

Программа курса
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2020
Лектор А.В.Пенской

1. Аффинные пространства и области аффинного пространства. Декартовы и криволинейные координаты. Регулярные гладкие k -мерные параметризованные поверхности в n -мерном евклидовом пространстве. Локальные координаты на поверхности и глобальные координаты в объемлющем пространстве. Замена локальных координат на регулярных гладких поверхностях в аффинном пространстве, её гладкость.

2. Гладкие функции на регулярных гладких поверхностях в аффинном пространстве как гладкие в локальных координатах и как ограничения гладких функций на объемлющем пространстве на поверхность.

3. Теорема о неявной функции (без доказательства). Регулярные гладкие k -мерные неявно заданные поверхности в n -мерном евклидовом пространстве. Утверждение о том, что локально неявно заданная регулярная гладкая поверхность может рассматриваться как параметризованная.

4. Карты, согласованность карт, атласы, эквивалентность атласов, максимальный атлас, гладкая структура, гладкое многообразие. Пример нехаусдорфова многообразия (прямая с двойной точкой). Пример гладкого многообразия: проективная плоскость и проективное пространство: однородные координаты, аффинные карты и неоднородные координаты, замена неоднородных координат.

5. Гладкие функции на гладких многообразиях и гладкие отображения гладких многообразий. Запись в локальных координатах. Композиция гладких отображений. Диффеоморфизмы.

6. Векторы в n -мерном аффинном пространстве как 1) соответствующие (криволинейной) системе координат n -ки координат, преобразующиеся по некоторому закону при замене координат и 2) как дифференцирования бесконечно гладких функций. Касательные векторы к регулярной гладкой k -мерной поверхности в n -мерном аффинном пространстве, касательное пространство в данной точке к поверхности. Касательные векторы к поверхности как 1) соответствующие локальной системе координат наборы координат, преобразующиеся по некоторому закону при замене локальных координат и 2) как дифференцирования бесконечно гладких функций. Касательные векторы на многообразии как 1) соответствующие локальной системе координат n -ки координат, преобразующиеся по некоторому закону при замене координат и 2) как дифференцирования бесконечно гладких функций.

7. Векторные поля, гладкие векторные поля. Коммутатор векторных полей. Базис $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в векторных полях.

8. Интегральные кривые векторного поля, однопараметрическая группа диффеоморфизмов.

9. Дифференциал отображения многообразий, явные формулы в локальных координатах. Дифференциал функции как ковектор. Дифференциальные 1-формы. Базис $dx^1, \dots, dx^n$ в 1-формах. Его двойственность базису $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в векторных полях.

10. Кососимметрические полилинейные функции на векторном пространстве. Внешнее умножение кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве. Свойства внешнего умножения кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве. Коммутативная градуированная алгебра кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве. Базис в пространстве кососимметрических полилинейных функций

на векторном пространстве от k аргументов. Контракция (внутреннее умножение) кососимметрической полилинейной функции от векторов с вектором и ее свойства. Дифференциальные k -формы. Алгебраические (поточечные) операции с дифференциальными формами: сложение, умножение на функцию, внешнее умножение, контракция с векторным полем. Запись дифференциальных форм в локальных координатах.

11. Обратный образ формы и его свойства. Внешний дифференциал и его свойства.

12. Производная Ли, её свойства. Дифференцирование градуированной алгебры. Контракция, производная Ли и дифференциал как дифференцирования степени $-1, 0, +1$ градуированной алгебры дифференциальных форм.

13. Коммутирование производной Ли с дифференциалом, тождество цепной гомотопии Картана.

14. Формула для производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

15. Формула для внешнего дифференциала дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

16. Разбиение единицы, разбиение единицы, подчинённое покрытию и разбиение единицы, подчинённое покрытию с тем же множеством индексов. Теорема о существовании разбиения единицы.

17. Преобразование форм старшей степени при замене координат. Ориентация области в аффинном пространстве или регулярной гладкой поверхности в аффинном пространстве. Интегрирование дифференциальных форм по области в аффинном пространстве и по регулярной гладкой поверхности в аффинном пространстве. Ориентированный атлас, ориентируемое многообразие, ориентированное многообразие. Интеграл дифференциальной формы старшей размерности по ориентированному многообразию, его независимость от выбора атласа и подчиненного ему разбиения единицы. Связь с криволинейным и поверхностным интегралами второго рода из анализа.

18. Многообразие с краем. Край как многообразие. Ориентация края, индуцированная ориентацией многообразия с краем. Теорема Стокса.

19. Первая квадратичная форма на поверхностях, риманова метрика, римановы многообразия. Запись римановой метрики в координатах, преобразование при замене координат. Изометрические отображения. Изометрии, изометрические римановы многообразия. Индуцированная отображением метрика.

20. Форма объёма. Интегрирование формы объёма, объём многообразия. Интегрирование функций с помощью формы объёма. Связь с криволинейными и поверхностными интегралами первого рода из анализа.

21. Тензоры в линейной алгебре. Базис, координаты в базисе, преобразование при замене базиса. Частные случаи кососимметрических и симметрических полилинейных форм. Алгебраические операции: сумма, умножение на число, структура векторного пространства, тензорное произведение, свертка по паре индексов, подъем и опускание индекса при наличии скалярного произведения. Тензорные поля. Производная Ли векторных полей. Производная Ли произвольных тензоров. Векторные поля Киллинга.

22. Декартово произведение многообразий. Касательное и кокасательное расслоение.

23. Погружение, подмногообразие, вложение, примеры. Пример неединственности структуры подмногообразия на подмножестве многообразия. Теорема о пропуске отображения через подмногообразие. Эквивалентные подмногообразия.

24. Связность (ковариантное дифференцирование): ковариантная производная векторного поля вдоль вектора и вдоль векторного поля. Символы Кристоффеля, вычисление связности в координатах. Ковариантная производная

тензорных полей произвольного типа.

25. Симметрические связности, симметрия их символов Кристоффеля по нижним индексам в базисе $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Согласованность связности с римановой метрикой. Связность Леви-Чивиты. Теорема Леви-Чивиты (включая явные формулы для связности Леви-Чивиты). Связь симметрической ковариантной производной и производной Ли.

26. Параллельный перенос в евклидовом пространстве. Параллельное вдоль кривой векторное поле на поверхности в евклидовом пространстве. Уравнение параллельного переноса. Параллельное вдоль кривой векторное поле на многообразии со связностью. Теорема о существовании и единственности параллельного вдоль кривой векторного поля с заданным вектором в начальной точке. Параллельный перенос вектора из начальной точки в конечную вдоль соединяющей их кривой на многообразии со связностью, существование и единственность результата параллельного переноса вдоль кривой.

27. Сохранение длин и углов при параллельном переносе на римановом многообразии со связностью Леви-Чивиты.

28. Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезические на поверхности, уравнение геодезических. Геодезические на римановом многообразии, уравнение геодезических, его запись в локальных координатах. Существование и единственность геодезических.

29. Геодезические и параллельный перенос. Сохранение длины касательного вектора геодезической. Утверждение о том, что параметр на геодезической является аффинным натуральным параметром.

30. Экспоненциальное отображение и его свойства. Построение геодезической через экспоненту.

31. Геодезические координаты. Три свойства прямых в евклидовой геометрии. Контрпримеры к этим трём свойствам для геодезических на римановых многообразиях.

32. Теорема Уайтхеда о нормальной окрестности.

33. Полугеодезические координаты. Геодезические сферы. Построение полугеодезических координат с помощью геодезических и геодезических сфер. Свойство геодезической быть локально кратчайшей.

34. Тензор кривизны Римана $R(X, Y)Z$ на римановом многообразии, его симметрии. Связь с параллельным переносом (без доказательства). Тензор Риччи, скалярная кривизна, секционная кривизна.