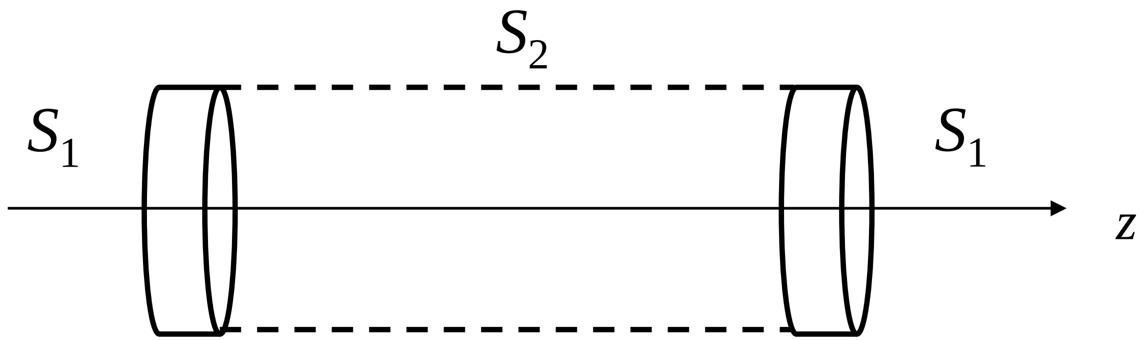
ПОЛЕ В РЕЗОНАТОРЕ

ПОЛЕ В РЕЗОНАТОРЕ

- Идеальный резонатор
- Реальный резонатор
- Основные механизмы потерь в резонаторе
- Добротность резонатора
- Уравнения для амплитуд мод поля в резонаторе

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА



Идеальный резонатор состоит из двух металлических зеркал, обозначенных как S_1 и диэлектрического цилиндра S_2.

В идеальном резонаторе полагается, что зеркала являются идеально отражающими и на границе S_2 также происходит полное отражение. В этом случае граничные условия имеют вид

$$\left[\vec{n}\vec{E}\right]\Big|_{S_1} = 0, \quad \left[\vec{n}\vec{H}\right]\Big|_{S_2} = 0$$

МОДЫ РЕЗОНАТОРА

- Собственные моды пустого резонатора определяются решением следующих уравнений с вышеприведенными граничными условиями

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

- Как мы отмечали выше, в вакууме ***B*** = ***H***. Однако граничные условия в среде записываются для тангенциальных компонент векторов напряженности полей, поэтому не нарушая общности мы будем использовать уравнения для ***H***.
- Пусть $\boldsymbol{E}_n$ и $\boldsymbol{H}_n$ есть собственные решения краевой задачи

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_n = -ik_n\vec{H}_n, \quad \mathrm{rot}\,\vec{H}_n = ik_n\vec{E}_n.$$

МОДЫ РЕЗОНАТОРА

- Собственные моды являются ортонормированными

$$\int_V E_n^{(\alpha)}(\vec{r}) E_m^{(\beta)}(\vec{r}) dV = \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$$

$$\int_V H_n^{(\alpha)}(\vec{r}) H_m^{(\beta)}(\vec{r}) dV = \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$$

- Разложим поле в резонаторе по собственным модам

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_n e_n(t)\vec{E}_n(\vec{r}), \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \sum_n h_n(t)\vec{H}_n(\vec{r})$$

- Преобразуем уравнения к виду

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД МОД ПОЛЯ В ИДЕАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

- Подставляя в первое из этих уравнений вышеприведенные разложения, получаем

$$\ddot{e}_n(t) + k_n^2 c^2 e_n(t) = 0$$

или

$$\ddot{e}_n(t) + \omega_n^2 e_n(t) = 0$$

где

$$\omega_n = k_n c$$

- Аналогично, используя второе уравнение, получаем

$$\ddot{h}_n(t) + \omega_n^2 h_n(t) = 0$$

- Как видно, отдельные моды поля гармонически меняются во времени. Однако, если собственные частоты не являются кратными, то суперпозиционное поле, оставаясь периодическим, может быть не гармоническим.

РЕАЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

- Граничные условия в реальном резонаторе отличаются от граничных условий идеального, поскольку:
  - коэффициент отражения равен единице только для сверхпроводящих зеркал, в любом металлическом зеркале есть поглощение;
  - одно из зеркал лазера всегда является полупрозрачным;
  - резонатор оптического лазера является открытым, поэтому диэлектрической границы нет, поэтому через определенное число проходов ширина пучка основной поперечной моды становится больше поперечных размеров зеркала.
- Полагая, что эти отличия невелики, разложим поле в реальном резонаторе по собственным модам идеального

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\sum_n e_n'\vec{E}_n(\vec{r}),\quad \vec{H}(\vec{r},t)=\sum_n h_n'\vec{H}_n(\vec{r})$$

- Граничные условия в реальном резонаторе мы обсудим чуть позже.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД МОД

- Используя собственные функции идеального резонатора, из первого уравнения системы уравнений Максвелла получаем

$$\int\limits_V \vec{H}_n \operatorname{rot} \vec{E} dV = -\frac{1}{c}\int\limits_V \vec{H}_n \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dV$$

- Воспользуемся следующим векторным равенством

$$\operatorname{div}\left[\vec{A}\vec{B}\right] = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}$$

тогда

$$\int\limits_V \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}_n\, dV + \int\limits_V \operatorname{div}\left[\vec{E}\vec{H}_n\right] dV = -\frac{1}{c}\frac{dh_n'}{dt}$$

- Отметим, что

$$\int\limits_V \operatorname{div}\left[\vec{E}\vec{H}_n\right] dV = \int\limits_S \left[\vec{E}\vec{H}_n\right] d\vec{S} = \int\limits_{S_1} \vec{H}_n\left[\vec{n}\vec{E}\right] dS + \int\limits_{S_2} \vec{E}\left[\vec{H}_n\vec{n}\right] dS$$

- Итак

$$\frac{dh_n'}{dt} + i\omega_n e_n' = -c\int\limits_{S_1} \vec{H}_n\left[\vec{n}\vec{E}\right] dS$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД МОД

- Аналогично, из уравнения

$$\int_V \vec{E}_n \operatorname{rot} \vec{H} dV = \frac{1}{c} \int_V \vec{E}_n \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV$$

получаем

$$\frac{de'_n}{dt} + i\omega_n h'_n = c \int_{S_2} \vec{E}_n \left[\vec{n}\vec{H} \right] dS$$

- Окончательно, для амплитуд *e'* получаем

$$\frac{d^2 e'_n}{dt^2} + \omega_n^2 e'_n = -ic\omega_n \int_{S_1} \left[\vec{n}\vec{E} \right] \vec{H}_n dS + c \frac{d}{dt} \int_{S_2} \left[\vec{n}\vec{H} \right] \vec{E}_n dS$$

- В идеальном резонаторе правая часть была равна нулю, поскольку каждая мода есть решение краевой задачи с однородными граничными условиями.
- Динамика мод в реальном резонаторе зависит от вида граничных условий.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

- *Таким образом, для получения замкнутой системы уравнений для амплитуд мод поля в реальном резонаторе нам необходимо знать граничные условия для реального резонатора.*
- В качестве граничных условий на металлических поверхностях можно взять приближенные граничные условия Леонтовича

$$\left[\vec{n}\vec{E}\right]\Big|_{S_1} = Z\,\vec{H}\Big|_{S_1} \qquad \text{где} \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

- Подставляя это соотношение в первое слагаемое правой части последнего уравнения, получаем

$$I_1 = -ic\omega_n \int_{S_1} \left[\vec{n}\vec{E}\right]\vec{H}_n dS = -ic\omega_n Z \int_{S_1} \vec{H}\vec{H}_n dS = -ic\omega_n Z \sum_m h'_m \int_{S_1} \vec{H}_m \vec{H}_n dS$$

- Отметим, что из условия

$$\int_V H_n^{(\alpha)}(\vec{r})\, H_m^{(\beta)}(\vec{r})\, dV = \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$$

не следует, что

$$\int_S H_n^{(\alpha)}(\vec{r})\, H_m^{(\beta)}(\vec{r})\, dS = \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД МОД

- Выше мы получили следующее соотношение

$$h'_n = \frac{1}{i\omega_n}\frac{de'_n}{dt} + \frac{c}{i\omega_n}\int_{S_2} \vec{E}_n\left[\vec{n}\vec{H}\right]dS$$

- Полагая, что параметры выбранного нами идеального резонатора близки к значениям параметров реального резонатора, мы можем пренебречь вторым слагаемым.

$$I_1 = -ic\omega_n Z\sum_m h'_m \int_{S_1}\vec{H}_m\vec{H}_n dS = -cZ\sum_m \frac{de'_m}{dt}\int_{S_1}\vec{H}_m\vec{H}_n dS$$

- Отметим, что сумма в правой части содержит два принципиально разных слагаемых

$$\sum_m \frac{de'_m}{dt}\int_{S_1}\vec{H}_m\vec{H}_n dS = \frac{de'_n}{dt}\int_{S_1}\vec{H}_n\vec{H}_n dS + \sum_{m(\neq n)}\frac{de'_m}{dt}\int_{S_1}\vec{H}_m\vec{H}_n dS$$

- Подставляя это выражение в вышеприведенные формулы, получаем

$$\frac{d^2 e'_n}{dt^2} + \frac{\omega_n}{Q_n}\frac{de'_n}{dt} + \omega_n^2 e'_n = -cZ\sum_{m(\neq n)}\frac{de'_m}{dt}\int_{S_1}\vec{H}_m\vec{H}_n dS + I_2$$

ДОБРОТНОСТЬ МОДЫ

- Таким образом, мы видим, что поверхностные интегралы, появляющиеся в правых частях уравнений для амплитуд мод, приводят к следующим физическим следствиям:
- Во-первых, появляется межмодовая связь, т.е. амплитуда каждой моды начинает зависеть от значения амплитуд остальных мод;
- Во-вторых, ввиду указанной связи амплитуда каждой из мод начинает затухать во времени, поскольку если мы возбудили лишь одну моду резонатора, то она начинает отдавать энергию в соседние моды.
- Как видно, добротность моды, обусловленная конечным значением проводимости зеркал резонатора лазера, определяется выражением

$$Q_n = \frac{k_n}{Z}\left[\int_{S_1} \vec{H}_n \vec{H}_n dS\right]^{-1}$$

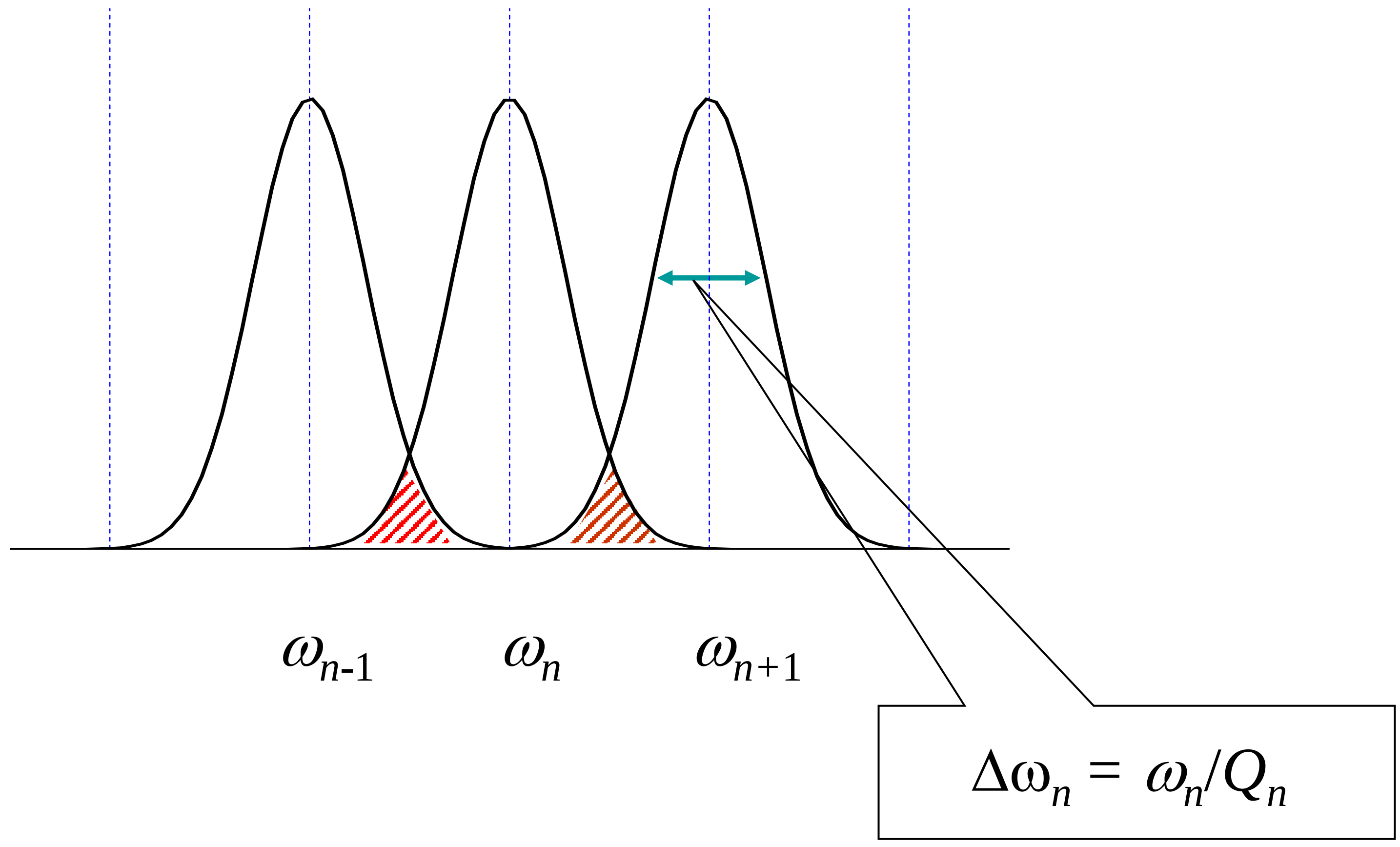
- Отметим, что если

$$\int_{S_1} \vec{H}_n \vec{H}_m dS \approx 0$$

то моды n и m не являются связанными.

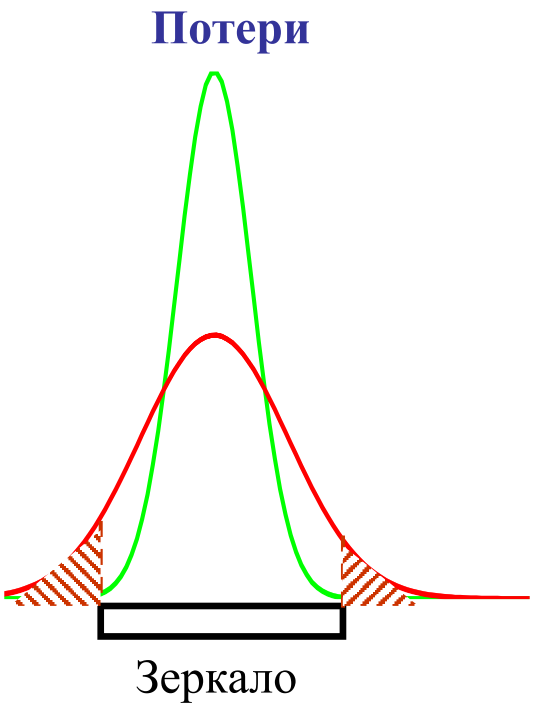
МЕЖМОДОВЫЙ ОБМЕН

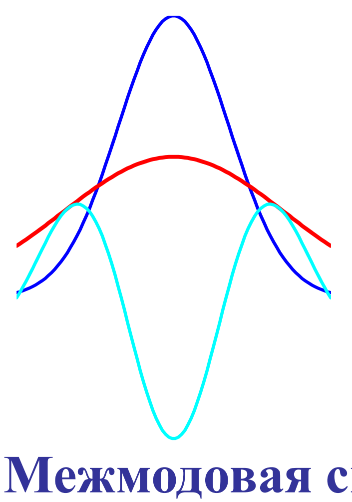
- Итак, мы видим, что конечное значение коэффициента отражения зеркал приводит к конечному значению ширины линии в резонаторе



ДИФРАКЦИЯ

- Появление интеграла I_2 связано с тем, что «диэлектрическая» граница S_2 является воображаемой. Излучение, достигшее этой границы в реальном резонаторе, покидает его.
- Поперечный размер активного тела лазера, как правило, много меньше диаметра зеркал резонатора. Однако в процессе многократных отражений генерируемого пучка в резонаторе лазера поперечный размер генерируемой моды увеличивается в результате дифракции и, рано или поздно, становится больше поперечного размера зеркал.





РЕАЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

- Таким образом, отличие граничных условий в реальном резонаторе от идеальных приводит к двум основным эффектам:
- Во-первых, появляются **энергетические потери**: омические и дифракционные.
- Во-вторых, появляется **межмодовая связь**, приводящая к тому, что энергия из одной моды резонатора расходуется на возбуждение соседних мод резонатора.
- Оба этих явления имеют единую причину:
  - ➢ конечная проводимость и/или конечный коэффициент отражения зеркал резонатора лазера,
  - ➢ конечный поперечный размер зеркал.
- Если мы хотим осуществить режим одномодовой генерации с высокой интенсивностью, то оба эти явления являются негативными и нам нужно найти пути ослабления их влияния.

КОНЕЧНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

- Омические энергетические потери, можно уменьшить только использованием высокопроводящих материалов для изготовления зеркал. В методах ультра-прецизионной оптической спектроскопии приходится использовать сверхпроводящие зеркала.
- Конечная проводимость зеркал приводит к двум механизмам межмодовой связи:

➢ Конечная проводимость обуславливает появление индукционных токов в зеркалах и профиль отраженного поля при этом может не совпадать с профилем падающего, это является причиной связи поперечных мод.

➢ Межмодовое расстояние в резонаторе $\Delta\omega_0 = \pi c/L$, где L его длина. Ширина линии в резонаторе определяется выражением $\Delta\omega_n = \omega_n/Q_n$. Для ослабления связи продольных мод лазера необходимо использовать резонатор, для которого $\Delta\omega_0 >> \Delta\omega_n$.

ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОТЕРИ

- Для уменьшения дифракционных потерь, естественно, нужно, чтобы поперечный размер активной среды был значительно меньше размеров зеркал.
- Однако в результате многочисленных проходов излучения по резонатору лазера размер пучка неизбежно растет. В теории дифракции вводится понятие дифракционной длины $l_d = d^2/\lambda$.
- С другой стороны, длина пути проходимого квантом света в резонаторе зависит от его добротности, определяющейся коэффициентом отражения R зеркал. В случае высокодобротных резонаторов длина пробега определяется выражением $l_t = L/(1- R)$.
- Таким образом, для подавления дифракционных потерь и дифракционной связи мод необходимо, чтобы выполнялось условие

$$l_d \gg l_t$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД МОД

- Таким образом, если мы выполнили все условия, позволяющие уменьшить межмодовую связь, то уравнение эволюции каждой из мод становится независимым от амплитуды других мод резонатора и имеет вид

$$\frac{d^2 e'_n}{dt^2} + \frac{\omega_n}{Q_n}\frac{de'_n}{dt} + \omega_n^2 e'_n = 0$$

где

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_S} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_V}$$

- Отдельные слагаемые в последнем выражении отвечают следующим механизмам: Q_S – потери в зеркалах резонатора лазера (омические плюс конечное значение коэффициента отражения выходного зеркала); Q_d – дифракционные потери в резонаторе; Q_V – объемные потери в активном элементе.