

Главная скорость:

$$v_y = \frac{c}{n_y}$$

$v_y$  - скорость, идущая вдоль оси  $z$ .

**Вывод:**

Скорость распространения волны, вдоль главной оси, зависит от состояния поляризации.

## Классификация кристаллов. Скорость по нормали и поверхность нормалей.

1. Изотропный.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon^{об}$$

$$v_0 = \frac{c}{n^{об}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^{об}}}$$

2. Одноосный кристалл.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon^{об}; \varepsilon^{необ} = \varepsilon_z$$

$$n^{об} = \sqrt{\varepsilon^{об}}; n^{необ} = \sqrt{\varepsilon^{необ}}.$$

$$v_x = v_y = v^{об}$$

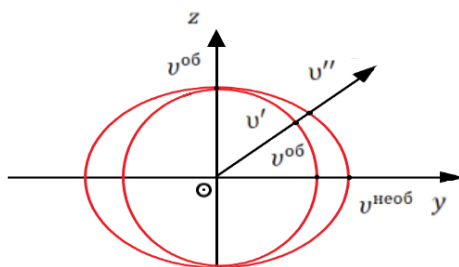


Рис. 15.9: Поверхность фазовых скоростей

$$v' = v^{об} = \frac{c}{\varepsilon_x} = \frac{c}{\varepsilon_y}$$

$$v^{об} < v'' < v^{необ} = \frac{c}{\varepsilon_z}$$

### 3. Двуосный кристалл.

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$$

## Распространение плоской монохроматической волны. Луч и нормаль.

Нормаль - это отрезок, который совпадает с волновым вектором.

Луч - отрезок, направление которого идет вдоль направления распространения энергии.

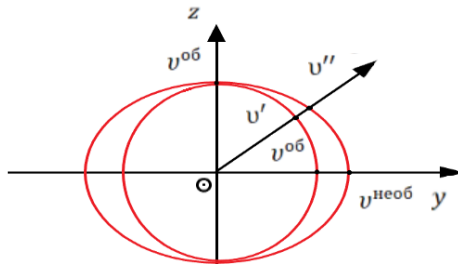


Рис. 15.10

$$\vec{E} = \vec{A} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{r}\vec{e}n}{c} \right) \right]$$

$n = \frac{c}{v} = n(z) v(\vec{e})$  - функция направления.

См. лекцию 3.

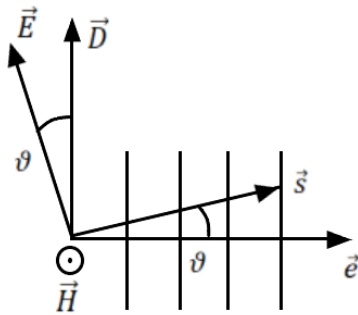
$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = +\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$-\frac{n}{c}(\vec{e} \times \vec{E}) = -\mu_0 \vec{H}$$

$$-\frac{n}{c}(\vec{e} \times \vec{E}) = \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} = \frac{n^2}{c^2 \mu_0} (\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{E})) = n^2 \varepsilon_0 (\vec{E} - \vec{e}(\vec{e}\vec{E}))$$



Вектор Пойтинга

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$\vec{S}$  - направление луча.

Рис. 15.11: Вектор Пойтинга

## Лекция 16

### Повторение прошлой лекции.

Анизотропный одноосный кристалл:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon^{ob} = \varepsilon^o$ ;  $\varepsilon^{neob} = \varepsilon_z = \varepsilon^e$

$\varepsilon^o, \varepsilon^e$  - компоненты тензора диэлектрической проницаемости.

Главный показатель преломления:  $n_o = \sqrt{\varepsilon^o}$ ;  $n_e = \sqrt{\varepsilon^e}$ .

Главные скорости:  $v_x = v_y = \frac{c}{n_o} = v_o$ ;  $v_z = \frac{c}{n_e} = v_e$ .

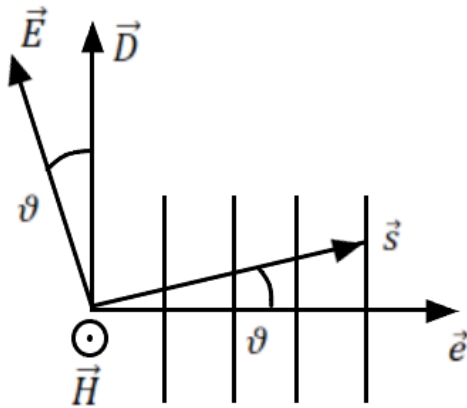


Рис. 16.1: Ориентация векторов плоской волны

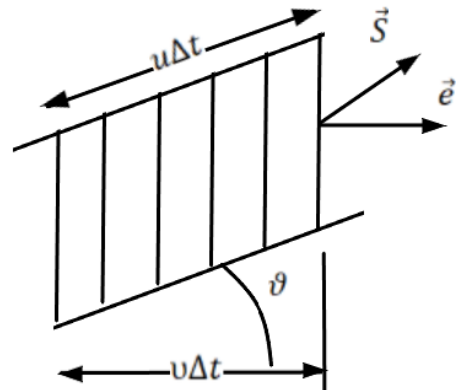


Рис. 16.2: Фазовый фронт

$\vec{E}$  - вектор напряженности электрического поля.

$\theta$  - угол анизотропии.

Распространение энергии происходит вдоль луча  $\vec{S}$ .

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Фазовый фронт движется по направлению вектора  $\vec{e}$ , а поток энергии по направлению луча  $\vec{S}$ .

$v$  - фазовая (по нормали) скорость.

$u$  - групповая (по лучу) скорость распространения энергии.

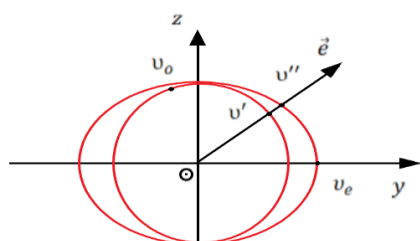
$$u = \frac{v}{\cos \theta}$$

### Вывод:

Скорость распространения по нормали зависит от направления распространения плоской волны или от направления распространения фазового фронта.

$$\vec{v}(\vec{e})$$

Эта зависимость получается из уравнения нормалей.



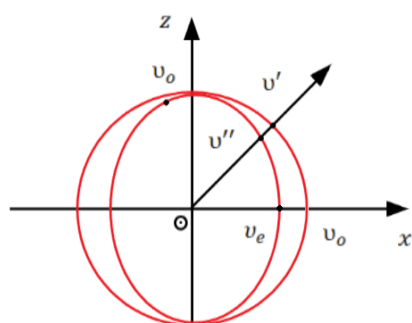
$$\begin{aligned} v' &= v_o \\ v_o &< v'' < v_e \end{aligned}$$

Рис. 16.3: Отрицательный кристалл

Скорость распространения по лучу зависит от направления распространения этого луча.

$$\vec{u}(\vec{S})$$

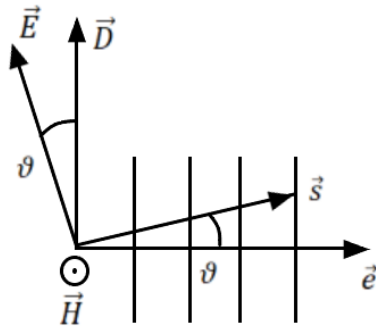
Эта зависимость получается из лучевого уравнения.



$$\begin{aligned} v' &= v_o \\ v_e &< v'' < v_o \end{aligned}$$

Рис. 16.4: Положительный кристалл

### Уравнение нормалей Френеля:



$$\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \left[ \vec{E} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{E}) \right]$$

$$n = n(\vec{e})$$

$$v(\vec{e}) = \frac{c}{n(\vec{e})}$$

Рис. 16.5: Ориентация векторов плоской волны

$$\begin{cases} D_{x,y,z} = \varepsilon_0 n^2 \left[ E_{x,y,z} - e_{x,y,z}(\vec{e} \cdot \vec{E}) \right] \\ E_{x,y,z} = \frac{D_{x,y,z}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{x,y,z}} \\ \vec{D} \cdot \vec{e} = D_x e_x + D_y e_y + D_z e_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{e_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{e_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{e_z^2}{v^2 - v_z^2}}$$

$$e_x^2(v^2 - v_y^2)(v^2 - v_z^2) + e_y^2(v^2 - v_x^2)(v^2 - v_z^2) + e_z^2(v^2 - v_x^2)(v^2 - v_y^2)$$

1) изотропная среда:  $v_x = v_y = v_z = v_0$

$$(v^2 - v_0^2)(v^2 - v_0^2) \underbrace{(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)}_{=1} = 0$$

$$v' = v_0; v'' = v_0$$

2) одноосный кристалл:

$$e_x^2(v^2 - v_0^2)(v^2 - v_e^2) + e_y^2(v^2 - v_0^2)(v^2 - v_e^2) + e_z^2(v^2 - v_0^2)(v^2 - v_0^2) = 0$$

$$(v^2 - v_0^2) [(e_x^2 + e_y^2)(v^2 - v_e^2) + e_z^2(v^2 - v_0^2)] = 0$$

$$v' = v_0;$$

$$v''^2 - v_e^2(e_x^2 + e_y^2) - v_0^2 e_z^2 = 0$$

$$\boxed{v''^2 = v_e^2 \sin^2 \phi + v_0^2 \cos^2 \phi}$$

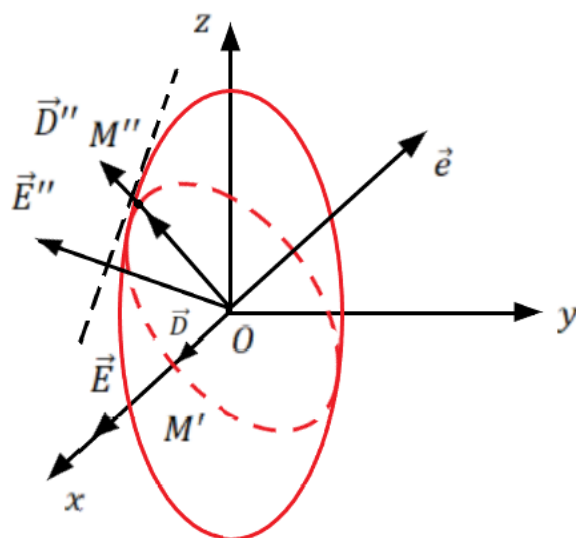


Рис. 16.6: Эллипсоид нормалей

### Эллипсоид нормалей.

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1 - \boxed{\text{эллипсоид нормалей}}$$

Одноосный кристалл:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_o$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_e$$

$$OM' = n' = \frac{c}{v'}$$

$$OM'' = n'' = \frac{c}{v''}$$

$\vec{E}''$  - перпендикулярен к касательной.

### Уравнение лучевых скоростей.

$$\frac{S_x^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_x^2}} + \frac{S_y^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_y^2}} + \frac{S_z^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_z^2}} = 0$$

### Двойное лучепреломление. Принцип Гюйгенса.

#### Принцип Гюйгенса-Френеля для анизотропных сред.

Есть анизотропная среда. Свет падает из воздуха в кристалл. Кристалл вырезан так, что его поверхность составляет некоторый угол с оптической осью. С помощью лучевой поверхности построим ход лучей и нормалей в этой среде.

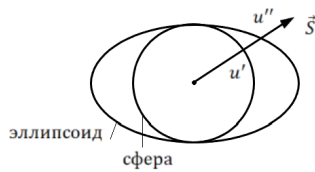


Рис. 16.7: Лучевая поверхность

Поверхность нормали характеризует направление скорости для плоской волны. Лучевая поверхность (поверхность групповых скоростей) характеризует положение волнового фронта от точного источника.

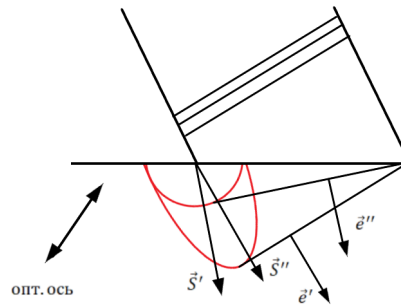


Рис. 16.8: Лучевая поверхность. Отрицательный кристалл

$$\vec{S}' \parallel \vec{e}''$$

$$\vec{S}'' \nparallel \vec{e}''$$

Когда пучок света упадет на границу раздела, он разделится на два световых пучка:  $\vec{S}'$  и  $\vec{S}''$ .

### Поляризаторы.

Пусть есть поляририд. Поляририд имеет главную плоскость. Свет, проходя через поляририд, поступает на кристалл. Кристалл имеет некоторую толщину  $l$ . Далее свет поступает на анализатор. Плоскость анализатора повернута на угол.

$A$  - анализатор.

$K$  - кристалл.

$P$  - поляризатор.

Разность хода:

$$(n_e - n_o)l = m\lambda + \frac{\lambda}{4} \quad (4)$$

$$(n_e - n_o)l = m\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

(4) - четвертьволновая пластинка.

(5) - полуволновая пластинка.

Четвертьволновая пластинка превратит свет линейной поляризации в свет эллиптической поляризации.



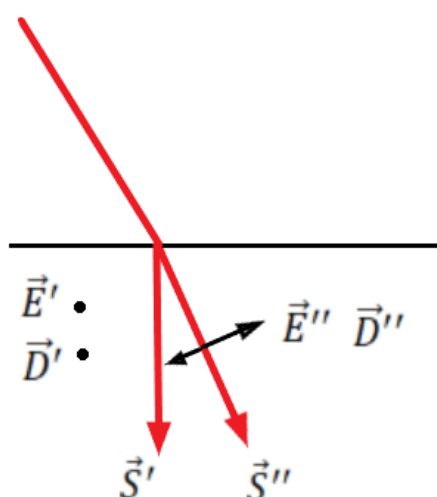


Рис. 16.9: Граница раздела. Ход лучей в кристалле

Если разность фаз равно нулю, то будет *линейная поляризованность света*.

Если разность фаз будет равна  $\frac{\pi}{2}$ , то свет будет *эллиптической поляризации*.

При равных амплитудах - *круговая поляризация*.

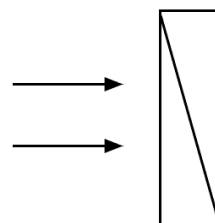


Рис. 16.10: Поляроид. Призма Николя

При угле  $45^\circ$  - круговая поляризация (частный случай).

Четвертьволновая пластинка позволяет получать из света линейной поляризации свет круговой поляризации, и наоборот.

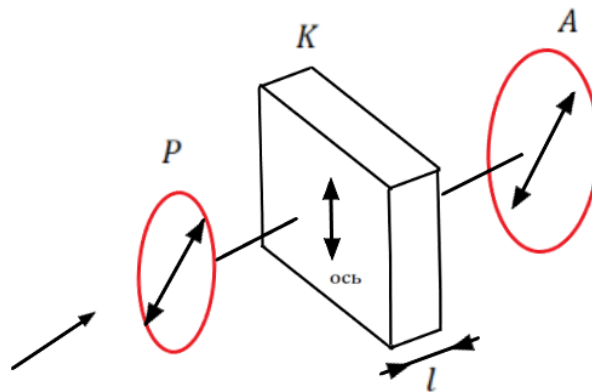


Рис. 16.11: Поляризация

## Лекция 17

### Глава 7. Рассеяние света.

#### Молекулярное рассеяние света.

Пусть есть какой-нибудь объем  $V$  жидкости или газа. Вдоль оси  $z$  распространяется световая волна. Пусть плоская световая волна монохроматической частоты  $\omega_0$  распространяется так, что вектор  $\vec{E}$  колеблется в плоскости  $xz$ . Тогда под действием этой волны возникают осциллирующие диполи (молекулы). И эти диполи являются источником вторичных волн. Вторичные волны являются причиной рассеяния света.

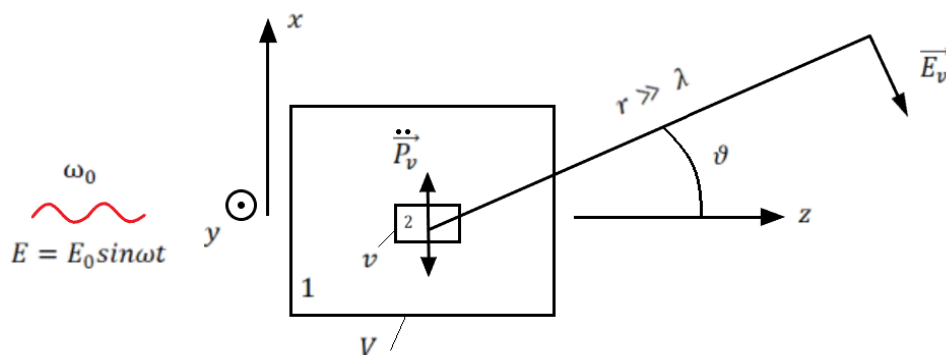


Рис. 17.1: Рассеяние света

$V$  - объем 1 вещ.

$v$  - объем 2 вещ.

$v \ll \lambda^3$

$P_v$  - дипольный момент объема.

$$P_v = P v$$

На большом расстоянии  $r \gg \lambda$  диполь излучает электромагнитную волну. Напряженность электромагнитной волны  $\vec{E}_v$ .

$$E_v = \frac{1}{c^2 r \varepsilon_0} \ddot{P}_v \sin \theta$$

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$$

Рассеяние происходит из-за флуктуации плотности и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$$

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E + \varepsilon_0 \Delta\varepsilon E = \bar{P} + \Delta P$$

$\Delta\varepsilon, \Delta P$  - флуктуируют.

Тогда  $P_v$  будет тоже флуктуировать.

$$P_v = vP = v(\bar{P} + \Delta P)$$

$E_s$  - полное поле.

При однородной среде сумма всех  $E_v = 0$ .

$$E_s = \sum E_v = \frac{1}{4\pi c^2 r \varepsilon_0} \sum \varepsilon_0 \Delta\varepsilon v \ddot{E} \sin \theta$$

$$\ddot{E} = -\omega^2 E$$

$$\Delta\varepsilon = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \Delta\rho$$

$\Delta\rho$  - случайная флуктуация плотности.

$$E_s = -\frac{\omega^2}{4\pi c^2 r} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \sum (v \Delta\rho) E \sin \theta$$

**Переход к интенсивности рассеянного света:**

Промежуточная формула для интенсивности рассеянного света:

$$I_s = \overline{E_s^2} = \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left[ \sum v \Delta\rho \right]^2 I_0 \sin^2 \theta$$

## Рассеяние в газах. Формула Рэлея.

**газы:**  $\varepsilon - 1 = Na = \text{const} \cdot \rho$

$N$  - концентрация

$a$  - поляризуемость одной молекулы

$$\left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = \varepsilon - 1 = n^2 - 1 = \underbrace{(n+1)(n-1)}_{\approx 2} = 2(n-1)$$

$$\left[ \sum v \Delta \rho \right]^2 = \sum v^2 \overline{\Delta \rho^2}$$

Относительная флуктуация плотности в газе:

Из биномиального распределения:

$$\left( \frac{\overline{\Delta \rho}}{\bar{\rho}} \right)^2 = \frac{1}{N_0 p} = \frac{V}{N_0 v} = \frac{1}{N v}$$

$$p = \frac{v}{V}$$

$$\sum v^2 \overline{\Delta \rho^2} = \bar{\rho}^2 \sum v^2 \frac{\overline{\Delta \rho^2}}{\bar{\rho}^2} = \bar{\rho}^2 \sum v^2 \frac{1}{N v} = \frac{\bar{\rho}^2}{N} V$$

**Формула Рэлея (для газов).**

$$I_s = \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \frac{V}{N} 4(n-1)^2 I_0 \sin^2 \theta$$

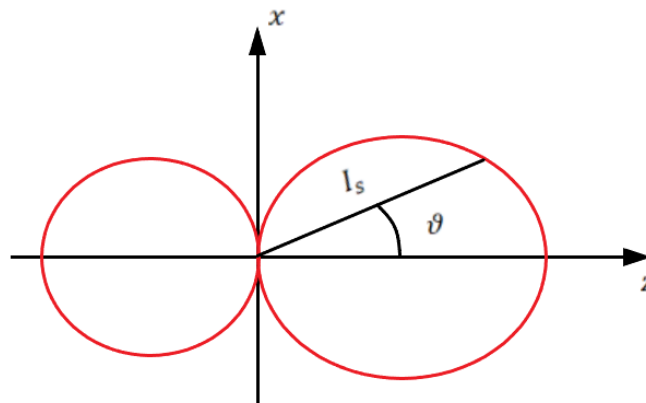


Рис. 17.2: Диаграмма направленности

Свет рассеивается назад, вперед, но не под углом  $90^\circ$ . Потому что падающий свет плоскополяризован и вектор  $\vec{E}$  у падающего света лежит в плоскости  $XOZ$ .

**Неполяризованный свет:**

$$I_0 \sin^2 \theta \rightarrow \frac{I_0}{2} \sin^2 \theta_x + \frac{I_0}{2} \sin^2 \theta_y = \frac{I_0}{2} (1 + \cos^2 \theta_z)$$

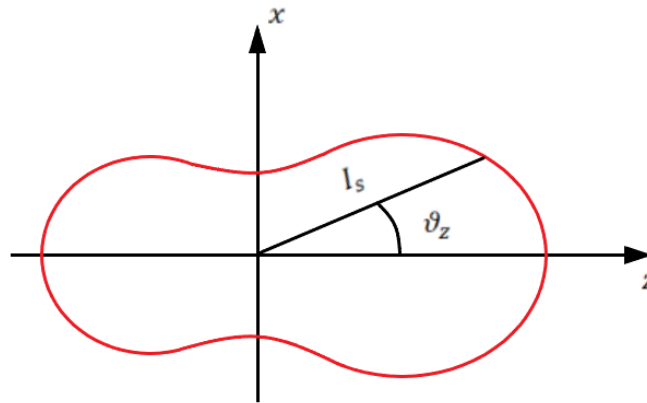


Рис. 17.3: Диаграмма направленности не поляризованного света

$$I_s = \frac{4\pi^2}{\lambda^2 r^2} \frac{V}{N} (n - 1) \frac{I_0}{2} (1 + \cos^2 \theta_z)$$

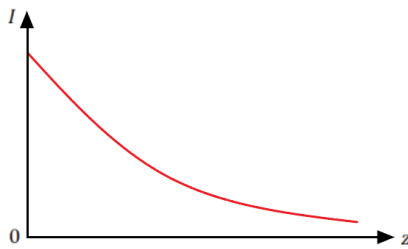


Рис. 17.4: Убывание интенсивности

В результате рассеяния света, свет, распространяясь вдоль оси  $z$ , интенсивность света постепенно убывает по экспоненциальному закону.

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha_s z}$$

$\alpha_s = \frac{4\pi}{3\lambda^2} (n - 1)^2 \frac{1}{N}$  - коэффициент ослабления света (мутности).

Оценка:

Воздух:  $l = \frac{1}{\alpha_s} \approx 40 \text{ км}$

## Рассеяние в жидкостях. Формула Эйнштейна.

**жидкости:**

$$\left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)$$

$$\overline{\left[ \sum v \Delta \rho \right]^2} = \sum v^2 \overline{\Delta \rho^2}$$

$$\left( \frac{\overline{\Delta \rho}}{\bar{\rho}} \right)^2 = \frac{\beta_T k T}{v}$$

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

$\beta_T$  - коэффициент изотермической сжимаемости.

$$\sum v^2 \overline{\Delta \rho^2} = \overline{\rho^2} \sum v^2 \frac{\overline{\Delta \rho^2}}{\rho^2} = \overline{\rho^2} \sum v^2 \frac{\beta_T kT}{v} = \overline{\rho^2} V \beta_T kT$$

**Формула Эйнштейна:**

$$I_s = \frac{4\pi^2}{\lambda^2 r^2} V \beta_T kT \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^2 \frac{I_0}{2} (1 + \cos^2 \theta_z)$$

Коэффициент изотермической сжимаемости очень сильно зависит от температуры. Когда жидкость приближается по своей температуре к критической, резко возрастает коэффициент изотермической сжимаемости. В результате резко возрастает интенсивность рассеяния света. Резкое возрастание интенсивности рассеяния света носит название **критическая опалесценция**.

Оценка:

$$l \sim \frac{1}{\alpha_s} \sim \frac{40 \text{ км}}{185}$$

## Спектральный состав рассеянного света.

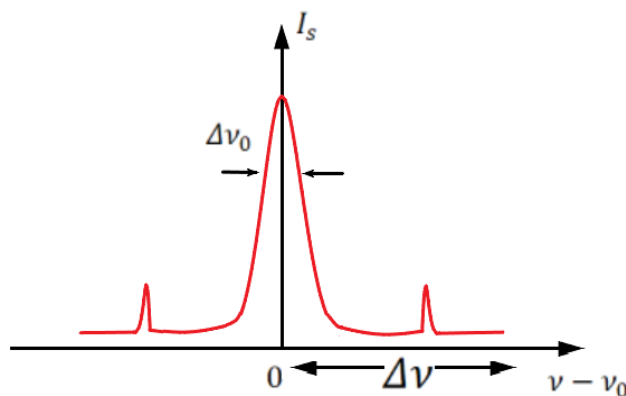


Рис. 17.5: Линия Рэлея

$$\Delta \nu \sim \frac{1}{\tau_{\text{вп}}} \sim 10^{12} \text{ Гц}$$

Частота рассеянного света  $\nu - \nu_0$ .

$\nu_0$  - частота падающей волны.

На рассеивающий объем падает свет фиксированной частоты. Рассеянный свет имеет спектр. Рассеянный свет содержит центральную компоненту определенной ширины, крылья линии Рэлея и спутники. Все это происходит в результате хаотичного движения молекул.

$\Delta\nu_0$  - центральная компонента.

Время выравнивания плотности (температуры) в объеме  $\lambda x \lambda x \lambda$ :

$$\tau_T = \frac{\lambda^2}{\chi_T}$$

$\chi_T$  - коэффициент температуропроводности.

Ширина крыла:

$$\Delta\nu_0 \sim \frac{1}{\tau_T}$$

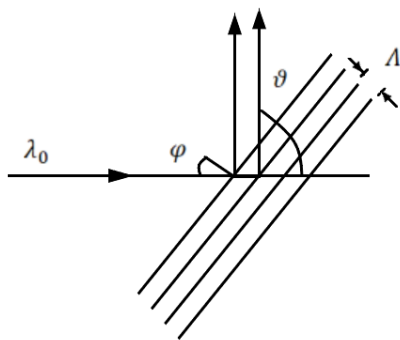
жидкости:  $\Delta\nu_0 \sim 10^8 \text{ Гц}$

газы:  $\Delta\nu_0 \sim 10^7 \text{ Гц}$

Крылья связаны со вращениями молекул (колебаниями анизотропии).

$\tau_{\text{вр}} \sim 10^{-12} \text{ с}$  - время вращения.

## Рассеяние в мутных средах.



$\theta$  - угол направления рассеяния

$\Lambda$  - длина акустической волны

Разность хода:

$$2\Lambda \cos \phi = \lambda_0$$

Рис. 17.6: Акустические волны

$$2\Lambda \sin \frac{\phi}{2} = \lambda_0$$

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ;  $q = \frac{2\pi}{\Lambda}$  - волновое число.

$$2k_0 \sin \frac{\theta}{2} = q$$

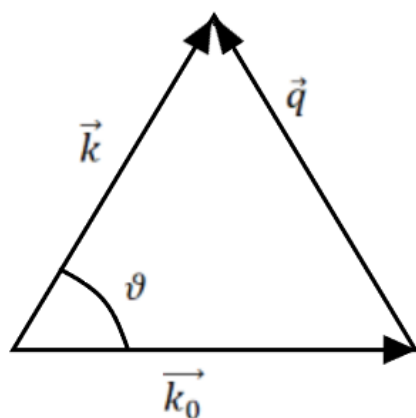
$\vec{k}_0$  - волновой вектор падающей волны.

$\vec{q}$  - волновой вектор акустического фона.

$\vec{k}$  - волновой вектор рассеянной волны.

**Итог:**

По ширине спектральной компоненты можно оценить коэффициент температуропроводности.



$$k = \frac{\omega_0 + \Omega}{c}$$

$$q = \frac{\Omega}{v_{\text{зв}}}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{q}$$

Рис. 17.7: Волновые векторы

По расположению компонент можно определить частоты тех акустических волн, которые участвовали в рассеянии.

По ширине крыла можно говорить о времени вращения. Зная время вращения, можно оценить момент инерции молекулы.

Зная момент инерции молекулы, можно узнать о ее строении.



## Лекция 18

### Глава 8. Элементы квантовой теории излучения света.

**Комбинационный принцип:**

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Где:  $R \approx 109000 \text{ см}^{-1}$ ;  $m = 1, 2, 3 \dots$ ;  $n = 2, 3 \dots$

Формула помогает описать все спектральные линии.

**Серия Бальмера:**

$m = 2, n = 3, 4 \dots$

В серии Бальмера есть ряд спектральных линий, которые находятся в видимом диапазоне.

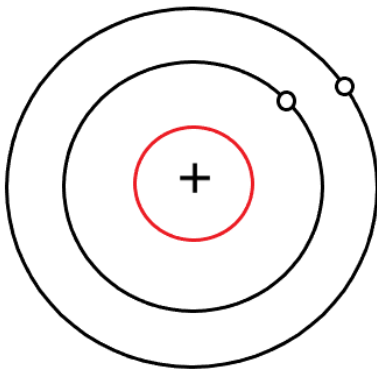


Рис. 18.1: Атом водорода

В атоме существует стационарное энергетическое состояние.

$$h\nu = W_2 - W_1$$

$W_1, W_2$  - энергетический уровень.

У каждого атома существует набор энергетических уровней. И переход с одного энергетического уровня на другой сопровождается либо излучением кванта света, либо квант света может поглотиться и тогда атом переходит в более высокоэнергетическое состояние.

Существует три вида радиационных переходов:

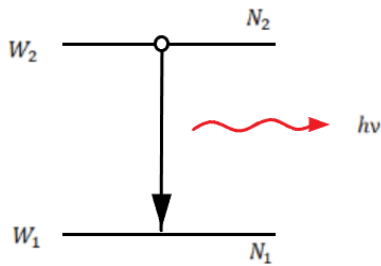
### Спонтанное излучение.

Атом, находясь в возбужденном состоянии, излучает цуг электромагнитную волну, амплитуда которой убывает по экспоненциальному закону. И цуг имеет длительность по времени, равный времени затухания.

**Квантовая интерпретация:**

Есть пара энергетических уровней  $W_1$  и  $W_2$ .

Если атом находится в состоянии с энергией  $W_2$ , то при переходе атома из состояния с энергией  $W_2$  в  $W_1$ , переход сопровождается спонтанным испусканием кванта света.



Пусть  $N_1$  - число атомов, находящиеся в веществе в состоянии с энергии  $W_1$ , а  $N_2$  - число атомов, находящиеся в веществе в состоянии с энергии  $W_2$ . Тогда:

Рис. 18.2: Спонтанное излучение

### Вероятность спонтанного перехода:

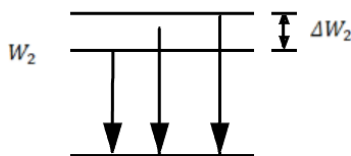
$$dp_N = \frac{dt}{\tau} = \frac{-dN_2}{N_2}$$

Где  $\tau$  - время жизни в состоянии  $W_2$ .

При  $t = 0$  в возбужденном состоянии находится  $N_{20}$  - атомов, то это число атомов с течением времени в результате спонтанного излучения будет убывать по экспоненциальному закону.

$$N_2(t) = N_{20}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\frac{1}{\tau} = A_{21}$  - коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения.  
 $A_{21} \sim 10^8 c^{-1}$



Энергетический уровень  $W_2$  размыт. Излучается континуум квантов света, частоты которых лежат в определенном диапазоне.

Рис. 18.3: Энергетический уровень

$$\Delta W_2 = h \frac{1}{\tau} : \tau \Delta W_2 = h.$$

### Спектр излучения:

$$h\Delta\nu = \Delta W_2$$

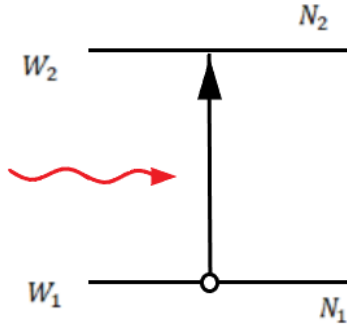
Размытость  $\Delta W_2$  приводит к уширению спектра.

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau} = A_{21}$$

## Вынужденное поглощение.

Когда свет распространяется в среде и частота волны совпадает с частотой колебания осциллятора, происходит интенсивное поглощение света.

**квантовая интерпретация:**



Есть энергетический уровень  $W_2$  и  $W_1$ . В результате поглощения, атом переходит в возбужденное состояние и возникает поглощение света.

Рис. 18.4: Энергетический уровень

**Вероятность вынужденного поглощения:**

$$dp_N = \frac{dt}{\tau} = \frac{-dN_1}{N_1} = B_{12}u dt$$

Где  $u = \frac{I}{c}$  - объемная плотность энергии поля.

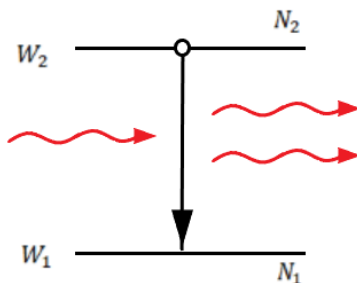
$I$  - интенсивность света.

$B_{12}$  - коэффициент Эйнштейна для вынужденного поглощения.

При увеличении интенсивности света, будет расти вероятность вынужденного поглощения.

## Вынужденное излучение.

**квантовая интерпретация:**



Есть атом в возбужденном состоянии. Падает квант света. В результате этого процесса возникает вынужденное излучение. Атом переходит в нижнее состояние и к этому фотону добавляется точно такой же фотон. В следствии чего происходит усиление света.

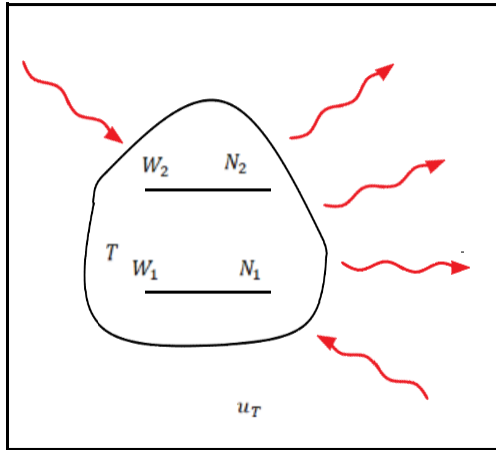
Рис. 18.5: Энергетический уровень

**Вероятность вынужденного излучения:**

$$dp_N = \frac{dt}{\tau} = \frac{-dN_2}{N_2} = B_{21}u dt$$

Где  $B_{21}$  - коэффициент Эйнштейна для вынужденного излучения.

## Равновесное тепловое излучение



Есть вещество, которое нагрето до какой-то температуры  $T$ . И оно светится. Если вещество находится в равновесии, то существуют электромагнитные волны, которые падают и поглощаются. И существует объемная плотность энергии  $u_T$ , зависящая от температуры.

Рис. 18.6: Вещество, нагретое до температуры  $T$

### Формула Планка:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

В этом теле происходят процессы. Представим, что есть два уровня энергии. Есть волны с частотой  $\nu$ . Так как в теле много частот, то происходит много различных процессов: вынужденное излучение, спонтанное излучение, вынужденное поглощение. И в состоянии равновесия устанавливается равенство между переходами вниз и вверх.

### Условие равновесия:

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 A_{21} - N_2 B_{21}u + N_2 B_{12}u = 0$$

В состоянии равновесия  $\frac{N_2}{N_1}$  подчиняется распределению Больцмана:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 e^{-\frac{W_2}{kT}}}{g_1 e^{-\frac{W_1}{kT}}}, W_2 - W_1 = h\nu$$

Где  $g_2, g_1$  - кратности энергетических уровней.

$$u = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}g_1}{B_{21}g_2} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}; B_{12}g_1 = B_{21}g_2$$

### Излучение молекул. Люминесценция.

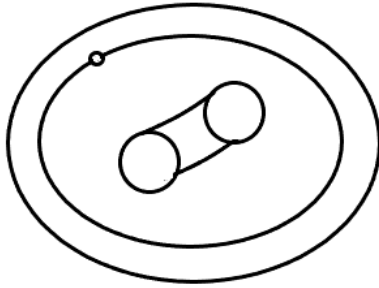


Рис. 18.7: Молекула

Есть молекула, вокруг которой летают электроны.

**Энергия молекулы:**

$$W = W_e + W_v + W_r$$

$W_e$  - электронная энергия.  $W_v$  - вибрационная энергия.  $W_r$  - ротационная энергия.

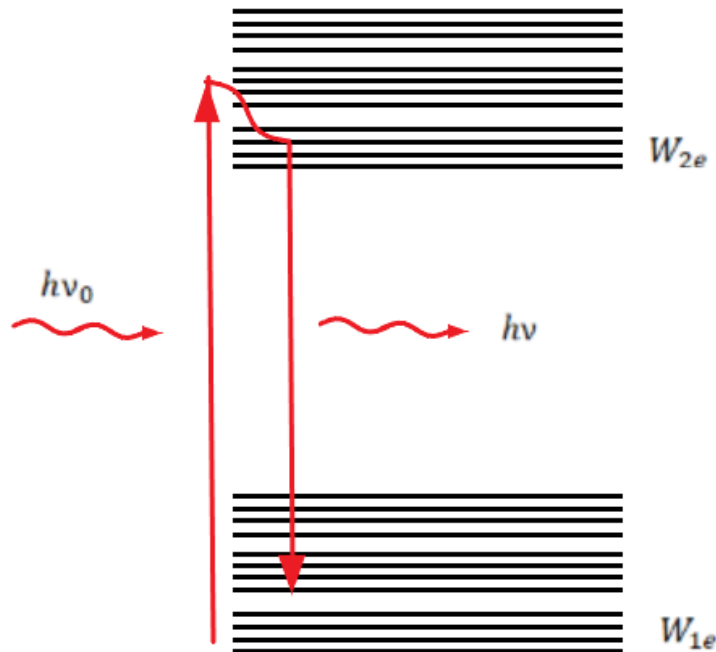


Рис. 18.8: Система электронно-колебательно-вращательных уровней.

Есть два электронных уровня  $W_{2e}, W_{1e}$ . Если учесть, что есть колебания, то каждый электронный уровень расщепится на дополнительные уровни. Молекула совершает переходы по этим уровням. В результате этих переходов будет квант света  $h\nu$ .

### Комбинационный принцип:

$$h\nu = h\nu_0 - W$$

$\nu < \nu_0$ , если  $W > 0$  - СТОКС

$\nu > \nu_0$ , если  $W < 0$  - АНТИСТОКС

Такое явление называется **люминесценцией**.

### Длительность послесвечения:

$$\tau \sim 10^{-9} \text{ с до } 10^6 \text{ с}$$

Если послесвечение короткое, то явление называется **флуоресценцией**.

Если послесвечение длинное, то явление называется **фосфоресценцией**.

## Резонансное усиление света. Инверсная заселенность.

### Лазеры.

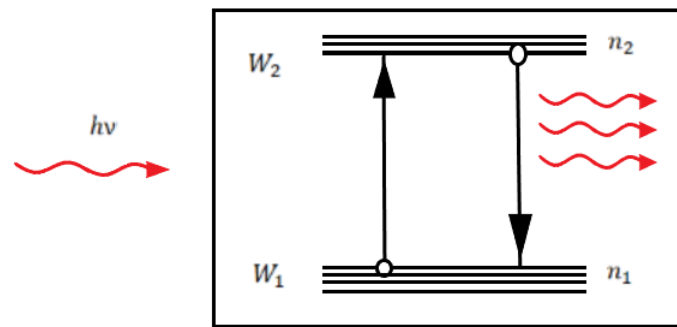


Рис. 18.9: Инверсная заселенность

Есть среда. Энергетические уровни  $W_1, W_2$  размыты.

$n_2, n_1$  - инверсная заселенность уровней.

$$n_2 = \frac{N_2}{V}; n_1 = \frac{N_1}{V}$$

$$h\nu = W_2 - W_1$$

В среде происходят процессы вынужденного поглощения и вынужденного излучения. Если процесс вынужденного излучения превалирует над процессом поглощения, тогда идет процесс усиления света.

Вероятность перехода со всего размытого уровня:

$$B_{12} = \int b_{12}(\nu) d\nu$$

$b_{12}$  - плотность коэффициента Эйнштейна, приходящийся на единичный интервал частот.

$$A_{12} = \int a_{12}(\nu) d\nu$$

$a_{12}(\nu)$  - функция, которая может описывать контур спектральной линии.

**Усиление света в лазере:**

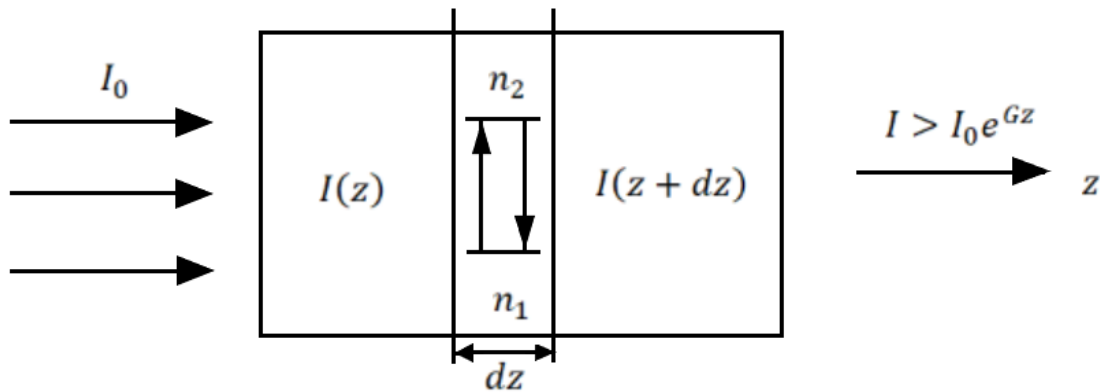


Рис. 18.10: Усиление света в лазере

$$I > I_0 e^{Gz}$$

Если  $G < 0 \rightarrow$  поглощение света.

Если  $G > 0 \rightarrow$  усиление света.

**Изменение интенсивности:**

$$dI = I(z + dz) - I(z) = [n_2 b_{21}(\nu) g_2 - n_1 b_{12}(\nu) g_1] u h \nu dz \quad (6)$$

(6) - баланс энергии.

Где  $u = \frac{I}{c}$

**Экспоненциальная зависимость:**

$$g_2 = g_1 = 1; b_{12} = b_{21} = b(\nu)$$

$$dI = I \frac{(n_2 - n_1) h \nu b(\nu)}{c} dz$$

$G = \frac{(n_2 - n_1) h \nu b(\nu)}{c}$  - коэффициент усиления.

$n_2 > n_1$  - среда с инверсной заселенностью.

Поместим активную среду между зеркалами (зеркала могут быть как плоскими, так и сферическими). Расстояние между зеркалами -  $L$ . Тогда между ними будут существовать стоячие волны различных частот. Собственные частоты колебания в резонаторе  $\nu_q$ .

$$\nu_q = \frac{qc}{2L}; q = 1, 2, 3 \dots$$

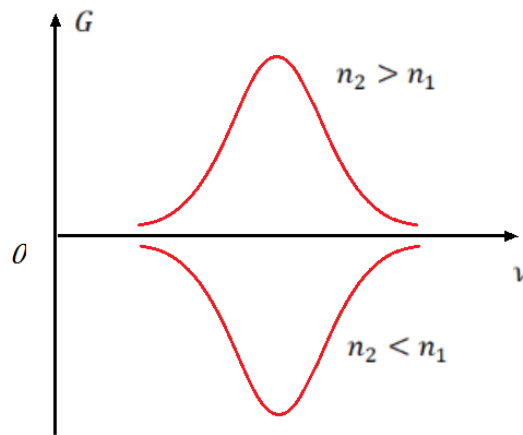
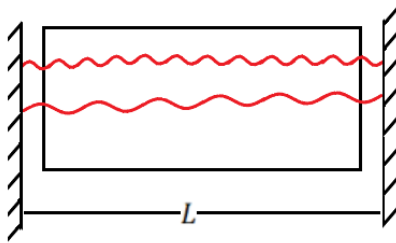


Рис. 18.11: Зависимость коэффициента усиления от частоты



Активная среда, помещенная между двумя зеркалами резонатора, представляет собой оптический квантовый генератор.

Рис. 18.12: Резонатор

$$L = 0,5 \text{ м}$$

$$\Delta\nu_q = \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L} = 3 \cdot 10^8 \text{ Гц}$$

Ширина линий излучения -  $10^{10}$  Гц. Тогда появится несколько усиленных спектральных линий. Эти спектральные линии называются **продольными модами лазера**.

В пределах спектральной линии генерируется не сплошной спектр, шириной  $10^{10}$  Гц, а отдельные продольные моды.

Ширина моды  $\delta\nu_p$  - это спектральная ширина резонатора.

Добротность резонатора  $Q$  связана с его потерями.

$$Q = \frac{\nu}{\delta\nu_p} \approx 10^8$$

$$\nu = 10^{14} \text{ Гц}$$

$$\delta\nu_p = 10^6 \text{ Гц} = 1 \text{ мГц}$$

Есть лазер, генерирующий набор мод. Тогда можно отсечь все моды, кроме одной. Для этого нужно поставить еще один резонатор.



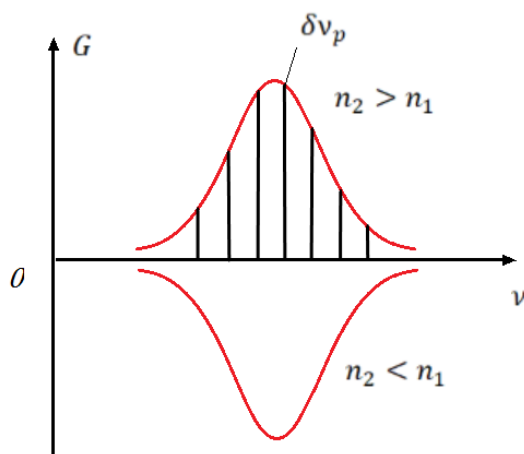


Рис. 18.13: Зависимость коэффициента усиления от частоты

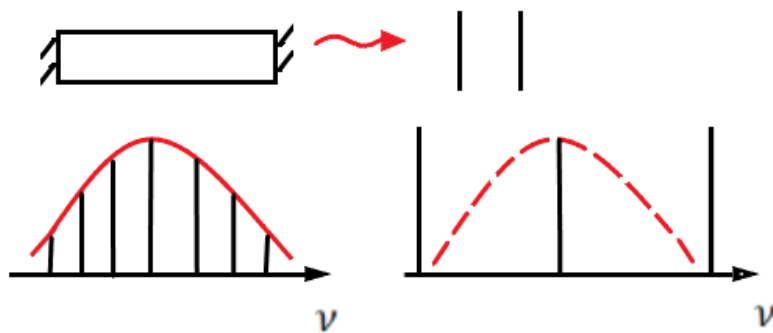


Рис. 18.14: Лазер.

Длина когерентности:

$$l = \frac{c}{\Delta\nu}$$

$$l = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\Delta\nu = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-2}} \sim 10^{10} \text{ Гц}$$

## Список литературы

1. Алешкевич В.А. ОПТИКА. М. «Физматлит». 2010.
2. Матвеев А.А. ОПТИКА. М. «Высшая школа». 1985.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том IV. ОПТИКА. 3-е изд. М. «Физматлит». 2005.
4. Ландсберг Г.С. ОПТИКА. 5-е изд., М. «Наука». 1976.
5. Ахманов, С.А. Никитин, С.Ю «Физическая оптика»
6. Крауфорд Ф. ВОЛНЫ. 3-е изд. М. «Наука». 1984.
7. Борн М., Вольф В. ОСНОВЫ ОПТИКИ. М. «Наука». 1970.



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
Л Е К Ц И И   У Ч Е Н Ы Х   М Г У