

Программа курса  
«Классическая дифференциальная геометрия»  
лектор И.А.Дынников  
весенний семестр 2018–2019 учебного года

1. Дифференцируемая функция многих переменных. Дифференциал. Касательный вектор. Теоремы о неявном и обратном отображениях. Локальные координаты
  - определения дифференцируемой функции, дифференциала
  - касательный вектор как дифференциал и как оператор дифференцирования по направлению
  - формулировки теорем о неявном и обратном отображениях
  - понятия параметризации и локальных координат
2. Понятие кривой. Параметризация. Регулярная параметризация. Гладкие и кусочно-гладкие кривые
  - определения простой дуги, параметризованной простой дуги, гладкой простой дуги
  - определение параметризованной кривой
  - определения кривой, гладкой кривой, кусочно-гладкой кривой
  - утверждение о гладкости замены параметра между двумя регулярными параметризациями
3. Задание кривых в  $\mathbb{R}^n$  системами уравнений
  - утверждение о том, что система из  $n-1$  уравнений на  $n$  неизвестных при условии гладкости и регулярности локально задает гладкую кривую, и о возможности локального задания любой гладкой кривой с помощью такой системы
  - утверждение о параметризации гладкой кривой в  $\mathbb{R}^n$  одной из координат
4. Касательная прямая к гладкой кривой
  - определение касательной прямой
  - существование касательной к гладкой кривой в любой точке
  - характеристическое свойство касательной прямой — точки кривой «ближе» к касательной, чем к точке касания
  - задание касательной системой уравнений в случае, когда кривая задана системой уравнений
5. Соприкосновение гладких кривых. Точки спрямления
  - определение соприкосновения порядка  $m$
  - характеристика соприкасающихся кривых в терминах расстояния точек одной кривой до другой
  - определение точки спрямления
  - критерий того, что точка кривой является точкой спрямления, в терминах векторов скорости и ускорения
  - утверждение о кривых, состоящих целиком из точек спрямления
6. Соприкасающаяся окружность. Кривизна гладкой кривой
  - определение соприкасающейся окружности
  - доказательство корректности определения
  - определение кривизны, вектора кривизны
  - выражения кривизны и вектора кривизны через произвольную регулярную параметризацию кривой
7. Натуральный параметр. Длина дуги. Формула для кривизны в натуральной параметризации
  - определение натуральной параметризации
  - существование натуральной параметризации гладкой кривой
  - неоднозначность выбора натурального параметра
  - формула для вычисления длины гладкой кривой в произвольной параметризации
  - формула для кривизны в натуральной параметризации, геометрический смысл кривизны как скорости вращения касательного вектора
8. Кривизна со знаком и формулы Френе плоской кривой

- определение коориентации плоской кривой
  - формулы Френе для плоской кривой
  - теорема об однозначном восстановлении плоской кривой с точностью до движения по функции кривизны
9. Формулы Френе пространственной кривой. Кручение
    - определение базиса Френе пространственной кривой
    - формулы Френе, кручение
    - критерий того, что кривая без точек спрямления является плоской, в терминах кручения
    - формула для кручения в случае произвольной регулярной параметризации
  10. Восстановление кривой в  $\mathbb{R}^3$  по кривизне и кручению
    - лемма о производной ортогональной матрицы по параметру
    - утверждение об однозначном восстановлении кривой с точностью до движения по функциям кривизны и кручения
  11.  $k$ -Регулярность. Многомерные формулы Френе
    - определение  $k$ -регулярной параметризации кривой
    - утверждение о независимости свойства  $k$ -регулярности от выбора регулярной параметризации
    - определение базиса Френе для кривой в  $\mathbb{R}^n$  (сначала для  $n$ -регулярной кривой, затем для  $(n - 1)$ -регулярной кривой)
    - формулы Френе для кривой в  $\mathbb{R}^n$
  12. Проекция кривой в  $\mathbb{R}^3$  на трехгранник Френе
    - характеристика нормальной плоскости в терминах проекции кривой на нее
    - определение спрямляющей плоскости
    - характеристика спрямляющей плоскости в терминах проекции кривой на нее
    - определение соприкасающейся плоскости
    - геометрическая характеристика соприкасающейся плоскости
  13. Эволюта и эвольвента гладкой плоской кривой
    - определение эволюты
    - определение огибающей семейства прямых
    - утверждение об огибающей семейства нормалей к гладкой кривой
    - определение эвольвенты
    - утверждение о связи понятий эволюты и эвольвенты
  14. Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру
    - утверждение о возможных значениях интеграла кривизны по коориентированной замкнутой гладкой кривой
    - определение числа вращения
    - утверждение об интеграле кривизны замкнутой несамопересекающейся кусочно-гладкой кривой
  15. Гладкие поверхности в  $\mathbb{R}^3$ . Локальные координаты. Способы задания поверхностей
    - определение простого куска поверхности в  $\mathbb{R}^3$
    - определение гладкой параметризации простого куска поверхности
    - определение гладкой поверхности в  $\mathbb{R}^3$
    - определение граничной и внутренней точки поверхности
    - утверждение о возможности регулярной параметризации поверхности с помощью пары координат в  $\mathbb{R}^3$
    - утверждение о гладкости функций перехода между регулярными параметризациями
    - понятие гладкой функции на поверхности
    - утверждение о возможности локального задания поверхности в  $\mathbb{R}^3$  одним уравнением
  16. Касательная плоскость к гладкой поверхности
    - определение касательного вектора к гладкой поверхности
    - утверждение о том, что множество касательных векторов в фиксированной точке поверхности образуют плоскость, и базисе в этой плоскости
    - определение касательной плоскости и аффинной касательной плоскости к поверхности
    - геометрическая характеристика аффинной касательной плоскости

- уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной одним уравнением
17. Первая фундаментальная форма. Длина кривой на поверхности. Площадь поверхности
    - определение первой фундаментальной формы
    - выражение первой фундаментальной формы в локальных координатах поверхности
    - формула для вычисления длины кривой, заданной в локальных координатах поверхности
    - формула для вычисления площади поверхности
  18. Вторая фундаментальная форма. Кривизна нормального сечения
    - утверждение о нормальной составляющей ускорения кривой на поверхности, имеющей в данной точке данный вектор скорости
    - определение второй фундаментальной формы
    - определение кривизны нормального сечения
    - утверждение о связи кривизны нормального сечения со значениями первой и второй квадратичных форм
  19. Главные кривизны. Формула Эйлера
    - формулировка утверждения о приведении пары квадратичных форм к диагональному виду
    - определение главных кривизн и главных направлений
    - утверждение о приближении поверхности параболоидом
    - формула Эйлера для кривизны нормального сечения
  20. Деривационные формулы Вайнгартена. Сферическое отображение. Гауссова кривизна
    - деривационные формулы Вайнгартена
    - характеристика плоских поверхностей в терминах второй фундаментальной формы
    - определение сферического отображения
    - утверждение о связи деривационных формул Вайнгартена и дифференциала сферического отображения
    - утверждение о связи собственных чисел оператора Вайнгартена и главных кривизн
    - определение гауссовой кривизны
    - геометрический смысл гауссовой кривизны в терминах сферического отображения
  21. Развертывающиеся поверхности как поверхности нулевой кривизны
    - определение линейчатой поверхности
    - определение изометрии поверхностей
    - определение развертывающейся поверхности
    - лемма о возможности выбора локальной системы, в которой один из базисных векторов является единичным вектором главного направления всюду, а второй — вдоль одной координатной линии
    - теорема о строении поверхностей всюду нулевой гауссовой кривизны
    - цилиндрические, конические поверхности и развертывающиеся поверхности с ребром возврата
  22. Линии кривизны. Омбилические точки
    - определение линии кривизны
    - характеристика линий кривизны через поверхность, образуемую семейством нормалей
    - определение омбилической точки
    - утверждение о строении поверхности, целиком состоящей из омбилических точек
  23. Средняя кривизна. Минимальные поверхности
    - определение средней кривизны
    - определение минимальной поверхности
    - лемма о вариации  $\sqrt{g}$  при вариации поверхности
    - характеристика минимальных поверхностей в терминах средней кривизны
  24. Теорема Менье. Поверхности вращения
    - теорема Менье
    - определение поверхности вращения
    - утверждение о расположении центров кривизны параллелей поверхности вращения
  25. Деривационные формулы Гаусса. Тожества Кристоффеля
    - деривационные формулы Гаусса, определение символов Кристоффеля

- лемма о выражении производных коэффициентов первой фундаментальной формы через символы Кристоффеля
  - тождества Кристоффеля
26. Совместность пары обыкновенных дифференциальных уравнений
- постановка задачи о совместности пары обыкновенных дифференциальных уравнений
  - теорема о необходимом и достаточном условии совместности
27. Коммутатор векторных полей на поверхности
- определение векторного поля на поверхности
  - условие совместности уравнений, заданных двумя векторными полями
  - определение коммутатора векторных полей, проверка его корректности
  - критерий того, когда два векторных поля могут быть базисными векторными полями локальной системы координат на поверхности
28. Теорема Бонне
- запись деривационных формул в матричном виде
  - матричный вид условия совместности деривационных уравнений
  - теорема Бонне об однозначном восстановлении поверхности с точностью до движения по первой и второй квадратичным формам при выполнении условия совместности
29. Уравнения Гаусса–Кодацци. Теорема Гаусса
- система уравнений Гаусса–Кодацци, подсчет числа независимых уравнений в ней
  - теорема Гаусса о выражении гауссовой кривизны через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные
  - следствие о сохранении гауссовой кривизны при изометриях
30. Асимптотические линии. Поверхности постоянной отрицательной кривизны
- определение асимптотического вектора и асимптотической линии на поверхности
  - утверждение о приведении первой и второй квадратичных форм поверхности постоянной отрицательной кривизны к специальному виду, в котором координатные линии являются асимптотическими
  - сведение классификации поверхностей постоянной отрицательной кривизны к решению уравнения синус-Гордон
31. Геодезическая кривизна. Геодезические линии. Примеры геодезических. Интеграл Клеро
- определение геодезической кривизны, вектора геодезической кривизны
  - определение геодезической линии на поверхности
  - критерий того, что линия является геодезической, в терминах ее главной нормали
  - прямые линии как примеры геодезических на содержащих их поверхностях
  - теорема Клеро о геодезических на поверхности вращения
32. Уравнение геодезических. Продолжаемость геодезических
- формула для вектора геодезической кривизны кривой, заданной натуральной параметризацией в локальных координатах поверхности
  - утверждение о сохранении геодезической кривизны при изометрии
  - уравнение геодезической для параметризации, пропорциональной натуральной
  - утверждение о продолжаемости решения уравнения геодезической до выхода на край поверхности или до бесконечности
33. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Геодезические как экстремали функционала действия
- постановка вариационной задачи, функционал действия
  - определение экстремали функционала действия
  - вывод уравнений экстремалей
  - утверждение об экстремальности геодезических
34. Экспоненциальное отображение. Локальные свойства геодезических
- утверждение об однородности решения уравнения геодезических, выходящих из фиксированной точки, по начальному вектору
  - определение экспоненциального отображения
  - лемма о дифференциале экспоненциального отображения
  - утверждение о том, что экспоненциальное отображение является локальным диффеоморфизмом

- обобщенная полярная система координат
  - свойства метрических коэффициентов в обобщенной полярной системе координат
  - утверждение о том, что достаточно близкие точки соединяются единственной геодезической, и она реализует кратчайшее расстояние между ними
35. Полугеодезические координаты. Метрики постоянной кривизны
- определение полугеодезической системы координат
  - построение полугеодезической системы координат
  - формула для гауссовой кривизны в полугеодезической системе координат
  - приведение метрик постоянной гауссовой кривизны  $K$  к специальному виду, зависящему только от  $K$
  - утверждение о локальной изометричности поверхностей, имеющих одинаковую постоянную гауссову кривизну
36. Метрики сферы и плоскости Лобачевского
- определение плоскости Лобачевского
  - линии постоянной геодезической кривизны на сфере и плоскости Лобачевского
  - системы координат на сфере и вид метрики в них: сферические координаты, стереографическая проекция
  - системы координат на плоскости Лобачевского и вид метрики в них: системы координат Лобачевского и Пуанкаре, обобщенная полярная и орициклическая системы координат
37. Ковариантная производная векторного поля вдоль пути и ее свойства
- понятие векторного поля вдоль пути
  - утверждение о касательной и нормальной составляющих производной по параметру пути векторного поля вдоль пути
  - определение ковариантной производной векторного поля вдоль пути
  - свойства ковариантной производной: линейность и правило Ньютона–Лейбница
  - аналог формул Френе для кривой на поверхности
  - характеристика геодезических в терминах ковариантной производной
38. Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование
- определение параллельного переноса вектора вдоль пути
  - свойства параллельного переноса: линейность, сохранение скалярного произведения, независимость от параметризации кривой
  - определение ковариантной производной векторного поля по направлению
  - свойства ковариантной производной векторного поля по направлению: линейность, правило Ньютона–Лейбница для произведения векторного поля на функцию и скалярного произведения векторных полей
39. Интеграл геодезической кривизны по замкнутому контуру. Угловой дефект. Эйлера характеристика
- определение коориентированной кривой на поверхности
  - утверждение о равенстве скорости вращения вектора относительно ковариантно постоянного векторного поля вдоль кривой и геодезической кривизны
  - определение углового дефекта простого куска поверхности
  - формулировка утверждения о связи между двумя разрезаниями поверхности
  - определение Эйлеровой характеристики
  - связь суммарного углового дефекта поверхности и эйлеровой характеристики
40. Теорема Гаусса–Бонне
- формулировка теоремы Гаусса–Бонне и схема доказательства