

Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2020

Задачи для семинара № 1

**Гладкие регулярные кривые и поверхности в $\mathbb{R}^n$,
заданные параметрически или неявно.**

Задача 1. Доказать, что стандартная сфера $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью в аффинном пространстве. Какова её размерность? Какие можно выбрать локальные координаты?

Задача 2. Доказать, что $SO(3)$ — регулярная гладкая неявно заданная поверхность в пространстве вещественных 3×3 -матриц. Аналогичный вопрос для группы $O(n)$. Какова размерность этих групп?

Задача 3. Доказать, что $SL(n, \mathbb{R})$ — регулярная гладкая гиперповерхность в пространстве $n \times n$ -матриц.

Задача 4. Задать тор вращения как гладкую гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Неособа ли эта поверхность?

Задача 5*. Описать множество ортонормированных k -реперов с началом в точке $(0, \dots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$ как неявно заданную поверхность в аффинном пространстве $k \times n$ -матриц. Доказать, что эта поверхность гладкая и регулярная, найти её размерность. Эта поверхность называется многообразием Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Что можно сказать про $V_1(\mathbb{R}^n)$ и $V_n(\mathbb{R}^n)$?

Задачи для семинара № 2

Гладкие многообразия, гладкие функции

Задача 1. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ и два атласа: первый задаётся с помощью стереографических проекций из южного и северного полюсов, а другой с помощью параметризаций открытых полусфер через пару координат в трёхмерном евклидовом пространстве (например, в верхней полусфере в качестве координат используются x и y). Докажите, что это действительно атласы, то есть карты удовлетворяют определению карт и согласованы. Эквивалентны ли эти два атласа?

Задача 2. Рассмотрим на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

функцию $f(x, y, z) = z$. Запишите эту функцию в локальных координатах u, v , соответствующих стереографической проекции из северного полюса. Запишите эту функцию в локальных координатах $\tilde{u}, \tilde{v}$, соответствующих стереографической проекции из южного полюса. Сделайте замену переменных и убедитесь, что

$$f(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) = f(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Что обозначает буква f в правой и левой части этого равенства?

Задача 3. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ не эквивалентны, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

Задача 4. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и карту на нём, заданную формулами

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \psi, \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \psi, \\ z = r \sin \varphi, \end{cases}$$

где, например, $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p . Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v , полученные проекцией из северного полюса. Запишите отображение N в координатах φ, ψ на $\mathbb{T}^2$ и u, v на $\mathbb{S}^2$. Является ли отображение Гаусса гладким?

Задача 5*. Множество k -плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

Задача 6*. Введите однородные и неоднородные комплексные координаты на $\mathbb{CP}^1$. Докажите, что $\mathbb{CP}^1$ является (вещественным) гладким двумерным многообразием. Докажите, что как вещественное многообразие $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2$. *Указание: если в координатах на сфере, введённых с помощью стереографической проекции, положить $z = u + iv$, $w = \tilde{u} - i\tilde{v}$, то отображение склейки принимает вид*

$$z = \frac{1}{w}$$

(проверьте!)

Задача 7*. Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

Задачи для семинара № 3

Касательные векторы, векторные поля, коммутатор векторных полей, дифференциал отображения - I

Задача 1. Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и точку $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Какова размерность касательного пространства $T_P\mathbb{S}^1$? Найти какой-либо базис в касательном пространстве $T_P\mathbb{S}^1$.

Задача 2. (а) Описать в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство $T_P\mathbb{S}^2$ к сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

(б) Пусть u и v обозначают стереографические координаты, полученные проекцией из северного полюса. Найти координаты точки P .

(в) Найти координаты базисных векторов $\frac{\partial}{\partial u}$ и $\frac{\partial}{\partial v}$ пространства $T_P\mathbb{S}^2$ в стандартном базисе объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$.

(г) Рассмотрим вектор $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in T_P\mathbb{S}^2$. Найти его координаты в базисе $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$, где s и t обозначают стереографические координаты, полученные проекцией из южного полюса.

(д) Пусть $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции $x + y + z$ на сферу. Найти $\partial_V f$.

Задача 3. Найти касательное пространство к $\text{SO}(3)$ в а) точке E , б) точке

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, которое в стереографических координатах u и v , полученных проекцией из северного

полюса N , задаётся формулой $z \mapsto z^2$, где $z = u + iv$. Гладкое ли это отображение? Запишите его в стереографических координатах s и t , полученных проекцией из южного полюса, а также в терминах $w = s - it$. Продолжается ли это отображение в северный полюс? Будет ли оно гладким на всей сфере, включая полюса?

Задачи для семинара № 4

Касательные векторы, векторные поля, коммутатор векторных полей, дифференциал отображения - II

Задача 1. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, которое в стереографических координатах u и v , полученных проекцией из северного полюса N , задаётся формулой $z \mapsto z^2$, где $z = u + iv$. Рассмотрим точку P с координатами $u = 1, v = 1$ и вектор $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in T_P \mathbb{S}^2$. Найти $d_P F(V)$. Найти дифференциал F в произвольной точке в координатах u, v , а также в стереографических координатах s и t , полученных проекцией из южного полюса.

Задача 2. Рассмотрим стандартное отображение $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, сопоставляющее точке A на сфере точку проективной плоскости, отвечающей проходящей через A прямой. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u и v , полученных проекцией из северного полюса N , а на проективной плоскости однородные координаты $[z^0 : z^1 : z^2]$ и неоднородные координаты $x^1 = \frac{z^1}{z^0}, x^2 = \frac{z^2}{z^0}$ в аффинной карте U_0 . Записать отображение p в координатах u, v и x^1, x^2 . Найти дифференциал p в произвольной точке сферы в этих координатах.

Задача 3. Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Записать векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial r}$ и $Y = r \frac{\partial}{\partial \varphi}$ в декартовых координатах и найти их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в обеих системах координат. Убедиться, что результат не зависит от выбора локальных координат.

Задача 4. Пусть M — регулярная гладкая k -мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пусть X и Y — векторные поля на $\mathbb{R}^n$, определённые в некоторой окрестности M , касательные к M , то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $X(P), Y(P) \in T_P M$. Докажите, что тогда $[X, Y]$ тоже касается M , то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $[X, Y](P) \in T_P M$.

Задача 5. Докажите, что $[X, fY] = \partial_X f \cdot Y + f \cdot [X, Y]$.

Задача 6. Является ли образ гладкого векторного поля при гладком отображении гладким векторным полем?

Задача 7. Проверьте, сохраняется ли коммутатор векторных полей при отображениях многообразий. Пусть $\varphi : M \rightarrow N$ локальный диффеоморфизм, X, Y векторные поля на M . Верно ли, что тогда $d\varphi_p[X, Y] = [d\varphi_p X, d\varphi_p Y]$?

Задачи для семинара № 5

Дифференциал отображения, дифференциал функции, дифференциальные формы

Задача 1. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $F : M \rightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p , что отображение $F : U \rightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом U на открытое множество $F(U)$.

Задача 2. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть u и v — стереографические координаты, полученные проекцией из северного полюса. Рассмотрим векторное поле $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ и функцию $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

являющуюся ограничением функции $x + y + z$ на сферу. Найти координаты дифференциала df в базисе du, dv . Используя полученный ответ, вычислить $df(V)$. Сравнить результат с $\partial_V f$.

Задача 3. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и такую карту (U, α) на нём, что α^{-1} задаётся формулами

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \psi, \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \psi, \\ z = r \sin \varphi, \end{cases}$$

а U — неравенствами $\varphi \in (0, \pi), \psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p . Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v , полученные проекцией из северного полюса. Для произвольной точки $A \in \mathbb{T}^2$ найдите $d_A N \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ и $d_A N \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right)$ в координатах u, v . Найдите матрицу дифференциала отображения N в базисах $\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$.

Задача 4. Пусть M многообразие размерности k , а $f_1, \dots, f_k$ такие функции на M , что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \dots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Задача 5. Пусть M многообразие размерности k , а $f_1, \dots, f_l, l < k$, такие функции на M , что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \dots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Задача 6. Пусть $F : M \rightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $F(p) \in N$ функции $x^1, \dots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ F, \dots, x^l \circ F$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p .

Задачи для семинара № 6

Дифференциальные формы и операции с ними - I

Задача 1. Доказать, что если для любой гладкой 1-формы ω функция $\omega(X)$ является гладкой, то векторное поле X является гладким.

Задача 2. Доказать, что нет нетривиальных кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве V от k аргументов, если $k > \dim V$.

Задача 3. Рассмотрим 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ и векторные поля $X_1, \dots, X_k$. Доказать, что

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(X_1) & \dots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Пусть V векторное пространство размерности n . Найти размерность пространства $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций на V от k аргументов.

Задача 5. Доказать, что если дифференциальные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_p$ линейно зависимы, то $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$. Верно ли обратное? Что можно сказать про k -формы?

Задача 6. Найти $d\omega, \iota_X \omega$ и $\omega \wedge (dx + dy + dz)$, если

$$X = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \omega = x^2 dx \wedge dy + xz dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Задача 7. Найти $d\omega$ и $f^*\omega$, если $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, а $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Найти ограничение $\omega|_{\mathbb{S}^1}$ формы ω на окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 8. Записать в полярных координатах дифференциальные формы

$$\omega = f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \quad \sigma = \sqrt{x^2 + y^2} dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2).$$

Задача 9. Пусть Ω дифференциальная p -форма, а ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 10*. Записать форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ в сферических координатах.

Задачи для семинара № 7

Дифференциальные формы и операции с ними - II

Задача 1. Пусть r, φ полярные координаты в плоскости. Доказать, что, хотя функция φ определена с точностью до добавления кратного 2π , её дифференциал $d\varphi$ является корректно определённой 1-формой. Записать $d\varphi$ в декартовых координатах.

Задача 2. На лекции было доказано, что производная Ли 1-формы ω вдоль векторного поля Y может быть в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ найдена так: если

$$\omega = \omega_i dx^i, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

то

$$L_Y \omega = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} Y^j + \omega_l \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

Вывести аналогичную формулу для производной Ли k -формы

$$\sigma = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sigma_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Задача 3. Найти интегральные кривые векторного поля $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ на плоскости.

Задача 4. Найти производную Ли формы $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ вдоль векторного поля $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.

Задача 5. Найти $d(\iota_Z \omega) + \iota_Z(d\omega)$ для $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ и $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ и сравнить с $L_Z \omega$.

Задача 6. Доказать, что

$$[L_X, \iota_Y] \omega = \iota_{[X, Y]} \omega.$$

Задача 7. Доказать, что

$$L_f X \omega = f L_X \omega + df \wedge \iota_X \omega,$$

где f — гладкая функция.

Задача 8. Найти коммутатор векторных полей

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача 9. Пусть даны 1-форма $\omega = x dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $d\omega(X, Y)$ с помощью формулы вычисления внешнего дифференциала формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 10. Пусть даны 1-форма $\omega = x dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $(L_Y \omega)(X)$ с помощью формулы вычисления производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

Задачи для семинара № 8 Дифференциальные формы, их интегрирование

Задача 1. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{y dx - x dy}{y^2},$$

где L ориентированный отрезок от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$ в $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Вычислить интеграл

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Задача 3. Вычислить интеграл от формы $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

Задача 4. Вычислить интеграл по сфере радиуса 1 от формы

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Задача 5. Найти дифференциал от формы $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Записать формулу Грина из курса математического анализа

$$\oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

в терминах ω и $d\omega$.

Задача 6. Найти дифференциал от формы

$$\omega = P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy.$$

Записать формулу Гаусса-Остроградского из курса математического анализа

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

в терминах ω и $d\omega$.

Задача 7. Найти дифференциал от формы $\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$. Аналогично предыдущим двум задачам записать классическую формулу Стокса

$$\oint_{\partial \Sigma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

в терминах ω и $d\omega$.

Задача 8. Пусть $\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Разберитесь, почему

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Задача 9. Пусть $\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, а $\vec{n}$ — поле единичных нормалей к поверхности Σ . Разберитесь, почему

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Задача 10. Перепишите на языке дифференциальных форм классические формулы Стокса

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

и Гаусса-Остроградского

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Задачи для семинаров № 9 и 10

Ориентация. Разбиение единицы. Многообразия с краем.

Теорема Стокса.

Задача 1. Доказать, что выбор ориентации на двумерной поверхности в трёхмерном ориентированном евклидовом пространстве эквивалентен выбору гладкого поля единичных нормалей к поверхности.

Задача 2. Построить атлас на многообразии с краем — единичном замкнутом диске $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ в евклидовой плоскости.

Задача 3. Объяснить, как известные из анализа формулы Гаусса-Остроградского и Стокса получаются как частный случай теоремы Стокса для дифференциальных форм. Почему ориентация границы в классических формулировках точно такая, которая индуцируется на крае многообразия из ориентации многообразия?

Задача 4. Доказать, что связное многообразие или неориентируемо, либо допускает ровно две ориентации.

Задача 5. Пусть M гладкое многообразие размерности n . Доказать, что если на M существует не обращающаяся в ноль дифференциальная n -форма, то многообразие ориентируемо.

Задача 6. Рассмотрим атлас на многообразии. Назовём упорядоченное множество карт (U_i, φ_i) , $i = 1, \dots, n$, дезориентирующей цепочкой карт, если для

любого $i = 1, \dots, n-1$ пересечение $U_i \cap U_{i+1}$ непусто, якобиан замены координат на этом пересечении положителен, пересечение $U_n \cap U_1$ тоже непусто, но якобиан замены координат на этом пересечении отрицателен. Доказать, что если на многообразии есть дезориентирующая цепочка карт, то многообразие неориентируемо.

Задача 7. Построить на листе Мёбиуса атлас с дезориентирующей цепочкой карт. Вывести из этого, что лист Мёбиуса неориентируем.

Задача 8. Найти с помощью теоремы Стокса интеграл по сфере радиуса 1 от формы

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

из предыдущего семинара.

Задача 9. На прошлом семинаре был вычислен интеграл

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении. Заметим, что интегрируемая форма — это просто $d\varphi$, где φ — полярный угол. Почему полученный ненулевой результат не противоречит теореме Стокса?

Задача 10*. Доказать, что проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема.

Задачи для семинара № 11

Риманова метрика, форма объёма. Тензоры и тензорные поля

Задача 1. Найти на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданной стандартным уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, индуцированную риманову метрику, то есть первую квадратичную форму, в сферических координатах φ, ψ на сфере. Проверить, что поворот сферы на угол α вокруг оси Oz является изометрией сферы. Найти форму объёма и площадь сферы $\text{Vol}(\mathbb{S}^2)$.

Задача 2. Доказать, что на любом многообразии можно ввести риманову метрику.

Задача 3. Доказать, что на n -мерном многообразии M существует дифференциальная n -форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда M ориентируемо.

Задача 4. Пусть $f : M \rightarrow N$ гладкое отображение многообразия M в риманово многообразие N с римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle^N$. Доказать, что введённая на M по формуле

$$\langle X, Y \rangle_A^M = \langle d_A f(X), d_A f(Y) \rangle_{f(A)}^N$$

билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ является римановой метрикой тогда и только тогда, когда в любой точке дифференциал df инъективен.

Задача 5. Пусть V векторное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$, а $e^1, \dots, e^n$ соответствующий двойственный базис в V^* . Доказать, что тогда полилинейные функции

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

где $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, n$, образуют базис в пространстве $T_q^p V$ тензоров типа $\binom{p}{q}$, то есть пространстве полилинейных функций от p ковекторов и q векторов. Какова размерность пространства $T_q^p V$? Пространство $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций от k векторов из векторного пространства V является подпространством пространства тензоров $T_k^0 V$. Доказать, что связь между базисами в этих пространствах выражается формулой

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn } \pi e^{i_{\pi(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\pi(k)}}.$$

Пространство S^2V^* симметрических полилинейных функций от 2 векторов из векторного пространства V , то есть симметрических билинейных форм, является подпространством пространства тензоров T_2^0V . Доказать, что в качестве базиса в S^2V^* можно взять

$$e^i \cdot e^j = \frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Какова размерность пространства S^2V^* ?

Задача 6. Мы определяли тензоры как полилинейные функции от ковекторов и векторов, а тензорное произведение формулой

$$(S_1 \otimes S_2)(\xi_1, \dots, \xi_{p_1+p_2}, v_1, \dots, v_{q_1+q_2}) = \\ = S_1(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, v_1, \dots, v_{q_1}) S_2(\xi_{p_1+1}, \dots, \xi_{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \dots, v_{q_1+q_2}).$$

Вывести из этого, что для координат этих тензоров верно равенство

$$(S_1 \otimes S_2)_{j_1, \dots, j_{q_1+q_2}}^{i_1, \dots, i_{p_1+p_2}} = (S_1)_{j_1, \dots, j_{q_1}}^{i_1, \dots, i_{p_1}} (S_2)_{j_{q_1+1}, \dots, j_{q_1+q_2}}^{i_{p_1+1}, \dots, i_{p_1+p_2}}.$$

Задача 7. Доказать, что свертка тензора по одному из верхних и одному из нижних индексов является тензором. Как записать свертку, если рассматривать тензор как полилинейную функцию от ковекторов и векторов? Почему свертка не зависит от выбора базиса?

Задача 8. Доказать, что отождествление V и V^* при наличии евклидова скалярного произведения в V — это в точности операции опускания и подъёма индекса.

Задача 9. Являются ли корректно определёнными тензорными полями на многообразии величины, определённые в произвольных локальных координатах как

- a) $T_j^i = \delta_j^i$,
- b) $T_{ij} = \delta_{ij}$,
- c) $T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$,
- d) $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$,

где f — некоторая гладкая функция?

Задача 10. Пусть T_{ij} тензор типа $\binom{0}{2}$ такой, что $\det T_{ij} \neq 0$. Пусть T^{ij} обозначает элементы матрицы, обратной к T_{ij} . Доказать, что тогда T^{ij} является тензором типа $\binom{2}{0}$.

Задачи для семинара № 12

Производная Ли тензорных полей. Конструкции многообразий.

Погружения, подмногообразия и вложения.

Задача 1. Найти явную формулу для производной Ли $L_X T$ тензорного поля T типа $\binom{1}{1}$, то есть поля операторов, вдоль векторного поля X . Найти явную формулу для производной Ли $L_X dVol$ формы объёма $dVol = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ вдоль векторного поля X на ориентированном римановом многообразии с римановой метрикой $g = g_{ij} dx^i dx^j$ в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$.

Задача 2. Доказать, что на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной декартовой системой координат Oxy векторные поля

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

являются киллинговыми. Доказать, что линейная комбинация двух киллинговых векторных полей тоже является полем Киллинга. Вывести из этого, что векторное поле $Z = X + Y$ тоже киллингово. Найти соответствующие векторным полям X , Y и Z однопараметрические группы диффеоморфизмов.

Задача 3. Пусть M и N гладкие многообразия. Ввести структуру гладкого многообразия на декартовом произведении $M \times N$.

Задача 4. По аналогии с введённой на лекции структурой гладкого многообразия на касательном расслоении $TM = \bigsqcup_{A \in M} T_A M$ к многообразию M ввести структуру гладкого многообразия на кокасательном расслоении $T^*M = \bigsqcup_{A \in M} T_A^* M$ к многообразию M .

Задача 5. Приведите пример подмножества $\mathbb{R}^1$, не являющегося подмногообразием $\mathbb{R}^1$. Аналогичный вопрос для $\mathbb{R}^2$.

Задача 6. Пусть M гладкое многообразие, а A подмножество M . Фиксируем топологию на A . Доказать, что тогда на A существует не более одной дифференцируемой структуры, такой, что (A, i) — подмногообразие в M , где i — отображение вложения.

Задача 7. Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p \iota : T_p N \rightarrow T_{\iota(p)} M$ мономорфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_p N$ с $d_p \iota(X) \in T_{\iota(p)} M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N , подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)} N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$. Доказать, что коммутатор двух векторных полей на M , касательных к подмногообразию N , — тоже векторное поле, касательное к N .

Задача 8. Доказать, что открытая область U многообразия M является многообразием. Является ли естественное отображение $i : U \rightarrow M$ погружением? Является ли (U, i) подмногообразием? Является ли U вложенным подмногообразием?

Задача 9. Пусть N — связное подмножество n -мерного многообразия M , обладающее таким свойством: у любой точки $A \in M$ существует такая окрестность U с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$, что или $N \cap U = \emptyset$, или $N \cap U$ задаётся в U как решение системы гладких уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \vdots \\ f_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

полного ранга, то есть $\text{rk} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) = n - k$. Доказать, что на N есть такая структура гладкого многообразия, что естественное отображение $i : N \rightarrow M$ является вложением. Всякое ли вложенное подмногообразие может быть получено таким образом?

Задача 10. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}^2$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Доказать, что φ — погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{T}^2$ (оно называется плотной обмоткой тора). Является ли $(\mathbb{R}, \varphi)$ подмногообразием? Вложенным подмногообразием?

Задачи для семинара № 13 Связности на многообразиях

Задача 1. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 2. Найти символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на сфере единичного радиуса в трёхмерном евклидовом пространстве. В качестве координат взять широту и долготу.

Задача 3. Найти для разминки явную формулу для ковариантной производной от билинейной формы q_{ij} и поля операторов A_i^j . После этого найти явную формулу для ковариантной производной тензорного поля произвольного типа $\binom{p}{q}$.

Задача 4. Пусть M — риманово многообразие, то есть многообразие с заданной римановой метрикой g . Мы определяли согласованность связности ∇ с метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ как выполнение для любой пары векторных полей X, Y и Z тождества $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$. Доказать, что согласованность связности с метрикой эквивалентно тождеству $\nabla g = 0$, выписать его в явном виде через g_{ij} .

Задача 5. Вывести закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат. Является ли символ Кристоффеля тензором типа $\binom{1}{2}$? Пусть даны символы Кристоффеля Γ_{jk}^i и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ двух связностей на многообразии M . Доказать, что их разность $T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^i$ является тензором.

Задача 6. Пусть M — многообразие, а ∇ — произвольная связность. Определим формулой $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ кручение связности ∇ . Проверьте, что кручение определяет тензор типа $\binom{1}{2}$, называемый тензором кручения связности ∇ . Проверьте, что этот тензор кососимметричен по нижним индексам. Заметим, что симметричность связности равносильна нулевому кручению. Доказать, что связность симметрическая тогда и только тогда, когда в локальных координатах $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Задача 7. Пусть M риманово многообразие, а ∇^M — связность Леви-Чивиты на нём. Пусть $N \subset M$ — подмногообразие. Индуцируем на N риманову метрику, и пусть $P_A : T_A M \rightarrow T_A N$ поле ортогональных проекторов P . Докажите, что связность Леви-Чивиты на N можно найти по формуле

$$\nabla_X^N Y = P(\nabla_X^M Y).$$

Задача 8. Для векторного поля X на римановом многообразии определим его дивергенцию $\operatorname{div} X$ формулой

$$\operatorname{div} X = X_{;i}^i = \sum_i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i,$$

где ∇ — связность Леви-Чивиты метрики. Найдите дивергенцию векторного поля для евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 9. Градиент $\operatorname{grad} f$ функции f — это векторное поле, полученное из дифференциала функции f подниманием индекса. Определим оператор Лапласа-Бельтрами от функции f формулой

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Найдите оператора Лапласа-Бельтрами на евклидовой плоскости в полярных координатах.

Задача 10*. Доказать, что $\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det g} X^i)$.

Задачи для семинара № 14 Связности. Параллельный перенос

Задача 1. Найти результат параллельного переноса вдоль кривой на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$ а) касательного вектора, параллельного оси цилиндра, и б) касательного вектора, ортогонального оси цилиндра. Как параллельный перенос зависит от кривой?

Задача 2. На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели с широтой $\psi = \psi_0$? Решить явно дифференциальное уравнение параллельного переноса.

Задача 3. Как устроен параллельный перенос на круговом конусе? *Указание: как связаны метрики на конусе и его развертке?*

Задача 4. Доказать, что если две поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Задача 5. Решить задачу 2 с помощью задач 4, 1 и 3, не решая явно дифференциальное уравнение параллельного переноса на сфере.

Задача 6. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов. *Указание: используйте задачи 4, 1 и 3.*

Задача 7. Доказать, что X — киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для любых векторных полей Y и Z и связности Леви-Чивиты верно равенство

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0.$$

Задача 8. Доказать, что X — киллингово векторное поле тогда и только тогда, когда для связности Леви-Чивиты верно равенство

$$X_{j;i} + X_{i;j} = 0.$$

Задачи для семинара № 15 Геодезические

Задача 1. Доказать, что если прямая лежит на поверхности в евклидовом пространстве, то она будет геодезической на этой поверхности.

Задача 2. Описать геодезические на круговом цилиндре и круговом конусе в трёхмерном евклидовом пространстве. Опишите круговые конусы, на которых существуют самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развертку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Задача 3. Найти результат параллельного переноса вектора $(0, 1, 1)$ из точки $(1, 0, 0)$ однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точку $(1, -1, 1)$ вдоль прямолинейной образующей $x = 1$, $y + z = 0$. *Указание: воспользуйтесь тем, что прямая на поверхности является геодезической, а поле скоростей геодезической параллельно вдоль неё.*

Задача 4. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ касаются по кривой, то есть в точках этой кривой касательные плоскости обеих поверхностей совпадают, а кривая — геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 5. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

Задача 6. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической? Для геодезических на поверхности вращения получить соотношение между r и α , где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 7. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \rightarrow M$ не является а) сюръективным, б) инъективным.

Задача 8. Докажите, что при достаточно малых $\delta > 0$ геодезическая $\exp_A tv$ и называемое геодезической сферой радиуса δ с центром в точке A подмногообразие $\exp_A(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_A M \mid |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 9. Рассмотрим геодезические координаты $x^1, \dots, x^n$ на римановом многообразии, центрированные в точке A , то есть определённые с помощью отображения $\exp_A$.

Доказать, что в этих геодезических координатах геодезические, проходящие через точку A , имеют вид $x^i = a^i t$, где a^i — некоторые константы.

Доказать, что в этих координатах символы Кристоффеля в точке A обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Доказать, что центрированные в точке A координаты $x^1, \dots, x^n$, то есть такие координаты, что $A = (0, \dots, 0)$, определённые в окрестности $U \ni A$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке A , тогда и только тогда, когда $\Gamma_{jk}^i x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \dots, x^n$ в U .

Задача 10*. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского как непараметризованные кривые. Можно взять любую из моделей плоскости Лобачевского, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Указание. Очевидно, что $I_1 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$ является первым интегралом. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите $y(x)$.

Задачи для семинара № 16 Геодезические. Тензор кривизны Римана, тензор Риччи, скалярная кривизна.

Задача 1. Докажите, что на римановом многообразии в полугеодезических координатах $x^1, \dots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}, x^n = t$ являются геодезическими с натуральным параметром t .

Задача 2. Доказать, что сферические координаты в трёхмерном евклидовом пространстве являются полугеодезическими.

Задача 3. Найдите длину геодезической $\exp_A tX$, где $X \in T_A M$, от точки A до точки $\exp_A t_0 X$.

Задача 4. Выведите из определения тензора кривизны Римана явное выражение для компонент $R_{ij,k}^l$ тензора Римана через символы Кристоффеля Γ_{ij}^k .

Задача 5. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R_{12,2}^1$.

Задача 6. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество для скалярной кривизны $R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

Задача 7. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивиты является симметрическим, $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$.

Задача 8. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $\text{Ric}(X, Y)$ — тензор Риччи, а K гауссова кривизна M . Доказать, что в данном случае $\text{Ric}(X, Y) = K \langle X, Y \rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = K g_{ij}$. Доказать, что скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 9. Доказать, что для n -мерной сферы $\mathbb{S}_r^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r с индуцированной метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Задача 10*. Доказать, что для двумерной поверхности M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой верна формула

$$\langle R(X, Y)Z, V \rangle = \Pi(Y, Z)\Pi(X, V) - \Pi(X, Z)\Pi(Y, V),$$

где Π — вторая квадратичная форма.

Задачи для семинара № 17 **Когомологии де Рама.**

Задача 1. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение). Докажите, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

Задача 2. Найдите когомологии плоскости без одной точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Задача 3. Найдите когомологии цилиндра $Z \subset \mathbb{R}^3$.

Задача 4. Найдите когомологии $\mathbb{S}^2$.

Задача 5. Найдите когомологии двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

Задача 6. Найдите когомологии $\mathbb{R}P^2$.