МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ II

БУТУЗОВ
ВАЛЕНТИН ФЕДОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 9. **Функции многих переменных** 6

§ 1. Понятие m-мерного координатного пространства 6

§ 2. Последовательности точек в $\mathbb{R}^m$ 9

§ 3. Понятие функции многих переменных. Предел функции многих переменных 11

§ 4. Непрерывность функции многих переменных 16

§ 5. Частные производные и дифференцируемость 22

§ 6. Геометрический смысл дифференцируемости функции 33

§ 7. Частные производные и дифференциалы высших порядков . . 42

§ 8. Формула Тейлора 50

§ 9. Локальный экстремум 55

Глава 10. **Неявные функции** 64

§ 1. О неявных функциях, определяемых одним уравнением 64

§ 2. О неявных функциях, определяемых системой уравнений . . 72

§ 3. Зависимость функций 78

§ 4. Условный экстремум 86

Глава 11. **Приложения дифференциального исчисления к исследованию плоских кривых** 96

§ 1. Касание плоских кривых 96

§ 2. Огибающая однопараметрического семейства кривых 99

§ 3. Кривизна плоской кривой 106

Глава 12. **Кратные интегралы** 111
§ 1. Площадь плоской фигуры 111
§ 2. Двойные интегралы 114
§ 3. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования 117
§ 4. Замена переменных в двойном интеграле 121
§ 5. Тройные интегралы 128

Глава 13. **Криволинейные интегралы** 138
§ 1. Длина кривой 138
§ 2. Криволинейные интегралы первого рода 144
§ 3. Криволинейные интегралы второго рода 150
§ 4. Формула Грина 156
§ 5. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования 160

Глава 14. **Поверхностные интегралы** 168
§ 1. Площадь поверхности 168
§ 2. Поверхностные интегралы первого рода 176
§ 3. Поверхностные интегралы второго рода 179
§ 4. Формула Остроградского–Гаусса 187
§ 5. Формула Стокса 191
§ 6. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве 197
Список литературы 199

Предисловие

Во второй части учебного пособия рассматриваются основные вопросы дифференциального и интегрального исчислений функций многих переменных. Эта часть курса математического анализа излагается на лекциях во II семестре. Как и в первой части, теоретический материал минимизирован таким образом, что его можно реально изложить в течение семестра при трех часах лекций в неделю.

Изложение теоретического материала сопровождается иллюстрирующими примерами, значительное внимание уделяется приложениям математических понятий и утверждений к вопросам физики.

Пособие рассчитано на студентов I курса физического факультета и преподавателей, ведущих занятия по математическому анализу. Оно может быть использовано и на других факультетах МГУ, а также в других вузах.

При подготовке пособия к печати большую помощь, связанную с компьютерным набором текста, оказали мне коллеги по кафедре математики физического факультета МГУ, особенно Н.Е. Шапкина, И.Е. Могилевский А.В. Барышев, А.В. Костин, В.А. Осокина. Всем им я очень признателен. Особую благодарность хочу выразить Г.Н. Медведеву, внимательно прочитавшему всю рукопись и сделавшему большое количество ценных замечаний.

В.Ф. Бутузов

Глава 9

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Многие физические величины описываются функциями нескольких переменных. Например, $u = T(x, y, z, t)$ — температура в точке $M(x, y, z)$ в момент времени t; это пример функции четырех переменных.

§ 1. Понятие m-мерного координатного пространства

Определение. Совокупность m чисел называется *упорядоченной*, если указано, какое из чисел считается первым, какое — вторым, и т.д. Произвольную упорядоченную совокупность m чисел будем обозначать так: $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то есть числа записываются в порядке их номеров.

Определение. Множество всевозможных упорядоченных совокупностей m чисел называется *m-мерным координатным пространством*. Каждая из совокупностей m чисел называется *точкой* m-мерного пространства.

Обозначение: $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются *координатами* точки M. Точка $O(0, 0, \ldots, 0)$ называется *началом координат*.

Введем *расстояние* между точками $M_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $M_2(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}\,. \qquad (9.1)$$

Эта формула хорошо известна из курса аналитической геометрии для плоскости $(m = 2)$ и трехмерного пространства $(m = 3)$.

Определение. Координатное пространство с введенным по формуле (9.1) расстоянием между точками называется *m-мерным евклидовым пространством*.

Обозначение: $\mathbb{R}^m$.

Примеры.

1. $\mathbb{R}^1$ — числовая прямая;
2. $\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость;
3. $\mathbb{R}^3$ — трехмерное евклидово пространство.

Пусть $A \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ — некоторое число. Множество $\{M : \rho(M, A) \leqslant r\}$ называется *m-мерным шаром* радиуса r с центром в точке A. Множество $\{M : \rho(M, A) = r\}$ называется *m-мерной сферой* радиуса r. Множество $\{M : \rho(M, A) < r\}$ — *открытый m-мерный шар*; открытый шар $\{M : \rho(M, A) < \varepsilon\}$ называется *ε-окрестностью точки A*.

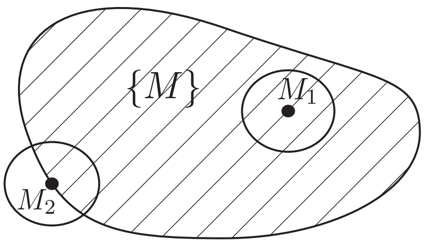
Пусть $A(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ и $d_1, \ldots, d_m$ — некоторые положительные числа. Множество

$$\{M(x_1, \ldots, x_m) : |x_1 - a_1| \leqslant d_1, \ldots, |x_m - a_m| \leqslant d_m\}$$

называется *m-мерным параллелепипедом*.

Пусть $\{M\}$ — какое-то множество точек из $\mathbb{R}^m$.

Точка A называется *внутренней* точкой множества $\{M\}$, если существует ε-окрестность точки A, целиком принадлежащая множеству $\{M\}$.



M_1 — внутренняя точка множества $\{M\}$,

M_2 — граничная точка множества $\{M\}$.

Рис. 9.1.

Точка A называется *граничной* точкой множества $\{M\}$, если в любой ε-окрестности точки A содержатся как точки множества $\{M\}$, так и точки, которые этому множеству не принадлежат (рис. 9.1).

Граничная точка может принадлежать, а может и не принадлежать множеству $\{M\}$.

Множество $\{M\}$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние.

Множество $\{M\}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки. При этом множество всех граничных точек называется *границей* множества $\{M\}$.

Пример 1. Границей шара $\{M : \rho(M, A) \leqslant r\}$ является сфера $\{M : \rho(M, A) = r\}$. Эта же сфера является границей открытого шара $\{M : \rho(M, A) < r\}$.

Пример 2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим множество

$$G = \left\{ \begin{array}{l} M(x_1, x_2, x_3) :\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1; \\ x_1, x_2, x_3 - \text{рациональные числа}, \end{array} \right.$$

то есть множество G представляет собой множество всех точек с рациональными координатами, содержащихся в кубе

$$\overline{G} = \{M(x_1, x_2, x_3) : 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, 3\}.$$

Докажите, что: а) каждая точка множества G является его граничной точкой; б) любая точка куба $\overline{G}$ также является граничной точкой множества G, то есть границей множества G является весь куб $\overline{G}$.

Отметим, что G — счетное множество, а его граница $\overline{G}$ — множество мощности континуума. Отметим также, что граница куба $\overline{G}$ состоит из его шести граней.

Объединение множества $\{M\}$ и его границы (то есть добавление ко множеству $\{M\}$ всех его граничных точек) называется *замыканием* множества $\{M\}$. Замкнутое множество совпадает со своим замыканием.

Пример 3. Замыканием множества G из примера 2 (см. выше) является куб $\overline{G}$.

Точка A называется *предельной* точкой множества $\{M\}$, если в любой ε-окрестности точки A содержатся точки из множества $\{M\}$, отличные от A (при этом предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{M\}$).

Точка A называется *изолированной* точкой множества $\{M\}$, если она принадлежит $\{M\}$ и существует ε-окрестность точки A, в которой нет других точек из $\{M\}$, кроме A.

Задание 1. Докажите, что любая внутренняя точка множества является его предельной точкой, а граничная точка множества может быть его предельной точкой и может быть изолированной точкой.

Задание 2. Докажите, что сфера — замкнутое множество.

Пример 4. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ (плоскость). Оно является одновременно и открытым множеством, и замкнутым. В самом деле, все точки этого множества — внутренние, поэтому $\mathbb{R}^2$ — открытое множество. Граничных точек у $\mathbb{R}^2$ нет, то есть границей $\mathbb{R}^2$ является пустое множество. Пустое множество принадлежит любому множеству, поэтому $\mathbb{R}^2$ — замкнутое множество.

Рассмотрим теперь пространство $\mathbb{R}^3$ и произвольную плоскость в нем, то есть множество всех точек $M(x_1, x_2, x_3)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$; A, B, C и D — числа, причем $A^2 + B^2 + \mathrm{C}^2 \neq 0$. Плоскость является замкнутым множеством, поскольку все ее точки — граничные точки этой плоскости, как множества в $\mathbb{R}^3$.

Множество $\{M\}$ называется *ограниченным*, если все его точки содержатся в некотором шаре.

Множество точек

$$L = \{M(x_1, \ldots, x_m) : x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

где $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ — непрерывные на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции, называется *непрерывной кривой* в пространстве $\mathbb{R}^m$. Если точки $A(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha))$ и $B(\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_m(\beta))$ не совпадают, то они называются *концами* кривой L. Говорят также, что кривая L соединяет точки A и B. Если точки A и B совпадают, то кривая называется замкнутой.

Множество точек

$$\big\{M(x_1, \ldots, x_m)\colon x_1 = x_1^0 + \alpha_1 t, \ldots, x_m = x_m^0 + \alpha_m t, -\infty < t < +\infty\big\},$$

где $x_1^0, \ldots, x_m^0$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — некоторые числа, называется *прямой* в пространстве $\mathbb{R}^m$. Эта прямая проходит через точку $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$.

Множество $\{M\}$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат $\{M\}$.

Любое открытое связное множество, содержащее точку A, называется *окрестностью* точки A.

Задание 3. Докажите, что в любой окрестности точки A содержится некоторая ε-окрестность этой точки.

§ 2. Последовательности точек в $\mathbb{R}^m$

Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие точка $M_n \in \mathbb{R}^m$, то говорят, что задана последовательность точек $\{M_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Определение. Точка $A \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом* последовательности $\{M_n\}$, если

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(M_n, A) = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = A,$$

или $M_n \to A$ при $n \to +\infty$.

Лемма 1. Последовательность точек $\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ сходится к точке $A(a_1, \ldots, a_m)$ тогда и только тогда, когда последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \ldots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$ координат точек M_n сходятся к соответствующим координатам $a_1, \ldots, a_m$ точки A.

Утверждение леммы 1 следует из формулы

$$\rho(M_n, A) = \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + \ldots + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2}\,.$$

Определение. Последовательность точек $\{M_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N,\ \text{такое, что}\ \forall\, n > N\ \text{и}\ \forall\, m > N:\ \rho(M_n, M_m) < \varepsilon\,.$$

Лемма 2. Для того, чтобы последовательность

$$\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right\}$$

была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы фундаментальными были числовые последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \ldots$ $\ldots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$. (Докажите самостоятельно).

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости последовательности). Для того, чтобы последовательность $\{M_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. Пусть последовательность

$$\left\{M_n\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right\}\ -$$

фундаментальная. Тогда по лемме 2 последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}, \ldots, \left\{x_m^{(n)}\right\}$ также являются фундаментальными, и, следовательно, они сходятся. Отсюда следует (по лемме 1), что сходится и последовательность $\{M_n\}$.

Доказательство того, что из сходимости последовательности $\{M_n\}$ вытекает ее фундаментальность, проводится аналогично.

Определение. Последовательность $\{M_n\}$ называется *ограниченной*, если все ее члены лежат в некотором шаре.

Эквивалентное определение. Последовательность $\{M_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists\, R > 0$, такое, что $\forall\, n:\ \rho\,(M_n, O) \leqslant R$ (точка O — начало координат).

Теорема 2 (Больцано–Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\left\{M_n\left(x_1^{(n)},\ldots,x_m^{(n)}\right)\right\}$ — ограниченная последовательность, то есть $\exists\, R>0\ :\ \rho(M_n,O)=$ $=\sqrt{\left(x_1^{(n)}\right)^2+\ldots+\left(x_m^{(n)}\right)^2}\leqslant R$. Отсюда получаем: $\left|x_1^{(n)}\right|\leqslant$ $\leqslant R,\ldots,\left|x_m^{(n)}\right|\leqslant R$, поэтому $\left\{x_1^{(n)}\right\},\ldots,\left\{x_m^{(n)}\right\}$ — ограниченные числовые последовательности.

По теореме Больцано–Вейерштрасса для числовых последовательностей из ограниченной последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{x_1^{(k_n)}\right\}$, сходящуюся к некоторому числу a_1.

Из подпоследовательности $\left\{x_2^{(k_n)}\right\}$ также можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\left\{x_2^{(m_n)}\right\}\to a_2$. При этом $\left\{x_1^{(m_n)}\right\}\to a_1$.

Из подпоследовательности $\left\{x_3^{(m_n)}\right\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\left\{x_3^{(l_n)}\right\}\to a_3$. При этом $\left\{x_1^{(l_n)}\right\}\to a_1$, $\left\{x_2^{(l_n)}\right\}\to a_2$.

Продолжая этот процесс, на m-ом шаге мы получим подпоследовательности $\left\{x_1^{(p_n)}\right\}\to a_1$, $\left\{x_2^{(p_n)}\right\}\to a_2$, ..., $\left\{x_m^{(p_n)}\right\}\to a_m$. В силу леммы 1 подпоследовательность точек $\{M_{p_n}\}$ сходится к точке $A(a_1,\ldots,a_m)$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Понятие функции многих переменных. Предел функции многих переменных

Пусть $\{M(x_1,\ldots,x_m)\}$ — множество точек пространства $\mathbb{R}^m$ и пусть каждой точке M из этого множества поставлено в соответствие некоторое число u. Тогда говорят, что на множестве $\{M\}$ определена *функция m переменных*.

Обозначения: $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ или $u=f(M)$.

Множество $\{M\}$ называется *областью определения* функции, а координаты $x_1,\ldots,x_m$ — *независимыми переменными* (или *аргументами* функции). Множество значений функции будем обозначать $\{u\}$.

В случае функции двух переменных будем использовать обозначения $u=f(x,y)$ или $z=f(x,y)$. *График* функции двух переменных $z = f(x, y)$ — поверхность в прямоугольной системе координат $Oxyz$, точки которой имеют координаты $(x, y, f(x, y))$ (рис. 9.2).

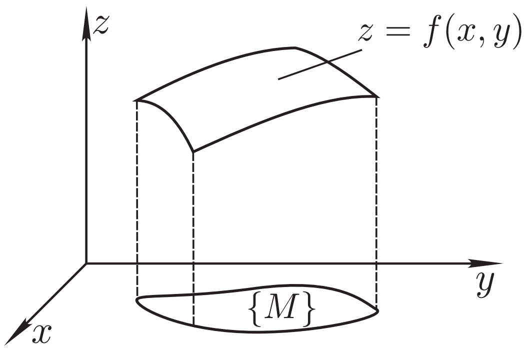


Рис. 9.2.

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве $\{M\}$ и точка A — предельная точка множества $\{M\}$.

Определение 1 (по Коши). Число b называется *пределом* функции $u = f(M)$ в точке A (при $M \to A$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall M \in \{M\}$, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, A) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

(Множество точек $\{M : 0 < \rho(M, A) < \delta\}$ называется *проколотой δ-окрестностью* точки A.)

Определение 2 (по Гейне). Число b называется *пределом* функции $u = f(M)$ в точке A (при $M \to A$), если $\forall \{M_n\} \to A$ ($M_n \in \{M\}, M_n \neq A$) соответствующая последовательность $\{f(M_n)\} \to b$.

Обозначения: $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \ldots, x_m) = b$, где $A = A(a_1, \ldots, a_m)$.

Теорема 3. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство проводится так же, как и для функции одной переменной.

Примеры.

1. Рассмотрим функцию

$$u(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\,.$$

Она не определена на осях координат, однако точка $O(0, 0)$ — предельная точка ее области определения. Справедливо равенство

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y) = 0\,.$$

Для доказательства можно воспользоваться определением предела функции по Коши и для произвольно заданного ε взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. Рассмотрим функцию
$$u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\,.$$
Докажем, что у этой функции не существует
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)\,.$$
В самом деле, устремим точку (x,y) к началу координат по прямой $y=kx$. Тогда
$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2}\,.$$
Таким образом, при стремлении точки (x,y) к началу координат по разным прямым, получаются разные предельные значения, поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не существует.
3. Рассмотрим функцию
$$u(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}\,.$$
Устремим точку (x,y) к началу координат по прямой $y=kx$ $(k\neq 0)$. Тогда
$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0\,.$$
Если точка (x,y) стремится к началу координат по оси x (то есть $y=0$) или по оси y (то есть $x=0$), то предел также равен нулю, поскольку на осях координат данная фукнция равна нулю (за исключением точки $O(0,0)$, в которой функция не определена).
Таким образом, при стремлении точки (x,y) к началу координат по любой прямой функция $u(x,y)$ стремится к нулю. Однако отсюда еще не следует существование $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$.
В самом деле, устремим точку (x,y) к началу координат по параболе $y=kx^2$. Получим
$$\lim_{\substack{y=kx^2\\ x\to 0}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+kx^4}=\frac{k}{1+k^2}\,.$$

По разным параболам получаем различные предельные значения. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x, y)$ не существует.

Если $\lim\limits_{M\to A} f(M) = 0$, то функция $f(M)$ называется *бесконечно малой* в точке A (или *бесконечно малой* при $M \to A$).

Пусть $f(M)$ и $g(M)$ — бесконечно малые функции в точке A. Если существует $\lim\limits_{M\to A} \dfrac{f(M)}{g(M)}$ и этот предел равен $C \neq 0$ (равен 1; равен 0), то говорят, что функции $f(M)$ и $g(M)$ являются бесконечно малыми одного порядка в точке A (являются эквивалентыми бесконечно малыми в точке A; говорят, что функция $f(M)$ является бесконечно малой более высокого порядка в точке A, чем функция $g(M)$, и пишут $f = o(g)$ при $M \to A$).

Пример. Функции $f(x, y) = x^3 + y^3$ и $g(x, y) = x^2 + y^2$ являются бесконечно малыми в точке $O(0, 0)$. Рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\,.$$

Для вычисления предела перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) = 0.$$

Следовательно, $x^3 + y^3 = o\left(x^2 + y^2\right)$ при $M(x, y) \to O(0, 0)$.

Теорема 4. Если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве $\{M\}$ и существуют пределы $\lim\limits_{M\to A} f(M) = b$, $\lim\limits_{M\to A} g(M) = c$, то существуют пределы

$$\lim_{M\to A} [f(M) \pm g(M)] = b \pm c\,, \quad \lim_{M\to A} f(M)g(M) = bc\,,$$

и если $c \neq 0$, то существует $\lim\limits_{M\to A} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{b}{c}$.

Доказательство теоремы проводится так же, как и доказательство аналогичной теоремы для функций одной переменной.

Пусть точка A — предельная точка области определения функции $f(M)$.

Определение. Говорят, что функция $f(M)$ удовлетворяет в точке A условию Коши, если $\forall\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0$, такое, что для любых точек M_1 и M_2 из проколотой δ-окрестности точки A (при этом точки M_1 и M_2 берутся из области определения функции $f(M)$) выполняется неравенство

$$|f(M_2) - f(M_1)| < \varepsilon\,.$$

Теорема 5 (Критерий Коши существования предела функции в данной точке). Для того, чтобы функция $f(M)$ имела предел в точке A, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.
Доказательство теоремы проводится так же, как и аналогичной теоремы для функции одной переменной.

Введем теперь понятие предела функции $f(M)$ при $M \to \infty$.

Пусть функция $f(M)$ определена на множестве $\{M\}$, которое содержит точки, расположенные сколь угодно далеко от начала координат (точки O).

Определение (по Коши). Число b называется пределом функции $f(M)$ при $M \to \infty$, если $\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,R > 0$, такое, что для любой точки M из множества $\{M\}$, удовлетворяющей условию $\rho(M, O) > R$, выполняется неравенство

$$|f(M) - b| < \varepsilon\,.$$

Обозначение: $\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ \cdots\cdots\\ x_m\to\infty}} = b$.

Задача 1. Сформулируйте определение предела функции $f(M)$ при $M \to \infty$ по Гейне и докажите эквивалентность определений по Коши и Гейне.

Примеры (при вычислении предела функции $f(x, y)$ при $M(x, y) \to \infty$ часто оказывается полезным переход к полярным координатам).

1.

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{r^2}\ \lim_{r\to\infty} \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{r} = 0\,.$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует, так как, перейдя к полярным координатам, получаем $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$ и, следовательно, на лучах $\varphi = const$ функция имеет постоянное значение; поэтому при $M(x, y) \to \infty$ по различным лучам получаются разные предельные значения функции.

§ 4. Непрерывность функции многих переменных

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве $\{M\} \subset \subset \mathbb{R}^m$ и пусть точка $A \in \{M\}$ и является предельной точкой множества $\{M\}$.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной* в точке A, если

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(A)\,. \tag{9.2}$$

Точка разрыва функции $u = f(M)$ — это предельная точка множества $\{M\}$, в которой $f(M)$ не является непрерывной.

Определение. *Приращением* (*полным приращением*) функции $u = f(M)$ в точке A называется функция $\Delta u = f(M) - f(A)$.

Условие (9.2) непрерывности функции в точке A можно записать в виде

$$\lim_{M \to A} \Delta u = \lim_{M \to A} [f(M) - f(A)] = 0\,. \tag{9.3}$$

Равенство (9.3) называется *разностной формой условия непрерывности функции в точке* A.

Пусть точки M и A имеют координаты: $M\,(x_1, \ldots, x_m)$ и $A\,(a_1, \ldots, a_m)$. Положим $\Delta x_1 = x_1 - a_1, \ldots, \Delta x_m = x_m - a_m$, тогда $x_1 = a_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m = a_m + \Delta x_m$,

$$\Delta u = f(M) - f(A) = f\left(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_m + \Delta x_m\right) - f\left(a_1, \ldots, a_m\right).$$

Разностная форма условия непрерывности функции принимает вид

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to \infty \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_m \to \infty}} \Delta u = 0\,.$$

Введем теперь понятие *непрерывности функции по отдельным переменным*.

Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$. Зафиксируем значение аргумента y, положив $y = y_0$ (рис. 9.3). Получаем функцию одной переменной $f(x, y_0)$. Если эта функция непрерывна в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, то будем говорить, что функция $u = f(x, y)$ *непрерывна в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по переменной* x.

Аналогично определяется непрерывность функции $f(x, y)$ в точке M_0 по переменной y.

Сформулируем другое (*эквивалентное*) *определение*. Из точки $M_0(x_0, y_0)$ перейдем в точку $M(x_0 + \Delta x, y_0)$, то есть дадим

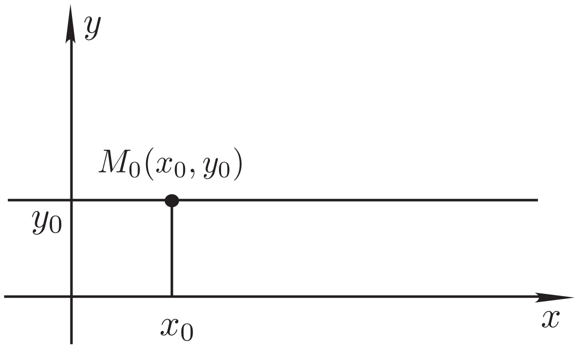


Рис. 9.3.

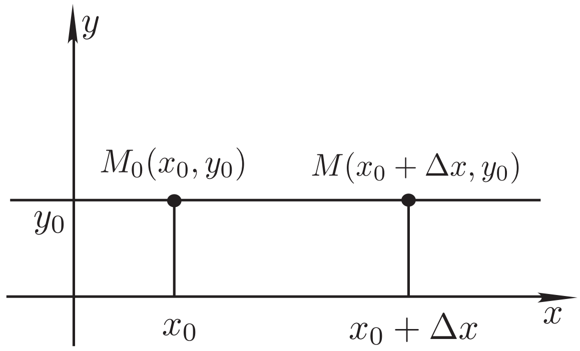


Рис. 9.4.

приращение Δx аргументу x (рис. 9.4). Функция $u = f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\,.$$

Оно является функцией одной переменной Δx и называется *частным приращением* функции $f(x, y)$ в точке M_0, соответствующим приращению Δx аргумента x.

Определение. *Функция $u = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x, если* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$.

Аналогично определяется непрерывность функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в данной точке по отдельным переменным.

Непрерывность функции, определенную условием (9.2) (или (9.3)), называют также *непрерывностью по совокупности переменных*.

Теорема 6. Если функция $u = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывна в точке M_0, то она непрерывна в этой точке по отдельным переменным.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. В частности, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, а это означает, что $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 по переменной x. Аналогично доказывается непрерывность в точке M_0 по переменной y.

Замечание. Обратное к теореме 6 утверждение не верно.

Пример.

$$u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}\,, & x^2 + y^2 \neq 0\,, \\ 0\,, & x = y = 0\,. \end{cases}$$

Функция $u(x, y)$ непрерывна в точке $O(0, 0)$ по отдельным переменным. В самом деле, $u(x, 0) = 0$, отсюда следует, что

$\lim\limits_{x\to 0} u(x,0) = 0 = u(0,0)$, то есть функция $u(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной x. Аналогично доказывается непрерывность функции в точке $O(0,0)$ по переменной y.

Но $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не существует (см. пример 2 на стр. 13), поэтому функция $u(x,y)$ разрывна в точке $O(0,0)$ по совокупности переменных.

Рассмотрим еще **два примера**.

1. Функция

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\,, & x^2+y^2 \neq 0\,,\\ 0\,, & x=y=0\,. \end{cases}$$

непрерывна в точке $O(0,0)$ вдоль каждой прямой, проходящей через точку O, так как вдоль каждой такой прямой $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0 = u(0,0)$ (это было показано выше), но вместе с тем, эта функция не является непрерывной в точке O по совокупности переменных, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не существует.

2.
$$u(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\,, & x\neq 0\,, y\neq 0\,,\\ 0\,, & x=y=0\,. \end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} = 0 = u(0,0)$, то эта функция непрерывна в точке $O(0,0)$ по совокупности переменных. Вместе с тем, она не определена на осях координат (кроме точки $O(0,0)$), и поэтому не является непрерывной по отдельным переменным в точке $O(0,0)$.

Вопрос: как этот пример соотносится с утверждением теоремы 6?

Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 7 (арифметические операции над непрерывными функциями). Если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, то $f(M) \pm g(M)$, $f(M)g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (при условии $g(A)\neq 0$) непрерывны в точке A.

Утверждение теоремы 7 следует из теоремы 4 и определения непрерывности.

Пусть аргументы функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ являются не независимыми переменными, а функциями переменных $t_1, \ldots, t_k$:

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k), \tag{9.4}$$

причем функции (9.4) определены на множестве $\{\mathcal{K}(t_1, \ldots, t_k)\} \subset \subset \mathbb{R}^k$.

В этом случае будем говорить, что на множестве $\{\mathcal{K}\}$ определена *сложная функция* $u = f\left(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)\right)$.

Теорема 8 (о непрерывности сложной функции). Пусть функции (9.4) непрерывны в точке $A(a_1, \ldots, a_k)$, а функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна в точке $B(b_1, \ldots, b_m)$, где $b_1 = = \varphi_1(a_1, \ldots, a_k), \ldots, b_m = \varphi_m(a_1, \ldots, a_k)$. Тогда сложная функция $u = f\left(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)\right)$ непрерывна в точке A.

(Докажите самостоятельно).

Теорема 9 (об устойчивости знака непрерывной функции). Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке A и $f(A) > > 0$ (< 0), то $\exists$ δ-окрестность точки A, в которой $f(M) > 0$ (< 0).

Указание: для доказательства теоремы воспользуйтесь определением непрерывности функции в точке A и возьмите $\varepsilon = = |f(A)|$.

Теорема 10 (о прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение). Пусть функция $u = f(M) = = f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна на связном множестве $\{M\}$, пусть M_1 и M_2 — две любые точки из $\{M\}$, $f(M_1) = u_1$, $f(M_2) = u_2$, и пусть u_0 — любое число из сегмента $[u_1, u_2]$.

Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющей точки M_1 и M_2 и целиком принадлежащей множеству $\{M\}$, найдется такая точка M_0, такая, что $f(M_0) = u_0$.

Доказательство. Пусть

$$L = \{M(x_1, \ldots, x_m) : x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} -$$

непрерывная кривая, соединяющая точки M_1 и M_2 и целиком принадлежащая множеству $\{M\}$ (рис. 9.5).

Точки M_1 и M_2 имеют координаты: $M_1\left(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha)\right)$, $M_2\left(\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_m(\beta)\right)$.

На кривой L заданная функция является сложной функцией переменной t:
$u = f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) =: F(t)$, причем по теореме 8 функция $F(t)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$. На концах сегмента $[\alpha, \beta]$

функция $F(t)$ имеет значения $F(\alpha) = f(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha)) = f(M_1) = u_1$ и $F(\beta) = f(M_2) = u_2$.

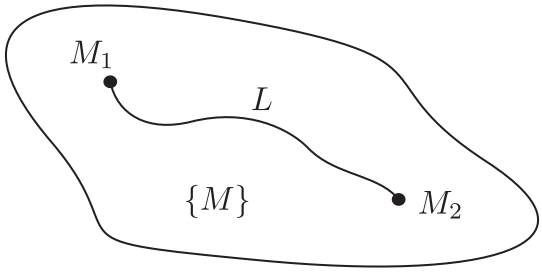


Рис. 9.5.

В силу известной теоремы для функции одной переменной $\forall\, u_0 \in [u_1, u_2]\ \exists\, t_0 \in [\alpha, \beta]$, такое, что $F(t_0) = u_0$. Но $F(t_0) = f(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)) = f(M_0)$, причем точка $M_0(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)) \in L$.

Итак, $\exists$ точка $M_0 \in L$: $f(M_0) = u_0$, что и требовалось доказать.

Для доказательства следующих трех теорем (первой и второй теорем Вейерштрасса и теоремы Кантора) нам понадобится

Лемма 3. Пусть $\{M\}$ — замкнутое множество и пусть последовательность точек $\{M_n\} \to A$, причем все $M_n \in \{M\}$. Тогда $A \in \{M\}$.

Доказательство. Так как $\{M_n\} \to A$, то в любой ε-окрестности точки A содержатся члены последовательности $\{M_n\}$. Тем самым, в любой ε-окрестности точки A содержатся точки из множества $\{M\}$. Поэтому точка A — либо внутренняя точка множества $\{M\}$, и тогда она принадлежит этому множеству как и всякая внутренняя точка, либо A — граничная точка множества $\{M\}$, и тогда она принадлежит $\{M\}$, так как множество $\{M\}$ — замкнутое множество (то есть содержит все свои граничные точки). Таким образом, в любом случае $A \in \{M\}$. Лемма 3 доказана.

Замечание. Это утверждение аналогично следующему утверждению для одномерного случая: если все $x_n \in [a, b]$ и $\{x_n\} \to c$, то $c \in [a, b]$.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется *ограниченной* на множестве $\{M\}$, если $\exists$ числа C_1 и C_2, такие, что $\forall\, M \in \{M\} : C_1 \leqslant f(M) \leqslant C_2$.

Теорема 11 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $u = f(M)$ непрерывна на *замкнутом ограниченном* множестве $\{M\}$, то она ограничена на этом множестве.

Доказательство. Допустим, что $u = f(M)$ не ограничена на множестве $\{M\}$. Тогда $\forall$ натурального числа n $\exists\, M_n \in \{M\} : |f(M_n)| > n$. Тем самым последовательность $\{f(M_n)\}$ — бесконечно большая. Из ограниченной последовательности точек $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть подпоследовательность $\{M_{k_n}\} \to A$. В силу леммы 3 точка $A \in \{M\}$ и поэтому функция $f(M)$ непрерывна в точке A. Следовательно, $\{f(M_{k_n})\} \to f(A)$, а это противоречит тому, что $\{f(M_{k_n})\}$ — бесконечно большая последовательность. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение не верно и, следовательно, функция $u = f(M)$ ограничена на множестве $\{M\}$.

Замечание. Если множестве $\{M\}$ не является ограниченным или не является замкнутым, то непрерывная на таком множестве функция $u = f(M)$ может быть неограниченной на этом множестве.

Задание. Придумайте соответствующие примеры.

Определение. Число U называется *точной верхней гранью* функции $u = f(M)$ на множестве $\{M\}$, если

1. $\forall\, M \in \{M\} : f(M) \leqslant \mathrm{U}$;
2. $\forall$ числа $\widetilde{\mathrm{U}} < \mathrm{U}\, \exists\, \widetilde{M} \in \{M\} : f(\widetilde{M}) > \widetilde{U}$.

Обозначение: $\mathrm{U} = \sup\limits_{\{M\}} f(M)$.

Аналогично определяется точная нижняя грань функции: $\inf\limits_{\{M\}} f(M)$.

Теорема 12 (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней.

Теорема доказывается так же, как и аналогичная теорема для функции одной переменной.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $\{M\}$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ (зависящее только от ε), такое, что $\forall\, M_1$ и M_2 из множества $\{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho\,(M_1, M_2) < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon.$$

Задание. Придумайте пример функции двух переменных $u = f(x, y)$, которая является: а) равномерно непрерывной на некотором множестве; б) непрерывной, но не равномерно непрерывной на некотором множестве.

Теорема 13 (Кантора). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.

Теорема доказывается так же, как и для функции одной переменной.

Задание. Придумайте примеры, когда двумерное множество не является ограниченным или не является замкнутым, и непрерывная на таком множестве функция $f(x, y)$:

а) не достигает своих точных граней;

б) не является равномерно непрерывной.

§ 5. Частные производные и дифференцируемость

Пусть точка $M(x_1, \ldots, x_m)$ — внутренняя точка области определения функции $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$. Рассмотрим частное приращение функции в этой точке, соответствующее приращению Δx_k аргумента x_k:

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) - \\ - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)\,;$$

$\Delta_{x_k} u$ зависит только от Δx_k (при фиксированной точке $M(x_1, \ldots$ $\ldots, x_m)$).

Определение. Если существует $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$, то он называется *частной производной* функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M по переменной x_k.

Для частной производной по переменной x_k в точке M используются различные обозначения: $u'_{x_k}(M)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M)$, $u_{x_k}(M)$.

Вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Примеры.

1. $u = x^y$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$.

2. $u(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ на осях координат,} \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$

   Найдем частное приращение $\Delta_x u$ в точке $O(0,0)$ (рис. 9.6): $\Delta_x u = u(\Delta x, 0) - u(0,0) = 1 - 1 = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = 0$, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$. Аналогично находим: $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$.

   Отметим, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y)$ не существует, и, значит, функция

$u(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$. Таким образом, это пример функции, разрывной в точке, но тем не менее имеющей в этой точке частные производные. Для функций одной переменной такая ситуация невозможна.

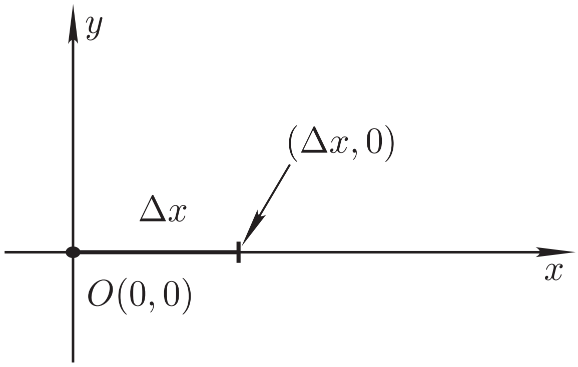


Рис. 9.6.

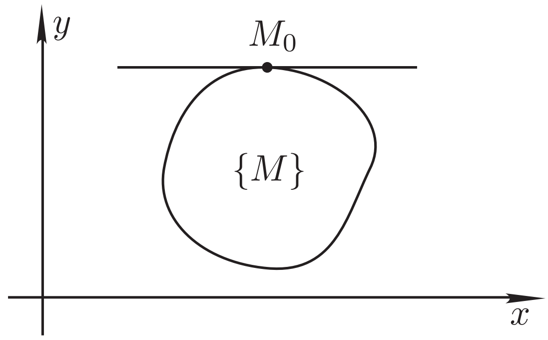


Рис. 9.7.

Физический смысл частной производной. Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ характеризует скорость изменения функции в точке M в направлении оси Ox.

Замечание. Если M — граничная точка области определения функции, то для нее введенное определение частной производной может быть непригодно. Например, для точки M_0 на рис. 9.7 не существует частное приращение $\Delta_x u$. В этом случае, если $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ существует во внутренних точках M области определения функции, то полагают $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0} \frac{\partial u}{\partial x}(M)$ (если этот предел существует).

Рассмотрим теперь полное приращение Δu функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ во внутренней точке $M(x_1, \ldots, x_m)$ из области определения функции:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \ldots, x_m).$$

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x_1, \ldots, x_m)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m, \qquad (9.5)$$

где $A_1, \ldots, A_m$ — какие-то числа (то есть они не зависят от $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$), $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — бесконечно малые функции при $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$, равные нулю при $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_m = 0$ (то есть $\alpha_i(0, \ldots, 0) = 0$).

Равенство (9.5) назовем *условием дифференцируемости* функции в точке $M(x_1, \ldots, x_m)$.

Физический смысл дифференцируемости функции многих переменных

Поставим такой вопрос: можно ли скорость изменения функции $u(x,y)$ по любому направлению в точке M выразить через скорости $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(M)$? Оказывается, что не всегда. Если $u(x,y)$ дифференцируема в точке M, то можно. Это станет ясно из дальнейшего.

Вспомним, что для функции $y = f(x)$ одной переменной x условие дифференцируемости имело вид: $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x = A\Delta x + o(\Delta x)$.

Возникает вопрос: Каков аналог слагаемого $o(\Delta x)$ в случае функции m переменных? Можно предположить, что аналогом будет сумма $[o(\Delta x_1) + \ldots + o(\Delta x_m)]$. Но это не верно! Чтобы дать правильный ответ на поставленный вопрос, обозначим буквой ρ расстояние между точками $M(x_1, \ldots, x_m)$ и $M'(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m)$ (рис. 9.8).

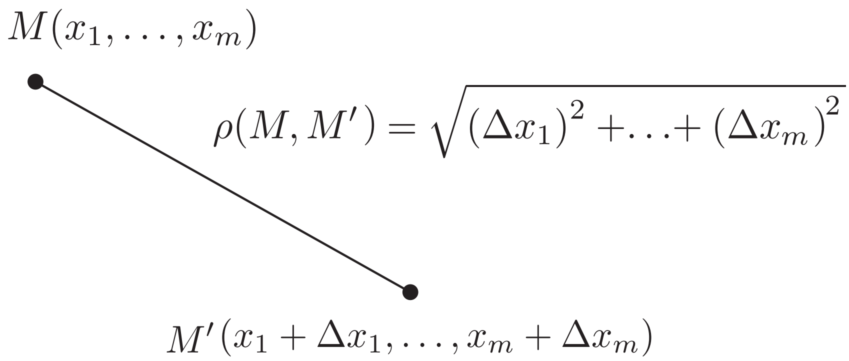


Рис. 9.8.

Докажем, что условие (9.5) дифференцируемости функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M можно записать в виде

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_m\Delta x_m + o(\rho), \tag{9.6}$$

причем слагаемое $o(\rho) = 0$ при $\rho = 0$. Обозначим сумму $\alpha_1\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m$, входящую в правую часть равенства (9.5), буквой h. Если $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2} = 0$, то $\Delta x_1 = \ldots =$

$= \Delta x_m = 0$, поэтому $\alpha_i(0, \ldots, 0) = 0$ и, следовательно, $h = 0$. Если же $\rho \neq 0$, то

$$\frac{h}{\rho} = \frac{\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m}{\rho} = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \ldots + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho},$$

и так как $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$ при $\rho \to 0$, то все $\alpha_i \to 0$ при $\rho \to 0$, а поскольку $\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \leqslant 1$, то $\frac{h}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом, $h = o(\rho)$ при $\rho \to 0$ и $h = 0$ при $\rho = 0$. Мы доказали, что из (9.5) следует (9.6).

Докажем, что верно и обратное, то есть если приращение Δu функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M можно представить в виде (9.6), где слагаемое $o(\rho)$ равно нулю при $\rho = 0$, то Δu можно представить и в виде (9.5), причем все $\alpha_i \to 0$ при $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$ и $\alpha_i = 0$ при $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_m = 0$. Обозначим слагаемое $o(\rho)$ в равенстве (9.6) буквой h. Если $\rho \neq 0$, то

$$h = \frac{h}{\rho} \cdot \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{h}{\rho} \frac{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_m^2}{\rho} = \\ = \left[\frac{h}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho}\right] \Delta x_1 + \ldots + \left[\frac{h}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho}\right] \Delta x_m.$$

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ обозначим функцию $\frac{h}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_i}{\rho}$ через α_i. Она определена при $\rho \neq 0$ и так как $\frac{h}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$ и $\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \leqslant 1$, то $\alpha_i \to 0$ при $\rho \to 0$ и, значит, $\alpha_i \to 0$ при $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$. Если $\rho = 0$, то есть $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_m = 0$, то положим $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Таким образом, мы представили функцию h в виде $h = \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$, причем функции $\alpha_i \to 0$ при $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$ и $\alpha_i = 0$ при $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_m = 0$. Это означает, что условие (9.6) можно записать в виде (9.5).

Замечание. Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке M, то она и непрерывна в точке M.

В самом деле, если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке M, то ее полное приращение Δu в этой точке можно представить в виде (9.5), откуда следует, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0$, а это и означает (согласно разностной форме условия непрерывности функции), что данная функция непрерывна в точке M.

Связь дифференцируемости с существованием частных производных. Для функции одной переменной $y = f(x)$ существование производной в точке x_0 является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в точке x_0. Для функции многих переменных существование частных производных в точке M_0 уже не является достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Теорема 14 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке $M(x_1, \ldots, x_m)$, то она имеет в точке M частные производные по всем переменным.

Доказательство. Запишем условие дифференцируемости функции в точке M в виде (9.5):

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m.$$

Положим все $\Delta x_i = 0$, кроме Δx_k, а $\Delta x_k \neq 0$, где k — любой номер от 1 до m. Тогда $\Delta u = \Delta_{x_k} u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k$, где A_k — число, $\alpha_k \to 0$ при $\Delta x_k \to 0$. Отсюда получаем: $\dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \to A_k$ при $\Delta x_k \to 0$, то есть $\exists \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k$.

Таким образом, существует $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M) = A_k$ $(k = 1, 2 \ldots, m)$. Теорема доказана.

Следствие. Условие (9.5) дифференцируемости функции в точке M можно записать в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m. \tag{9.7}$$

Отметим, что обратное к теореме 14 утверждение не верно.

Пример.

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{на осях координат,} \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0$ (это было показано ранее), но функция $u(x, y)$ не является непрерывной в точке $O(0, 0)$, а потому не дифференцируема в точке $O(0, 0)$.

Таким образом, существование частных производных — только необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции в данной точке.

Теорема 15 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ имеет частные производные по всем переменным в некоторой ε-окрестности точки $M(x_1, \ldots, x_m)$, причем в самой точке M эти частные производные непрерывны, то функция дифференцируема в точке M.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для функции двух переменных $u = f(x, y)$ (для сокращения записи). Пусть частные производные f'_x и f'_y существуют в ε-окрестности точки $M(x, y)$ и непрерывны в самой точке M.

Возьмем Δx и Δy столь малыми, чтобы точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ лежала в этой ε-окрестности точки M, и рассмотрим полное приращение функции в точке M:

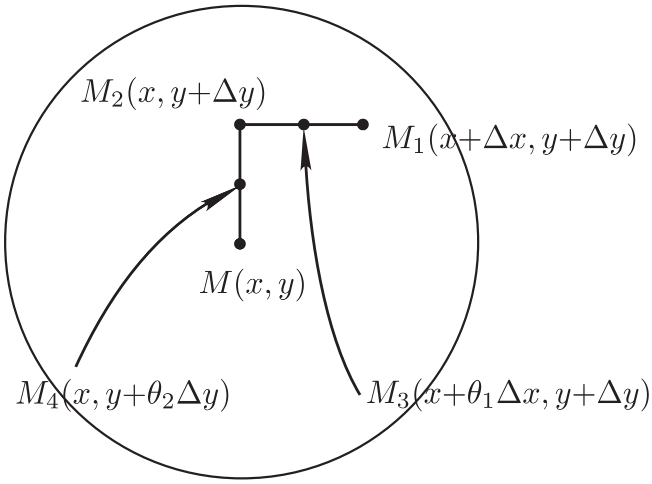


Рис. 9.9.

$$\begin{aligned}
&\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\
&= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = \\
&\qquad = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y\,,
\end{aligned}$$

где $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$.

К разностям в квадратных скобках мы применили формулу Лагранжа конечных приращений, при этом производные f'_x и f'_y берутся в промежуточных точках M_3 и M_4 (рис. 9.9).

Так как по условию теоремы f'_x и f'_y непрерывны в точке $M(x, y)$, то $f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha_1$, $f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \alpha_2$, где α_1 и $\alpha_2 \to 0$ при $\left\{ \begin{smallmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{smallmatrix} \right\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ при $\Delta x = \Delta y = 0$.

Следовательно,

$$\Delta u = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

то есть выполнено условие дифференцируемости функции $f(x, y)$ в виде (9.7). Теорема 15 доказана.

Задания.

1.
$$u(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\,, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Докажите, что $u(x,y)$ имеет частные производные u'_x и u'_y во всех точках плоскости, эти частные производные не являются непрерывными в точке $O(0,0)$, но функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$.

Этот пример показывает, что условие теоремы 15 является только достаточным, но не необходимым условием дифференцируемости функции.

2.
$$u(x,y)=\begin{cases}1, & \text{на осях координат,}\\ 0, & \text{во всех остальных точках.}\end{cases}$$

Докажите, что частные производные u'_x и u'_y непрерывны в точке $O(0,0)$. Вместе с тем, эта функция не дифференцируема в точке $O(0,0)$.

Объясните, почему этот пример не противоречит теореме 15.

Дифференцируемость сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $z=f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$, то есть $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$.

Теорема 16. Пусть:

1. функции $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ дифференцируемы в точке (u_0,v_0);
2. функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), где $x_0=\varphi(u_0,v_0)$, $y_0=\psi(u_0,v_0)$.

Тогда сложная функция $z=f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$ дифференцируема в точке (u_0,v_0).

Доказательство. Дадим произвольные приращения Δu и Δv аргументам u и v в точке (u_0,v_0). Функции $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$ получат приращения Δx и Δy, которые в силу условия 1 можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta x&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\,\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\,\Delta v+\alpha_1\Delta u+\alpha_2\Delta v,\\ \Delta y&=\frac{\partial\psi}{\partial u}(u_0,v_0)\,\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_0,v_0)\,\Delta v+\beta_1\Delta u+\beta_2\Delta v,\end{aligned}\tag{9.8}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\to 0$ при $\{\Delta u\to 0,\Delta v\to 0\}$ и $\alpha_i=\beta_i=0$ при $\Delta u=\Delta v=0$.

Этим приращениям Δx и Δy соответствует приращение Δz функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), которое в силу условия 2 можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0)\,\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y, \qquad (9.9)$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ при $\Delta x = = \Delta y = 0$, и, следовательно, $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $\{\Delta u \to 0, \Delta v \to 0\}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$.

Подставляя (9.8) в (9.9), приходим к равенству, которое запишем в виде

$$\Delta z = A\Delta u + B\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v, \qquad (9.10)$$

где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0)$$

и

$$B = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) \text{ —}$$

числа, а

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial u}\gamma_2 + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\beta_1$$

и

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial v}\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\beta_2 \text{ —}$$

функции, удовлетворяющие, очевидно, условиям

$$\alpha \text{ и } \beta \to 0 \text{ при } (\Delta u \to 0, \Delta v \to 0), \ \alpha = \beta = 0 \text{ при } \Delta u = \Delta v = 0.$$

Равенство (9.10) означает, что сложная функция $z = f\left(\varphi(u, v), \psi(u, v)\right)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0). Теорема доказана.

Из равенства (9.10) следуют формулы для производных сложной функции:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0),\\
\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0).
\end{aligned}$$

Эти же формулы запишем в более кратком виде:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{9.11}$$

При такой записи более наглядно видна зависимость z от u и v через каждый из аргументов x и y.

Примеры.

1. Рассмотрим уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ (это уравнение называется *уравнением в частных производных*; требуется найти функцию $z(x,y)$, удовлетворяющую этому уравнению).
   Пусть $f(t)$ — произвольная дифференцируемая функция аргумента t. Проверим, что функция $z=f\left(x^2+y^2\right)$ удовлетворяет данному уравнению. Найдем ее частные производные
   $$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y$$
   и подставим эти выражения в уравнение:
   $$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(2xy-2xy)\cdot f'\left(x^2+y^2\right)=0.$$
   Таким образом, любая функция $z=f\left(x^2+y^2\right)$, где $f(t)$ — дифференцируемая функция, является решением данного уравнения.
2. Вычислим частные производные по x и по y функции
   $$z=f\left(x-y^2,x^2+y^3\right).$$
   Введем обозначения: $u=x-y^2$, $v=x^2+y^3$. Тогда
   $$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u+f'_v\cdot 2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_u\cdot(-2y)+f'_v\cdot 3y^2.$$

Рассмотрим теперь более общий случай сложной фукнции:

$$u=f\left(x_1,\ldots,x_m\right),$$

где $x_1=\varphi_1\left(t_1,\ldots,t_k\right),\ldots,x_m=\varphi_m\left(t_1,\ldots,t_k\right)$. Для ее частных производных имеет место формула, которая выводится аналогично формулам (9.11):

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\quad (i=1,\ldots,k). \tag{9.12}$$

Дифференциал функции многих переменных

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке M. Тогда ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\,\Delta x_m\right) + \\ + (\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m),$$

где $\alpha_i \to 0$ при $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$, $\alpha_i = 0$ при $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_m = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Обе суммы, заключенные в круглые скобки в правой части равенства, являются бесконечно малыми при $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$. При этом первая сумма является линейной относительно $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ частью приращения функции, а вторая сумма — бесконечно малой более высокого порядка, чем линейная часть, при $\{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0\}$.

Определение. *Дифференциалом* (первым дифференциалом) функции $u = f(M)$ в точке M называется линейная относительно $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ часть приращения функции в точке M:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\,\Delta x_m.$$

Дифференциалом независимой переменной x_i будем называть приращение этой переменной:

$$dx_i = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Выражение для дифференциала функции в точке M запишется теперь так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)dx_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j}(M)dx_j. \quad (9.13)$$

Лемма 4 (об инвариантности формы первого дифференциала). Формула (9.13) остается в силе, если $x_1, \ldots, x_m$ являются не независимыми переменными, а дифференцируемыми функциями каких-то независимых переменных.

Доказательство. Пусть $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ — дифференцируемая функция, а $x_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_k)$ — дифференцируемые функции независимых переменных $t_1, \ldots, t_k$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда, используя формулу (9.12), можно записать цепочку равенств:

$$du = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u}{\partial t_i} dt_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t_1} dt_1 + \ldots + \frac{\partial x_j}{\partial t_k} dt_k \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j.$$

Первое равенство в этой цепочке написано в соответствии с определением дифференциала функции, во втором равенстве используется формула (9.12), третье равенство получено путем изменения порядка суммирования и, наконец, в последнем равенстве использовано то, что дифференциал функции $x_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_k)$ выражается (согласно определению дифференциала функции) формулой

$$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial t_1} dt_1 + \ldots + \frac{\partial x_j}{\partial t_k} dt_k.$$

Итак,

$$du = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j, \tag{9.14}$$

то есть формула (9.13) имеет место и в том случае, когда $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$ — дифференцируемые функции каких-либо независимых переменных. Лемма 5 доказана.

Замечание. Отличие формулы (9.14) от формулы (9.13) состоит в том, что в формуле (9.13) $dx_j = \Delta x_j$ — приращение переменной x_j, а в формуле (9.14) dx_j — дифференциал функции $x_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_k)$, поэтому, здесь, вообще говоря, $dx_j \neq \Delta x_j$. Таким образом, формула (9.14) показывает, что сохраняется форма (вид) выражения для дифференциала функции, а содержание (наполнение) этой формулы изменяется.

Пример. Пусть $u = x^y$. Тогда

$$du = y \cdot x^{y-1} \cdot dx + x^y \cdot \ln x \cdot dy \, -$$

дифференциал данной функции в точке (x, y). В точке $(1, 1)$ $du = dx$; в точке $(1, 0)$ $du = 0$ (отметим, что это не число, а функция аргументов dx и dy, равная тождественно нулю).

Правила дифференцирования

Пусть u и v — дифференцируемые функции аргументов $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$.

Тогда:

1. $d(cu) = c\,du$ $(c = const)$,
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$,
3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$,
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Докажем, например, формулу 4. Введем функцию $w = \dfrac{u}{v}$, она является сложной функцией аргументов $x_1, \ldots, x_m$. В силу леммы 5

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Геометрический смысл дифференцируемости функции

I. **Касательная плоскость и нормаль к поверхности**

Напомним, что для функции одной переменной $y = f(x)$ из дифференцируемости в точке x_0 следует существование касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, $(x, y) \in$ $\in D$. Ее графиком является поверхность

$$S = \{N\,(x, y, f(x, y))\,, (x, y) \in D\}$$

в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 9.10). Пусть $N_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Проведем через точку N_0 плоскость P. Пусть $N(x, y, z)$ — произвольная точка на поверхности S, $z = f(x, y)$; $NN_1 \perp P$, $N_1 \in P$.

Определение. Плоскость P, проходящая через точку N_0 поверхности S, называется *касательной плоскостью* к поверхности S в этой точке, если при $N \to N_0$ $(N \in S)$ расстояние $\rho\,(N, N_1)$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $\rho\,(N, N_0)$, то есть

$$\lim_{\substack{N \to N_0 \\ (N \in S)}} \frac{\rho\,(N, N_1)}{\rho\,(N, N_0)} = 0.$$

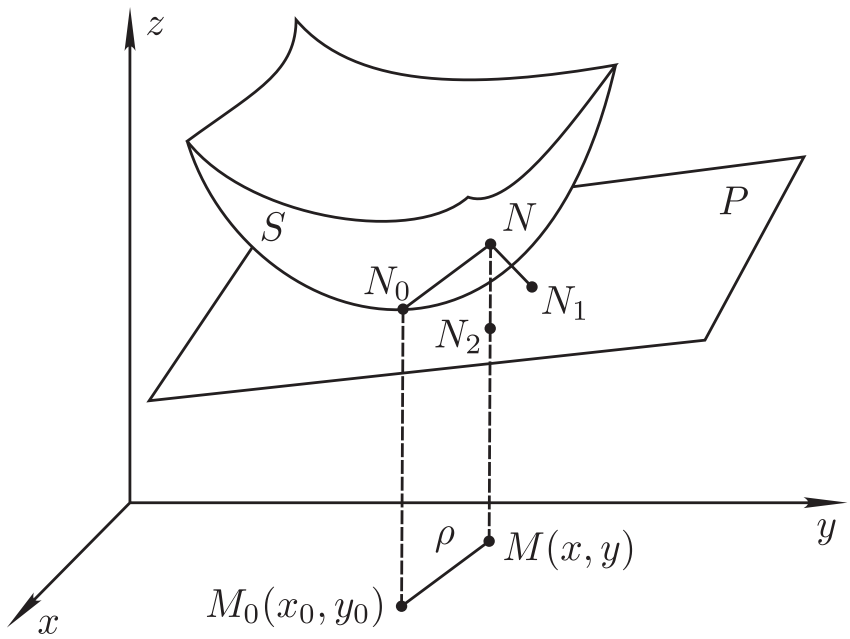


Рис. 9.10.

Так как $\dfrac{\rho\,(N, N_1)}{\rho\,(N, N_0)} = \sin\angle NN_0N_1$, то из написанного предельного равенства следует, что $\angle NN_0N_1 \to 0$ при $N \to N_0$.

Теорема 17. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, существует касательная плоскость к графику этой функции.

Доказательство. Пусть $N(x, y, z) \in S$, $z = f(x, y)$. Положим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta z$. Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то ее приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\,(M_0)\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,(M_0)\,\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Введем обозначения: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0) = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0) = B$ и перепишем условие дифференцируемости в виде

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho).$$

Рассмотрим плоскость P, заданную уравнением

$$Z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

и докажем, что она является касательной плоскостью к поверхности S в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Плоскость P проходит через точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет вектор нормали $\vec{n} = \{A, B, -1\}$. Нам надо доказать, что

$$\frac{\rho\,(N, N_1)}{\rho\,(N, N_0)} \to 0 \text{ при } N \to N_0 \ (N \in S), \text{ где } NN_1 \perp P, \ N_1 \in P.$$

Пусть N_2 — точка пересечения прямой NM с плоскостью P. Точка N_2 имеет координаты $(x, y, Z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0))$, поэтому $\rho(N, N_2) = |z - Z| = o(\rho)$. Так как $\rho(N, N_1) \leqslant \rho(N, N_2)$ (перпендикуляр меньше наклонной), а $\rho(N, N_0) \geqslant \rho(M, M_0) = \rho$, то

$$\frac{\rho\,(N, N_1)}{\rho\,(N, N_0)} \leqslant \frac{\rho\,(N, N_2)}{\rho\,(M, M_0)} = \frac{o(\rho)}{\rho} \to 0 \text{ при } N \to N_0,$$

и, следовательно, $\dfrac{\rho\,(N, N_1)}{\rho\,(N, N_0)} \to 0$ при $N \to N_0$ $(N \in S)$. Теорема доказана.

Итак, плоскость, заданная уравнением

$$Z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0),$$

является касательной плоскостью к поверхности S (графику фукнции $z = f(x, y)$) в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Вектор $\vec{n} = \left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0), \dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0), -1\right\}$ называется *вектором нормали* к поверхности S в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Примеры.

1. Пусть поверхность S задана уравнением $z = x^2 + y^2$ (это параболоид вращения).

Тогда точка $N_0(1, 2, 5) \in S$; $M_0(1, 2)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 2, \ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 4.$$

Уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке N_0:

$$Z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2).$$

2. Пусть поверхность S задана уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (это коническая поверхность, рис. 9.11).

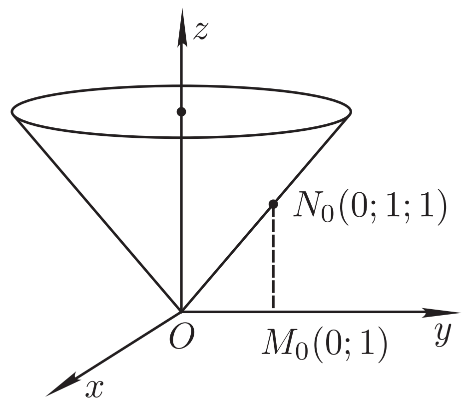


Рис. 9.11.

В точке $(0, 0)$ функция не дифференцируема, и в точке $O(0, 0, 0)$ касательная плоскость к поверхности S не существует.

Возьмем точку $N_0(0,1,1) \in S$. Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 1$, то уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке N_0 имеет вид $Z - 1 = y - 1$ или $Z = y$. Эта плоскость содержит образующую конуса.

II. **Производная по направлению и градиент**

Частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ характеризует скорость изменения функции по направлению оси Ox. Скорость изменения функции по произвольному направлению характеризуется *производной по этому направлению*.

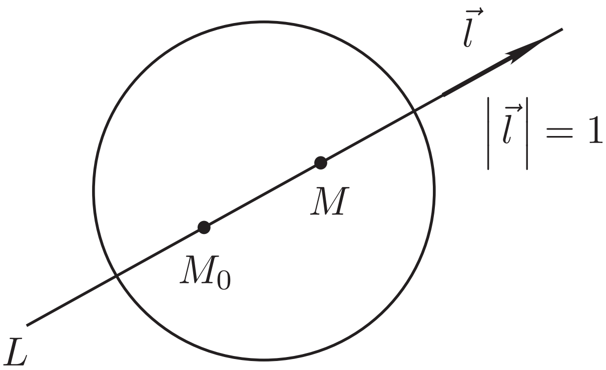


Рис. 9.12.

Пусть функция $u = f(x,y,z) = f(M)$ определена в окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^3$. Проведем через точку M_0 какую-нибудь прямую L и выберем на ней одно из двух возможных направлений, оно характеризуется единичным вектором $\vec{l}$ (рис. 9.12). Пусть M — произвольная точка из указанной окрестности, лежащая на прямой L. Через M_0M обозначим величину направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$, то есть

$$M_0M = \begin{cases} \left|\overrightarrow{M_0M}\right|, \text{ если } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{l}, \\ -\left|\overrightarrow{M_0M}\right|, \text{ если } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \vec{l}. \end{cases}$$

Определение. Если существует $\lim\limits_{\substack{M\to M_0 \\ (M\in L)}} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, то он называется производной функции $u = f(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec{l}$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ или $u'_{\vec{l}}(M_0)$.

Установим связь между производной по направлению и частными производными функции в данной точке M_0.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x,y,z) \in L$, $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $M_0M = t$. Тогда $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$, $(-\infty < t < \infty)$ — параметрические уравнения прямой L.

На прямой L:

$$u = f(M) = f(x, y, z) =$$
$$= f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) =: \varphi(t) -$$

сложная функция одной переменной t, в частности $f(M_0) = \varphi(0)$.

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{d\varphi}{dt}(0),$$

если этот предел существует.
Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\frac{dy}{dt}(0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\frac{dz}{dt}(0),$$

а поскольку для любого t, в том числе и для $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = \cos\alpha, \ \frac{dy}{dt} = \cos\beta, \ \frac{dz}{dt} = \cos\gamma, \quad \text{то}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \quad (9.15)$$

Формула (9.15) имеет простой физический смысл: она показывает, что если функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то в этой точке скорость изменения функции по заданному направлению $\overrightarrow{l}$ является линейной комбинацией скоростей изменения этой функции по направлениям координатных осей (то есть линейной комбинацией частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$), причем коэффициентами этой линейной комбинации выступают координаты $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ единичного вектора $\overrightarrow{l}$, задающего направление; эти коэффициенты являются *весовыми* множителями, показывающими, какую долю вносит каждая частная производная в производную (скорость) по направлению $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. В частности, если $\overrightarrow{l} = \{1, 0, 0\}$, то есть направление $\overrightarrow{l}$ совпадает с направлением оси Ox, то из формулы (9.15), как и следует ожидать, получаем $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$.

Определение. *Градиентом* дифференцируемой функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cdot \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы осей координат.

Правую часть формулы (9.15) можно теперь записать в виде скалярного произведения векторов $\operatorname{grad} u(M_0)$ и $\overrightarrow{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left(\operatorname{grad} u(M_0) \cdot \overrightarrow{l}\right), \tag{9.16}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = |\operatorname{grad} u| \cdot \left|\overrightarrow{l}\right| \cdot \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi = \mathit{Пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} u(M_0), \tag{9.17}$$

где φ — угол между векторами $\operatorname{grad} u(M_0)$ и $\overrightarrow{l}$ (рис. 9.13), $\mathit{Пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} u(M_0)$ — проекция вектора $\operatorname{grad} u(M_0)$ на направление $\overrightarrow{l}$.

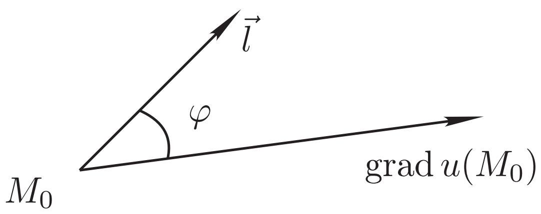


Рис. 9.13.

Из (9.17) получаем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)\right)_{max} = |\operatorname{grad} u(M_0)|$$

(при $\varphi = 0$), Таким образом, вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 показывает направление наибольшего роста функции $u = f(M)$ в этой точке, а $|\operatorname{grad} u|$ есть скорость роста функции $u = f(M)$ в точке M_0 в этом направлении.

Отсюда следует, что вектор $\operatorname{grad} u$ однозначно определяется самой функцией $u = f(M)$ и не зависит от выбора системы координат.

Геометрический смысл градиента

Поверхность S, определяемая уравнением $f(x, y, z) = c = \text{const}$, называется *поверхностью уровня* функции $u = f(x, y, z)$. Можно доказать, что вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 поверхности уровня S коллинеарен вектору нормали к поверхности S в этой точке. Покажем это на примере.

Пример. $u = x^2 + y^2 + z^2$.

$S: \ x^2 + y^2 + z^2 = c > 0$ — поверхностью уровня данной функции является сфера радиуса $\sqrt{c}$.

Пусть $c = 14$. Тогда $M(1,2,3) \in S$. В точке M $\operatorname{grad} u = \{2,4,6\}$. Убедимся в том, что $\operatorname{grad} u(M) \,||\, \overrightarrow{n}$, где $\overrightarrow{n}$ — вектор нормали к поверхности S в точке M. В самом деле, $\overrightarrow{n} \,||\, \overrightarrow{r} = \{1,2,3\}$ (рис. 9.14), а так как $\operatorname{grad} u(M) = 2\overrightarrow{r}$, то $\operatorname{grad} u(M) \,||\, \overrightarrow{r}$, поэтому $\operatorname{grad} u(M) \,||\, \overrightarrow{n}$.

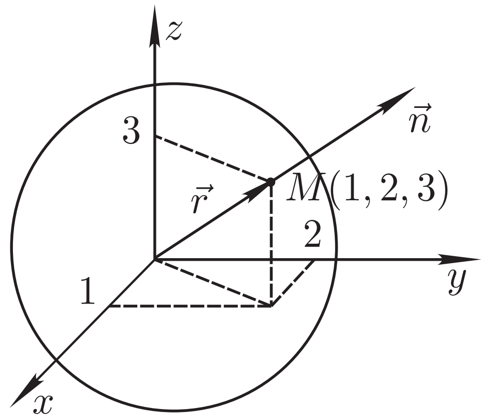


Рис. 9.14.

Физические примеры.

Электростатическое поле, то есть электрическое поле неподвижных зарядов, можно описать с помощью скалярной функции $u(M)$ — *потенциала электрического поля*. Поверхности уровня $u(M) = c$ — *эквипотенциальные* поверхности. Напряженность электрического поля выражается формулой

$$\overrightarrow{E} = -\operatorname{grad} u(M).$$

В частности, потенциал электростатического поля точечного заряда e, помещенного в начало координат, имеет вид $u(M) = k\dfrac{\mathrm{e}}{r}$, где M — точка с координатами (x, y, z) (рис. 9.15), $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, постоянная k зависит от выбора системы единиц. Для напряженности электрического поля получаем выражение:

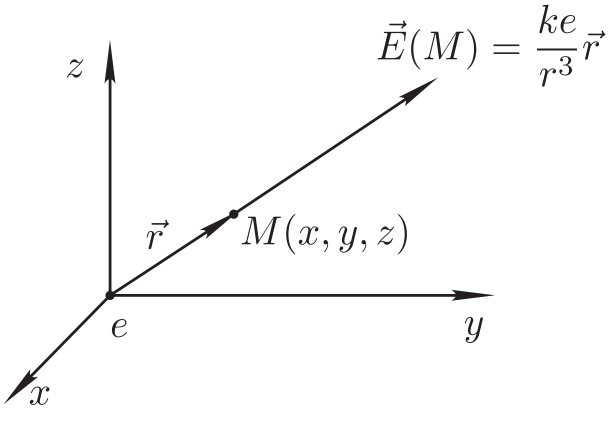


Рис. 9.15.

$$\overrightarrow{E}(M) = -\operatorname{grad} u(M) = \frac{k\mathrm{e}}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right) =$$
$$= \frac{k\mathrm{e}}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right) = \frac{k\mathrm{e}}{r^3}\cdot\vec{r},$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Поле тяготения точечной массы m, находящейся в начале координат, описывается *ньютоновым потенциалом* $u(M) = \gamma\dfrac{m}{r}$

(γ — гравитационная постоянная). Сила $\overrightarrow{F}(M)$, с которой масса m притягивает единичную массу, помещенную в точку $M(x,y,z)$, выражается формулой

$$\overrightarrow{F}(M) = \operatorname{grad} u(M) = -\frac{\gamma m}{r^3}\cdot\overrightarrow{r},$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Замечание. Если в каждой точке M области G задан вектор $\overrightarrow{a}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле $\overrightarrow{a}(M)$. Векторное поле вида $\overrightarrow{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$ называется *потенциальным*, а функция $u(M)$ называется *потенциалом* этого векторного поля. Рассмотренные электростатическое и гравитационное поля $\overrightarrow{E}(M)$ и $\overrightarrow{F}(M)$ — потенциальные векторные поля.

Понятие производной по направлению и градиента можно ввести для функции любого числа переменных $m \geqslant 2$.

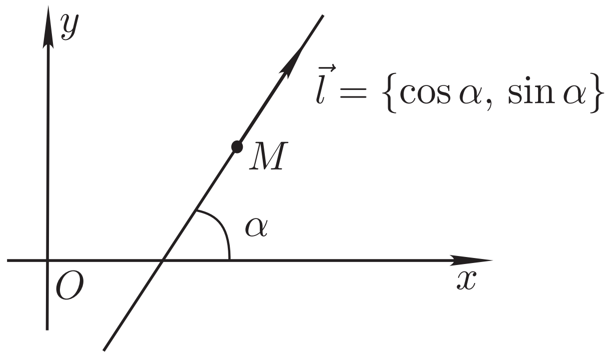


Рис. 9.16.

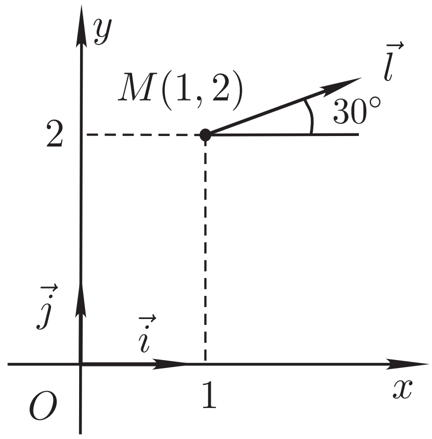


Рис. 9.17.

При $m = 2$ имеем: $u = u(x,y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\sin\alpha,$$

где α — угол между вектором $\vec{l}$ и осью Ox (рис. 9.16),

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cdot\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cdot\vec{j}.$$

Пример. $u = x^2 + y^3$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M)$, если $M(1,2)$, а вектор $\vec{l}$ составляет угол в 30° с осью Ox (рис. 9.17).

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M) = 2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M) = 12$, $\operatorname{grad} u(M) = 2 \cdot \vec{i} + 12 \cdot \vec{j}$, $\vec{l} = \{\cos 30^\circ, \sin 30^\circ\} = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M) = \left(\operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{l}\right) = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot 12 = \sqrt{3} + 6$.

В общем m-мерном случае имеем: $u = u(x_1, \ldots, x_m)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \{y_1 - x_1, \ldots, y_m - x_m\}$ — m-мерный вектор (рис. 9.18); $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2}$; скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и $\vec{b} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ определяется формулой $\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + \ldots + a_mb_m$, а угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — формулой

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

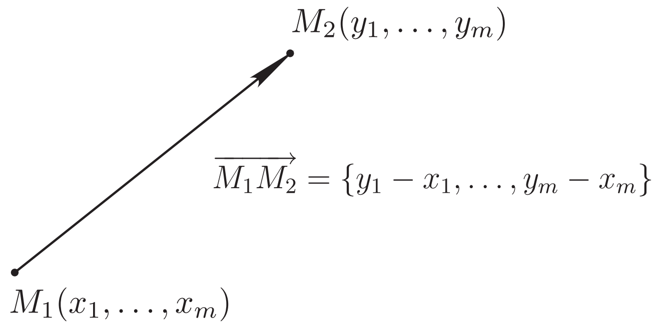


Рис. 9.18.

$\vec{l} = \{\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_m\}$ — единичный вектор $\left(\left|\vec{l}\right| = 1\right)$, задающий направление; $\operatorname{grad} u(M) = \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(M), \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_m}(M)\right\}$;

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{l} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j}(M) \cdot \cos\alpha_j;$$

формула (9.17) также остается в силе.

§ 7. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ в некоторой окрестности точки M. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ является функцией переменных $x_1, \ldots, x_m$, определенной в этой окрестности точки M.

Определение. Если функция $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет в точке M частную производную по переменной x_k, то есть существует $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ в точке M, то она называется *второй частной производной* (или частной производной 2-го порядка) функции u по переменным x_i, x_k в точке M.

Для этой второй частной производной используются различные обозначения: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(M)$, $u^{(2)}_{x_i x_k}(M)$, $u''_{x_i x_k}(M)$, $f''_{x_i x_k}(M)$, $f_{x_i x_k}(M)$.

Если $k \neq i$, то частная производная 2-го порядка называется *смешанной* частной производной 2-го порядка.

Частные производные более высокого порядка

вводятся по индукции: n-я частная производная (или частная производная n-го порядка) функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ в точке M определяется равенством

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)$$

Если не все номера $i_1, \ldots, i_n$ равны друг другу, то эта частная производная называется смешанной частной производной n-го порядка.

Примеры.

1. Пусть $u = x^y$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\, x^{y-1}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + y\, x^{y-1} \ln x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y\, x^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}.$$

Обратим внимание на то, что в этом примере $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Возникает вопрос: всегда ли выполняется это равенство? Следующий пример показывает, что ответ на этот вопрос — отрицательный.

2. Пусть $u(x,y)=\begin{cases} xy, & |y|\leqslant|x|, \\ -xy, & |y|>|x|. \end{cases}$ (рис. 9.19) Найдем $u_{xy}(0,0)$ и $u_{yx}(0,0)$.

Для любого $y\neq 0$ в достаточно малой окрестности точки $(0,y)$ имеем (см. рис. 9.19): $u(x,y)=-xy$, поэтому $u_x(x,y)=-y$, в частности $u_x(0,y)=-y$. Заметим, что последнее равенство верно и при $y=0$, то есть $u_x(0,0)=0$. В самом деле, поскольку $u(x,0)=0$, то $u_x(x,0)=0$ и, в частности, $u_x(0,0)=0$.

Итак, для любого y справедливо равенство $u_x(0,y)=$ $=-y$. Используя это равенство, находим:

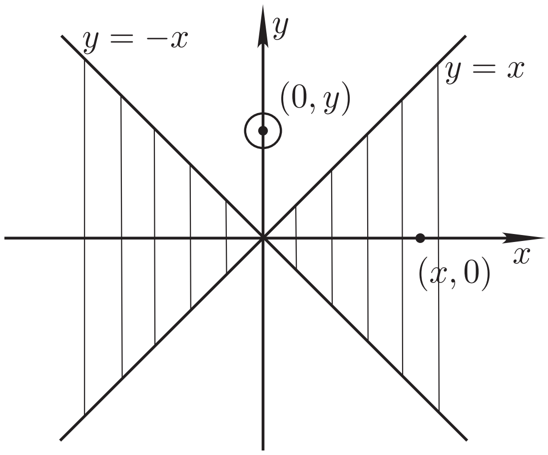
$$u_{xy}(0,y)=-1,$$

в частности,

$$u_{xy}(0,0)=-1.$$

Аналогичные вычисления приводят к равенству $u_{yx}(0,0)=1$.

Таким образом, в данном примере $u_{xy}(0,0)\neq u_{yx}(0,0)$.



В заштрихованной области $u=xy$, в остальной $u=-xy$.

Рис. 9.19.

Замечание. Отметим, что в данном примере частные производные $u_x(x,y)$ и $u_y(x,y)$ не существуют в точках (x,y), лежащих на прямых $y=x$ и $y=-x$ (за исключением точки $(0,0)$), так как в этих точках функция $u(x,y)$ разрывна и по переменной x, и по переменной y. Поэтому не существует такой окрестности точки $(0,0)$, во всех точках которой функция $u(x,y)$ имеет частные производные $u_x(x,y)$ и $u_y(x,y)$. Это, однако, не препятствует существованию частных производных второго порядка $u_{xy}(0,0)$ и $u_{yx}(0,0)$, поскольку для их определения достаточно, чтобы частная производная первого порядка u_x существовала в точках оси y, а частная производная u_y — в точках оси x, что и имеет место в нашем примере.

Задание. Пусть $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$.

1)Докажите, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t=u_{xx}.$$

Это уравнение играет важную роль в математической физике. Оно описывает процесс распространения тепла в одномерном стержне, функция $u(x,t)$ — это температура в точке стержня с координатой x в момент времени t. Данная функция называется *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности, она описывает изменение температуры в разных точках x бесконечного стержня с изменением времени t в том случае, когда до начального момента времени $t = 0$ температура во всех точках стержня равнялась нулю, а в момент $t = 0$ стержню сообщено некоторое количество тепла в точке $x = 0$.

2) Постройте следующие графики температуры $u(x,t)$:
   1. графики $u(x,t)$ как функции x при трех фиксированных значениях времени t_1, t_2 и t_3, таких, что $0 < t_1 < t_2 < t_3$;
   2. графики $u(x,t)$ как функции t при трех фиксированных значениях x: $x = 0$, $x = x_1$ и $x = x_2$, причем $0 < x_1 < x_2$.

Теорема 18 (о равенстве смешанных производных). Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $u = f(x,y)$ имеет смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx}, и если эти смешанные производные непрерывны в точке M_0, то они равны в этой точке:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Доказательство. Рассмотрим квадрат $M_0M_1M_2M_3$ со сторонами, параллельными осям координат и равными h, причем возьмем h столь малым, чтобы квадрат целиком лежал в указанной окрестности точки M_0 (рис. 9.20). Введем функции

$$F(h) = f(M_2) - f(M_1) - f(M_3) + f(M_0) =$$
$$= f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, h) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$$

и

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0).$$

Тогда

$$F(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0). \tag{9.18}$$

Применяя формулу Лагранжа конечных приращений, приходим к равенствам

$$F(h) = \varphi'(x_0 + \theta_1 h)\cdot h = [f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)]\cdot h,$$

где θ_1 — некоторое число из интервала $0 < \theta_1 < 1$.

К разности, стоящей в квадратных скобках, снова применим формулу Лагранжа (теперь по переменной y), получим равенство

$$F(h) = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h) \cdot h^2,$$

где θ_2 — некоторое число из интервала $0 < \theta_2 < 1$.

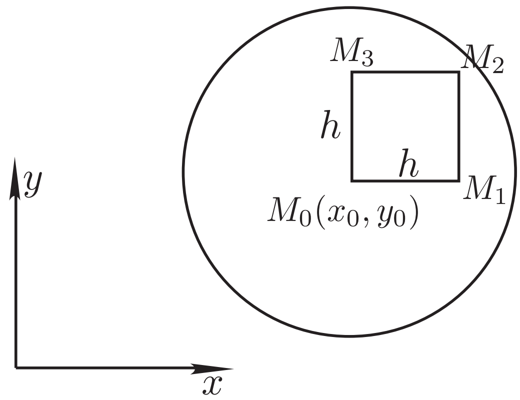


Рис. 9.20.

Так как по условию функция f''_{xy} непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, то $f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h)$ можно представить в виде $f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом,

$$F(h) = \left[f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)\right] \cdot h^2. \qquad (9.19)$$

Введем еще одну функцию:

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y_0).$$

Тогда $F(h) = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0)$ и, преобразуя это выражение для $F(h)$ таким же образом, как и выражение (9.18), приходим к равенству

$$F(h) = \left[f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)\right] \cdot h^2, \qquad (9.20)$$

где $\beta(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Приравняем выражения (9.19) и (9.20) для $F(h)$, сократим равенство на h^2 и перейдем к пределу при $h \to 0$. Получим равенство $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Имеет место более сильная теорема, нежели теорема 18, а именно: если $u = f(x, y)$ имеет в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ частные производные f'_x, f'_y и f''_{xy}, причем f''_{xy} непрерывна в точке M_0, то в точке M_0 существует f''_{yx} и справедливо равенство

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Определение. Функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ называется *дважды дифференцируемой* в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и все ее частные производные 1-го порядка дифференцируемы в самой точке M_0.

Понятие n-кратной дифференцируемости функции вводится по индукции. Пусть уже введено понятие $(n-1)$-кратной дифференцируемости функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$. Будем говорить, что эта функция *n раз дифференцируема* в точке M_0, если она $(n-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и все ее частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемы в самой точке M_0.

Отметим, что если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ n раз дифференцируема в точке M_0, то эта функция и все ее частные производные до $(n-2)$-го порядка включительно дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0 (докажите это).

Сформулируем еще две теоремы о равенстве смешанных производных.

Теорема 18[а]. Если функция $u = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Доказательство проводится сходно с тем, как была доказана теорема 18 (см. [1]).

Теорема 18[б]. Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ n раз дифференцируема в точке M_0, то все ее смешанные частные производные в точке M_0 до n-го порядка включительно не зависят от порядка дифференцирования.

Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим сначала функцию двух переменных. Пусть функция $u = f(x, y)$ независимых переменных x и y дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то есть она дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и ее частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ дифференцируемы в точке M_0. Рассмотрим дифференциал функции в окрестности точки M_0:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)dy. \tag{9.21}$$

Отметим, что дифференциал du является функцией четырех переменных: x, y, dx, dy.

Чтобы ввести дифференциал второго порядка функции $u = f(x, y)$, будем рассматривать du как функцию только x и y, то есть так, как если бы dx и dy были фиксированными числами (постоянными множителями).

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ дифференцируемы в точке M_0, то du является дифференцируемой функцией переменных x и y в точке M_0.

Определение. *Дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 называется дифференциал от первого дифференциала du при следующих условиях:

1. du рассматривается как функция только x и y,
2. при вычислении дифференциалов от $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ приращения Δx и Δy независимых переменных x и y берутся такими же, как в выражении (9.21) для du, то есть равными dx и dy.

Итак,

$$d^2u = d(du)$$

при указанных двух условиях.

Из (9.21) и правил дифференцирования следует, что

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\cdot dx + \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\cdot dy = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right]dx + \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]dy = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Отметим, что производные 2-го порядка в равенстве (9.22) берутся в точке M_0, а равенство $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ следует из теоремы 18[a].

Пример. Пусть $u = x^y$; $M_0(1, 0)$. Требуется найти $d^2u\big|_{M_0}$.

Находим частные производные сначала первого, а затем второго порядка:

$$u_x = y\,x^{y-1},\quad u_y = x^y\,\ln x,$$
$$u_{xx} = y\,(y-1)\,x^{y-2},\quad u_{xy} = x^{y-1} + y\,x^{y-1}\,\ln x,\quad u_{yy} = x^y\,(\ln x)^2\,.$$

По формуле (9.22) получаем:

$$\begin{aligned} d^2u\big|_{M_0} &= u_{xx}(M_0)\,dx^2 + 2u_{xy}(M_0)\,dxdy + u_{yy}(M_0)\,dy^2 = \\ &= 0\cdot dx^2 + 2\,dx\,dy + 0\cdot dy^2 = 2\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Заметим, что выражение (9.22) для d^2u похоже на квадрат двучлена. Его действительно можно записать как квадрат двучлена, но не обычного, а символического (или операторного) двучлена.

Назовем *оператором* правило, посредством которого каждой функции из заданного множества функций, ставится в соответствие некоторая функция из, вообще говоря, другого множества (одна функция преобразуется в другую функцию). Так, операцию нахождения частной производной функции $u(x, y)$ по аргументу x можно рассматривать как действие оператора (будем обозначать его $\dfrac{\partial}{\partial x}$), который функцию $u(x, y)$ преобразует (переводит) в функцию $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$: $\dfrac{\partial}{\partial x}u = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично определяется оператор $\dfrac{\partial}{\partial y}$ частной производной по y.

Оператор $d = \dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy$ назовем *оператором дифференциала*. При действии этого оператора на функцию $u(x, y)$ получается дифференциал функции: $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$.

Произведение операторов определим следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y};\ \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2};\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l},$$

k и l — натуральные числа.

Определим n-ю степень оператора d как n-ю степень двучлена $\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy$. Тогда

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Второй дифференциал функции $u(x, y)$ можно теперь записать в виде

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u.$$

Дифференциал n-го порядка функции вводится по индукции.

Если функция $u(x, y)$ n раз дифференцируема в точке M_0 (то есть $(n-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и все ее частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемы в точке M_0), то *дифференциалом d^nu n-го поряд-*

ка функции $u(x,y)$ в точке M_0 назовем дифференциал в точке M_0 от дифференциала $(n-1)$-го порядка при таких же двух условиях, как и при определении дифференциала 2-го порядка (разумеется с заменой во втором условии частных производных первого порядка на частные производные $(n-1)$-го порядка):

$$d^n u = d\left(d^{n-1}u\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{9.23}$$

По индукции нетрудно доказать операторную формулу

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u. \tag{9.24}$$

В случае функции m независимых переменных $u = f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_m)$ дифференциал n-го порядка вводится индуктивно по формуле (9.23), оператор дифференциала имеет вид

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m,$$

и справедлива формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u. \tag{9.25}$$

В частности,

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 u = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \tag{9.26}$$

Если аргументы x и y функции $u(x,y)$ не являются независимыми переменными, а являются дифференцируемыми функциями каких-то независимых переменных $t_1, \ldots, t_k$, то формула (9.24) изменится (то же самое относится к функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ и формуле (9.25)). Действительно, в силу инвариантности формы 1-го дифференциала имеем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

где dx и dy являются функциями $t_1, \ldots, t_k, dt_1, \ldots, dt_k$, а $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ — функциями $t_1, \ldots, t_k$. При вычислении второго дифференциала d^2u, как дифференциала от первого дифференциала, рассматриваем du как функцию $t_1, \ldots, t_k$, то есть учитываем зависимость от $t_1, \ldots, t_k$ всех входящих в du слагаемых и сомножителей:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \\ &= \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dy + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y = \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u\right] + \left\{\frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y\right\}. \end{aligned}$$

Мы видим, что по сравнению со случаем, когда x и y — независимые переменные, выражение для d^2u содержит дополнительные слагаемые (они заключены в фигурные скобки).

Таким образом, форма второго дифференциала не инвариантна. То же самое относится к дифференциалам более высокого порядка. Исключением из этого является случай, представленный далее в замечании.

Замечание. Если x и y — линейные функции $t_1, \ldots, t_k$, то есть

$$x = \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_k t_k + \alpha_{k+1}, \quad y = \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_k t_k + \beta_{k+1},$$

α_i и β_i — числа, то $dx = \alpha_1 dt_1 + \ldots + \alpha_k dt_k$ не зависит от $t_1, \ldots, t_k$, и поэтому $d^2x = d(dx) = 0$. Аналогично, $d^2y = 0$, и, следовательно, $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u$, то есть формула (9.24) при $n = 2$ остается в силе. То же самое будет для $n > 2$.

И также, если $x_1, \ldots, x_m$ — линейные функции $t_1, \ldots, t_k$, то есть

$$x_i = \alpha_{i1}t_1 + \ldots + \alpha_{ik}t_k + \alpha_{i,k+1}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{9.27}$$

то формула (9.25) остается в силе, где dx_i — дифференциалы функций (9.27). Это замечание понадобится нам в следующем параграфе.

§ 8. Формула Тейлора

Для функции $u = F(t)$ одной переменной имеет место теорема: если функция $u = F(t)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки $t = t_0$, то $\forall t$ из этой окрестности справедливо равенство (формула Тейлора):

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \\ + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0)) \cdot (t - t_0)^{n+1}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

Положим $t - t_0 = \Delta t = dt$. Так как $F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = F^{(k)}(t_0)(dt)^k = d^kF\big|_{t=t_0}$, то, обозначив $F(t) - F(t_0)$ через Δu, формулу Тейлора запишем в виде

$$\Delta u = dF|_{t=t_0} + \ldots + \frac{1}{n!}\, d^nF|_{t=t_0} + \frac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1}F\big|_{t=t_0+\theta\Delta t} \tag{9.28}$$

Таким образом, формула (9.28) — это обычная формула Тейлора для фукнции одной переменной, но записанная в специальном виде — через дифференциалы функции.

Для функции многих переменных имеет место аналогичная формула.

Теорема 19. Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в ε-окрестности точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$, то $\forall$ точки $M\left(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m\right)$ из этой ε-окрестности приращение функции $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ можно представить в виде

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^nu\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u\Big|_{N,} \tag{9.29}$$

где N — некоторая точка, лежащая на отрезке M_0M, а дифференциалы d^ku вычисляются по формуле

$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u.$$

Формула (9.29) называется *формулой Тейлора* для функции $u = f(M)$ с центром разложения в точке M_0.

Доказательство.

Зафиксируем точку $M(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)$ из указанной ε-окрестности

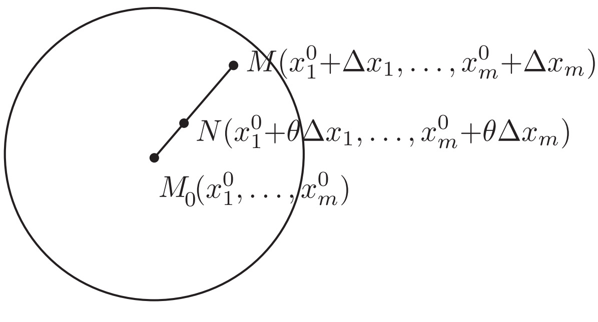


Рис. 9.21.

точки M_0 (рис. 9.21). Уравнения отрезка M_0M можно записать в виде

$$x_1 = x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m = x_m^0 + t\Delta x_m, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{9.30}$$

Точка M_0 соответствует $t = 0$, точка M соответствует $t = 1$.

На отрезке M_0M имеем:

$$u = f\left(x_1^0 + t\Delta x_1, \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m\right) =: F(t) \text{ —}$$

сложная функция одной переменной t, причем $F(t)$ $(n+1)$ раз дифференцируема на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Заметим, что

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0). \tag{9.31}$$

Применим к разности $F(1) - F(0)$ формулу (9.28). Для этого в формуле (9.28) нужно положить $t_0 = 0$, $t = 1$, $dt = \Delta t = 1 - 0 = 1$. Получим

$$F(1) - F(0) = dF\big|_{t=0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^nF\Big|_{t=0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F\Big|_{t=\theta}. \tag{9.32}$$

Так как $x_1, \ldots, x_m$ — линейные функции переменной t (см.(9.30)), то дифференциалы d^kF можно вычислить по формуле (9.25) (см. замечание на стр. 50), то есть

$$d^kF\big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^k u\Big|_{M_0}, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $dx_1, \ldots, dx_m$ — дифференциалы функций (9.30): $dx_1 = dt \cdot \Delta x_1 = \Delta x_1, \ldots, dx_m = dt \cdot \Delta x_m = \Delta x_m$. Итак,

$$d^kF\big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u\Big|_{M_0} = d^ku\big|_{M_0}, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.33}$$

и, аналогично,

$$d^{n+1}F\big|_{t=\theta} = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^{n+1} u\Big|_{N(x_1^0+\theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0+\theta\Delta x_m)} = \\ = d^{n+1}u\big|_N. \tag{9.34}$$

Так как $0 < \theta < 1$, то точка N лежит на отрезке M_0M.

Подставляя выражения (9.33) и (9.34) в правую часть равенства (9.32) и учитывая (9.31), приходим к формуле (9.29). Теорема доказана.

Следствия.

1. При $n = 0$ из (9.29) получаем формулу Лагранжа конечных приращений для функции многих переменных:
$$\Delta u = f\left(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right) =$$
$$= du\big|_N = \frac{\partial f}{\partial x_1}(N)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(N)\Delta x_m.$$

2. Формулу Тейлора можно записать не через дифференциалы функции, а через ее производные. Для этого нужно раскрыть выражения для дифференциалов $d^k u$:
$$d^k u\big|_{M_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u\bigg|_{M_0} =$$
$$= \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m}\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(M_0)\Delta x_{i_1}\ldots\Delta x_{i_k},$$
в частности, $d^2 u\big|_{M_0} = \sum\limits_{i,j=1}^{m}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j$.
Кроме того, положим $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда из (9.29) получим равенство
$$f(x_1, \ldots, x_m) = f\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\left(x_1 - x_1^0\right) + \ldots +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)\left(x_m - x_m^0\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0)\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x_m^n}(M_0)\left(x_m - x_m^0\right)^n + R_{n+1} =: P_n(x_1, \ldots, x_m) + R_{n+1},$$
где $P_n\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ — многочлен, зависящий от $x_1, \ldots, x_m$ (степень которого не превосходит n), обладающий тем свойством, что все его частные производные до n-го порядка включительно в точке M_0 равны соответствующим частным производным функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M_0 (он называется *многочленом Тейлора* функции $f(M)$), а $R_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1}u\big|_N$ — остаточный член.

<u>Замечание</u>. Положим $\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$. Нетрудно доказать, что при условии теоремы 19 справедливо равенство $R_{n+1} = o(\rho^n)$. Это выражение называется *формой Пеано* остаточного члена. Как и в случае функции одной переменной

остаточный член в форме Пеано можно получить при более слабых требованиях, чем в теореме 19. В частности, для $n = 2$ справедлива

Теорема 19ᵃ. Если функция $u = f(M)$ дважды дифференцируема в точке M_0, то приращение функции $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ можно представить в виде

$$\Delta u = du\big|_{M_0} + \frac{1}{2}\, d^2u\big|_{M_0} + o\left(\rho^2\right), \tag{9.35}$$

где $\rho = \rho(M_0, M)$.

Доказательство. Введем функцию

$$g(M) = f(M) - f(M_0) - du\big|_{M_0} - \frac{1}{2}\, d^2u\big|_{M_0}.$$

Нам нужно доказать, что $g(M) = o\left(\rho^2\right)$ при $\rho \to 0$. Запишем более подробное выражение для $g(M)$:

$$g(M) = g(x_1, \ldots, x_m) = f(M) - f(M_0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\left(x_i - x_i^0\right) - \\ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right).$$

Нетрудно проверить, что

$$g(M_0) = 0,\ \frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0) = 0,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) = 0,\ i, j = 1, \ldots, m. \tag{9.36}$$

Функция $g(M)$ отличается от дважды дифференцируемой в точке M_0 функции $f(M)$ на многочлен второй степени, поэтому функция $g(M)$ также дважды дифференцируема в точке M_0, то есть $g(M)$ дифференцируема в некоторой ε-окрестности точки M_0 и ее частные производные $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ дифференцируемы в точке M_0. По определению дифференцируемости приращение функции $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ в точке M_0 можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(M) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0) = d\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\Big|_{M_0} + o(\rho) = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(M_0)\left(x_j - x_j^0\right) + o(\rho). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенства (9.36), получаем: $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(M) = o(\rho)$, где $\rho = \rho(M_0, M)$.

Запишем теперь разность $g(M) - g(M_0)$ по формуле Лагранжа:

$$g(M) - g(M_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(N)\left(x_i - x_i^0\right), \tag{9.37}$$

где N — некоторая точка на отрезке M_0M. Так как $\rho(M_0, N) \leqslant \rho(M_0, M) = \rho$, то

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(N) = o\left(\rho(M_0, N)\right) = o(\rho),$$

а поскольку $g(M_0) = 0$ и $\left|x_i - x_i^0\right| \leqslant \rho$, то из равенства (9.37) следует:

$$g(M) = \sum_{i=1}^{m} o(\rho)\left(x_i - x_i^0\right) = o\left(\rho^2\right).$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть $u(x,y) = x^y$, $M_0(1,0)$. Тогда $u(M_0) = 1$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0, \quad \text{поэтому } du|_{M_0} = 0,$$

а $d^2u\big|_{M_0} = 2dxdy$ (см. пример в §7), причем для точки $M(x,y)$ имеем равенства $dx = \Delta x = x - 1$, $dy = \Delta y = y - 0 = y$, $\rho(M_0, M) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Применяя формулу (9.35), получаем:

$$\Delta u = x^y - 1 = \frac{1}{2} \cdot 2(x-1)y + o\left(\rho^2\right),$$

откуда $x^y = 1 - y + xy + o\left((x-1)^2 + y^2\right)$.

В достаточно малой окрестности точки $M_0(1,0)$ для приближенного вычисления x^y можно использовать формулу $x^y \approx 1 - y + xy$.

§ 9. Локальный экстремум

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^m$.

Определение. Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 *локальный максимум (минимум)*, если существует такая ε-

окрестность точки M_0, в которой $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$ при $M \neq M_0$.

Теорема 20 (необходимое условие экстремума). Если в точке $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$ функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ имеет локальный экстремум и если в точке M_0 существует частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем все аргументы функции, кроме x_k, положив $x_i = x_i^0$ $(i \neq k)$, и рассмотрим функцию одной переменной $f\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0\right) =: \varphi(x_k)$. Эта функция имеет локальный экстремум в точке $x_k = x_k^0$ и имеет производную в точке x_k^0: $\varphi'(x_k^0) = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$. По теореме о необходимом условии экстремума для функции одной переменной $\varphi'(x_k^0) = 0$, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум и дифференцируема в точке M_0, то

$$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m = 0.$$

Замечание. Условие $du|_{M_0} = 0$ является только необходимым, но не достаточным условием локального экстремума в точке M_0 дифференцируемой функции. Приведем соответствующий пример.

Пусть $u = xy$, тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, поэтому $du|_{(0,0)} = 0$. Однако в точке $O(0,0)$ экстремума у данной функции нет, так как в любой окрестности точки $O(0,0)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, то есть как значения, большие, чем $u(0,0) = 0$, так и значения, меньшие $u(0,0)$.

Точку M_0, в которой $du = 0$, будем называть *точкой возможного экстремума* дифференцируемой функции $u(M)$. Чтобы установить, имеет ли функция в такой точке M_0 экстремум или нет, нужны достаточные условия экстремума. Чтобы сформулировать такие условия, нам понадобятся некоторые сведения о квадратичных формах.

Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j =$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1m}x_1x_m + a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{mm}x_m^2,$$

где a_{ij} — числа, $a_{ij} = a_{ji}$, называется *квадратичной формой* от переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Квадратичная форма называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если $Q(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) $\forall\,(x_1, \ldots, x_m)$, причем $Q = 0$ лишь в начале координат, то есть при $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Пример. $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ — положительно определенная квадратичная форма.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Квадратичная форма называется *квазизнакоопределенной*, если она принимает значения либо только неотрицательные, либо только неположительные, но при этом обращается в нуль не только в начале координат.

Пример. $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2$ — квазиположительно определенная квадратичная форма, поскольку она принимает, очевидно, только неотрицательные значения, но обращается в нуль не только в начале координат, например, $Q(2, 1) = 0$.

Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пример. $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2$ — знакопеременная квадратичная форма: $Q(1, 0) = 2 > 0$, $Q(0, 1) = -1 < 0$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы* $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$. Отметим, что A — симметричная матрица, так как $a_{ij} = a_{ji}$.

Миноры

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

называются *угловыми минорами* матрицы A.

Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

Для того, чтобы квадратичная форма $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были положительны:

$$\delta_1 > 0,\, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_m > 0.$$

Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались следующим образом:

$$\delta_1 > 0,\, \delta_2 < 0,\, \delta_3 < 0,\, \delta_4 > 0, \ldots.$$

Достаточные условия экстремума

Для функции одной переменной $y = f(x)$ достаточным условием минимума (максимума) в точке x_0 является условие $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0\ (< 0)$.

Это же условие можно записать через дифференциалы функции в точке x_0:

$$dy\big|_{x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x = 0,\ d^2y\big|_{x_0} = f''(x_0)\cdot(\Delta x)^2 > 0\ (< 0)\ \forall\ \Delta x \neq 0.$$

Аналогичное достаточное условие имеет место и для функции многих переменных.

Напомним, что для функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ первый и второй дифференциалы в точке M_0 имеют вид:

$$du\big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)\cdot\Delta x_i,$$

$$d^2u\big|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta x_j \quad \text{(формула (9.26) из §7).}$$

Отметим, что $d^2u\big|_{M_0}$ — квадратичная форма от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$.

Теорема 21. Пусть выполнены условия: 1) функция $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$; 2) $du|_{M_0} = 0$; 3) $d^2u\big|_{M_0}$ — положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$.

Тогда функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум (максимум).

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $d^2u\big|_{M_0}$ — положительно определенная квадратичная форма.

Согласно определению локального минимума требуется доказать, что существует δ-окрестность точки M_0, в которой для любой точки M (отличной от M_0) выполнено неравенство

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) > 0.$$

Пусть $M\left(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m\right)$ — произвольная точка из окрестности точки M_0. Согласно теореме 19[a] Δu можно представить в виде

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = du|_{M_0} + \frac{1}{2}\, d^2u\big|_{M_0} + o\left(\rho^2\right),$$

где $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$. Так как $du|_{M_0} = 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j + o\left(\rho^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\rho^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_j}{\rho} + \frac{o\left(\rho^2\right)}{\rho^2} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) = a_{ij}$, $\dfrac{\Delta x_i}{\rho} = h_i$,

$$Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j, \;\; \alpha(\rho) = \frac{o\left(\rho^2\right)}{\rho^2}.$$

Тогда

$$\Delta u = \frac{1}{2}\rho^2 \left(Q + \alpha(\rho)\right),$$

величины $h_1, \ldots, h_m$ удовлетворяют равенству

$$h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2 = 1, \tag{9.38}$$

а $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Уравнение (9.38) является уравнением сферы радиуса 1 в пространстве $\mathbb{R}^m$ точек с координатами $(h_1, \ldots, h_m)$. Квадратичная форма Q в силу условия 3 теоремы является положительно определенной, то есть $Q > 0\ \forall\, h_1, \ldots, h_m$, одновременно не равных нулю. В частности,

$$Q(h_1, \ldots, h_m) > 0 \quad \text{во всех точках сферы (9.38).}$$

Кроме того, $Q(h_1, \ldots, h_m)$ — непрерывная функция переменных $h_1, \ldots, h_m$, а сфера (9.38) — ограниченное замкнутое множество. По второй теореме Вейерштрасса функция Q достигает на сфере (9.38) своей точной нижней грани, то есть имеет на сфере (9.38) минимальное значение. Обозначим его буквой m. Тогда $Q(h_1, \ldots$ $\ldots, h_m) \geqslant m > 0$ на сфере (9.38).

Так как $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, то $\exists\, \delta > 0$, такое, что $|\alpha(\rho)| < m$ при $0 < \rho < \delta$. Поэтому в δ-окрестности точки M_0 имеем:

$$\Delta u = \frac{1}{2}\rho^2 \left[Q + \alpha(\rho)\right] > 0$$

при $\rho \neq 0$, то есть при $M \neq M_0$, что и требовалось доказать.

Теорема 22. Пусть выполнены условия 1 и 2 теоремы 21, а вместо условия 3 выполнено условие 3$'$: $d^2u\big|_{M_0}$ — знакопеременная квадратичная форма. Тогда в точке M_0 экстремума функций нет.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 21 введем обозначение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) = a_{ij}$. В силу условия 3$'$ существуют $\Delta x_1', \ldots, \Delta x_m'$, такие, что число

$$Q' = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\Delta x_i' \Delta x_j' = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\Delta x_i' \Delta x_j' > 0,$$

и также существуют $\Delta x_1'', \ldots, \Delta x_m''$, такие, что число

$$Q'' = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\Delta x_i'' \Delta x_j'' < 0.$$

Обозначим через M_1 точку с координатами $(x_1^0 + \Delta x_1', \ldots \ldots, x_m^0 + \Delta x_m')$, а через M_2 — точку с координатами $\left(x_1^0 + \Delta x_1'', \ldots, x_m^0 + \Delta x_m''\right)$ (рис. 9.22).

Положим $\rho' = \rho(M_1, M_0) = \sqrt{(\Delta x_1')^2 + \ldots + (\Delta x_m')^2}$.

Отметим, что ρ' — вполне определенное положительное число. Произвольная точка M_t на отрезке M_0M_1 имеет координаты $M_t(x_1^0 + t\Delta x_1', \ldots, x_m^0 + t\Delta x_m')$, причем $0 \leqslant t \leqslant 1$, точка M_0 соответствует $t = 0$, точка M_1 соответствует $t = 1$, $\rho^2(M_t, M_0) = t^2 \rho'^2$. Согласно теореме 19[а] имеем:

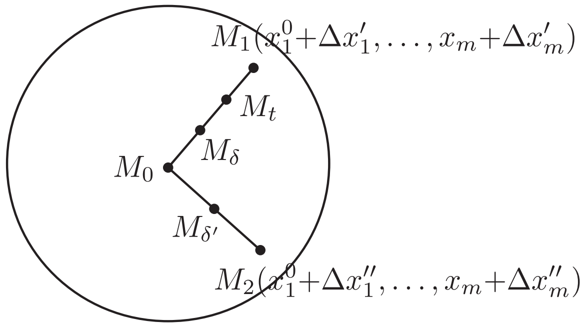


Рис. 9.22.

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f(M_t) - f(M_0) = du\big|_{M_0} + \frac{1}{2}\, d^2u\big|_{M_0} + o\left(t^2\rho'^2\right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t\Delta x_i')(t\Delta x_j') + o\left(t^2\right) = \\
&= \frac{1}{2} t^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \Delta x_i' \Delta x_j' + \frac{o\left(t^2\right)}{t^2} \right) = \frac{1}{2} t^2 \left(Q' + \frac{o(t^2)}{t^2} \right).
\end{aligned}$$

Так как $\dfrac{o\left(t^2\right)}{t^2} \to 0$ при $t \to 0$, то $\exists\, \delta > 0$, такое, что

$$\left| \frac{o(t^2)}{t^2} \right| < Q' \ \text{ при } 0 < t < \delta.$$

Отсюда следует, что на отрезке M_0M_δ выполнено неравенство $\Delta u = f(M) - f(M_0) > 0$ при $M \neq M_0$.

Аналогично доказывается, что на отрезке M_0M_2 существует точка M_δ', такая, что на отрезке M_0M_δ' выполнено неравенство: $\Delta u < 0$ при $M \neq M_0$.

Таким образом, в любой окрестности точки M_0 имеются точки M, для которых $\Delta u = f(M) - f(M_0) > 0$, и также имеются точки, для которых $\Delta u < 0$. Следовательно, в точке M_0 экстремума функции нет. Теорема доказана.

Примеры.

1. $u = x^y$ $(x > 0)$. Для нахождения точек возможного экстремума данной функции рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_x = y\,x^{y-1} = 0, \\ u^y = x^y \ln x = 0, \end{cases}$$

из которой находим: $x = 1$, $y = 0$. Следовательно, $M_0(1,0)$ — точка возможного экстремума данной функции. Так как $d^2u\big|_{M_0} = 2\Delta x \Delta y$ — знакопеременная квадратичная форма (это выражение для $d^2u\big|_{M_0}$ получено в §7), то в точке $M_0(1,0)$ экстремума функции нет.

2. $u = x^2 + 2xy + 2y^2 + xz + z^3 - 4z$.

Для нахождения точек возможного экстремума этой функции составим систему уравнений

$$\begin{cases} u_x = 2x + 2y + z = 0, \\ u_y = 2x + 4y = 0, \\ u_z = x + 3z^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Она имеет два решения:

$$x_1 = 1,\ y_1 = -\frac{1}{2},\ z_1 = -1 \text{ и } x_2 = -\frac{4}{3},\ y_2 = \frac{2}{3},\ z_2 = \frac{4}{3},$$

и, следовательно, получаем две точки возможного экстремума функции: $M_1\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$ и $M_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Чтобы установить, имеет ли функция экстремумы в точках M_1 и M_2, исследуем второй дифференциал d^2u в этих точках. С этой целью вычислим частные производные второго порядка:

$$\begin{array}{lll} u_{xx} = 2, & u_{xy} = 2, & u_{xz} = 1; \\ u_{yx} = 2, & u_{yy} = 4, & u_{yz} = 0; \\ u_{zx} = 1, & u_{zy} = 0, & u_{zz} = 6z; \end{array}$$

и составим матрицу квадратичной формы d^2u:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

Вычислим ее угловые миноры:

$$\delta_1 = 2 > 0,\ \delta_2 = 4 > 0,\ \delta_3 = 24z - 4.$$

В точке M_1 имеем: $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 = -28 < 0$, поэтому, согласно критерию Сильвестра, $d^2u\big|_{M_1}$ не является знакоопределенной квадратичной формой. Нетрудно усмотреть, что эта квадратичная форма — знакопеременная. В самом деле,

$$d^2u\Big|_{\substack{M_1 \\ \Delta x \neq 0 \\ \Delta y = \Delta z = 0}} = 2\,(\Delta x)^2 > 0, \quad d^2u\Big|_{\substack{M_1 \\ \Delta x = \Delta y = 0 \\ \Delta z \neq 0}} = -6\,(\Delta z)^2 < 0.$$

По теореме 22 в точке M_1 экстремума функции нет.

В точке M_2 имеем: $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 = 28 > 0$, поэтому $d^2u\big|_{M_2}$ — положительно определенная квадратичная форма и, следовательно, в точке M_2 функция имеет локальный минимум.

Замечание. Если $du\big|_{M_0} = 0$, а $d^2u\big|_{M_0}$ — квазизнакоопределенная квадратичная форма, то в точке M_0 экстремум может быть, а может и не быть (нужно дополнительное исследование).

Случай функции двух переменных

Если $u = u(x, y)$, то

$$d^2u\big|_{M_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)(\Delta y)^2$$

или (обозначим производные второго порядка через a_{11}, a_{12}, a_{22})

$$d^2u\big|_{M_0} = a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\Delta x \Delta y + a_{22}(\Delta y)^2.$$

Пусть выполнены условия 1 и 2 теоремы 21.

Тогда: I. Если $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то в точке M_0 функция $u(x, y)$ имеет локальный экстремум: минимум, если $a_{11} > 0$; максимум, если $a_{11} < 0$.

II. Если $D < 0$, то в точке M_0 экстремума функции нет.

III. Если $D = 0$, то в точке M_0 экстремум может быть, а может и не быть.

Задание. Доказать сформулированные утверждения I и II.

Для случая III рассмотреть примеры: $u = x^4 + y^4$, точка $M_0(0, 0)$; $u = x^3y^3$, точка $M_0(0, 0)$.

Глава 10

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. О неявных функциях, определяемых одним уравнением

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ может быть задана путем непосредственного (явного) указания правила f, по которому каждому числу x из области определения функции (то есть из множества X) ставится в соответствие определенное число y. В таком случае говорят, что функция задана явно. Например, $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$ — явно заданная функция.

Существует и другой способ задания функции $y = f(x)$, в котором правило f задается не непосредственно, а «спрятано» в уравнении, связывающем переменные x и y. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{10.1}$$

рассматриваемое в полуполосе $\{(x, y)\colon -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0\}$ как уравнение относительно y, имеет решение $y = \sqrt{1 - x^2}$, и тем самым определяет функцию

$$y = f(x) := \sqrt{1 - x^2}\,,\ x \in [-1; 1], \tag{10.2}$$

но при этом правило f изначально задано не в явном виде, а «спрятано» в уравнении (10.1).

Рассмотрим более общее уравнение с двумя переменными x и y:

$$F(x, y) = 0. \tag{10.3}$$

Если для любого числа x из множества X уравнение (10.3) имеет относительно y решение $y = f(x)$, то говорят, что уравнение (10.3) задает неявно функцию $y = f(x)$, $x \in X$, а сама эта функция называется *неявной функцией*, определяемой уравнением (10.3).

Итак, неявная функция $y = f(x)$ — это решение уравнения (10.3) относительно y, то есть

$$\forall x \in X\colon F(x, f(x)) = 0.$$

Возвращаясь к уравнению (10.1), можно теперь сказать, что это уравнение определяет неявную функцию (10.2).

Мы рассмотрим вопрос о том, при каких условиях на функцию $F(x, y)$ уравнение (10.3) определяет неявную функцию $y = f(x)$, а также вопрос о непрерывности и дифференцируемости неявной функции.

При этом нужно различать существование неявной функции, то есть существование решения уравнения (10.3) относительно y, и возможность найти эту неявную функцию в явном виде. Так, например, неявная функция $y = f(x)$, определяемая уравнением (10.1) легко находится в явном виде (10.2), а неявная функция $y = f(x)$, определяемая уравнением

$$2y + \sin y - x = 0,$$

как мы увидим ниже, существует, однако найти ее в явном виде не представляется возможным.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $Q = \{(x, y)\colon a < x < b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$;
2. $\forall x \in (a, b)\colon F(x, c) \cdot F(x, d) < 0$ (это условие означает, что функция $F(x, y)$ имеет разные знаки на нижней и верхней сторонах прямоугольника Q);
3. для любого x из интервала (a, b) функция $F(x, y)$ является строго монотонной функцией переменной y на сегменте $[c, d]$.

Тогда:

1) в прямоугольнике Q уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет единственную неявную функцию вида

$$y = f(x),\ x \in (a, b),$$

то есть $\forall x \in (a, b)$ уравнение (10.3) имеет единственное решение относительно y, принадлежащее сегменту $[c, d]$;

2) неявная функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a, b).

Доказательство. 1) Зафиксируем любое число x из интервала (a, b) и рассмотрим при этом значении x функцию $F(x, y)$ аргумента y на сегменте $[c, d]$. Эта функция непрерывна на сегменте $[c, d]$ (условие 1) и имеет на концах сегмента значения разных знаков (условие 2). Следовательно, существует $y \in (c, d)$, такое, что $F(x,y)=0$. В силу строгой монотонности $F(x,y)$ по переменной y (условие 3) такое значение y единственно (для фиксированного x). Итак, $\forall x \in (a,b)$ уравнение (10.3) имеет единственное решение относительно y. Обозначим это решение так: $y=f(x)$.

Таким образом, существование и единственность неявной функции вида $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, определяемой уравнением (10.3), доказано.

2) Докажем непрерывность неявной функции $y=f(x)$ на интервале (a,b), то есть непрерывность в каждой точке $x_0 \in \in (a,b)$. По определению непрерывности нужно доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое, что

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\delta. \tag{10.4}$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ (такое, что $f(x_0)-\varepsilon\geqslant c$ и $f(x_0)+\varepsilon\leqslant d$) и будем считать (для определенности), что функция $F(x,y)$ при фиксированном x является возрастающей функцией переменной y (см. условие 3). Тогда $F(x_0,y) < < F(x_0,f(x_0))=0$ при $y<f(x_0)$ и $F(x_0,y)>0$ при $y>f(x_0)$, в частности,

$$F(x_0,f(x_0)-\varepsilon)<0 \quad \text{и} \quad F(x_0,f(x_0)+\varepsilon)>0. \tag{10.5}$$

Рассмотрим функцию $F(x,y)$ на прямых $y=f(x_0)-\varepsilon$ и $y= = f(x_0)+\varepsilon$. Из неравенств (10.5) в силу устойчивости знака непрерывной функции следует, что в некоторой δ-окрестности точки x_0 будут выполнены неравенства

$$F(x,f(x_0)-\varepsilon)<0 \quad \text{и} \quad F(x,f(x_0)+\varepsilon)>0$$

(на рис. 10.1 эти неравенства отмечены знаками + и −).

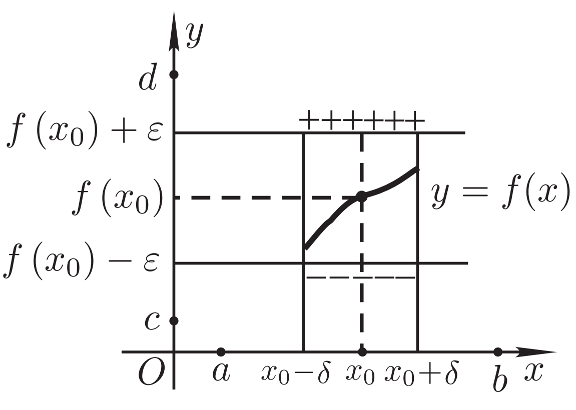


Рис. 10.1.

В свою очередь, из этих неравенств следует, что для любого x из δ-окрестности точки x_0 корень уравнения (10.3), то есть число $y=f(x)$, лежит между $f(x_0)-\varepsilon$ и $f(x_0)+\varepsilon$. Иными словами, в пределах δ-окрестности точки x_0 график неявной функции

$y = f(x)$ лежит в полосе между прямыми $y = f(x_0) - \varepsilon$ и $y = f(x_0) + \varepsilon$ (см. рис. 10.1). Итак, справедливы неравенства

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta,$$

то есть выполнено условие (10.4), что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) := 2y + \sin y - x = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{10.6}$$

Докажем, что оно определяет единственную неявную функцию вида

$$y = f(x), \ x \in (-\infty, +\infty).$$

Зафиксируем произвольное значение x и рассмотрим функцию $F(x, y)$ при этом значении x. Положим $y = y_1 = \dfrac{x}{2} - 1$, тогда $F(x, y_1) = -2 + \sin y_1 < 0$. Положим теперь $y = y_2 = \dfrac{x}{2} + 1$, тогда $F(x, y_2) = 2 + \sin y_2 > 0$. Следовательно, существует $y \in (y_1, y_2)$, такое, что $F(x, y) = 0$. Обозначим это значение y через $f(x)$. Итак, $\forall x$ уравнение (10.6) имеет решение $y = f(x)$.

Так как $F'_y(x, y) = 2 + \cos y > 0$, то при каждом x функция $F(x, y)$ является возрастающей функцией переменной y и, следовательно, уравнение (10.6) определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Как уже отмечалось, эту неявную функцию мы не можем найти в явном виде. Однако, мы можем «увидеть» эту функцию, построив график функции $x = 2y + \sin y$ (см. рис. 10.2).

Существенным условием в теореме 1 было условие строгой монотонности функции $F(x, y)$ по переменной y. Достаточным условием, обеспечивающим строгую монотонность функции $F(x, y)$ по переменной y, является знакопостоянство частной производной $F'_y(x, y)$. Это условие использовалось в рассмотренном примере и будет использовано в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1. функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (обозначим эту окрестность буквой ω);
2. в окрестности ω существует частная производная $F'_y(x, y)$, непрерывная в точке M_0;
3. $F(x_0, y_0) = 0, \ F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

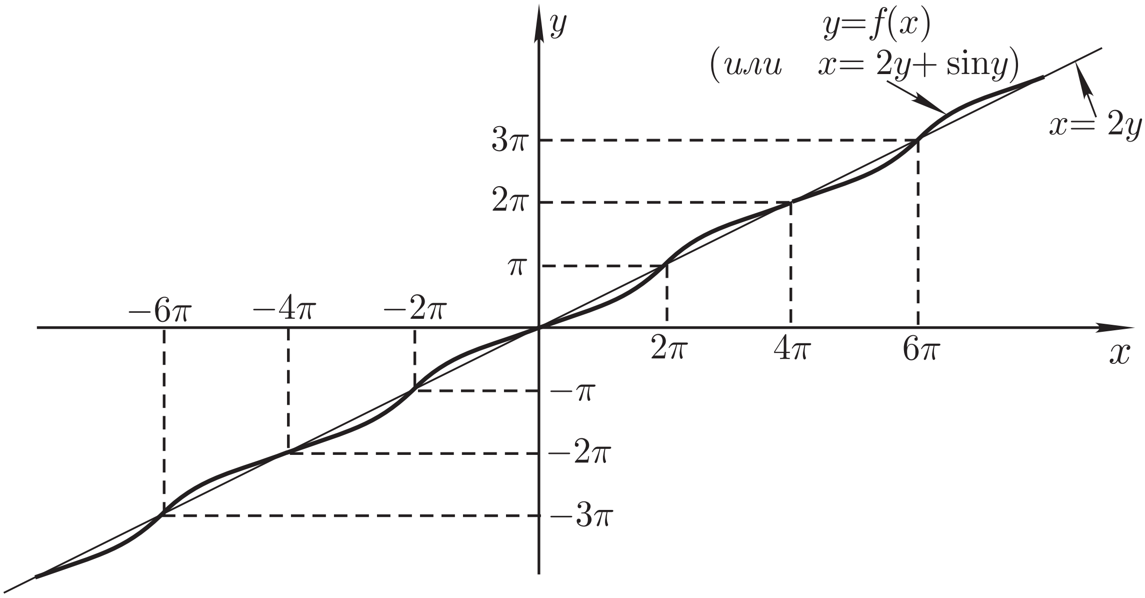


Рис. 10.2.

Тогда существует прямоугольник

$$Q = \{(x,y)\colon |x - x_0| < d,\ |y - y_0| \leqslant c\,; d > 0,\ c > 0\},$$

целиком содержащийся в окрестности ω точки M_0, в котором уравнение $F(x,y) = 0$ определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x)$, и эта функция непрерывна при $|x - x_0| < d$.

Доказательство. Пусть (для определенности) $F'_y(x_0,y_0) > 0$ (см. условие 3). В силу непрерывности $F'_y(x,y)$ в точке M_0 (условие 2) и устойчивости знака непрерывной функции найдется прямоугольник

$$\widetilde{Q} = \left\{(x,y)\colon |x - x_0| < \widetilde{d},\ |y - y_0| \leqslant c\,; \widetilde{d} > 0,\ c > 0\right\},$$

целиком содержащийся в окрестности ω точки M_0, в котором $F'_y(x,y) > 0$ и, следовательно, функция $F(x,y)$ является возрастающей функцией переменной y на сегменте $[y_0 - c, y_0 + c]$ для любого $x \in (x_0 - \widetilde{d}, x_0 + \widetilde{d})$.

Рассмотрим функцию $F(x_0,y)$ на сегменте $y_0 - c \leqslant y \leqslant y_0 + c$. Так как она возрастает на этом сегменте и так как $F(x_0,y_0) = 0$ (условие 3), то

$$F(x_0, y_0 - c) < 0 \quad \text{и} \quad F(x_0, y_0 + c) > 0. \tag{10.7}$$

Рассмотрим теперь функцию $F(x,y)$ на нижней и верхней сторонах прямоугольника $\widetilde{Q}$, то есть рассмотрим функции

$F(x, y_0 - c)$ и $F(x, y_0 + c)$ при $|x - x_0| < \widetilde{d}$. В силу непрерывности этих функций (условие 1) и неравенств (10.7) найдется интервал $x_0 - d < x < x_0 + d$ $(d \leqslant \widetilde{d})$, такой, что на этом интервале $F(x, y_0 - c) < 0$, $F(x, y_0 + c) > 0$, и, следовательно,

$$F(x, y_0 - c) \cdot F(x_0, y_0 + c) < 0 \quad \text{при} \quad |x - x_0| < d.$$

Таким образом, мы построили прямоугольник $Q = \{(x, y)\colon |x - x_0| < d,\ |y - y_0| \leqslant c\}$, в котором выполнены все условия теоремы 1.

По теореме 1 в прямоугольнике Q уравнение (10.3) определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x)$, и эта функция непрерывна при $|x - x_0| < d$. Теорема 2 доказана.

<u>Замечание 1.</u> Отметим, что теорема 2 (в отличие от теоремы 1) носит локальный характер — в ней идет речь о существовании и непрерывности неявной функции $y = f(x)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (10.3). Отметим также, что значение неявной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно y_0: $f(x_0) = y_0$.

<u>Замечание 2.</u> Если выполнены все условия теоремы 2, кроме условия $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то есть если $F'_y(x_0, y_0) = 0$, то заключение теоремы 2 становится, вообще говоря, неверным. Рассмотрим, например, уравнение

$$F(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{10.8}$$

в окрестности точки $M_0(1; 0)$. Заметим, что $F(1; 0) = 0$ и $F'_y(1; 0) = 0$, то есть условие $F'_y(1; 0) \neq 0$ нарушено. При этом в окрестности точки M_0 заключение теоремы не выполнено: при $x > 1$ уравнение (10.8) не имеет решений относительно y, то есть не определяет неявной функции вида $y = f(x)$, а при $x < 1$ имеет два непрерывных решения: $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$, то есть не выполнено утверждение о единственности неявной функции.

Вместе с тем, условие $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ не является необходимым условием того, чтобы заключение теоремы 2 имело место. Например, уравнение $x^3 - y^3 = 0$ в окрестности точки $M_0(0; 0)$ определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x)$, а именно, функцию $y = x$, но при этом $F'_y(0; 0) = 0$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцируемости неявной функции $y = f(x)$, определенной уравнением (10.3).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда неявная функция $y = f(x)$, определяемая уравнением (10.3), дифференцируема в точке x_0, и ее производная в этой точке выражается формулой

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Доказательство. Так как функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta F := F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \quad (10.9)$$

где α_1 и α_2 — функции аргументов Δx и Δy, бесконечно малые при $\{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0\}$.

Возьмем $\Delta x \neq 0$ столь малым, что $|\Delta x| < d$, то есть $x_0 - d < x_0 + \Delta x < x_0 + d$, где $(x_0 - d, x_0 + d)$ — интервал, на котором определена неявная функция $y = f(x)$ из теоремы 2, а Δy положим равным приращению неявной функции в точке x_0, то есть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0$. Для выбранных Δx и Δy имеем:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) - F(x_0, y_0) = 0$$

(поскольку $F(x, f(x)) = 0\ \forall x \in (x_0 - d, x_0 + d)$), и следовательно, из (10.9) получаем:

$$F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] + \\ + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

откуда следует равенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1}{F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$. Так как неявная функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 (теорема 2), то $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а поскольку $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (условие 3 теоремы 2), то предел правой части равенства существует и равен $-\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$. Значит, существует предел и левой части равенства, а этот предел и есть $f'(x_0)$ (по определению производной). Таким образом, в пределе при $\Delta x \to 0$ приходим к равенству $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$. Теорема 3 доказана.

Следствие. Если функция $F(x, y)$ дифференцируема в прямоугольнике Q (см. теорему 2), то неявная функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(x_0 - d, x_0 + d)$ и ее производная выражается формулой

$$f'(x) = -\left.\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right|_{y=f(x)}. \tag{10.10}$$

Замечание. Если функция $F(x, y)$ дифференцируема в прямоугольнике Q k раз, то и неявная функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(x_0 - d, x_0 + d)$ k раз; для нахождения $f''(x)$ нужно взять производную от $f'(x)$ и так далее.

Пример. Рассмотрим снова уравнение (10.6)

$$F(x, y) := 2y + \sin y - x = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Оно определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, причем эта функция дифференцируема в каждой точке в силу теоремы 3. По формуле (10.10) находим:

$$f'(x) = -\left.\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right|_{y=f(x)} = \frac{1}{2 + \cos f(x)}.$$

Дифференцируя $f'(x)$, находим $f''(x)$:

$$f''(x) = [f'(x)]' = -\frac{1}{[2 + \cos f(x)]^2}(-\sin f(x))f'(x) = \frac{\sin f(x)}{[2 + \cos f(x)]^3},$$

и далее можно найти производные более высокого порядка функции $f(x)$.

Заметим, что для вычисления $f'(x)$ и $f''(x)$ в какой-то точке x с помощью полученных формул сначала нужно найти из уравнения (10.6) соответствующее значение $f(x)$. Для произвольно заданного x это можно сделать только приближенно, но для x, кратного 2π, нетрудно найти точное значение $f(x)$ (см. рис. 10.2): $f(2k\pi) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Например, для $x = 2\pi$ получаем: $f(2\pi) = \pi$, $f'(2\pi) = 1$, $f''(2\pi) = 0$.

Рассмотрим теперь уравнение, которое является обобщением уравнения (10.3):

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0. \tag{10.11}$$

Решение этого уравнения относительно y является функцией n переменных: $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ и называется неявной функцией, определяемой уравнением (10.11).

Теорема 4. Пусть выполнены условия:

1. функция $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности ω точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\right)$;
2. частная производная $F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывна в точке M_0;
3. $F\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\right) = 0,\ F'_y\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\right) \neq 0.$

Тогда существует параллелепипед

$$Q = \left\{(x_1, \ldots, x_n, y)\colon\ \left|x_i - x_i^0\right| < d_i,\ i = 1, \ldots, n,\right.$$
$$\left.\left|y - y^0\right| \leqslant c;\ d_i > 0,\, c > 0\right\},$$

целиком содержащийся в окрестности ω точки M_0, в котором уравнение (10.11) определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, эта неявная функция дифференцируема в параллелепипеде $\left\{(x_1, \ldots, x_n, y)\colon\ \left|x_i - x_i^0\right| < d_i,\, i = 1, \ldots, n\right\}$ и ее частные производные выражаются формулой

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\left.\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)}\right|_{y = f(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{10.12}$$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теорем 2 и 3.

§ 2. О неявных функциях, определяемых системой уравнений

Рассмотрим систему m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{10.13}$$

Решение этой системы относительно $y_1, \ldots,\ y_m$

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \tag{10.14}$$

называется *системой неявных функций, определяемой системой уравнений* (10.13).

Мы рассмотрим вопросы о существовании, единственности и дифференцируемости неявных функций вида (10.14), определяемых системой уравнений (10.13). При рассмотрении этих вопросов важную роль играет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Он называется определителем Якоби или *якобианом* функций $F_1, F_2, \ldots, F_m$ по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Для него будем использовать также более краткое обозначение

$$\Delta = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}.$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

1. функции

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \ldots,\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

определены и дифференцируемы в некоторой окрестности ω точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0\right)$;

2. частные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, входящие в якобиан Δ, непрерывны в точке M_0;
3. $F_1(M_0) = 0, ..., F_m(M_0) = 0$, $\Delta(M_0) = \left.\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{M_0} \neq 0.$

Тогда существует параллелепипед

$$Q = \Big\{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\colon\ \left|x_i - x_i^0\right| < d_i,\ i = 1, \ldots, n;$$
$$\left|y_j - y_j^0\right| \leqslant c_j,\ j = 1, \ldots, m;\ d_i > 0,\ c_j > 0\Big\},$$

целиком содержащийся в окрестности ω точки M_0, в котором система уравнений (10.13) определяет единственную систему неявных функций вида (10.14), и эти неявные функции дифференцируемы в параллелепипеде

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \colon \left|x_i - x_i^0\right| < d_i,\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Доказательство. При $m = 1$ (то есть когда система (10.13) состоит из одного уравнения) справедливость утверждения теоремы 5 следует из теоремы 4. При $m > 1$ теорему 5 можно доказать по индукции (см. [1]).

Мы проведем доказательство теоремы 5 для $m = 2$. В этом случае система (10.13) состоит из двух уравнений, которые запишем в виде

$$F_1(x, y_1, y_2) = 0,\ F_2(x, y_1, y_2) = 0, \tag{10.15}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точка M_0 имеет координаты x^0, y_1^0, y_2^0, где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, и, согласно условию 3,

$$F_1(M_0) = 0,\ F_2(M_0) = 0,\ \Delta(M_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(M_0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(M_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{10.16}$$

Из последнего неравенства следует, что некоторые из элементов якобиана $\Delta(M_0)$ отличны от нуля. Пусть (для определенности) $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) \neq 0$.

Рассмотрим первое уравнение системы (10.15) в окрестности точки M_0 как уравнение относительно y_1:

$$F_1(x, y_1, y_2) = 0. \tag{10.17}$$

Так как $F_1(M_0) = 0$ и $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) \neq 0$, то для уравнения (10.17) выполнены условия теоремы 4, согласно которой в некотором параллелепипеде с центром M_0 уравнение (10.17) имеет решение относительно y_1:

$$y_1 = f(x, y_2), \tag{10.18}$$

причем $f(x^0, y_2^0) = y_1^0$, $f(x, y_2)$ — дифференцируемая функция и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y_2}$ выражается формулой (см. (10.12))

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}(x, y_2) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(x, y_1, y_2)}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y_1, y_2)}\right|_{y_1 = f(x, y_2)}.$$

Подставив функцию (10.18) во второе уравнение системы (10.15), получим уравнение

$$F_2(x, f(x, y_2), y_2) =: g(x, y_2) = 0. \tag{10.19}$$

Будем рассматривать это уравнение как уравнение относительно y_2 в окрестности точки $M_0'\left(x^0, y_2^0\right)$ и убедимся в том, что для него выполнены все условия теоремы 4.

Так как $F_2(x, y_1, y_2)$ и $f(x, y_2)$ — дифференцируемые функции, то функция $g(x, y_2)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0', то есть выполнено условие 1 теоремы 4.

Частная производная

$$\frac{\partial g}{\partial y_2}(x, y_2) = \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\right]_{y_1 = f(x, y_2)} =$$
$$= \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\left(-\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\right]_{y_1 = f(x, y_2)} = \Delta \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{-1}\Bigg|_{y_1 = f(x, y_2)} \tag{10.20}$$

непрерывна в точке M_0' в силу непрерывности в точке M_0 частных производных $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2)$, входящих в якобиан Δ, непрерывности в точке M_0' функции (10.18) и отличия от нуля производной $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0)$. Таким образом, условие 2 теоремы 4 выполнено.

Наконец,

$$g(M_0') = F_2\left(x^0, f(x^0, y_2^0), y_2^0\right) = F_2\left(x^0, y_1^0, y_2^0\right) = F_2(M_0) = 0$$

(см. (10.16)), а

$$\frac{\partial g}{\partial y_2}(M_0') = \Delta(M_0) \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0)\right)^{-1} \neq 0$$

(см. (10.20) и (10.16)), то есть выполнено условие 3 теоремы 4.

Согласно теореме 4 в некотором параллелепипеде с центром M_0' уравнение (10.19) имеет единственное решение относительно y_2:

$$y_2 = f_2(x), \tag{10.21}$$

причем $f_2(x)$ — дифференцируемая функция.

Подставляя это решение в (10.18), получим дифференцируемую функцию

$$y_1 = f(x, f_2(x)) =: f_1(x). \tag{10.22}$$

Таким образом, в некотором параллелепипеде с центром в точке M_0 система уравнений (10.15) имеет единственное решение вида (10.21), (10.22), то есть определяет единственную пару неявных функций вида (10.21), (10.22), причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — дифференцируемые функции.
Теорема 5 для $m = 2$ доказана.

Вычисление производных неявных функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$. Если подставить (мысленно) в систему уравнений (10.15) функции $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, являющиеся решением этой системы, то получим тождества

$$F_1(x, f_1(x), f_2(x)) = 0, \quad F_2(x, f_1(x), f_2(x)) = 0.$$

Продифференцируем эти тождества по какому-то из аргументов x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right]\Bigg|_{y_1=f_1(x),\, y_2=f_2(x)} &= 0,\\ \left[\frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right]\Bigg|_{y_1=f_1(x),\, y_2=f_2(x)} &= 0. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Из этой системы двух линейных уравнений относительно производных $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$ однозначно определяются указанные производные, поскольку определителем системы является якобиан $\Delta = \dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}$, который отличен от нуля в точке M_0 (см. (10.16)), а в силу непрерывности отличен от нуля и в некоторой окрестности точки M_0.

Отметим, что выражения для производных $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$, которые нетрудно получить из (10.23), будут содержать сами неявные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и, следовательно, чтобы вычислить $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$ в данной точке x, нужно сначала найти значения неявных функций в этой точке, а для этого нужно решить систему (10.15) относительно y_1 и y_2 для данной точки x.

Если функции $F_1(x, y_1, y_2)$ и $F_2(x, y_1, y_2)$ дифференцируемы k раз в окрестности точки M_0, то неявные функции $y_1 = f_1(x)$ и

$y_2 = f_2(x)$ также дифференцируемы k раз. Их частные производные второго порядка можно найти, дифференцируя производные $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$, найденные из системы (10.23), и так далее.

Пример. Доказать, что система уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0,\ x + y + z - 1 = 0 \tag{10.24}$$

определяет в окрестности точки $M_0(1;1;-1)$ единственную пару неявных функций вида $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ и найти производные первого и второго порядков этих неявных функций в точке $x = 1$.

Решение. Функции

$$F_1 := x^2 + y^2 + z^2 - 3 \quad \text{и} \quad F_2 := x + y + z - 1$$

дифференцируемы в любой окрестности точки $M_0(1;1;-1)$; их частные производные

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z,\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = 1$$

непрерывны в точке M_0;

$$F_1(M_0) = 0,\ F_2(M_0) = 0,\ \left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(y,z)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Таким образом, для системы уравнений (10.24) выполнены все условия теоремы 5, согласно которой в некоторой окрестности точки M_0 система уравнений (10.24) определяет единственную пару функций вида $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$, дифференцируемых в окрестности точки $x = 1$. Более того, поскольку функции F_1 и F_2 дифференцируемы любое число раз, то неявные функции $y = f_1(x)$ и $z = f_2(x)$ также дифференцируемы любое число раз в окрестности точки $x = 1$. Отметим также, что

$$f_1(1) = 1,\ f_2(1) = -1. \tag{10.25}$$

Система уравнений для нахождения $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ получается аналогично системе (10.23), то есть путем подстановки в систему (10.24) неявных функций $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ и дифференцирования полученных тождеств по x. Это дает тождества

$$2x + 2f_1(x)f_1'(x) + 2f_2(x)f_2'(x) = 0,$$
$$1 + f_1'(x) + f_2'(x) = 0,$$

из которых находим $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$:

$$f_1'(x) = \frac{f_2(x) - x}{f_1(x) - f_2(x)}, \; f_2'(x) = \frac{x - f_1(x)}{f_1(x) - f_2(x)}. \tag{10.26}$$

Полагая в этих формулах $x = 1$ и учитывая равенства (10.25), находим $f_1'(1)$ и $f_2'(1)$:

$$f_1'(1) = -1, \; f_2'(1) = 0. \tag{10.27}$$

Далее, используя формулы (10.26), находим $f_1''(x)$ и $f_2''(x)$:

$$f_1''(x) = \frac{(f_2'(x) - 1)(f_1(x) - f_2(x)) - (f_2(x) - x)(f_1'(x) - f_2'(x))}{(f_1(x) - f_2(x))^2},$$

$$f_2''(x) = \frac{(1 - f_1'(x))(f_1(x) - f_2(x)) - (x - f_1(x))(f_1'(x) - f_2'(x))}{(f_1(x) - f_2(x))^2}.$$

Полагая в этих формулах $x = 1$ и учитывая равенства (10.25) и (10.27), получаем:

$$f_1''(1) = -1, \; f_2''(1) = 1.$$

Задание. Нарисуйте сферу и плоскость, которые задаются уравнениями (10.24) в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Изобразите окружность (обозначим ее ω), по которой пересекаются сфера и плоскость, и отметьте на ней точку $M_0(1; 1; -1)$. Выделите в малой окрестности этой точки дугу окружности ω и рассмотрите проекции этой дуги на координатные плоскости Oxy и Ozx. Эти проекции являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $z = f_2(x)$, то есть тех самых неявных функций, которые определяются уравнениями (10.24) в окрестности точки M_0.

Отметьте теперь на окружности ω точку $M_1(-1; 1; 1)$ и попробуйте спроектировать дугу этой окружности, содержащую точку M_1, на плоскости Oxy и Ozx. С какими трудностями вы столкнетесь? Объясните их.

§ 3. Зависимость функций

Понятие зависимости функций. В курсе линейной алгебры было введено понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. В частности, в пространстве $C[a, b]$ функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$, линейная зависимость функций

$y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)$ означает, что хотя бы одна из этих функций является линейной комбинацией остальных:

$$y_k(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_{k-1} y_{k-1}(x) + C_{k+1} y_{k+1}(x) + ... + C_m y_m(x),$$

где C_i — некоторые числа.

В этом параграфе мы введем более общее понятие зависимости функций, которое включает в себя как частный случай понятие линейной зависимости.

Начнем с примера:

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не являются линейно зависимыми на сегменте $[a, b]$, так как ни при каком числе C равенство $y_1(x) = Cy_2(x)$, то есть $x = Cx^2$ (и также равенство $y_2(x) = Cy_1(x)$, то есть $x^2 = Cx$), не может выполняться для всех x из сегмента $[a, b]$. Вместе с тем, между данными функциями существует зависимость, а именно,

$$y_2(x) = y_1^2(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

но эта зависимость нелинейная.

Перейдем к общему понятию зависимости функций, которое мы введем для дифференцируемых функций, поскольку рассматриваемые ниже теоремы о зависимости и независимости функций относятся к дифференцируемым функциям.

Пусть функции

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n), \; y_2 = f_2(x_1, ..., x_n), ..., y_m = f_m(x_1, ..., x_n) \tag{10.28}$$

определены и дифференцируемы в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ (областью мы называем открытое связное множество точек из $\mathbb{R}^n$).

Определение. Функция $y_k = f_k(x_1, ..., x_n)$ называется зависимой в области D от остальных функций системы (10.28), если для всех точек области D эту функцию можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ..., y_m), \tag{10.29}$$

где $\Phi(y_1, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ..., y_m)$ — дифференцируемая функция своих аргументов.

Замечания.

1. Равенство (10.29) нужно понимать так: если вместо $y_1, .., y_m$

подставить функции (10.28), то получится тождество, справедливое для всех $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из области D,

$$f_k(x) \equiv \Phi\left(f_1(x), ..., f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), ..., f_m(x)\right).$$

2. В данном определении существенно то, что функция Φ зависит только от $y_1, ..., y_m$ (кроме y_k) и не зависит от $x_1, ..., x_n$.

Определение. Функции (10.28) называются зависимыми в области D, если одна из них (все равно какая) зависит в этой области от остальных функций. В противном случае функции (10.28) называются независимыми в области D.

Примеры.

1. Функции

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$

$$y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2$$

зависимы в любой области $D \subset \mathbb{R}^4$, поскольку для любой точки (x_1, x_2, x_3, x_4) выполняется равенство $y_3 = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)$, и функция $\Phi = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)$ является, очевидно, дифференцируемой функцией.

2. Докажем, что функции

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad \text{и} \quad y_2 = x_1 x_2 \tag{10.30}$$

являются независимыми в любой окрестности точки $M_0(0;0)$. (Интуитивно ясно, что сумму $x_1 + x_2$ нельзя выразить через произведение $x_1 x_2$, и также $x_1 x_2$ нельзя выразить через $x_1 + x_2$).

Предположим, что функции (10.30) зависимы в некоторой окрестности ω точки M_0. Тогда для всех точек (x_1, x_2) из этой окрестности либо $y_1 = \Phi(y_2)$, либо $y_2 = \Phi(y_1)$.

Допустим, что $y_1 = \Phi(y_2)$, то есть для любой точки (x_1, x_2) из ω выполняется равенство

$$x_1 + x_2 = \Phi(x_1 x_2). \tag{10.31}$$

Рассмотрим отрезок $L_1 = \{(x_1, x_2) : -\delta \leqslant x_1 \leqslant \delta,\ x_2 = 0\}$ прямой $x_2 = 0$, содержащийся в ω. На этом отрезке $x_1 x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = x_1$, поэтому равенство (10.31) принимает вид $x_1 = \Phi(0) = const$, но это противоречит тому, что на отрезке L_1 координата x_1 не является постоянной, а изменяется от $-\delta$ до δ.

Если допустить, что $y_2 = \Phi(y_1)$, то есть

$$x_1 x_2 = \Phi(x_1 + x_2), \tag{10.32}$$

то к аналогичному противоречию придем, рассмотрев отрезок L_2 прямой $x_1 = -x_2$. содержащийся в ω. На отрезке L_2 равенство (10.32) принимает вид $-x_1^2 = \Phi(0) = const$, но это противоречит тому, что на этом отрезке координата x_1 не является постоянной.

Итак, ни одна из функций (10.30) не зависит от другой в любой окрестности точки $M_0(0, 0)$, и, значит, эти функции в любой окрестности точки M_0 независимы.

Задание. Докажите, что функции (10.30) независимы в любой области из $\mathbb{R}^2$.

3. Рассмотрим функции

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ (x+1)^2, & x \leqslant -1. \end{cases}$$

Докажем, что:

а) функция y_1 зависит от функции y_2 в некоторой окрестности любой точки x числовой прямой;

но, вместе с тем,

б) функция y_1 не зависит от функции y_2 на всей числовой прямой.

Для любой точки x можно указать такую окрестность, в которой зависимость y_1 от y_2 при $x > -1$ выражается формулой $y_1 = \Phi_1(y_2) := y_2$, а при $x \leqslant -1$ — формулой $y_1 = \Phi_2(y_2) := 0$. Это доказывает утверждение а). Таким образом, в некоторой окрестности любой точки x данные функции зависимы.

Доказательство утверждения б) проведем методом от противного. Допустим, что y_1 зависит от y_2 на всей числовой прямой, то есть существует дифференцируемая функция $\Phi(y_2)$, такая, что для всех x выполняется равенство $y_1(x) = \Phi(y_2(x))$. Положим в этом равенстве $x = -2$. Так как $y_1(-2) = 0$, $y_2(-2) = 1$, то получим $\Phi(1) = 0$. Положим теперь $x = 1$. Поскольку $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 1$, приходим к равенству $\Phi(1) = 1$, которое противоречит равенству $\Phi(1) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что функция $y_1(x)$ не зависит от функции $y_2(x)$ на всей числовой прямой.

Задание. Докажите, что функция y_2 не зависит от функции y_1 на всей числовой прямой (тем самым будет доказано, что данные функции независимы на всей числовой прямой).

Достаточное условие независимости функций.
Вернемся к функциям (10.28). Пусть $n \geqslant m$. Выберем какие-нибудь m аргументов $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}$ и составим якобиан

$$\frac{D(f_1, ..., f_m)}{D(x_{i_1}, ..., x_{i_m})}. \tag{10.33}$$

Теорема 6 (достаточное условие независимости функций). Если функции (10.28) определены и дифференцируемы в окрестности ω точки $M_0\left(x_1^0, ...x_m^0\right)$, и какой-нибудь якобиан вида (10.33) не равен нулю в точке M_0, то функции (10.28) независимы в ω.
Доказательство. Пусть (для определенности) якобиан

$$\frac{D(f_1, ..., f_m)}{D(x_1, ..., x_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} \; \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \; \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \tag{10.34}$$

отличен от нуля в точке M_0.

Допустим, что функции (10.28) зависимы в окрестности ω. Тогда одна из них, например, $y_k = f_k(x_1, ..., x_n)$ зависит в ω от остальных функций:

$$y_k = \Phi(y_1, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ..., y_m),$$

где Φ — дифференцируемая функция, то есть для всех $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \omega$ выполняется равенство

$$f_k(x) = \Phi\left(f_1(x), .., f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), ..., f_m(x)\right).$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ...+ \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k-1}} \cdot \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k+1}} \cdot \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + ...+ \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k-1}} \cdot \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k+1}} \cdot \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_m} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_m}.$$

Эти равенства показывают, что k-я строка якобиана (10.33) является линейной комбинацией остальных строк с коэффициентами $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}$. Следовательно,этот якобиан равен нулю во всех точках окрестности ω, в том числе и в точке M_0. Но это противоречит условию теоремы, и, значит, функции (10.28) независимы в ω. Теорема 6 доказана.

Следствие. Если функции (10.28) зависимы в ω, то все якобианы вида (10.33) равны нулю во всех точках ω.

Для якобиана (10.34) это доказано по ходу доказательства теоремы 6, для любого другого якобиана вида (10.33) утверждение доказывается аналогично.

Замечание. В теореме 6 мы доказали, что достаточным условием независимости функций (10.28) в окрестности ω точки M_0 является отличие от нуля в точке M_0 какого-либо якобиана вида (10.33) (назовем это условие условием I), а согласно следствию из этой теоремы необходимым условием зависимости функций в ω является тождественное равенство нулю в ω всех якобианов вида (10.33) (назовем это условие условием II).

Отметим, что условие I не является необходимым условием независимости функций (10.28) в окрестности точки M_0. Так в примере 2 якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

является единственным якобианом вида (10.33), и он, очевидно, равен нулю в точке $M_0(0; 0)$, но функции y_1 и y_2, как было показано, независимы в любой окрестности точки M_0.

Аналогично, условие II не является достаточным условием зависимости функций (10.28) в окрестности ω точки M_0. В качестве примера рассмотрим функции

$$y_1(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) \not\equiv 0, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_2 \cup l, \end{cases}$$

$$y_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in D_1 \cup l, \\ f_2(x_1, x_2) \not\equiv 0, & (x_1, x_2) \in D_2, \end{cases}$$

где D_1 и D_2 — подобласти, на которые область D разделена отрезком l, параллельным оси x_2 (рис. 10.3). Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что функции f_1 и f_2 можно выбрать так, что y_1 и y_2 будут дифференцируемыми функциями во всей области D.

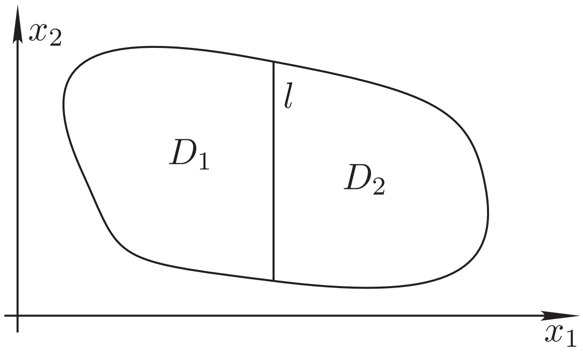


Рис. 10.3.

При этом якобиан $\dfrac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}$ (он является единственным в данном случае якобианом вида (10.33)) тождественно равен нулю в области D, но функции y_1 и y_2 являются независимыми в области D (докажите это).

Общая теорема о зависимости и независимости функций Снова вернемся к функциям (10.28), и, чтобы сформулировать общую теорему о зависимости и независимости этой совокупности функций, введем $(m \times n)$-матрицу, составленную из частных производных первого порядка функций (10.28):

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Выберем r строк этой матрицы с номерами $i_1, i_2, ..., i_r$ и r столбцов с номерами $j_1, j_2, ..., j_r$. Пересечение этих строк и столбцов образует минор r-ого порядка матрицы A, являющейся якобианом функций $f_{i_1}, f_{i_2}, ..., f_{i_r}$ по переменным $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$:

$$\frac{D(f_{i_1}, f_{i_2}, ..., f_{i_r})}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r})} \tag{10.35}$$

Теорема 7. (Общая теорема о зависимости и независимости функций).

Пусть выполнены следующие условия:

1. функции (10.28) определены и дифференцируемы в окрестности ω точки $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$;
2. все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, ..., m; \ \ j = 1, ..., n)$ непрерывны в точке M_0;
3. существует минор r-ого порядка матрицы A (минор вида (10.35)), отличный от нуля в точке M_0;
4. все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A тождественно равны нулю в окрестности ω точки M_0.

Тогда:

1. r функций, представленных в указанном в условии 3 миноре r-го порядка, независимы в ω;
2. каждая из остальных $(m-r)$ функций зависит от указанных в предыдущем пункте r функций в некоторой окрестности ω_1 точки M_0 $(\omega_1 \subset \omega)$.

Первое утверждение следует из теоремы 6, доказательство второго утверждения имеется в [1].

Пример. Обратимся снова к функциям y_1, y_2, y_3 из примера 1 (стр. 80):

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$
$$y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2. \tag{10.36}$$

Составим для этих функций матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) \end{pmatrix}$$

Минор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

образованный пересечением первых двух строк и первых двух столбцов матрицы A, отличен от нуля в любой точке (он равен -2), а все миноры третьего порядка матрицы A тождественно равны нулю (проверьте это). Поэтому, согласно теореме 7, функции y_1 и y_2 независимы в любой окрестности любой точки, а функция y_3 зависит от y_1 и y_2.

Чтобы получить явный вид этой зависимости, выразим из первых двух уравнений системы (10.36) x_1 и x_2 через остальные переменные (это можно сделать, поскольку минор M отличен от нуля):

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x_3, \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) - x_4.$$

Подставив эти выражения в третье уравнение (10.36), приходим к равенству

$$y_3 = \left[\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(y_1 - y_2)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right). \tag{10.37}$$

Полученное равенство выражает зависимость функции y_3 от функций y_1 и y_2 в любой области. Отметим, что доказательство утверждения 2 теоремы 7 проводится способом, аналогичным тому, как была получена формула (10.37) в данном примере (см. [1]).

§ 4. Условный экстремум

Понятие условного экстремума. Задача об условном экстремуме функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — это задача нахождения точек локального экстремума данной функции при условии, что ее аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ не являются независимыми переменными, а связаны между собой некоторыми равенствами (*условиями связи*).

Рассмотрим **пример.** Требуется найти экстремумы функции $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ при условии, что ее аргументы x и y связаны равенством (условием связи) $x + y = 1$. Тем самым точки экстремума данной функции ищутся не на всей плоскости (x, y), а на прямой $x + y = 1$.

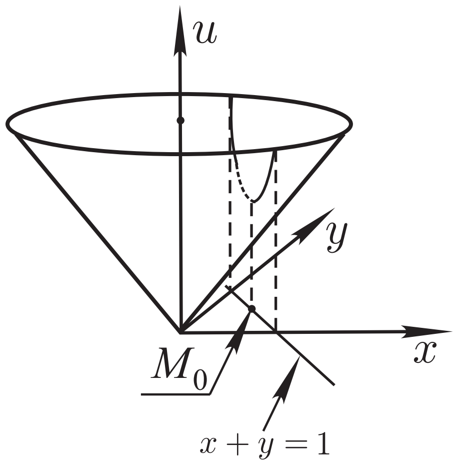


Рис. 10.4.

Графиком функции $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ является коническая поверхность (рис. 10.4). Наглядно видно, что в некоторой точке M_0 прямой $x + y = 1$ функция имеет минимальное значение по отношению к другим точкам этой прямой. Для нахождения точки M_0 выразим из условия связи y через x: $y = 1 - x$ и подставим это выражение в формулу функции: $u = \sqrt{x^2 + (1 - x)^2}$.

Получили функцию одной независимой переменной x. Ее производная $u' = \dfrac{2x - 2(1 - x)}{2\sqrt{x^2 + (1 - x)^2}}$ равна нулю при $x = \dfrac{1}{2}$, отрицательна при $x < \dfrac{1}{2}$ и положительна при $x > \dfrac{1}{2}$. Поэтому в точке $x = \dfrac{1}{2}$ функция $u = \sqrt{x^2 + (1 - x)^2}$ имеет минимум, и, следовательно, на прямой $x + y = 1$ функция $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет минимальное значение в точке с абсциссой $x = \dfrac{1}{2}$, то есть в точке $M_0\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Иными словами, функция $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет в точке $M_0\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ условный минимум при условии связи $x + y = 1$.

Перейдем к общей постановке задачи об условном экстремуме функции.

Рассматривается функция

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(M) \tag{10.38}$$

при условии, что ее аргументы связаны между собой m соотношениями (условиями связи), $m < n$:

$$F_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., F_m(x_1, ..., x_n) = 0. \tag{10.39}$$

Пусть координаты точки $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ удовлетворяют уравнениям (10.39).

Определение. Говорят, что функция $u = f\,(M)$ имеет в точке M_0 условный максимум (минимум) при условиях связи (10.39), если существует окрестность точки M_0, такая, что для любой точки $M(x_1, ..., x_n)$ $(M \neq M_0)$ этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (10.39), выполняется неравенство $f\,(M) > f\,(M_0)$ $\quad (f\,(M) < f\,(M_0))$.

Иначе говоря, условный минимум (максимум) — это наименьшее (наибольшее) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Экстремум функции без условий связи (то есть тот экстремум, который рассматривался в главе 9) будем называть безусловным.

Два метода решения задачи об условном экстремуме

Первый метод. Сведение к задаче о безусловном экстремуме. Пусть для системы уравнений (10.39) в окрестности ω точки $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ выполнены условия теоремы 5 о неявных функциях:

1. функции $F_1(x_1, ..., x_n), ..., F_m(x_1, ..., x_n)$ дифференцируемы в окрестности ω точки M_0;
2. частные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, ..., m)$ непрерывны в точке M_0;
3. $$F_1\,(M_0) = 0, ..., F_m\,(M_0) = 0,\ \left.\frac{D\,(F_1, ..., F_m)}{D\,(x_1, ..., x_m)}\right|_{M_0} \neq 0. \tag{10.40}$$

Тогда в некотором параллелепипеде Q, содержащемся в ω, система уравнений (10.39) имеет единственное решение относительно $x_1, ..., x_m$:

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n), ..., x_m = \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n), \tag{10.41}$$

причем $\varphi_1, ...\varphi_m$ — дифференцируемые функции, и справедливы равенства

$$\varphi_1\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right) = x_1^0, ..., \varphi_m\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right) = x_m^0.$$

В указанном параллелепипеде Q условия связи (10.39) эквивалентны соотношениям (10.41), в которых $x_{m+1}, ..., x_n$ можно рассматривать как независимые переменные, а $x_1, ..., x_m$ являются функциями этих независимых переменных.

Если удается найти функции (10.41) в явном виде, то, подставляя их вместо $x_1, ..., x_m$ в формулу (10.38), получаем:

$$u = f\left(\varphi_1\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), ..., \varphi_m\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), x_{m+1}, ..., x_n\right) =:$$
$$=: g\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) = g\left(M'\right), \qquad (10.42)$$

где $M' = M'\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Функция $g\left(x_{m+1}, ..., x_n\right)$ является функцией $n-m$ независимых переменных $x_{m+1}, ..., x_n$. Если эта функция имеет (безусловный) экстремум в точке $M_0'\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)$, то функция $f(M)$ имеет в точке $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ условный экстремум при условиях связи (10.39) (или, что то же самое, при условиях связи (10.41)), и обратно.

Таким образом, *задача об условном экстремуме функции $f(M)$ при условиях связи (10.39) сводится в параллелепипеде Q к задаче о безусловном экстремуме функции $g(M')$*. Именно такой подход был использован в рассмотренном в начале параграфа примере.

Второй метод (метод Лагранжа).

В этом методе не будут использоваться явные выражения для неявных функций (10.41), хотя по-прежнему будем считать, что условие (10.40) выполнено, и потому в параллелепипеде Q с центром в точке $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ уравнения (10.39) определяют единственную совокупность неявных функций вида (10.41).

Введем так называемую *функцию Лагранжа*:

$$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \lambda_2 F_2(M) + ... + \lambda_m F_m(M),$$

где $f(M)$ — функция (10.38), $F_1(M), ..., F_m(M)$ — функции из (10.39), $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — неизвестные пока числа (они называются *множителями Лагранжа*).

Заметим, что в точках

$$M\left(\varphi_1\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), .., \varphi_m\left(x_{m+1}, ..., x_n\right), x_{m+1}, ..., x_n\right),$$

удовлетворяющих условиям связи (10.39), выполняются равенства

$$\Phi(M) = f(M) = g(M'),$$

где $M' = M'(x_{m+1}, ..., x_n)$, $g(M')$ — функция из (10.42). Итак,

$$\begin{aligned} &g(x_{m+1}, ..., x_n) = \\ &= \Phi\big(\varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n), .., \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n\big). \end{aligned} \tag{10.43}$$

Выведем при условиях (10.40) *необходимое (по Лагранжу) условие* условного экстремума функции $f(M)$ в точке M_0 при условиях связи (10.39).

Пусть функция $f(M)$ (а значит и функция $\Phi(M)$) дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$, и пусть $f(M)$ (а значит и $\Phi(M)$) имеет в точке M_0 условный экстремум при условиях связи (10.39). Тогда функция $g(M')$ имеет безусловный экстремум в точке $M_0'\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)$. Поэтому

$$dg\big|_{M_0'} = 0.$$

Это равенство в силу (10.43) можно записать в виде

$$\begin{aligned} dg\big|_{M_0'} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(M_0)\,dx_1 + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(M_0)\,dx_m + \\ + \frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1} + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n = 0, \end{aligned} \tag{10.44}$$

где $dx_{m+1}, ..., dx_n$ — дифференциалы независимых переменных $x_{m+1}, ..., x_n$, а $dx_1, ..., dx_m$ — дифференциалы функций (10.41) в точке M_0'.

Докажем, что числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$ можно выбрать так, что будут выполнены равенства

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(M_0) = 0, ..., \frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(M_0) = 0. \tag{10.45}$$

Напишем равенства (10.45) в развернутом виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0) + ... + \lambda_m\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) + \lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0) + ... + \lambda_m\dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0) = 0. \end{cases}$$

Написанные равенства представляют собой систему m линейных уравнений относительно $\lambda_1, ..., \lambda_m$, а определитель этой системы является транспонированным по отношению к якобиану $\left.\dfrac{D(F_1, ..., F_m)}{D(x_1, ..., x_m)}\right|_{M_0}$, отличному от нуля в силу (10.40). Следовательно, из этой системы однозначно определяются $\lambda_1, ..., \lambda_m$.

В силу (10.45) равенство (10.44) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n = 0, \tag{10.46}$$

а поскольку $dx_{m+1}, ..., dx_n$ — дифференциалы независимых переменных, то из (10.46) следуют равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0) = 0, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M_0) = 0. \tag{10.47}$$

В самом деле, если положить в (10.46) $dx_{m+1} \neq 0$, $dx_{m+2} = = ... = dx_n = 0$ (такой выбор возможен именно потому, что $x_{m+1}, ..., x_n$ — независимые переменные), то получим $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}}(M_0) = 0$, и аналогичным образом получаются остальные равенства в (10.47).

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему, связанную с равенствами (10.45) и (10.47).

Теорема 8 (необходимое по Лагранжу условие условного экстремума). Пусть выполнены условия (10.40) и пусть функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи (10.39). Тогда существует функция Лагранжа $\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + ... + + \lambda_m F_m(M)$ (то есть существуют числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$), такая что все ее частные производные первого порядка в точке M_0 равны нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(M_0) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{10.48}$$

Теорема 8 дает возможность предложить следующий алгоритм отыскания точек условного экстремума функции $f(M)$ при условиях связи (10.39).

Вводим функцию Лагранжа

$$\Phi = f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, ..., x_n) + ... + \lambda_m F_m(x_1, ..., x_n)$$

с неопределенными пока коэффициентами $\lambda_1, ..., \lambda_m$ и составляем систему уравнений, используя равенства (10.39) и (10.48):

$$F_1 = 0, ..., F_m = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0. \tag{10.49}$$

Система (10.49) содержит $n+m$ уравнений относительно $n+m$ неизвестных: $x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$.

Пусть $x_1^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0$ — решение системы (10.49). Тогда в точке $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ функция Лагранжа

$$\Phi = f\left(x_1, ..., x_n\right) + \lambda_1^0 F_1\left(x_1, ..., x_n\right) + ... + \lambda_m^0 F_m\left(x_1, ..., x_n\right)$$

удовлетворяет условию (10.48). В силу теоремы 8 это означает, что точка M_0 является точкой возможного условного экстремума функции $f\left(M\right)$ при условиях связи (10.39).

Чтобы установить, имеет ли на самом деле функция $f\left(M\right)$ условный экстремум в точке M_0, воспользуемся тем, что вопрос об условном экстремуме функции $f\left(M\right)$ в точке M_0 эквивалентен вопросу о безусловном экстремуме функции $g\left(M'\right)$ в точке $M_0'\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)$ (см. (10.42)).

В свою очередь, чтобы установить, имеет ли функция $g\left(M'\right)$ безусловный экстремум в точке M_0', нужно рассмотреть второй дифференциал функции $g\left(M'\right)$ в точке M_0' (в связи с этим будем считать, что функции $f\left(M\right)$, $F_1\left(M\right), ..., F_n\left(M\right)$, а значит и $g\left(M'\right)$, дважды дифференцируемы):

$$d^2 g\big|_{M_0'} = Q(dx_{m+1}, ..., dx_n),$$

где Q — квадратичная форма относительно $dx_{m+1}, ..., dx_n$. Если эта квадратичная форма знакоопределенная, то функция $g\left(M'\right)$ имеет в точке M_0' экстремум, а значит функция $f\left(M\right)$ имеет в точке M_0 условный экстремум при условиях связи (10.39). Если же эта квадратичная форма знакопеременная, то условного экстремума функции $f\left(M\right)$ в точке M_0 нет.

Это и есть *достаточное условие* наличия или отсутствия условного экстремума функции $f\left(M\right)$ в точке M_0 при условиях связи (10.39).

Вычисление квадратичной формы $\boldsymbol{Q(dx_{m+1}, ..., dx_n)}$ Встает вопрос о том, как вычислить квадратичную форму $Q(dx_{m+1}, ..., dx_n)$, то есть как найти ее коэффициенты, если нам не известны явные выражения функций (10.41), хотя сами эти функции существуют в силу условий (10.40).

Из (10.43) следует, что первый дифференциал функции $g\left(M'\right)$ можно записать в виде

$$dg\big|_{M'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)\Phi\Big|_{M(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)},$$

здесь $dx_{m+1}, ..., dx_n$ — дифференциалы независимых переменных, а $dx_1, ..., dx_m$ — дифференциалы функций (10.41) в точке $M'(x_{m+1}, ..., x_n)$:

$$dx_i = d\varphi_i\big|_{M'}, \quad i = 1, ..., m. \tag{10.50}$$

В точке $M_0'\left(x_{m+1}^0, ..., x_n^0\right)$ второй дифференциал $d^2g\big|_{M_0'}$ имеет вид

$$d^2g\big|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 \Phi\bigg|_{M_0} + \\ + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(M_0)\, d^2x_1 + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(M_0)\, d^2x_m\right].$$

В силу (10.48) каждое слагаемое в квадратных скобках равно нулю, и значит

$$d^2g\big|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 \Phi\bigg|_{M_0}, \tag{10.51}$$

где $dx_i \quad (i = 1, ..., m)$ выражаются формулой (10.50) при $M' = M_0'$.

Таким образом, для нахождения $d^2g\big|_{M_0'}$, то есть для вычисления квадратичной формы нужно вычислить второй дифференциал функции Лагранжа $\Phi\,(M)$ в точке M_0, причем так, как если бы все аргументы $x_1, ..., x_n$ были независимыми переменными, а затем заменить $dx_1, ..., dx_m$ дифференциалами неявных функций (10.41) в точке M_0'.

В свою очередь, чтобы найти дифференциалы $d\varphi_1, ..., d\varphi_m$ функций (10.41) в точке M_0', не используя явных выражений для этих функций (у нас нет этих явных выражений), поступим так. Предположим, что в уравнения (10.39) вместо $x_1, ..., x_m$ подставлены функции (10.41). Тогда получатся тождества относительно $x_{m+1}, ..., x_n$:

$$F_1(\varphi_1, ..., \varphi_m, x_{m+1}, ..., x_n) = 0, ..., F_m(\varphi_1, ..., \varphi_m, x_{m+1}, ..., x_n) = 0.$$

Дифференцируя эти тождества в точке M_0' и используя инвариантность формы первого дифференциала, приходим к равенствам

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0)\, d\varphi_1\Big|_{M_0'} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0)\, d\varphi_m\Big|_{M_0'} + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0)\, dx_{m+1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(M_0)\, dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0)\, d\varphi_1\Big|_{M_0'} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0)\, d\varphi_m\Big|_{M_0'} + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0)\, dx_{m+1} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(M_0)\, dx_n = 0. \end{cases} \qquad (10.52)$$

Эти равенства представляют собой систему m линейных уравнений относительно дифференциалов $d\varphi_1\big|_{M_0'}, \ldots, d\varphi_m\big|_{M_0'}$, причем определитель системы равен якобиану $\left.\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{M_0}$, отличному от нуля в силу (10.40).

Следовательно, из этой системы однозначно находятся искомые дифференциалы $d\varphi_i\big|_{M_0'}$ $(i = 1, \ldots, m)$, как функции от $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Подставляя выражения для $d\varphi_i\big|_{M_0'}$ вместо dx_i $(i = 1, \ldots, m)$ в формулу (10.51), получаем искомую квадратичную форму

$$d^2 g\big|_{M_0'} = Q\left(dx_{m+1}, \ldots, dx_n\right). \qquad (10.53)$$

Пример. Найдем экстремумы функции $u = x + y$ при условии связи $xy - 1 = 0$.

В данном случае для решения задачи можно было бы использовать первый метод, поскольку из условия связи можно выразить в явном виде один из аргументов функции через другой (например, $y = \dfrac{1}{x}$), после чего задача сводится к отысканию точек безусловного экстремума функции одной переменной $u = x + \dfrac{1}{x}$ (решите задачу этим методом), но мы применим для решения метод Лагранжа.

Введем функцию Лагранжа

$$\Phi = x + y + \lambda(xy - 1),$$

где λ — пока не определенный множитель, и составим систему уравнений (10.49), которая в нашем примере имеет вид

$$\begin{cases} F_1 := xy - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + \lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda x = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad \lambda = -1 \quad \text{и} \quad x = -1, \quad y = -1, \quad \lambda = 1.$$

Таким образом, имеем две точки возможного условного экстремума функции $u = x + y$ при условии связи $xy - 1 = 0$:
точка $M_1(1; 1)$, при этом $\Phi = x + y - (xy - 1)$, и
точка $M_2(-1; -1)$, при этом $\Phi = x + y + (xy - 1)$.

Далее в соответствии с описанным алгоритмом вычислим второй дифференциал функции Лагранжа, причем так, как если бы x и y были независимыми переменными. Для точки $M_1(1; 1)$ имеем:

$$d\Phi = dx + dy - ydx - xdy,$$
$$d^2\Phi = -2dxdy.$$

Выразим теперь dy через dx, используя условие связи $F_1 := xy - 1 = 0$. Система уравнений (10.52) состоит в нашем примере из одного уравнения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(M_1) \cdot dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(M_1) \cdot dy = 0, \text{ то есть } dx + dy = 0,$$

откуда $dy = -dx$. Подставляя это выражение для dy в равенство $d^2\Phi = -2dxdy$, находим квадратичную форму Q (см. (10.53)):

$$d^2g\big|_{x=1} = Q(dx) = 2(dx)^2.$$

Так как $Q(dx)$ — положительно определенная квадратичная форма, то в точке $M_1(1; 1)$ функция $u = x + y$ имеет условный минимум ($u\,(M_1) = 2$) при условии связи $xy - 1 = 0$.

Аналогично доказывается, что в точке $M_2(-1; -1)$ функция $u = x + y$ имеет условный максимум ($u\,(M_2) = -2$) при условии связи $xy - 1 = 0$ (проведите доказательство самостоятельно).

Рассмотренный пример имеет наглядную геометрическую иллюстрацию. Линиями уровня функции $u = x + y$ (то есть лини-

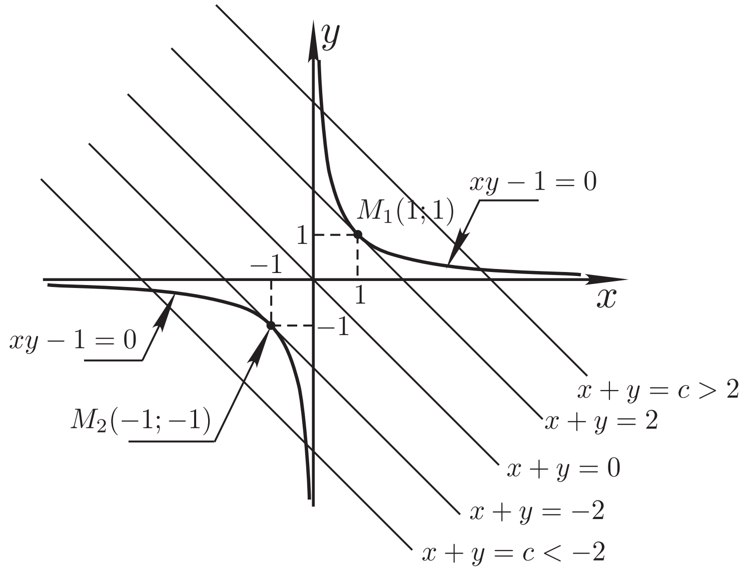


Рис. 10.5.

ями на плоскости (x, y), на которых функция имеет постоянное значение) являются прямые $x + y = c = const$, а условие связи $xy - 1 = 0$ является уравнением гиперболы. На рис. 10.5 изображены линии уровня для нескольких значений c ($c < -2$, $c = -2$, $c = 0$, $c = 2$, $c > 2$) и гипербола $xy - 1 = 0$, в точках которой ищутся экстремумы функции $u = x + y$.

Через точку $M_1(1; 1)$ гиперболы проходит линия уровня $x + y = 2$, а через любую другую точку гиперболы в окрестности точки M_1 проходит линия уровня $x + y = c$, где $c > 2$. Таким образом, в точке M_1 функция $u = x + y$ имеет наименьшее значение $(u\,(M_1) = 2)$ по отношению ко всем другим точкам гиперболы из окрестности точки M_1 (разумеется, окрестность точки M_1 должна быть не слишком большой, чтобы в нее не попали точки другой ветви гиперболы).

Также наглядно видно, что в точке $M_2(-1; -1)$, через которую проходит линия уровня $x + y = -2$, функция $u = x + y$ имеет наибольшее значение $(u\,(M_2) = -2)$ по отношению ко всем другим точкам гиперболы из окрестности точки M_2.

Глава 11

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

С помощью дифференциального исчисления мы умеем находить точки локального экстремума функции, промежутки монотонности, направление выпуклости, точки перегиба и асимптоты графиков функций. Здесь мы рассмотрим применение дифференциального исчисления к другим геометрическим вопросам: касание плоских кривых, огибающая семейства кривых, кривизна плоской кривой.

§ 1. Касание плоских кривых

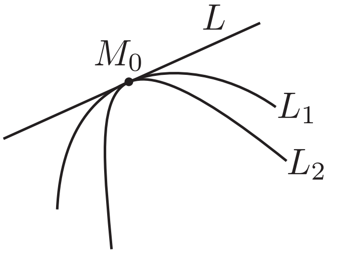


Рис. 11.1. Прямая L — общая касательная к кривым L_1 и L_2 в точке M_0.

Если две плоские кривые имеют общую точку M_0 и в этой точке — общую касательную, то говорят, что эти *кривые касаются (соприкасаются) в точке* M_0 (рис. 11.1).

Пусть кривые L_1 и L_2 являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и пусть они касаются в точке $M_0(x_0, f_1(x_0))$ (рис. 11.2). Пусть n — натуральное число.

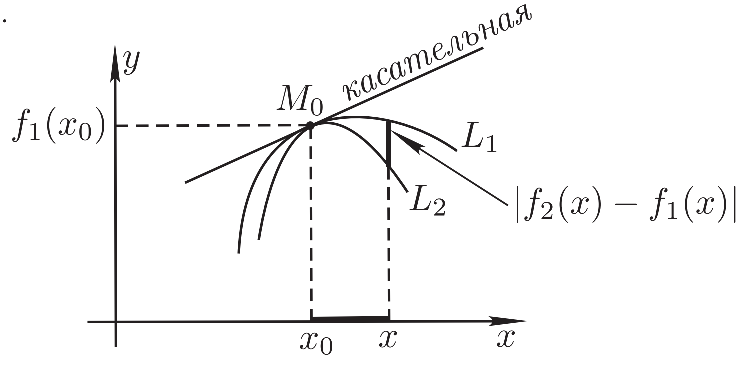


Рис. 11.2.

Говорят, что *порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен n,* если существует отличный от нуля предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f_2(x) - f_1(x)|}{|x - x_0|^{n+1}}. \tag{11.1}$$

Если предел (11.1) равен нулю, то говорят, что *порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 выше n.*

Если порядок касания выше любого n, то говорят, что *порядок касания бесконечный.*

Примеры.

1) Графики функций $y = x^4$ и $y = x^3$ касаются в точке $O(0;0)$, общей касательной графиков является ось Ox (докажите это).

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^3 - x^4|}{|x|^{n+1}} = \begin{cases} 0, & n < 2, \\ 1, & n = 2, \\ \infty, & n > 2, \end{cases}$

то порядок касания данных кривых в точке O равен 2.

2) Рассмотрим функции $y = 0$ и $y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Нетрудно доказать (сделайте это), что порядок касания графиков этих функций в точке $O(0;0)$ — бесконечный.

Теорема 1. Пусть кривые L_1 и L_2 являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1^0. если $f_1(x_0) = f_2(x_0),\ f_1'(x_0) = f_2'(x_0),\ \ldots,$

$$f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0),\ f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0), \tag{11.2}$$

то порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке $M_0(x_0, f_1(x_0))$ равен n;

2^0. обратно: если порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен n, то выполнены соотношения (11.2).

Доказательство. 1^0. Пусть выполнены соотношения (11.2). Используя формулу Тейлора и эти соотношения, получаем:

$$\begin{aligned}
&f_2(x) - f_1(x) = \Big[f_2(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f_2^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \\
&+\frac{1}{(n+1)!} f_2^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right)\Big] - \\
&-\Big[f_1(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \\
&+\frac{1}{(n+1)!} f_1^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right)\Big] = \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[f_2^{(n+1)}(x_0) - f_1^{(n+1)}(x_0)\right](x-x_0)^{n+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right),
\end{aligned}$$

причем число $A = \dfrac{1}{(n+1)!}\left[f_2^{(n+1)}(x_0) - f_1^{(n+1)}(x_0)\right] \neq 0.$

Отсюда следует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f_2(x)-f_1(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}=|A|\neq 0,$$

а это и означает, согласно определению, что порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен n. Утверждение 1^0 доказано.

2^0. Пусть порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен n. Если предположить, что цепочка равенств в (11.2) нарушается при некотором $k\leqslant n$, то получим, в силу доказанного в п.1^0, что порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен $k-1<n$, а если допустить, что в (11.2) выполняются все равенства и, кроме того, $f_1^{(n+1)}(x_0)=f_2^{(n+1)}(x_0)$, то получим, что порядок касания выше n. И то, и другое противоречит условию. Следовательно, выполнены соотношения (11.2). Теорема доказана.

Примеры. 1) Рассмотрим графики функций $y=x$ и $y=\sin x$, они имеют общую точку $O(0;0)$ (рис. 11.3). В данном примере $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\sin x$. Несложные вычисления (проделайте их) приводят к соотношениям:

$$f_1(0)=f_2(0)=0,\ f_1'(0)=f_2'(0)=1,\ f_1''(0)=f_2''(0)=0,$$
$$f_1'''(0)=0\neq f_2'''(0)=-1.$$

Отсюда по теореме 1 следует, что порядок касания графиков данных функций в точке $O(0;0)$ равен 2.

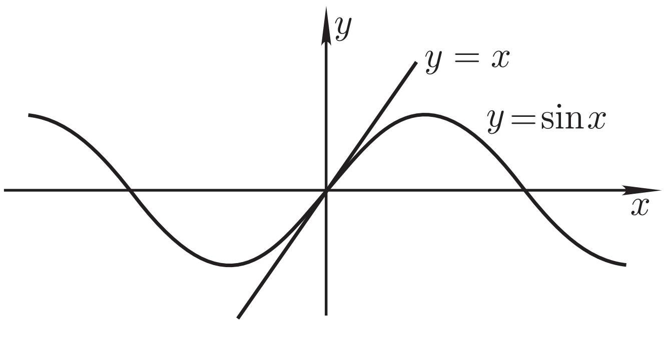


Рис. 11.3.

2) Пусть кривая L_1 является графиком функции $y=f(x)$, а L_2 — касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0,f(x_0))$, и пусть существует $f''(x_0)$. Докажите, что: если $f''(x_0)\neq 0$, то порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 равен 1; если $f''(x_0)=0$ и существует $f'''(x_0)$, то порядок касания кривых L_1 и L_2 в точке M_0 не ниже 2.

§ 2. Огибающая однопараметрического семейства кривых

Особые точки кривых

Пусть Oxy — прямоугольная система координат на плоскости. Кривая на плоскости Oxy может быть задана:

явно, то есть уравнением вида $y = f(x)$ или $x = f(y)$;

неявно, то есть уравнением вида $F(x, y) = 0$;

параметрически, то есть уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где t — параметр, принимающий значения из некоторого промежутка.

В дальнейшем будем считать, что функции, входящие в уравнения кривых, непрерывно дифференцируемы, то есть имеют непрерывные производные первого порядка.

Пусть кривая L задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, и пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in L$ (то есть $F(x_0, y_0) = 0$) и $F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть, например, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки M_0 в силу теоремы о неявной функции кривая L может быть задана явным уравнением вида $y = f(x)$, причем функция $y = f(x)$ (решение уравнения $F(x, y) = 0$ относительно y) дифференцируема и ее производная выражается формулой

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\bigg|_{y=f(x)} \tag{11.3}$$

Если же $F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) = 0$, то есть $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$, то в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ кривая L может не иметь явного уравнения.

Точку $M_0(x_0, y_0)$ кривой L, для которой $F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) = 0$ ($\neq 0$) будем называть *особой (обыкновенной)* точкой этой кривой.

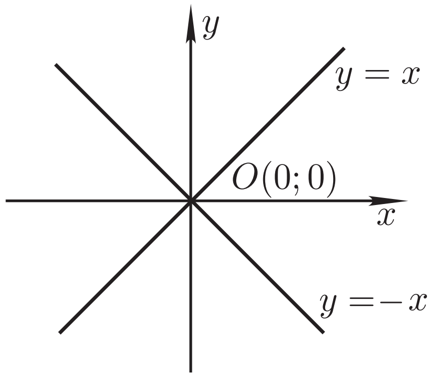


Рис. 11.4.

Пример. Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ (здесь $F(x, y) = x^2 - y^2$) задает кривую, состоящую из двух прямых, пересекающихся в точке $O(0; 0)$ (рис. 11.4). Точка O — особая точка этой кривой, так как $F_x(0; 0) = F_y(0; 0) = 0$. Очевидно, что в окрестности точки O обе прямые нельзя задать одним и тем же уравнением вида $y = f(x)$ или $x = f(y)$. Любая точка $(a; a)$ или $(a; -a)$, где $a \neq 0$, является обыкновенной точкой данной кривой.

Пусть кривая L задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и пусть $\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) \neq 0$. Пусть, например, $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности $\varphi'(t) \neq 0$ и сохраняет знак в некоторой окрестности точки t_0, поэтому $x = \varphi(t)$ — строго монотонная функция в этой окрестности точки t_0 и, следовательно, имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставив ее в уравнение $y = \psi(t)$, получим явное уравнение кривой L: $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) =: f(x)$ в некоторой окрестности точки $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$. Отметим, что

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{11.4}$$

Аналогичная ситуация возникает в случае, когда $\psi'(t_0) \neq 0$. В этом случае кривая L будет иметь явное уравнение $x = \varphi(\psi^{-1}(y)) =: g(y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$.

Если же $\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) = 0$, то есть $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$, то в окрестности точки $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ кривая L может не иметь явного уравнения.

Точку $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ кривой L, для которой $\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) = 0$ $(\neq 0)$ будем называть *особой (обыкновенной)* точкой этой кривой.

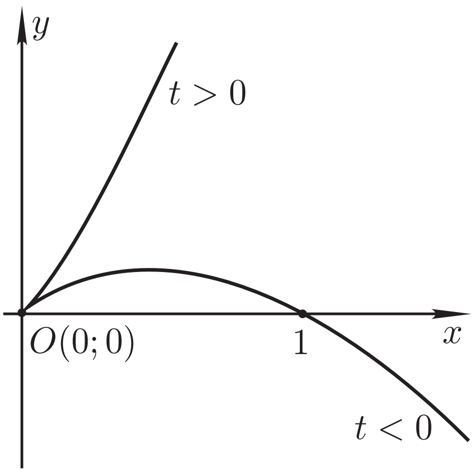


Рис. 11.5.

К особым точкам кривой, заданной параметрически, будем относить также кратные точки кривой, то есть точки, соответствующие нескольким значениям параметра t.

Пример. Рассмотрим кривую, заданную параметрически уравнениями

$$x = t^2,\ y = t^2(1+t),\ t \in (-\infty, +\infty).$$

Здесь $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t^2(1+t)$, и, следовательно, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$. Значению $t = 0$ соответствует на кривой точка $O(0; 0)$. Согласно определению, она является особой точкой кривой. На рис. 11.5 видно, что в окрестности точки O кривая не имеет явного уравнения, поскольку каждому $x > 0$ соответствуют два значения y и также каждому $y > 0$ соответствуют два значения x. Любая точка этой кривой при $t \neq 0$ является обыкновенной точкой.

Огибающая семейства плоских кривых

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, a) = 0. \tag{11.5}$$

Пусть при каждом фиксированном значении переменной a (из некоторого промежутка) уравнение (11.5) задает плоскую кривую на плоскости Oxy. Изменяя a (в пределах указанного промежутка), будем получать различные кривые. Совокупность всех этих кривых называется *однопараметрическим семейством кривых*, переменная a называется *параметром*, а уравнение (11.5) — *уравнением однопараметрического семейства кривых*.

Пример. Уравнение

$$y - (x - a)^2 = 0, \ a \in \mathbb{R}$$

задает однопараметрическое семейство парабол (рис. 11.6).

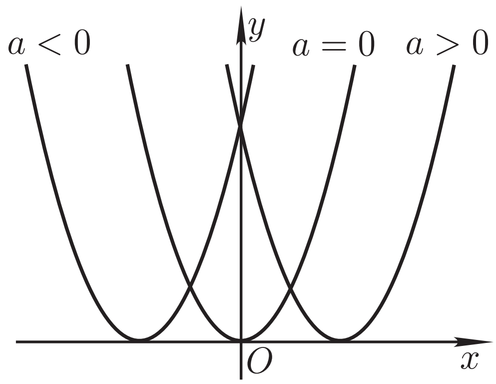


Рис. 11.6.

Заметим, что ось Ox касается всех парабол семейства.

Определение. Кривая, которая: 1) в каждой своей точке касается и притом только одной кривой данного семейства и 2) в различных точках касается различных кривых семейства, называется *огибающей данного семейства кривых*.

В рассмотренном примере ось Ox (прямая $y = 0$) — огибающая семейства парабол.

Необходимое условие огибающей

Пусть однопараметрическое семейство кривых, заданное уравнением (11.5), имеет огибающую. Рассмотрим точку $M(x, y)$ на огибающей (рис. 11.7). Так как в этой точке огибающая касается некоторой кривой семейства, а этой кривой соответствует определенное значение параметра

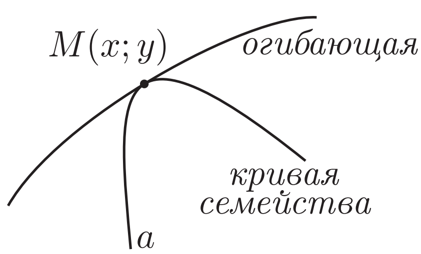


Рис. 11.7.

a, то, тем самым, каждая точка $M(x,y)$ огибающей соответствует определенному значению параметра a, причем различные точки огибающей соответствуют различным значениям a (в силу определения огибающей). Таким образом, координаты точки $M(x,y)$ огибающей являются функциями параметра a. Обозначим их так:

$$x=\varphi(a),\ y=\psi(a).$$

Эти уравнения являются параметрическими уравнениями огибающей. Будем считать, что $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ — дифференцируемые функции, и выведем систему уравнений, решением которой являются эти функции.

Так как точка $M(\varphi(a),\psi(a))$ огибающей лежит также на кривой семейства, отвечающей данному значению параметра a, то ее координаты удовлетворяют уравнению (11.5):

$$F(\varphi(a),\psi(a),a)=0. \tag{11.6}$$

Равенство (11.6) выполняется для любого значения a, то есть является тождеством. Продифференцируем его по a:

$$F_x\cdot\varphi'(a)+F_y\cdot\psi'(a)+F_a\Big|_{\substack{x=\varphi(a)\\ y=\psi(a)}}=0. \tag{11.7}$$

Так как огибающая и кривая семейства касаются в точке $M(\varphi(a),\psi(a))$, то они имеют в этой точке общую касательную, и, значит, одинаковые угловые коэффициенты касательной. Равенство этих угловых коэффициентов, используя формулы (11.3) и (11.4), запишем в виде (при условии $\varphi'(a)\neq$ $\neq 0,\ F_y(\varphi(a),\psi(a),a)\neq 0$)

$$\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}=-\frac{F_x(x,y,a)}{F_y(x,y,a)}\Big|_{\substack{x=\varphi(a)\\ y=\psi(a)}},$$

откуда получаем

$$F_x\cdot\varphi'(a)+F_y\cdot\psi'(a)\Big|_{\substack{x=\varphi(a)\\ y=\psi(a)}}=0. \tag{11.8}$$

Заметим, что это равенство верно и в том случае, когда $\varphi'(a)=0$ и $F_y(\varphi(a),\psi(a),a)=0$. В силу (11.8) из (11.7) следует равенство

$$F_a\big(\varphi(a),\psi(a),a\big)=0. \tag{11.9}$$

Итак, *если огибающая семейства кривых, заданного уравнением (11.5), существует, то функции* $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$, *описывающие огибающую, удовлетворяют равенствам (11.6) и (11.9), то есть эти функции являются решением системы уравнений*

$$F(x, y, a) = 0, \ F_a(x, y, a) = 0. \tag{11.10}$$

Это и есть *необходимое условие огибающей.*

Если система (11.10) не имеет решения относительно x и y, то у семейства кривых (11.5) огибающей нет. Если же система (11.10) имеет решение $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$, то эти функции могут описывать огибающую, но могут быть и уравнениями кривой, которая не является огибающей. Дело в том, что равенство (11.8) и, следовательно, равенство (11.9), имеет место не только в случае касания огибающей и кривой семейства в точке $M(\varphi(a), \psi(a))$, а также и тога, когда в этой точке либо $F_x = F_y = 0$, либо $\varphi'(a) = \psi'(a) = 0$. В этом случае точка $M(\varphi(a), \psi(a))$ будет особой точкой либо кривой семейства (11.5), либо кривой, описываемой уравнениями $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$.

Кривая, определяемая системой (11.10), называется *дискриминантной кривой* семейства (11.5). Если кривые семейства и дискриминантная кривая не имеют особых точек, то дискриминантная кривая является огибающей. В противном случае дискриминантная кривая может быть либо огибающей, либо множеством особых точек, либо частично тем и частично другим.

Примеры. 1) Рассмотрим уравнение

$$(x - a)^3 - (y - a)^2 = 0, \ a \in \mathbb{R}.$$

Оно задает семейство кривых, называемых *полукубическими параболами*. Название объясняется тем, что уравнение можно записать в виде $y - a = \pm(x - a)^{3/2}$, и эпитет «полукубические», относящийся к кривым этого семейства, обусловлен показателем степени, равным $3/2$.

В данном примере $F(x, y, a) = (x - a)^3 - (y - a)^2$, поэтому $F_a(x, y, a) = -3(x - a)^2 + 2(y - a)$, а система (11.10) имеет два решения

$$x = a, \ y = a \quad \text{и} \quad x = a + \frac{4}{9}, \ y = a + \frac{8}{27} \quad \text{(убедитесь в этом)}.$$

Таким образом, дискриминантная кривая состоит из двух прямых, уравнения которых можно записать так:

$$y = x \quad \text{и} \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

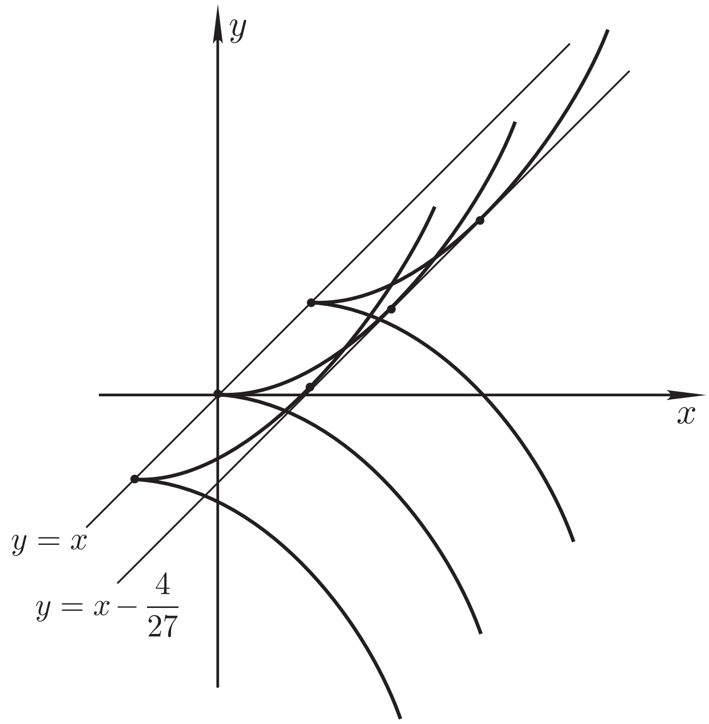


Рис. 11.8.

В точках прямой $x = a$, $y = a$ выполняются равенства $F_x = F_y = 0$, то есть эта прямая является *множеством особых точек кривых семейства* (рис. 11.8).

Прямая $x = a + 4/9$, $y = a + 8/27$ является *огибающей*: в каждой своей точке она касается некоторой кривой семейства, а в различных точках касается различных кривых семейства (см. рис. 11.8).

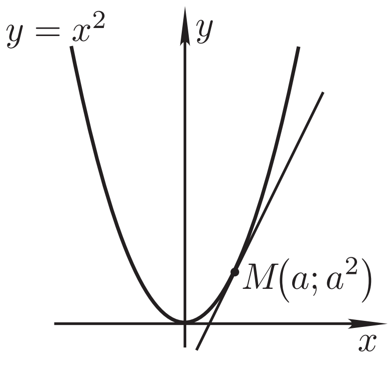


Рис. 11.9.

2) Кривая $y = f(x)$, имеющая касательную в каждой точке, является огибающей семейства касательных к этой кривой.

Выведем уравнение семейства касательных к параболе $y = x^2$. Возьмем на параболе произвольную точку $M(a; a^2)$. (рис 11.9). Угловой коэффициент касательной в этой точке равен $y'(a) = 2a$, а уравнение касательной имеет вид

$$y - a^2 = 2a(x - a) \text{ или } y = 2ax - a^2 \ (-\infty < a < \infty).$$

Это и есть уравнение однопараметрического семейства касательных к параболе $y = x^2$.

Замечание. Понятие огибающей используется в теории дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Оно называется дифференциальным уравнением первого порядка, и задача состоит в том, чтобы найти все функции $y = y(x)$, удовлетворяющие этому уравнению. В курсе дифференциальных уравнений будет доказано, что *общее решение* данного уравнения зависит от одной произвольной постоянной: $y = \Phi(x, c)$, где c — произвольная постоянная, а функция Φ определяется правой частью уравнения, то есть функцией $f(x, y)$. Запишем общее решение в виде

$$F(x, y, c) := y - \Phi(x, c) = 0.$$

Таким образом, общее решение задает однопараметрическое семейство кривых на плоскости (x, y), в качестве параметра выступает произвольная постоянная c.

Если это семейство кривых имеет огибающую, то она является графиком так называемого *особого решения* дифференциального уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}.$$

Его общее решение найдем, записав уравнение в виде $\dfrac{dy}{3y^{2/3}} = dx$, откуда, интегрируя обе части равенства, получаем: $y^{1/3} = x + c$ или $y = (x + c)^3$, где c — произвольная постоянная, $c \in \mathbb{R}$. Найденное общее решение дифференциального уравнения задает семейство кубических парабол (рис. 11.10). Оно имеет огибающую — ось Ox. Это видно непосредственно на рисунке (ось Ox касается всех кривых семейства), а, кроме того, можно найти огибающую, используя систе-

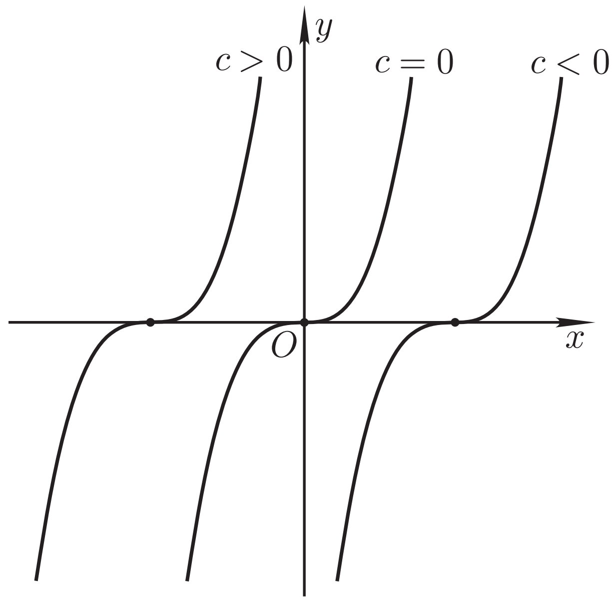


Рис. 11.10.

му уравнений (11.10), которая в данном случае имеет решение $x = -c$, $y = 0$, задающее ось Ox. Через каждую точку (x, y), не лежащую на оси Ox, проходит одно решение дифференциального уравнения, а через каждую точку оси Ox проходят 2 решения: одно из них изображается кубической параболой, а другое — это *особое решение* $y = 0$.

§ 3. Кривизна плоской кривой

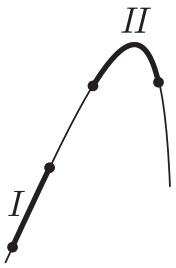


Рис. 11.11.

Рассмотрим плоскую кривую, изображенную на рисунке 11.11. Выделим на ней два участка одинаковой длины (I и II). Наглядно видно, что искривленность на участке II больше, чем на участке I. Наша задача состоит в том, чтобы ввести количественную характеристику искривленности плоской кривой (меру искривленности). Эту меру искривленности мы назовем в дальнейшем *кривизной* плоской кривой.

Пусть дана плоская кривая L, в каждой точке которой существует касательная. Будем в каждой точке рассматривать *направленную касательную*. За направление касательной примем то, которое соответствует направлению движения точки по кривой, и будем отмечать его стрелкой. Пусть M_0 и M — две точки на кривой L. Обозначим через $\Delta\varphi$ угол, на который повернется направленная касательная при движении по кривой L из точки M_0 в точку M (рис. 11.12). Будем считать $\Delta\varphi \geqslant 0$.

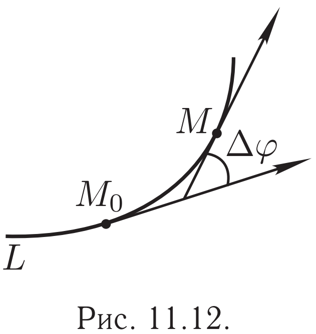


Рис. 11.12.

Через Δl обозначим длину дуги M_0M. Ясно, что чем больше искривленность участка M_0M кривой L, тем на больший угол $\Delta\varphi$ повернется касательная, и наоборот, чем больше угол $\Delta\varphi$ (при заданной длине дуги M_0M), тем больше искривленность участка кривой M_0M. Эти наглядные представления положим в основу определения кривизны кривой.

Определение. *Средней кривизной* участка кривой M_0M называется отношение $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Обозначение: $k_{M_0M} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Кривизной кривой L в точке M_0 называется $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in L}} k_{M_0M}$.

Обозначение: $k(M_0) = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in L}} k_{_{M_0M}}$.

Замечание. Согласно нашему определению кривизна (как средняя, так и в точке) неотрицательна (так как $\triangle\varphi \geqslant 0$, $\triangle l > 0$). Иногда вводят кривизну со знаком, в этом случае знак отражает направление выпуклости кривой.

Примеры.

1) Если L — прямая, то для любого ее отрезка M_0M имеем: $\triangle\varphi = 0$ (рис. 11.13), поэтому $k_{_{M_0M}} = 0$, $k(M_0) = 0$, то есть кривизна прямой (как средняя, так и в каждой точке) равна нулю.

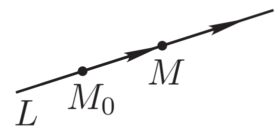


Рис. 11.13.

2) Длина $\triangle l$ дуги M_0M окружности радиуса R выражается формулой $\triangle l = R \cdot \triangle \varphi$ (рис. 11.14), поэтому $k_{_{M_0M}} = \dfrac{\triangle\varphi}{\triangle l} = \dfrac{1}{R}$, $k(M_0) = \dfrac{1}{R}$, то есть как средняя кривизна любой дуги окружности, так и кривизна в каждой ее точке, равны $\dfrac{1}{R}$. Отметим, что при $R \to \infty$ кривизна окружности стремится к нулю, и в этом смысле дуга окружности очень большого радиуса мало отличается от прямой. Заметим, что *прямая и окружность — кривые постоянной кривизны*.

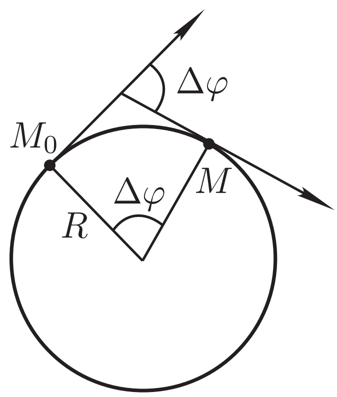


Рис. 11.14.

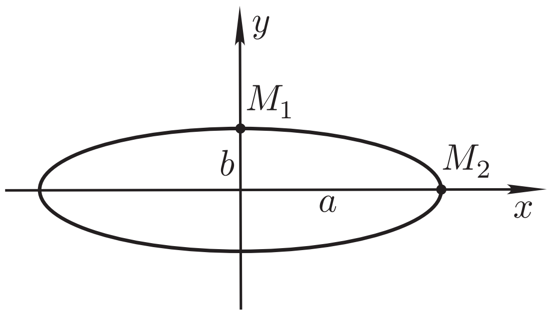


Рис. 11.15.

3) Рассмотрим эллипс, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a > b \quad \text{(рис. 11.15).}$$

Интуитивно ясно, что кривизна эллипса в точке M_1 меньше, чем в точке M_2: $k(M_1) < k(M_2)$. Чтобы доказать это строго, нужно научиться вычислять кривизну в точке.

Вычисление кривизны кривой

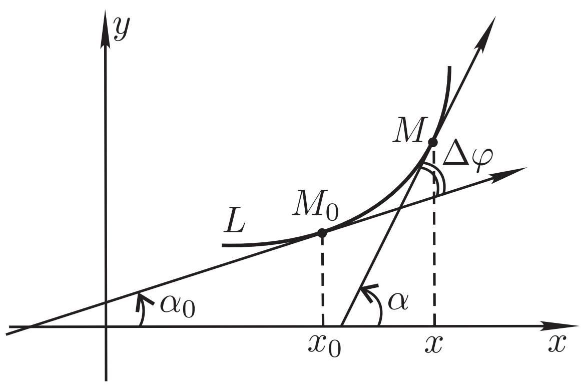


Рис. 11.16.

1) Пусть кривая L задана явным уравнением $y = f(x)$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Обозначим буквой α угол между направленной касательной к кривой L в точке M (при движении в сторону возрастания x) и осью Ox (рис. 11.16). Тогда $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (на рисунке 11.16 $\alpha > 0$). Значение α для точки $M_0(x_0, f(x_0))$ обозначим через α_0. Положим $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, тогда $\Delta\varphi = |\ \Delta\alpha|$. По определению средней кривизны

$$k_{M_0M} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\, l} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta\, l}\right|,$$

а для кривизны в точке M_0 получаем:

$$k(M_0) = \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in L}} k_{M_0M} = \lim_{\Delta l\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta\, l}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{x=x_0}.$$

Величины α и l, где l — длина кривой, отсчитываемая от точки M_0, являются функциями x, а именно: $\alpha = \operatorname{arctg} f'(x)$, поскольку $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, поэтому $d\alpha\Big|_{x=x_0} = \dfrac{f''(x_0)}{1 + f'^2(x_0)}dx$;

$l = l_{M_0M} = \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{1 + f'^2(s)}\,ds$ (см. §13 гл. 5), поэтому $dl\Big|_{x=x_0} =$ $= \sqrt{1 + f'^2(x_0)}\,dx$.

Следовательно, для кривизны кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ получается формула

$$k(M_0) = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{x=x_0} = \frac{|f''(x_0)|}{\left[1 + f'^2(x_0)\right]^{3/2}}. \qquad (11.11)$$

Формула (11.11) показывает, что кривизна $k(M_0)$ тем больше, чем больше $|f''(x_0)|$. В случае прямой, заданной уравнением $y =$

$= kx + b$, функция $f(x) = kx + b$, $f''(x) \equiv 0$ и кривизна во всех точках равна нулю.

Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Построим окружность радиуса $R = \dfrac{1}{k(M_0)}$, которая касается кривой L в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ и имеет в окрестности точки M_0 такое же направление выпуклости, как и кривая L (рис. 11.17). Эта окружность называется *кругом кривизны* кривой L в точке M_0, ее радиус R называется *радиусом кривизны*, а центр — *центром кривизны* кривой L в точке M_0.

Можно доказать (сделайте это самостоятельно), что порядок касания указанной окружности и кривой L в точке M_0 не ниже 2.

Эта окружность называется также *соприкасающейся окружностью* для кривой L в точке M_0.

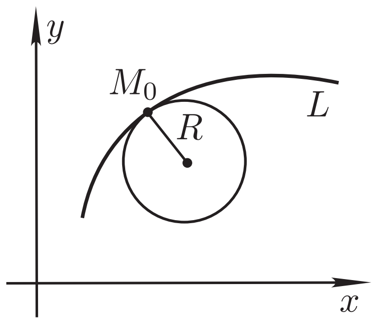


Рис. 11.17.

Пример. Рассмотри параболу, заданную уравнением $y = x^2$, и точку $M_0(0;0)$ на этой параболе (рис. 11.18). Так как в данном примере $f(x) = x^2$, то $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, и по формуле (11.11) получаем: $k(M_0) = 2$ — кривизна параболы в точке M_0. Следовательно, $R = \dfrac{1}{k(M_0)} = \dfrac{1}{2}$ — радиус кривизны параболы в точке M_0, а уравнение соприкасающейся окружности для параболы в точке M_0 имеет вид

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Задание. Докажите (пользуясь теоремой 1 или определением), что порядок касания параболы $y = x^2$ и соприкасающейся окружности в точке M_0 равен 2.

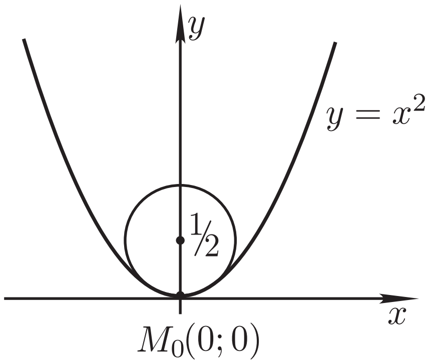


Рис. 11.18.

2) Пусть кривая L задана параметрически:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

параметр t изменяется на некотором промежутке. Тогда

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$d\alpha = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Пусть точка M_0 кривой L имеет координаты $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$. Для кривизны кривой L в точке M_0 получается формула

$$k(M_0) = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|_{t=t_0} = \frac{|\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)|}{\left[\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0)\right]^{3/2}}. \qquad (11.12)$$

Пример. Рассмотрим эллипс (рис. 11.15), заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a > b.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям эллипса:

$$x = a\cos t, \ y = b\sin t, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Здесь $\varphi(t) = a\cos t, \ \psi(t) = b\sin t$, поэтому

$$\varphi'(t) = -a\sin t, \ \psi'(t) = b\cos t, \ \varphi''(t) = -a\cos t, \ \psi''(t) = -b\sin t.$$

Для точки $M(\varphi(t), \psi(t))$ по формуле (11.12) получаем:

$$k(M) = \frac{|ab\sin^2 t + ab\cos^2 t|}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}.$$

На рисунке 11.15 точка M_1 соответствует $t = \pi/2$, а точка M_2 — $t = 0$. Поэтому

$$k(M_1) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}, \quad k(M_2) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2},$$

а поскольку $a > b$, то $k(M_1) < K(M_2)$.

Глава 12

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Площадь плоской фигуры

Под плоской фигурой будем понимать любое множество точек плоскости.

Из курса школьной геометрии известно понятие площади многоугольника. При выбранной единице измерения площадей площадь каждого многоугольника выражается некоторым числом.

Рассмотрим ограниченную плоскую фигуру G. Многоугольник $Q_в$ будем называть *вписанным* в фигуру G, а многоугольник Q_o — *описанным* около фигуры G, если $Q_в \subset G \subset Q_o$ (рис. 12.1). Через $P_в$ и P_o обозначим площади вписанного и описанного многоугольников. Очевидно, что $P_в \leqslant P_o$.

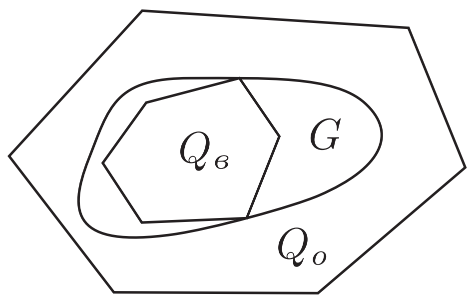


Рис. 12.1.

Пусть $\{P_в\}$ — множество площадей всех вписанных в фигуру G многоугольников. Оно ограничено сверху (площадью любого описанного многоугольника) и, следовательно, существует $\sup\{P_в\}$, который обозначим $\underline{P}$. Если в фигуру G нельзя вписать ни одного многоугольника, то положим $\underline{P} = 0$.

Аналогично, множество $\{P_o\}$ площадей всевозможных описанных многоугольников ограничено снизу (например, числом нуль) и, следовательно, существует $\inf\{P_o\} =: \overline{P}$.

Числа $\underline{P}$ и $\overline{P}$ называются *нижней* и *верхней площадью* фигуры G.

Утверждение: $\underline{P} \leqslant \overline{P}$.

Рис. 12.2.

Если допустить, что $\underline{P} > \overline{P}$ (см. рис. 12.2), то найдутся такие $P_в$ и P_o, для которых выполнено неравенство $P_o < P_в$, чего не может быть. Таким образом, для любых $P_в$ и P_o

выполняются неравенства

$$P_в \leqslant \underline{P} \leqslant \overline{P} \leqslant P_о. \tag{12.1}$$

Определение. Плоская фигура G называется квадрируемой, если $\underline{P} = \overline{P}$. При этом число $P = \underline{P} = \overline{P}$ называется *площадью фигуры G (по Жордану)*.

Примеры.

1. Всякий многоугольник является, очевидно, квадрируемой фигурой в смысле данного определения, и его площадь по Жордану равна площади, введенной в элементарной геометрии.
2. Примером неквадрируемой фигуры является множество точек $G = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x$ и y — рациональные числа$\}$. Так как $\underline{P} = 0$, $\overline{P} = 1$ (обоснуйте это), то $\overline{P} \neq \underline{P}$, поэтому фигура G не квадрируема.

Теорема 1. Для того, чтобы плоская фигура была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовали такие вписанный и описанный многоугольники, для которых $P_о - P_в < \varepsilon$.

Доказательство. 1) *Необходимость*. Пусть G — квадрируемая фигура, то есть $P = \underline{P} = \overline{P}$. Согласно определению точных граней числового множества $\forall \varepsilon > 0$ найдутся такие вписанный и описанный многоугольники, площади которых удовлетворяют неравенствам

$$\underline{P} - P_в < \frac{\varepsilon}{2}, \quad P_о - \overline{P} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая эти неравенства, получаем $P_о - P_в < \varepsilon$, и, тем самым, утверждение о необходимости доказано.

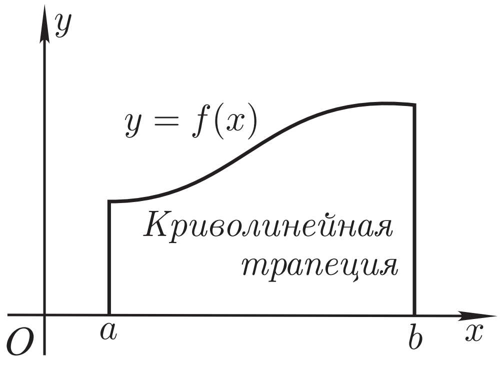


Рис. 12.3.

2) *Достаточность*. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ существуют $Q_в$ и $Q_о$, для которых $P_о - P_в < \varepsilon$. Отсюда и из неравенств (12.1) следует, что $0 \leqslant \overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$, а так как ε — произвольное положительное число, то $\overline{P} - \underline{P} = 0$, то есть $\overline{P} = \underline{P}$. Это и означает (по определению), что фигура G квадрируема. Утверждение о достаточности доказано.

Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на сегменте $[a, b]$ (рис. 12.3). Фигура, ограниченная графиком этой функции, отрезком $[a, b]$ оси Ox и двумя вертикальными отрезками ($x = a$ и $x = b$; каждый из этих отрезков может вырождаться в точку), называется *криволинейной трапецией*.

Теорема 2. Криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь P выражается формулой

$$P = \int\limits_a^b f(x)dx \qquad (12.2)$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте. Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon$, где S и s — верхняя и нижняя суммы этого разбиения. Заметим, что S — площадь описанного около криволинейной трапеции ступенчатого многоугольника ($S = P_o$), а s — площадь вписанного ступенчатого многоугольника ($s = P_в$) (рис. 12.4). Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие вписанный и описанный многоугольники, для которых $P_o - P_в < \varepsilon$. Следовательно, согласно теореме 1, криволинейная трапеция квадрируема.

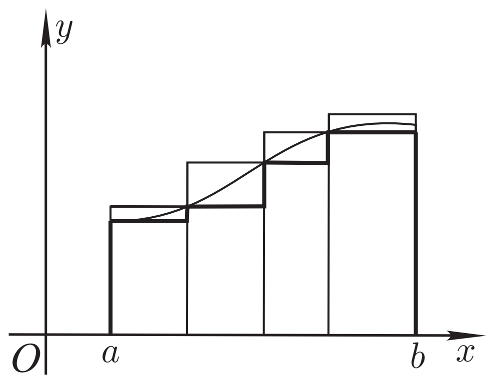


Рис. 12.4.

Пусть ее площадь равна P. Тогда для любых $Q_в$ и Q_o выполняются неравенства $P_в \leqslant P \leqslant P_o$, в частности, $s \leqslant P \leqslant S$. Перейдем в этих неравенствах к пределу при $\Delta \to 0$ (Δ — максимальная длина частичного сегмента разбиения сегмента $[a, b]$). Так как $\lim\limits_{\Delta\to 0} s = \lim\limits_{\Delta\to 0} S = \int\limits_a^b f(x)dx$ (лемма Дарбу), то $P = \int\limits_a^b f(x)dx$. Теорема 2 доказана.

Примеры. 1. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 12.5).

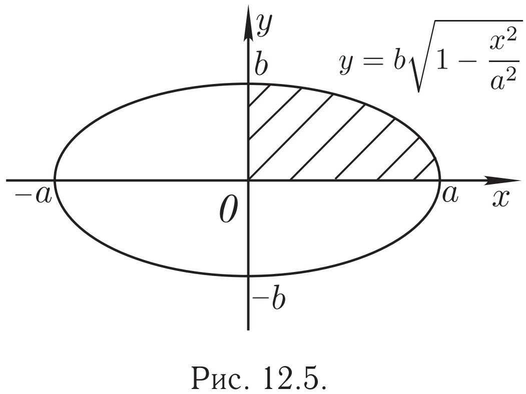


Рис. 12.5.

Искомая площадь P в четыре раза больше площади заштрихованной фигуры, а ее можно вычислить по формуле (12.2), в которой нужно положить $a=0,\ b=a,\ f(x)=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Итак,

$$P=4b\int\limits_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Для вычисления интеграла можно сделать замену переменной $x=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. В результате получим $P=\pi ab$.

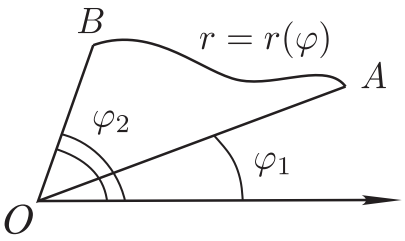


Рис. 12.6.

2. На рис. 12.6 изображена плоская фигура, ограниченная отрезками OA и OB, а также непрерывной кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$$r=r(\varphi),\ \varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2\,.$$

Такая фигура называется *криволинейным сектором*. Площадь P криволинейного сектора выражается формулой

$$P=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2(\varphi)d\varphi.$$

Обоснование этой формулы будет дано ниже.

§ 2. Двойные интегралы

Областью (*открытой областью*) обычно называют любое открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$. Объединение области и ее границы называется *замкнутой областью*. В дальнейшем, если замкнутость не существенна, под словом область будем понимать либо открытую, либо замкнутую область. Если же замкнутость существенна, то будем говорить «замкнутая область».

Введем понятие диаметра множества. Пусть G — ограниченное множество точек в пространстве $\mathbb{R}^n$, в частости, на плоскости, и пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки из G. Числовое множество $\{\rho(M_1,M_2)\}$ ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Число

$$d=\sup_{\substack{M_1\in G\\ M_2\in G}}\{\rho(M_1,M_2)\}$$

называется *диаметром* множества G.

Примеры: диаметр прямоугольника равен его диагонали, диаметр эллипса равен его бо́льшей оси.

Пусть G — квадрируемая (и, следовательно, ограниченная) область (открытая или замкнутая) на плоскости (x, y) и пусть в области G определена ограниченная функция $z = f(x, y) = f(K)$ $(K = (x, y))$. Разобьем область G на n квадрируемых частей G_i: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ (рис. 12.7), так что любые две части G_i и G_j не имеют общих внутренних точек; в каждой части G_i возьмем произвольным образом точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

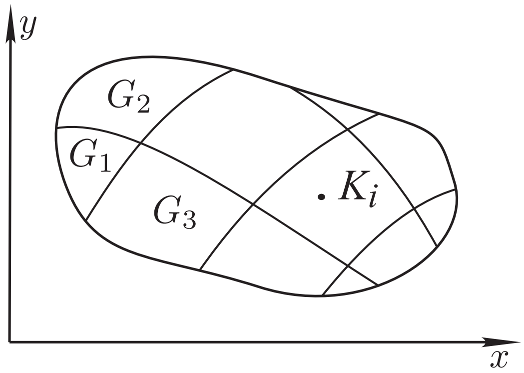


Рис. 12.7.

$$I(G_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(K_i)P(G_i), \text{ где } P(G_i) - \text{площадь } G_i.$$

Число $I(G_i, K_i)$ называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области G и данному выбору промежуточных точек K_i. Введем обозначение: d_i — диаметр G_i, $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$.

Определение *предела интегральных сумм при* $d \to 0$ вводится так же, как для определенного интеграла. Если существует $\lim\limits_{d \to 0} I(G_i, K_i) = I$, то число I называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается так:

$$I = \iint\limits_G f(x, y)dxdy \quad (\text{иногда так: } \int\limits_G f(K)dS),$$

а функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области G.

Геометрический смысл двойного интеграла

Если $f(x, y)$, $(x, y) \in G$ — непрерывная неотрицательная функция, то $\iint\limits_G f(x, y)$ — объем тела, изображенного на рисунке 12.8. Если $f(x, y) = 1$, то любая интегральная сумма такой функции равна $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot P(G_i) = P(G)$ — площади области G, и поэтому $\iint\limits_G dxdy = P(G)$.

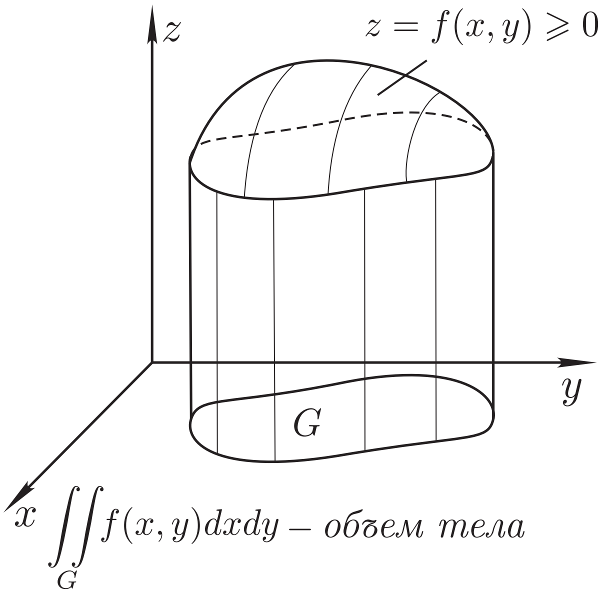


Рис. 12.8.

Многие физические величины выражаются через двойные интегралы. Например, если $\rho(x,y)$ — плотность электрического заряда в области G, то $\iint\limits_G \rho(x,y)dxdy$ — величина заряда, содержащегося в этой области.

Для двойных интегралов можно развить такую же теорию, как для определенных интегралов.

Для произвольного разбиения $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ введем верхнюю и нижнюю суммы Дарбу функции $f(x,y)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i P\left(G_i\right), \; s = \sum_{i=1}^{n} m_i P\left(G_i\right),$$

где $M_i = \sup\limits_{G_i} f(x,y)$, $m_i = \inf\limits_{G_i} f(x,y)$, $P\left(G_i\right)$ — площадь G_i.

Суммы Дарбу обладают такими же свойствами, как и в случае определенного интеграла, в частности, существуют $\underline{I} = \sup\{s\}$, $\overline{I} = \inf\{S\}$, при этом $\underline{I} \leqslant \overline{I}$, $\lim\limits_{d\to 0} s = \underline{I}$, $\lim\limits_{d\to 0} S = \overline{I}$ (лемма Дарбу).

Теорема 3. Для того, чтобы ограниченная в квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируемой в этой области, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I} = \overline{I}$. При этом $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \underline{I} = \overline{I}$.

Теорема 4. Для того, чтобы ограниченная в квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируемой в этой области, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало разбиение области G, у которого $S - s < \varepsilon$.

Теорема 5. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой квадрируемой области, то она интегрируема в этой области.

Определение. Множество точек на плоскости называется *множеством площади нуль*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число многоугольников, содержащих в себе все точки этого множества и имеющих сумму площадей меньшую, чем ε.

Теорема 6. Если функция $f(x,y)$ ограничена в квадрируемой области G и непрерывна в этой области, за исключением множества точек площади нуль, то эта функция интегрируема в области G.

Теоремы 3–6 доказываются так же, как для определенного интеграла.

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные интегралы.

§ 3. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования

1) Сначала рассмотрим случай, когда функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $Q = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$.

Теорема 7. Пусть:

1. существует двойной интеграл $\displaystyle\iint\limits_Q f(x,y)dxdy$,

2. $\forall x \in [a,b]$ существует определенный интеграл $I(x) = \displaystyle\int\limits_c^d f(x,y)dy$.

Тогда существует определенный интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b I(x)dx$ (он называется *повторным* и записывается в виде $\displaystyle\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$) и справедливо равенство

$$\iint\limits_Q f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

то есть двойной интеграл равен повторному.

<u>Доказательство</u>. Разобьем сегмент $[a,b]$ на n частичных сегментов точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, а сегмент $[c,d]$ — на m частичных сегментов точками $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$.

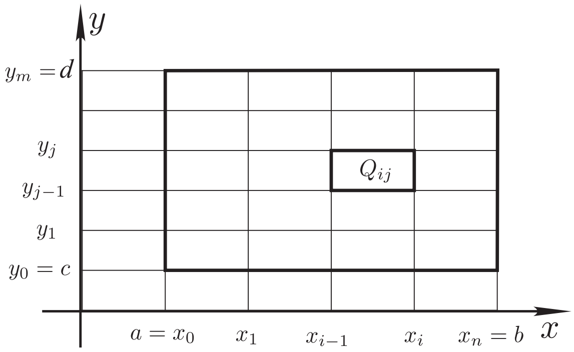


Рис. 12.9.

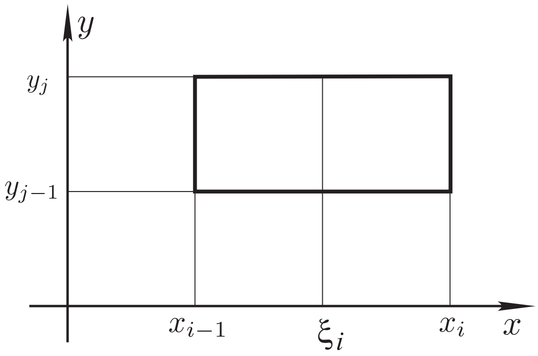


Рис. 12.10.

Проведем через точки разбиения прямые, параллельные осям координат (координатные линии). Прямоугольник Q разобьется на mn частичных прямоугольников (рис. 12.9)

$$Q_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$
$$(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m).$$

Положим $m_{ij} = \inf\limits_{Q_{ij}} f(x, y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{Q_{ij}} f(x, y)$. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, d_{ij}— диаметр Q_{ij}, $d = \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} d_{ij}$. Отметим, что $P(Q_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

На каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольным образом точку ξ_i (рис. 12.10). Так как

$$m_{ij} \leqslant f(\xi_i, y) \leqslant M_{ij} \text{ при } y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j, \text{ то}$$

$$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij} dy \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij} dy$$

или

$$m_{ij} \Delta y_j \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leqslant M_{ij} \Delta y_j \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$$

Просуммируем эти неравенства по j от 1 до m при каждом i:

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta y_j \leqslant \int\limits_{c}^{d} f(\xi_i, y) dy \leqslant \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta y_j.$$

Заметим, что средняя часть неравенств есть $I(\xi_i)$.
Умножим эти неравенства на Δx_i и просуммируем по i от 1 до n:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j.$$

Средняя часть полученных неравенств является интегральной суммой функции $I(x)$, соответствующей разбиению сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, а левая и правая части — нижней и верхней суммами функции $f(x, y)$, соответствующими разбиению прямоугольника Q на частичные прямоугольники Q_{ij} (поскольку $\Delta x_i \cdot \Delta y_j = P(Q_{ij})$).

Перейдем к пределу при $d \to 0$. Тогда все $\Delta x_i \to 0$. Из условия 1) в силу теоремы 3 и леммы Дарбу следует, что пределы левой и правой частей неравенств равны двойному интегралу $\iint\limits_{Q} f(x, y)dxdy$. Следовательно, существует предел средней части, а это и есть по определению интеграл $\int\limits_{a}^{b} I(x)dx$. В результате получаем равенство

$$\iint\limits_{Q} f(x, y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} I(x)dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x, y)dy.$$

Теорема доказана.

Замечание. Поменяв в условиях теоремы 7 местами x и y, получим равенство

$$\iint\limits_{Q} f(x, y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x, y)dx.$$

Пример. Пусть $Q = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

$$\iint\limits_{Q} xe^{xy}dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} xe^{xy}dy = \int\limits_{0}^{1} dx \cdot e^{xy}\Big|_{y=0}^{y=1} = \int\limits_{0}^{1} (e^x - 1)dx =$$

$= (e^x - x)\big|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2.$

Задание. Попробуйте вычислить этот двойной интеграл, интегрируя сначала по x, а потом по y, и посмотрите, что из этого получится.

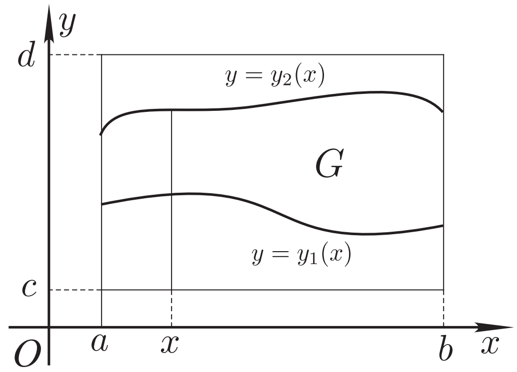


Рис. 12.11.

2) Пусть теперь функция $f(x,y)$ определена в области $G = \{(x,y) : y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции (рис. 12.11).

Теорема 7′. Пусть:

1. существует двойной интеграл $\displaystyle\iint_G f(x,y)dxdy$,

2. $\forall x \in [a,b]$ существует определенный интеграл $I(x) = \displaystyle\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

и он равен двойному интегралу:

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Теорема $7'$ доказывается путем введения прямоугольника $Q = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant y, c \leqslant y \leqslant d\}$, содержащего область G (рис. 12.11), и применения теоремы 7 к функции

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in G, \\ 0\,, & (x,y) \in Q \backslash G. \end{cases}$$

Примеры.

1. Область G ограничена прямой $y = x$ и параболой $y = x^2$ (рис. 12.12). Вычислить $I = \iint\limits_G xy^2 dxdy$.

1-й способ.

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2 dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x\left(x^3 - x^6\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{40}.$$

2-й способ. $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx = \ldots = \dfrac{1}{40}.$

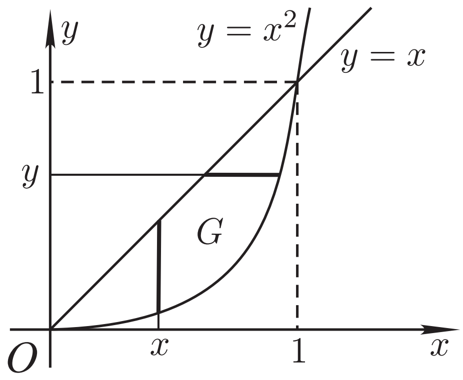


Рис. 12.12.

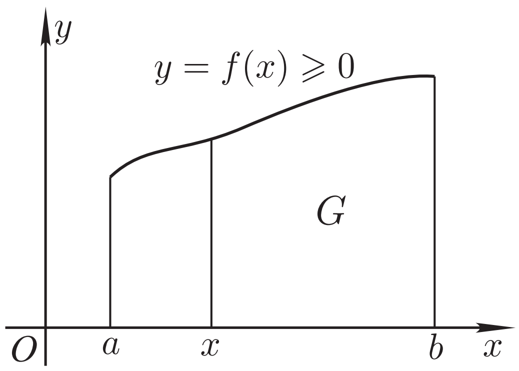


Рис. 12.13.

2. Область G — криволинейная трапеция (рис. 12.13).

$$P(G) = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} dy = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Еще раз получили формулу площади криволинейной трапеции.

§ 4. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$. Перейдем от переменных (x,y) к новым переменным (u,v) посредством формул

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v), \quad (u,v) \in g. \tag{12.3}$$

При некоторых условиях на область G, функцию $f(x,y)$ и функции (12.3) имеет место формула

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_g f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv, \quad (12.4)$$

где

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{vmatrix}$$ — якобиан функций (12.3) по u и v.

Формула (12.4) называется *формулой замены переменных в двойном интеграле*.

Рассмотрим (нестрогий) вывод формулы (12.4). Пусть функции (12.3) удовлетворяют условиям:

I. Если точка (u,v) пробегает область g, то точка $(x,y) = (\varphi(u,v),\psi(u,v))$ пробегает область G, причем различным точкам (u,v) из области g соответствуют различные точки (x,y) из области G.

II. Функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ имеют в области g непрерывные частные производные первого порядка.

III. $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall\,(u,v)\in g$.

Зафиксируем переменную u, положив $u = u_0 = const$. Тогда из уравнений (12.3) получим:

$$x = \varphi(u_0,v),\ y = \psi(u_0,v). \quad (12.5)$$

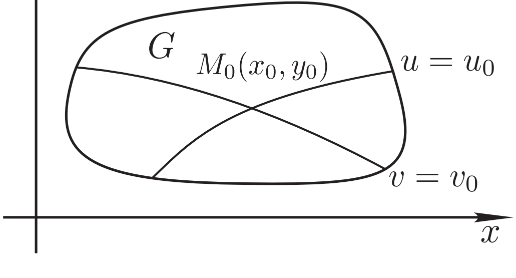


Рис. 12.14.

Уравнения (12.5) являются параметрическими уравнениями кривой, лежащей в области G (роль параметра играет v). Аналогично, положив $v = v_0 = const$, получим параметрические уравнения другой кривой, лежащей в области G:

$$x = \varphi(u,v_0),\ y = \psi(u,v_0), \quad (12.6)$$

u — параметр. Кривые (12.5) и (12.6) пересекаются в точке $M_0(x_0,y_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0,v_0)$, $y_0 = \psi(u_0,v_0)$ (рис. 12.14).

В силу условия I точка $M_0(x_0, y_0)$ соответствует только одной точке (u_0, v_0) из области g. Таким образом, точка M_0 однозначно определяется парой чисел (u_0, v_0). Поэтому эти числа можно рассматривать как *новые координаты точки* M_0. Кривая (12.5), на которой координата u постоянна, а меняется только координата v, называется *координатной v-линией*, а кривая (12.6) — *координатной u-линией*. Так как координатные линии (12.5) и (12.6), вообще говоря, кривые, то числа u_0 и v_0 называются *криволинейными координатами точки* M_0.

Итак, равенства (12.3) можно рассматривать как формулы, посредством которых в области G вводятся криволинейные координаты точек.

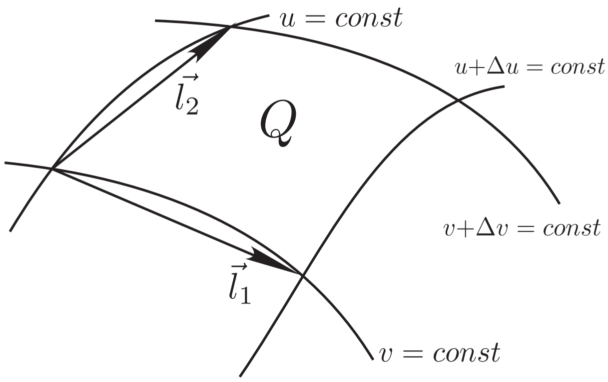


Рис. 12.15.

Рассмотрим две пары близких координатных линий в области G. Они ограничивают криволинейный четырехугольник Q (рис. 12.15). Вычислим приближенно площадь этого четырехугольника, заменив его параллелограммом, построенным на векторах $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$.

$$\begin{aligned}\vec{l_1} &= \{\varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u, v), \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u, v)\} = \\ &= \left\{\varphi'_u \cdot \Delta u, \psi'_u \cdot \Delta u\right\}, \\ \vec{l_2} &= \left\{\varphi'_v \cdot \Delta v, \psi'_v \cdot \Delta v\right\},\end{aligned}$$

где производные φ'_u, ψ'_u, φ'_v, ψ'_v берутся в некоторых промежуточных точках.

$$P(Q) \approx \left|\left[\vec{l_1} \times \vec{l_2}\right]\right| = \left|\,\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi'_u\Delta u & \psi'_u\Delta u & 0 \\ \varphi'_v\Delta v & \psi'_v\Delta v & 0 \end{vmatrix}\,\right| =$$

$$= \left|\left(\varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u\right)\Delta u \cdot \Delta v \cdot \vec{k}\right| \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\widetilde{u},\widetilde{v})} \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

(считаем $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$), $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ — какая-нибудь точка криволинейного четырехугольника.

Разобьем область g на частичные области g_{ij} отрезками прямых $u = u_i$ и $v = v_j$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$ (рис. 12.16).

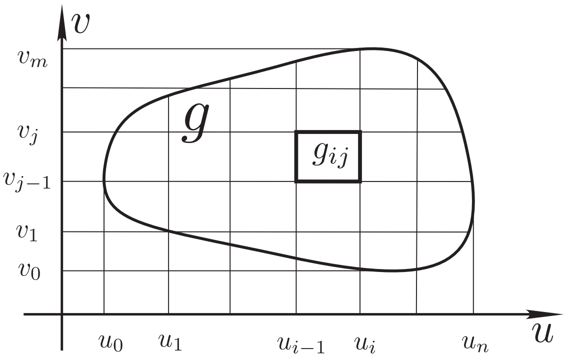


Рис. 12.16.

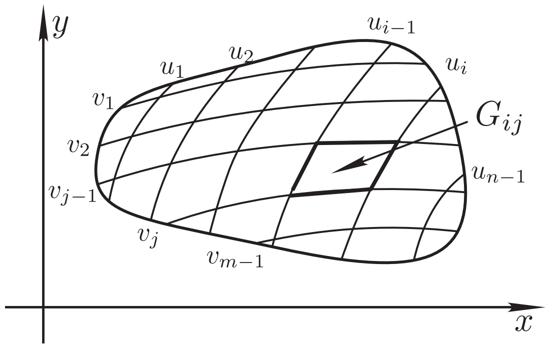


Рис. 12.17.

При этом область G разобьется на частичные области G_{ij} координатными u и v-линиями (рис. 12.17): $G = \bigcup\limits_{i,j} G_{ij}$.

Положим $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$, $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$.

В каждой частичной области G_{ij} возьмем в качестве промежуточной точки точку $K_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$, где $x_{ij} = \varphi(\widetilde{u}_i, \widetilde{v}_j)$, $y_{ij} = \psi(\widetilde{u}_i, \widetilde{v}_j)$, и составим интегральную сумму функции $f(x, y)$ для полученного разбиения области G. Учитывая, что

$$P(G_{ij}) \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\widetilde{u}_i, \widetilde{v}_j)} \cdot \Delta u_i \cdot \Delta v_j,$$

получаем

$$\begin{aligned} I(G_{ij}, K_{ij}) &= \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) P(G_{ij}) \approx \\ &\approx \sum_{i,j} f\left(\varphi(\widetilde{u}_i, \widetilde{v}_j), \psi(\widetilde{u}_i, \widetilde{v}_j)\right) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\widetilde{u}_i, \widetilde{v}_j)} \cdot \Delta u_i \cdot \Delta v_j. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Так как $\Delta u_i \Delta v_j = P(g_{ij})$, то сумма в правой части равенства (12.7) является интегральной суммой для функции $f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$, соответствующей разбиению области g на частичные области $g_{i,j}$ (в рамках нашего нестрогого вывода не обращаем внимания на то, что примыкающие к границе частичные области g_{ij} не являются прямоугольниками).

Пусть g и G — замкнутые квадрируемые области, а функция $f(x, y)$ ограничена в области G и непрерывна всюду, кроме, быть может, множества точек площади нуль. Тогда, перейдя в равенстве (12.7) к пределу при $d \to 0$ (d — максимальный диаметр g_{ij}), получим равенство (12.4):

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_g f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

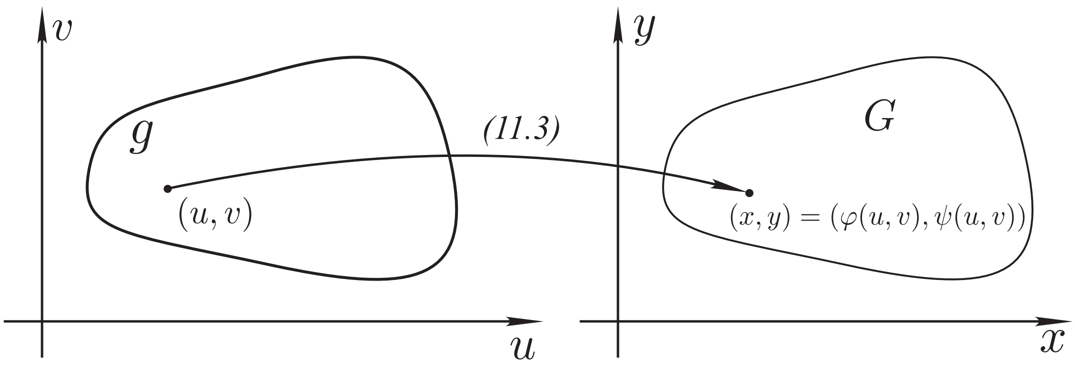


Рис. 12.18.

<u>Замечания</u>.

1. Равенства (12.3) можно рассматривать как формулы, задающие отображение области g на плоскости (u, v) на область G на плоскости (x, y) (рис. 12.18).
Область g — прообраз области G, область G — образ области g при отображении (12.3).
2. При $f(x, y) = 1$ из формулы (12.4) следует:

$$\iint\limits_G dxdy = P(G) = \iint\limits_g \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| dudv$$

— формула площади области G в криволинейных координатах. Произведение $dxdy$ можно назвать *элементом площади в декартовых прямоугольных координатах*: $ds = dxdy$, а $ds = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| dudv$ — *элемент площади в криволинейных координатах*.

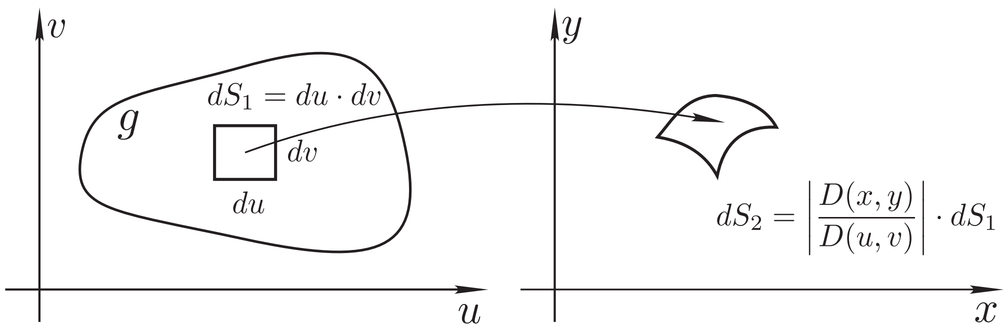


Рис. 12.19.

Геометрический смысл якобиана $\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|$: модуль якобиана — коэффициент растяжения площади при отображении (12.3) (рис. 12.19).

3. Если условия I или III нарушаются на множестве точек площади нуль (например, в конечном числе точек или кривых), то формула (12.4) остается в силе.
4. Если область g — прямоугольник, а φ и ψ — линейные функции u и v: $\varphi = a_{11}u + a_{12}v + b_1$, $\psi = a_{21}u + a_{22}v + b_2$, то проведенный вывод формулы (12.4) становится строгим (все приближенные равенства становятся точными).

Примеры.

1. *Полярные координаты.*

Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x, y) и полярные координаты (r, φ):

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \quad (r \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi) \tag{12.8}$$

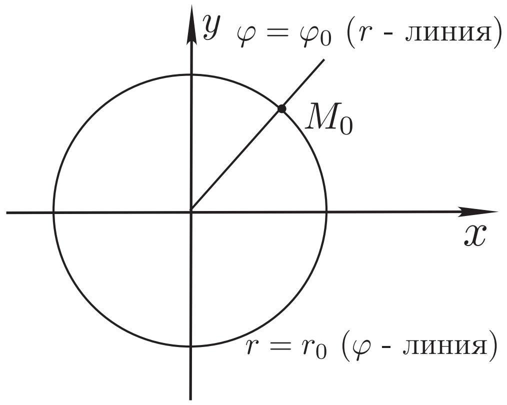


Рис. 12.20.

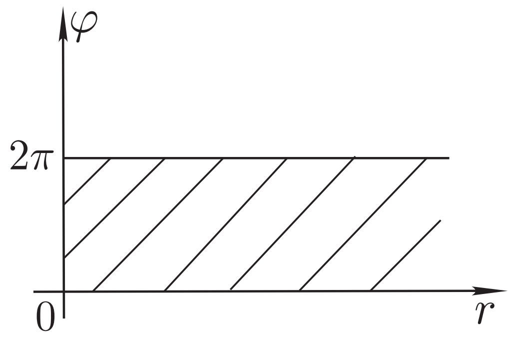


Рис. 12.21.

Пара чисел (r_0, φ_0) — полярные координаты точки M_0 (рис. 12.20). С другой стороны, равенства (12.8) задают отображение заштрихованной полуполосы на плоскости (r, φ) (рис. 12.21) на всю плоскость (x, y).

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\ .$$

Якобиан равен нулю на отрезке $[r = 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi]$ — множестве точек площади нуль, поэтому формулу (12.4) можно применять; $ds = r dr d\varphi$ — элемент площади в полярных координатах.

2. Вычислить $I = \displaystyle\iint\limits_G \left(x^2 + 2y^2\right) dxdy$, где $G = \left\{(x, y) : a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2\right\}$ — кольцо (рис. 12.22).

Замена переменных: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; $(r, \varphi) \in g = \left\{(r, \varphi) : a \leqslant r \leqslant b,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}$ — прямоугольник (рис. 12.23).

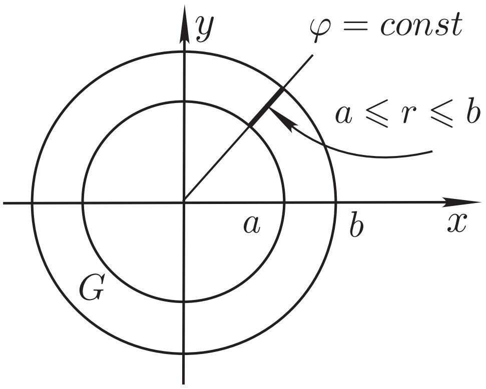


Рис. 12.22.

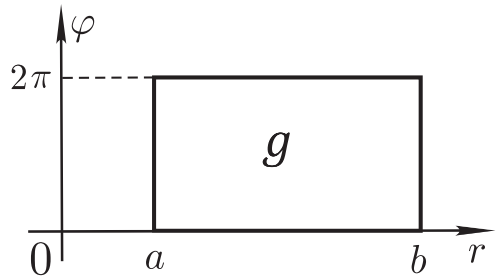


Рис. 12.23.

$$I = \iint\limits_{g} \left(r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi\right) r dr d\varphi =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} dr \cdot r^3 \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} + 2\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{3\pi}{4}\left(b^4 - a^4\right).$$

3. *Площадь криволинейного сектора.*

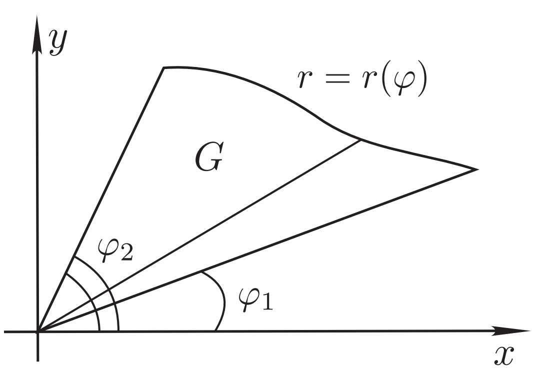


Рис. 12.24.

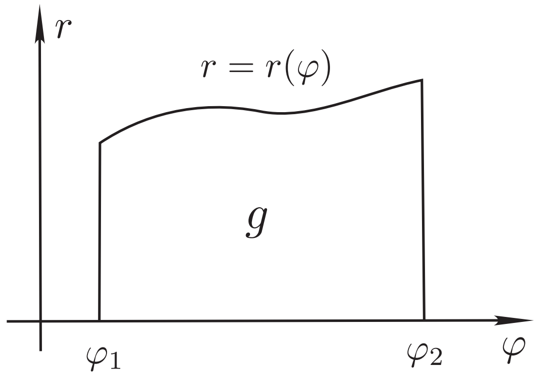


Рис. 12.25.

Область G на плоскости (x, y) — криволинейный сектор (рис. 12.24). Ее прообраз на плоскости (r, φ) — криволинейная трапеция g (рис. 12.25).

$$P(G) = \iint\limits_G dxdy =$$

(делаем замену переменных $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$)

$$= \iint\limits_g rdrd\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} rdr = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{r(\varphi)} = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

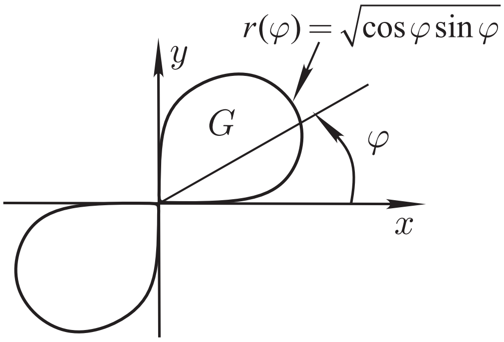


Рис. 12.26.

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{ab} \ (a > 0, b > 0).$$

$$P(G) = \iint\limits_G dxdy.$$

Замена переменных:

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi$$

(*обобщенные полярные координаты*).

Уравнение кривой в новых координатах: $r^4 = r^2\cos\varphi\sin\varphi$, откуда $r = \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right.$, рис. 12.26).

Так как $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$, то

$$P(G) = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} abrdr = ab\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{ab}{2}.$$

§ 5. Тройные интегралы

Тройные (и также n-кратные) интегралы вводятся аналогично двойным интегралам. Понятия кубируемости и объема тела (области) в трехмерном пространстве вводятся аналогично понятию площади плоской фигуры с использованием множеств всевозможных вписанных и описанных для данного тела многогранников.

Пусть в кубируемой области $T \subset \mathbb{R}^3$ задана ограниченная функция $u = f(x,y,z) = f(M)$. Разобьем область T на n кубируемых частей без общих внутренних точек у любых двух частей: $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, в каждой части T_i возьмем произвольным образом точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим *интегральную сумму*

$$I(T_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot V(T_i),$$

где $V(T_i)$ — объем T_i. Пусть d_i — диаметр T_i, $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$.

Предел интегральных сумм при $d \to 0$ называется *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области T и обозначается так:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{или} \quad \int\limits_T f(M)dV.$$

Для тройных интегралов имеют место теоремы, аналогичные теоремам 3 – 6 для двойных интегралов. Если $f(x,y,z) = 1$, то $\iiint\limits_T dxdydz = V(T)$ — объем тела T.

Физический пример: если $\rho(x,y,z)$ — плотность материального тела T в точке (x,y,z), то $\iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz = m$ — масса тела T.

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как и двойные интегралы.

Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования

1) Рассмотрим область

$$T = \{(x,y,z) : (x,y) \in G,\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\},$$

где G — квадрируемая область на плоскости (x,y), $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ — непрерывные в области G функции (рис. 12.27). Пусть в области T задана ограниченная функция $u = f(x,y,z)$.

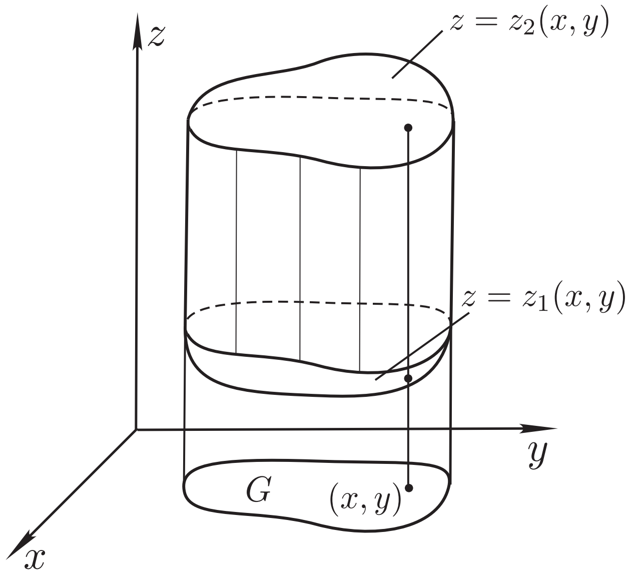


Рис. 12.27.

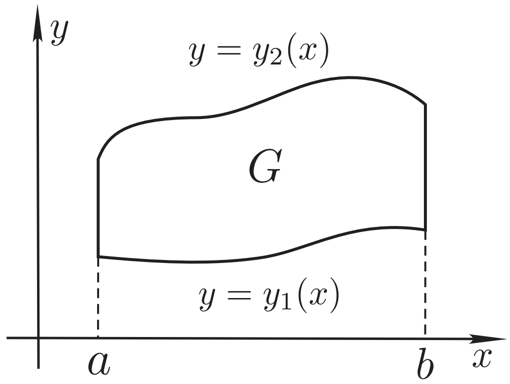


Рис. 12.28.

Теорема 8. Пусть

1) существует тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$;

2) $\forall (x,y) \in G$ существует определенный интеграл

$$I(x,y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Тогда существует повторный интеграл $\iint\limits_G I(x,y)dxdy$ (его записывают в виде $\iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$) и он равен тройному интегралу:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Теорема 8 доказывается аналогично теореме $7'$.

Следствие. Если для двойного интеграла $\iint\limits_G I(x,y)dxdy$ выполнено условие теоремы $7'$, то его можно представить в виде повторного интеграла (см. рис. 12.28):

$$\iint\limits_G I(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к трехкратному вычислению определенных интегралов.

Пример 1. Область T ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$ и $z=1$ (рис. 12.29). Вычислить $I = \iiint\limits_T (x^2+y^2)dxdydz$.

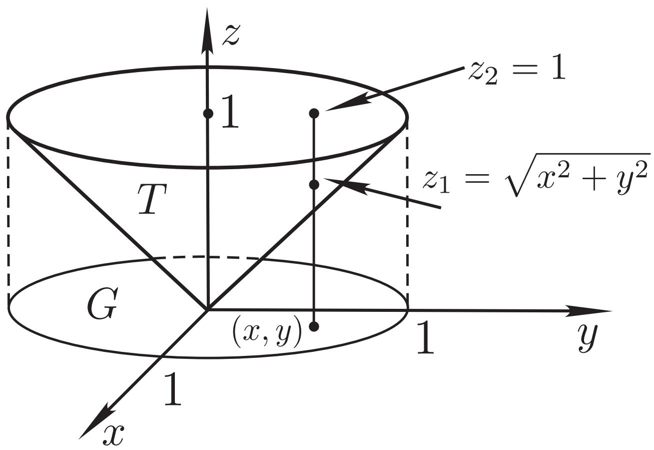


Рис. 12.29.

$$I = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \left(x^2+y^2\right) dz = \iint\limits_G dxdy \left(x^2+y^2\right)\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

где G — круг радиуса 1 с центром в начале координат на плоскости (x,y).

В двойном интеграле по области G перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2(1-r)rdr = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

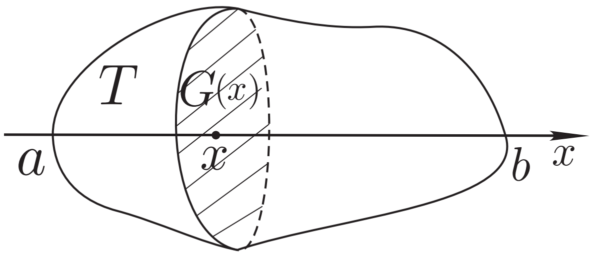


Рис. 12.30.

2) Пусть в сечении кубируемой области T плоскостью $x = const$ получается квадрируемая фигура $G(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 12.30). Пусть в области T задана функция $f(x, y, z)$.

Теорема 9. Пусть

1) существует тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz$;

2) $\forall x \in [a, b]$ существует двойной интеграл

$$I(x) = \iint\limits_{G(x)} f(x, y, z)dydz.$$

Тогда существует интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx$ (он называется повторным и записывается в виде $\int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x, y, z)dydz$) и выполняется равенство

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x, y, z)dydz,$$

то есть тройной интеграл равен повторному.

Следствие. Если $f(x, y, z) = 1$, то по данной формуле получаем:

$$\iiint\limits_T dxdydz = V(T) = \int\limits_a^b dx \underbrace{\iint\limits_{G(x)} dydz}_{P(x)} = \int\limits_a^b P(x)dx,$$

где $P(x)$ — площадь фигуры $G(x)$.

Пример 2. Тот же интеграл, что в примере 1:

$$I = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{G(z)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy \text{ (рис. 12.31).}$$

Во внутреннем интеграле перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leqslant r \leqslant z$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Получим

$$\iint\limits_{G(z)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{z} r^2 \cdot r \cdot dr = \frac{\pi}{2} z^4.$$

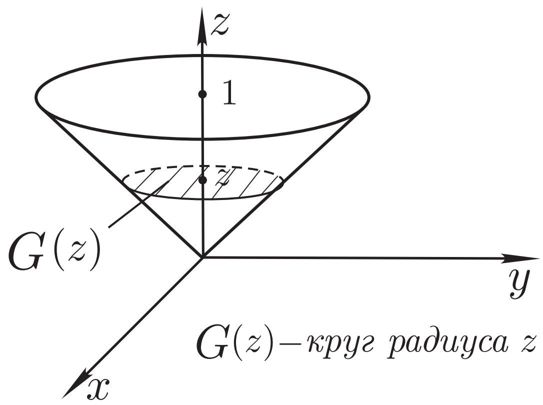


Рис. 12.31.

Следовательно $I = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\int\limits_0^1 z^4 dz = \dfrac{\pi}{10}$.

Замена переменных в тройном интеграле

Рассмотрим тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$. Перейдем от переменных (x,y,z) к новым переменным (u,v,w) с помощью формул

$$x = \varphi(u,v,w),\ y = \psi(u,v,w),\ z = \chi(u,v,w),\ (u,v,w) \in g. \quad (12.9)$$

Пусть выполнены условия:

I. Если точка (u,v,w) пробегает область g, то соответствующая точка $(x,y,z) = (\varphi,\psi,\chi)$ пробегает область T, причем различным точкам $(u,v,w) \in g$ соответствуют различные точки $(x,y,z) \in T$ (иначе говоря, каждая точка (x,y,z) из области T соответствует только одной точке (u,v,w) из области g).

II. Функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные первого порядка в области g.

III. $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0\ \forall (u,v,w) \in g$.

Из условия I следует, что задание тройки чисел (u,v,w) однозначно определяет точку $M(x,y,z) = M(\varphi,\psi,\chi)$ из области T. Поэтому тройку чисел (u,v,w) можно назвать новыми (*криволинейными*) координатами точки M.

Зафиксируем значение координаты u, положив $u = u_0 = const$. Из уравнений (12.9) получим:

$$x = \varphi(u_0,v,w),\ y = \psi(u_0,v,w),\ z = \chi(u_0,v,w).$$

Эти уравнения являются *параметрическими уравнениями* некоторой *поверхности* в области T (в качестве параметров выступают переменные v и w). Естественно назвать эту поверхность *координатной поверхностью*.

Аналогично, положив $v = v_0$, или $w = w_0$, получим другие координатные поверхности.

Зафиксируем теперь значения двух координат, положив $u = u_0$, $v = v_0$. Из уравнений (12.9) получим:

$$x = \varphi(u_0, v_0, w),\ y = \psi(u_0, v_0, w),\ z = \chi(u_0, v_0, w).$$

Это — параметрические уравнения некоторой кривой в области T (параметром является переменная w). Естественно назвать эту кривую *координатной w-линией*. Аналогично определяются координатные u-линия и v-линия.

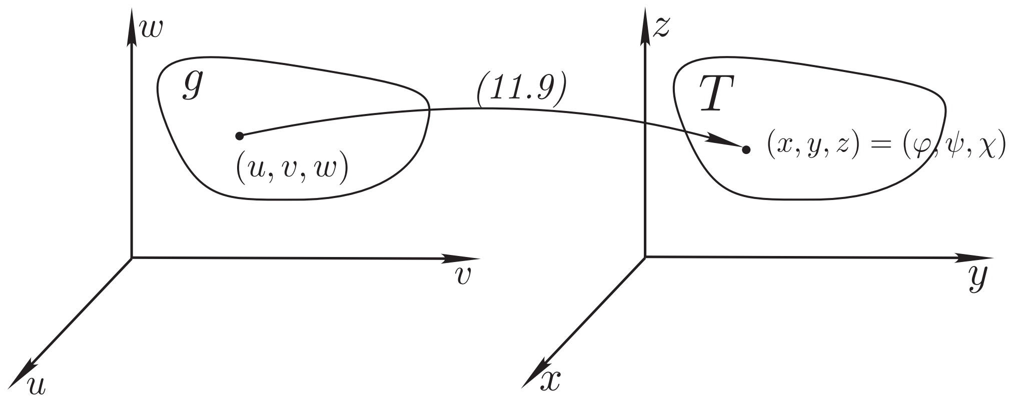


Рис. 12.32.

Формулы (12.9) можно рассматривать как *отображение* области g в пространстве переменных (u, v, w) на область T в пространстве переменных (x, y, z) (рис. 12.32).

Пусть g и T — замкнутые кубируемые области, а функция $f(x, y, z)$ ограничена в области T и непрерывна всюду в этой области, за исключением, быть может, множества точек объема нуль. Тогда справедлива формула:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_g f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| \cdot dudvdw. \qquad (12.10)$$

Формула (12.10) *называется формулой замены переменных в тройном интеграле.*

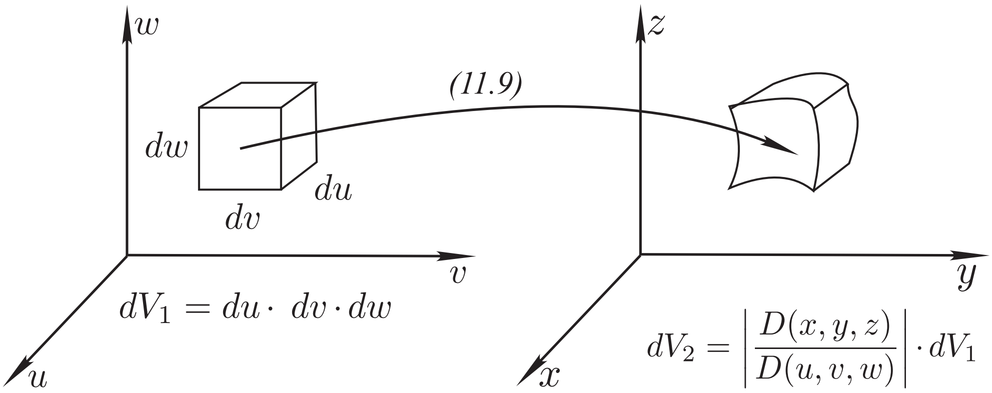


Рис. 12.33.

Если $f(x,y,z)=1$, то из формулы (12.10) получаем выражение объема тела в криволинейных координатах:

$$\iiint\limits_{t} dxdydz = V(T) = \iiint\limits_{g} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

$dV = dxdydz$ — элемент объема в прямоугольных координатах,

$dV = \left|\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$ — элемент объема в криволинейных координатах (рис. 12.33).

Модуль якобиана — коэффициент растяжения объема при отображении (12.9).

Замечание. Понятие множества точек объема нуль в пространстве вводится аналогично понятию множества точек площади нуль на плоскости. Формула (12.10) остается в силе, если условия I или III нарушаются на множестве точек объема нуль.

Примеры наиболее важных криволинейных координат

1) *Цилиндрические координаты.* Тройка чисел (r,φ,z) называется *цилиндрическими координатами* точки M (рис. 12.34). Координатная поверхность $r = const$ — цилиндрическая поверхность. Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x,y,z) и цилиндрические координаты:

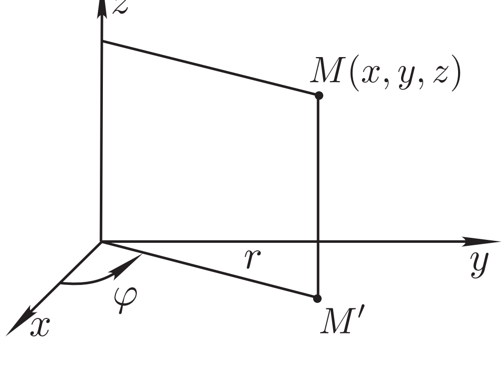


Рис. 12.34.

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z \quad (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$$

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$; $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$ — элемент объема в цилиндрических координатах.

2) *Сферические координаты.* Тройка чисел (r,θ,φ) — *сферические координаты* точки M (рис. 12.35). Координатная поверхность $r = const$ — сфера. Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x,y,z) и сферические координаты:

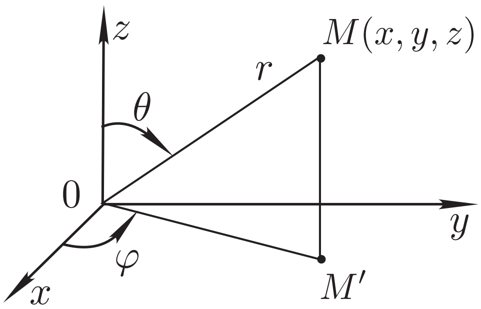


Рис. 12.35.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$
$$(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$, $dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ — элемент объема в сферических координатах.

Пример. Найти объем тела T, ограниченного поверхностью: $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ (рис. 12.36).

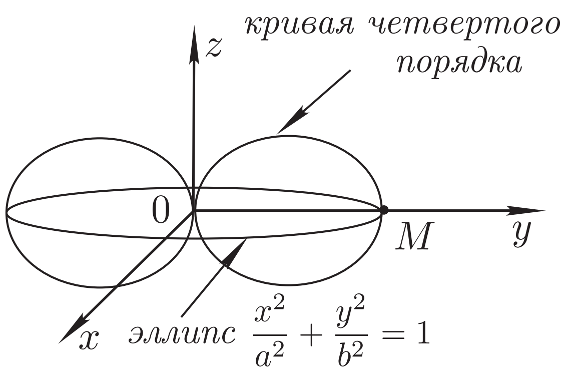


Рис. 12.36.

В сечении поверхности плоскостью $z = 0$ получаются эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и точка $O(0,0,0)$. В сечении плоскостью $x = 0$ получается кривая 4-го порядка $\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{y^2}{b^2}$. При повороте вокруг оси Oz эта кривая деформируется каким-то образом, оставаясь замкнутой кривой, а точка M движется по эллипсу. В результате получается «бублик» без дырки.

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz\,.$$

Перейдем к обобщенным сферическим координатам

$$\begin{aligned} x &= ar\sin\theta\cos\varphi,\\ y &= br\sin\theta\sin\varphi, \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)\,.\\ z &= cr\cos\theta, \end{aligned}$$

Уравнение поверхности в новых координатах:

$$r^4 = r^2 \sin^2 \theta\,.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$r = 0 \ \text{ и } \ r = \sin\theta\,.$$

Тело g, ограниченное этими поверхностями, изображено на рис. 12.37.

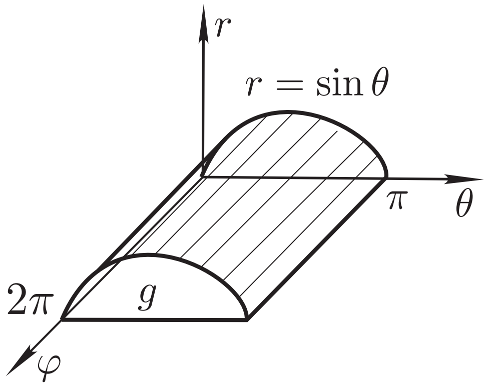


Рис. 12.37.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2 \sin\theta\,.$$

$$V = \iiint\limits_g \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right| drd\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\sin\theta} abcr^2 \sin\theta dr =$$

$$= 2\pi abc \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{\sin\theta} d\theta = \frac{2}{3}\pi abc \int\limits_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

Глава 13

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Длина кривой

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим множество точек $\{M(x,y)\}$, координаты которых задаются уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{13.1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Если некоторая точка $M(x,y)$ из этого множества соответствует нескольким значениям $t \in [\alpha, \beta]$, то такую точку назовем *кратной*.

Пусть различным значениям $t \in [\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки $M(x,y)$, то есть множество $M(x,y)$ не содержит кратных точек. Тогда множество $\{M(\varphi(t), \psi(t))\}$, где $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, назовем *простой плоской незамкнутой кривой*. Переменную t назовем параметром и будем говорить, что *уравнения* (13.1) *задают кривую параметрически*.

Точки $A\,(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и $B\,(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ назовем *граничными точками* или *концами кривой*. Саму кривую называют также *кривой AB* или *дугой AB*. Если точки A и B совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется *простой замкнутой кривой*.

Примеры.

1) $x = \cos t, \quad y = \sin t$;

а) если $0 \leqslant t \leqslant \pi$, то кривая — простая незамкнутая (полуокружность);

б) если $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, то кривая — простая замкнутая (окружность);

в) если $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$, то кривая — не простая (все ее точки — двукратные, кроме точки $(1;0)$, которая является трехкратной).

2) График непрерывной функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ можно рассматривать как простую незамкнутую кривую, записав ее параметрические уравнения в виде

$$x = t, \quad y = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Рассмотрим простую (замкнутую или незамкнутую) кривую, заданную уравнениями (13.1). Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta.$$

Каждому значению t_i соответствует точка $M_i\,(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ на кривой (рис. 13.1). Впишем в кривую ломаную $AM_1M_2...B$.

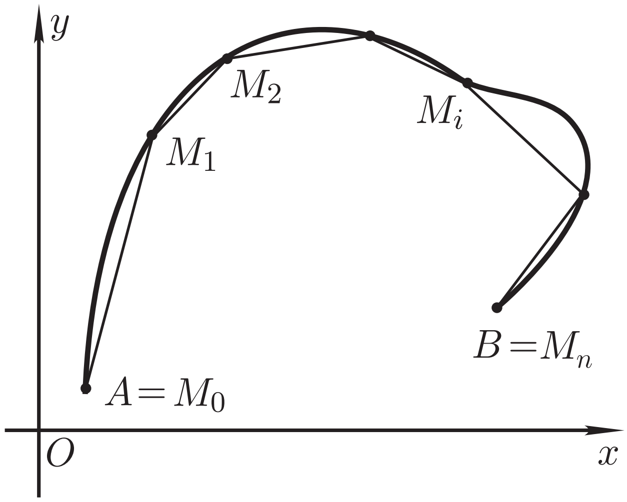


Рис. 13.1.

Длина Δl_i i-го звена ломаной равна (рис. 13.2)

$$\Delta l_i = \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}\,,$$

а длина $l(t_i)$ всей ломаной выражается равенством

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}\,. \tag{13.2}$$

Пусть $\Delta t = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Определение. Число l называется пределом длин ломаных $l(t_i)$ при $\Delta t \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$, выполняется неравенство

$$0 \leqslant l - l(t_i) < \varepsilon.$$

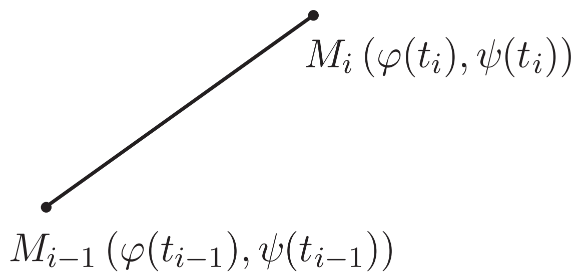


Рис. 13.2.

Если существует $\lim\limits_{\Delta \to 0} l(t_i) = l$, то кривая называется *спрямляемой*, а число l называется *длиной кривой* (иногда говорят «длиной дуги кривой»).

Теорема 1. Пусть простая кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

и пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$.
Тогда кривая спрямляема, и ее длина l выражается формулой

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{13.3}$$

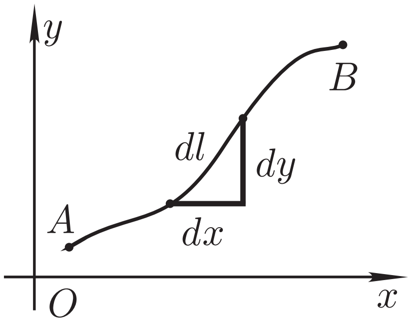


Рис. 13.3.

а) Доказательство «на пальцах» (рис. 13.3).

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt,$$
$$dy = d\psi(t) = \psi'(t)dt,$$
$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt,$$

поэтому

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

б) «Аккуратное» доказательство.
Нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta \to 0} l(t_i) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{13.4}$$

Длина ломаной $l(t_i)$ выражается формулой (13.2). По формуле Лагранжа конечных приращений получаем равенства:

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i, \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i],$$
$$\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\xi_i^*)\Delta t_i, \quad \xi_i^* \in [t_{i-1}, t_i].$$

Следовательно,

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i^*)}\, \Delta t_i.$$

Введем функцию $f(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$. Она непрерывна и, следовательно, интегрируема на сегменте $[\alpha, \beta]$. Интегральная сумма этой функции, соответствующая разбиению сегмента $[\alpha, \beta]$ на частичные сегменты $[t_{i-1}, t_i]$ и выбору точек ξ_i в качестве промежуточных точек, имеет вид

$$I(t_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)}\,\Delta t_i.$$

По определению определенного интеграла

$$\lim_{\Delta t \to 0} I(t_i, \xi_i) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \tag{13.5}$$

В силу (13.5) для обоснования равенства (13.4) достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} (l(t_i) - I(t_i, \xi_i)) = 0.$$

Для этого нам понадобится вспомогательное алгебраическое неравенство

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leqslant |b - c|. \tag{13.6}$$

Геометрическое доказательство справедливости этого неравенства представлено на рис. 13.4: согласно неравенству треугольника выполнено неравенство (13.6). Используя неравенство (13.6), а также выражения для $l(t_i)$ и $I(t_i, \xi_i)$, получаем:

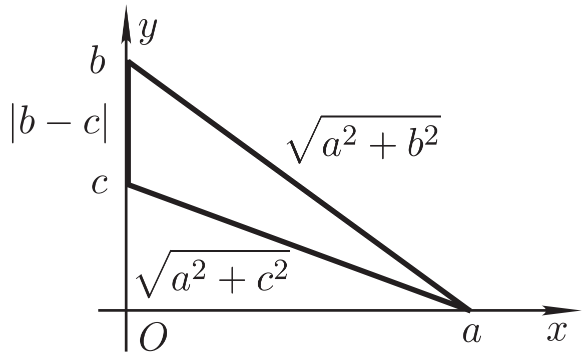


Рис. 13.4.

$$|l(t_i) - I(t_i, \xi_i)| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i^*)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \right) \Delta t_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\psi'(\xi_i^*) - \psi'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $\psi'(t)$ по условию непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, то $\exists \delta > 0$, такое, что при $\Delta t_i < \delta$ будет выполнено неравенство

$$|\psi'(\xi_i^*) - \psi'(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

Следовательно, при $\Delta t_i < \delta, \quad i = 1, 2, ..., n$ (то есть при $\Delta t < \delta$), выполняется неравенство

$$|l(t_i) - I(t_i, \xi_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} (l(t_i) - I(t_i, \xi_i)) = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Следствия.

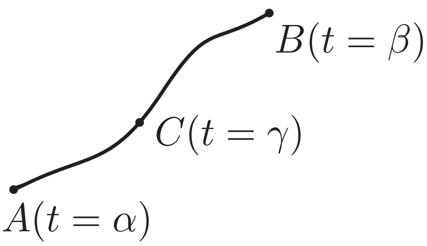


Рис. 13.5.

1. Возьмем на кривой AB произвольную точку $C(\varphi(\gamma), \psi(\gamma)), \ \gamma \in [\alpha, \beta]$ (рис. 13.5). Для длин кривых AC, CB и AB справедливы равенства

$$l_{AC} = \int_{\alpha}^{\gamma} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt,$$

$$l_{CB} = \int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \quad l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Так как $\int\limits_{\alpha}^{\gamma} + \int\limits_{\gamma}^{\beta} = \int\limits_{\alpha}^{\beta}$, то $l_{AC} + l_{CB} = l_{AB}$. Это свойство называется *аддитивностью длины кривой.*

2. Пусть кривая задана в прямоугольной системе координат уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, причем функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$. Перейдем к параметрическим уравнениям кривой:

$$x = t, \quad y = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

По формуле (13.3), в которой нужно положить $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$, получаем:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

3. Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ (рис. 13.6), причем функция $r(\varphi)$ имеет на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$ непрерывную производную $r'(\varphi)$. Переходя к декартовым координатам, получим уравнения кривой в параметрической форме (φ — параметр):

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2.$$

Так как

$$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$
$$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$$

то, применяя формулу (13.3), получаем

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

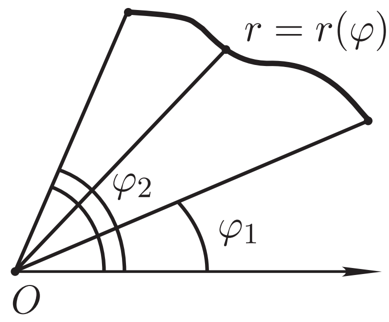


Рис. 13.6.

4. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \varphi(r)$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, то

$$l = \int\limits_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\varphi'^2(r)}\,dr$$

(выведите эту формулу самостоятельно).

Примеры.

1) $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (окружность радиуса R с центром в начале координат).

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = R\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

2) $r = R = const > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (та же окружность, но заданная уравнением в полярных координатах: $r = r(\varphi) = R$).

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}\, d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R.$$

3) $y = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$ (часть параболы).

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \left[x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \right] \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(2 + \sqrt{5} \right).$$

Замечание о пространственной кривой.

Простая пространственная кривая определяется как множество точек $\{M(x, y, z) : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — непрерывные функции на сегменте $[\alpha, \beta]$, причем множество $\{M(x, y, z)\}$ не содержит кратных точек.

Понятие длины кривой вводится таким же образом, как и для плоской кривой, и длина кривой выражается формулой

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt.$$

Пример. $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$ — винтовая линия. Пусть $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (один виток), тогда

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2}\, dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}\,.$$

§ 2. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть L — простая спрямляемая кривая на плоскости, заданная параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

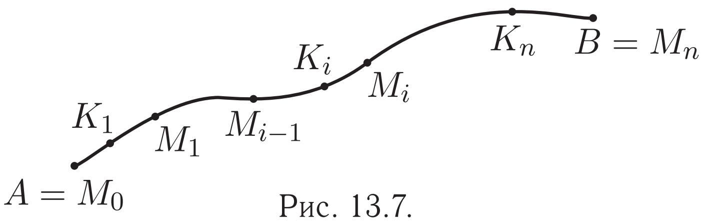


Рис. 13.7.

(то есть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции на сегменте $[\alpha, \beta]$, и различным значениям t из сегмента $[\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки $M(\varphi(t), \psi(t))$; если $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, то кривая — замкнутая.) Пусть на кривой L задана ограниченная функция $z = f(x, y)$. Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$. При этом кривая L разобьется на n частей точками $A = M_0, M_1, ..., M_n = B$ (рис. 13.7). Точка M_i имеет координаты $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Обозначим через Δl_i длину части $M_{i-1}M_i$ кривой и положим $\Delta l = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta l_i$. Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ какую-нибудь точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ (см. рис. 13.7) и составим интегральную сумму

$$I(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i.$$

Предел интегральных сумм $I(M_i, K_i)$ при $\Delta l \to 0$ (если он существует) называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается так:

$$\int\limits_L f(x, y)dl \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{AB} f(x, y)dl.$$

Из этого определения следует, что $\int\limits_L f(x, y)dl$ не зависит от того, в каком направлении пробегается кривая L, то есть

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{BA} f(x, y)dl.$$

Если $f(x, y) \equiv 1$, то $\int\limits_L dl = l$ — длина кривой L.

Физический пример: если $\rho(x, y)$ — линейная плотность в точке (x, y) материальной кривой L, то $m = \int\limits_L \rho(x, y)dl$ — масса кривой L.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода с помощью определенных интегралов.

Теорема 2. Пусть

1) простая кривая L задана параметрически уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

и пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на сегменте $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, одновременно не равные нулю, то есть $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$ (в таком случае кривая L называется *гладкой*);

2) функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой L.

Тогда криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x,y)dl$ существует, и справедливо равенство

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{13.7}$$

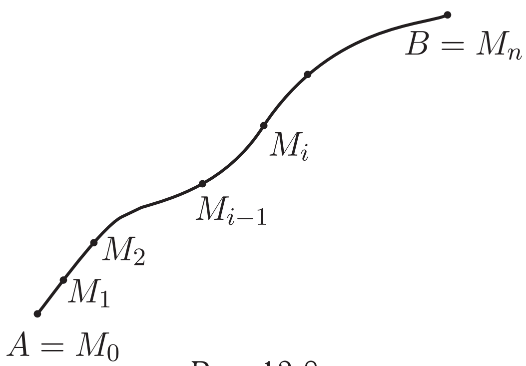


Рис. 13.8.

Доказательство. Разобьем сегмент $[\alpha,\beta]$ на n частичных сегментов точками $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$. При этом кривая L разобьется на n частей точками $A=M_0, M_1, \ldots, M_n=B$, где $M_i=(\varphi(t_i),\psi(t_i))$ (рис. 13.8).

Введем обозначения: $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $\Delta t=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i$,

$\Delta l_i=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ — длина i-ой части кривой,

$\Delta l=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta l_i$.

Отметим, что $\Delta l\to 0$ при $\Delta t\to 0$ (это очевидно), и обратно, $\Delta t\to 0$ при $\Delta l\to 0$ (это следует из того, что

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\geqslant\min_{[\alpha,\beta]}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=m>0,$$

и поэтому $\Delta l_i \geqslant m \cdot \Delta t_i$; следовательно, $\Delta t_i \leqslant \dfrac{\Delta l_i}{m}$ и $\Delta t \leqslant \dfrac{\Delta l}{m}$). На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ возьмем произвольным образом точку $K_i\,(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))$ (рис. 13.9) и составим интегральную сумму

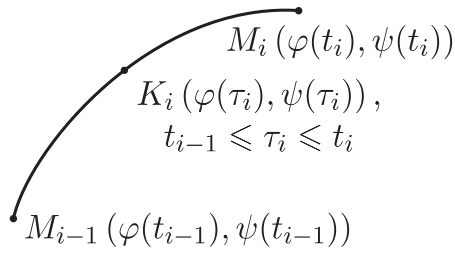


Рис. 13.9.

$$I(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

Требуется доказать, что $\lim I\,(M_i, K_i)$ при $\Delta l \to 0$ (или, что то же самое, при $\Delta t \to 0$) существует и равен определенному интегралу

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f\,(\varphi(t), \psi(t))\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

Представим интеграл I в виде

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,(\varphi(t), \psi(t))\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

и рассмотрим разность

$$I\,(M_i, K_i) - I =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[f\,(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f\,(\varphi(t), \psi(t))\right]\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \tag{13.8}$$

Нам нужно доказать, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (I\,(M_i, K_i) - I) = 0$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t < \delta$, и любого выбора точек K_i выполняется неравенство

$$|I\,(M_i, K_i) - I| < \varepsilon.$$

Функция $f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом сегменте. Поэтому

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$, такое, что если $\Delta t < \delta$, то $\forall\tau_i$ и $t \in [t_{i-1}, t_i]$ выполняется неравенство

$$|f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{l},$$

где $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$ — длина кривой L. Из (13.8) получаем, что если $\Delta t < \delta$, то

$$|I(M_i, K_i) - I| < \frac{\varepsilon}{l} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{l} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon.$$

Итак, если $\Delta t < \delta$, то $|I(M_i, K_i) - I| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Замечания.

1. Выражение $dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$ представляет собой дифференциал функции $l(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(s) + \psi'^2(s)}\, ds$, которая называется *переменной дугой* и при каждом $t \in [\alpha, \beta]$ равна длине кривой AM, где $A(\varphi(\alpha)), \psi(\alpha))$, $M(\varphi(t)), \psi(t))$.

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (в декартовых координатах), причем функция $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$ на сегменте $[a, b]$, то

$$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx,$$

$$\int\limits_L f(x, y) dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, причем функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$, то $dl = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$ и

$$\int\limits_L f(x, y) dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

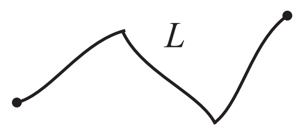


Рис. 13.10.

2. Непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кривых, называется *кусочно гладкой* (рис. 13.10). Если кривая L — кусочно гладкая, а функция $f(x, y)$ — кусочно непрерывная вдоль кривой L, то формула (13.7) остается в силе.
3. Криволинейные интегралы первого рода обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, оценка по модулю, формула среднего значения).
4. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве вводятся аналогично тому, как это сделано на плоскости. Если

$$L = \{(x, y, z) : x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \text{ —}$$

кусочно гладкая кривая в пространстве, то

$$\int\limits_L f(x, y, z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt.$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L xdl$, где кривая L задана уравнением $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$\int\limits_L xdl = \int\limits_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{12}\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L xydl$, где L — дуга эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (рис. 13.11). Запишем уравнения L в параметрическом виде: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

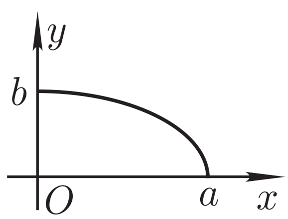


Рис. 13.11.

$$\int\limits_L xydl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \cos 2t}\, dt =$$

$$= (\text{проведите вычисления}) = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)}.$$

§ 3. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть $L:\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ — простая незамкнутая спрямляемая кривая, на которой заданы две функции: $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

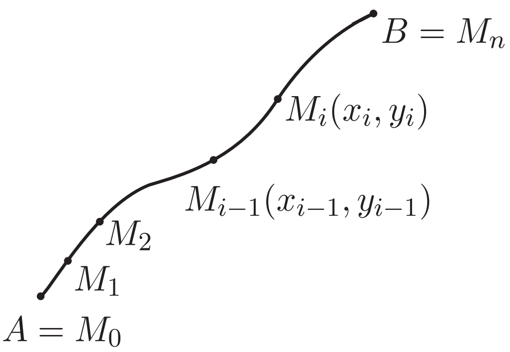


Рис. 13.12.

Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частичных сегментов точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Кривая L разобьется при этом на n частей точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ в направлении от A к B (рис. 13.12). Обозначим координаты точки M_i через (x_i, y_i), где $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, Δl_i — длина части $M_{i-1}M_i$ кривой, $\Delta l = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$. На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ возьмем произвольным образом точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим две *интегральные суммы* следующего вида:

$$I_1(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,\ \ I_2(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I_k(M_i, K_i) = I_k$ $(k = 1, 2)$, то он называется *криволинейным интегралом второго рода* и обозначается так:

$$I_1 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx, \quad I_2 = \int\limits_{AB} Q(x, y)dy.$$

Сумма $I = I_1 + I_2 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ называется *общим криволинейным интегралом второго рода*.

Из определения следует, что криволинейный интеграл второго рода зависит от того, в каком направлении пробегается кривая L, то есть от того, какая из точек A и B считается начальной, а какая конечной. Если двигаться от B к A, то все Δx_i и Δy_i в интегральных суммах изменят знак и, следовательно, интегралы также изменят знак, то есть

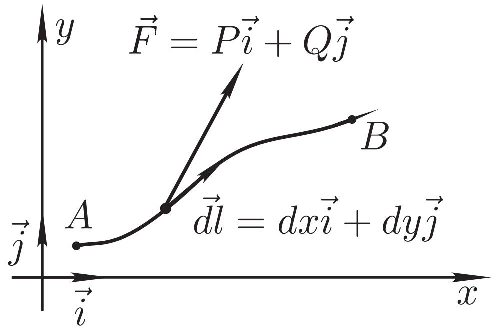


Рис. 13.13.

$$\int\limits_{AB} Pdx = -\int\limits_{BA} Pdx, \int\limits_{AB} Qdy = -\int\limits_{BA} Qdy.$$

Физический пример. Пусть материальная точка движется по кривой AB из точки A в точку B под действием силы $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ (рис. 13.13). Тогда $\left(\vec{F} \cdot \vec{dl}\right) = Pdx + Qdy$ — работа силы при перемещении точки на вектор $\vec{dl} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$, а $\int\limits_{AB} \left(\vec{F} \cdot \vec{dl}\right) = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ — *работа силы при перемещении точки по кривой AB из точки A в точку B.*

Вычисление криволинейных интегралов второго рода с помощью определенных интегралов.

Теорема 3. Пусть

1) гладкая незамкнутая кривая AB задана уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$;

2) функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вдоль кривой AB.

Тогда криволинейные интегралы второго рода от функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ существуют, и справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int\limits_{AB} P(x,y)dx &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \varphi'(t)dt, \\ \int\limits_{AB} Q(x,y)dy &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \psi'(t)dt. \end{aligned} \tag{13.9}$$

<u>Доказательство</u> теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Замечания.

1. Если гладкая кривая AB задана в декартовых координатах уравнением $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $A = (a, y(a))$, $B = (b, y(b))$ (слово «гладкая» означает, что функция $y(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную $y'(x)$), то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\right] dx. \tag{13.10}$$

2. Если L — замкнутая кривая (замкнутый контур), то есть точки A и B совпадают, то криволинейный интеграл второго рода по кривой L вводится так же, как и для незамкнутой кривой, но только теперь в обозначении $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не отражено, в каком направлении пробегается кривая. Договоримся считать *положительным* то направление обхода замкнутого контура, при котором область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к движущейся по контуру точке (рис. 13.14). Интеграл по замкнутому контуру L в положительном направлении обозначается так:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

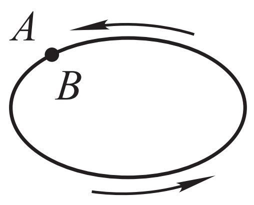


Рис. 13.14.

3. Криволинейные интегралы второго рода в пространстве вводятся аналогично интегралам на плоскости. Если кривая AB задана уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$I = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left[P(\varphi,\psi,\chi)\varphi'(t) + Q(\varphi,\psi,\chi)\psi'(t) + R(\varphi,\psi,\chi)\chi'(t)\right] dt.$$

Интеграл I записывается также в виде:

$$I = \int\limits_{AB} \left(\vec{F} \cdot \vec{dl}\right),$$

где $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$, $\vec{dl} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, $\left(\vec{F} \cdot \vec{dl}\right)$ — скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{dl}$, и называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{F}$ вдоль кривой AB.

Примеры.

1. Вычислить интеграл $-\frac{1}{2}\oint\limits_L ydx - xdy$, где L — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перейдем к параметрическим уравнениям эллипса:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

и воспользуемся формулами (13.9):

$$-\frac{1}{2}\oint\limits_L ydx - xdy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [b\sin t(-a\sin t) - a\cos t(b\cos t)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab = S_{\text{эл}}$$

(площадь фигуры, ограниченной эллипсом).

В следующем параграфе будет выведена формула Грина, из которой, в частности, следует, что если плоская фигура G ограничена кусочно гладким контуром L (рис. 13.15), то

$$S(G) = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx.$$

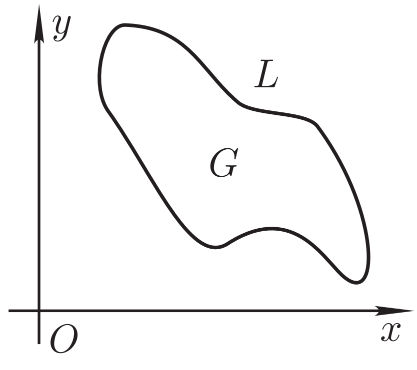


Рис. 13.15.

2. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{AB} 2xydx + x^2dy$ по трем кривым, соединяющим точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$ и изображенным на рис. 13.16. Воспользуемся формулой (13.10).

1) $y = x$; $\quad I_1 = \int\limits_0^1 2x \cdot xdx + x^2dx = \int\limits_0^1 3x^2dx = x^3\Big|_0^1 = 1;$

2) $y = x^2$; $\quad I_2 = \int\limits_0^1 2x \cdot x^2 dx + x^2 \cdot 2x dx = \int\limits_0^1 4x^3 dx = x^4 \Big|_0^1 = 1;$

3) ломаная ACB; $I_3 = \int\limits_0^1 2x \cdot 0 dx + \int\limits_0^1 1^2 \cdot dy = 1.$

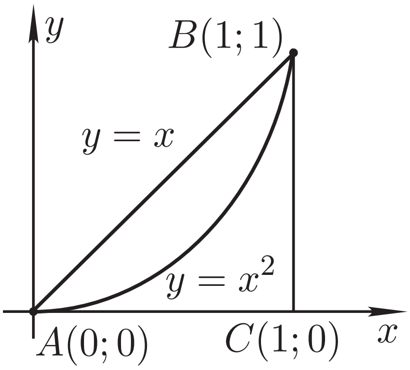


Рис. 13.16.

Таким образом, $I_1 = I_2 = I_3$.
Это не случайно! Можно доказать, что значение интеграла I не зависит от кривой, соединяющей точки A и B. Как это доказать и в каких случаях интеграл не зависит от пути интегрирования — об этом пойдет речь в §5.

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Пусть гладкая кривая AB задана в декартовых координатах уравнением $y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$. Обозначим через $\alpha(x)$ угол между направленной касательной к кривой в точке $M(x, y(x))$ и осью Ox. Направление касательной выберем в соответствии с направлением движения по кривой (рис. 13.17):
при движении от A к B:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \ \operatorname{tg}\alpha = y'(x), \ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}, \ \sin\alpha = \frac{y'(x)}{\sqrt{+y'^2(x)}};$$

при движении от B к A:

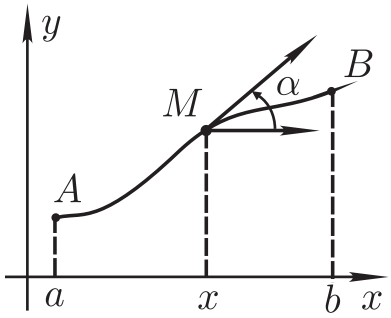


Рис. 13.17.

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \ \operatorname{tg}\alpha = y'(x),$$
$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}},$$
$$\sin\alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}.$$

Рассмотрим два криволинейных интеграла:
криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx = \int\limits_a^b P(x, y(x)) dx$$

и криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha dl =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y(x))\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int\limits_a^b P(x,y(x))dx.$$

Из написанных равенств следует, что

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha dl.$$

Аналогично получается равенство

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)\sin\alpha dl.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha\right) dl$$

— формула, связывающая криволинейные интегралы первого и второго рода.

Если ввести векторы $\vec{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ и $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ — единичный вектор направленной касательной к кривой, то полученную формулу можно записать так:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} \left(\vec{F}\cdot\vec{\tau}\right) dl.$$

Аналогичные формулы имеют место для криволинейных интегралов по пространственной кривой AB:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\int\limits_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dl = \int\limits_{AB} \left(\vec{F}\cdot\vec{\tau}\right) dl,$$

где $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор направленной касательной к кривой.

§ 4. Формула Грина

Пусть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ — уравнения двух кусочно гладких кривых в декартовых координатах, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$. Область

$$G = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$$

назовем «y-трапециевидной» (рис. 13.18). Аналогично определяется «x-трапециевидная» область.

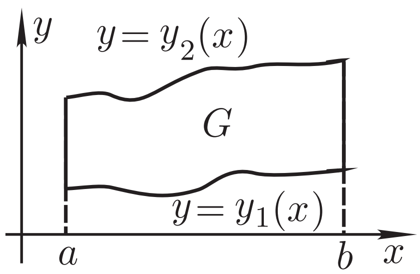


Рис. 13.18.

Замкнутую область G назовем *простой*, если ее можно разбить как на конечное число «x-трапециевидных» областей, так и на конечное число «y-трапециевидных» областей (без общих внутренних точек у любых двух областей).

Примеры простых областей: прямоугольник, круг, кольцо (рис. 13.19).

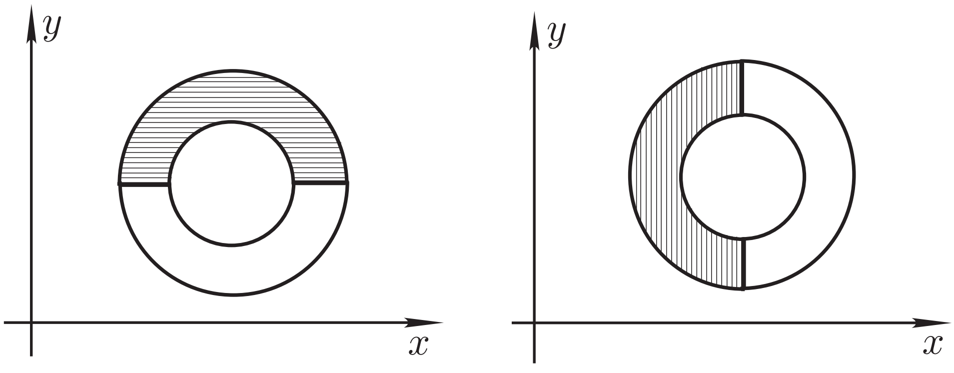


Рис. 13.19.

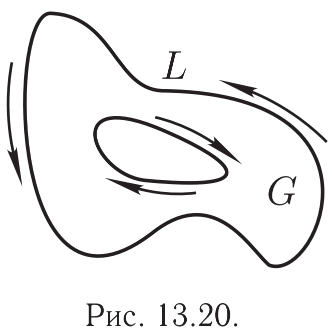


Рис. 13.20.

Границу области G обозначим буквой L. Она может состоять из конечного числа замкнутых контуров (рис. 13.20). Как было оговорено ранее, направление обхода контура считается *положительным*, если при этом обходе область G остается слева от движущейся по контуру точки.

Теорема 4. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в простой области G с кусочно-гладкой границей L. Тогда

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy \qquad (13.11)$$

где интеграл по границе L берется в положительном направлении.

Формула (13.11) называется *формулой Грина*.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда G — «y-трапециевидная» область (рис. 13.21) и докажем, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_L Pdx. \qquad (13.12)$$

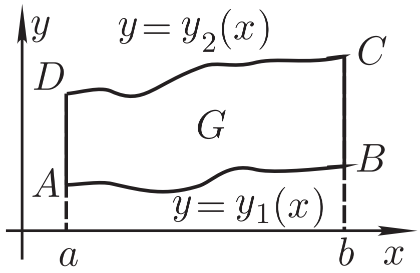


Рис. 13.21.

Сводя двойной интеграл к повторному, получаем:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \cdot P(x,y)\Bigg|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx, \ (13.13)$$

Определенные интегралы в правой части (13.13) выразим через криволинейные интегралы соответственно по кривым CD и AB:

$$\int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx = \int\limits_{DC} P(x,y)dx = -\int\limits_{CD} P(x,y)dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx = \int\limits_{AB} P(x,y)dx.$$

Используя полученные равенства, а также равенства $\int\limits_{BC} P(x,y)dx = 0$ и $\int\limits_{DA} P(x,y)dx = 0$, запишем (13.12) в виде:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy =$$
$$= -\int\limits_{CD} Pdx - \int\limits_{DA} Pdx - \int\limits_{AB} Pdx - \int\limits_{BC} Pdx = -\oint\limits_L Pdx.$$

Тем самым, справедливость равенства (13.12) доказана для «y-трапециевидной» области.

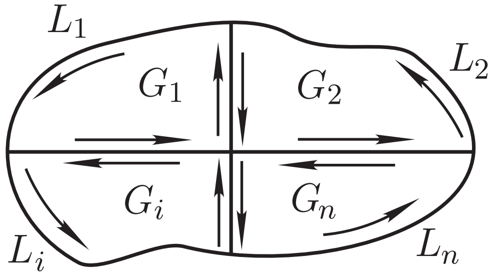


Рис. 13.22.

Пусть теперь G — простая область. Разобьем ее на конечное число «y-трапециевидных» областей G_i, $(i = 1, 2, ..., n)$: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ (рис. 13.22). Напишем для каждой области G_i равенство (13.12):

$$\iint\limits_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint\limits_{L_i} Pdx.$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до n, получим в левой части интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$, а в правой части — интеграл $-\oint\limits_L Pdx$, так как криволинейный интеграл по каждой внутренней разделительной линии берется дважды, причем в противоположных направлениях, и потому сумма таких интегралов равна нулю. Итак, для каждой простой области справедливо равенство (13.12).

Аналогично можно доказать, используя разбиения G на «x-трапециевидные» области, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_L Qdy. \qquad (13.14)$$

Вычитая (13.12) из (13.14), получаем формулу (13.11):

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. Можно доказать, что формула Грина справедлива не только для простых областей, но и для любой области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Следствие. Полагая в (13.11) $Q = x$, $P = 0$, а затем $Q = 0$, $P = -y$, получаем:

$$\iint\limits_G dxdy = \oint xdy \quad \text{и} \quad \iint\limits_G dxdy = -\oint\limits_L ydx,$$

то есть

$$S\,(G) = \oint\limits_L xdy \quad \text{и} \quad S\,(G) = -\oint\limits_L ydx, \tag{13.15}$$

где $S\,(G)$ — площадь области G.

Пусть α и β — произвольные числа, такие, что $\alpha + \beta = 1$. Умножая первое равенство (13.15) на α, а второе на β, и складывая, приходим к формуле

$$S\,(G) = \oint\limits_L \alpha xdy - \beta ydx \quad (\alpha + \beta = 1).$$

Наиболее употребительна эта формула при $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$:

$$S\,(G) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx. \tag{13.16}$$

Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_L \left(x^2 - y\right) dx + \left(x + y^2\right) dy,$$

где L — окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Здесь $P = x^2 - y$, $Q = x + y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$. По формуле Грина

$$I = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_G 2dxdy = 2S(G) = 2\pi R^2.$$

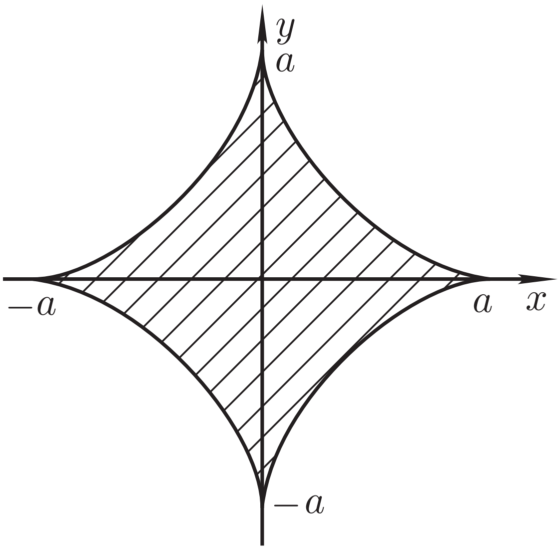


Рис. 13.23.

2) Найти площадь области, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 13.23). Напишем параметрические уравнения астроиды:

$$x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,$$
$$0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

По формуле (13.16)находим:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t\cdot a\cdot 3\sin^2 t\cos t-a\sin^3 t\left(-a\cdot 3\cos^2 t\sin t\right)\right]dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

§ 5. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

В §3 был рассмотрен пример, в котором криволинейный интеграл второго рода по трем различным кривым, соединяющим две данные точки, имел одно и то же значение. В этом параграфе мы установим условия, при которых *криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования*, то есть для двух данных точек значение интеграла одно и то же для любой кривой, соединяющий это точки.

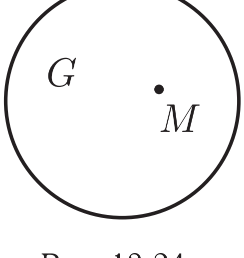


Рис. 13.24.

Нам понадобится понятие *односвязной области. Областью* мы называем открытое связное множество. Объединение области и ее границы называется *замкнутой обастью*. Область G на плоскости называется односвязной, если она обладает следующими свойством: для любого замкнутого контура L, лежащего в области G, часть плоскости, ограниченная этим контуром, целиком принадлежит G.

Примеры. Открытые круг и прямоугольник — односвязные области.

Кольцо, круг с выколотой точкой (рис. 13.24) не являются односвязными областями.

Теорема 5. I. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G. Тогда следующие три утверждения эквивалентны (то есть из каждого из них следуют два другие):

1. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $L \subset G$ выполняется равенство

$$\oint_L P dx + Q dy = 0.$$

2. Для любых двух фиксированных точек A и $B \in G$ криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования (то есть от кривой, соединяющей точки A и B и лежащей в области G).

3. Выражение $P dx + Q dy$ является *полным дифференциалом*, то есть существует функция $u(x, y) = u(M)$, такая, что

$$du(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

При этом для любой кусочно-гладкой кривой $AB \subset G$ выполняется равенство

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A). \tag{13.17}$$

II. Если, кроме того, область G — односвязная, а функции P и Q имеют в области G непрерывные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то каждое из условий 1-3 эквивалентно условию

4. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области G.

<u>Доказательство</u> проведем по схеме:

$$\text{I. } 1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad \text{II. } 3 \to 4 \to 1.$$

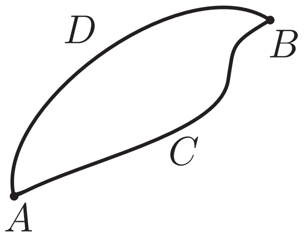


Рис. 13.25.

I. а) $1 \to 2$. Пусть выполнено условие 1. Рассмотрим две произвольные точки A и $B \in G$ и две произвольные кривые, соединяющие эти точки: ACB и ADB (рис. 13.25). В силу условия 1

$$\int\limits_{ACBDA} Pdx + Qdy = 0, \quad \text{то есть}$$

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy.$$

Таким образом, выполнено условие 2.
б) $2 \to 3$. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка области G, а $M(x, y)$ — произвольная точка. В силу условия 2 интеграл $\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$ не зависит от выбора кривой M_0M, а зависит только от точки $M(x, y)$, то есть является функцией от x и y. Обозначим эту функцию $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy.$$

Докажем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Отсюда, так как P и Q — непрерывные функции, последует, что $u(x, y)$ — дифференцируемая функция, причем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy,$$

то есть выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом.

Зафиксируем точку $M(x, y)$ и дадим приращение Δx переменной x (рис. 13.26). Функция $u(x, y)$ получит частное приращение

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = \int\limits_{M_0M_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx = P(\xi, y)\Delta x,$$

где $\xi \in [x, x+\Delta x]$ (последнее равенство получено с помощью формулы среднего значения). Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(\xi, y) \to P(x, y) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

то есть функция $u(x, y)$ имеет в точке $M(x, y)$ частную производную по переменной x и $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$. Аналогично доказывается, что $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

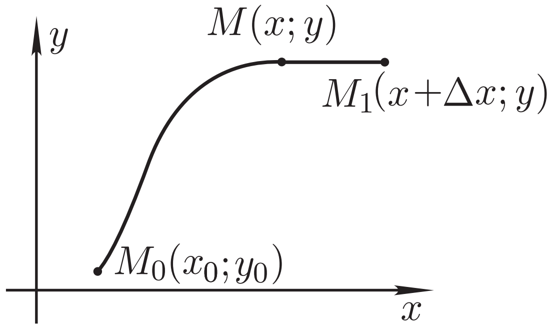


Рис. 13.26.

Докажем, что верна формула (13.17):

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_0} Pdx + Qdy +$$

$$+ \int\limits_{M_0B} Pdx + Qdy = \int\limits_{M_0B} Pdx + Qdy - \int\limits_{M_0A} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

в) $3 \to 1$. Пусть выполнено условие 3, и, следовательно, верна формула (13.17). Возьмем произвольный замкнутый контур $L \subset G$ (рис. 13.27, $A = B$). По формуле (13.17) получаем:

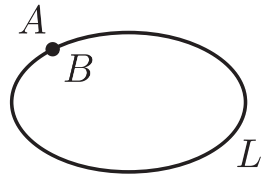


Рис. 13.27.

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = u(B) - u(A) = 0,$$

то есть выполнено условие 1.

II. г) $3 \to 4$. Пусть выполнено условие 3, то есть существует функция $u(x,y)$, такая, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. Тогда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ — непрерывные функции, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, то есть $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, и, значит, выполнено условие 4.

Замечание. Односвязность области G здесь не использовалась.

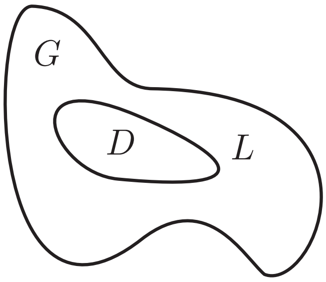


Рис. 13.28.

д) $4 \to 1$. Пусть выполнено условие 4, то есть $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области G, и G — односвязная область. Возьмем произвольный замкнутый контур $L \subset G$ (рис. 13.28). В силу односвязности области G область D, ограниченная контуром L, целиком принадлежит области G. По формуле Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

то есть выполнено условие 1.

Теорема 5 доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для криволинейных интегралов второго рода в пространстве, то есть для интегралов вида $\displaystyle\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$, где P, Q, R — функции от x, y, z. В частности, условие 3 принимает вид: существует функция $u(x,y,z)$, такая, что $du = P dx + Q dy + R dz$, а условие 4 содержит теперь три равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Утверждения $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$ и $3 \longrightarrow 4$ доказываются так же, как и в теореме 5, а для доказательства утверждения $4 \longrightarrow 1$ нужна формула Стокса. О ней речь пойдет в следующей главе.

Примеры. 1) Вернемся к примеру из §3:

$$I = \int_{A(0,0)}^{B(1,1)} 2xy dx + x^2 dy.$$

Так как $2xydx + x^2dy = du$, где $u = x^2y$, то интеграл I не зависит от пути интегрирования: $I = u(1,1) - u(0,0) = 1 - 0 = 1$.

2) Если область G не является односвязной, то из условия 4 может не следовать условие 1. Приведем **пример**.

Если $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, то $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, то есть выполнено условие 4. При этом P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны всюду, кроме точки $(0,0)$. Рассмотрим область G с выколотой точкой $(0,0)$. *Она не является односвязной.* Возьмем окружность $L: \ x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (рис. 13.29). Так как

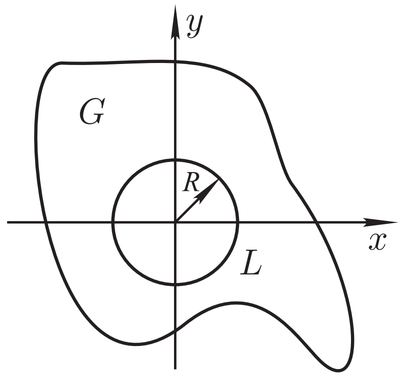


Рис. 13.29.

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \int\limits_0^{2\pi} [-\sin t(-\sin t)dt + \cos t \cos t dt] = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0,$$

то условие 1 не выполнено.

3) Вычислить $\displaystyle\int\limits_{AB} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где AB — кривая, расположенная в кольце между концентрическими окружностями радиусов a и b с центром в начале координат (рис. 13.30).

В данном примере

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

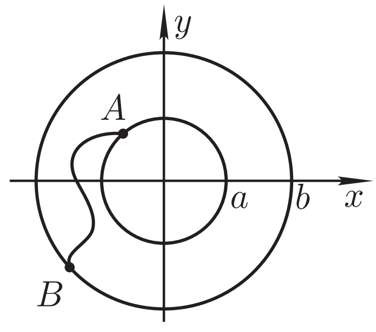


Рис. 13.30.

Проверим, выполнено ли условие 4 теоремы 5:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{1}{2}x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ x^2+y^2 \neq 0.$$

Итак, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$, то есть условие 4 теоремы 5 выполнено в любой односвязной области, не содержащей начала координат, и, следовательно, в любой такой области существует функция $u(x, y)$, такая, что

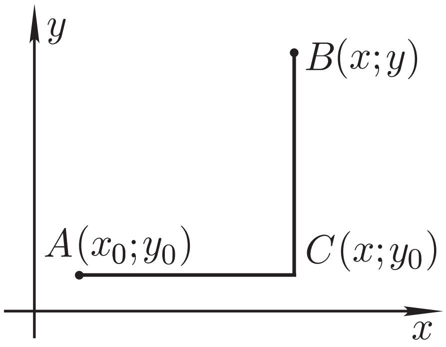


Рис. 13.31.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Как найти $u(x, y)$? В данном примере ее нетрудно «угадать»: $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. Поэтому $I = u(B) - u(A) = b - a$. Но можно найти $u(x, y)$ и без угадывания (см. рис. 13.31):

$$u(x, y) = \int\limits_{ACB} P dx + Q dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0) dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y) dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_0^2}} dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy + C =$$

$$= \sqrt{x^2 + y_0^2} \ \Big|_{x_0}^{x} + \sqrt{x^2 + y^2} \ \Big|_{y_0}^{y} + C =$$

$$= \sqrt{x^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y_0^2} + C =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + C.$$

Если взять $C = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, то $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4) **Физический пример.** Пусть в области G задано *векторное поле*, то есть в каждой точке M области G задан вектор $\overrightarrow{F}(M)$. Если $\overrightarrow{F}(M)$ — вектор силы, то говорят о *силовом векторном поле.*

Примеры силовых векторных полей: поле тяготения точечной массы $\overrightarrow{F}(M) = -\dfrac{\gamma m}{r^3} \overrightarrow{r}$, электростатическое поле точечного заряда $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{ke}{r^3} \overrightarrow{r}$ (см. § 6 главы 9).

Векторное поле называется *потенциальным*, если существует такая функция $u(M)$, что $\overrightarrow{F}(M) = \operatorname{grad} u(M)$ (понятие потенциального поля уже упоминалось ранее — в главе 9). Функция $u(M)$ называется *потенциалом* векторного поля $\overrightarrow{F}(M)$. Пусть $\overrightarrow{F}(M) = P(M) \cdot \overrightarrow{i} + Q(M) \cdot \overrightarrow{j} + R(M) \cdot \overrightarrow{k}$ — потенциальное силовое поле в пространстве. Тогда

$$\overrightarrow{F}(M) = \operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \overrightarrow{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \overrightarrow{k},$$

и, следовательно,

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поэтому $Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = du$ — полный дифференциал.

Криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} \left(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}\right)$$

есть работа силового поля $\overrightarrow{F}(M)$ при перемещении материальной точки по кривой AB из точки A в точку B. Так как $Pdx + Qdy + Rdz = du$ — полный дифференциал, то по теореме 5

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A),$$

то есть работа потенциального силового поля не зависит от пути, по которому материальная точка перемещается из точки A в точку B, а зависит лишь от начальной и конечной точек A и B: она равна разности потенциалов в точках B и A.

В частности, если $\overrightarrow{F}(M) = -\frac{\gamma m}{r^3}\overrightarrow{r}$ — поле тяготения точечной массы m, то $\overrightarrow{F} = \operatorname{grad} u(M)$, где $u(M) = \gamma \frac{m}{r}$ — ньютоновский потенциал, и для работы этого силового поля получаем выражение

$$\int\limits_{AB} \left(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}\right) = \gamma m \left(\frac{1}{r_{_B}} - \frac{1}{r_{_A}}\right).$$

Здесь $r_{_M}$ — расстояние от точки M до точки, в которой находится масса m.

Глава 14

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Площадь поверхности

В отличие от кривой, длина которой определялась как предел длин вписанных в нее ломаных, площадь поверхности нельзя определить как предел площадей вписанных в поверхность многогранников. Подтверждением этому служит известный пример Шварца (см. [1]).

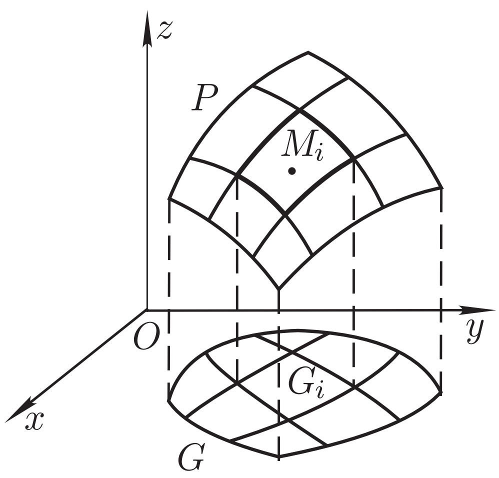


Рис. 14.1.

Пусть поверхность P задана уравнением

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in G,$$

и пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в области G. Тогда в каждой точке поверхности существуют касательная плоскость и нормаль.

Разобьем поверхность P с помощью кусочно-гладких кривых на n частей: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. Проекцию P_i на плоскость Oxy обозначим G_i (рис. 14.1): $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$.

На каждой части P_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(z_i = f(x_i, y_i))$ и проведем через нее касательную плоскость к поверхности P. Пусть S_i — площадь той части касательной плоскости, проекцией которой на плоскость Oxy является область G_i.

Составим сумму

$$S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Пусть d_i — диаметр P_i, $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$.

Определение. Число S называется пределом сумм $S(P_i, M_i)$ при $d \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения поверхности P, у которого $d < \delta$, и для любого выбора точек M_i выполняется неравенство

$$|S(P_i, M_i) - S| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim\limits_{d \to 0} S(P_i, M_i) = S$, то число S называется *площадью поверхности* P, а сама поверхность P называется *квадрируемой*.

Теорема 1. Пусть поверхность P задана уравнением

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in G,$$

где G — ограниченная замкнутая область, и пусть функция $f(x, y)$ имеет в области G непрерывные частные производные $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ (такую поверхность назовем *гладкой*).

Тогда поверхность P квадрируема и ее площадь выражается формулой

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dxdy. \tag{14.1}$$

Доказательство. Разобьем поверхность P кусочно-гладкими кривыми на n частей: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. При этом область G разобьется на n частей G_i ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), где G_i — проекция P_i на плоскость Oxy.

На каждой части P_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где $z_i = f(x_i, y_i)$, и проведем через точку M_i касательную плоскость к поверхности P. Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_i = f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$

Вектор $\vec{n}_i = \{-f_x(x_i, y_i), -f_y(x_i, y_i), 1\}$ является вектором нормали к поверхности P в точке M_i. Обозначим через γ_i угол между вектором $\vec{n}_i$ и осью Oz (рис. 14.2). Тогда

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)}}.$$

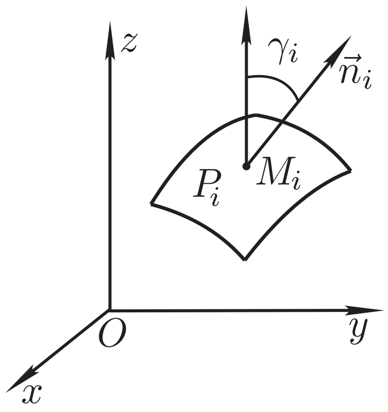


Рис. 14.2.

Пусть S_i — площадь той части касательной плоскости, которая проектируется на частичную область G_i. Воспользуемся тем, что площадь $S(G_i)$ области G_i и площадь S_i связаны равенством

$$S(G_i) = S_i \cdot \cos\gamma_i,$$

откуда следует, что

$$S_i = \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)} \cdot S(G_i).$$

Суммируя величины S_i по i от 1 до n, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)} \cdot S(G_i). \tag{14.2}$$

По определению площадь поверхности P — это предел сумм $S(P_i, M_i)$ при $d \to 0$, где $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$, d_i — диаметр P_i.

Правая часть в равенстве (14.2) является интегральной суммой для двойного интеграла по области G от непрерывной функции

$$\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\,.$$

При $d \to 0$ максимальный диаметр областей G_i также стремится к нулю. Поэтому предел правой части равенства (14.2) при $d \to 0$ существует и равен двойному интегралу $\iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dxdy$. Следовательно, существует $\lim\limits_{d \to 0} S(P_i, M_i)$, то есть поверхность P квадрируема и ее площадь выражается формулой (14.1). Теорема 1 доказана.

Пример. Найти площадь части параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, отсекаемой плоскостью $z = 1$ (рис. 14.3).

По формуле (14.1) получаем:

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла по кругу G перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1)$. Получим

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1+4r^2} \cdot r dr =$$

$$= 2\pi \frac{1}{8} \left(1+4r^2\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

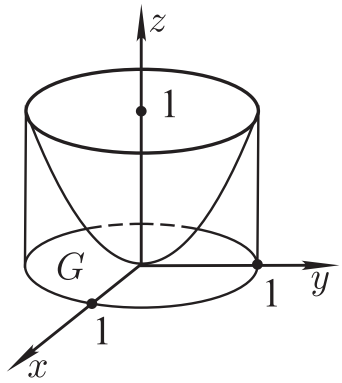


Рис. 14.3.

Вычисление площади поверхности, заданной параметрически. Задание поверхности P уравнением $z = f(x, y)$ (и также уравнением $y = f(z, x)$ или уравнением $x = f(y, z)$) называется *явным заданием*.

Поверхность может быть задана уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

не разрешенным относительно ни одной из переменных x, y и z (*неявное задание*).

Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

(здесь $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$) задает сферу радиуса R с центром в начале координат.

Поверхность может быть задана *параметрически* уравнениями

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v),\ (u, v) \in g. \qquad (14.3)$$

Переменные u и v называются *параметрами*. Каждой точке (u, v) из области g соответствует по формулам (14.3) точка $M(x, y, z)$ поверхности. Пусть различным точкам (u, v) соответствуют различные точки $M(x, y, z)$. Тогда пару чисел (u, v) можно назвать *криволинейными координатами* точки M на поверхности. Линии $u = const$ и $v = const$ — координатные линии на поверхности.

Пример. $x = R\sin u\cos v$, $y = R\sin u \sin v$, $z = R\cos u$ $(R = const > 0,\ 0 \leqslant u \leqslant \pi,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$ — это параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в начале координат. Криволинейные координаты u и v точки M на сфере — это «широта» и «долгота» точки M (с тем отличием от географических широты и долготы, что географическая широта отсчитывается от экватора, а в нашем примере «широта» u отчитывается от оси Oz, географическая долгота отсчитывается от Гривичского меридиана, а в нашем примере «долгота» v отсчитывается от плоскости Oxz).

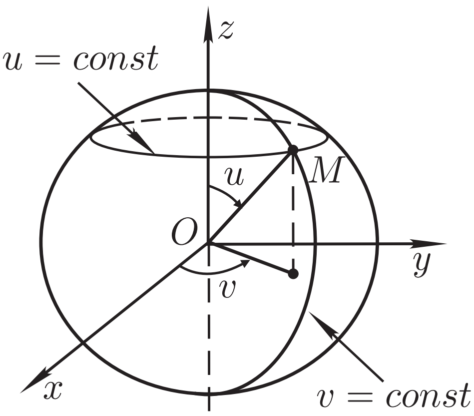


Рис. 14.4.

Координатные линии $u = const$ и $v = const$ — это параллели и меридианы (рис. 14.4). Параметры u и v в уравнениях сферы часто обозначают буквами θ и φ.

Вернемся к уравнениям (14.3), задающим поверхность P. Введем вектор

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} -$$

радиус–вектор точки $M(x, y, z)$ (рис. 14.5). Тогда уравнения (14.3) поверхности P можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\vec{r} = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \chi(u, v)\vec{k} =: \vec{r}(u, v).$$

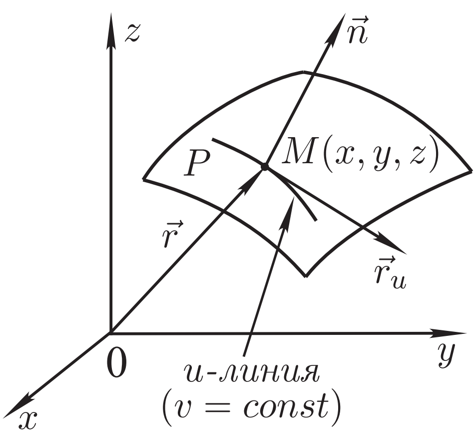


Рис. 14.5.

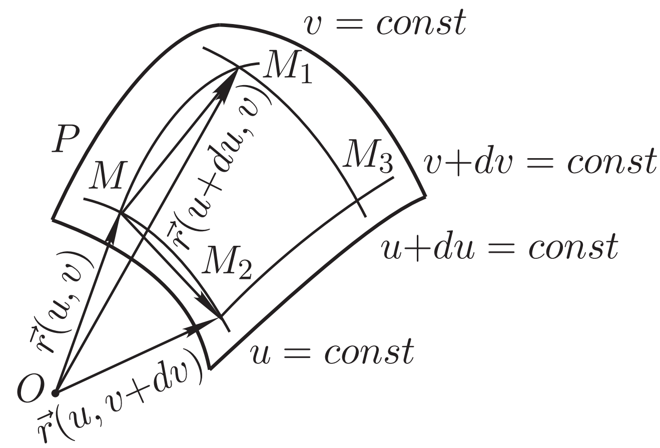
Частные производные первого порядка вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ выражаются следующими формулами (при условии, что функции φ, ψ и χ имеют частные производные первого порядка):

$$\vec{r}_u = \varphi_u\vec{i} + \psi_u\vec{j} + \chi_u\vec{k},$$
$$\vec{r}_v = \varphi_v\vec{i} + \psi_v\vec{j} + \chi_v\vec{k}.$$

Из геометрических (и также физических) соображений ясно, что вектор $\vec{r}_u(u, v)$ является касательным вектором к линии $v = const$ в точке $M(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$ (см. рис. 14.5), а вектор $\vec{r}_v(u, v)$ — касательным вектором к линии $u = const$ в точке M. Поэтому векторы $\vec{r}_u(u, v)$ и $\vec{r}_v(u, v)$ лежат в касательной плоскости к поверхности P в точке $M(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$ и, следовательно, вектор $\vec{n} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]$ является вектором нормали к поверхности P в точке M. Вектор $\vec{n}$ запишем в виде

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \cdot \vec{i} +$$
$$+ \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =:$$
$$=: A(u,v) \cdot \vec{i} + B(u,v) \cdot \vec{j} + C(u,v) \cdot \vec{k}.$$

Рассмотрим на поверхности P две пары близких координатных линий (рис. 14.6). Они ограничивают криволинейный четырехугольник $MM_1M_3M_2$ — «элемент» поверхности P. Вычислим приближенно его площадь dS, заменив криволинейный четырехугольник параллелограммом, построенным на векторах $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_u \cdot du$ и $\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_v \cdot dv$ (считаем $du > 0$, $dv > 0$):



$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+du,v) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_u du$$
$$\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}(u,v+dv) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_v dv$$

Рис. 14.6.

$$dS = \big|[\vec{r}_u du \times \vec{r}_v dv]\big| = \big|[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]\big| \, dudv =$$
$$= \left|A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\right| dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv.$$

Суммируя по всем «элементам» поверхности P, приходим к формуле площади поверхности, заданной параметрически:

$$S = \iint\limits_g \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv. \tag{14.4}$$

(отметим, что A, B и C — функции переменных u и v).

Запишем формулу (14.4) в другом виде. С этой целью обозначим буквой α угол между векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Тогда

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = |[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]| = \\ = |\vec{r}_u|\cdot|\vec{r}_v|\cdot\sin\alpha = |\vec{r}_u|\cdot|\vec{r}_v|\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \\ = \sqrt{|\vec{r}_u|^2\cdot|\vec{r}_v|^2 - |\vec{r}_u|^2\cdot|\vec{r}_v|^2\cdot\cos^2\alpha} = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\cdot\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2}\,.$$

Введем обозначения:

$$\vec{r}_u^{\,2} = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2 = E(u,v),\ \vec{r}_v^{\,2} = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2 = G(u,v)$$
$$(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v) = \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v + \chi_u\chi_v = F(u,v).$$

Тогда $A^2+B^2+C^2 = EG-F^2$, и формула (14.4) принимает вид

$$S = \iint\limits_g \sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{14.5}$$

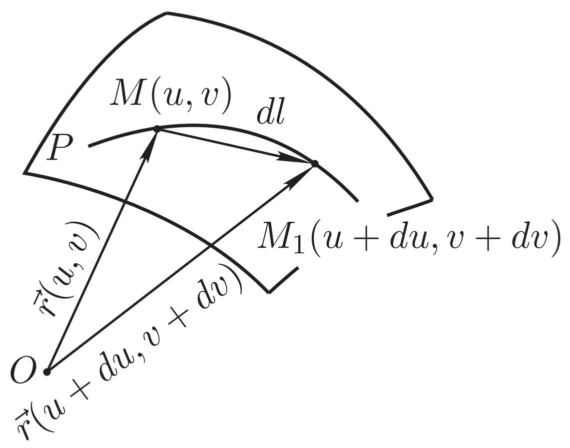


Рис. 14.7.

Замечания. 1) Формулы (14.4) и (14.5) имеют место при следующих условиях: функции φ, ψ и χ имеют непрерывные частные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области g, различным внутренним точкам (u,v) области g соответствуют различные точки (φ,ψ,χ) поверхности, а координаты A, B и C вектора нормали $\vec{n}$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке (u,v) области g (при этом $\vec{r}_u \neq \vec{0}$ и $\vec{r}_v \neq \vec{0}$). В таком случае поверхность P называется *гладкой*.

Формулы (14.4) и (14.5) остаются в силе и в том случае, когда A, B и C одновременно равны нулю на множестве точек площади нуль, в частности, в конечном числе точек. В случае сферы $A=B=C=0$ при $u=0$ и $u=\pi$ (на полюсах сферы).

2) Рассмотрим на поверхности P две близкие точки $M(u,v)$ и $M_1(u+du, v+dv)$ (рис. 14.7), через которые по поверхности проходит кривая. Вычислим приближенно длину dl «элемен-

та» кривой, заменив его вектором $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+du, v+dv) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$:

$$dl = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = |\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv| = \sqrt{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2} =$$

$$= \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}(du)^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)dudv + \vec{r}_v^{\,2}(dv)^2} =$$

$$= \sqrt{E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2}\,.$$

Квадратичная форма

$$E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

называется *первой квадратичной формой поверхности*. Угловые миноры матрицы $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ этой квадратичной формы равны $E = \vec{r}_u^{\,2} > 0$ и $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Следовательно, эта квадратичная форма положительно определенная.

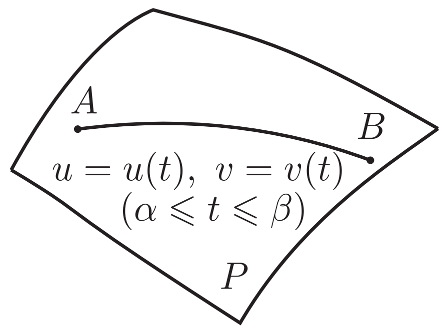


Рис. 14.8.

С помощью первой квадратичной формы вычисляются на поверхности площади (формула (14.5)), а также длины кривых и углы между кривыми. Если кривая AB на поверхности задана параметрически уравнениями $u = u(t),\ \ v = v(t),\ \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (рис. 14.8), то ее длина выражается формулой

$$l_{AB} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt.$$

Говорят, что первая квадратичная форма определяет *метрику* поверхности.

Существует еще так называемая *вторая квадратичная форма поверхности*. Она позволяет вычислить кривизну поверхности (см. [1]).

Пример. Рассмотрим сферу, заданную параметрически:

$$x = R\sin u\cos v,\ y = R\sin u\sin v,\ z = R\cos u$$
$$(0 \leqslant u \leqslant \pi,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi).$$

Так как

$$\vec{r}_u = R\cos u \cos v \cdot \vec{i} + R\cos u \sin v \cdot \vec{j} - R\sin u \cdot \vec{k},$$
$$\vec{r}_v = -R\sin u \sin v \cdot \vec{i} + R\sin u \cos v \cdot \vec{j},$$

то

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = R^2,\ G = \vec{r}_v^{\,2} = R^2\sin^2 u,\ F = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = 0,$$
$$EG - F^2 = R^4 \sin^2 u.$$

По формуле (14.5) находим площадь сферы:

$$S = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} du \sqrt{R^4\sin^2 u} = R^2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin u du = R^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi R^2.$$

§ 2. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть P — квадрируемая поверхность, заданная явным уравнением или параметрически, и пусть на поверхности P определена ограниченная функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность P на n квадрируемых частей: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, на каждой части P_i возьмем произвольную точку M_i и составим интегральную сумму

$$I(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S(P_i),$$

где $S(P_i)$ — площадь P_i.

Пусть d_i — диаметр P_i, $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i$.

Если существует $\lim\limits_{d\to 0} I(P_i, M_i) = I$, то число I называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(M)$ по поверхности P и обозначается так:

$$I = \iint\limits_P f(M)\, ds \quad \text{или} \quad I = \iint\limits_P f(x, y, z)\, ds.$$

Поверхностный интеграл первого рода является обобщением понятия двойного интеграла на случай, когда область интегрирования — не плоская, а произвольная поверхность.

Примеры. 1) Если $f(M) = 1$, то $\iint\limits_P ds = S(P)$ — площадь поверхности P.
2) Если P — заряженная поверхность и $\rho(M)$ — поверхностная плотность заряда в точке M, то $\iint\limits_P \rho(M)\,ds = q$ — суммарный заряд поверхности P.

Теорема 2. Пусть: 1) поверхность P задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, где G — квадрируемая замкнутая область, а функция $z(x, y)$ имеет в области G непрерывные частные производные $z_x(x, y)$ и $z_y(x, y)$ (то есть P — гладкая поверхность); 2) функция $f(M) = f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности P.

Тогда поверхностный интеграл первого рода от функции $f(M)$ по поверхности P существует, и справедливо равенство

$$\iint\limits_P f(x, y, z)\,ds = \iint\limits_G f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\;dxdy. \tag{14.6}$$

Доказательство. Разобьем поверхность P на квадрируемые части: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. Пусть G_i — проекция P_i на плоскость Oxy, так что $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$. Выберем на каждой части P_i произвольным образом точку M_i и составим интегральную сумму

$$I(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S(P_i). \tag{14.7}$$

Двойной интеграл в правой части равенства (14.6) обозначим буквой I и запишем в виде

$$I = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G_i} f(x, y, z)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\;dxdy.$$

Каждое слагаемое в правой части написанного равенства преобразуем по формуле среднего значения:

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) \iint\limits_{G_i} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\;dxdy,$$

где $K_i \in P_i$. Так как $\iint\limits_{G_i} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = S(P_i)$, то

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) S(P_i). \tag{14.8}$$

Вычитая (14.8) из (14.7), получаем:

$$I(P_i, M_i) - I = \sum_{i=1}^{n} [f(M_i) - f(K_i)] S(P_i). \tag{14.9}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(M)$ непрерывна на поверхности P, которая является ограниченным замкнутым множеством в силу условия 1) теоремы, то $f(M)$ равномерно непрерывна на поверхности P. Поэтому $\exists\, \delta > 0$, такое, что если d_i = диаметр $P_i < \delta$, то для любых двух точек M_i и K_i на поверхности P_i будет выполнено неравенство

$$|f(M_i) - f(K_i)| < \frac{\varepsilon}{S(P)},$$

где $S(P)$ — площадь поверхности P.

Следовательно, для любого разбиения поверхности P, у которого $d < \delta$, из равенства (14.9) следует:

$$|I(P_i, M_i) - I| < \frac{\varepsilon}{S(P)} \sum_{i=1}^{n} S(P_i) = \varepsilon.$$

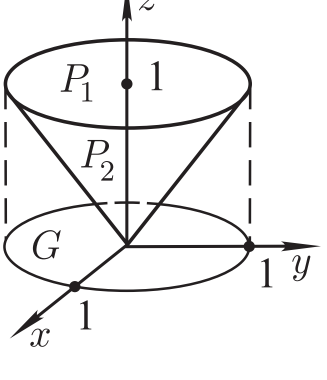


Рис. 14.9.

Это означает, что $\lim\limits_{d \to 0} (I(P_i, M_i) - I) = 0$, то есть существует $\lim\limits_{d \to 0} I(P_i, M_i) = I$, а так как $\lim\limits_{d \to 0} I(P_i, M_i)$ — это и есть поверхностный интеграл $\iint\limits_{P} f(x, y, z)\, ds$, а I — двойной интеграл из правой части равенства (14.6), то тем самым доказана справедливость равенства (14.6). Теорема 2 доказана.

Пример. Вычислить $\iint\limits_{P} (x^2 + y^2)\, ds$, где P — граница тела, заданного неравенствами $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$.

Эти неравенства задают конус, ограниченный основанием P_1, лежащим в плоскости $z = 1$, и боковой поверхностью P_2

(рис. 14.9). Вычислим отдельно поверхностные интегралы по поверхностям P_1 и P_2.
P_1: $z = 1$, $(x, y) \in G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. По формуле (14.6):

$$\iint\limits_{P_1} (x^2 + y^2)\, ds = \iint\limits_{G} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 0 + 0}\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 \cdot r dr = 2\pi \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

P_2: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in G$. По формуле (14.6):

$$\iint\limits_{P_2} \left(x^2 + y^2\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{G} \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \sqrt{2} \iint\limits_{G} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Итак, $\displaystyle\iint\limits_{P} = \iint\limits_{P_1} + \iint\limits_{P_2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{\pi}{2}$.

Замечание. Если гладкая поверхность P задана параметрически

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v),\ (u, v) \in g,$$

то поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности P вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{P} f(x, y, z)\, ds = \iint\limits_{g} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))\sqrt{EG - F^2}\, dudv. \tag{14.10}$$

§ 3. Поверхностные интегралы второго рода

Понятие стороны поверхности. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, то на основе наглядных представлений можно различать у нее *верхнюю* и *нижнюю* стороны. У поверхности, ограничивающей некоторое тело, например у сферы, можно различать *внешнюю* и *внутреннюю* стороны. Введем понятие стороны поверхности.

Рассмотрим поверхность P, в каждой точке M которой существует касательная плоскость. Вектор нормали к поверхности в точке M обозначим $\vec{n}(M)$. Пусть в каждой точке M поверхности P можно задать вектор $\vec{n}(M)$ так, что вектор-функция $\vec{n}(M)$, $M \in P$ будет непрерывной на всей поверхности, то есть в каждой точке поверхности непрерывны координаты вектор-функции $\vec{n}(M)$. В таком случае будем говорить, что на поверхности P задано *непрерывное векторное поле нормалей $\vec{n}(M)$,* и под *стороной поверхности* будем понимать множество всех ее точек с заданными в них векторами нормали, образующими непрерывное векторное поле $\vec{n}(M)$. Заметим, что в этом случае вектор-функция $-\vec{n}(M)$, $M \in P$ также задает непрерывное векторное поле нормалей на поверхности P. Будем считать, что это поле нормалей относится к другой стороне поверхности.

Таким образом, если на поверхности P существует непрерывное векторное поле нормалей $\vec{n}(M)$, то эта поверхность имеет две стороны: на одной стороне поле нормалей задается вектор-функцией $\vec{n}(M)$, $M \in P$, а на другой — вектор-функцией $-\vec{n}(M)$, $M \in P$. Такая поверхность называется *двусторонней*.

Если же на поверхности P не существует непрерывного векторного поля нормалей (при наличии вектора нормали в каждой точке поверхности), то поверхность P принято называть *односторонней*.

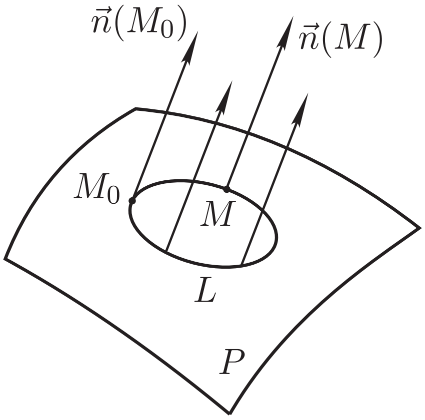


Рис. 14.10.

Примером двусторонней поверхности является сфера. На одной ее стороне вектор $\vec{n}(M)$ в каждой точке направлен внутрь шара (это внутренняя сторона сферы), а на другой стороне — наружу (это внешняя сторона сферы).

Двусторонняя поверхность P характеризуется следующим свойством: для любой точки $M \in P$ и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности P через точку M и не пересекающегося с границей поверхности, заданный в точке M вектор нормали $\vec{n}(M)$, непрерывно изменяясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления (на противоположное) при возвращении точки в исходное положение (рис. 14.10). На односторонней поверхности существует такой контур, при обходе которого и возвращении точки в исходное положение направление вектора нормали изменится на противоположное.

Примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса. Его можно изготовить из прямоугольной полоски бумаги, повернув ее узкие стороны и склеив их так, чтобы совпадали вершины прямоугольника, являющиеся концами одной и той же диагонали (то есть точки A и C, B и D, рис. 14.11).

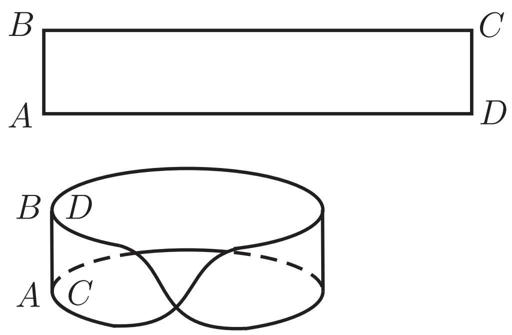


Рис. 14.11.

Гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$, является двусторонней. На одной стороне поверхности непрерывное векторное поле нормалей можно задать вектор–функцией $\vec{n}(M) = \{-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\}$ (верхняя сторона поверхности), а на другой стороне — вектор-функцией $-\vec{n}(M) = \{f_x(x,y), f_y(x,y), -1\}$ (нижняя сторона поверхности).

Если гладкая двусторонняя поверхность задана параметрически:

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \in g,$$

то на одной стороне непрерывное векторное поле нормалей можно задать вектор-функцией $\vec{n}(M) = \{A, B, C\}$, а на другой стороне — вектор-функцией $-\vec{n}(M) = \{-A, -B, -C\}$.

Двусторонняя поверхность называется также *ориентируемой*, а выбор определенной стороны называется *ориентацией поверхности*.

Понятия двусторонней и односторонней поверхности можно ввести и для кусочно-гладких поверхностей (то есть поверхностей, составленных из нескольких гладких поверхностей). Примером кусочно-гладкой двусторонней поверхности является поверхность параллелепипеда.

Определение поверхностных интегралов второго рода. Пусть P — гладкая двусторонняя поверхность. Выберем на ней одну из сторон, то есть фиксируем непрерывное поле нормалей $\vec{n}(M)$. Обозначим через $\alpha(M)$, $\beta(M)$, $\gamma(M)$ углы между вектором $\vec{n}(M)$ и осями координат. Если $|\vec{n}(M)| = 1$, то $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Пусть на поверхности P определены три функции: $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$. Рассмотрим поверхностные интегралы первого рода

$$I_1 = \iint\limits_P P(M)\cos\alpha(M)\,dS,\ I_2 = \iint\limits_P Q(M)\cos\beta(M)\,dS,$$
$$I_3 = \iint\limits_P R(M)\cos\gamma(M)\,dS.$$

Они называются *поверхностными интегралами второго рода соответственно от функций P, Q, R по выбранной стороне поверхности P*. Для них используются также следующие обозначения:

$$I_1 = \iint\limits_P P\,dydz,\ I_2 = \iint\limits_P Q\,dzdx,\ I_3 = \iint\limits_P R\,dxdy$$

(смысл этих обозначений состоит в том, что $dydz = dS\cdot\cos\alpha$ — площадь проекции элемента поверхности с площадью dS на плоскость Oyz, и также $dzdx = dS\cdot\cos\beta$ и $dxdy = dS\cdot\cos\gamma$).

Если выбрать другую сторону поверхности, то вектор $\vec{n}(M)$ во всех точках изменит направление, поэтому его координаты $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ изменят знак и, следовательно, интегралы I_1, I_2, I_3 изменят знак. В этом отношении поверхностные интегралы второго рода аналогичны криволинейным интегралам второго рода, которые изменяют знак при изменении направления движения по кривой.

Сумма

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \iint\limits_P P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

называется *общим поверхностным интегралом второго рода*.

Если ввести вектор-функцию $\vec{a}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, то общий интеграл I можно записать в виде

$$I = \iint\limits_P (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS.$$

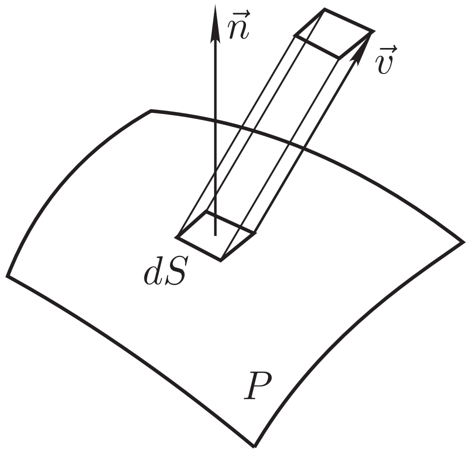


Рис. 14.12.

Физический пример. Если $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ — скорость в точке M течения жидкости, заполняющей какую-то часть пространства, то $\iint\limits_P (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS$ представляет собой *поток жидкости* через ориентированную поверхность P, то есть количество (объем) жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность P с выбранным на ней непрерывным векторным полем единичных нормалей:

$(\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS$ — поток жидкости через элемент поверхности с площадью dS (рис. 14.12);

$\iint\limits_P (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS$ — поток жидкости через ориентированную поверхность P.

В общем случае интеграл $\iint\limits_P (\vec{a} \cdot \vec{n})\, ds$ называется *потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность P.*

Вычисление поверхностных интегралов второго рода путем сведения к двойным интегралам.

1) Пусть гладкая поверхность P задана уравнением

$$z = f(x, y), \ (x, y) \in G.$$

Выберем, например, верхнюю сторону поверхности P, на которой

$$\vec{n}(M) = \{-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\}.$$

Тогда $\cos\alpha(M) = \dfrac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$

$$\left(\text{на нижней стороне поверхности} \cos\alpha(M) = \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right);$$

$$\cos\beta(M) = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}; \ \cos\gamma(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Пусть функции P, Q, R непрерывны на поверхности P. По формуле (14.6) получаем:

$$
\begin{gathered}
I_1 = \iint\limits_P P(x,y,z)\cos\alpha(M)\,dS = \\
= \iint\limits_G P(x,y,f(x,y))\frac{-f_x(x,y)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy = \\
= -\iint\limits_G P(x,y,f(x,y))f_x(x,y)\,dxdy, \\
I_2 = \iint\limits_P Q(x,y,z)\cos\beta(M)\,dS = \\
= -\iint\limits_G Q(x,y,f(x,y))f_y(x,y)\,dxdy, \\
I_3 = \iint\limits_P R(x,y,z)\cos\gamma(M)\,dS = \iint\limits_G R(x,y,f(x,y))\,dxdy.
\end{gathered}
\tag{14.11}
$$

2) Пусть гладкая двусторонняя поверхность P задана параметрически:

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v),\ (u,v)\in g.$$

Выберем ту сторону поверхности, на которой $\vec{n}=\{A,B,C\}$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\beta(M) = \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}},\ \cos\gamma(M) = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

По формуле (14.10) получаем:

$$
\begin{gathered}
I_1 = \iint_P P\cos\alpha\, ds = \iint_g P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\times \\
\times \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}}\sqrt{EG-F^2}\, dudv = \iint_g P(\varphi,\psi,\chi)A(u,v)\, dudv, \\
I_2 = \iint_g Q(\varphi,\psi,\chi)B(u,v)\, dudv, \\
I_3 = \iint_g R(\varphi,\psi,\chi)C(u,v)\, dudv.
\end{gathered}
\tag{14.12}
$$

Все эти формулы верны и тогда, когда поверхность P — кусочно-гладкая, то есть составлена из конечного числа гладких поверхностей, а функции P, Q, R — кусочно непрерывные на поверхности P.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$
I = \frac{1}{3}\iint_P x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy
$$

по внешней стороне эллипсоида P:

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,
$$

то есть вектор $\vec{n}(M)$ в каждой точке M эллипсоида направлен наружу, а не внутрь тела, ограниченного эллипсоидом.

Перейдем к параметрическим уравнениям эллипсоида:

$$
\begin{gathered}
x = a\sin u\cos v,\ y = b\sin u\sin v,\ z = c\cos u, \\
(u,v)\in g = \{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant \pi,\, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\}.
\end{gathered}
$$

Вычислим координаты вектора нормали

$$\vec{n} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}:$$

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b\cos u \sin v & -c\sin u \\ b\sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = bc\sin^2 u \cos v,$$

$$B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c\sin u & a\cos u \sin v \\ 0 & -a\sin u \sin v \end{vmatrix} = ac\sin^2 u \sin v,$$

$$C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos u \cos v & b\cos u \sin v \\ -a\sin u \sin v & b\sin u \cos v \end{vmatrix} = ab\sin u \cos u.$$

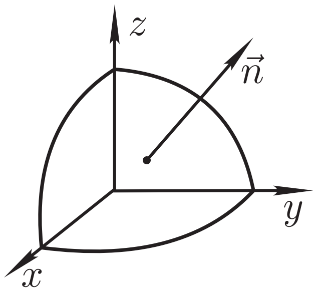


Рис. 14.13.

Для внешней стороны эллипсоида

$$\vec{n} = \{A, B, C\},$$

что легко установить по первому октанту $\{0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, для которого углы α, β, γ — острые (рис. 14.13).

По формулам (14.12) получаем:

$$I = \frac{1}{3}\iint\limits_g (xA + yB + zC)\,dudv =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_g \left(abc\sin^3 u\cos^2 v + abc\sin^3 u \sin^2 v + abc\sin u\cos^2 u\right) dudv =$$

$$= \frac{1}{3}abc\iint\limits_g \sin u\,dudv = \frac{1}{3}abc\int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^{\pi} \sin u\,du = \frac{4}{3}\pi abc \text{ —}$$

объем тела, ограниченного эллипсоидом. Этот результат — не случайный. В следующем параграфе будет получена формула Остроградского–Гаусса, из которой последует, что объем любого тела, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью P, вычисляется с помощью такого же поверхностного интеграла, как в рассмотренном примере:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_P x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.$$

§ 4. Формула Остроградского–Гаусса

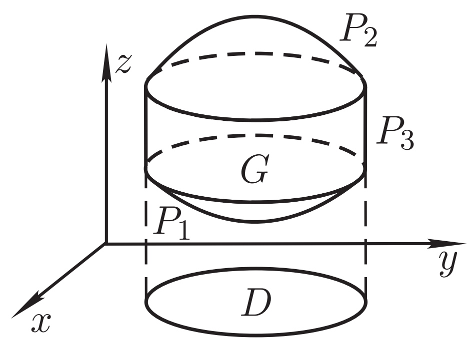
Пусть функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в ограниченной связной замкнутой области D, причем $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Область $G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$ назовем «*z-цилиндрической*» (рис. 14.14). Аналогично определяются «x-цилиндрическая» и «y-цилиндрическая» области.

Область G назовем *простой*, если ее можно разбить на конечное число «x-цилиндрических» областей, и также на конечное число «y-цилиндрических» областей, и на конечное число «z-цилиндрических» областей.

Пример: параллелепипед и шар — простые области.

Границу области G, то есть ограничивающую ее поверхность, будем обозначать буквой P.



P_1: $z = z_1(x, y)$, P_2: $z = z_2(x, y)$, P_3 — *цилиндрическая поверхность*

Рис. 14.14.

Теорема 3. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой области G, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью P. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \\
&= \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds = \\
&= \iint\limits_P P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy,
\end{aligned} \tag{14.13}$$

где поверхностный интеграл второго рода берется по внешней стороне поверхности P (то есть α, β, γ — углы между внешней нормалью к поверхности P и осями координат).

Формула (14.13) называется формулой Остроградского–Гаусса. Она была получена М.В. Остроградским в 1827 г. в связи с рассмотрением задачи о распространении тепла в твердом теле. Гаусс получил эту формулу ранее в частном случае, когда $P = x$, $Q = y$, $R = z$.

Доказательство. а) Рассмотрим сначала случай, когда G — «z-цилиндрическая» область, и докажем справедливость равенства

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{P} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds. \tag{14.14}$$

Сводя тройной интеграл к повторному, получаем:

$$\begin{gathered}\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \\ = \iint\limits_{D} dxdy \cdot R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} = \\ = \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy - \iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy.\end{gathered} \tag{14.15}$$

Первый из двойных интегралов в правой части (14.15) выразим через поверхностный интеграл по верхней стороне поверхности P_2 ($z = z_2(x,y)$), а второй — через поверхностный интеграл по нижней стороне поверхности P_1 ($z = z_1(x,y)$) (см. формулу (14.11)):

$$\iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy = \iint\limits_{P_2} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds,$$
$$\iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy = -\iint\limits_{P_1} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds.$$

Обозначим через P_3 боковую (цилиндрическую) поверхность области G. Так как в точках этой поверхности $\vec{n} \perp Oz$, то $\cos\gamma = 0$, и поэтому

$$\iint\limits_{P_3} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds = 0.$$

Равенство (14.15) можно теперь записать в виде

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_{P_2} R\cos\gamma\,ds + \iint\limits_{P_1} R\cos\gamma\,ds + \iint\limits_{P_3} R\cos\gamma\,ds = \\ = \iint\limits_{P} R\cos\gamma\,ds,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности P. Тем самым, справедливость равенства (14.14) для «z-цилиндрической» области доказана.

б) Пусть теперь G — простая область. Разобъем ее на конечное число «z-цилиндрических» областей G_i с границами P_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Запишем для каждой области G_i равенство (14.14):

$$\iiint\limits_{G_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_{P_i} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds.$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до n, получим в левой части интеграл $\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz$, а в правой части интеграл $\iint\limits_{P} R(x,y,z)\cos\gamma\,dxdy$, поскольку поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям, разделяющим область G на части G_i, берутся дважды, причем один раз по одной стороне каждой такой поверхности, а другой раз — по другой стороне (рис. 14.15), и поэтому сумма двух таких интегралов равна нулю.

Итак, для простой области G справедливо равенство

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_{P} R(x,y,z)\cos\gamma\,ds.$$

Аналогично выводятся равенства (путем разбиения области G на «x-цилиндрические», а затем на «y-цилиндрические» области):

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \iint\limits_{P} P(x,y,z)\cos\alpha\,ds, \tag{14.16}$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \iint\limits_{P} Q(x,y,z)\cos\beta\,ds. \tag{14.17}$$

Складывая (14.14), (14.16) и (14.17), приходим к равенству (14.13):

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds.$$

Теорема 3 доказана.

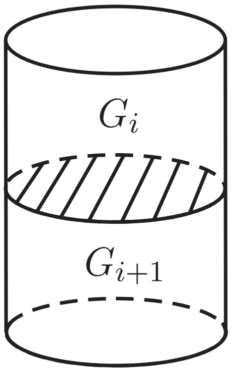


Рис. 14.15.

Замечания. 1) Введем вектор-функцию $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и скалярную функцию, которая называется *дивергенцией* векторного поля $\vec{a}$: $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$. Тогда формулу Остроградского–Гаусса можно записать в виде

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz = \iint\limits_P (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds.$$

2) Можно доказать, что формула Остроградского–Гаусса верна для любой области G, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

Следствие. Если функции P, Q, R таковы, что

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1,$$

то из формулы Остроградского-Гаусса получим выражение для объема области G через поверхностный интеграл:

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds.$$

В частности, если $P = \dfrac{1}{3}x$, $Q = \dfrac{1}{3}y$, $R = \dfrac{1}{3}z$, то $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1$, и для объема $V(G)$ получается формула:

$$V(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_P (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, ds =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_P x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности P. Эту формулу можно записать в виде

$$V(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_P (\vec{r}\cdot\vec{n})\,ds, \quad \text{где} \quad \vec{r} = \{x, y, z\}.$$

Пример. Вычислить

$$I = \iint\limits_P \big(x^2 + f_1(y,z)\big)\,dydz + (\cos y + f_2(x,z))\,dzdx + \\ + (z + f_3(x,y))\,dxdy,$$

где P — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Здесь $P = x^2 + f_1(y,z)$, $Q = \cos y + f_2(x,z)$, $R = z + f_3(x,y)$, поэтому $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\sin y$, $\dfrac{\partial R}{\partial z} = 1$. По формуле Остроградского–Гаусса

$$I = \iiint\limits_G \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,dxdydz = \\ = \iiint\limits_G (2x - \sin y + 1)\,dxdydz = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 5. Формула Стокса

Пусть P — двусторонняя поверхность, ограниченная контуром L. Выберем одну из сторон поверхности, то есть ориентируем поверхность. Введем *положительное направление обхода контура L, соответствующее ориентации поверхности*, следующим образом: если наблюдатель находится на выбранной стороне поверхности (то есть направление от ног к голове совпадает с направлением вектора нормали), то при обходе контура в положительном направлении он оставляет поверхность слева от себя (рис. 14.16).

Если граница поверхности состоит из нескольких контуров, то для каждого из них положительное направление обхода определяется таким же образом (рис. 14.17). Выбор положительного направления обхода контура называется также *согласованием ориентации контура с ориентацией поверхности*.

Определение. Назовем поверхность P *«xyz-проектируемой»*, если она взаимно однозначно проектируется на каждую

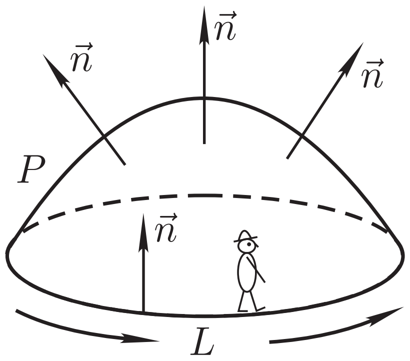


Рис. 14.16.

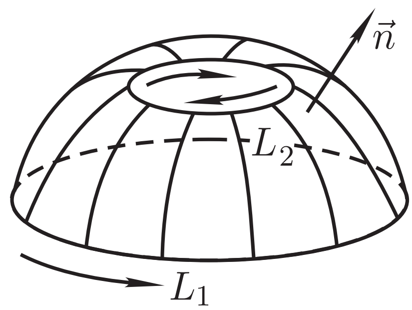


Рис. 14.17.

координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Такую поверхность можно задать любым из трех уравнений вида:

$$\begin{aligned} &z = f_1(x, y), \quad (x, y) \in D_1; \\ &x = f_2(y, z), \quad (y, z) \in D_2; \\ &y = f_3(z, x), \quad (z, x) \in D_3. \end{aligned} \tag{14.18}$$

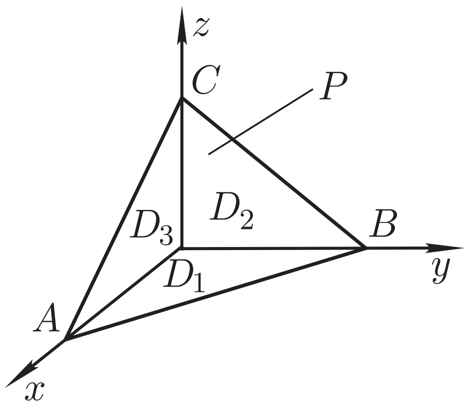


Рис. 14.18.

Простейшим примером такой поверхности является плоский треугольник ABC, изображенный на рисунке 14.18. В дальнейшем под гладкой «xyz-проектируемой» поверхностью будем понимать такую поверхность P, которая удовлетворяет следующим условиям:

функции f_1, f_2 и f_3 из уравнений (14.18) имеют непрерывные частные производные первого порядка в замкнутых ограниченных областях D_1, D_2 и D_3, а границей поверхности P является замкнутый кусочно-гладкий контур, взаимно однозначно проектирующийся на границу каждой области D_i ($i = 1, 2, 3$).

Теорема 4. Пусть

1) функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в области G;

2) гладкая «xyz-проектируемая» поверхность P, ограниченная контуром L, расположена внутри области G.

Тогда справедливо равенство

$$\oint\limits_L P dx + Q dy + R dz = \iint\limits_P \Big[\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma + \\ + \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta\Big]\, ds, \tag{14.19}$$

где α, β, γ — углы между вектором нормали на выбранной стороне поверхности P и осями Ox, Oy, Oz, а ориентация контура L согласована с ориентацией поверхности P.

Формула (14.19) называется *формулой Стокса*. Она выражает криволинейный интеграл по замкнутому контуру L через поверхностный интеграл второго рода по поверхности P, ограниченной контуром L.

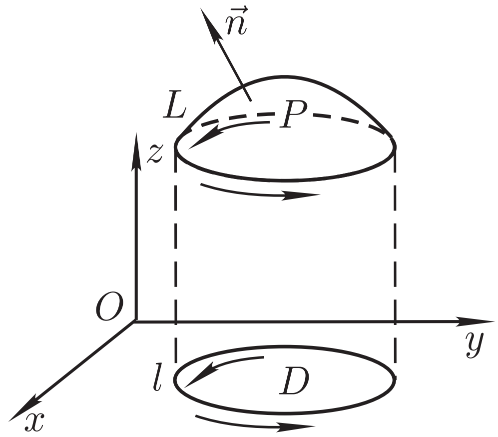


Рис. 14.19.

Доказательство. Запишем уравнение поверхности P в виде

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D,$$

где D — проекция поверхности P на плоскость Oxy.

Обозначим буквой l проекцию контура L на плоскость Oxy. Контур l является границей области D (рис. 14.19).

Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint\limits_L P(x, y, z)\, dx$. Преобразуем его в интеграл по поверхности P по следующей схеме:

$$\oint\limits_L \xrightarrow{(1)} \oint\limits_l \xrightarrow{(2)} \iint\limits_D \xrightarrow{(3)} \iint\limits_P .$$

Для определенности будем рассматривать верхнюю сторону поверхности P. При этом контур L пробегается в соответствующем положительном направлении (см. рис. 14.19).

(1) Пусть параметрические уравнения контура l имеют вид

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

и контур l пробегается в положительном направлении при возрастании t от α до β.

Тогда параметрические уравнения контура L можно записать в виде

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = f(\varphi(t), \psi(t)),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Поэтому

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P\left(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t))\right)\varphi'(t)\,dt,$$

$$\oint\limits_l P(x,y,f(x,y))\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P\left(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t))\right)\varphi'(t)\,dt,$$

откуда следует равенство

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx = \oint\limits_l P(x,y,f(x,y))\,dx.$$

(2) Согласно формуле Грина

$$\oint\limits_l Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

справедливо равенство

$$\oint\limits_l P(x,y,f(x,y))\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}\,P(x,y,f(x,y))\,dxdy =$$
$$= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$$

(3) Вектор $\overrightarrow{n} = \left\{-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1\right\}$ является вектором нормали на верхней стороне поверхности P, поэтому его координаты пропорциональны координатам единичного вектора нормали $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, в частности

$$\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\gamma}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Следовательно,

$$-\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) \frac{1}{\cos\gamma}\, dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_P \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) ds \quad \text{(см. формулу (14.6)).}$$

Итак,

$$\oint_L P dx = \iint_P \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) ds. \tag{14.20}$$

Аналогично можно доказать, что

$$\oint_L Q dy = \iint_P \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) ds, \tag{14.21}$$

$$\oint_L R dz = \iint_P \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) ds. \tag{14.22}$$

Складывая равенства (14.20), (14.21) и (14.22), приходим к равенству (14.19). Теорема 4 доказана.

Замечания. 1) Введем вектор-функцию $\overrightarrow{a} = \{P, Q, R\}$ и вектор-функцию, которая называется *ротором векторного поля* $\overrightarrow{a}(M)$:

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}.$$

Тогда формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint_L \left(\overrightarrow{a} \cdot d\,\overrightarrow{l}\right) = \iint_P (\operatorname{rot}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n})\, ds.$$

Эта формула читается так: *циркуляция векторного поля* $\overrightarrow{a}(M)$ *вдоль замкнутого контура* L *равна потоку векторного поля* $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{a}(M)$ *через поверхность, натянутую на контур* L.

2) Если поверхность P не является «xyz-проектируемой», но допускает разбиение на конечное число «xyz-проектируемых» поверхностей, то формула Стокса остается в силе.

Примером такой поверхности является полусфера, расположенная в полупространстве $z \geqslant 0$ (рис. 14.20). Ее можно разбить на 4 «xyz-проектируемые» части.

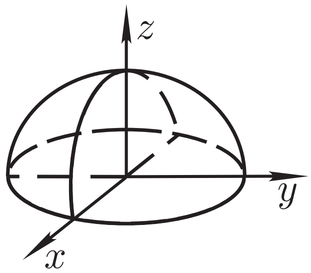


Рис. 14.20.

3) Если поверхность P представляет собой плоскую область, расположенную в плоскости, перпендикулярной к оси координат, то она не является «xyz-проектируемой». Однако, формула Стокса верна и в этом случае. Более того, для такой поверхности формула Стокса переходит в формулу Грина. Пусть, например, плоская поверхность P перпендикулярна к оси Oz. Тогда $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, $\oint\limits_L Rdz = 0$ и из формулы Стокса получаем:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \quad \text{(формула Грина)}.$$

4) Формула Стокса остается в силе, если граница поверхности P состоит из нескольких замкнутых контуров. При этом в левой части формулы нужно написать сумму криволинейных интегралов по всем этим контурам, пробегаемым в положительном направлении.

5) Для запоминания формулы Стокса полезно заметить, что первое слагаемое под знаком интеграла в правой части формулы (14.19) является произведением подинтегральной функции из правой части формулы Грина на $\cos\gamma$, а два следующих слагаемых получаются из первого циклической перестановкой:

$$\begin{array}{ccc} P & \rightarrow & Q \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & R & \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} x & \rightarrow & y \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & z & \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} \alpha & \rightarrow & \beta \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & \gamma & \end{array}.$$

§ 6. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве

Пусть G — область в пространстве $\mathbb{R}^3$, то есть открытое связное множество. Будем называть область G *поверхностно односвязной*, если для любого замкнутого контура L, лежащего в области G, существует поверхность, ограниченная контуром L и целиком лежащая в области G.

Примеры. Шар, параллелепипед, область между двумя концентрическими сферами — поверхностно односвязные области; тор не является поверхностно односвязной областью.

Теорема 5. I. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ определены и непрерывны в области G. Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура L, расположенного в области G, справедливо равенство
$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$
2. Для любых двух точек A и B области G криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования, расположенного в области G.
3. Выражение $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ является полным дифференциалом, то есть в области G существует функция $u = u(x, y, z)$, такая, что
$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$
При этом для любой кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в области G, имеет место равенство
$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

II. Если область G — поверхностно односвязная, а функции P, Q, R имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка, то каждое из условий 1–3 эквивалентно условию

4. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ во всех точках области G.

Если ввести вектор-функцию $\overrightarrow{a} = \{P, Q, R\}$, то условие 4 можно записать в виде $\operatorname{rot}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

Доказательства утверждений I и II проводятся по той же схеме, что и в аналогичной теореме для криволинейных интегралов на плоскости:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1 \quad \text{и} \quad 3 \to 4 \to 1.$$

Отличие состоит лишь в том, что при доказательстве утверждения $4 \to 1$ нужно воспользоваться не формулой Грина, а формулой Стокса.

Замечание. Функция $u(x, y, z)$ из условия 3 может быть найдена по формуле

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\, dz + C,$$

где (x_0, y_0, z_0) — какая-нибудь фиксированная точка, C — произвольная постоянная, а в качестве кривой интегрирования взята ломаная, отрезки которой параллельны осям координат.

Список литературы

1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2009.
2. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. М.: Дрофа, 2006.
3. С.М. Никольский. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
4. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин Математический анализ в вопросах и задачах. СПб.: Лань, 2008.
5. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2009.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА